N° d'ordre 2007-ISAL-0113 Année 2007

Thèse

CARACTERISATION MECANIQUE ET MODELISATION DU COMPORTEMENT JUSQU'A RUPTURE DE MEMBRANES BIOLOGIQUES FIBREUSES : APPLICATION A LA PEAU HUMAINE

présentée devant

L'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

pour obtenir le grade de

Docteur

Ecole doctorale :

Mécanique, Energétique, Génie Civil , Acoustique

Spécialité :

Mécanique

par

Clémentine JACQUEMOUD

le 17 décembre 2007 devant la Commission d'examen

Jury

HAFTEK Marek	Directeur de recherches	Président
COMBESCURE Alain	Professeur des universités	Directeur
VERRIEST Jean-Pierre	Directeur de recherches	Directeur
CHABRAND Patrick	Professeur des universités	Rapporteur
GORNET Laurent	Maître de conférence HDR	Rapporteur
GILCHRIST Michael D.	Professor	
Membres invités :	CAMBOU Bernard	Professeur des universités
	CORET Michel	Maître de conférence

INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales 2007

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
CHIMIE	**CHIMIE DE LYON** **http://sakura.cpe.fr/ED206** M. Jean Marc LANCELIN Insa : R. GOURDON	M. Jean Marc LANCELIN Université Claude Bernard Lyon 1 Bât CPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 13 95 Fax : lancelin@hikari.cpe.fr
E.E.A.	**ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE** **http://www.insa-lyon.fr/eea** M. Alain NICOLAS Insa : D. BARBIER ede2a@insa-lyon.fr Secrétariat : M. LABOUNE AM. 64.43 – Fax : 64.54	M. Alain NICOLAS Ecole Centrale de Lyon Bâtiment H9 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 60 97 Fax : 04 78 43 37 17 eea@ec-lyon.fr Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN
E2M2	**EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION** **http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2M2** M. Jean-Pierre FLANDROIS Insa : S. GRENIER	M. Jean-Pierre FLANDROIS CNRS UMR 5558 Université Claude Bernard Lyon 1 Bât G. Mendel 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.26 23 59 50 Fax 04 26 23 59 49 06 07 53 89 13 e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr
EDIIS	**INFORMATIQUE ET INFORMATION POUR LA SOCIETE** http://ediis.univ-lyon1.fr M. Alain MILLE Secrétariat : I. BUISSON	M. Alain MILLE Université Claude Bernard Lyon 1 LIRIS - EDIIS Bâtiment Nautibus 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 44 82 94 Fax 04 72 44 80 53 ediis@liris.cnrs.fr - alain.mille@liris.cnrs.fr
EDISS	**INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE** M. Didier REVEL Insa : M. LAGARDE	M. Didier REVEL Hôpital Cardiologique de Lyon Bâtiment Central 28 Avenue Doyen Lépine 69500 BRON Tél : 04.72.35 72 32 Fax : Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr
	MATERIAUX DE LYON M. Jean Marc PELLETIER Secrétariat : C. BERNAVON 83.85	M. Jean Marc PELLETIER INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Blaise Pascal 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.72.43 83 18 Fax 04 72 43 85 28 Jean-marc.Pelletier@insa-lyon.fr
Math IF	**MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE FONDAMENTALE** M. Pascal KOIRAN Insa : G. BAYADA	M.Pascal KOIRAN Ecole Normale Supérieure de Lyon 46 allée d'Italie 69364 LYON Cédex 07 Tél : 04.72.72 84 81 Fax : 04 72 72 89 69 Pascal.koiran@ens-lyon.fr Secrétariat : Fatine Latif - latif@math.univ-lyon1.fr
MEGA	**MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE** M. Jean Louis GUYADER Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12	M. Jean Louis GUYADER INSA de Lyon Laboratoire de Vibrations et Acoustique Bâtiment Antoine de Saint Exupéry 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél :04.72.18.71.70 Fax : 04 72 18 87 12 mega@lva.insa-lyon.fr
SSED	**SCIENCES DES SOCIETES, DE L'ENVIRONNEMENT ET DU DROIT** Mme Claude-Isabelle BRELOT Insa : J.Y. TOUSSAINT	Mme Claude-Isabelle BRELOT Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.69.72.76 Fax : 04.37.28.04.48 Claude-isabelle.brelot@univ-lyon2.fr

Remerciements

Mes premiers et plus vifs remerciements s’adressent tout naturellement à Karine Bruyère-Garnier et Michel Coret qui ont encadré cette thèse et avec qui j'ai eu un très grand plaisir à travailler, dans une constante bonne humeur. La liste des remerciements serait trop longue alors je résumerai en les remerciant pour leurs précieux conseils, leur constante disponibilité, leur motivation et leur soutient dans les moments de doute, leur grande compréhension et la confiance qu'ils m'ont toujours accordée dans mon travail. Enfin merci de m'avoir tant apporté tout au long de ce travail.

Je tiens à adresser ma sincère reconnaissance à Alain Combescure et Jean-Pierre Verriest qui ont accepté de diriger ce travail et m’ont accueillie au sein de leur laboratoire respectif. Je remercie plus particulièrement Alain Combescure pour le temps qu’il a gentiment consacré à nous éclairer entre autre sur les subtilités du pilotage en longueur d'arc et surtout pour son expertise, qu’il est toujours prêt à partager.

J'associe à ces remerciements Patrick Chabrand, Laurent Gornet, Michael Gilchrist et Bernard Cambou qui me font l'honneur d'examiner ce travail.

Je souhaite remercier chaleureusement toute l'équipe du LaMCoS, caractérisée par une incroyable disponibilité et une extrême convivialité, tellement appréciables face à tous les aléas d’une thèse.

J’adresse une vive reconnaissance à Michel Brunet, pour sa grande compréhension et sans qui ce travail n’aurait pas abouti. Il nous a généreusement livré tous les secrets des éléments finis non linéaires et je n’oublierai pas le temps qu’il a passé à décortiquer avec minutie chaque ligne de code. J’associe également à ces remerciements, Fabrice Morestin qui s'est gentiment laissé convaincre d'écrire la version incrémentale d'ICASOFT, indispensable à cette étude et dont les conseils en cosmétique m’ont été d’une grande aide. J’ai fortement apprécié tout le temps que Patrice Clerc nous a consacré, il a toujours répondu présent lorsque nous étions confrontés aux innombrables imprévus liés aux expérimentations. Merci encore à Antony Gravouil pour ses cours particuliers et à tous les autres qui de près ou de loin m’ont apporté leur soutient tout au long de ces années.

Milles mercis à toute l'équipe du LBMC/H et maintenant UNEX, sans oublier ceux qui sont partis depuis. La présence de chacun, tout au long de ces années, a été indispensable à la mise en place et à la réalisation de ces expérimentations contraignantes. Merci pour vos bonnes idées et votre aide sans quoi tous ces essais n'auraient pas été possibles. De l’équipe technique à la partie administrative, des chercheurs aux thésards, merci de m’avoir si gentiment accueillie, conseillée, épaulée tout au long de ce travail et bien sur divertie avec votre bonne humeur.

J’ai été très honorée que Marek Haftek se soit associé à ce travail, ce qui a permis l’ouverture de ces recherches vers une autre discipline. Il a tout de suite su nous donner des conseils précieux et éclairés en facilitant le dialogue entre personnes d’horizons différents. Pour tout cela, je le remercie vivement ainsi que tous les membres de son équipe pour leur accueil et le temps qu'ils m'ont consacré à chaque fois que je suis allée les solliciter au cours de ces années

Je tiens aussi à remercier Sylviane Guerret pour avoir mis à ma disposition son matériel de microscopie.

« erci » à Valentin pour m'avoir permis de « ne pas faire que ça » et pour avoir finalement su dire maman avant la fin de cette thèse, même si je n’ai pas pu passer beaucoup de temps avec lui. Merci à son papa pour l’avoir occupé pendant ces longs mois de rédaction et à toute ma famille qui m'a toujours soutenue.

Table des matières

Liste des symboles

Notations générales

Soit une variable V :

$\hat{V}$ = Variable virtuelle

${}_0^tV$ = Valeur de V entre les instants t_0 et t

Soit un tenseur **T** :

$\Delta\mathbf{T}$ = Tenseur des incréments de **T**

ΔT_{ij} = Composantes du tenseur $\Delta\mathbf{T}$

$\{\mathbf{T}\}$ = Matrice colonne des composantes du tenseur **T** écrite suivant la notation de Voigt

Notations des indices

Configuration actuelle : t

$j^{\text{ème}}$ itération d'équilibre

$${}_0^t\mathbf{F}^{(j)}$$

Configuration de référence : t_0

Symboles

$\Delta\mathbf{E}$ = Tenseur des incréments de déformations de Green-Lagrange entre les instants t et $t+\Delta t$

$\Delta\hat{\mathbf{E}}$ = Tenseur des incréments de déformations virtuelles de Green-Lagrange entre les instants t et $t+\Delta t$

$\Delta_t\mathbf{S}$ = Tenseur des incréments de contraintes de Piola-Kirchhoff II référencé en t

$\Delta_0\mathbf{S}$ = Tenseur des incréments de contraintes de Piola-Kirchhoff II référencé en t_0

$\Delta\mathbf{U}$ = Vecteur des incréments de déplacement entre les instants t et $t+\Delta t$ (valeurs aux nœuds)

$\Delta\mathbf{U_L}$ = Vecteur des incréments de déplacement linéaires entre les instants t et $t+\Delta t$ (valeurs aux nœuds)

$\Delta\mathbf{U_{NL}}$ = Vecteur des incréments de déplacement non linéaires entre les instants t et $t+\Delta t$ (valeurs aux nœuds)

$\Delta\mathbf{U_e}$ = Vecteur des incréments de déplacement élémentaire entre les instants t et $t+\Delta t$ (valeurs aux nœuds)

$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ = Tenseur des incréments de déformations entre les instants t et $t+\Delta t$ (partie linéaire des déformations de Green-Lagrange)

$\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ = Tenseur des incréments de déformations virtuelles entre les instants t et $t+\Delta t$ (partie linéaire des déformations de Green-Lagrange)

$\Delta\mathbf{n}$ = Tenseur des incréments de déformations entre les instants t et $t+\Delta t$ (partie quadratique des déformations de Green-Lagrange)

$\Delta\hat{\mathbf{n}}$ = Tenseur des incréments de déformations virtuelles entre les instants t et $t+\Delta t$ (partie quadratique des déformations de Green-Lagrange)

$\Delta\boldsymbol{\lambda}$ = Vecteur des incréments des multiplicateurs de Lagrange entre les instants t et $t+\Delta t$ (valeurs aux nœuds)

$\Delta\boldsymbol{\lambda}_B$ = Vecteur des incréments des multiplicateurs de Lagrange entre les instants t et $t+\Delta t$ (valeurs aux nœuds à déplacements imposés nuls)

$\Delta\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{L}B}$ = Vecteur des incréments des multiplicateurs de Lagrange linéaires entre les instants t et $t+\Delta t$ (valeurs aux nœuds à déplacements imposés nuls)

$\Delta\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{NL}B}$ = Vecteur des incréments des multiplicateurs de Lagrange non linéaires entre les instants t et $t+\Delta t$ (valeurs aux nœuds à déplacements imposés nuls)

$\hat{\boldsymbol{\Lambda}}$ = Vecteur des variations sur δt d'un champ virtuel de multiplicateurs de Lagrange (valeurs aux nœuds)

$\Delta\alpha$ = Incrément du facteur de charge

Ω = Configuration

$\boldsymbol{\beta}^{(j)}$ = Valeur des déplacements imposés à l'itération d'équilibre j

$\delta\hat{\mathbf{E}}$ = Vecteur des variations de déformations virtuelles de Green-Lagrange

$\delta\hat{\mathbf{U}}$ = Vecteur des variations des déplacements virtuels (valeurs aux nœuds)

$\delta\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ = Vecteur des variations d'un champ virtuel de multiplicateurs de Lagrange (valeurs aux nœuds)

$\boldsymbol{\varepsilon}$ = Tenseur des déformations linéaires de la membrane

$\boldsymbol{\lambda}$ = Champ des multiplicateurs de Lagrange (valeurs aux nœuds)

$\boldsymbol{\lambda}_B$ = Champ des multiplicateurs de Lagrange (valeurs aux nœuds à déplacements imposés nuls)

$\boldsymbol{\sigma}$ = Tenseur des contraintes de Cauchy de la membrane

$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{NL}}$ = Tenseur modifié des contraintes de Cauchy

α = Facteur de charge

ξ = Abscisse d'un point dans le repère de l'élément de référence

η = Ordonnée d'un point dans le repère de l'élément de référence

μ_R = Moyenne de la distribution R

σ_R = Ecart type de la distribution R

θ = Orientation d'une fibre = angle formé par les vecteurs $\mathbf{x_1}$ et $\mathbf{x_{f1}}$

${}_{0}\mathbf{A}$ = Module tangent de comportement en formulation Lagrangienne totale
${}_{t}\mathbf{A}$ = Module tangent de comportement en formulation Lagrangienne réactualisée
$\mathbf{B_L}$ = Matrice gradient linéaire
$\mathbf{B_{NL}}$ = Matrice gradient non linéaire
$\mathbf{C}$ = Tenseur des déformations de Cauchy-Green droit de la membrane
$\mathbf{C}_f$ = Tenseur des déformations de Cauchy-Green droit de la fibre
$\mathbf{E}$ = Tenseur des déformations de Green-Lagrange de la membrane
$\dot{\hat{\mathbf{E}}}$ = Tenseur des taux de déformation virtuelle de Green-Lagrange de la membrane
$\mathbf{F}$ = Tenseur gradient de la transformation de la membrane
$\mathbf{F_{ext}}$ = Vecteur des efforts extérieurs (valeurs nodales)
$\mathbf{F_{int}}$ = Vecteur des efforts internes (valeurs nodales)
$\mathbf{F}_{\mathbf{int}(e)}$ = Vecteur des efforts internes élémentaires (valeurs nodales)
$\mathbf{F_{liai}}$ = Vecteur des efforts de liaison (valeurs nodales)
$\mathbf{I}$ = Matrice unité
$\mathbf{J}$ = Matrice Jacobienne
$\mathbf{K}$ = Matrice de rigidité tangente de la membrane
$\mathbf{K_L}$ = Partie linéaire de la matrice de rigidité tangente de la membrane
$\mathbf{K_{NL}}$ = Partie non linéaire de la matrice de rigidité tangente de la membrane
$\mathbf{K}_e$ = Matrice de rigidité tangente élémentaire
$\mathbf{K}_{\mathbf{L}(e)}$ = Partie linéaire de la matrice de rigidité tangente élémentaire
$\mathbf{K}_{\mathbf{NL}(e)}$ = Partie non linéaire de la matrice de rigidité tangente élémentaire
$\mathbf{L}$ = Matrice contenant la réduction aux nœuds à déplacement imposé
$\mathbf{L}_B$ = Matrice contenant la réduction aux nœuds à déplacement imposé nul dit nœuds bloqués
$\mathbf{N}$ = Vecteur des fonctions de forme
$\mathbf{P_f}$ = Matrice de changement de repère
$\mathbf{Res}$ = Résidu
$\mathbf{S}$ = Second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff de la membrane
$\mathbf{S}_f$ = Second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff de la fibre
$\mathbf{T}$ = Tenseur des contraintes nominales de la membrane
$\mathbf{U}$ = Vecteur des déplacements nodaux de la membrane
$\mathbf{U}_e$ = Vecteur des déplacements nodaux élémentaires
$\mathbf{U_{imp}}$ = Vecteur des déplacements imposés sur la membrane
$\mathbf{dU_{imp}}$ = Vecteur des déplacements imposés sur la membrane sur un incrément de chargement i (valeurs aux nœuds à déplacement imposé uniquement)

$\mathbf{U}_{12}$ = Vecteur des déplacements nodaux de la membrane sur un incrément de chargement, entre les instants *t1* (convergé) et $t+\Delta t$ (ou *t2* convergé)
$\hat{\mathbf{V}}$ = Vecteur des vitesses virtuelles

$C_{11critique}$ = Déformation critique de la fibre (composante longitudinale du tenseur de Caughy-Green droit de la fibre)
$C_{11rupture}$ = Déformation à la rupture de la fibre (composante longitudinale du tenseur de Caughy-Green droit de la fibre)
D = Variable d'endommagement
I_1 = Premier invariant de $\mathbf{C}$
I_3 = Troisième invariant de $\mathbf{C}$
I_{f1} = Premier invariant de $\mathbf{C}_f$
I_{f3} = Troisième invariant de $\mathbf{C}_f$
L_0 = Longueur initiale de l'éprouvette
$P^{(\text{int})}$ = Puissance virtuelle des efforts intérieurs
$P^{(ext)}$ = Puissance virtuelle des efforts extérieurs
$P^{(liai)}$ = Puissance virtuelle des efforts de liaison
${}^0Q_f$ = Quantité initiale de fibres
${}^tQ_f$ = Quantité de fibres à l'instant *t*
$Q_{\min}$ = Quantité minimale de fibres définissant un élément ruiné
R = Fonction de répartition des fibres
S = Surface de la membrane
Tol = Précision souhaité sur la solution aux éléments finis obtenue par un processus itératif
V = Volume de la membrane
V_e = Volume élémentaire
W = Potentiel d'énergie de déformation de la membrane
$\hat{W}^{(\text{int})}$ = Energie virtuelle de déformation
$\hat{W}^{(ext)}$ = Energie virtuelle due aux efforts extérieurs
$\hat{W}^{(liai)}$ = Energie virtuelle due aux efforts de liaison

$\mathbf{x}$ = Vecteurs des coordonnées des nœuds de la membrane dans
(O, x_1, x_2, x_3)
$\mathbf{x}_e$ = Vecteurs des coordonnées des nœuds d'un élément
$\mathbf{x}_{\mathbf{f}1}$ = Vecteur directeur de la fibre

a = Paramètre de la loi de comportement
b = Paramètre de la loi de comportement
dl = Longueur d'arc sur un incrément de chargement *i*
dl_{min} = Longueur d'arc minimale sur un incrément de chargement *i*
dl_{max} = Longueur d'arc maximale sur un incrément de chargement *i*
epa = Epaisseur de la membrane

e_{min} = Epaisseur minimale initiale de l'éprouvette
e_{max} = Epaisseur maximale initiale de l'éprouvette
i = Indice affecté aux incréments de chargement
j = Indice affecté aux itérations d'équilibre
$j_{souhaité}$ = Nombre maximal d'itérations d'équilibre souhaité
l = Longueur d'arc
l_0 = Largeur initiale de l'éprouvette
p = Pression hydrostatique
w_f = Potentiel d'énergie de déformation d'une fibre compressible
$\tilde{w}_f$ = Potentiel d'énergie de déformation d'une fibre incompressible

Rappels sur les tenseurs de contrainte

	Piola-Kirchhoff II $\mathbf{S}$	Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$	Lagrange $\mathbf{T}$
$\mathbf{S}$		$\dfrac{1}{\det(\mathbf{F})}\mathbf{F}.\mathbf{S}.\mathbf{F}^T$	$\mathbf{S}.\mathbf{F}^T$
$\boldsymbol{\sigma}$	$\det(\mathbf{F}).\mathbf{F}^{-1}.\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{F}^{-T}$		$\det(\mathbf{F}).\mathbf{F}^{-1}.\boldsymbol{\sigma}$
$\mathbf{T}$	$\mathbf{T}.\mathbf{F}^{-T}$	$\dfrac{1}{\det(\mathbf{F})}\mathbf{F}.\mathbf{T}$	

Introduction

Face au problème de société que sont les accidents de la route, de nombreux chercheurs s'activent actuellement à développer des moyens efficaces de prédiction des risques de blessure, avec pour objectif final de trouver les solutions techniques permettant de minimiser ces risques. Communément utilisés dans la réglementation actuelle, les mannequins mécaniques atteignent aujourd'hui leurs limites face à l'objectif visé. En effet, comment représenter correctement cette géométrique variée, comment modéliser ce comportement mécanique si complexe inter et intra individu, comment prendre en compte les si nombreuses échelles que comporte le corps humain ? Le corps virtuel devient, plus qu'une évidence, une nécessité. Il a ainsi fait l'objet de diverses collaborations, notamment à l'échelle européenne si l'on pense au projet Humos (Human Model for Safety).

L'objectif principal des modèles numériques est d'améliorer la précision des prédictions en simulant plus localement les mécanismes de blessure. Or, de tels modèles requièrent une connaissance approfondie des propriétés mécaniques des tissus humains, et ce, dans des conditions de chargement représentatives d'un choc.

Parmi tous les tissus constituant le corps humain, les os ont été largement étudiés, autant à des fins orthopédiques sous des chargements quasi-statiques [Athanasiou, 2000, Keaveny, 2001], que pour des applications en biomécanique des chocs sous sollicitations dynamiques [Autuori, 2004, Charpail, 2006]. Dans la famille des tissus mous, un grand nombre d'études récentes se sont intéressées aux tendons et aux ligaments [Arnoux, 2000, Subit, 2004] ou au tissu cérébral [Nicolle, 2004, McElhaney, 1973] pour des applications en choc automobile. Néanmoins, si l'on regarde plus particulièrement les tissus mous plan, l'essentiel des travaux, que nous citerons par la suite, sont effectués dans un cadre médical et se limitent donc à des sollicitations physiologiques ou relativement proches. Ceci se traduit, dans les modèles éléments finis du corps humain, par l'utilisation de lois de comportement très simplifiées et peu représentatives de la réalité du tissu.

Face à ces considérations, il apparaît important d'alimenter les bases de données existantes avec les propriétés mécaniques des membranes biologiques et leurs caractéristiques à la rupture, déterminées dans des conditions représentatives d'un choc. Ceci en vue d'améliorer les lois de comportement les caractérisant. Cet objectif sera donc le notre et fera l'objet de l'étude présentée ici.

En premier lieu, nous pensons que l'amélioration des modèles relatifs à des matériaux aussi complexes que les tissus biologiques, nécessite de prendre en compte les effets de structure. Notre démarche consiste donc à adopter une approche structurelle du tissu, au niveau expérimental dans un premier temps, afin de déterminer les éléments de la structure essentiels à la réponse mécanique du tissu. Ceci servira, dans un second temps, à définir un modèle de comportement intégrant ces paramètres structuraux, tel qu'il soit adaptable au plus grand nombre de membranes biologiques.

Adopter une telle démarche impose de faire un choix au sein des membranes biologiques pour n'en sélectionner qu'une seule famille aux caractéristiques structurelles communes. Nous avons donc focalisé ce travail sur les tissus conjonctifs bi-tendus, structurés à la manière d'un matériau composite par un réseau fibreux entouré d'une matrice.

L'étude que nous souhaitons mener sur ces tissus se veut globale, dans le sens où elle traite de l'expérimentation, de la modélisation et de la simulation numérique. Cet aspect nous parait essentiel étant donné que chaque choix effectué en terme de protocole expérimental est lié aux choix relatifs à la modélisation et inversement. Pour cela, après avoir fixé un type de sollicitation : la traction et définie une vitesse de sollicitation proche du choc : 3m/s, nous proposons de mettre en place une méthode de caractérisation mécanique du comportement jusqu'à rupture des membranes biologiques fibreuses, méthode qui sera couplée à des mesures au niveau de la microstructure du tissu, comme le veut une approche structurelle du problème. La mise en relation des propriétés aux échelles macroscopique et microscopique nous permettra d'écrire ensuite une loi de comportement représentative, avant de l'implanter dans un modèle éléments finis. Chacune de ces étapes doit être réalisée en gardant à l'esprit que toute solution technique sélectionnée doit être adaptable à toute membrane biologique fibreuse. D'un point de vue pratique, nous avons du sélectionner un tissu destiné à la mise en place de cette méthode de caractérisation et à la réalisation des premières applications. Notre choix a porté sur la peau humaine, pour sa facilité de prélèvement.

Ce manuscrit présente donc les principes de la caractérisation et de la modélisation du comportement jusqu'à rupture, d'une membrane biologique fibreuse, soumise à des sollicitations dynamiques, ainsi que les premières applications réalisées sur la peau humaine.

Dans un premier chapitre, nous orientons notre revue de la littérature vers une explication structurelle des propriétés mécaniques de la peau humaine et de leurs variations. Ceci nous a permis de dégager les constituants jouant un rôle majeur dans la réponse de la peau à la traction, dans le cas particulier des grandes déformations comme celles mesurées proches de la rupture du tissu.

Le deuxième chapitre s'attache à définir les éléments essentiels lors de la mise en place d'essais de traction sur des tissus conjonctifs et lors de la modélisation de leur comportement. L'étude bibliographique de trois travaux d'importance dans le domaine, nous a guidé dans la définition de notre protocole expérimental et nous a déjà donné des indications en terme de modélisation.

A travers un troisième chapitre, nous présentons le protocole expérimental permettant la caractérisation mécanique d'une membrane fibreuse à la suite d'essais de traction unidirectionnelle jusqu'à rupture. Nous donnons les résultats obtenus sur la peau humaine à l'échelle macroscopique pour les propriétés mécaniques et à l'échelle microscopique pour les mesures structurelles.

Le quatrième et dernier chapitre concerne à la fois la définition d'une loi de comportement et son implantation dans un code éléments finis, écrit dans un premier temps sous Matlab®. La loi de comportement proposée est à deux échelles et repose sur la connaissance du comportement des fibres ainsi que leur répartition. Ensuite est exposé précisément la résolution numérique du problème, en particulier la méthode de pilotage par longueur d’arc en grand déplacement. Enfin, les premières applications à la peau humaine permettent d'illustrer les capacités de ce modèle.

1. Chapitre 1 : La peau humaine

La peau recouvre en quasi totalité le corps humain, soit une surface de 1.5 à 2m² chez l'adulte [Maurel, 1998, Roche, 1997] et assure ainsi la protection des organes contre les agressions du monde extérieur. L'épaisseur totale de la peau varie suivant les régions du corps et les sollicitations qui lui sont imposées. De quelques dixièmes de millimètres pour la peau dite fine, elle atteint quelques millimètres: 5-6mm [Laplante, 2002, Maurel, 1998] sur les zones très sollicitées comme la plante des pieds.

1.1. Une structure multicouches

Cette membrane protectrice est constituée de plusieurs couches (Figure 1-1a). De l'extérieur vers l'intérieur se succèdent l'épiderme, le derme et l'hypoderme puis une membrane fibreuse de forte rigidité : l'aponévrose. Cette dernière assure l'interface entre la peau et les organes internes. Chacune des trois premières couches est dotée d'une épaisseur et d'une structure différentes car adaptées aux fonctions mécanique et physiologiques qu'elle doit remplir. Nous détaillerons donc dans les paragraphes suivants, la structure de l'épiderme, du derme et de l'hypoderme ainsi que le rôle de leurs constituants dans la réponse de la peau à la traction, sollicitation faisant l'objet de cette étude.

1.1.1. Les couches extrêmes: l'épiderme et l'hypoderme

Directement en contact avec l'extérieur, l'épiderme est la couche la plus fine de la peau humaine dont l'épaisseur est donnée entre quelques dizaines de micromètres [Fung, 1993] et environ 100µm [Laplante, 2002]. Il est lui-même subdivisé en plusieurs couches (Figure 1-1b), entre 5 et 10. En remontant vers l'extérieur, après la membrane basale interne se trouvent cinq couches cellulaires : la couche basale (stratum basale), la couche épineuse (stratum spinosum), la couche granuleuse (stratum granulosum), la couche de transition (stratum lucidum) présente surtout dans la peau épaisse et enfin la couche cornée (stratum corneum). Cette dernière, d'épaisseur 15µm [Agache, 2000], est continuellement renouvelée tout au long de la vie. La couche cornée est en effet constituée de cellules mortes (Figure 1-1c) régulièrement arrachées de la surface de la peau, c'est la desquamation spontanée.

A l'autre extrémité de la peau se trouve l'hypoderme, couche interne d'épaisseur variant de quelques millimètres à environ 1cm. Il est principalement chargé de tissus adipeux comme l'illustre la Figure 1-1d représentant des adipocytes de l'hypoderme humain. De ce fait, cette couche est peu étudiée. [Agache, 2000]

Nous verrons par la suite que de par leur composition, l'épiderme et l'hypoderme ne font pas réellement l'objet d'études mécaniques, ils ne seront donc pas détaillés.

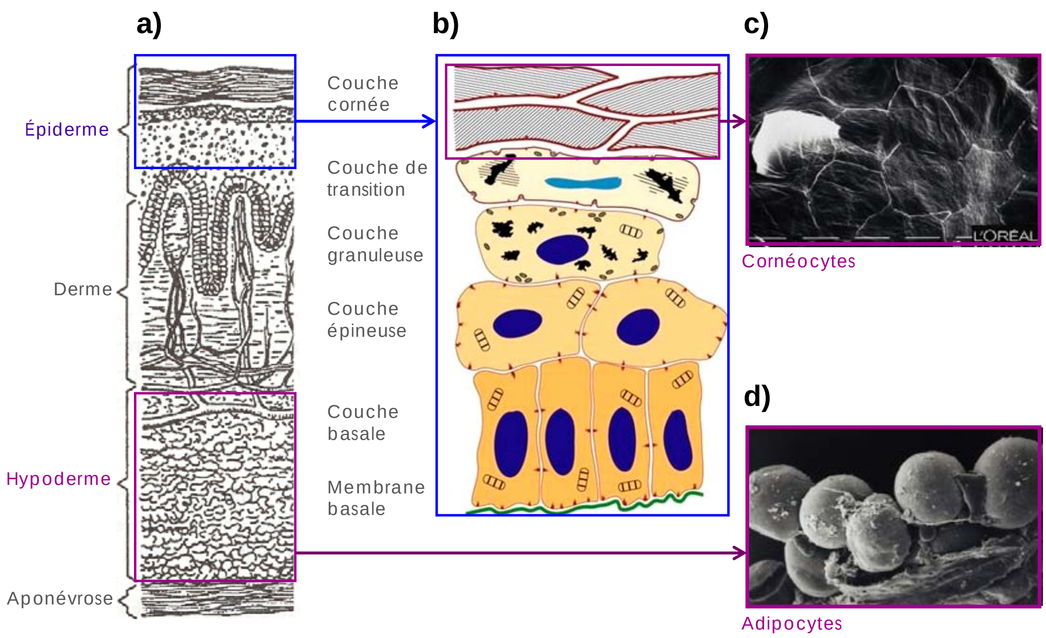


Figure 1-1 : a) Différentes couches de la peau humaine (extrait de [Maurel, 1998]), b) différentes couches de l'épiderme humain (extrait de [Laplante, 2002]), c) cornéocytes de la couche cornée observés en microscopie électronique à balayage (extrait de [Loreal]) et d) adipocytes de l'hypoderme observés en microscopie électronique à balayage (extrait de [Loreal])

1.1.2. La couche intermédiaire: le derme

Le derme, dont l'épaisseur atteint quelques millimètres [Agache, 2000, Roche, 1997], est divisé en deux sous couches appelées derme papillaire et derme réticulaire (Figure 1-2a). Il est défini comme un tissu conjonctif irrégulier et dense.

1.1.2.1. Un tissu conjonctif

Pour une meilleure compréhension de l'organisation structurelle du derme, nous donnons ici quelques précisions sur les tissus conjonctifs en général. En effet, le corps humain est constitué de quatre types de tissus fondamentaux : le tissu épithélial, le tissu nerveux, le tissu musculaire et enfin le tissu conjonctif [Schöni**,** 2003]. Ce dernier est classiquement composé d'une faible quantité de cellules laissant une large place à la matrice extracellulaire, caractérisée par un réseau de fibres entouré de substance fondamentale. Parmi les fibres sont considérées : les fibres de collagène (Figure 1-2c), les fibres d'élastine (fibres élastiques, fibres élaunines) (Figure 1-2d) et enfin les fibres de réticulines qui ne seront pas évoquées par la suite car elles apparaissent au cours de la vie fœtale puis sont remplacées par du collagène de type I [Schöni, 2003]. La différence entre deux types de tissu conjonctif réside tout d'abord dans la proportion de chaque constituant. A titre d'exemple, le derme est qualifié de tissu conjonctif dense, c'est-à-dire qu'il contient très peu de substance fondamentale par rapport à un tissu conjonctif dit lâche. De plus, les tissus conjonctifs diffèrent par les caractéristiques de chacune des familles de fibres à savoir : leur taux, leur diamètre et l'organisation de leur réseau.

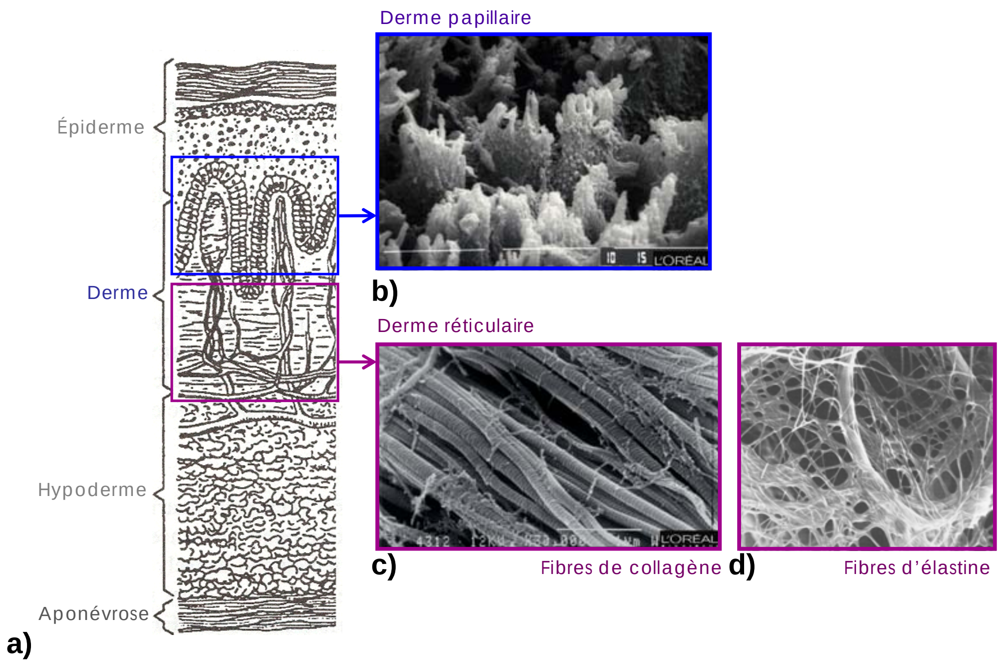


Figure 1-2 : a) Différentes couches de la peau humaine (extrait de [Maurel, 1998]), b) derme papillaire à la jonction dermo-épidermique observé en microscopie électronique à balayage (extrait de [Loreal]), c) fibres de collagène (extrait de [Loreal]) et d) fibres d'élastines (extrait de [Agache, 2000]) du derme réticulaire observées en microscopie électronique.

Dans le cas du derme, le taux de cellules est défini avoisinant les 5% alors que l'eau, considérée comme composant majeur de la substance fondamentale, représente 65% [Silver, 1992]. Au niveau des fibres, le derme est caractérisé par un faible taux de fibres d'élastine, environ 2% ou 4% du poids sec de la peau [Fung, 1993], alors que le taux de fibres de collagène atteint 27.5% [Silver, 1992] ou quasiment 70% du volume du derme [Silver, 2001, Vitellaro, 1994] ce qui est équivalent à 75% du poids sec de la peau [Fung, 1993] (Figure 1-3). Les taux de fibres donnés ici et détaillés Figure 1-4 correspondent à des valeurs moyennes sur tout le corps, or d'après Vitellaro [Vitellaro, 1994], la densité de fibres varie avec la localisation sur le corps.

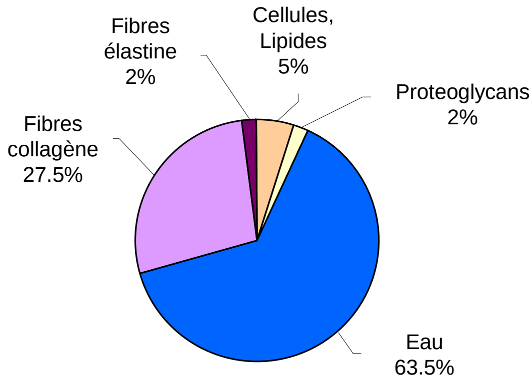


Figure 1-3 : Composition de la peau humaine selon Silver [Silver, 1992].

Il faut remarquer qu'il existe quatorze types de collagène dont les types I et III sont les plus représentés dans la peau humaine, à des taux atteignant respectivement 80-85% et 15-20% [Laplante, 2002]. De plus, parmi les fibres d'élastines sont comptées: les fibres élastiques, élaunines et oxytalanes, qui diffèrent de par leur quantité décroissante d'élastine déposée. Or la majorité des études ne s'intéressent qu'aux fibres élastiques dont la fonction mécanique est la plus importante.

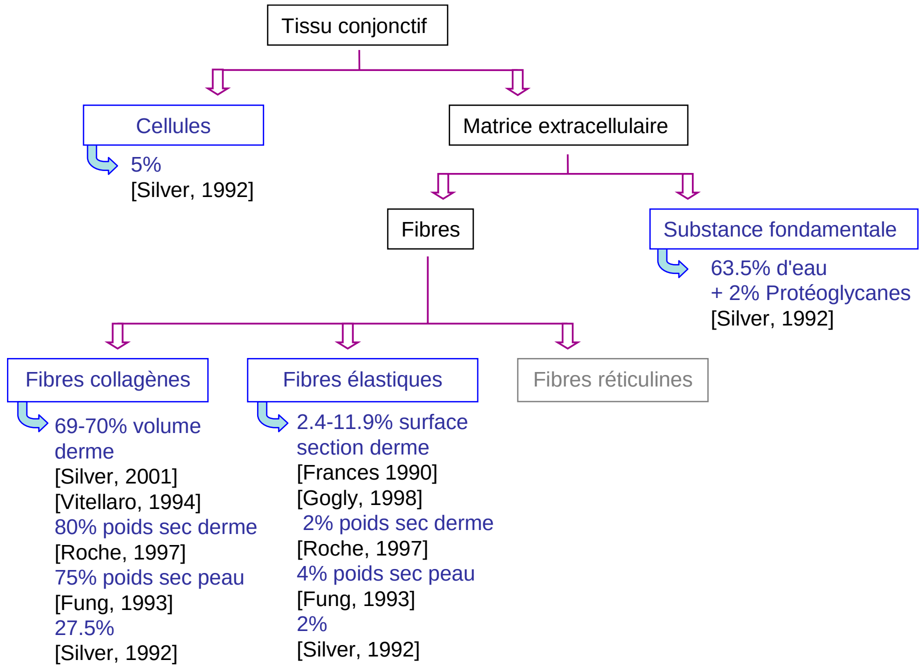


Figure 1-4 : Composition d'un tissu conjonctif: récapitulatif des proportions de chaque constituant pour la peau humaine.

1.1.2.2. Le derme papillaire

Partie supérieure du derme, le derme papillaire est de faible épaisseur, entre 20 et 50μm. Il tient son nom de la forme prise par sa surface supérieure : elle est constituée de papilles s'imbriquant dans l'épiderme à la manière d'un peigne afin d'assurer une jonction dermo-épidermique résistante (Figure 1-2b).

Les fibres de collagène contenues dans le derme papillaire sont les plus fines, de type III en majorité, leur diamètre varie entre 0.3 et 3 μm et elles représentent 4% du poids sec de la peau [Roche, 1997]. Les fibres d'élastines sont aussi très fines et courtes par rapport à celles du derme réticulaire, leur diamètre est de l'ordre de 0.7-1 μm [Frances, 1990, Silver, 2001, Vitellaro, 1994] pour des longueurs de 20-150 μm [Frances, 1990]. Orientées perpendiculairement à la surface de la peau, elles suivent la forme des papilles et représentent entre 0.7 et 0.8% du volume du derme [Vitellaro, 1994] ou 0.6% de la surface d'une section du derme [Frances, 1990]. Les principales caractéristiques des fibres du derme papillaire sont données dans le tableau de la Figure 1-5a.

1.1.2.3. Le derme réticulaire

Plus en profondeur, se trouve le derme réticulaire dont l'épaisseur, plus importante, est de l'ordre du millimètre. En règle générale, le diamètre et le volume des fibres augmentent lors du passage du derme papillaire au derme réticulaire (Figure 1-5b et c). Les fibres de collagène deviennent plus robustes, de type I essentiellement, leur diamètre atteint 2 à 40 μm [Agache, 2000, Silver, 2001]. Constituant cette fois 72% du poids sec de la peau, elles sont disposées selon des plans parallèles à sa surface. A l'intérieur de ces plans, elles sont orientées suivant les lignes de tension du tissu. A l'opposé, les fibres d'élastine forment un réseau tridimensionnel anarchique et dense relié aux fibres d'élastine du derme papillaire par les fibres élaunines. Le diamètre des fibres d'élastine s'élève à 2-5 μm pour une longueur moyenne avoisinant 140 μm. Elles représentent alors 2.3-2.5% du volume du derme [Frances, 1990]. Les principales caractéristiques des fibres du derme réticulaire sont détaillées dans le tableau de la Figure 1-5a.

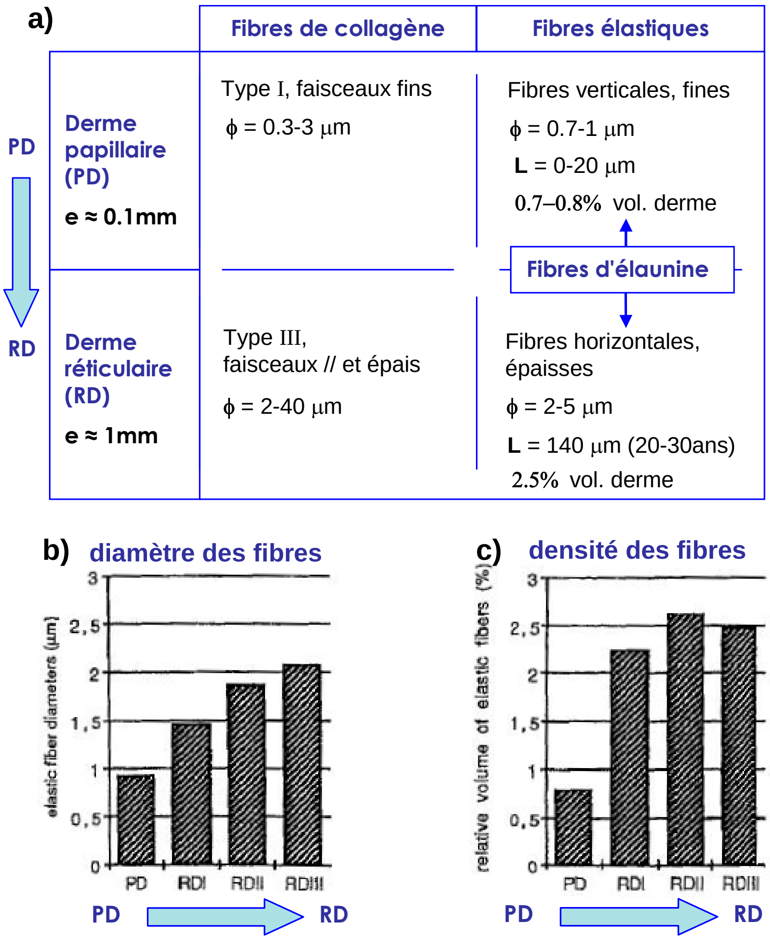


Figure 1-5 : a) Tableau récapitulatif des caractéristiques des fibres du derme humain (ϕ diamètre et L longueur) et variation du diamètre b) et de la densité volumique c) des fibres élastiques du derme humain entre le derme papillaire (PD) et 3 profondeurs croissantes du derme réticulaire (RDI, RDII et RDIII) (extrait de [Vitellaro, 1994]).

1.2. Des propriétés mécaniques liées à la structure

1.2.1. Que se passe-t-il pendant un essai de traction?

Nous avons vu que la peau humaine est structurée en plusieurs couches de compositions différentes. Supposons maintenant que la peau est sollicitée en traction, chacune des couches va jouer un rôle qui lui est propre, directement lié aux éléments qui la structurent. Nous nous intéressons donc, dans un premier temps, aux phénomènes ayant lieu dans chacune de ces couches en traction.

1.2.1.1. Le rôle de chaque couche de la peau

Regardons tout d’abord au niveau de l'épiderme. Celui-ci ne représente que 10% de l'épaisseur totale de la peau. De plus, il est principalement constitué de cellules tendant à se différencier et à être éjectées de la surface de la peau. Notamment au niveau de la couche cornée, les cellules qui la composent sont essentiellement mortes et constamment renouvelées. Bien qu'il soit relativement raide (couche cornée), surtout sous faible taux d'humidité et température importante, le rôle de l'épiderme en traction n'est pas conséquent. [Silver, 1992]

Ensuite l'hypoderme étant un tissu très lâche, il permet à la peau *in vivo* de se déplacer en bloc sur les plans sous-jacents. De ce fait, il a pour rôle essentiel d'absorber les efforts extérieurs à composante tangentielle. Agache [Agache, 2000] remarque qu'aux endroits où l'hypoderme à presque disparu (cicatrices), la peau perd de sa mobilité et est soumise à de fortes contraintes de frottement. Cependant, dans le cas de la traction *in vitro*, l'hypoderme ne supporte pas de charge, comme l'ont démontré Del Prete [Del Prete, 2004] sur la peau de souris et Jacquemoud [Jacquemoud-a, 2004] sur la peau de porc. Son rôle est donc considéré comme négligeable.

Les couches extrêmes ne jouant pas de rôle important en traction, reste le derme dont l'épaisseur est conséquente, entre dix et cent fois supérieure à celle de l'épiderme. Le derme, en tant que tissu conjonctif, possède une structure complexe semblable à celle d'un matériau composite qui va apporter à la peau son élasticité. L'organisation de ses réseaux de fibres au sein de la substance fondamentale lui permet de faire face à différents types de sollicitations et régit ses propriétés mécaniques en traction. Selon Agache [Agache, 2000], le derme est le constituant mécanique majeur de la peau.

1.2.1.2. Le rôle de chaque constituant du derme

Suite aux conclusions du paragraphe précédent, il apparaît intéressant de descendre d’une échelle et de s’intéresser au rôle rempli par chacun des constituants du derme, lorsque la peau est soumise à de la traction.

D'une part, les cellules ne semblent pas jouer de rôle important dans la résistance mécanique de la peau humaine. Silver [Silver, 2001] montre que la résistance de la peau totale est égale à celle des fibres seules. De ce fait, le rôle des cellules est généralement considéré comme négligeable face à celui des fibres.

D'autre part, il existe peu de données mécaniques sur la substance fondamentale, gel hydrophile essentiellement composé d’eau et de protéoglycans. Il apparaît que les protéoglycans séparent les fibres de collagène et facilitent leur glissement les unes par rapport aux autres. Silver [Silver, 1992] attribue aux protéoglycans un module de cisaillement complexe de 10^{-5}MPa tout en considérant que leur rôle est négligeable face à celui des fibres de collagène. Sacks [Sacks, 2000], pour sa part, considère que la substance fondamentale joue un rôle en traction lorsqu'elle est traitée chimiquement, il l'intègre donc dans sa loi de comportement.

De ce fait, le réseau de fibres semble être l'élément à considérer en traction. Silver [Silver, 2001] démontre que la raideur de la peau totale est équivalente à celle des fibres seules et Roeder [Roeder, 2002] ajoute que la courbe contrainte/déformation d'une matrice reconstituée de fibres de collagène uniquement est similaire à celle de la peau totale.

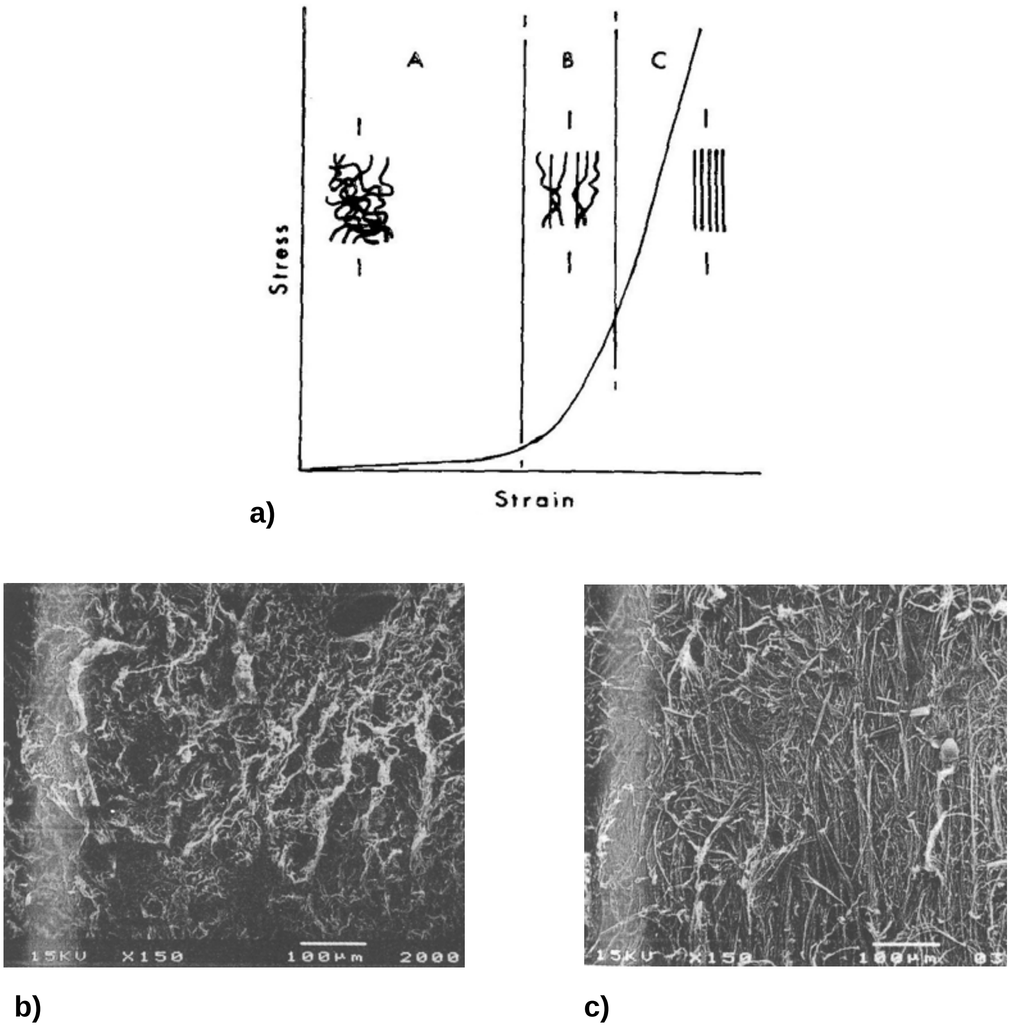


Figure 1-6 : a) Courbe caractéristique contrainte/déformation de la peau humaine en traction quasi-statique– v=1.6.10^{-4}m/s (extrait de [Daly, 1982]) et observation des fibres de collagène de la peau de rat en microscopie électronique à balayage: a) état initial et b) peau étirée en traction quasi-statique jusqu'à la dernière phase linéaire (extrait de [Belkoff, 1991]).

Tout d'abord, l'analyse d'une courbe caractéristique d'un essai de traction (Figure 1-6a) permet de mieux comprendre les phénomènes ayant lieu au niveau du derme et le rôle de chaque famille de fibres. En effet, l'évolution des contraintes en fonction des déformations, lors d'un essai de traction statique sur de la peau humaine [Daly, 1982], se découpe en trois phases.

- ✓ Lors de la première phase (notée A sur la Figure 1-6a), les fibres de collagène, qui sont ondulées à l'état naturel (Figure 1-6b), se déplissent progressivement, n'apportant quasiment pas de résistance à la traction, d'où la faible pente de la courbe. Schmid [Schmid, 2005] montre l'augmentation de la période d'ondulation des fibres de collagène sur la première phase de la traction, la valeur initiale étant de 100 mm environ pour l'aorte. Les fibres d'élastine sont elles prêtes à résister, elles sont très extensibles sous de faibles efforts et apportent donc leur contribution en début de traction jusqu'à environ 30% de déformation [Brèque, 2002, Silver, 1987]. Leur faible module d'Young est à l'image de la faible raideur de la peau dans cette phase.
- ✓ La deuxième phase (notée B sur la Figure 1-6a) est une phase de transition pendant laquelle les fibres d'élastine semblent passer le relais aux quelques fibres de collagènes déplissées et alignées dans la direction de traction. Ces dernières étant beaucoup plus raides, nous observons une augmentation de la raideur totale de la peau qui va être fonction du nombre de fibres de collagène en tension. Le processus de déplissage et de réorientation des fibres de collagène se poursuit jusqu'à environ 60% de déformation, début de la dernière phase (notée C sur la Figure 1-6a).
- ✓ L'évolution des contraintes est alors quasiment linéaire et de forte pente, toutes les fibres de collagène étant alignées dans la direction de traction, elles apportent une résistance maximale (Figure 1-6c).

Le déplissage des fibres de collagène et leur réorientation dans la direction de sollicitation semblent être des phénomènes admis comme responsables des non linéarités de la caractéristique en traction d'un tissu conjonctif [Roche, 1997]. En effet, Silver [Silver, 1987] qualifie la peau ainsi que les parois artérielles de « réseau orientable de fibres de collagène » (alignable collagen network). Il considère que ces tissus possèdent un réseau de fibres de collagène suffisamment lâche dans des conditions physiologiques, lui permettant de se réorienter pour faire face à un état de contrainte donné. Ce phénomène de réorientation est bien visible sur les images en microscopie électronique à transmission de peau de rat (Figure 1-6b et c), il a aussi été vérifié expérimentalement dans le cas de l'aorte [Schmid, 2005].

Il faut cependant noter que toutes ces études concernent des essais de traction quasi-statique où la rupture n'est quasiment jamais atteinte. Certains tentent cependant de l'expliquer comme Silver [Silver, 1992], pour qui la rupture se fait par défibrillation. Par contre, d'après Dunn [Dunn, 1983], l'énergie de déformation utilisée par les fibres de collagène pour le processus de réorientation, est transférée à la matrice une fois les fibres toutes parallèles aux lignes de tension. La matrice étant plus déformable, c'est elle qui subit la rupture.

1.2.2. Propriétés mécaniques

1.2.2.1. De la peau totale

Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, la peau, lorsqu'elle est soumise à de la traction, présente un comportement en trois phases que l'on pourrait qualifier de bilinéaire dans le domaine élastique. En effet, les première (phase A sur la Figure 1-6a) et dernière (C sur la Figure 1-6a) phases sont quasiment linéaires permettant ainsi la définition de deux modules élastiques, notés E_1 pour la première phase et E_2 pour la dernière. Les valeurs de E_1 varient entre 5 et 700 kPa suivant les auteurs [Brèque, 2002, Daly, 1982, Silver, 1987] alors que celles de E_2, plus élevées 20-37MPa, sont plus homogènes [Brèque, 2002, Silver, 1987]. La phase de transition (B sur la Figure 1-6a) étant elle fortement non linéaire, aucune donnée n'est trouvée à son sujet. Bien que ces trois phases soient caractéristiques de la réponse de la peau, un grand nombre d'auteurs se limitent à des valeurs globales du module d'élasticité, sans précision sur la partie de la courbe considérée. Dans le cas d'études in vivo [Agache, 2000, Khatyr, 2004], les valeurs de E allant de 7kPa à 1.1MPa concernent des "petites déformations" (à l'échelle de la peau) qui n'excèdent pas 40% [Agache, 2000]. Les travaux réalisés in vitro [Agache, 2000, Rollhauser, 1950, Silver, 1992] apportent des modules E variant de 510kPa à 50MPa, avec une valeur 6 fois plus petite entre l'enfant et l'adulte [Rollhauser, 1950].

Concernant la rupture de la peau, elle est caractérisée en terme de déformation par des valeurs s'étalant de 50 à 200% tous sites et tous âges confondus [Silver, 1992, Yamada, 1970]. Les contraintes ultimes restent plus homogènes d'un auteur à l'autre, elles varient d'environ 1 à 15 MPa [Silver, 1992, Yamada, 1970]. Yamada [Yamada, 1970] mesure aussi des efforts par unité de largeur à la rupture dont les valeurs moyennes sont de 9-17N/mm.

Toutes les données bibliographiques sur les propriétés mécaniques de la peau totale sont détaillées par auteur dans le tableau A1-1 de l'annexe 1.

D'autres investigations ont été menées sur les propriétés mécaniques de la peau, notamment concernant sa compressibilité. North [North, 1978] effectue des mesures sur la peau de l'abdomen humain et définit sa compressibilité comme le rapport $\Delta V/V\Delta P$ entre la variation de volume ΔV et la variation de pression ΔP. Il en résulte que la valeur pour la peau humaine de $0.30 m^2 GN$ est très proche de celle de l'eau donnée à $0.42 m^2 GN$.

La peau humaine est, comme nous l’avons énoncé, constituée en grande partie d’eau ce qui explique sa compressibilité extrêmement faible. De ce fait, elle est en général considérée comme un matériau incompressible, ce qui simplifie les formulations de lois de comportement et sa densité est admise égale à celle de l’eau soit un.

Enfin les aspects visqueux de la peau sont évoqués par Agache [Agache, 2000]. Il explique la viscosité de la peau par le déplacement de la substance fondamentale au sein du réseau de fibres. Sa valeur est donc fonction d'une part de la viscosité intrinsèque de la substance fondamentale et d'autre par de la densité du réseau de fibres qui tend à diminuer la mobilité de la substance fondamentale. Suivant cette interprétation, un tissu conjonctif dense (en fibres) tel le derme, ne devrait pas avoir un côté visqueux très marqué. En effet, le comportement viscoélastique de la peau n'est démontré que pour des déformations relativement faibles, inférieures à 30% [Dunn, 1983] et des vitesses de traction peu importantes [Agache, 2000]. Cette hypothèse ne semble donc pas vérifiée en grandes déformations, où la composante élastique prend le dessus sur la composante visqueuse et encore moins sous des sollicitations dynamiques.

1.2.2.2. Des fibres

Ayant démontré précédemment le rôle prépondérant des fibres dans la réponse de la peau à la traction, il apparaît nécessaire de passer en revue leur caractéristiques mécaniques intrinsèques. Celles-ci sont difficiles à trouver dans la littérature étant donné qu’il est relativement compliqué de mettre en place un essai de traction et d’adapter des moyens de mesure à l’échelle de la fibre. Une technique possible est d’effectuer l’essai sur le tissu entier après avoir isolé chimiquement un des réseaux de fibres. Les valeurs obtenues sont alors approximées en fonction des volumes de fibres mesurés [Silver, 2001].

Silver [Silver, 1992] considère les fibres de collagène très résistantes. Leur module élastique atteint 500MPa pour des diamètres de 50-100µm alors que leurs déformations et contraintes à rupture correspondantes sont respectivement de 10% et 40MPa. D’autres études apportent une valeur de module élastique allant de 50-100MPa [Schöni, 2003] à quelques giga Pascals [Silver, 2001].

Les fibres d’élastine sont elles beaucoup plus extensibles, la rupture ne survient que pour des déformations de quelques centaines de pourcents : 120-300% [Schöni, 2003, Silver, 1992] sous de faibles contraintes de l’ordre de 0.1MPa [Silver, 1992], d’où leur deuxième appellation : fibres élastiques. Ceci induit un faible module élastique avoisinant 0.1-4.5MPa.

Le détail des données bibliographiques sur les propriétés mécaniques des fibres se trouve dans le tableau A1-2 de l'annexe 1.

1.2.3. Paramètres affectant les propriétés mécaniques

1.2.3.1. Vitesse de déformation

Même si Lanir [Lanir-b, 1974] n'identifie qu'une faible variation des propriétés mécaniques de la peau de lapin avec la vitesse de déformation, plusieurs autres auteurs observent une influence notable de la vitesse de déformation sur ces propriétés, dans le cas de tissus conjonctifs soumis à de la traction.

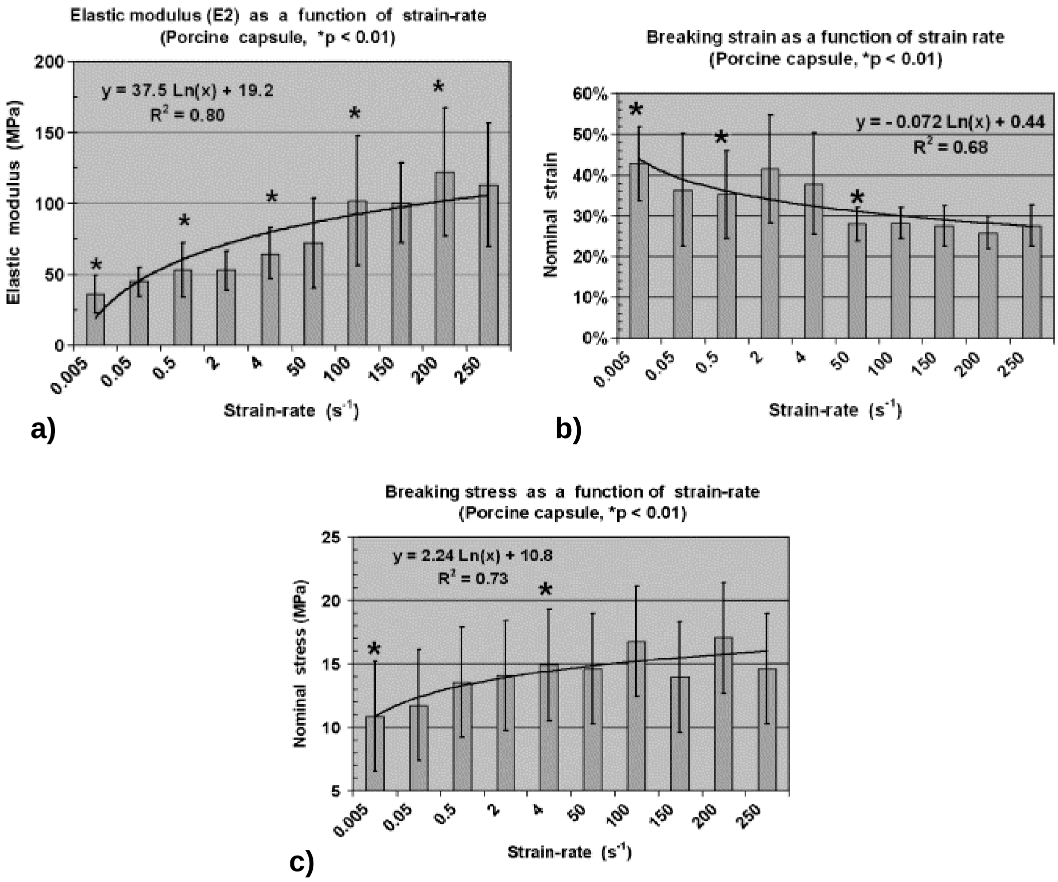


Figure 1-7 : Effet de la vitesse de déformation (0.005 – 250 s^{-1}) sur le module d'élasticité E_2 a) (dernière phase de la traction), sur la déformation à rupture b) et sur la contrainte à rupture c)– capsule rénale de porc (extrait de [Snedeker, 2005]).

Comme nous l'avons vu au §1.2.2.1, la peau possède un comportement viscoélastique lorsqu'elle est soumise à des élongations quasi-statiques ne dépassant pas 25% [Agache, 2000] – 30% [Dunn, 1983]. Dans ces conditions, Agache [Agache, 2000] donne une loi de déformation visqueuse traduisant les variations de la viscosité cutanée en fonction de sa vitesse de déformation. Snedeker [Snedeker, 2005] s'intéresse lui à la capsule de rein, fine membrane fibreuse dont le comportement en traction est semblable à celui de la peau. En d'autres termes, sa courbe contrainte/déformation est bilinéaire, ce qui permet à l'auteur de définir un module élastique pour chaque phase de la traction E_1 et E_2, comme dans le cas de la peau. Il observe alors une augmentation à la fois du module élastique E_2 et de la contrainte à la rupture avec la vitesse de déformation lorsqu'elle varie de 0.005 à $205s^{-1}$. A l'opposé, la déformation à rupture diminue avec la vitesse de déformation. Suite à ces observations, Snedeker propose trois lois logarithmiques permettant de décrire l'évolution de chacune de ces grandeurs mécaniques avec la vitesse de déformation (Figure 1-7a, b et c). Les essais réalisés par Roeder [Roeder, 2002] sur des matrices de collagène reconstituées à partir de peau de veau démontrent les mêmes évolutions du module élastique E_2, de la contrainte et de la déformation à la rupture lorsque la vitesse de déformation varie de 0.003 à $0.064s^{-1}$ (Figure 1-8).

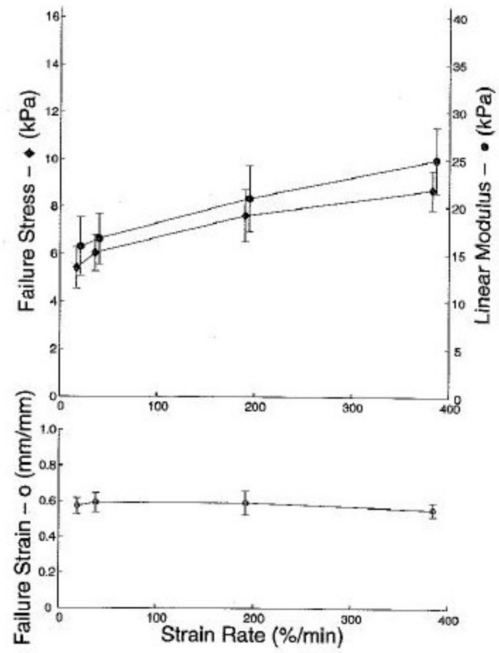


Figure 1-8 : Évolution de la contrainte à la rupture, du module élastique (2ème phase de traction) et de la déformation à la rupture en fonction de la vitesse de déformation (19.2 - 385 %/min ≈ 0.003 – 0.064 s-1) d'un réseau de fibres de collagène reconstitué à partir de peau de veau (extrait de [Roeder, 2002]).

Néanmoins, les grandes variations des propriétés mécaniques sont généralement observées pour des vitesses correspondant aux essais quasi-statiques. Si l'on considère des vitesses plus élevées, apparaît une valeur seuil au-delà de laquelle les variations des propriétés mécaniques sont moindres. Cette vitesse seuil est difficile à définir, elle se situe à priori dans des gammes de vitesses relatives aux essais dits dynamiques. Snedeker [Snedeker, 2005] considère qu'à partir d'une vitesse de déformation d'environ $100s^{-1}$, le module élastique, la déformation et la contrainte à la rupture de la capsule rénale ne varient plus significativement, ce qui explique l'utilisation d'une loi logarithmique pour décrire l'évolution de ces grandeurs en fonction de la vitesse de déformation. De plus, Agache [Agache, 2000] remarque que la viscosité de la peau humaine devient négligeable si la vitesse de sollicitation est relativement grande, sans préciser sa valeur. Or ceci est confirmé par Arnoux [Arnoux, 2000], qui mesure un effet visqueux négligeable sur le ligament du genou lors de ses essais de traction dynamique à une vitesse de 1.98m/s. Cette vitesse peut donc être considérée comme "relativement grande".

Le rapprochement de ces observations avec des phénomènes structurels n'est pas évoqué dans la littérature.

1.2.3.2. Direction

Au travers d'études expérimentales sur la peau, différents auteurs mettent en évidence une anisotropie mécanique assez marquée. Yamada [Yamada, 1970] remarque des valeurs de contrainte et de déformation à rupture plus importantes dans la direction qu'il qualifie de transverse par rapport à la direction longitudinale (Figure 1-9). A son tour Wijn [Wijn, 1978] identifie des modules d'Young initiaux (phase A sur la Figure 1-6a) différents suivant les deux directions perpendiculaires de traction qu'il a définies pour la peau du mollet.

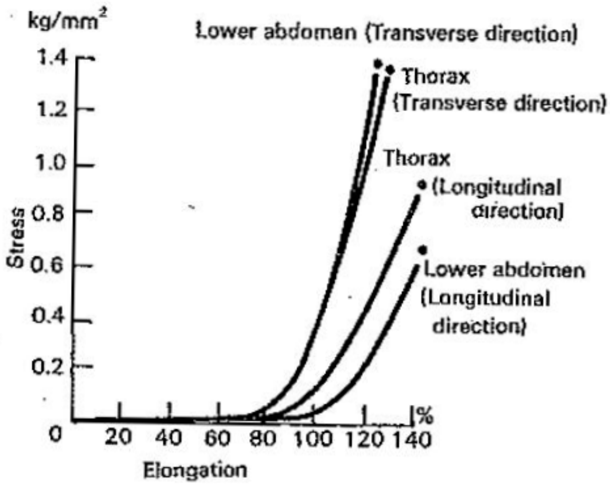


Figure 1-9 : Caractéristique de la peau humaine en traction quasi-statique unidirectionnelle - population âgée de 20-29 ans (extrait de [Yamada, 1970]).

Enfin, Lanir et Fung [Lanir-b, 1974] observent un comportement orthotrope pour la peau de lapin, avec cette fois une différence au niveau des allongements maximaux.

Ces directions de traction ne sont en général pas choisies au hasard mais suivant des repères anatomiques. Sur la peau humaine, il existe des lignes selon lesquelles la tension au repos est la plus importante. Langer propose une première cartographie des lignes de forte tensions sur la peau humaine en 1861, il sera ensuite suivi par Kaissl dont la version est un peu différente (Figure 1-10a et b).

Dans tous les cas, cette anisotropie structurelle serait liée à des directions privilégiées de fibres d'après [Agache, 2000, Lanir-b, 1974, Maurel, 1998]. Au repos, une majorité de fibres élastiques serait orientée suivant les lignes de Langer [Agache, 2000, Song, 1993] alors que les faisceaux de fibres de collagène, situés dans un plan parallèle à la surface de la peau, seraient majoritairement parallèles aux lignes de Kaissl [Song, 1993, Karl, 2007]. Les conclusions quant aux orientations privilégiées de fibres dans la peau humaine restent controversées, certainement car ce tissu n'est pas clairement orienté. Néanmoins, l'anisotropie mécanique suit ces directions structurelles notamment en terme de module d'Young initial, Wijn [Wijn, 1978] le mesure plus important suivant les lignes de Langer de la peau du mollet. Maurel [Maurel, 1998] et Agache [Agache, 2000] considèrent que cette différence de raideur suivant les lignes de Langer n'est valable qu'en petites déformations, certainement car ces directions sont associées à celles des fibres d'élastines agissant en début de traction, alors qu'ensuite les caractéristiques de la peau ne semblent plus se distinguer d'une direction à l'autre.

En fait, les différents auteurs s'accordent à dire que l'extensibilité est plus faible et la raideur plus importante suivant ces directions où la peau est en quelque sorte précontrainte. Cependant, ils ne se réfèrent pas aux mêmes lignes.

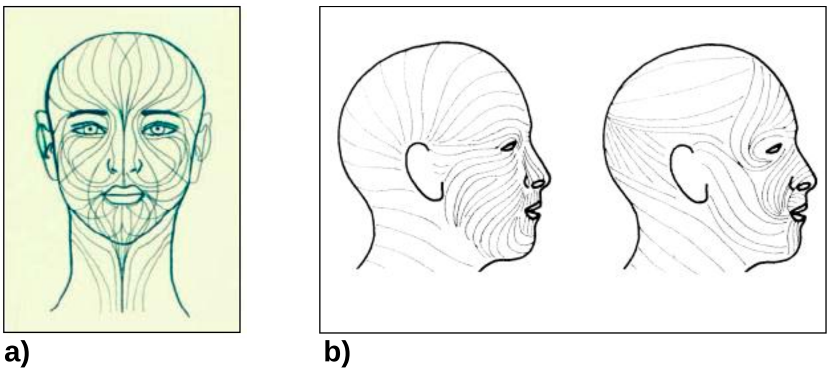


Figure 1-10 : Face humaine: a) Lignes de Langer - vue de face (extrait de [Chuong, 2006]) et b) Lignes de Langer (à droite) et lignes de Kraissl (à gauche) - vue de profil (extrait de [Chang, 2001]).

1.2.3.3. Densité de fibres

Yamada [Yamada, 1970] a constitué une véritable base de données concernant, entre autre, les caractéristiques à la rupture de la peau, prélevée sur 27 sites différents du corps humain. Au vu de ses résultats, il est alors aisé de remarquer une variation des propriétés mécaniques de la peau en fonction de sa localisation sur le corps. Chez l'adulte, l'effort par unité de largeur à la rupture atteint une valeur moyenne de 14N/mm, alors qu'elle descend à 3N/mm pour une peau très fine comme celle des paupières et se voit multipliée par dix pour la peau épaisse du dos: 30N/mm. Ces variations sont essentiellement dues aux gradients d'épaisseur. Cependant il est possible de noter des différences en termes de contrainte et de déformation à la rupture pour lesquelles des paramètres autres que l'épaisseur de la peau semblent agir.

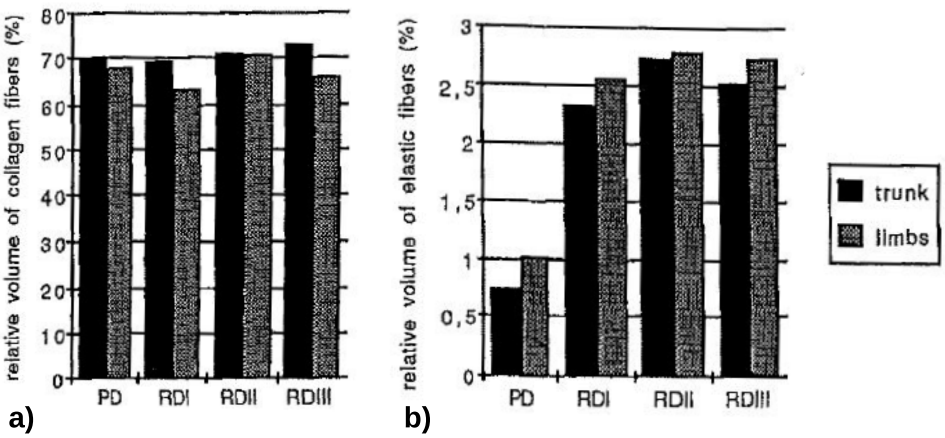


Figure 1-11 : Densités volumiques de fibres de collagène a) et de fibres élastiques b) du derme humain – comparaison de la peau du tronc et des membres (extrait de [Vitellaro, 1994]).

En effet, considérons d'une part le tronc constitué du dos, de l'abdomen, du thorax et de la nuque et d'autre part l'ensemble des membres, bras et jambes confondus. L'étude de Yamada [Yamada, 1970] donne une contrainte à la rupture au niveau du tronc de l'ordre de 10MPa (9-13.2MPa), alors que la valeur moyenne sur tous les membres ne dépasse pas 8.5MPa (5.7-10.4MPa). De même pour la déformation à la rupture, sa valeur atteint 90% pour le tronc contre 75% pour les membres. Parallèlement, les travaux de Vitellaro [Vitellaro, 1994] démontrent que la densité de fibres de collagène est supérieure dans la peau du tronc par rapport à celle des membres, alors que pour les fibres élastiques la tendance est inversée (Figure 1-11). En confrontant ces deux études, il apparaît que la forte contrainte à la rupture au niveau du tronc pourrait être corrélée avec son important taux de fibres de collagène, lui apportant plus de résistance. Cette supposition est confirmée par Roeder [Roeder, 2002] qui mesure une augmentation parallèle de la contrainte à la rupture avec le taux de fibres de collagène (Figure 1-12). Les fibres élastiques agissant elles en début de traction, leur variation de densité est difficile à mettre en relation avec des caractéristiques de la rupture. De plus, il faut ajouter que les variations de densité, entre le tronc et les membres notamment, sont largement dues à l'exposition au soleil dégradant les fibres élastiques.

Il apparaît donc, pour la peau humaine, que les variations des propriétés mécaniques suivant la localisation sur le corps seraient reliées aux différentes densités de fibres en ces lieux.

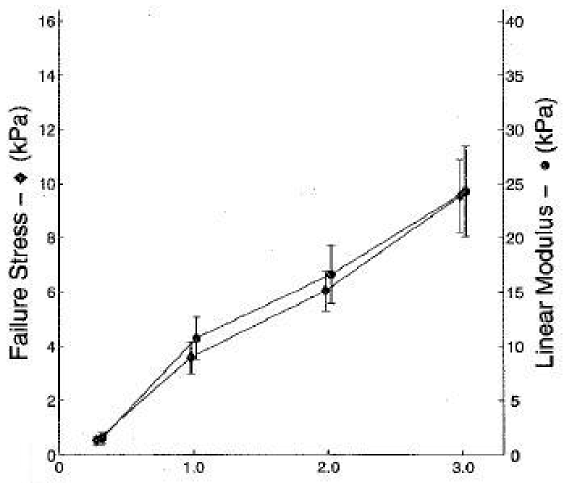


Figure 1-12 : Évolution de la contrainte à la rupture en fonction de la concentration en collagène d'un réseau de fibres de collagène reconstitué à partir de peau de veau – traction 38.5%/min (extrait de [Roeder, 2002]).

1.2.3.4. Age

Les études du vieillissement sont très variées mais leurs conclusions se rejoignent toutes sur un point: des mécanismes de dégradation divers viennent modifier la microstructure de la peau au fil des années. L'ensemble de ces phénomènes structurels est répertorié dans le tableau de la Figure 1-13.

Au niveau du derme humain, se produisent plusieurs phénomènes dont les conséquences se retrouvent sur des densités de fibres. Nous notons tout d'abord une modification de l'activité des fibroblastes les plus anciens [Frances, 1990] qui, en vieillissant, produisent de plus en plus d'enzymes détruisant les fibres [Robert, 2000]. Puis vient une perte de certaines cellules synthétisant les fibres, due en partie à la diminution de l'épaisseur du derme: -30% à 50 ans, -50% à 80 ans, [Frances, 1990] soit une moyenne de -6% tous les 10ans [Robert, 2000]. Au niveau du derme réticulaire, les phénomènes cités ci-dessus sont en majorité responsables de la diminution des quantités de fibres de collagène et d'élastine essentiellement après 30 ans [Vitellaro, 1994], même si Gogly [Gogly, 1998] mesure des quantités de fibres élastiques constantes avec l'âge. De plus, un remodelage des fibres élastiques du derme réticulaire [Frances, 1990] entraînerait une augmentation de leur diamètre de moitié, il passerait de 1.78µm à 3.94 µm entre 60 et 80 ans, ainsi qu'un allongement des fibres, dont la longueur totale passerait de 140 µm à 20-30 ans à 320 µm à 70-80 ans. Néanmoins, cette diminution de la quantité de fibres élastiques du derme réticulaire, associée à leurs augmentations de longueur et de diamètre, se solde par une relative augmentation de leur densité avec l'âge [Frances, 1990, Gogly, 1998, Vitellaro, 1994]. Cette augmentation de quelques dizaines de pourcents, commence vers 30 ans [Vitellaro, 1994] pour s'intensifier autour de 60 ans [Frances, 1990]. Par contre, la densité de fibres de collagène, maximale entre 11 et 30 ans, va ensuite diminuer d'entre 5 et 10% et se stabiliser avec les années [Vitellaro, 1994]. Au niveau du derme papillaire, Frances [Frances, 1990] observe une fragmentation et une disparition progressive du réseau de fibres élastiques superficielles.

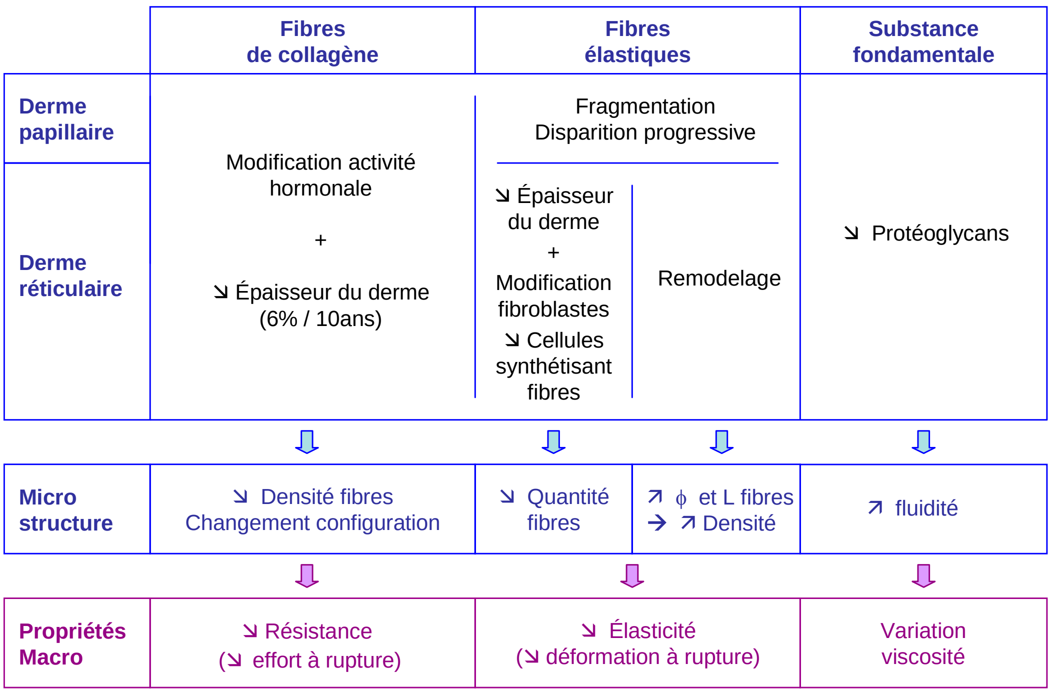


Figure 1-13 : Principaux effets du vieillissement sur les fibres du derme humain à l'échelle microscopique et leurs conséquences sur les propriétés mécaniques de la peau totale à l'échelle macroscopique (ϕ diamètre et L longueur).

Nous avons aussi relevé une modification de l'activité hormonale qui serait notamment responsable des différences structurelles observées d'un sexe à l'autre [Gogly, 1998, Vitellaro, 1994].

Enfin, Agache [Agache, 2000] observe une diminution du taux de protéoglycans de la substance fondamentale la rendant plus fluide.

Les effets de l'âge à l'échelle microscopique semblent se refléter à l'échelle macroscopique. En effet, les modifications micro structurelles énoncées précédemment, concernant les fibres et la substance fondamentale, semblent être à l'origine des variations observées au niveau des propriétés mécaniques de la peau totale.

Tout d'abord, les incidences sur la forme de la caractéristique contrainte/déformation se retrouvent essentiellement au niveau de l'élasticité de la peau et s'expliquent par la modification des réseaux de fibres. Les niveaux de déformations pour une même contrainte diminuent, c'est-à-dire que la longueur de la première phase de la traction se réduit avec l’âge [Daly, 1979] (Figure 1-14). Ceci peut s’expliquer par un changement de configuration au niveau du réseau de fibres de collagène, des directions préférentielles apparaissent (rides) et lorsque l’on étire la peau dans ces directions, un maximum de fibres sont déjà prêtes à résister, le phénomène de réorientation est plus rapide. Une autre explication serait la destruction progressive du réseau de fibres élastiques avec l’âge car les variations de niveaux de déformations sont similaires à celles observées lors du retrait de l’élastine à l’aide d’enzyme [Daly, 1979]. De plus, leur augmentation de diamètre contribue à diminuer leur capacité à s'allonger sous de faibles contraintes, ce que Belkoff appelle leur élasticité [Belkoff, 1991].

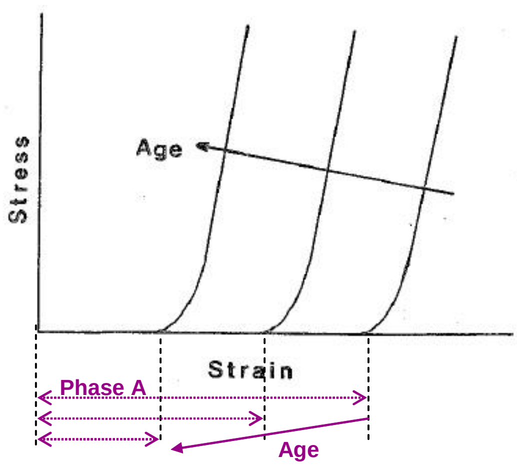


Figure 1-14 : Effet de l’âge sur la caractéristique contrainte/déformation de la peau humaine en traction (extrait de [Daly, 1979]).

Quant aux caractéristiques de la rupture, leurs valeurs diminuent avec l'âge en terme d'effort et de déformation. Yamada [Yamada, 1970] a mesuré, pour les 70-79 ans, des valeurs d'efforts à rupture jusqu'à 46% plus faibles que celles de la classe 30-49 ans. De même pour la déformation à rupture, les valeurs de la classe 70-79 ans atteignent à peine 57% de celles mesurées pour les 10-39 ans. On retrouve donc au niveau de la rupture, cette diminution de la capacité d'allongement de la peau liée à la dégradation des fibres élastiques alors que les faibles efforts seraient représentatifs de l'appauvrissement en fibres de collagène qui contribue à la diminution de la résistance de la peau [Belkoff, 1991].

Enfin, la modification des propriétés de la substance fondamentale influe sur la viscosité de la peau [Agache, 2000, Daly, 1979].

En conclusion, les mécanismes de dégradation des tissus conjonctifs sont responsables de modifications structurelles à l'échelle microscopique (au niveau de la substance fondamentale et du réseau de fibres du derme), qui entraînent à l'échelle macroscopique des variations au niveau des propriétés mécaniques de la peau totale. C'est ainsi que les propriétés de la peau humaine seraient définies comme "optimales" jusqu'à environ 30 ans [Vitellaro, 1994, Yamada, 1970], âge à partir duquel la dégradation commence.

1.3. Conclusion

La peau humaine, vue par un mécanicien, peut être assimilée à un matériau composite multi couches. Chacune de ces couches, de par sa composition et son épaisseur qui lui sont propres, assure une fonction mécanique différente. C'est ainsi que, lorsque la peau est sollicitée en traction, seul le derme apporte une résistance conséquente grâce à sa structure fibreuse complexe. Le derme est en effet classé parmi les tissus conjonctifs dits denses, il est donc constitué de substance fondamentale à l'intérieur de laquelle s'entremêlent deux principaux réseaux de fibres: le collagène et l'élastine. Ce sont principalement ces fibres qui assurent la résistance de la peau totale à la traction et leur diversité fait que le comportement de la peau est relativement complexe.

Toujours sous ce type de sollicitation, la réponse globale de la peau se caractérise par une courbe contrainte/déformation hyperélastique bilinéaire, où chaque phase s'interprète par le rôle que joue chacune des familles de fibres. En effet, les fibres d'élastine apportent son élasticité à la peau en début de traction et sont responsables de son faible module élastique lors de la première phase de traction alors que les fibres de collagène résistent en grandes déformations après s'être déplissées et réorientées dans la direction de traction. Les fibres de collagène, plus raides, contribuent au fort module élastique de la peau en deuxième phase de traction.

Les études de la peau humaine, présentes dans la littérature, dévoilent des résultats très dispersés concernant ses propriétés mécaniques. Outre les différences de protocole et d'expérimentateur, nous avons relevé, à l'intérieur d'une même étude, que les propriétés mécaniques variaient en fonction d'une multitude de paramètres, soit liés aux caractéristiques du sujet (âge, sexe, environnement), soit relatifs à l'échantillon prélevé (site, direction).

Or la plupart de ces paramètres affectant les propriétés mécaniques de la peau totale sont souvent liés à sa structure et plus précisément aux propriétés de son réseau de fibres. A titre d'exemple, plusieurs auteurs trouvent une correspondance entre les directions d'anisotropie mécanique et des orientations privilégiées de fibres (collagène ou élastine), cependant si cette correspondance parait très claire pour d'autres tissus conjonctifs, elle reste encore assez floue dans le cas de la peau. Il apparaît aussi que les variations de propriétés mécaniques suivant le lieu de prélèvement de la peau soient liées aux différentes densités de fibres en ces lieux. De plus, les modifications structurelles liées à l'âge ayant lieu à l'échelle microscopique, elles entraînent elles aussi des variations au niveau des propriétés mécaniques de la peau totale.

Enfin, un dernier paramètre non structurel à citer serait la vitesse, dont l'influence sur les propriétés mécaniques est notoire.

Du fait de l'importance du rôle joué par le derme, il en résulte que le comportement de la peau humaine en traction peut être assimilé à celui d'un tissu conjonctif hyperélastique non linéaire.

2. Chapitre 2 : Caractérisation mécanique d'un tissu conjonctif : de l'expérimentation à la modélisation

2.1. Introduction

Cette étude bibliographique est orientée vers la définition d'une méthode globale permettant à la fois de caractériser et de modéliser le comportement de la peau humaine en traction, sur des gammes de vitesses allant jusqu'au choc. Nous choisissons d'élargir cette revue de la littérature à des tissus géométriquement et structurellement similaires à la peau humaine, c'est-à-dire des tissus conjonctifs plan, compte tenu du peu de données disponibles sur la peau humaine. De plus, ce choix est cohérent avec les conclusions du chapitre 1, à savoir que le comportement de la peau en traction est celui d'un tissu conjonctif plan.

L'objectif principal de ce chapitre est l'étude des protocoles de tests appliqués à ces tissus ainsi que l'intérêt de ces protocoles dans la définition d'une loi de comportement adaptée, tout ceci en vue de la mise en place d'une méthode de caractérisation de la peau humaine.

Pour cela nous donnerons tout d'abord un aperçu général des problèmes à résoudre lors de la mise en place de protocoles de tests sur tissus conjonctifs, puis nous passerons en revue les hypothèses classiquement admises pour la modélisation du comportement de tissus conjonctifs.

Enfin, après cet aperçu général, nous porterons notre attention sur trois travaux d'importance incluant à la fois la caractérisation du tissu et le développement de sa loi de comportement. Chaque étude de cas se découpe en trois parties, en plus de l'étude du protocole de traction et de la loi de comportement développée, chacune des lois est ensuite testée sur les résultats expérimentaux de la peau humaine afin d'affiner notre choix dans la définition d'une loi de comportement pour la peau humaine.

2.2. Généralités sur les essais de traction

Dans ce paragraphe, nous nous intéresserons aux protocoles d'essais de traction portant sur des tissus conjonctifs plans et réalisés dans la mesure du possible jusqu'à rupture. Ceci qui implique que tous les essais cités sont réalisés *in vitro*.

Lors de la mise en place de ce type d'essai, tous se voient contraints de résoudre les habituels problèmes relatifs aux tissus biologiques. Sacks [Sacks, 2000] a listé: des petits échantillons difficiles à fixer sans les endommager, des matériaux à la structure hétérogène sur lesquels il est difficile d'identifier des axes principaux, la difficulté d'appliquer une charge constante et répartie sur les bords et enfin une grande variabilité inter individus accentuée par l'influence de la température et de l'humidité. Dans les paragraphes suivants sont donc présentées les diverses solutions proposées à ce propos dans la littérature. La synthèse de toutes ces données bibliographiques se trouve dans les tableaux A1-3 et A1-4 de l'annexe 1.

2.2.1. Conservation du tissu

La tendance générale est à la conservation des tissus biologiques dans une solution de sérum physiologique à 4°C. [Belkoff, 1991, Billiar-a, 2000, Choi, 1990, Daly, 1982, Lanir-a, 1974, Schmid, 2005, Snedecker, 2005, Yamada, 1970]. D'après Yamada [Yamada, 1970], les tissus doivent être testés dans un état mécaniquement stable où les propriétés mécaniques sont constantes, il considère cet état atteint quand la *rigor mortis* a disparu et que le tissu est saturé en eau. La durée de cet état pour la peau est, selon-lui, de 3 jours. Cependant, les propriétés mécaniques des tissus commencent à s'altérer:

- ✓ si la durée de conservation dans du sérum physiologique est supérieure à 48h [Daly, 1982], la durée habituelle étant de 1 à 3 jours,
- ✓ si le tissu est congelé [Clavert, 2001, Quirinia, 1991].

2.2.2. Systèmes d'attache

Les systèmes d'attache conçus pour des tissus biologiques mous doivent remplir les fonctions suivantes:

- ✓ s'adapter à des petites tailles d'échantillons,
- ✓ maintenir le tissu sans l'altérer,
- ✓ parer aux phénomènes de diminution d'épaisseur dus à des variations de température ou d'humidité et entraînant le glissement du tissu dans les mors,
- ✓ nécessiter un temps de mise en place minimum (toute manipulation du tissu crée des précontraintes).

Les solutions les plus répandues dans la littérature sont alors de plusieurs types. Nous trouvons des systèmes de plaques recouvertes d'un papier de verre ou équivalent que l'on serre en étaux illustrés par la Figure 2-1b [Mansour, 1993, Stemper, 2005]. Leur validité en grandes déformations est plutôt compromise. En effet, un serrage trop faible entraîne le glissement du tissu, alors qu'un serrage trop important conduit à la rupture du tissu dans le mors. Sur le même principe, Vescovo [Vescovo, 2000] utilise des mors à congélation composés de deux plaques à effet Peletier. Lepetit [Lepetit, 2004] développe lui des mors cryogéniques à la géométrie plus complexe. Cependant, la mise en œuvre de telles techniques de congélation reste assez lourde.

Viennent ensuite des systèmes composés de petits crochets, reliés à des fils, répartis régulièrement sur les extrémités de l'éprouvette à la manière d'un trampoline comme le montre la Figure 2-1a [Lanir, 1974, Sacks, 1998]. Le risque en grandes déformations est l'apparition de déchirures locales.

Enfin, dans le cas de grandes déformations, la surface de contact tissu/mors doit être augmentée en modifiant la géométrie des mors, soit en leur donnant des formes complémentaires arrondies [Mason, 2005] ou en enroulant le tissu [Jacquemoud-a, 2004], ce que nous retrouvons sur la Figure 2-1c.

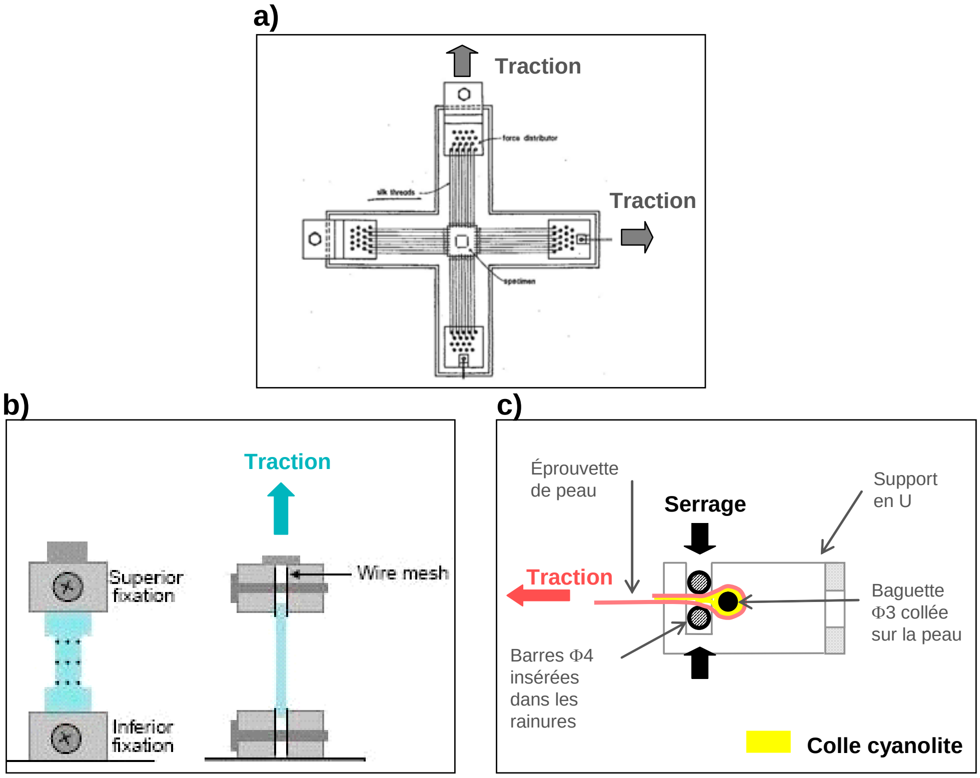


Figure 2-1 : Différents types de mors adaptés aux tissus biologiques mous: a) trampoline (extrait de [Lanir-a, 1974]), b) plaques (extrait de [Stemper, 2005]) et c) mors à enroulement et collage (extrait de [Jacquemoud-a, 2004]).

2.2.3. Techniques de mesure de déformations

Les techniques de mesures traditionnelles sont peu recommandées lors de l'étude de tissus biologiques mous. En effet,

- ✓ les capteurs de déplacement donnent des valeurs globales qui peuvent être erronées en cas de glissement dans les mors [Belkoff, 1991, Del Prete, 2004, Snedeker, 2005],
- ✓ toute manipulation sur un tissu mou altérant très rapidement ses propriétés mécaniques, le collage de jauges est à bannir,
- ✓ la plupart des tissus mous étant très hétérogènes, ils nécessitent des mesures plus locales.

Il semble donc que les techniques les plus adaptées soient les mesures sans contact [Sanghavi, 2004]. Ces techniques suivent le même principe général à savoir que le tissu est préalablement recouvert de marqueurs, l'essai est filmé dans son intégralité et les images obtenues sont traitées automatiquement par des logiciels de suivi de marqueurs, permettant de calculer les déplacements de ces points. La différence réside dans le choix du type de marqueurs à dessiner sur le tissu, ce qui implique de définir un logiciel de traitement adapté.

Certains préfèrent des motifs réguliers tels des lignes parallèles (Figure 2-2a) [Lanir-a, 1974, Schmid, 2005], une grille complète (Figure 2-2b) [Daly, 1982, Mohan, 1982] ou encore des motifs réguliers de points composés de 4 à 16 points (Figure 2-2c) [Brèque, 2002, Shah, 2006, Stemper, 2005].

D'autres [Marcellier, 2001, Sanghavi, 2004] optent pour des motifs aléatoires appelés mouchetis (Figure 2-2b), ce qui implique l'utilisation de logiciels de corrélation d'images pour la mesure des déplacements. Cette dernière méthode s'avère très intéressante pour des tissus hétérogènes car elle apporte une mesure locale du champ complet de déformation. Cependant, il faut noter que les utilisateurs de la technique de corrélation d’images se limitent à des essais à faibles vitesses.

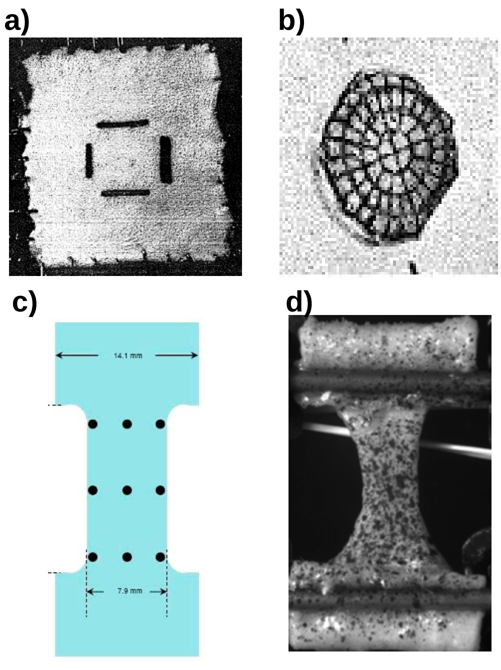


Figure 2-2 : Différents types de marqueurs utilisés sur tissus biologiques mous: a) paires de traits (extrait de [Lanir-b, 1974]), b) grille (extrait de [Mohan, 1983]), c) motif régulier de points (extrait de [Stemper, 2005]) et d) mouchetis aléatoire (extrait de [Jacquemoud-a, 2004]).

2.2.4. Différents types de traction

Le choix du type de test est en général dicté par le cadre de l'étude et les applications qui en sont faites.

Des travaux comme ceux de Yamada [Yamada,70] ont permis d'établir une large base de données dans laquelle les propriétés des tissus humains, dont la peau, sont définies à partir d'essais de traction quasi-statique unidirectionnelle jusqu'à rupture. Des essais quasi-statiques deviennent avantageux lorsque l'on désire contrôler parfaitement la vitesse de traction et les arrêts avant la rupture. Des essais de traction quasi-statique unidirectionnelle jusqu'à rupture permettent donc par exemple, l'étude de la viscosité de la peau humaine en y ajoutant des tests de relaxation [Dunn, 1983], l'analyse de la microstructure de la peau en cours d'essais [Belkoff, 1991, Daly, 1982] ou alors le développement d'une méthode de mesure optique de déformation [Brèque, 2002], dont la mise au point est facilitée à faible vitesse. Nous remarquerons que seuls [Dunn, 1983] et [Daly, 1982] s'intéressent à la peau humaine.

Ceux dont l'objectif est l'élaboration de lois de comportement se cantonnent à des essais quasi-statiques en "petites déformations". La plupart des auteurs prônent la traction bidirectionnelle que ce soit sur la peau de lapin [Lanir-a, 1974], les valves cardiaques de porc [Billiar-a, 2000] ou le péricarde bovin [Sacks, 1998, Sacks, 2000]. Pour de tels matériaux anisotropes, au mieux orthotropes, ce type d'essai apporte des propriétés mécaniques en deux dimensions (dans le plan de traction) indispensables à l'écriture des lois. Cependant, certains comme Marcellier [Marcellier, 2001], se limitent à de la traction unidirectionnelle sur la peau humaine car l'utilisation de la mesure de déformation par corrélation d'image donne le champ complet de déformations (trois composantes E_{11}, E_{22} et E_{12} dans le plan de traction). De plus, Sacks [Sacks, 1998, Sacks, 2000] fait remarquer qu'en présence de tissus anisotropes comme le péricarde bovin, l'utilisation de mesures optiques de déformations nécessite de choisir une région au centre de l'éprouvette où les déformations sont considérées comme homogènes. Aux déformations dans le plan de traction, certains ajoutent une mesure de l'épaisseur:

- ✓ soit au cours de l'essai effectuée par deux rayons laser positionnés de chaque côté de l'éprouvette [Shah, 2006]
- ✓ soit en fin d'essais effectuée au microscope biréfringent sur coupes fixées et congelées, réalisées sur la peau étirée [Del Prete, 2004].

Toutes les études rapportées ci-dessus concernent des essais de traction dit quasi-statiques dont les vitesses varient entre 2.10^{-5}m/s et 8.10^{-2}m/s pour une valeur fréquemment relevée de l'ordre de 10^{-4}m/s. La rupture n'est jamais atteinte ce qui implique que les lois qui en découlent se limitent au domaine élastique.

Quant aux essais de traction dynamique, ils concernent en général des travaux dans le domaine de la mécanique des chocs ayant pour but la prédiction des risques de blessure lors d'accidents de la route, domaine qui nous intéresse. De ce fait, il sont effectués à des vitesses classiquement utilisées sur échantillons isolés dans le domaine du choc automobile, les auteurs [Mohan, 1982, Shah, 2006, Snedecker, 2005] testent des gammes de vitesse allant d'environ 10^{-4}m/s à quelques mètres par seconde (1-7m/s) afin d'évaluer l'influence de la vitesse sur les propriétés mécaniques. L'objectif étant d'analyser la lésion des tissus, ceux-ci sont testés jusqu'à rupture soit en traction bidirectionnelle pour l'aorte [Mohan, 1982, Shah, 2006] soit en traction unidirectionnelle sur la capsule de rein [Snedecker, 2005]. Les propriétés mécaniques ainsi obtenues servent à alimenter des modèles éléments finis du corps humain dédiés à la prédiction de risques de blessures. Cependant notons que la littérature n'est pas très riche en données concernant les essais dynamiques sur la peau humaine.

Abordons enfin un dernier point important: la géométrie des éprouvettes. Déjà évoquée dans le précédent rapport [Jacquemoud-a, 2004], elle doit être adaptée au type de traction choisie. En règle générale, les éprouvettes en forme de croix se prêtent relativement bien à la traction bidirectionnelle [Billiar-a, 2000, Brèque, 2002, Mason, 2005, Sacks, 1998, Shah, 2006] alors que les auteurs effectuant des essais de traction unidirectionnelle [Belkoff, 1991, Brèque, 2002, Mohan, 1982, Stemper, 2005, Yamada, 1970] préfèrent des éprouvettes en forme de I, avec une partie centrale de plus faible largeur facilitant la rupture. Nous pouvons cependant noter quelques exceptions d'auteurs [Daly, 1982, Del Prete, 2004, Dunn, 1983, Snedecker, 2005] utilisant des éprouvettes rectangulaires en traction unidirectionnelle et Lanir [Lanir-a, 1974] qui choisit une forme carrée pour ses essais bidirectionnels. Les tailles des éprouvettes restent relativement petites, dépendant de celle du prélèvement obtenu, elles varient entre 10 et 40mm de côté, quelle que soit la forme choisie.

2.3. Généralités sur les lois de comportement

Ce paragraphe est une revue des principales hypothèses utilisées dans la littérature lors de la formulation de lois de comportement destinées aux tissus conjonctifs plan.

2.3.1. Comportement élastique

Tous les auteurs s'accordent à dire que le comportement de ces tissus est hyperélastique non linéaire lorsqu'ils sont soumis à de la traction. Ce qui conduit à utiliser une description Lagrangienne dans le cas de grandes déformations.

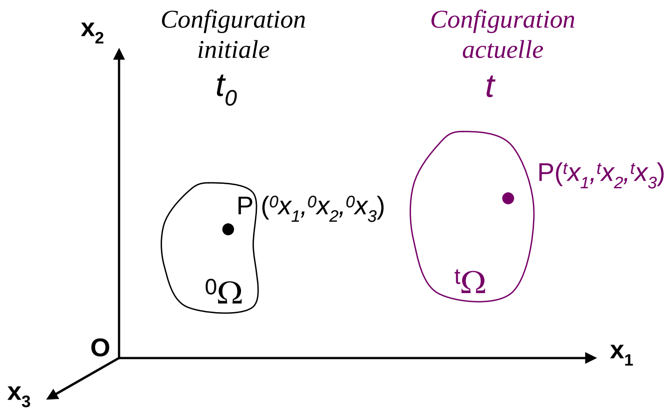


Figure 2-3 : Coordonnées dans le repère (O, x_1, x_2, x_3) d'une particule P appartenant au solide déformable Ω dans la configuration initiale t_0 et après transformation dans la configuration actuelle t.

Dans le repère (O, x_1, x_2, x_3) défini sur la Figure 2-3, soient ${}^0\mathbf{x}$ le vecteur des coordonnées d'une particule P dans la configuration initiale (t_0) et ${}^t\mathbf{x}$ le vecteur de ses coordonnées dans la configuration actuelle (t) après déformation.
Le tenseur gradient de la transformation **F**, défini par l'Équation 2-1, exprime à la fois la déformation et la rotation de solide rigide d'un élément matériel **dx** entre la configuration initiale et actuelle.

$$\mathbf{d}{}^t\mathbf{x} = \mathbf{F}.\mathbf{d}{}^0\mathbf{x} \text{ avec } F_{ij} = \frac{\partial {}^t x_i}{\partial {}^0 x_j}$$

Équation 2-1

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T.\mathbf{F} - \mathbf{I}) \text{ avec } \mathbf{I} \text{ matrice unité}$$

Équation 2-2

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T.\mathbf{F}$$

Équation 2-3

Les déformations sont exprimées, soit à l'aide du tenseur des déformations de Green-Lagrange **E** défini par l'Équation 2-2, soit par le tenseur des déformations de Cauchy-Green droit **C** donné par l'Équation 2-3, dont les trois invariants sont de la forme:

$$I_1 = tr\mathbf{C}$$

Équation 2-4

$$I_2 = \frac{1}{2}[(tr\mathbf{C})^2 + tr\mathbf{C}^2]$$

Équation 2-5

$$I_3 = \det \mathbf{C}$$

Équation 2-6

Ce choix d'expression des déformations impose d'utiliser leur conjugué énergétique en terme de contrainte, c'est-à-dire le 2nd tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff **S**, qui dérive d'un potentiel d'énergie de déformation *W* suivant l'Équation 2-7.

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} = 2\frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}}$$

Équation 2-7

Les équations constitutives relevées dans la littérature suivent ces principes généraux, leur différence réside dans la formulation du potentiel *W*. Différentes formes de potentiels *W* seront donc présentées par la suite.

La plus part des auteurs émettent quelques hypothèses supplémentaires afin d'alléger les formulations.

Un tissu conjonctif étant composé à 65% d'eau au minimum [Silver, 1992], sa densité est choisie égale à celle de l'eau et le matériau est considéré comme incompressible. L'hypothèse d'incompressibilité permet la simplification suivante:

$$I_3 = \det \mathbf{C} = 1$$

Équation 2-8

Les essais n'apportant, au mieux, que des mesures de déformations dans deux directions, la variation d'épaisseur est, soit négligée, soit déduite de l'hypothèse d'incompressibilité. Les tissus étudiés étant des membranes de faible épaisseur, les calculs sont effectués dans l'hypothèse des contraintes planes, d'où:

$$S_{13} = S_{23} = S_{31} = S_{32} = 0$$

Équation 2-9

De plus, les auteurs [Sacks, 2003, Tong, 1976] se placent relativement souvent dans le cas d'essais de traction (unidirectionnels ou bidirectionnels) parfaits où le cisaillement est nul, soit:

$$S_{12} = S_{21} = 0$$

Équation 2-10

2.3.2. Comportement jusqu'à rupture

Dans l'optique de décrire le comportement des tissus conjonctifs jusqu'à rupture, des notions de la mécanique de l'endommagement popularisée en France par Lemaître [Lemaître, 1988] sont nécessaires à l'élaboration de certaines des lois [Arnoux, 2000]. Lemaître et Chaboche [Lemaître, 1988] définissent l'endommagement par l'apparition de micro cavités ou fissures à l'intérieur de la structure au cours de la sollicitation.
Soit s la section d'un élément de volume. Il est possible de distinguer une section endommagée s_d (représentée par l'aire de toutes les cavités) d'une section saine $\tilde{s}$. Cette dernière, dite section effective, est définie par:

$$\tilde{s} = s - s_d$$

Équation 2-11

Le paramètre d'endommagement D est alors le rapport entre l'aire des cavités et l'aire totale du matériau:

$$D = \frac{s - \tilde{s}}{s}$$

Équation 2-12

Dans un cas isotrope, D est un scalaire dont les valeurs varient de 0 pour un matériau sain à 1 lorsque le matériau est complètement endommagé.
En considérant les contraintes de Cauchy $\sigma = F/s$, la notion de contrainte effective est introduite pour un matériau endommagé à travers l'Équation 2-13.

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{s}} = \frac{\sigma}{1 - D}$$

Équation 2-13

De même, l'Équation 2-14 permet de d'écrire l'énergie libre d'un matériau endommagé W_d à partir du potentiel d'énergie de déformation élastique W.

$$W_d = (1 - D)W$$

Équation 2-14

Cette méthode n'est évidemment pas la seule permettant de traiter de l'endommagement des matériaux hyperélastiques, nous pouvons également citer d'autres approches comme celle de Chagnon [Chagnon, 2004, 2006], qui s'applique aux élastomères, matériaux non biologiques mais hyperélastiques isotropes.

2.4. Fung & al. – la référence

2.4.1. Essais de traction

Lanir et Fung [Lanir-a, 1974, Lanir-b, 1974] choisissent la peau de lapin pour réaliser une série d'essais de traction unidirectionnelle et bidirectionnelle quasi-statique à différentes vitesses : 0.02 – 0.2 – 2.0mm/s.

Des éprouvettes carrées, 35*35mm², sont découpées suivant des lignes anatomiques puis fixées à la machine de traction à l'aide de 68 crochets et fils à la manière d'un trampoline.

Les auteurs conçoivent pour l'occasion une méthode optique de mesure de déplacement appelée "Video-Dimension-Analyzer". La méthode VDA permet, à partir du signal des caméras, de convertir les différences de niveaux de gris en variations de tension, celles-ci sont ensuite transformées en déplacements. Les mesures sont effectuées à partir de deux paires de traits distants de 5mm dessinés au centre de l'éprouvette où l'effet des concentrations de contraintes dues aux sutures est négligé. Il en résulte des mesures synchronisées des déplacements et des efforts dans les deux directions (perpendiculaires) de traction.

Lanir et Fung mettent en évidence le comportement non linéaire de la peau de lapin ainsi qu'une forte orthotropie suivant des axes correspondant aux directions anatomiques. Lanir suggère que ces directions doivent être associées aux orientations privilégiées de fibres de collagène. De plus, les caractéristiques contrainte/déformation en charge et en décharge ne semblent pas affectées par la vitesse de déformation qui varie d'un facteur 100 mais reste toujours inférieure à 2.0mm/s.

2.4.2. Loi de comportement

Comme il l'a été rappelé au paragraphe 2.3.1, la différence entre les lois de comportement présentées ici se réduit à la forme choisie pour le potentiel d'énergie de déformation W. Tong et Fung [Tong, 1976] effectuent leur choix dans l'optique de réduire le nombre de paramètres du matériau. Du fait de l'insensibilité à la vitesse de déformation, le potentiel d'énergie de déformation W peut être défini séparément pour la charge et la décharge. Tout d'abord, Tong et Fung préfèrent une forme exponentielle à une forme polynomiale étant donné que la description du comportement de la peau imposerait d'utiliser un polynôme de trop grand degré et la prise en compte de l'anisotropie nécessiterait trop de coefficients. En se basant ensuite sur la forme de la courbe expérimentale contrainte/déformation, Tong et Fung définissent un potentiel W

"biphasique" permettant de décrire une première phase de faible pente suivie d'une deuxième phase de forte pente. La forme généralisée de *W* s'écrit alors:

$$\begin{aligned}
&\rho_0 W = f_1(\alpha, E) + c.\exp(f_2(a, E)) \\
&f_1(\alpha, E) = \alpha_1.E_{11}{}^2 + \alpha_2.E_{22}{}^2 + 2\alpha_4.E_{11}.E_{22} \\
&f_2(a, E) = a_1.E_{11}{}^2 + a_{2.}E_{22}{}^2 + a_3 E_{12}{}^2 + 2.a_4.E_{11}.E_{22} + \gamma_1.E_{11}{}^3 + \gamma_{2.}E_{22}{}^3 \\
&\qquad + \gamma_4.E_{11}{}^2.E_{22} + \gamma_5.E_{11}.E_{22}{}^2
\end{aligned}$$

Équation 2-15

avec ρ_0 densité initiale du tissu et α_i, a_i, γ_i, c les douze paramètres de la loi.
Le premier terme de *W* correspond aux faibles niveaux de contraintes alors que le deuxième terme, de forme exponentielle, s'applique aux niveaux de contraintes élevés.

Au vu du nombre élevé de paramètres à déterminer dans l'Équation 2-15, les auteurs adoptent une forme réduite à sept paramètres donnée par l'Équation 2-16, dans le but d'appliquer cette loi à la peau de lapin.

$$\begin{aligned}
&\rho_0 W = \frac{1}{2} f_1{}^*(\alpha, E) + \frac{1}{2} c.\exp(f_2{}^*(a, E)) \\
&f_1{}^*(\alpha, E) = \alpha_1.E_{11}{}^2 + \alpha_2.E_{22}{}^2 + 2\alpha_4.E_{11}.E_{22} \\
&f_2{}^*(a, E) = a_1.E_{11}{}^2 + a_{2.}E_{22}{}^2 + 2.a_4.E_{11}.E_{22}
\end{aligned}$$

Équation 2-16

Pour une détermination des paramètres expérimentaux, γ_i est posé égal à 0 dans l'Équation 2-16. De plus, le cisaillement est négligé étant donné qu'expérimentalement $E_{12} \approx 0$, ce qui rend impossible la détermination du paramètre de cisaillement a_3. Dans l'hypothèse d'un tissu de densité $\rho_0 = 1$ comme la peau de lapin, l'expression simplifiée des contraintes de Piola-Kirchhoff II dérive de l'Équation 2-16 suivant l'Équation 2-7:

$$\begin{aligned}
&S_{11} = \alpha_1 E_{11} + \alpha_4 E_{22} + c(a_1 E_{11} + a_4 E_{22})\exp[X] \\
&S_{22} = \alpha_4 E_{11} + \alpha_2 E_{22} + c(a_4 E_{11} + a_2 E_{22})\exp[X] \\
&X = a_1.E_{11}{}^2 + a_{2.}E_{22}{}^2 + 2a_4 E_{11} E_{22}
\end{aligned}$$

Équation 2-17

Cette loi ainsi définie permet de décrire le comportement orthotrope de la peau de lapin. Cependant, un problème persiste lors de son application à un tissu biologique : la variabilité des paramètres d’un individu à l’autre. Les auteurs proposent donc de définir des jeux de paramètres par individu ou par classe de matériau tout en sachant qu’il est difficile de les généraliser. L’élaboration de cette loi n’en reste pas moins un travail d’importance concernant les tissus biologiques, comme le conclut Sacks [Sacks, 2000]: "*This is perhaps the most broadly used constitutive model to date for the biaxial response of soft biological tissues*"

2.4.3. Application à la peau humaine

L’objectif de paragraphe est de tester si cette loi peut décrire le comportement de la peau humaine, et dans l’affirmative, d’identifier les paramètres correspondants. Les résultats expérimentaux utilisés sont ceux obtenus à la suite d’essais de traction réalisés dans le cadre de notre étude sur la peau humaine. Les courbes expérimentales sont sélectionnées de manière à être représentatives de l’ensemble des essais soit quasi-statiques, soit dynamiques. Tous les détails relatifs aux expérimentations seront donnés au chapitre suivant, cependant nous précisons ici le calcul des grandeurs nécessaires aux tests sur les lois de comportement. D’une part, à partir d'un essai de traction unidirectionnelle suivant la direction x_1 par exemple, il est possible de définir les valeurs expérimentales:

- ✓ de la contrainte de Piola-Kirchhoff II suivant la direction de traction S_{11exp},
- ✓ des trois composantes E_{11}, E_{22} et E_{12} des déformations de Green_Lagrange (valeurs moyennes locales).

D’autre part, la valeur théorique S_{11th} de la contrainte est calculée à partir des équations constitutives de chacune des lois. Enfin, le calcul des paramètres du matériau correspondant à chacune des lois testées est effectué par minimisation de l'écart entre théorie et expérimentation à l'aide de la méthode des moindres carrés. Cette méthode sera employée pour les trois études de cas suivantes.

Concernant la loi élaborée par Tong et Fung, la forme simplifiée de l'Équation 2-17 est appliquée aux résultats d’un essai de traction quasi-statique unidirectionnel suivant x_1. L’expression de la contrainte théorique dans la direction de traction prend donc la forme suivante:

$$S_{11th} = \alpha_1 E_{11} + \alpha_4 E_{22} + c(a_1 E_{11} + a_4 E_{22}) \exp[X]$$
$$X = a_1 . E_{11}{}^2 + a_{2.} E_{22}{}^2 + 2 a_4 E_{11} E_{22}$$

Équation 2-18

L'Équation 2-18 donne 6 paramètres à identifier. L’essai choisi ici à titre d’exemple (RHS42) est caractéristique de l’ensemble des essais quasi-statiques sur la peau humaine. La courbe correspondante de l'évolution des contraintes de Piola-Kirchhoff II S_{11} en fonction de la déformation de Green-Lagrange E_{11} est représentée sur la Figure 2-4.

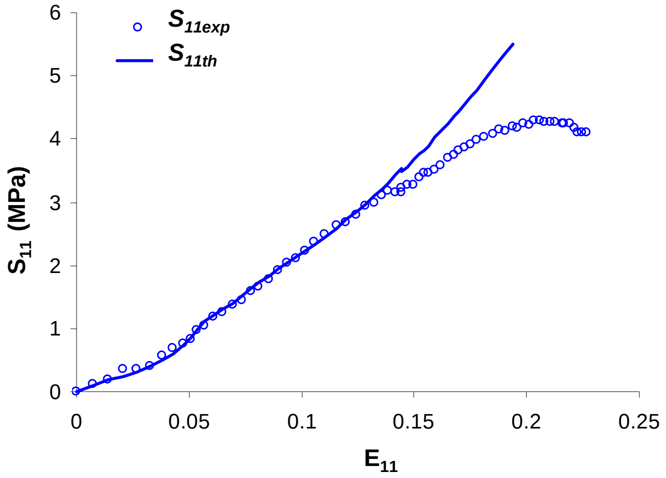


Figure 2-4 : Evolution, en fonction de la déformation de Green-Lagrange E_{11}, des contraintes de Piola-Kirchhoff II expérimentales (S_{11exp}) de l'essai RHS42 et théoriques (S_{11th}) calculées avec la loi de Fung simplifiée.

Il apparaît (Figure 2-4) que la loi de Tong et Fung permet de décrire correctement la première partie élastique du comportement de la peau humaine. Les six paramètres de la loi, donnés dans le Tableau 2-1, ont donc été identifiés sur cette première partie élastique. Cependant, toute la phase adoucissante de la courbe ainsi que celle de la rupture ne sont pas modélisées. De plus, même en utilisant la forme simplifiée de la loi sur un essai de traction unidirectionnel, il reste encore six paramètres à identifier.

α**2**	40.0694
α**4**	0.0001
a1	5.2128
a2	0.0001
a4	14.1237
c	2.0867

Tableau 2-1 : Paramètres de la loi de Tong et Fung simplifiée identifiés pour la peau humaine sur l'essai RHS42.

2.5. Sacks & al. – incorporation de l'orientation des fibres dans la loi de Fung

2.5.1. Essais de traction

Les essais réalisés par Sacks et ses collaborateurs portent tous sur de la traction bidirectionnelle quasi-statique jusqu'à des déformations n'excédant pas 30% (Green-Lagrange). Plusieurs tissus conjonctifs sont testés : du péricarde bovin [Sacks, 1998] et de la valve aortique de porc [Billiar-a, 2000].

Pour cela, des éprouvettes de dimensions variant de 25*25mm² (péricarde) à 16*16mm² (valve) sont découpées dans une zone sélectionnée pour sa répartition uniforme de fibres. Le système de fixation est repris des travaux de Lanir et Fung [Lanir-a, 1974], à savoir 4 fils attachés sur chaque côté de l'éprouvette.

L'originalité de ce travail est dans l'utilisation du dispositif SALS (Small Angle Light Scattering) permettant une quantification rapide de la distribution angulaire des fibres [Sacks, 1997]. En effet, le tissu est traversé par un faisceau laser, l'analyse de la répartition spatiale de l'intensité lumineuse transmise donne directement des renseignements sur la structure. La variation angulaire de l'intensité lumineuse peut être approximée par une fonction statistique gaussienne dont la moyenne et l'écart type correspondent à l'orientation privilégiée et le degré d'orientation des fibres [Billiar-b, 2000]. Cette méthode, tout comme celle développée par Schmid [Schmid, 2005] à partir de rayons X, apporte des données quantitatives sur les orientations de fibres, ce qui est plus difficile à obtenir à partir d'observations microscopiques du tissu, que ce soit en microscopie optique [Holzapfel, 2006] ou électronique à balayage [Belkoff, 1991].

Dans leur protocole, Billiar et Sacks incluent également des mesures optiques de déplacement qui sont concentrées sur une zone considérée comme homogène, dont la taille 5*5mm² et la situation au centre de l'éprouvette sont choisies de telle sorte que les phénomènes de réorientation de fibres ou de concentration de contrainte dues aux moyens de fixation n'aient pas d'influence. Les calculs sont effectués par suivi de 4 à 9 marqueurs donnant des valeurs de déformation dans les deux directions de traction. Les valeurs d'efforts correspondantes sont mesurées dans les mêmes axes.

Les résultats dévoilent un comportement anisotrope non linéaire pour la valve et un comportement orthotrope non linéaire pour le péricarde. Les auteurs démontrent que l'application d'un modèle isotrope sur les résultats expérimentaux du péricarde ne convient pas [Sacks, 1998]. De plus les orientations privilégiées des fibres et les axes des déformations principales se superposent démontrant l'influence de l'architecture du réseau de fibres sur la déformation du tissu [Sacks, 1998].

2.5.2. Loi de comportement

La loi de comportement élaborée par Sacks et al. fait suite à une série d'études dont l'objectif est de modéliser le comportement de tissus biologiques fibreux, en se basant sur des paramètres structurels, relatifs au réseau de fibres de collagène. Les premières propositions [Decraemer, 1980] sont des lois monodimensionnelles définies telles que l'effort total supporté par le tissu est la somme des contributions de chacune des fibres en mesure de résister, c'est-à-dire suffisamment "déplissée". Lanir [Lanir, 1983], à la suite de ses travaux en collaboration avec Fung, ajoute une deuxième dimension et propose un potentiel d'énergie de déformation de forme exponentielle incluant des paramètres d'orientation des fibres. Billiar et Sacks [Billiar-b, 2000, Sacks, 1999, 2003] vont donc reprendre cette formulation en y apportant une description plus précise de la distribution angulaire des fibres mesurée avec le système SALS.

Tout comme leur prédécesseurs et par souci de simplification, Billiar et Sacks représentent le tissu par un réseau plan de fibres de collagène qui assurent la majorité de sa résistance à la traction. En effet, les fibres d'élastine ne sont présentes qu'en faible quantité par rapport à celles de collagène et la substance fondamentale génère des forces hydrostatiques négligeables par rapport à celles exercées par les fibres de collagène.

Lors de la définition de *W*, il faut distinguer l'échelle globale du tissu de celle de la fibre. A l'échelle globale, l'état de déformation et de contrainte du tissu est représenté par les tenseurs **E** et **S** définis dans le repère global (x_1,x_2). Chaque fibre est un matériau à une dimension, défini par son vecteur directeur $\mathbf{x_f}$ dans le repère global (x_1,x_2):

$$\mathbf{x_f} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}_{(x_1,x_2)}$$

Équation 2-19

La déformation de Green-Lagrange de la fibre E_f est calculée en transportant le tenseur des déformations globales du tissu **E** dans le repère de la fibre:

$$E_f = \mathbf{x_f}^T.\mathbf{E}.\mathbf{x_f}$$

Équation 2-20

La forme des contraintes de Piola-Kirchhoff II de la fibre est choisie de forme exponentielle:

$$S_f = a(\exp(b.\mathrm{E}_f) - 1)$$

Équation 2-21

avec *a* et *b* paramètres de la fibre.

Leur organisation en réseau est telle que la distribution angulaire des fibres dans le tissu est définie par la fonction statistique *R* [Billiar-b, 2000]:

$$R(\theta) = \frac{1}{\sigma_R.\sqrt{2\pi}}.\exp\left[\frac{-(\theta-\mu_R)^2}{2{\sigma_R}^2}\right]$$

Équation 2-22

dont la moyenne μ_R et l'écart type σ_R donnent respectivement l'orientation privilégiée et le degré d'orientation des fibres.

Le potentiel global d'énergie de déformation du tissu est la somme des énergies de chaque fibre suivant leur orientation. Sachant que le produit $R(\theta)d\theta$ représente le taux de fibres orientées entre θ et $\theta+d\theta$, le potentiel d'énergie de déformation par unité de volume *W* s'écrit:

$$W = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} w(E_f).R(\theta).d\theta$$

Équation 2-23

avec *w* le potentiel d'énergie de déformation de la fibre.
Le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff II du tissu **S** dérive du potentiel d'énergie de déformation *W* suivant l'Équation 2-7. Dans le cas d'un matériau de densité égale à un, son expression est donnée par l'Équation 2-24, où $[\mathbf{x_f} \otimes \mathbf{x_f}]_{ij} = x_{fi}x_{fj}$ et x_{fi} est la i^ème^ composante du vecteur $\mathbf{x_f}$.

$$\mathbf{S} = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{S}_f(\mathrm{E}_f).[\mathbf{x_f} \otimes \mathbf{x_f}].R(\theta).d\theta$$

Équation 2-24

Les équations constitutives (Équation 2-25) qui en découlent, définissent une loi de comportement à quatre paramètres dont deux sont propres au comportement de la fibre: *a* et *b* et les deux autres μ_R et σ_R sont propres à leur répartition.

$$\begin{cases} S_{11} = \displaystyle\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} S_f(E_f).R(\theta).\cos^2\theta.d\theta \\ S_{22} = \displaystyle\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} S_f(E_f).R(\theta).\sin^2\theta.d\theta \\ S_{12} = \displaystyle\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} S_f(E_f).R(\theta).\cos\theta.\sin\theta.d\theta \end{cases}$$

Équation 2-25

Cette loi permet de décrire correctement le comportement non linéaire orthotrope de tissus tels le péricarde bovin ou la valve aortique. Dans ces deux cas, l'orientation privilégiée des fibres μ_R ayant été mesurée expérimentalement, seuls les paramètres *a*, *b* et σ_R sont déterminés par identification pour chaque tissu. Les auteurs observent que les valeurs de σ_R ainsi estimées correspondent aux valeurs mesurées expérimentalement pour les fibres de gros diamètres (correspondant au collagène), alors que les valeurs de σ_R pour les fibres de petits diamètres (élastine) sont très différentes. Ceci confirme le rôle majeur des fibres de collagène lors de la traction d'un tissu conjonctif.

Par comparaison à la loi de Tong et Fung [Tong, 1976], cette loi présente l'avantage d'avoir un nombre réduit de paramètres dont certains (μ_R et σ_R) ont une signification physique.

2.5.3. Application à la peau humaine

La loi de Billiar et Sacks est utilisée pour modéliser le comportement de la peau humaine lors d'un essai de traction quasi-statique unidirectionnel (RHS42) suivant x_1 conformément à la méthode explicitée au paragraphe 2.4.3.

L'expression de la contrainte S_{11th} est donnée ici par l'Équation 2-25. Par manque de données structurelles précises sur la peau humaine, l'orientation privilégiée des fibres est choisie parallèle à la direction de traction, soit $\mu_R = 0$ et σ_R est fixé égal à $\pi/2$, afin de modéliser un matériau très hétérogène. Les paramètres restant à déterminer sont donc *a* et *b*. Les valeurs identifiées pour la peau humaine sur l'essai RHS42 sont respectivement de $a = 0.9136$ et $b = 13.3314$, ce qui nous permet de tracer l'évolution des contraintes théoriques de Piola-Kirchhoff II S_{11th} en fonction de la déformation de Green-Lagrange E_{11} et de les comparer aux valeurs expérimentales (Figure 2-5).

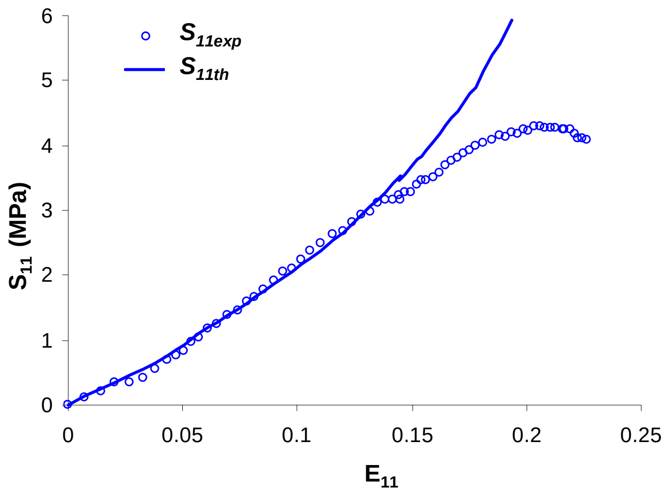


Figure 2-5 : Evolution, en fonction de la déformation de Green-Lagrange E_{11}, des contraintes de Piola-Kirchhoff II expérimentales (S_{11exp}) de l'essai RHS42 et théoriques (S_{11th}) calculées avec la loi de Sacks.

Tout comme celle de Tong et Fung, la loi de Sacks apporte une bonne description de la première partie élastique de la courbe contraintes/déformations mais ne permet pas de modéliser la dernière partie adoucissante avant la rupture. Elle présente cependant l'avantage d'avoir un nombre plus faible de paramètres dont certains, propres à la répartition des fibres, ont une signification physique.

2.5.4. Autres modèles du même type

La loi développée par Billiar et Sacks s'avère être une approche relativement simplifiée où le tissu est réduit à un réseau de fibres de collagène. D'autres s'attachent à modéliser les tissus mous par une ou plusieurs familles de fibres entourées d'une matrice correspondant à la substance fondamentale. Van Locke [Van Locke, 2004] ajoute même les phénomènes d'interactions entre les fibres à l'intérieur du muscle. Le potentiel d'énergie de déformation du tissu s'écrit alors comme la somme des potentiels de la matrice W_m et de chacune des familles de fibres W_f suivant l'Équation 2-26.

$$W = W_m + \sum_i W_f^{(i)}$$ avec $i=1,2,\ldots,k$ pour k familles de fibres

Équation 2-26

La matrice est en règle générale considérée comme un matériau homogène et isotrope à trois dimensions dont le potentiel W_m est défini en fonction des invariants des déformations globales du tissu. W_m prend des formes variables: Néo-Hookéenne pour l'artère [Gasser, 2006, Holzapfel, 2000], de type Mooney-Rivlin pour des muscles [Van Locke, 2004], de type exponentiel dans le cas du myocarde [Humphrey, 1987] ou agissant comme une pression hydrostatique sur la plèvre [Humphrey, 1987, Lanir, 1983].

Chaque famille de fibres est considérée comme un matériau homogène et isotrope à une dimension. W_f est défini en fonction de l'allongement selon l'axe des fibres avec le plus souvent une forme exponentielle pour les fibres de collagène [Gasser, 2006, Holzapfel, 2000, Humphrey, 1987] et linaire pour les fibres d'élastine [Humphrey, 1987]. L'accumulation de famille de fibres permet de modéliser des réseaux fibreux à plusieurs directions privilégiées. Certains [Holzapfel, 2006] choisissent une seule famille de fibre représentée par un potentiel W_f orthotrope de type Fung défini en fonction des déformations dans les deux directions orthogonales.

Ces formulations sont certainement plus proches de la réalité physique mais demandent l'identification d'un grand nombre de paramètres qui s'avère souvent difficile compte tenu du peu de données expérimentales. De ce fait, certains, à l'image de Billiar et Sacks, reviennent à des écritures simplifiées: Driessen [Driessen, 2005] n'utilise que l'énergie des fibres définie par Holzapfel. Demiray [Demiray, 1976] et Delfino [Delfino, 1997] écrivent le potentiel W en fonction des invariants des déformations du tissu sans différentier les fibres de la matrice, ils lui donnent une forme exponentielle afin de garder le comportement non linéaire.

2.6. Arnoux & al. – traitement de l'endommagement

2.6.1. Essais de traction

Remarquons tout d'abord que les travaux de Arnoux [Arnoux, 2000] sortent du cadre des tissus conjonctifs plan étant donné que le matériau choisi, le ligament humain du genou, est considéré à une dimension. Ils présentent cependant l'intérêt de porter sur des essais de traction unidirectionnelle à la fois dynamique ($V_{initiale}$ = 1.98m/s) et jusqu'à rupture, deux aspects peu évoqués dans la littérature concernant des tissus conjonctifs. De plus, dans la loi de comportement qui en découle, sera inclus de l'endommagement.

Concernant le protocole de traction, le système d'attache utilise les insertions osseuses des ligaments, qui, une fois plongées dans de la résine, sont facilement fixables sur la machine de traction.

Des capteurs classiques apportent à la fois des mesures d'effort dans les trois directions, de déplacement dans la direction de traction et d'accélération.

Les courbes effort/déplacement ainsi obtenues apparaissent non linéaires avec un comportement adoucissant lors de l'endommagement. L’hypothèse de traction pure est vérifiée par une mesure de contrainte nulle dans la direction transversale à la traction.

2.6.2. Loi de comportement

En premier lieu, du fait de l'hypothèse de traction unidirectionnelle, quelques simplifications supplémentaires s’appliquent aux définitions générales des tenseurs données, au paragraphe 2.3. Considérons l'allongement dans la direction de traction λ, l'expression du tenseur gradient de la transformation **F** prend alors la forme donnée par l'Équation 2-27, celle du tenseur des déformations de Cauchy-Green droit **C** est simplifiée conformément à l'Équation 2-28 et la seule composante non nulle des contraintes de Piola-Kirchhoff II est S_{11}.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{\lambda} \end{bmatrix}$$

Équation 2-27

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda \end{bmatrix}$$

Équation 2-28

L’élaboration de la loi de Arnoux [Arnoux, 2000, 2002] est fortement inspirée du modèle proposé par Pioletti [Pioletti, 1997], dont le potentiel d'énergie de déformation élastique W est exprimé en fonction des deux premiers invariants du tenseur des déformations de Cauchy-Green droit **C** et de deux paramètres élastiques α et β. Sa forme est donnée par l'Équation 2-29.

$$W_e(\mathbf{C}) = \alpha \exp\left[\beta(I_1 - 3)\right] - \frac{\alpha\beta}{2}\left(I_2 - 3)\right)$$

Équation 2-29

Le ligament est ici considéré comme viscoélastique d’où l’apparition d’un pseudo potentiel de dissipation W_v incluant un paramètre de viscosité η:

$$W_v(\dot{\mathbf{C}}) = \frac{\eta}{4} tr(\dot{\mathbf{C}})^2 (I_1 - 3)$$

Équation 2-30

Enfin Arnoux choisi une loi d'évolution de l'endommagement de type Lemaître (cf §2.3.2) décrite par l'Équation 2-31, où f_D est une fonction de non endommagement et Q, n et D_0 les paramètres d'endommagement.

$$\begin{cases} \dot{D} = \dfrac{1}{Q(D+D_0)^{1/n}} .\alpha\beta n(D+D_0)\dot{\lambda}\left[\exp\left(\beta\left(\lambda^2 + \dfrac{2}{\lambda} - 3\right)\right) - \dfrac{1}{\lambda}\right] \text{ si } f_D = 0 \\ \dot{D} = 0 \text{ si } f_D < 0 \end{cases}$$

Équation 2-31

Dès le début de l'essai, l'auteur choisit l'hypothèse $\dot{D} \neq 0$.

A partir de ces trois grandeurs W_e, W_v et D, il suffit maintenant d'écrire l'expression de l'énergie libre du matériau endommagé. Arnoux souhaite étudier l'influence de la viscoélasticité dans la loi, ce qui le mène à traiter tout d'abord le cas hyperélastique où l'énergie libre prend la forme de l'Équation 2-32 puis le cas hyper-viscoélastique où l'énergie libre est traduite par l'Équation 2-33.

$$W_{ed}(\mathbf{C}, D) = (1-D)W_e(\mathbf{C})$$

Équation 2-32

$$W_{ed}(\mathbf{C}, \dot{\mathbf{C}}, D) = (1-D)(W_e(\mathbf{C}) + W_v(\dot{\mathbf{C}}))$$

Équation 2-33

L'expression des contraintes de Piola-Kirchhoff II **S** dérive de l'énergie libre du matériau suivant l'Équation 2-7 et donne dans le cas hyperélastique:

$$\mathbf{S} = -p\mathbf{C}^{-1} + 2(1-D)\left[\frac{\partial W_e}{\partial I_1} + \frac{\partial W_e}{\partial I_2}(tr\mathbf{C}.\mathbf{I} - \mathbf{C})\right]$$

Équation 2-34

$$S_{11} = -p\frac{1}{\lambda} + 2\alpha\beta(1-D)\left[\exp(\beta.K) - \frac{1}{\lambda}\right]$$

Équation 2-35

avec $p = 2\alpha\beta(1-D)\dfrac{1}{\lambda}\left[\exp(\beta.K) - \dfrac{1}{2}\left(\lambda^2 + \dfrac{1}{\lambda}\right)\right]$

Équation 2-36

et $K = \left(\lambda^2 + \dfrac{2}{\lambda} - 3\right)$

Équation 2-37

L'écriture de l'incompressibilité se fait ici par l'ajout d'une pression hydrostatique p (Équation 2-36). La loi est alors caractérisée par cinq paramètres: deux élastiques et trois d'endommagement.
Dans le cas hyper-viscoélastique, les contraintes de Piola-Kirchhoff II **S** deviennent:

$$\mathbf{S} = -p\mathbf{C}^{-1} + 2(1-D)\left[\frac{\partial \mathrm{W}_e}{\partial I_1}\mathbf{I} + \frac{\partial \mathrm{W}_e}{\partial I_2}\left(tr\mathbf{C}.\mathbf{I} - \mathbf{C}\right) + \frac{\partial \mathrm{W}_v}{\partial \dot{\mathbf{C}}}\right]$$

Équation 2-38

$$S_{11} = -p\frac{1}{\lambda} + 2\alpha\beta(1-D)\left[\exp(\beta.K) - \frac{1}{\lambda}\right] + (1-D).\eta.K.\dot{\lambda}^2$$

Équation 2-39

avec $p = 2\alpha\beta(1-D)\frac{1}{\lambda}\left[\exp(\beta.K) - \frac{1}{2}\left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda}\right)\right] - (1-D)\eta.K.\frac{\dot{\lambda}^2}{2\lambda^4}$

Équation 2-40

La loi est augmentée d'un paramètre, aux deux élastiques et aux trois d'endommagement vient s'ajouter un paramètre de viscosité η.

Les conclusions de l'étude d'Arnoux montrent que la loi hyperélastique décrit correctement le comportement jusqu'à rupture du ligament. Dans ces conditions, l'écriture en grandes déformations s'avère pertinente. Par contre, la viscosité semble n'avoir que peu d'influence sur le modèle pour des vitesses de déformations élevées, ce qui est vérifié au travers des valeurs du paramètre η.

Cependant, cette loi présente quelques limites. En effet, le matériau est considéré comme homogène isotrope or il serait plus réaliste d'ajouter de l'anisotropie. De plus les paramètres de la loi ne sont pas reliés à des propriétés structurelles.

2.6.3. Application à la peau humaine

Nous choisissons cette fois ci d'appliquer les formes hyperélastique et hyper-viscoélastique de la loi de Arnoux à un essai de traction dynamique unidirectionnel suivant x_1 (RHD14).

L'expression de la contrainte S_{11th} dans le cas hyperélastique est donnée par l'Équation 2-35. Le paramètre D_0 est choisi égal à 0.01, ce qui équivaut à la moyenne des valeurs données par Arnoux, il reste donc 4 paramètres à identifier : α, β, Q et n.

Dans le cas hyper-viscoélastique, l'expression de la contrainte S_{11th} est donnée par l'Équation 2-39, le paramètre D_0 est égal à 0.01 ce qui nous donne 5 paramètres à déterminer : α, β, Q, n et η.

Dans tous les cas, l'équation différentielle en D est résolue analytiquement en utilisant un développement de Taylor à l'ordre 1. Les paramètres identifiés sur l'essai

RHD14 concernant la peau humaine sont donnés dans les Tableau 2-2a et b et l'évolution des contraintes de Piola-Kirchhoff II S_{11} en fonction de la déformation de Green-Lagrange E_{11} est tracé sur la Figure 2-6 pour chacun des cas hyperélastique (HE) et hyper-viscoélastique (HVE).

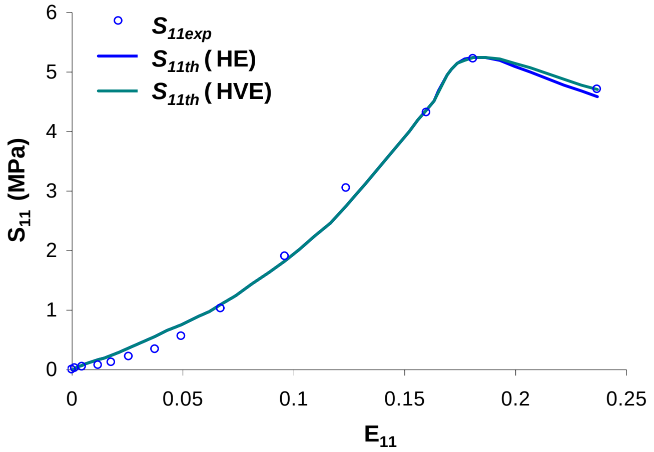


Figure 2-6 : Evolution, en fonction de la déformation de Green-Lagrange E_{11}, des contraintes de Piola-Kirchhoff II expérimentales (S_{11exp}) de l'essai RHD14, des contraintes théoriques (S_{11th} (HE)) calculées avec la loi hyperélastique de Arnoux et des contraintes théoriques (S_{11th} (HVE)) calculées avec la loi hyper-viscoélastique de Arnoux.

La loi étant endommageable, elle permet donc de décrire jusqu'à rupture la courbe contrainte/déformation de la peau humaine. Nous remarquons cependant peu de différence entre les lois hyper-viscoélastique et hyperélastique, ce qui confirme les conclusions de l'auteur concernant le ligament du genou.

a)

α	0.2835
β	16.9081
Q	1.5337
n	0.7889
Do	0.0100
Dt	0.0005

b)

α	0.2835
β	16.9081
Q	1.5337
n	0.7889
η	0.0000
Do	0.0100
Dt	0.0005

Tableau 2-2 : Paramètres de la loi de Arnoux identifiés pour la peau humaine sur l'essai RHD14: a) forme hyperélastique et b) forme hyper-viscoélastique.

2.7. Conclusion et discussion sur les objectifs de l'étude

2.7.1. Expérimentation

Notre objectif étant de mettre au point des essais de traction jusqu'à rupture sur la peau humaine en vue de modéliser son comportement, nous avons répertorié les différents types d'essais réalisés en fonction des applications qui en sont faites.

La mise en place d'essais de traction sur un tissu conjonctif plan présente des contraintes liées à son caractère mou, fragile et hétérogène.

Tout d'abord, les tissus biologiques doivent être conservés dans du sérum physiologique à 4°C pendant une durée inférieure à 48h afin de ne pas altérer leurs propriétés mécaniques.

Dans l'optique d'essais en grandes déformations et donc jusqu'à rupture du tissu, la géométrie des mors doit être telle que la surface de contact tissu/mors soit maximale.

Au niveau des mesures physiques, les efforts sont généralement relevés de manière relativement classique alors que les déformations nécessitent des techniques de mesure sans contact. Fung est un précurseur dans le domaine, il utilise un motif régulier dessiné sur l'éprouvette, par la suite apparaissent des motifs aléatoires appelés mouchetis et couplés à des logiciels de corrélation d'images. La difficulté est ici d'adapter le mouchetis à un tissu biologique mou relativement humide et enfin en grandes vitesses, d'affiner les réglages des caméras. Outre ceci, une technique sans contact évite d'altérer le tissu. De plus, les méthodes de corrélation d'images apportent le champ complet des déformations locales composé des déformations vraies à la surface de l'éprouvette. Cette technique semble donc parfaitement adaptée à des tissus hétérogènes, mais la caractérisation de l'hétérogénéité des tissus reste une difficulté. Jusqu'ici, les auteurs se sont contentés de moyenner les valeurs de déformation sur l'éprouvette en sélectionnant des zones de mesure homogènes.

Si l'on considère tous les tissus conjonctifs plans cités précédemment (peau, parois de vaisseaux, tissus cardiaques, capsules), les essais de traction quasi-statique jusqu'à rupture les concernant sont souvent couplés à d'autres mesures soit de structure ou de viscosité. Les auteurs ayant pour but l'élaboration de lois de comportement se limitent à de la traction quasi-statique mais en faibles déformations. Les seuls essais dynamiques présents dans la littérature sont réalisés jusqu'à rupture pour des applications en biomécanique des chocs. Si nous revenons au tissu qui nous intéresse: la peau humaine, il existe quelques données sur ses caractéristiques à la rupture mais uniquement sous des chargements quasi-statiques. Il manque donc de données dynamiques sur la peau humaine en vue de l'écriture d'une loi de comportement jusqu'à rupture du tissu. De plus, les conclusions du chapitre 1 mettant en évidence l'influence de la vitesse de traction sur les propriétés mécaniques de la peau, il devient intéressant de tester la peau humaine en traction sur des gammes de vitesses allant du quasi-statique à des vitesses proches du choc. Dans les deux cas, les essais doivent être réalisés jusqu'à rupture du tissu.

Enfin, des essais de traction bidirectionnelle apportent toutes les données nécessaires à l'élaboration d'une loi de comportement surtout dans le cas de matériaux orthotropes. Leur mise en œuvre est par contre assez lourde. Pour cette raison nous nous limiterons à des essais de traction unidirectionnelle, qui, couplés à des mesures de déformations par corrélation d'images, apporteront plus d'informations que des essais classiques.

2.7.2. Modélisation

La deuxième étape du travail passe par la modélisation du comportement de la peau humaine. Pour cela nous avons relevé les lois de comportement existantes dans la littérature. Trois lois d'intérêt pour notre étude ont été sélectionnées et synthétisées dans le tableau A1-5 de l'annexe 1.

Il apparaît donc que les tissus mous testés précédemment dévoilent tous un comportement hyperélastique non linéaire "biphasique". Suite à ces observations, Tong et Fung [Tong, 1976] proposent une loi de type exponentiel, qui sera largement reprise par la suite pour modéliser le comportement de toutes sortes de tissus biologiques mous en traction.

Certains [Dunn, 1983] associent un caractère visqueux à ce genre de tissus, mais Arnoux [Arnoux, 2000] montre que l'inclusion de viscosité dans sa loi de comportement n'a pas d'influence lorsque l'on se place à des vitesses de déformation importantes.

Sacks [Sacks, 1998] démontre que l'application d'une loi de comportement isotrope sur les résultats expérimentaux du péricarde bovin ne convient pas. En effet, ces tissus sont des matériaux orthotropes dont les axes d'orthotropie semblent associés aux orientations privilégiées des fibres de collagène d'après Lanir et Fung [Lanir-b, 1974]. Cette hypothèse est vérifiée par Sacks [Sacks, 1998] à l'aide de son dispositif SALS de mesure des orientations de fibres. Il met en évidence le rôle majeur des fibres de collagène face à l'élastine et en déduit l'influence de l'architecture du réseau de fibres sur les déformations du tissu. D'où la nécessité d'incorporer des paramètres propres à la répartition des fibres lors de l'élaboration de la loi de comportement des tissus fibreux. De tels paramètres présentent l'avantage d'avoir une signification physique: comportement, orientation privilégiée et degré d'orientation des fibres. De plus, la modélisation de la substance fondamentale et la différentiation des familles de fibres (élastine et collagène) semblent physiquement plus réaliste, mais demandent l'identification de paramètres supplémentaires, rendue difficile face au peu de données expérimentales. Il faut cependant noter que l'ajout de la substance fondamentale comme un matériau à trois dimensions dans la loi de comportement facilite l'écriture de l'incompressibilité.

Toutes ces modélisations basées sur des considérations structurelles se limitent à des niveaux de déformation relativement faibles, ne permettant pas de décrire la rupture du tissu. Seule la loi proposée par Arnoux [Arnoux, 2000] apporte une description de l'endommagement du ligament. Son écriture se limite à une seule dimension et se base sur un paramètre global d'évolution de l'endommagement qui n'est pas relié à des paramètres structurels.

Face à toutes ces considérations, il semble assez représentatif de modéliser la peau humaine par un réseau unique de fibres de collagène. Négliger la substance fondamentale et les fibres d'élastine (peu influentes en traction d'après le chapitre 1) permet de garder un nombre raisonnable de paramètres, ce qui est un point important dans cette étude. En effet, l'objectif étant de modéliser la rupture de la peau, cela implique l'ajout de paramètres d'endommagement ou équivalent dans la loi de comportement.

Les conclusions de chacun des tests sur les lois de comportement existantes montrent qu'il serait judicieux d'utiliser une loi hyperélastique non linéaire de type exponentiel, étant donné qu'elle permet de modéliser le comportement de la peau humaine en quasi-statique et en dynamique dans son domaine élastique. Les aspects visqueux peuvent à priori être négligés vu qu'ils ne semblent pas avoir beaucoup d'influence sur les résultats de la peau humaine. La loi de comportement dédiée à la peau humaine devra être écrite en deux dimensions. De plus, ayant choisi de représenter la peau par un réseau de fibres de collagène, une fonction de répartition des fibres devra être incluse afin de décrire leur organisation.

Compte tenu des applications en biomécanique des chocs de cette étude, il apparaît nécessaire d'apporter une modélisation en grandes déformations et avec rupture des fibres, car la plus part des lois de comportement se limitent au domaine élastique du tissu.

Par ailleurs, il semble important de prendre en considération l'hétérogénéité du tissu. Elle a été établie par Sacks [Sacks, 1998] notamment, qui l'identifie expérimentalement puis choisit délibérément une zone homogène de mesure des déformations. Cependant, chacun des auteurs [Arnoux, 2000, Sacks, 2003] s'en affranchit en posant l'hypothèse d'homogénéité pour la modélisation du comportement.

3. Chapitre 3 : Caractérisation expérimentale de la peau humaine

3.1. Introduction

Revenons sur le contexte général de notre étude et ses principaux objectifs. Dans le cadre du développement de modèles éléments finis du corps humain, dédiés à la simulation d'accidents de la route, il s'avère nécessaire de déterminer les propriétés mécaniques des tissus sous des sollicitations représentatives d'un choc. Et ceci avec pour objectif final de modéliser leur comportement jusqu'à rupture. Or, d'après l'étude bibliographique précédente, la littérature est relativement pauvre en données sur la peau humaine, surtout sous sollicitations dynamiques et jusqu'à rupture.

Nous choisissons donc d'orienter notre étude expérimentale vers la détermination des propriétés mécaniques de la peau humaine jusqu'à rupture. Nous nous placerons dans le cas de la traction unidirectionnelle, à des vitesses élevées caractéristiques d'essais dynamiques.

De plus, nous avons vu au chapitre 2 que la peau humaine fait partie d'une catégorie de tissus, les tissus conjonctifs, dont le comportement est fortement hétérogène. Cette caractéristique n'ayant pas été étudiée jusqu'ici, nous nous fixons donc pour objectif d'adapter les moyens de mesures de notre protocole afin de caractériser l'hétérogénéité de la peau humaine. Ceci implique qu'en plus d'une mesure globale des déformations à l'aide de capteurs classiques, nous effectuerons des mesures du champ local de déformations. Ce choix est effectué en vue de la modélisation du tissu, qui ne peut être représentative en le considérant comme homogène.

Par ailleurs, les conclusions du chapitre 1 ont mis en évidence l'influence non négligeable de la vitesse de traction, de la direction de traction et du site de prélèvement sur les propriétés mécaniques du tissu. Il s'avère donc intéressant de prendre en considération ces trois paramètres et de les faire varier tout au long de notre campagne d'essais. Ceci se traduit donc, en premier lieu, par l'ajout d'essais quasi-statiques en parallèle des essais dynamiques. Nous définissons aussi deux directions de traction perpendiculaires correspondant à des repères anatomiques. Enfin, la peau est prélevée sur deux zones distinctes: une zone fortement exposée au soleil et sollicitée tout au long de la vie : le front par opposition à l'intérieur des bras, non exposé et peu sollicité.

Il ressort aussi du chapitre 1 que la microstructure régit le comportement macroscopique du tissu. Après avoir déterminé ses propriétés mécaniques macroscopiques, nous descendons à l'échelle microscopique pour mieux observer le réseau fibreux de la peau humaine. Il apparaît important d'avoir des données quantitatives sur la microstructure initiale de la peau ainsi que sur son altération à la suite d'essais de traction. Cette analyse sera limitée au réseau de fibres de collagène, vue sa fonction prédominante en grandes déformations et proche de la rupture. En effet, cette étude exploratoire sur la relation entre les propriétés mécaniques de la peau totale et sa microstructure est effectuée dans le but de mieux comprendre les phénomènes physiques ayant lieu au cours d'un essai de traction jusqu'à rupture, pour définir par la suite une loi de comportement décrivant de la manière la plus réaliste qui soit ces phénomènes. L'idée est donc d'identifier les paramètres physiques les plus influençant à inclure dans la loi de comportement. Il faut garder à l'esprit que "modéliser c'est simplifier" et donc sélectionner le constituant le plus important (les fibres de collagène) dans le cas qui nous intéresse (les grandes déformations).

Dans ce chapitre, nous présenterons les méthodes expérimentales et les résultats concernant à la fois la détermination des propriétés mécaniques de la peau humaine à l'échelle macroscopique et l'analyse de son réseau de fibres à l'échelle microscopique.

3.2. Matériel et méthodes

3.2.1. Préparation du tissu biologique

Les pièces anatomiques utilisées lors de cette campagne d'essais ont été prélevées à la Faculté de Médecine Rockfeller à Lyon sur des corps légués à la science.

Prélèvements de peau

L'ensemble des échantillons de peau humaine est prélevé sur 17 sujets frais, dont 9 hommes et 8 femmes âgés de 62 à 98 ans, l'age moyen étant de 81 ans.

Variant suivant la morphologie de chaque sujet, la taille d'un prélèvement est en moyenne de 200x100mm², quelque soit le site choisi. A l'opposé, le repérage des directions anatomiques est propre à chaque site: sur le front nous définissons la direction crânio-caudale et sa perpendiculaire, la direction transversale (Figure 3-1-b) alors qu'au niveau de l'intérieur des bras se distinguent les directions proximale-distale et transversale (Figure 3-1-a). Une fois le prélèvement réalisé, ces directions sont immédiatement matérialisées par des ligatures de repérage disposées comme indiqué sur la Figure 3-1.

A ce stade, le tissu fraîchement prélevé est placé dans du sérum physiologique à 4°C et il sera conservé de la sorte jusqu'à l'essai, conformément aux méthodes données dans la littérature. (cf chapitre 2)

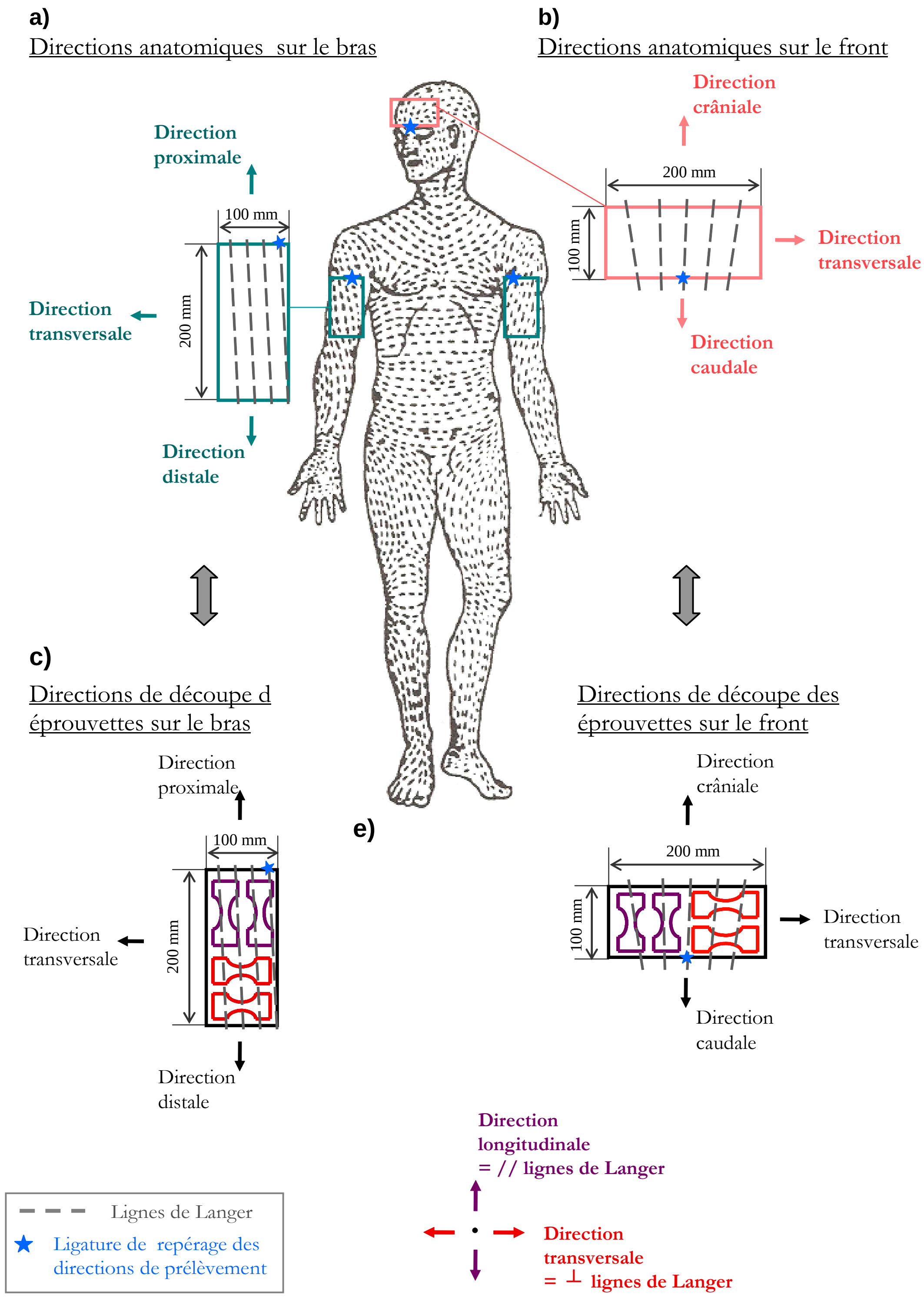


Figure 3-1 : Equivalence entre les directions anatomiques sur un prélèvement de peau des bras a) et de peau du front b) et les directions de prélèvement des éprouvettes sur le bras c) et sur le front d) avec pour repère les lignes de Langer e) (extrait de [Maurel, 1998]).

Eprouvettes

A l'intérieur de chaque prélèvement rectangulaire (200x100mm²) sont découpées 4 à 6 éprouvettes en forme de I. De dimensions extérieures 100x30mm², elles comportent une partie centrale rétrécie de largeur l_0 = 10mm et de longueur L_C = 40mm, si le prélèvement est de taille standard. Dans le cas où la taille du prélèvement est inférieure, la longueur L_C est occasionnellement réduite à 30mm (Figure 3-2).

Dans le sens de l'épaisseur, étant donné le rôle mécanique mineur de l'hypoderme en traction (cf chapitre 1), l'aponévrose et la majeure partie de l'hypoderme sont retirées. Ceci se traduit par une découpe dans l'hypoderme au plus proche du derme comme indiqué sur la Figure 3-3.

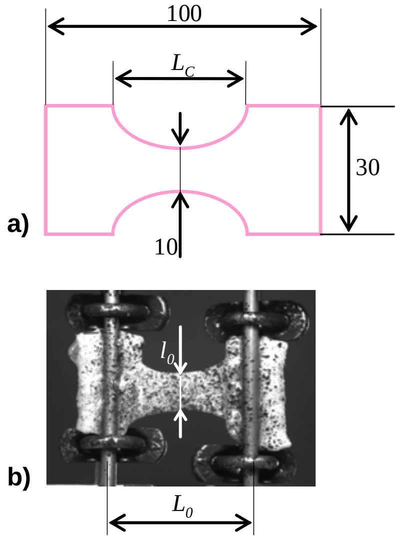


Figure 3-2 : Géométrie a) et photo b) d'une éprouvette de peau humaine dans les mors, définition de la largeur initiale l_0, de la longueur initiale L_0 et de la longueur de la partie centrale L_C (dimensions en mm).

A la surface de la peau sont définies deux directions de découpe pour les éprouvettes. Nous choisissons comme repères les lignes de Langer afin de définir la direction transversale, perpendiculaire aux lignes de Langer (en rouge sur la Figure 3-1) et la direction longitudinale, parallèle à ces mêmes lignes (en violet sur la Figure 3-1). Notons l'équivalence entre les directions de découpe des éprouvettes, illustrées par la Figure 3-1-c et la Figure 3-1-d et les directions anatomiques repérées sur chaque site de prélèvement, définies sur la Figure 3-1-a et la Figure 3-1-b. En effet, au niveau du front, la direction longitudinale (par rapport aux lignes de Langer) n'est autre que la direction crânio-caudale (anatomique) alors que sur les bras, la direction longitudinale (par rapport aux lignes de Langer) correspond à la direction proximale-distale (anatomique), la direction transversale étant toujours la même. De plus, les directions de découpe des éprouvettes correspondent aux futures directions de traction, ce qui implique que la traction pourra être effectuée soit perpendiculairement aux lignes de Langer soit parallèlement. Nous avons choisi comme référence les lignes de Langer car ce sont les seules lignes pour les quelles nous disposons d'une cartographie complète sur tout le corps.

Enfin, la géométrie exacte de chaque éprouvette est mesurée en début d'essai :

- ✓ L'épaisseur initiale est mesurée au pied à coulisse, nous définissons une valeur maximale e_{max} qui tient compte de la partie d'hypoderme restant et une valeur minimale e_{min} correspondant au complexe derme/épiderme seul. (Figure 3-3)
- ✓ La largeur initiale l_0 est mesurée au pied à coulisse. (Figure 3-2)
- ✓ La longueur initiale résistante L_0 est définie par la distance entre les barres ϕ4mm des mors et est mesurée sur la première image de l'éprouvette prise en début d'essai. (Figure 3-2)

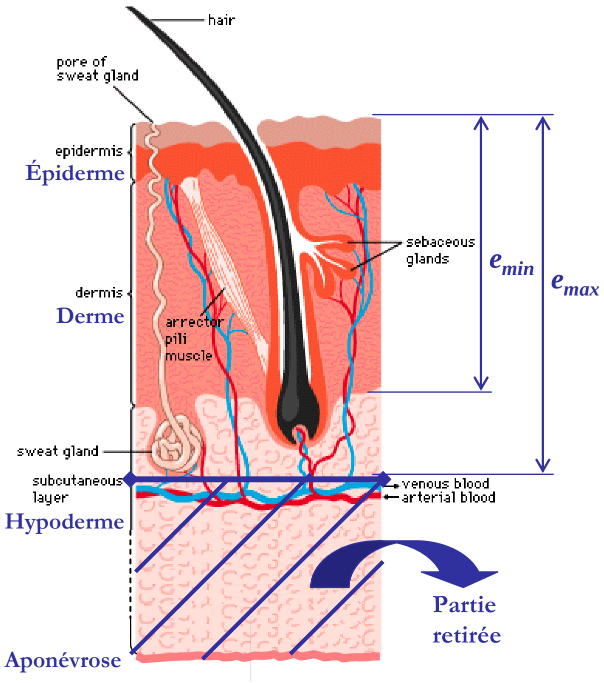
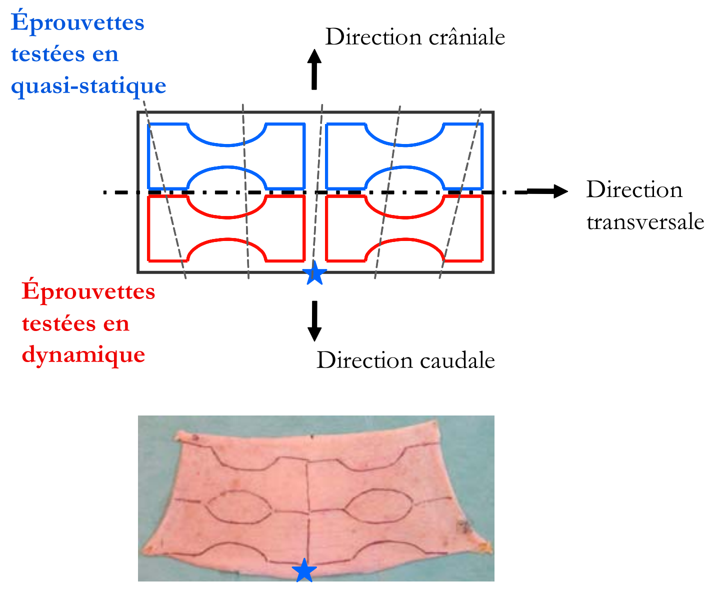


Figure 3-3 : Découpe des éprouvettes dans l'épaisseur de la peau – définition des épaisseurs minimale et maximale mesurées (extrait de [HSSG]).

Configurations de découpe des éprouvettes

Dans le but d'étudier les variations des propriétés mécaniques suivant certains paramètres physiques (vitesse de traction, direction de traction ou site de prélèvement), la découpe des éprouvettes sur un prélèvement de peau varie suivant le paramètre étudié:

- ✓ Influence de la vitesse de traction, comparaison quasi-statique dynamique :
  Cette étude est limitée à de la peau du front, testée dans la direction transversale. Sur chaque prélèvement de peau, des éprouvettes appareillées sont découpées en considérant la direction transversale comme axe de symétrie (Figure 3-4). Deux éprouvettes sont alors destinées à la traction quasi-statique et les deux autres à la traction dynamique.
- ✓ Influence de la direction de traction, comparaison des directions longitudinale/transversale :
  Cette comparaison porte à la fois sur la peau du front et des bras, en traction quasi-statique ou dynamique. Dans tous les cas, sur chaque prélèvement, deux éprouvettes appareillées sont découpées dans chacune des deux directions perpendiculaires: longitudinale et transversale (Figure 3-5). La traction aura donc lieu, pour les deux premières éprouvettes, parallèlement aux lignes de Langer et pour les deux dernières, perpendiculairement à ces mêmes lignes.
- ✓ Influence du site de prélèvement, comparaison bras/front :
  Cette étude est restreinte à la traction dynamique. Pour une direction donnée, plusieurs éprouvettes sont prélevées sur chacun des bras et le front d'un même sujet puis testées (Figure 3-1-a et Figure 3-1-b).



a)

b)

Figure 3-4 : Schéma a) et photo b) de la répartition des éprouvettes sur un prélèvement de peau du front: considérant la direction transversale comme axe de symétrie, les éprouvettes côté crâne sont testées en quasi-statique et les autres en dynamique.

Les tableaux A2-1 et A2-2 de l'annexe 2 rassemblent tous les essais réalisés au cours de ce travail. Pour chacun d'entre eux sont précisés ses caractéristiques (vitesse, direction et site de prélèvement) et le type d'exploitation qu'il a été possible d'en faire.

a)

b)

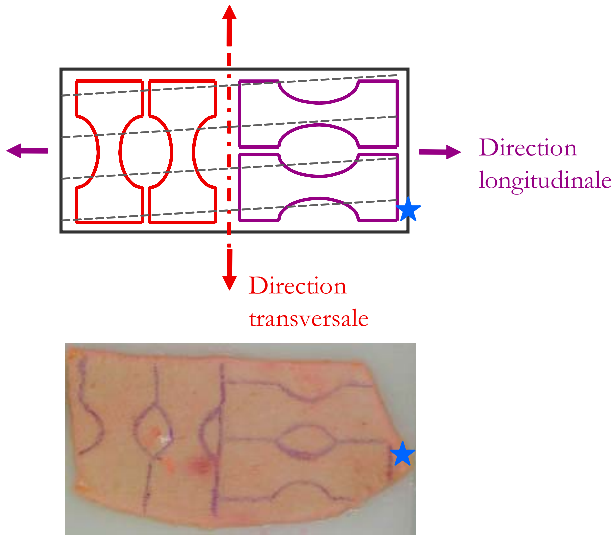


Figure 3-5 : Schéma a) et photo b)de la répartition des éprouvettes sur un prélèvement de peau du bras droit: deux éprouvettes sont découpées dans la direction transversale, les deux autres dans la direction longitudinale.

3.2.2. Caractérisation mécanique macroscopique en traction

Dans un soucis de clarté, il faut noter que dans la suite de ce chapitre, les termes « longitudinale » et « transversale » seront réservés exclusivement à la définition des directions de traction (ou de découpe des éprouvettes) par rapport aux lignes de Langer (cf Figure 3-1-c et Figure 3-1-d). De ce fait, toutes les grandeurs mesurées (effort, déplacement et accélération) ainsi que les grandeurs calculées (contrainte, allongement et déformation) seront données dans le repère (x_1, x_2, x_3) défini tel que (x_1, x_2) soit le plan de l'éprouvette et x_2 la direction de traction sur chacun des deux montages.

3.2.2.1. Mors

Le système conçu pour la fixation de la peau humaine sur des machines de traction est présenté en détail dans [Jacquemoud-a, 2004]. Nous ne rappelons donc ici que le principe général du système, composé de deux mors à enroulement.

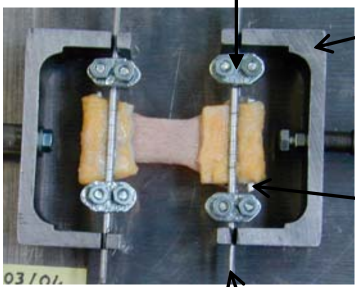


Figure 3-6 : Système d'attache de la peau composé de deux mors à enroulement.

Chaque mors est constitué d'un morceau d'UAP (80mm) de 40mm de large, dans lequel sont usinées deux rainures de 4mm de large permettant l'insertion des 2 barres de fixation (Φ4mm). Ce système se fixe sur tout type de machine par l'intermédiaire d'un ensemble vis / écrou standard (M10).

Tout d'abord, la surface externe de la peau est enroulée et collée autour d'une baguette de soudure de diamètre 3mm à l'aide de colle de type cyanoacrylate qui polymérise à l'humidité. Ensuite, chaque extrémité de l'éprouvette est insérée entre les deux barres de fixation (Φ4mm). Celles-ci sont maintenues serrées à l'aide de serre-câbles. Le renflement constitué par la baguette collée aux extrémités permet le blocage de la peau entre les deux barres lors de la traction. (Figure 3-6)

Le principe d'enroulement et de collage de la peau permet d'augmenter la surface de contact entre le tissu et les mors, ce qui limite le glissement même sous fortes sollicitation (F = 200N) et réduit le risque de déchirure du tissu dans les mors. (cf Figure 2-1-c)

3.2.2.2. Machines et paramètres d'essai

Essais quasi-statiques

La campagne d'essais quasi-statiques est réalisée au Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures de l'INSA de Lyon. Nous utilisons une machine de traction conventionnelle de type SCHENCK électromécanique (250kN) asservie en déplacement. Les mors sont fixés sur chacune des traverses de la machine. (Figure 3-7)

Les essais sont réalisés à une vitesse de V = 15mm/min. Le déroulement complet d'un essai de traction quasi-statique est détaillé en annexe 2.

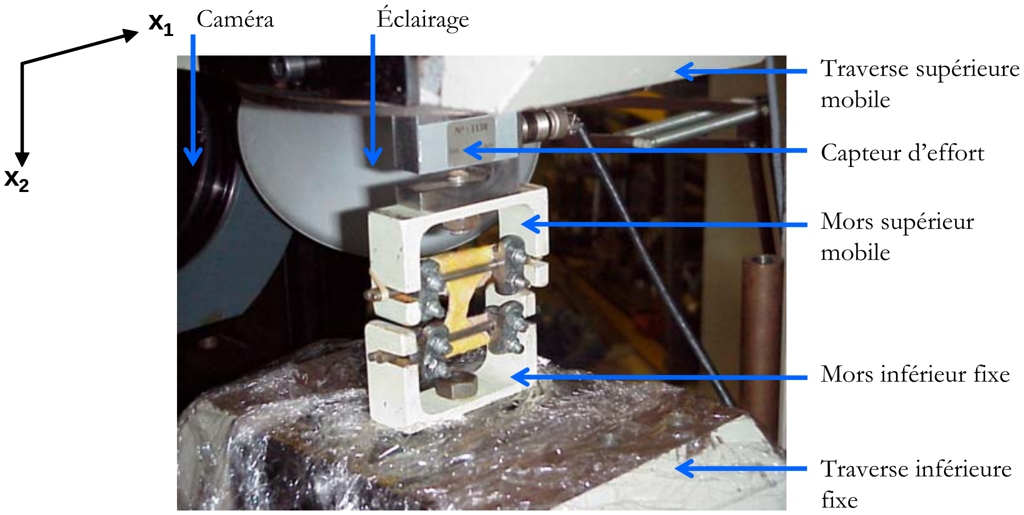


Figure 3-7 : Montage quasi-statique adapté à une machine de traction Schenck – Caméra Hamamatsu - Éclairage lampe d'architecte.

Essais dynamiques

L'ensemble des essais dynamiques se déroule au Laboratoire de Biomécanique et Mécanique des Chocs de l'INRETS, qui dispose d'un banc vertical (h_{max} = 4m) sur lequel s'adapte le montage spécialement conçu pour la traction dynamique des tissus mous. Le principe de ce montage suit celui du banc vertical, à savoir la chute libre d'un chariot venant impacter la pièce étudiée. Le montage de traction dynamique est divisé deux parties que l'on appellera principale et secondaire.

- ✓ La partie principale (en vert sur la Figure 3-8) est composée du chariot existant du banc vertical (chariot principal sur la Figure 3-8), des axes verticaux de guidage secondaires fixés par l'intermédiaire d'une poutre sur la face latérale du chariot principal et du mors supérieur, considéré comme fixe lors de la traction, d'où son appellation de mors fixe (Mf). Cette première partie est libre en translation le long des axes de guidage principaux.
- ✓ La partie secondaire (en rose sur la Figure 3-8) se résume au chariot secondaire sur lequel est fixé le mors inférieur, appelé mors mobile (Mm). Elle est libre en translation le long des axes de guidage secondaires.

La seule liaison entre ces deux parties est assurée par l'éprouvette.

Le fonctionnement du montage dynamique se découpe en deux étapes, représentant les chutes successives de chacun des deux chariots (Figure 3-8) :
① Tout l'ensemble (chariots principal et secondaire) descend en chute libre le long des axes de guidage principaux, jusqu'à arrêt du chariot principal à l'aide d'une structure en nid d'abeilles.
② Le chariot secondaire continue sa course et sollicite l'éprouvette verticalement en traction, alors que le mors supérieur reste fixe durant cette deuxième étape. Des butées en caoutchouc sont disposées aux extrémités des barres de guidage secondaires afin d'arrêter le chariot secondaire dans sa course, une fois l'éprouvette déchirée.

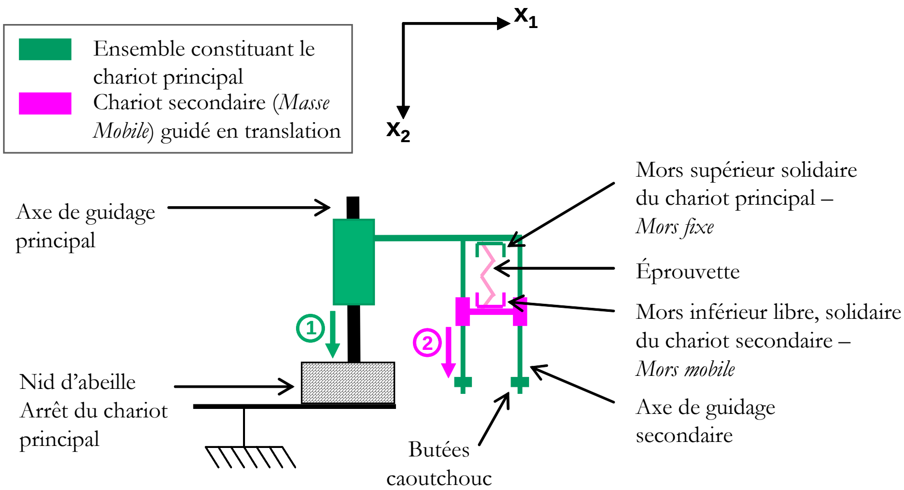


Figure 3-8 : Description cinématique du montage de traction dynamique.

Ce montage a été conçu pour la traction dynamique de membranes biologiques de telle sorte que plusieurs paramètres soient réglables. En effet, la vitesse initiale V_0 est fonction de la hauteur de chute, elle peut atteindre une valeur maximale de 8.8m/s. De même, l'énergie cinétique initiale appliquée au tissu est fonction de la masse du chariot secondaire appelée masse mobile M_0, celle-ci se modifie par ajout de masselottes mais ne peut être inférieure à 1kg.

Pour les essais présentés par la suite, nous avons choisi une vitesse en début de traction égale à V_0 = 3m/s, équivalente à une hauteur de chute de 46cm. Elle correspond aux ordres de grandeurs des vitesses utilisées lors d'essais dits dynamiques sur pièces anatomiques, pour des applications en biomécanique des chocs, dans le domaine des transports. Quant à la masse mobile (masse totale du chariot secondaire) sa valeur est de M_0 = 1.49kg.

Le déroulement d'un essai dynamique est explicité en annexe 2.

De plus, notons qu'un problème récurant en dynamique est l'apparition de vibrations parasites au cours des essais. Une étude parallèle a donc été menée afin de les identifier et de déterminer leurs origines. Elle est présentée en annexe 3.

3.2.2.3. Moyens de mesure globale

Nous appelons mesures globales les données des capteurs classiques de déplacement et d'effort, apportant des propriétés moyennes sur toute l'éprouvette.

Montage quasi-statique

Tout d'abord, concernant le montage quasi-statique, la machine de traction Schenck est dotée d'un capteur de déplacement intégré donnant le déplacement de la traverse supérieure mobile. Sur cette même traverse, un capteur d'effort à jauges 200daN est ajouté afin de compléter les mesures par une valeur de l'effort dans la direction de traction (Figure 3-7). L'acquisition couplée de l'effort et du déplacement est effectuée à une fréquence de quelques Hertz.

Montage dynamique

Au niveau du montage dynamique, les mesures sont doublées, elles sont en effet effectuées sur chacun des mors mobile et fixe. Cette fois-ci, une acquisition de l'accélération est ajoutée à celle de l'effort et du déplacement, portant à cinq les grandeurs physiques mesurées. La Figure 3-9 renseigne sur la disposition des différents capteurs du montage dynamique sachant que :

- ✓ L'accélération dans la direction de traction (suivant x_2) de chacun des mors est obtenue à l'aide de 2 accéléromètres à jauges de déformation 20g (ENTRAN).
- ✓ L'effort dans la direction de traction (suivant x_2) de chacun des mors est donné par 2 capteurs d'effort 1kN (TME).
- ✓ Le déplacement relatif du mors mobile par rapport au mors fixe (suivant x_2) est mesuré à l'aide d'un capteur de position à tige LVDT (TME).

L'acquisition des cinq voies de mesure est réalisée à 10kHz sur un boîtier CA128 grâce au logiciel MORS® (Techniphone). Les données ainsi obtenues sont ensuite filtrées à 180Hz suivant la norme SAEJ211/1 [SAEJ211/1] par l'intermédiaire du logiciel MAGALI®.

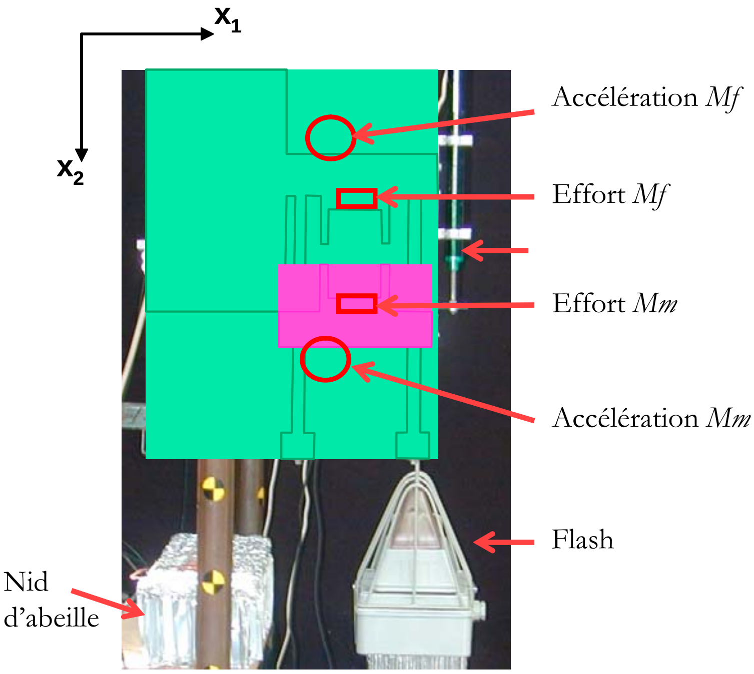


Figure 3-9 : Emplacement des capteurs sur le montage de traction dynamique – différenciation de l'ensemble constituant le chariot principal (en vert) et du chariot secondaire (en rose) – présentation avec une éprouvette en silicone.

Grandeurs mesurées

Les dispositifs décrits ci-dessus apportent les valeurs globales de:

- ✓ l'effort dans la direction de traction (suivant x_2)
- ✓ l'allongement de l'éprouvette ΔL (suivant x_2) qui n'est autre que le déplacement relatif du mors mobile par rapport au mors fixe, donné directement par le capteur.

Notons que la validité des mesures globales a été établie dans l'annexe 3.

Ces grandeurs physiques ainsi mesurées permettent de calculer les valeurs globales de:

- ✓ la contrainte nominale T_{22} définie par le rapport de l'effort dans la direction de traction sur la section initiale de l'éprouvette. La section initiale utilisée est la valeur minimale calculée à partir du produit de la largeur l_0 par l'épaisseur minimale e_{min}. Ce choix est effectué en considérant que la valeur e_{min} est la plus proche de l'épaisseur réelle de l'ensemble épiderme/derme, par opposition à la valeur e_{max} incluant une partie d'hypoderme (cf Figure 3-3 et annexe 5).
- ✓ les déformations linéaires ε_{22} définies par le rapport de l'allongement ΔL (mesuré par le capteur) sur la longueur initiale de l'éprouvette L_0.

3.2.2.4. Moyens de mesure locale : la corrélation d'images numériques

Nous utilisons ici la méthode de corrélation d'images numériques déjà introduite au chapitre 2, apportant des déformations locales, calculées en tous points à la surface de l'éprouvette par opposition à la déformation globale qui s'avère être une valeur moyenne sur toute l'éprouvette.

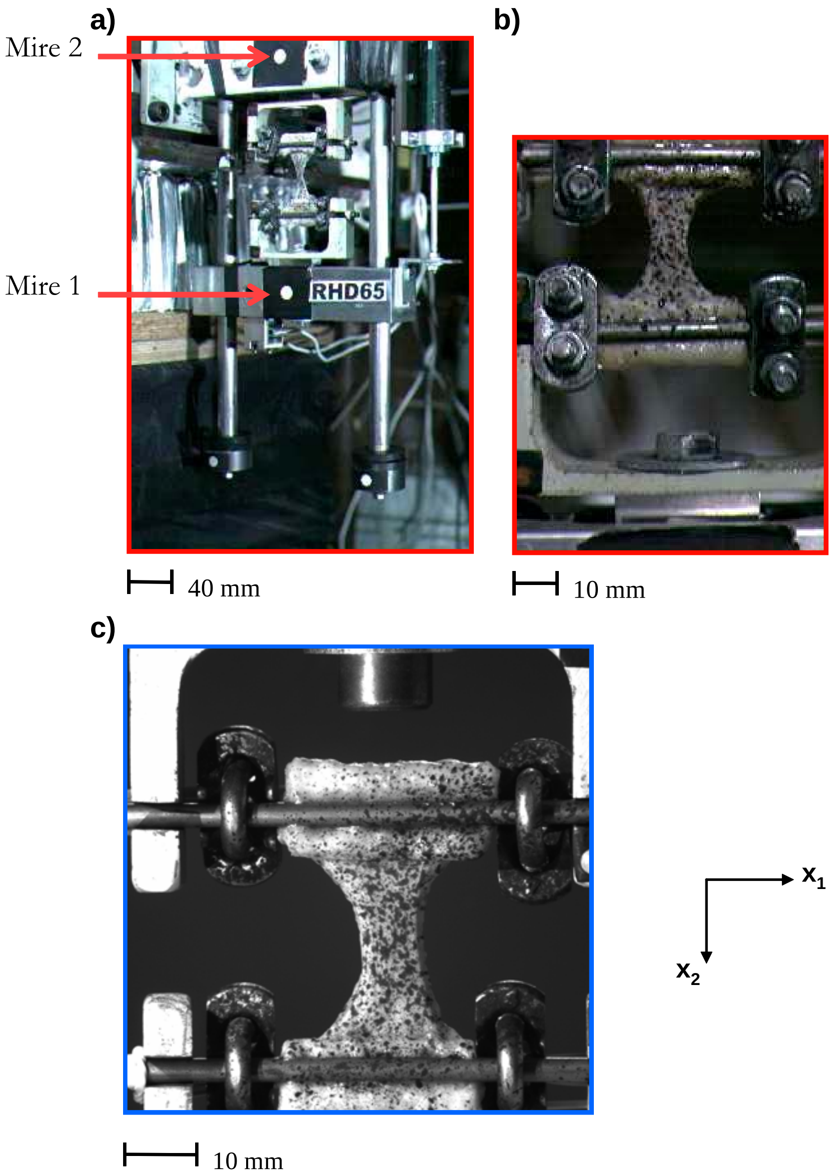


Figure 3-10 : Vues des différentes caméras : sur le montage dynamique en rouge a) caméra vue d'ensemble - image à t=1ms de l'éprouvette RHD65 (1546*1024p) b) caméra Zoom - image à t=1ms de l'éprouvette RHD61 (1024*768p) et sur le montage quasi-statique en bleu c) image à t=0s de l'éprouvette RHS53 (1004*1000p).

Principe

Les champs de déplacements et de déformations sont mesurés à l'aide du logiciel ICASOFT® [Mguil-Touchal, 1997, 1998], dans sa version incrémentale. Cette version s'est avérée indispensable pour traiter les résultats des essais quasi-statiques où les déformations maximales peuvent atteindre 100%. En effet, ce niveau de déformation est au-delà de la limite de la version séquentielle classique. Le principe de la méthode de corrélation d'images et de sa version incrémentale est détaillé en annexe 4.

Néanmoins, précisons que cette technique permet le calcul des déformations du tissu à partir d'images numériques de l'éprouvette, prises pendant l'essai. Cette méthode nécessite le dépôt d'un motif aléatoire appelé mouchetis à la surface du tissu à analyser, comme l'illustrent la Figure 3-10-b et la Figure 3-10-c. Les déplacements de chacun des points du mouchetis sont mesurés entre l'image dite de référence et l'image déformée (Figure A4-3), afin d'en déduire les déformations correspondantes en ces points.

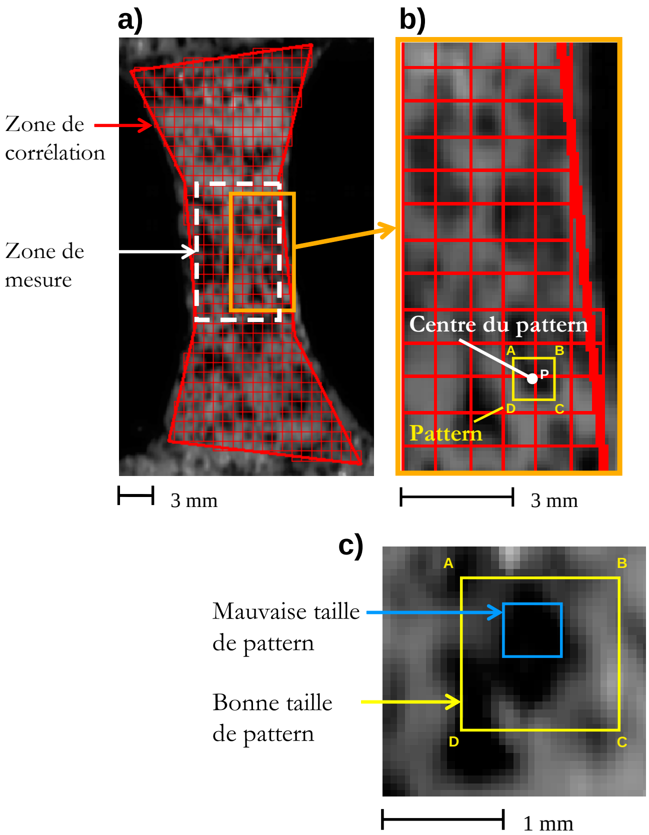


Figure 3-11 : a) Grille représentant les centres des pattern à l'intérieur de la « zone de corrélation » (en rouge) et « zone de mesure » des déformations (en pointillés blancs). b) Zoom sur un des 500 patterns (ABCD) de centre P. c) Taille optimale de pattern en fonction du mouchetis (éprouvette RHD02).

Premièrement, l'application de la méthode de corrélation d'images à un tissu biologique mou comme la peau nécessite, entre autre, d'adapter le mouchetis à ce matériau peu conventionnel, comme il l'a été évoqué par Jacquemoud [Jacquemoud-b, 2004]. Le mouchetis, de préférence noir sur fond blanc, devra résister aux grandes déformations et au fort taux d'humidité du tissu, voire même à l'apparition de gouttes d'eau à la surface de l'éprouvette. De ce fait, la solution retenue pour la peau est la pulvérisation, à l'aide d'un peigne, de mascara noir waterproof dilué à l'acétone.

Deuxièmement, la mesure du champ de déplacements à l'aide du logiciel ICASOFT® est effectuée à l'intérieur d'une zone, appelée " zone de corrélation", que l'opérateur doit définir à la surface de l'éprouvette (en rouge sur la Figure 3-11-a). Cette zone est ensuite divisée en groupes de pixels appelés "patterns" (en jaune sur la Figure 3-11-b), au centre desquels sont mesurées les valeurs des déplacements. Chaque pattern est défini de manière simplifiée par les niveaux de gris des pixels qui le composent, ce qui implique que la taille des patterns doit être choisie en fonction de la résolution de l'image et de la taille des tâches du mouchetis. La Figure 3-11-c illustre la taille de pattern adéquate pour le mouchetis représenté. La taille moyenne des patterns utilisés dans cette étude est de 0.8*0.8mm². De ce fait, à chaque image et pour chaque éprouvette, les résultats sont répartis sur plus de 500 points de mesure. Il est possible d'atteindre une précision de l'ordre du 1/60 de pixel.

Dispositif vidéo

Cette méthode nécessitant des images numériques de l'éprouvette tout au long de l'essai, un dispositif vidéo vient compléter chacun des montages quasi-statique et dynamique.

Dans le cas quasi-statique, une caméra Hamamatsu 1 Mégapixel est montée sur une plateforme mobile dont le déplacement est couplé avec celui de la traverse supérieure de la machine de traction. L'image est donc toujours centrée sur l'éprouvette tout au long de l'essai de traction (Figure 3-10-c). La caméra est équipée d'un objectif télécentrique à focale fixe. Les images obtenues sont en noir et blanc, leur résolution de 1004*1000 pixels implique une taille moyenne de pixel de 0.08*0.08mm². L'acquisition est effectuée à 1 image/seconde, elle est synchronisée avec celle des capteurs grâce à un logiciel développé au sein du laboratoire. Enfin, l'éclairage devient un point essentiel lors de l'utilisation des vidéos pour la corrélation d'images. Les niveaux de gris de chaque image doivent balayer la plage de valeurs 0-255 de la façon la plus homogène possible. Le mouchetis doit donc être relativement contrasté et les zones de surbrillance sont à bannir. Pour cela, un éclairage diffus s'avère être la meilleure solution, il peut être réalisé avec une simple lampe d'architecte.

Concernant le montage dynamique, compte tenu des vitesses de traction élevées, nous utilisons une caméra numérique rapide SpeedCam VISARIO (Weinberger) équipée d'un objectif Nikon 35-70mm agrémenté d'un zoom en position macro. En effet, cette caméra appelée "zoom" (Figure 3-10-b) est cadrée en plan serré sur l'éprouvette. Un réglage très fin de la vitesse d'obturation est indispensable en dynamique, sur cette caméra, afin d'avoir une vue du mouchetis la plus nette possible. Elle est réduite au minimum soit 200µs. Cependant, la diminution de la vitesse d'obturation entraîne un assombrissement des images, phénomène qui devra être compensé par une ouverture adéquate de l'objectif et un éclairage intense. Les images sont enregistrées en couleurs, puis converties en niveaux de gris pour leur utilisation en corrélation d'images. L'acquisition, réalisée à 2000images/seconde, implique une résolution de 1024*768 pixels et une taille moyenne de pixels de 0.09*0.09mm². Il faut cependant noter que pour les essais RHD01 à RHD10, l'acquisition des images a été effectuée à 1000images/secondes seulement (résolution 1536*1024 pixels), puis le protocole a pu être amélioré, c'est-à-dire que la vitesse d'acquisition a pu être augmentée, grâce à de nouveaux moyens techniques disponibles.

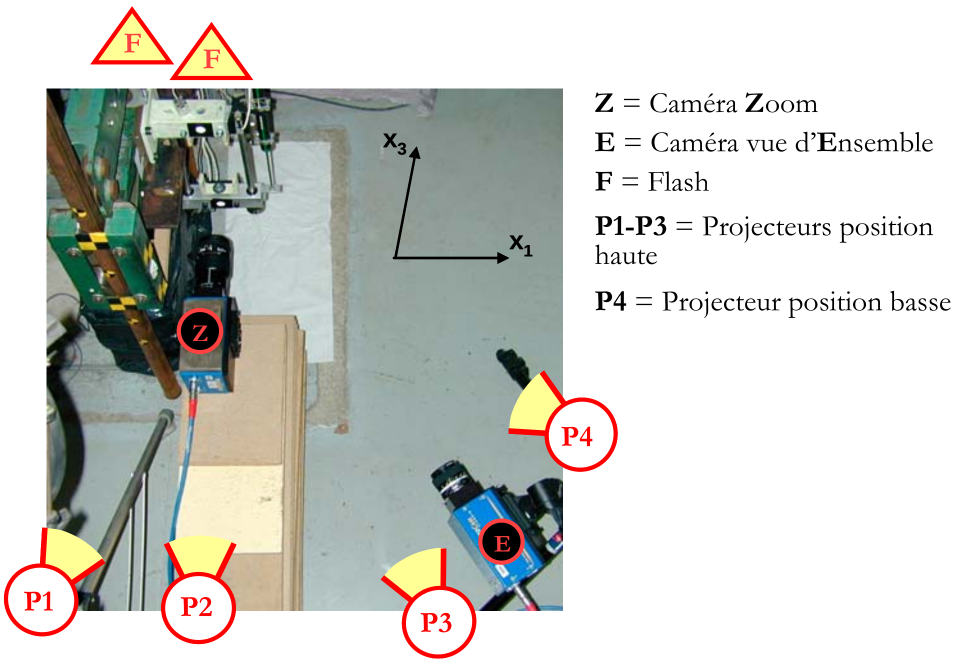


Figure 3-12 : Disposition des deux caméras (Zoom et vue d'Ensemble), des 4 projecteurs et des deux flashs autour du montage de traction dynamique.

Il faut remarquer que dans le cas du montage dynamique, l'utilisation simultanée de vidéos rapides et de capteurs nécessite la mise en place d'un système de synchronisation des acquisitions. Cette fonction est assurée par un boîtier de déclenchement sur lequel sont reliés les capteurs et une lampe flash. En effet, le contact du chariot principal sur le nid d'abeille déclenche l'acquisition des mesures des capteurs et la lumière du flash. Ce dernier n'est autre qu'une lampe à décharge au xénon 10J (AE&T), qui, placée dans le champ de la caméra, donnera le repère du t_0 sur les vidéos. L'éclairage intense nécessaire lors de l'utilisation de vidéos rapides est réalisé par l'intermédiaire de quatre projecteurs dont la disposition, illustrée par la Figure 3-12, est telle que les ombres et reflets soient minimisés.

Grandeurs mesurées

Cette méthode apporte ainsi une mesure locale à la surface de l'éprouvette à la fois du champ complet des déplacements et de celui des déformations de Green-Lagrange E. Les valeurs des trois composantes E_{11}, E_{22} et E_{12} des déformations sont données au centre de chacun des patterns constituant la zone de corrélation définie par l'utilisateur du logiciel.

Remarquons que les mesures locales de déformation sont accord avec les mesures globales : leur validité a été établie en annexe 3, aux travers d’une étude temporelle et d’une comparaison des différentes mesures d’allongement.

3.2.3. Observation microscopique de la structure

3.2.3.1. Principe

Le réseau de fibres de collagène est observé sur des coupes histologiques de peau humaine. Celles-ci sont réalisées à partir de petits rectangles de peau de dimension 10*5mm² environ appelés biopsies. Sur chaque éprouvette testée est prélevé un couple de biopsies suivant le schéma de la Figure 3-13-a :

- ✓ une biopsie proche de la rupture prélevée sur chaque éprouvette,
- ✓ une biopsie témoin correspondante, prélevée sur la peau non testée attenante à l'éprouvette.

Suite au prélèvement, les biopsies sont immédiatement épinglées sur une plaque de polystyrène. Suivent ensuite toutes les étapes de préparation des coupes histologiques, détaillées en annexe 2 et réalisées soit au Laboratoire de Recherche Dermatologique de l'Hôpital Edouard Herriot de Lyon pour les premières études soit par la société NOVOTEC à Lyon pour le reste. Tout au long de ce cycle de préparation, les biopsies sont successivement fixées dans du formol, incluses dans de la paraffine puis les blocs de paraffine coupés en très fines lamelles (e = 4µm) appelées coupes histologiques. Cette troisième étape de coupe est toujours réalisée dans le même plan, à la fois perpendiculaire à la surface de la peau et parallèle à la direction de traction. Le plan de coupe est défini sur le schéma de la Figure 3-13-b. La dernière étape de la préparation est la coloration des coupes, soit au Trichrome de Masson soit à l'HES (Hématoxyline Eosine Safran), tous deux colorant le collagène.

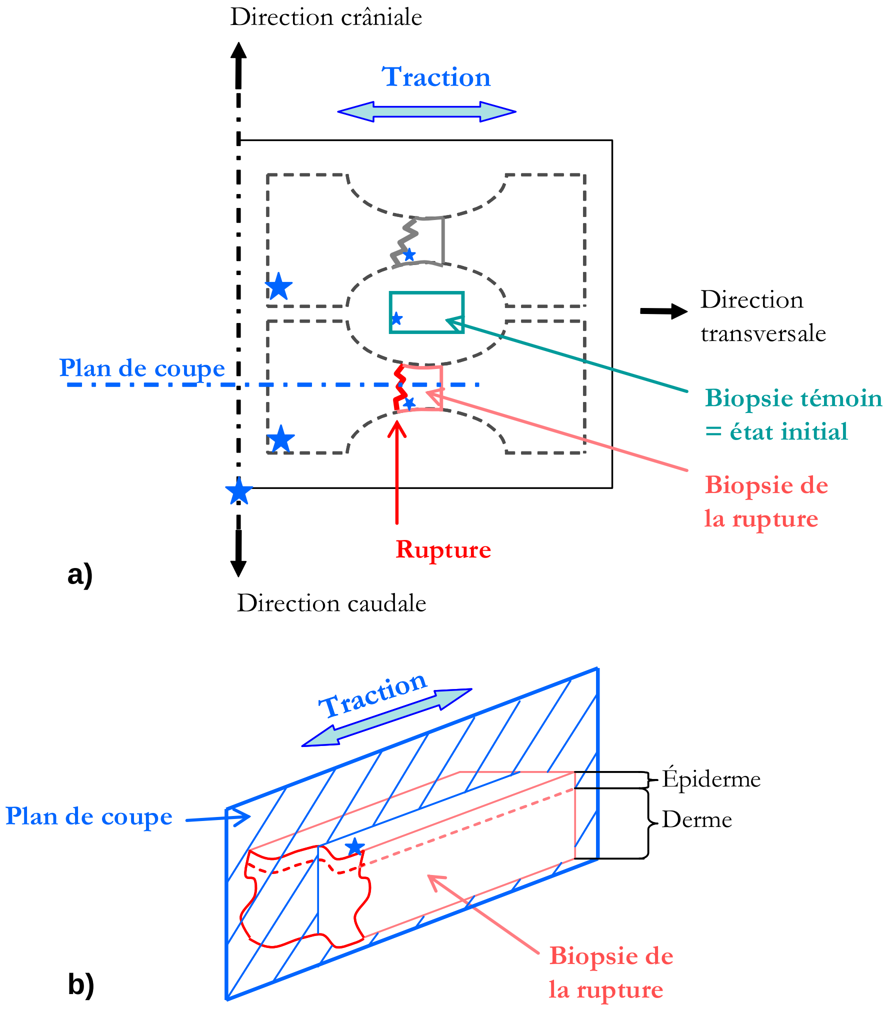


Figure 3-13 : Sur chaque éprouvette, a) découpe d'une biopsie à l'endroit de la rupture (en rose) et d'une biopsie témoin (en vert) sur peau non étirée attenante à l'éprouvette – b) plan de coupe parallèle à la direction de traction – dimensions approximatives des biopsies 10x5mm²

L'observation s'effectue ensuite au microscope optique (Zeiss, West Germany), à un grossissement pouvant varier de x5 pour visualiser la coupe de peau dans toute son épaisseur à x40 pour discerner les détails des faisceaux de fibres de collagène.

3.2.3.2. Grandeurs mesurées

A partir de ces coupes histologiques, il est alors possible de déterminer les caractéristiques de la microstructure de la peau telles que :

- ✓ l'épaisseur *e* de l'ensemble épiderme/derme, définie sur la Figure 3-14,
- ✓ les surfaces de fibres orientées parallèlement au plan de coupe et celles perpendiculairement à ce même plan. Les zones sélectionnées pour cette mesure (en rouge sur la Figure 3-14) se trouvent dans le derme profond, ce qui correspond à la partie du derme réticulaire, accolée à l'hypoderme. Cette zone est la plus structurée du derme, car composée en majorité de fibres de collagène. Elle apparaît donc être la plus résistante à la traction.

L'ensemble de ces mesures de distances et de surfaces est réalisé manuellement à l'aide d'un planimètre (Mini Mop, version 2.1) monté sur le microscope, en grossissement x25.

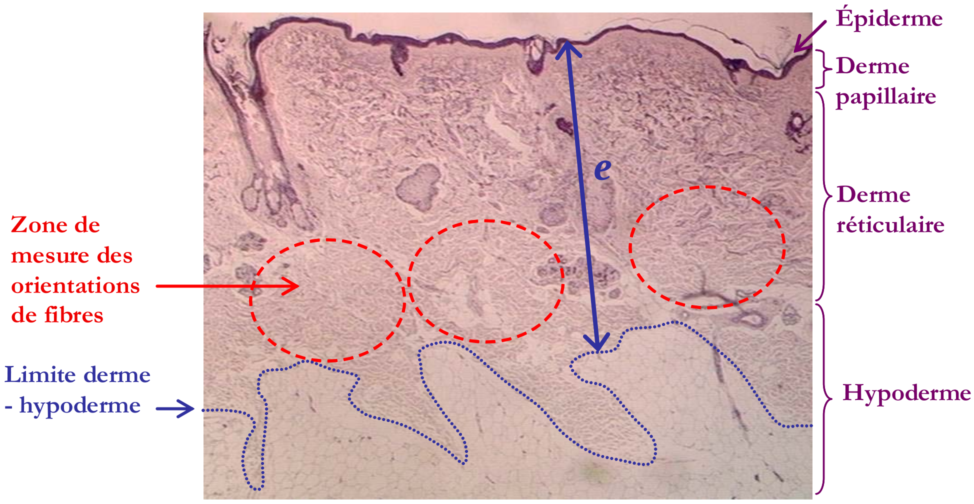


Figure 3-14 : Coupe histologique de peau humaine vue au microscope optique (grossissement x2.5) avec coloration HES – définition des zones de mesure des orientations de fibres (en rouge) et de l'épaisseur *e* épiderme/derme (en bleu).

L'analyse microscopique apporte donc certaines propriétés structurelles de la peau du front :

- ✓ Une valeur moyenne par couple d'éprouvettes de l'épaisseur *e* épiderme/derme :
  Cette valeur est considérée comme relativement précise et devrait correspondre à priori à la valeur de e_{min} mesurée sur l'éprouvette avec un pied à coulisse.
- ✓ Des densités surfaciques de fibres dans chaque direction longitudinale et transversale :
  Elles sont calculées en faisant le rapport de la surface occupée par les fibres dans

chaque direction sur la surface de la zone de mesure. Ce calcul est effectué dans le but d'identifier de potentielles orientations privilégiées des fibres de collagène et de les relier aux propriétés mécaniques de la peau totale.
Pour cela, sur chaque sujet, des biopsies témoins sont prélevées avant l'essai (suivant la méthode illustrée par la Figure 3-14-a) dans chacune des directions longitudinale et transversale (cf Figure 3-5).

- ✓ Une étude qualitative du mécanisme de rupture et sa mise en relation avec la direction de traction :
Sur chaque sujet, des biopsies de la rupture sont prélevées (suivant la méthode illustrée Figure 3-14-a) à la fois sur une éprouvette testée dans la direction transversale et sur sa complémentaire (cf Figure 3-5) testée dans la direction longitudinale. La zone en question est observée au microscope.

Les tableaux A2-1 et A2-2 de l'annexe 2 rappellent les essais qui ont donné lieu à une étude histologique.

3.3. Résultats sur les propriétés de la peau

3.3.1. Propriétés mécaniques macroscopiques

Nous donnerons dans les deux paragraphes suivants des tendances générales et des valeurs moyennes quant aux propriétés mécaniques de la peau humaine, relevées à l'échelle macroscopique. Compte tenu des différentes séries d'essais réalisés (§2.1) pour lesquelles varient des paramètres comme la vitesse de traction, la direction de traction ou le site de prélèvement, il apparaît indispensable de distinguer les propriétés correspondant à chacune de ces séries. Les valeurs moyennes présentées par la suite sont donc calculées, pour chaque propriété, sur l'ensemble des sujets testés dans chacune des six catégories suivantes:

- traction quasi-statique – peau du front – direction longitudinale (St-Fr-Lo)
- traction quasi-statique – peau du front – direction transversale (St-Fr-Tr)
- traction dynamique – peau du front – direction longitudinale (Dy-Fr-Lo)
- traction dynamique – peau du front – direction transversale (Dy-Fr-Tr)
- traction dynamique – peau des bras – direction longitudinale (Dy-Br-Lo)
- traction dynamique – peau des bras – direction transversale (Dy-Br-Tr)

3.3.1.1. Analyse globale : résultats classiques

Nous traçons l'évolution des contraintes nominales T_{22} en fonction des déformations linéaires ε_{22}, pour chacun des essais réalisés (Figure 3-15 à Figure 3-17). Dans le but de mettre en évidence des tendances pour chacune des catégories d'essais, la moyenne de la catégorie plus ou moins un écart type est représentée en rouge sur la Figure 3-15, la Figure 3-16 et la Figure 3-17. Pour un meilleur aperçu de la tendance générale de chaque catégorie, la courbe moyenne est représentée jusqu'à la valeur moyenne de la déformation ultime, calculée pour la catégorie.

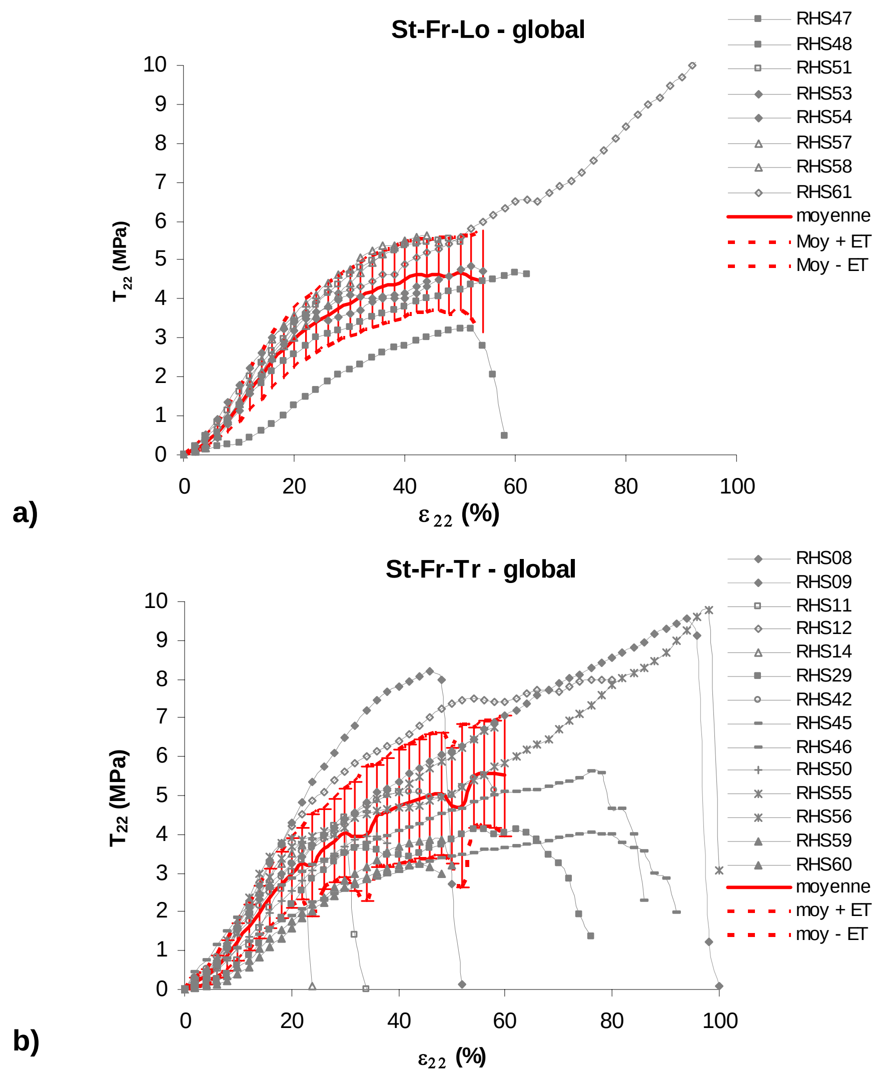


Figure 3-15 : Evolution de la contrainte nominale T_{22} en fonction de la déformation globale ε_{22}: traction quasi-statique sur peau du front dans la direction a) longitudinale et b) transversale. (un motif de courbe / sujet)

Différentes phases du comportement

Il est possible de découper les courbes contrainte/déformation en différentes phases, que nous avons représentées sur la Figure 3-18 à la fois pour un essai caractéristique de traction dynamique (RHD14) et pour son complémentaire en traction quasi-statique (RHS14).

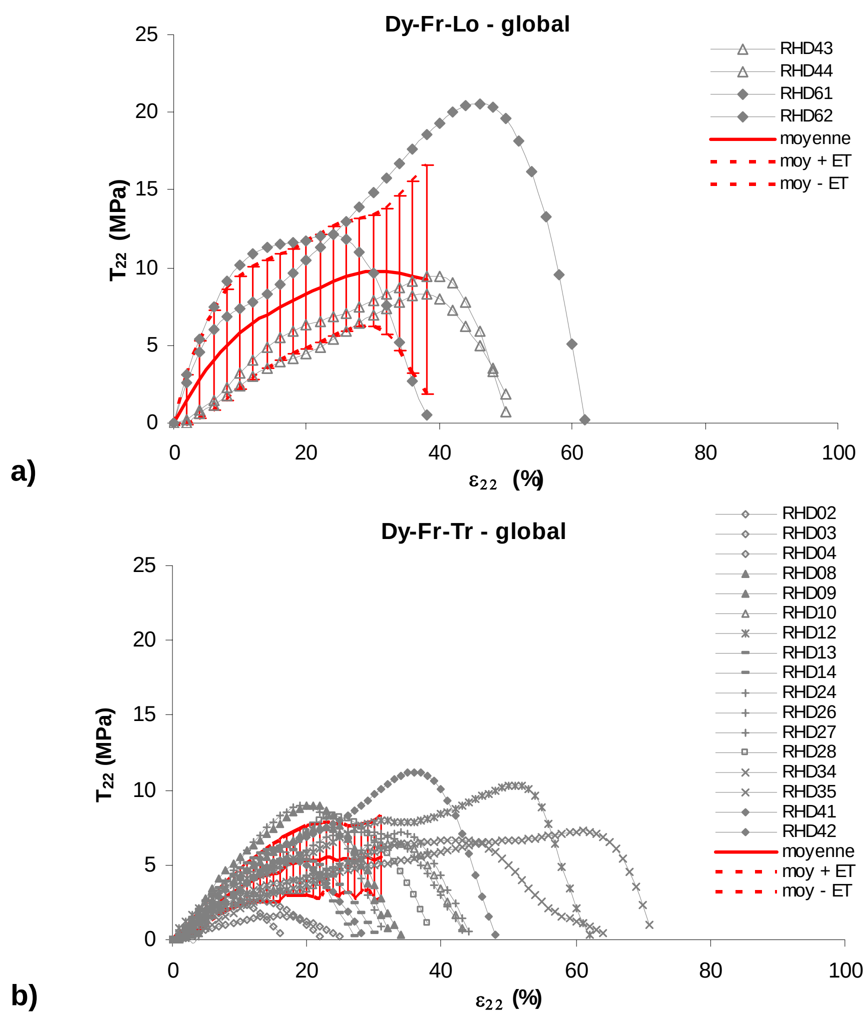


Figure 3-16 : Evolution de la contrainte nominale T_{22} en fonction de la déformation globale ε_{22}: traction dynamique sur peau du front dans la direction a) longitudinale et b) transversale. (un motif de courbe / sujet)

Sur l'ensemble des essais quasi-statiques (Figure 3-15), se retrouvent les trois phases A, B et C décrites au chapitre 1 (cf Figure 1-6-a) et représentées sur la Figure 3-18-a. En moyenne, la première phase A de faible pente s'arrête à ε_{22} = 4%, elle est suivie de la deuxième phase B de transition s'étalant jusqu'à environ ε_{22} = 6% puis de la troisième phase C de forte pente interrompue par la rupture aux alentours de ε_{22} = 20%. Cependant ces trois premières phases restent très courtes par rapport à la quatrième phase qui apparaît dans cette étude et que nous avons donc nommée D. Elle débute autour de ε_{22} = 20% et se prolonge jusqu'à la rupture, soit environ ε_{22} = 59% dans la direction transversale et ε_{22} = 56% dans la direction longitudinale. Cette phase (D) durant laquelle la pente de la courbe s'adoucit progressivement, correspondrait à un phénomène de déformation irréversible du tissu avant la rupture, une sorte de déformation irréversible.

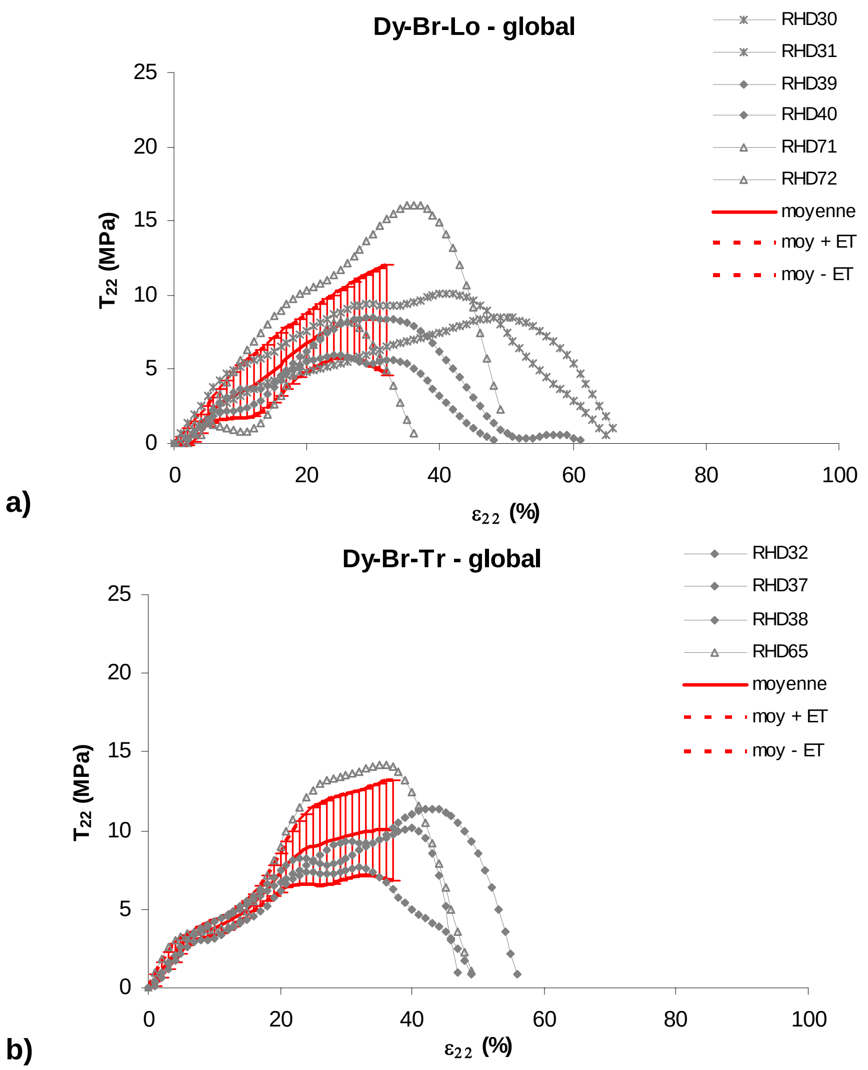


Figure 3-17 : Evolution de la contrainte nominale T_{22} en fonction de la déformation globale ε_{22}: traction dynamique sur peau du bras dans la direction a) longitudinale et b) transversale. (un motif de courbe / sujet)

En dynamique, les deux premières phases semblent disparaître pour ne laisser la place qu'aux deux dernières (C et D sur la Figure 3-18-b). En moyenne, la limite entre les deux phases se situe à environ ε_{22} = 8% en direction longitudinale, alors que pour la direction transversale elle est de ε_{22} = 5% pour le bras et quasiment ε_{22} = 12% pour le front. De manière synthétique, le passage de la dernière phase élastique (C) à la phase plastique (D) a lieu vers 10% en moyenne sur les essais dynamiques, alors qu'en quasi-statique il faut attendre 20% de déformation en moyenne. La divergence des résultats en fonction de la vitesse de traction sera exposée avec plus de détails par la suite.

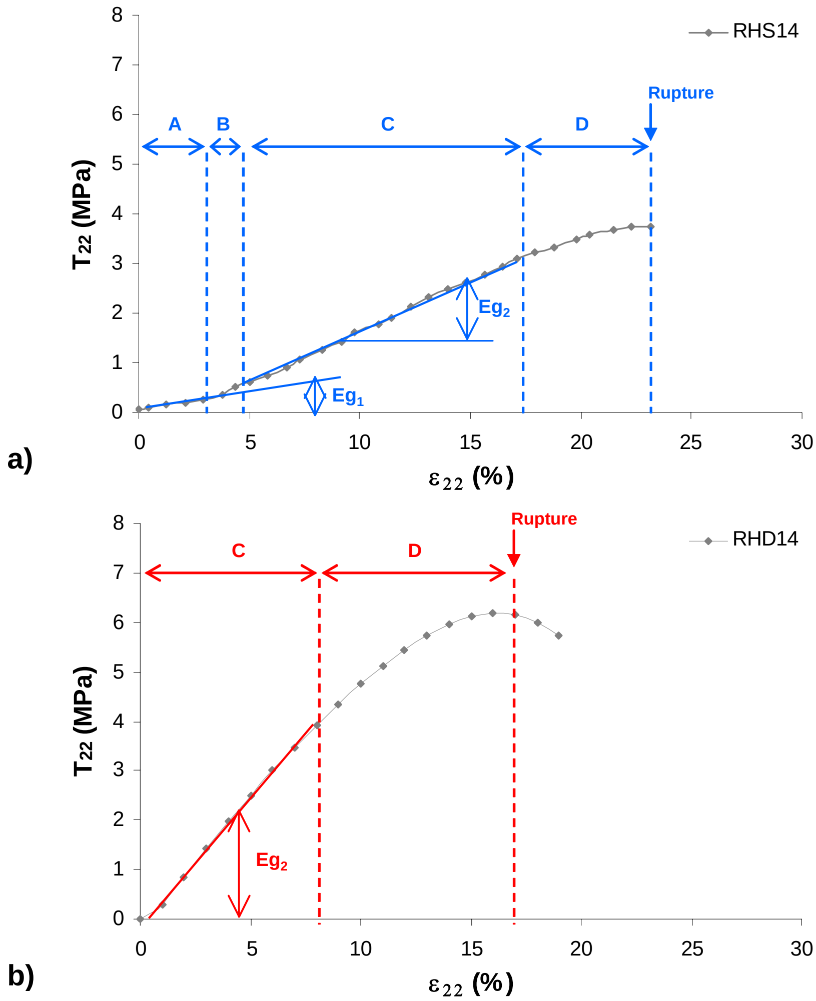


Figure 3-18 : Différentes phases d'un essai de traction quasi-statique (RHS14) a) et d'un essai de traction dynamique b) (RHD14) - Définition des modules élastiques correspondant (Peau du front - direction transversale).

A l'intérieur de chacun des groupes (quasi-statique ou dynamique), les tendances générales des courbes, sont relativement proches, à l'exception peut être en dynamique de la catégorie Dy-Fr-Tr pour laquelle les niveaux de contrainte et de déformation sont légèrement plus faibles que ceux des trois autres catégories dynamiques (Dy-Fr-Lo, Dy-Br-Tr et Dy-Br-Tr). Nous pouvons aussi remarquer sur les résultats dynamiques, que les courbes présentent de temps à autre des oscillations qui se reflètent sur la moyenne, notamment dans le cas Dy-Br-Tr (Figure 3-17-b). Il s'avère que ce phénomène n'est certainement pas une caractéristique du matériau, mais plutôt une conséquence des bruits de mesure que nous avons évoqués précédemment (§3.2.2.2).

Variabilité

Un point important à noter lors de l'analyse de ces courbes est sans aucun doute la dispersion non négligeable des résultats. Elle est moins marquée en quasi-statique qu’en dynamique, avec un écart type de 1.5MPa et où quasiment toutes les courbes sont contenues dans le "corridor" formé par l'écart type.

Les courbes correspondant à un même sujet restent très proches en terme de pentes et de contraintes ultimes alors que les différences les plus importantes se voient à nouveau au niveau des déformations ultimes. Certains cas illustrent particulièrement bien cette diversité inter individu, la catégorie Dy-Fr-Lo notamment, qui ne regroupe que deux sujets et où les résultats apparaissent très proches par sujet mais très différents d'un sujet à l'autre.

Modules élastiques

Dans un deuxième temps, nous nous intéressons aux valeurs moyennes[1] par catégorie des modules élastiques globaux.

Suite aux observations précédentes quant aux différentes phases constituant un essai de traction, nous calculons donc, en quasi-statique, le module global Eg_1 correspondant à la pente de la première phase A et le module global Eg_2 correspondant à celle de la troisième phase C (définis sur la Figure 3-18-a). Ces deux valeurs seront ainsi comparables à celles de la littérature, définies au chapitre 1 par E_1 et E_2 (§1.2.2.1). Dans les deux directions de traction, nous observons (Figure 3-19) une valeur moyenne de Eg_1 d'environ 6MPa nettement inférieure à celle de Eg_2, qui atteint environ 20MPa (Figure 3-19).

Dans le cas dynamique, seule la valeur de Eg_2 (définie sur la Figure 3-18-b) pourra être déterminée aux vues de la forme générale de la courbe. Elle est nettement supérieure à la valeur quasi-statique, entre deux et trois fois plus importante. Concernant la peau des bras, il n'y a que peu d'écart entre les deux directions de traction, la valeur de

[1] Valeur moyenne par catégorie d'essais définie par la moyenne des pentes des courbes de chacun des essais formant la catégorie et non la pente de la courbe moyenne.

Eg_2 dans les deux directions est aux environs de 65MPa, alors qu'au niveau du front la différence s'accentue, Eg_2 = 44.8MPa en direction transversale contre 71.8MPa en direction longitudinale (Figure 3-19).

Toutes catégories confondues, les écart types restent encore importants, ils atteignent généralement le quart de la valeur moyenne du module élastique.

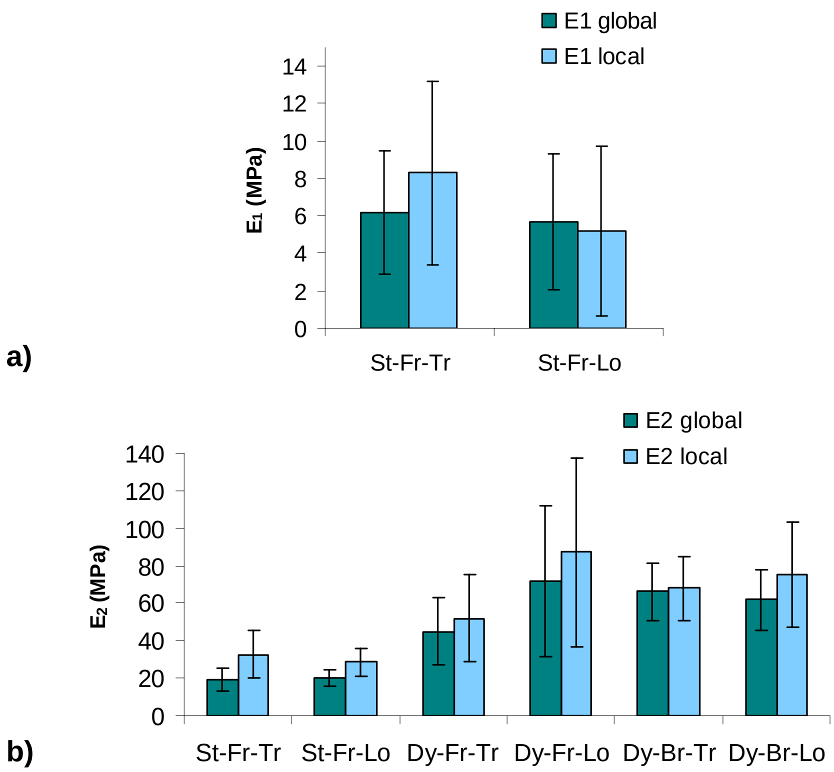


Figure 3-19 : Comparaison des valeurs globales (vertes) et locales (bleues) des modules élastiques: a) 1ère phase (Eg_1 et El_1) cas quasi-statique uniquement et b) 3ème phase (Eg_2 et El_2) – valeurs moyennes et écarts types par catégorie.

Caractéristiques de la rupture

Enfin, les caractéristiques de la rupture au niveau global sont représentées par les valeurs ultimes[2] de la contrainte nominale (Figure 3-20-a), de l'effort par unité de largeur (Figure 3-20-b) et de la déformation linaire globale (Figure 3-20-c).

[2] Valeurs moyennes par catégorie d'essais définies par la moyenne des valeurs ultimes de chacun des essais formant la catégorie et non les valeurs ultimes de la courbe moyenne.

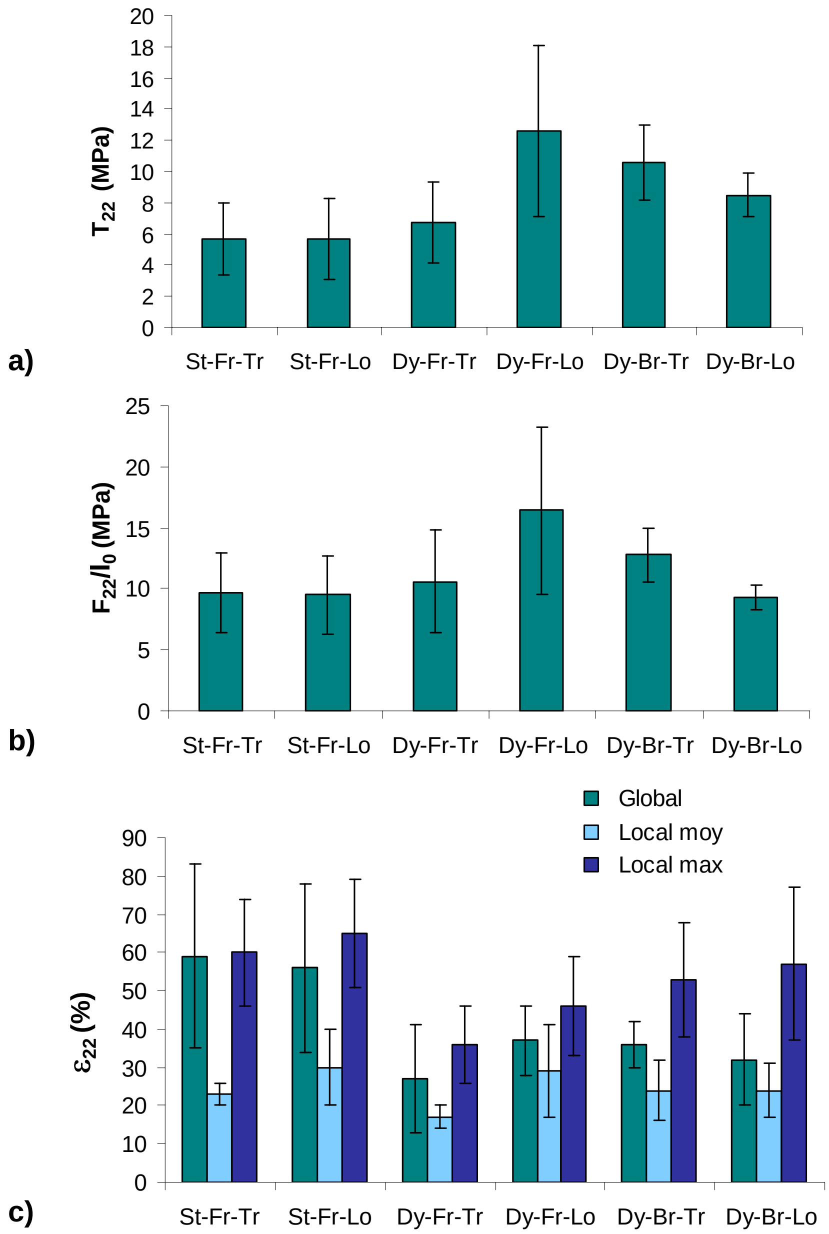


Figure 3-20 : Comparaison des valeurs globales (vertes) et locales (bleues) des caractéristiques de la rupture: a) contrainte nominale ultime (T_{22}), b) effort ultime par unité de largeur (F_{22}/l_0) et c) déformation linéaire ultime (ε_{22}): valeur globale (verte), moyenne locale (bleue claire) et maximale locale (bleue foncée) – valeurs moyennes et écarts types par catégorie.

Concernant les déformations ultimes globales, une très nette différence apparaît entre les valeurs quasi-statiques avoisinant les 60% et les valeurs dynamiques oscillant entre 27% et 37%. En quasi-statique, les valeurs ne semblent pas varier avec la direction de traction, alors qu'en dynamique, ces variations sont plus marquées, plus particulièrement dans le cas du front où ε_{22} passe de 27% dans la direction transversale à 37% dans la direction longitudinale. Cependant, ces variations semblent assez aléatoires, et restent infimes par rapport à celles dues à la vitesse de traction. Sur les valeurs de déformations ultimes globales, apparaît de nouveau la grande dispersion des valeurs à travers un écart type très important pouvant atteindre quasiment la moitié de la valeur moyenne.

En termes de contraintes ultimes ou d'effort par unité de largeur ultime, les tendances sont identiques tout en étant beaucoup moins marquées. La valeur moyenne en quasi-statique est de 5.7MPa alors qu'en dynamique elle varie de 6.7MPa à 12.6MPa. L'écart se creuse en dynamique pour la peau du front, la valeur de contrainte ultime se voit doublée entre la direction transversale et la direction longitudinale. Les écarts types sont conséquents, à peine inférieurs à la moitié de la valeur moyenne sauf dans le cas du front où la dispersion est très faible.

Toutes les valeurs représentées sur les histogrammes de la Figure 3-19 et de la Figure 3-20 sont rassemblées dans les tableaux A5-1 et A5-2 de l'annexe 5.

3.3.1.2. Analyse locale: mesure du champ de déformations

Analyse de deux essais représentatifs

Pour deux essais représentatifs (RHD14 en dynamique et RHS42 en quasi-statique), les trois composantes du champ de déformation locale sont représentées de la Figure 3-21 à la Figure 3-26. Quelle que soit la vitesse de traction, le champ de déformation locale apparaît hétérogène, cette l'hétérogénéité croit avec le niveau moyen de déformation de telle sorte que sur les dernières images de l'essai, apparaissent des concentrations de déformations dans la zone où la rupture va avoir lieu (Figure 3-21 et Figure 3-24).

Cependant, conscient de cette hétérogénéité, nous choisissons, dans un premier temps, de considérer ce champ comme homogène afin de définir une valeur moyenne de déformation locale par image. D'un point de vue pratique, cette valeur est obtenue en faisant la moyenne des déformations mesurées sur la zone dite de « mesure des déformations » indiquée en pointillés blancs sur la Figure 3-11-a, cette zone étant située à l'intérieur de la zone de corrélation (en rouge sur la Figure 3-11-a). A partir des ces valeurs moyennes de déformation locale, il est alors possible de tracer l'évolution de la contrainte nominale[3] T_{22} en fonction des trois composantes des déformations E_{11}, E_{22} et E_{12}, et ceci pour les deux essais représentatifs (Figure 3-27).

[3] Nous représentons sur les courbes: la contrainte nominale T_{22} qui est celle utilisée précédemment, car nous ne disposons que d'une valeur globale pour cette grandeur physique et les déformations de Green-Lagrange, car ce sont les valeurs données directement par le logiciel ICASOFT®.

La présence d'une composante E_{11} non nulle, démontre l'existence de l'effet Poisson, qui croit avec la déformation. De plus, le fait que la composante E_{12}, représentative du cisaillement, ne soit pas parfaitement nulle signifie que nous ne sommes pas en présence de traction pure. Cependant, ces valeurs ne dépassent pas quelques pourcents (2% en quasi-statique et 3% en dynamique) ce qui reste très faible.

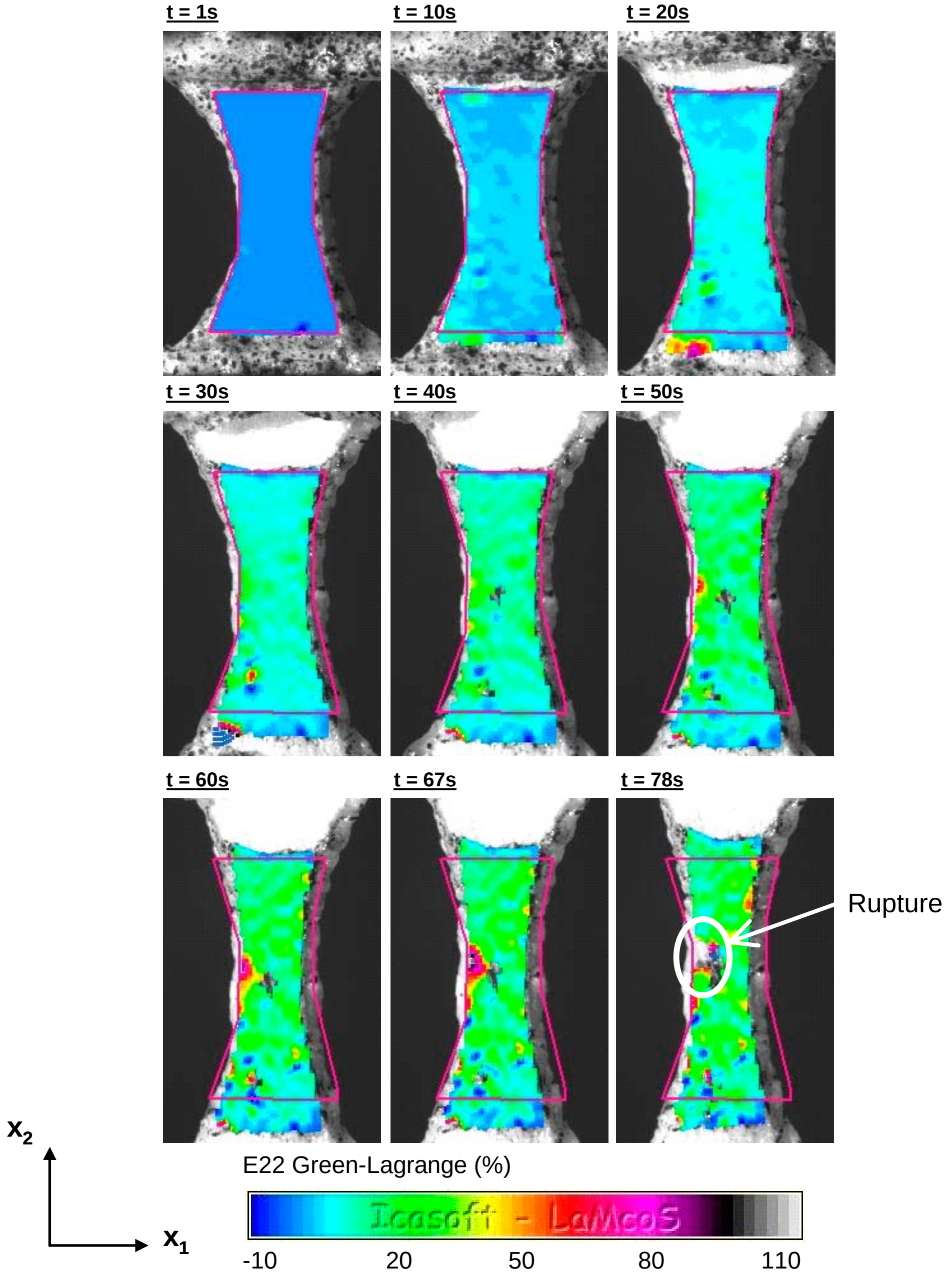


Figure 3-21 : Evolution de la composante E_{22} des déformations locales de Green-Lagrange lors d'un essai de traction quasi-statique (RHS42).

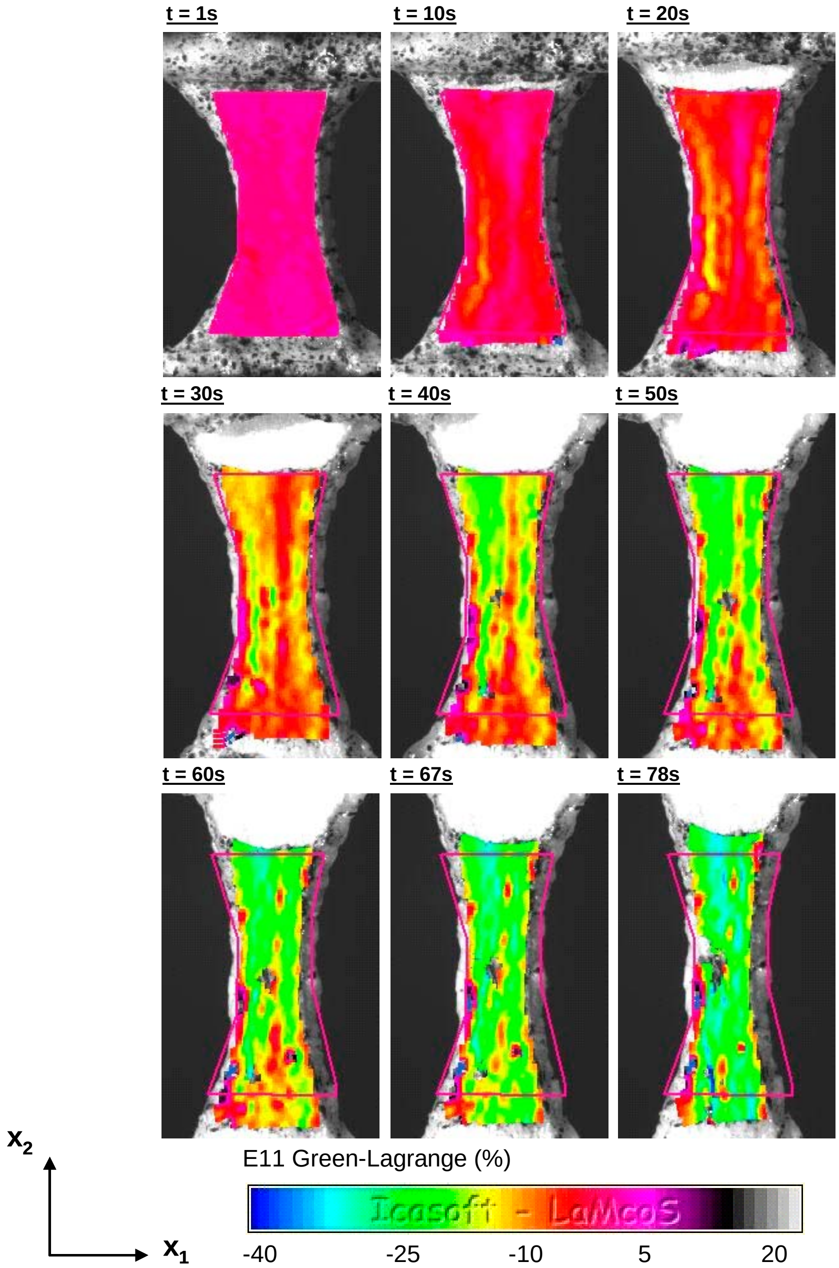


Figure 3-22 : Evolution de la composante E_{11} des déformations locales de Green-Lagrange lors d'un essai de traction quasi-statique (RHS42).

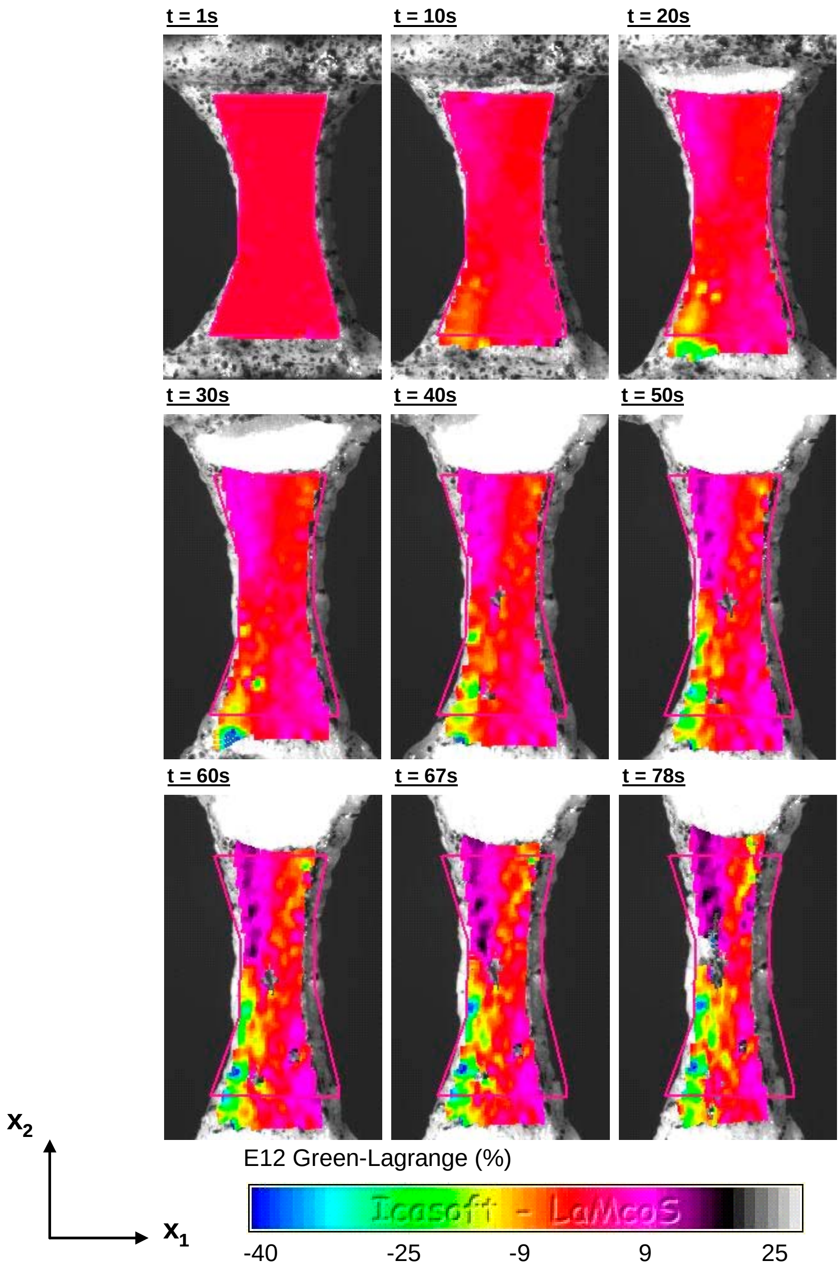


Figure 3-23 : Evolution de la composante E_{12} des déformations locales de Green-Lagrange lors d'un essai de traction quasi-statique (RHS42).

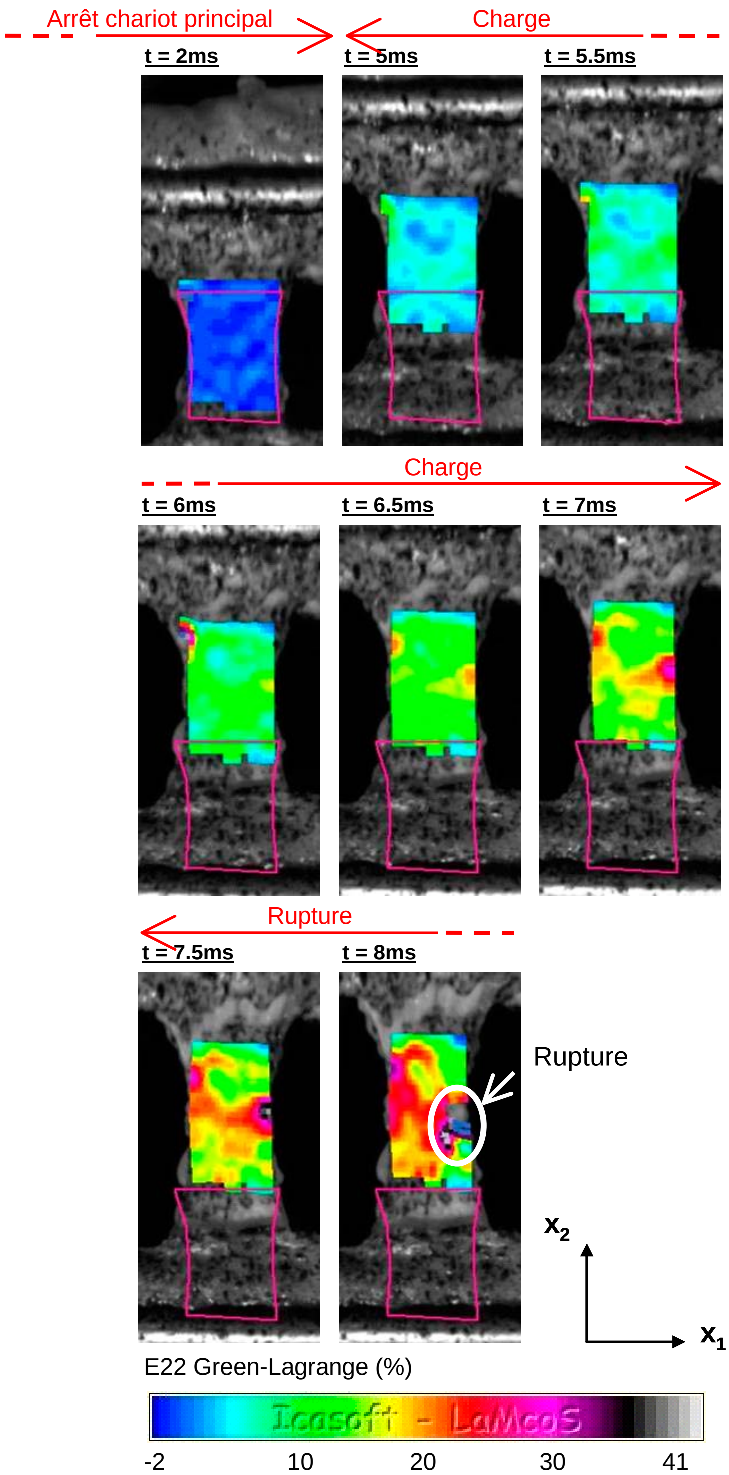


Figure 3-24 : Evolution de la composante E_{22} des déformations locales de Green-Lagrange et définition des 3 phases de la traction dynamique pour l'essai RHD14.

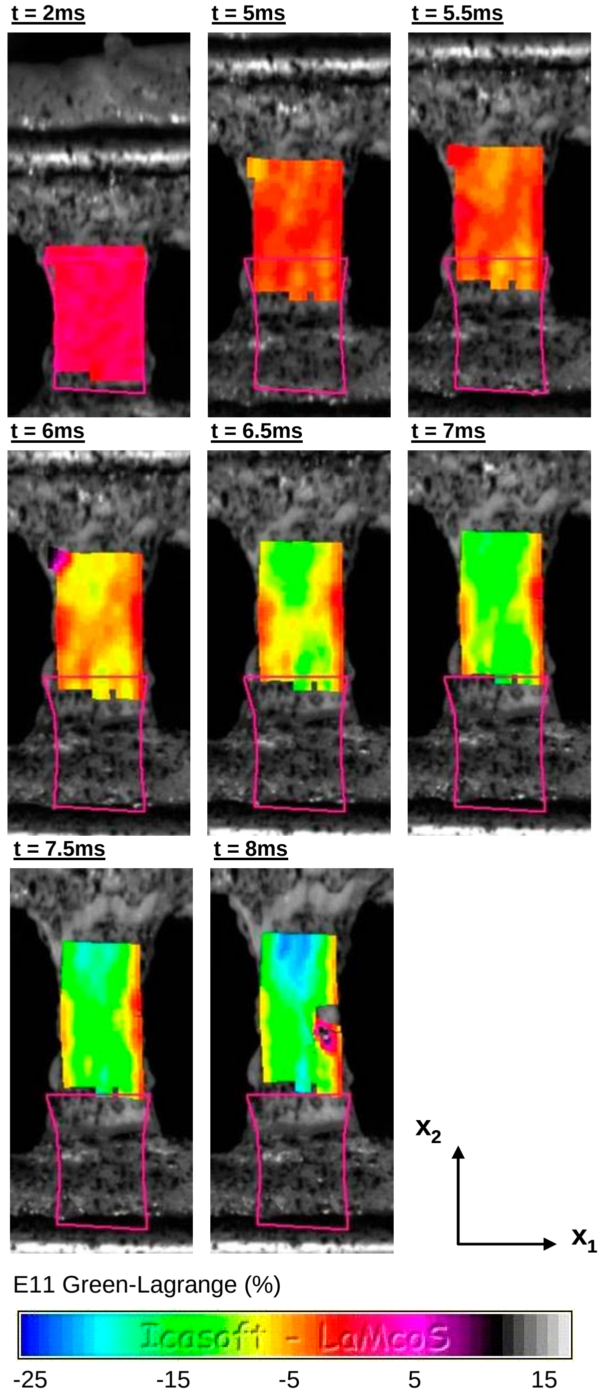


Figure 3-25: Evolution de la composante E_{11} des déformations locales de Green-Lagrange lors d'un essai de traction dynamique (RHD14).

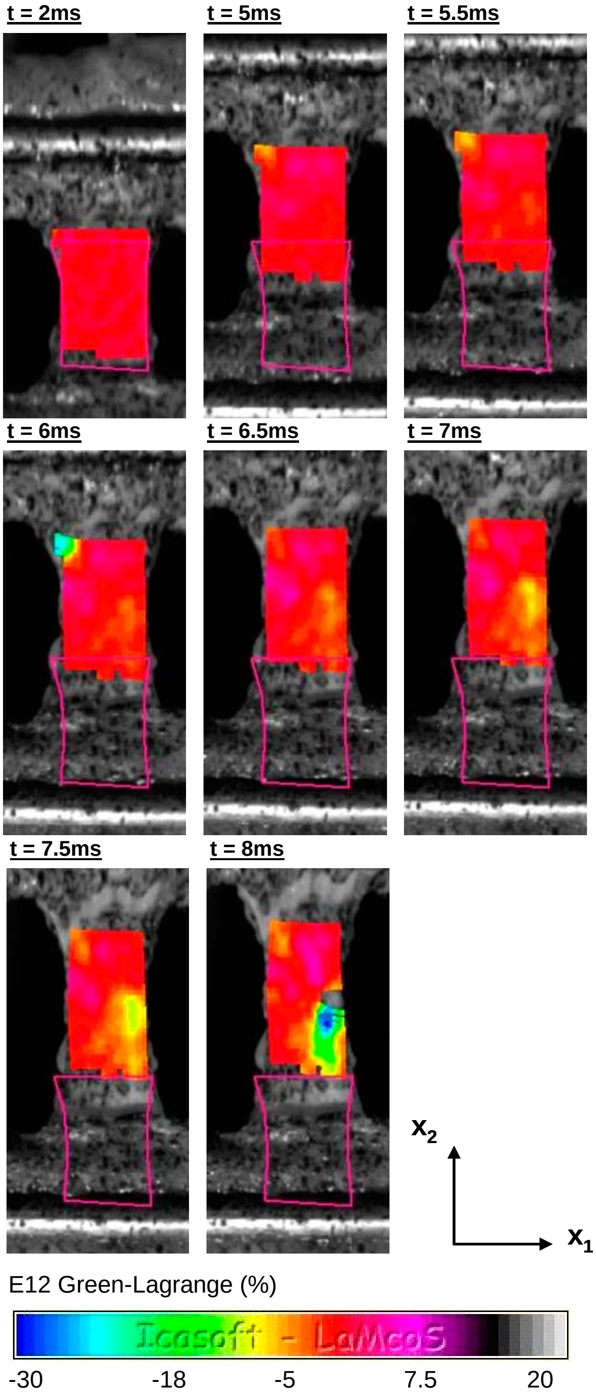


Figure 3-26 : Evolution de la composante E_{12} des déformations locales de Green-Lagrange lors d'un essai de traction dynamique (RHD14).

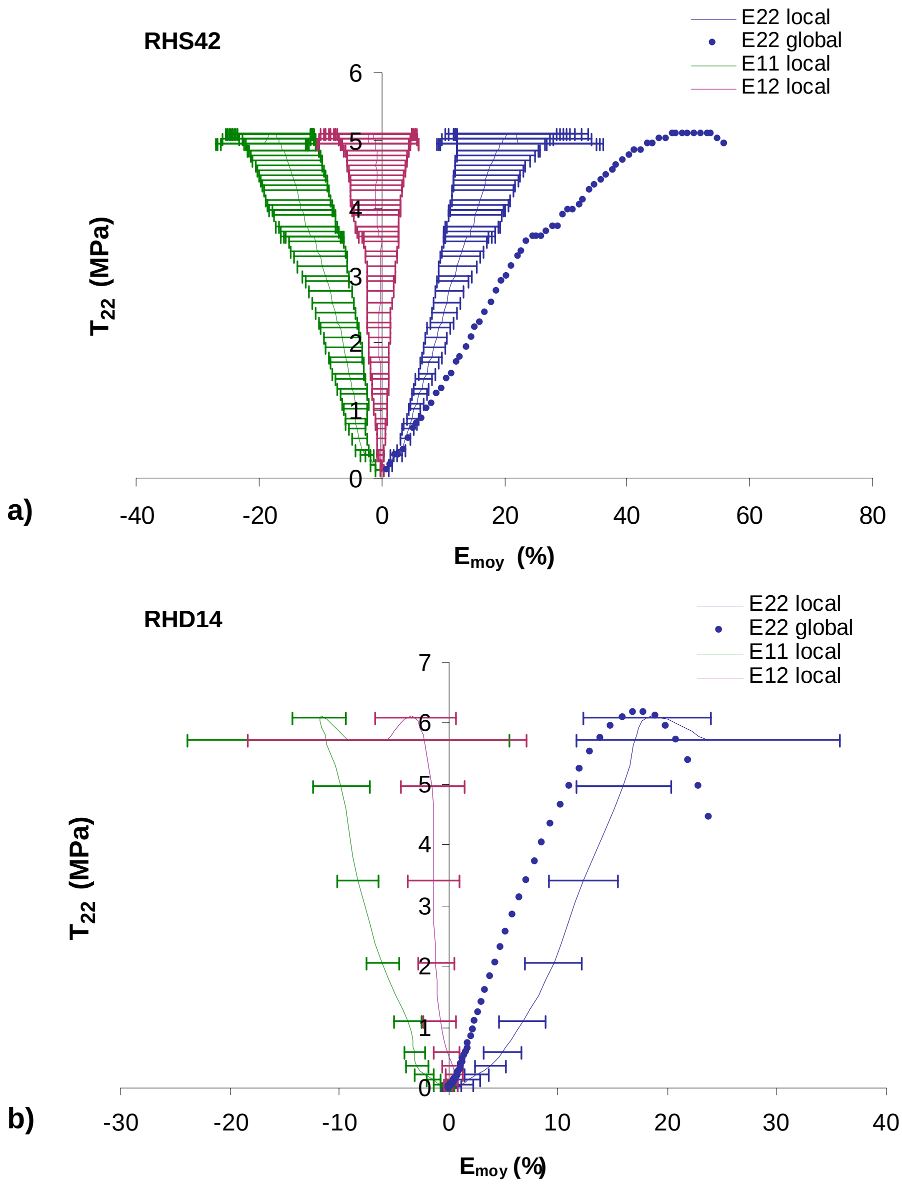


Figure 3-27 : Evolution de la contrainte nominale (T_{22}) en fonction des différentes valeurs des déformations de Green-Lagrange: valeur globale de la composante E_{22} et valeurs moyennes locales des composantes E_{11}, E_{22} et E_{12} – a) essai de traction quasi-statique (RHS42) et b) essai de traction dynamique (RHD14).

Dans un deuxième temps, nous nous intéressons plus particulièrement, à l'aspect hétérogène de la peau. Dans ce cas, la valeur moyenne des déformations ne suffit pas pour caractériser complètement le tissu, il convient d'y ajouter une information supplémentaire quant à l'hétérogénéité du champ de déformations.

Nous proposons donc une méthode permettant de quantifier le niveau d'hétérogénéité du champ de déformation locale. A partir des valeurs mesurées sur la zone dite de « mesure des déformations », nous traçons des histogrammes de répartition spatiale des déformations sur cette zone (équivalent à la quantité de patterns par niveau de déformation). Ils peuvent être assimilés à des répartitions gaussiennes dont la moyenne correspond à la valeur de déformation moyenne locale définie précédemment. L'écart type de ces répartitions est alors un indicateur du taux d'hétérogénéité du champ de déformations locales. De ce fait, sur les courbes de la contrainte T_{22} en fonction de la déformation moyenne locale (composante E_{22}), chaque valeur de déformation moyenne (point bleu sur la Figure 3-28-h et la Figure 3-29-h) est représentée avec l'écart type correspondant en abscisse (barres d'écart type en bleu).

Il apparaît clairement sur ces deux figures que l'écart type des répartitions augmente au fur et à mesure de l'allongement de la peau, en quasi-statique l'écart type passe de 1.1% à t = 10s à 13.5% à t = 67s juste avant la rupture, de même en dynamique, l'écart type varie de 1.7% à t = 5ms à 12.1% t = 8ms au moment de la rupture. Ceci illustre l'hétérogénéité grandissante du champ de déformations locales durant l'essai, ce phénomène se retrouve sur les images de la Figure 3-28 (a à g) et de la Figure 3-29 (a à g) où le champ de déformations locales est représenté sur l'éprouvette à l'aide d'une échelle de couleurs. L'apparition de concentrations de déformations juste avant la rupture sur ces images est liée aux valeurs importantes d'écart type relevées à ce même moment.

A propos des deux composantes (E_{11} et E_{12}), l'aspect hétérogène du champ de déformations est beaucoup moins marqué aussi bien sur les représentations à l'aide d'échelle de couleur (Figure 3-22, Figure 3-23, Figure 3-25 et Figure 3-26) qu'au niveau des écart types des courbes de la Figure 3-27, si ce n'est pour l'essai dynamique (RHD14), où une légère concentration de déformations est observable proche de la zone de rupture sur l'image t = 7.5ms pour la composante E_{12} représentant le cisaillement (Figure 3-26).

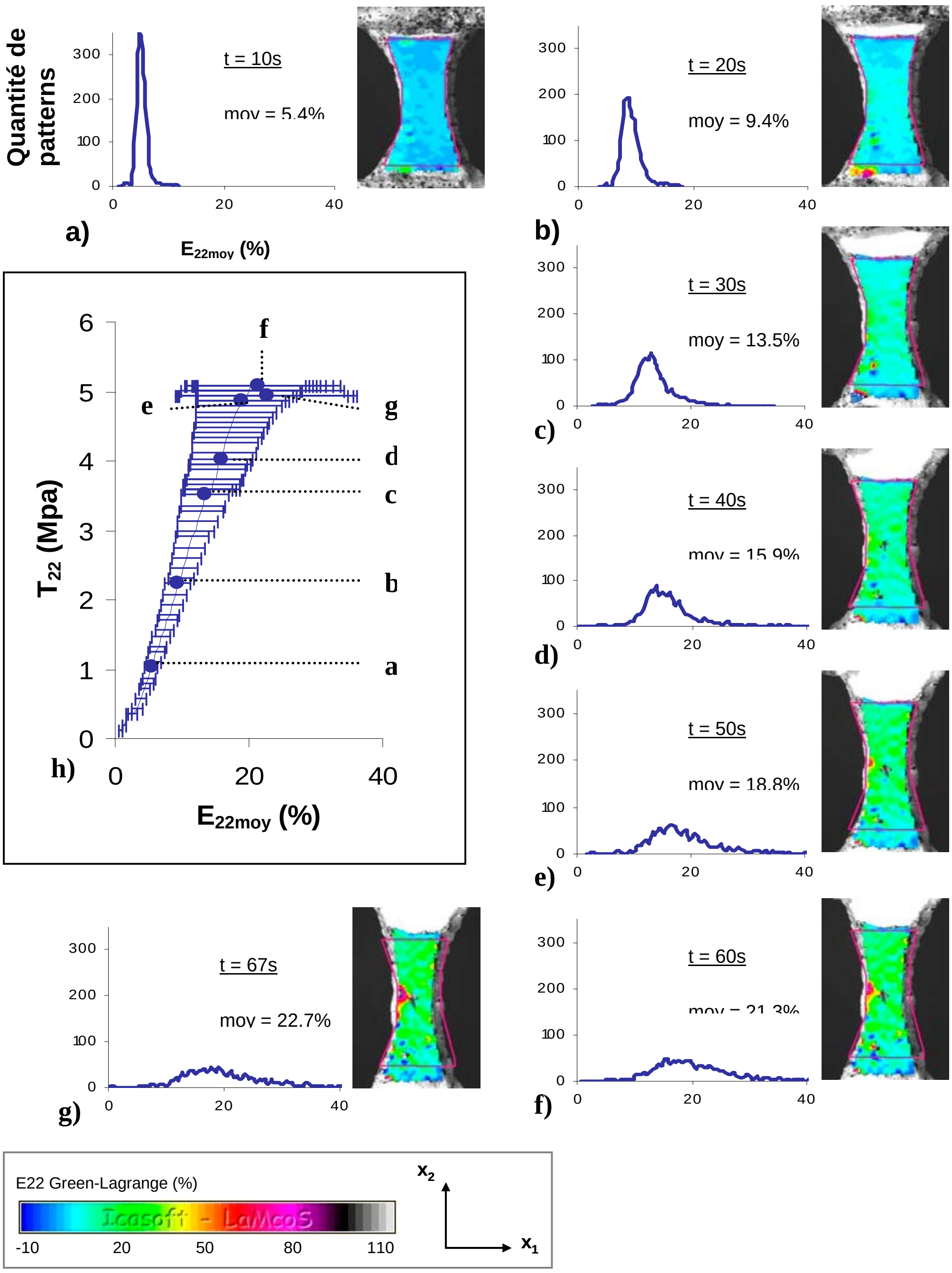


Figure 3-28 : Evolution de la contrainte nominale T_{22} en fonction de la déformation moyenne locale de Green-Lagrange E_{22moy} h) et histogrammes de la répartition des déformations E_{22moy} a) à g) lors d'un essai de traction quasi-statique (RHS42).

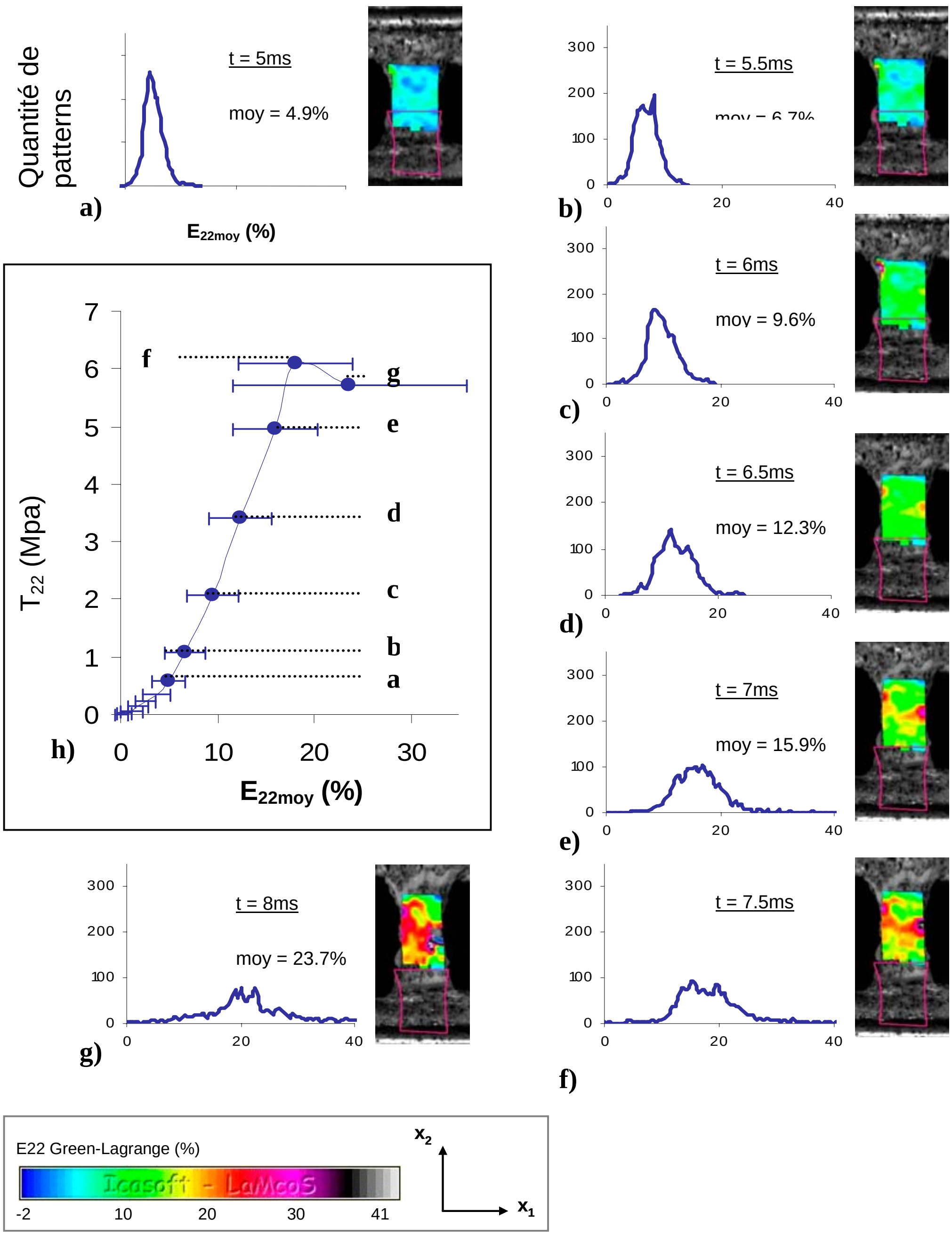


Figure 3-29 : Evolution de la contrainte nominale T_{22} en fonction de la déformation moyenne locale de Green-Lagrange E_{22moy} h) et histogrammes de la répartition des déformations E_{22moy} a) à g) lors d'un essai de traction dynamique (RHD14).

Différentes phases du comportement

Par analogie avec l'analyse des mesures globales, les courbes des contraintes T_{22} en fonction de la composante E_{22} des déformations moyennes locales sont tracées pour chaque essai. Elles sont regroupées en six graphiques (Figure 3-30 à Figure 3-32) correspondant aux catégories énoncées précédemment. Sur chaque graphique est représentée la moyenne de la catégorie plus ou moins un écart type.

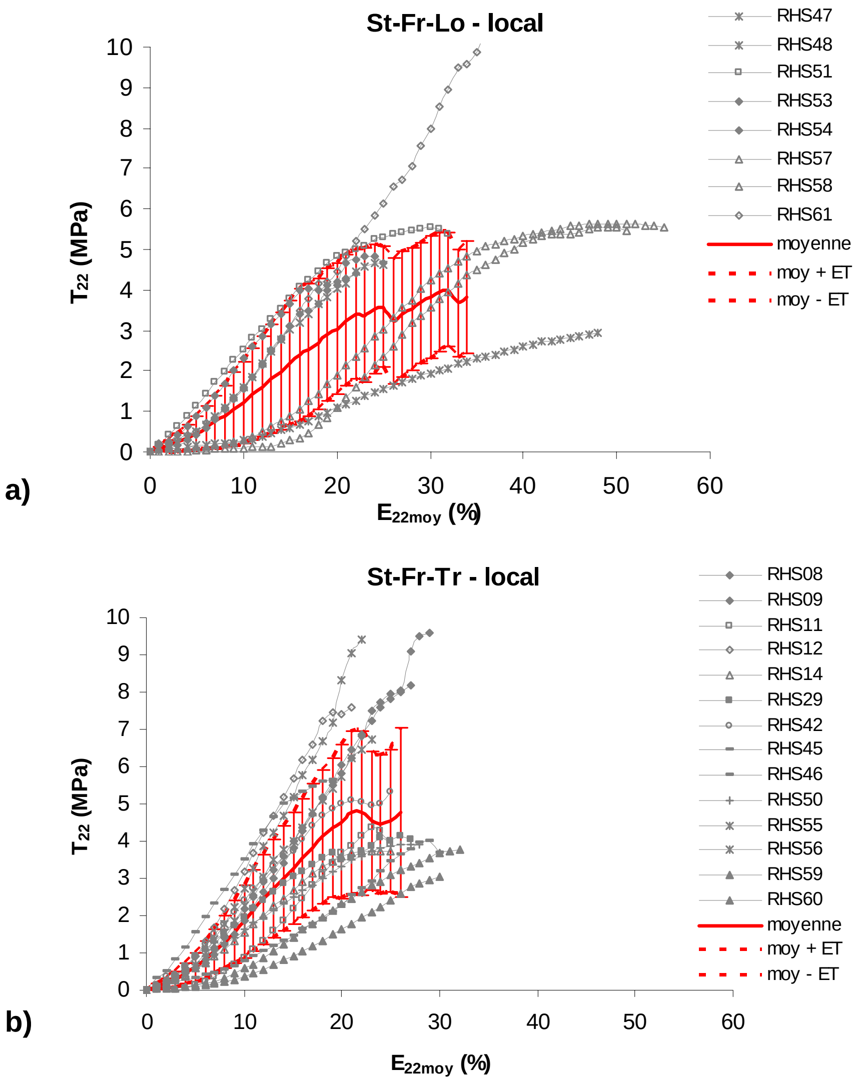
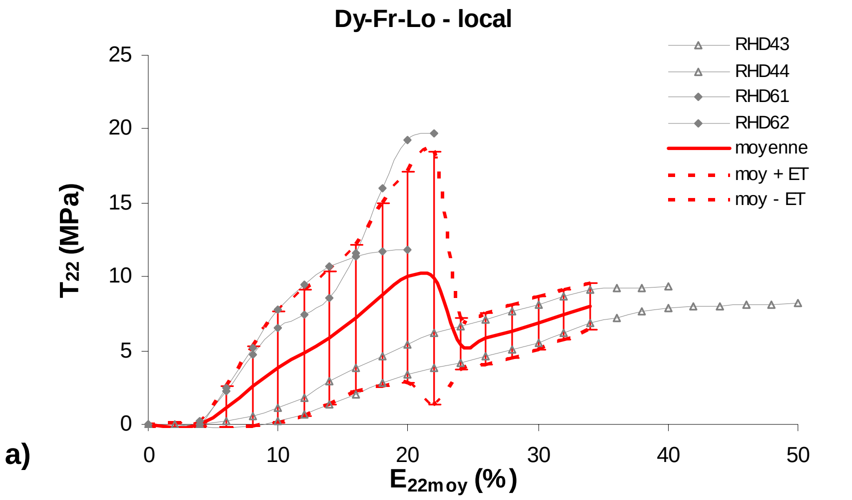


Figure 3-30 : Evolution de la contrainte nominale T_{22} en fonction de la déformation moyenne locale E_{22moy}: traction quasi-statique sur peau du front dans la direction a) longitudinale et b) transversale. (un motif de courbe / sujet)



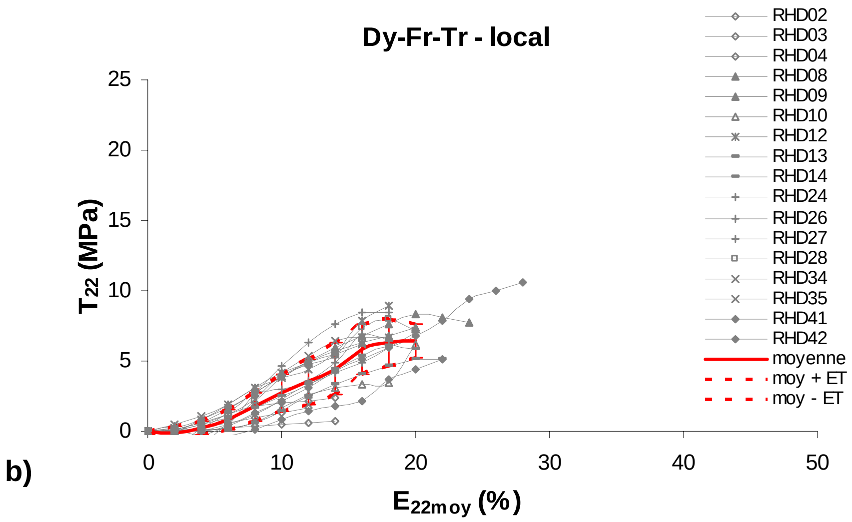


Figure 3-31 : Evolution de la contrainte nominale T_{22} en fonction de la déformation moyenne locale E_{22moy}: traction dynamique sur peau du front dans la direction a) longitudinale et b) transversale. (un motif de courbe / sujet)

L'allure générale des courbes est relativement semblable à celle des courbes globales, les transitions entre les différentes phases ont lieu pour des niveaux de déformation proches sauf peut être en quasi-statique, le passage à la quatrième phase intervient plus tôt, vers ε_{moy} = 15%. Notons aussi dans le cas dynamique qu'une première phase de pente nulle apparaît en tout début de traction. Celle-ci ne semble pas être une caractéristique du matériau, comme peut l'être la première phase de faible pente identifiée sur les courbes en quasi-statique, étant donné que dans le cas dynamique la pente est vraiment nulle. Il parait plus vraisemblable que ce phénomène soit du à des problèmes d'acquisition étant donné que la valeurs de contrainte provient d'une mesure d'un capteur alors que la valeur de déformation résulte de l'analyse des images. Vu que le phénomène n'apparaît pas en global où les deux valeurs (de contrainte et de déformation) proviennent des capteurs, ce problème est certainement lié à une mauvaise synchronisation des acquisitions.

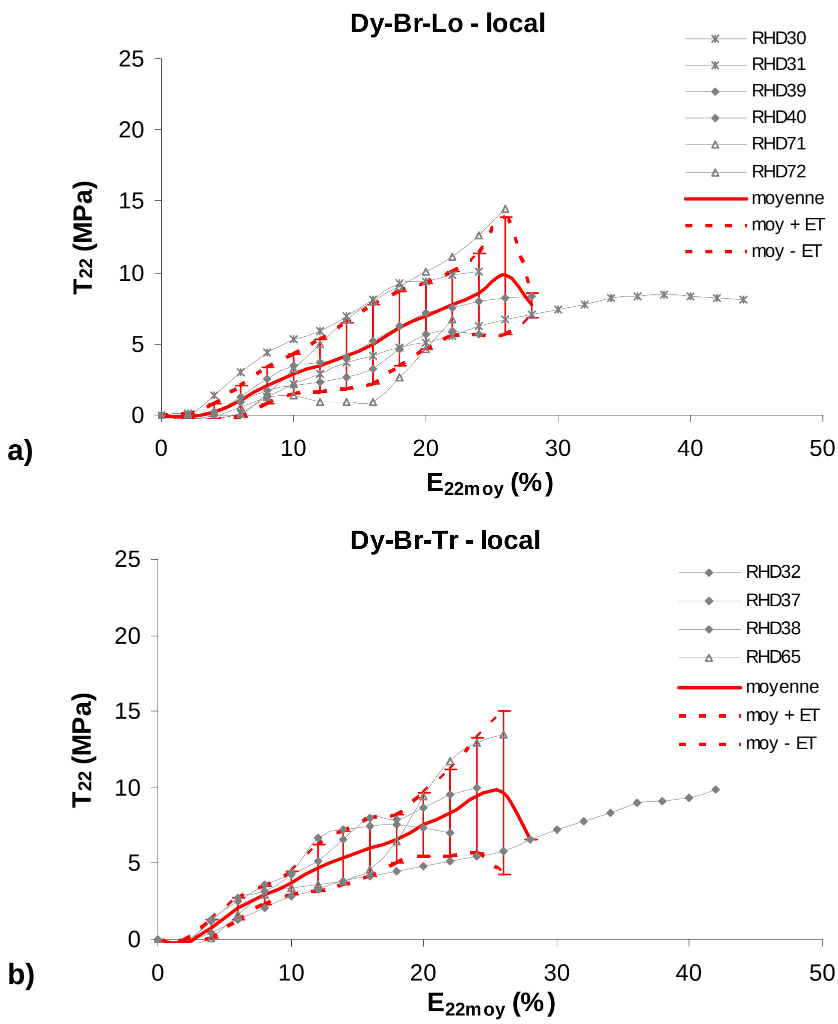


Figure 3-32 : Evolution de la contrainte nominale T_{22} en fonction de la déformation moyenne locale E_{22moy}: traction dynamique sur peau du bras dans la direction a) longitudinale et b) transversale. (un motif de courbe / sujet)

Variabilité

Notons ensuite que la dispersion des résultats est considérablement diminuée. Quasiment toutes les courbes sont contenues dans les "corridors" formés par les écart types, même pour les essais dynamiques. Les pentes des courbes ainsi que les déformations ultimes sont beaucoup plus homogènes notamment dans la catégorie Dy-Fr-

Tr qui était très dispersée en global ainsi que la catégorie St-Fr-Tr en termes de déformations ultimes. Les valeurs des écarts types sont plus faibles que dans l'analyse globale: moins de 1MPa en quasi-statique et moins de 2MPa en dynamique pour la catégorie Dy-Fr-Tr. Certaines catégories, comme Dy-Fr-Lo, gardent cependant des écart types importants du fait que seuls deux sujets sont représentés avec des comportements toujours très différents.

Modules élastiques

A partir des courbes présentées ci-dessus (contrainte/déformation moyenne locale), nous calculons, de la même manière qu'en global, les modules locaux[4] El_1 et El_2 dans le cas quasi-statique et uniquement El_2 dans le cas dynamique. (Figure 3-19)

Les valeurs quasi-statiques de El_1 varient entre 5.2MPa et 8.3MPa, alors que El_2 est de l'ordre de 30MPa en moyenne. Notons que les différences entre directions de traction sont à peine visibles. Par comparaison avec les essais dynamiques, les valeurs de El_2 en quasi-statique restent nettement inférieures, de l'ordre de 2 à 2.5 fois plus faibles. En dynamique, sur la peau du front, nous relevons une valeur de El_2 supérieure dans la direction longitudinale, 87.1MPa contre 51.8MPa en transversal, la même tendance est observable pour le bras, mais moins marquée: 67.9MPa en longitudinal contre 75.2MPa en transversal.

Les écarts types concernant El_1 apparaissent vraiment très importants, un peu moindres pour El_2, il restent cependant de l'ordre de la moitié de la valeur moyenne, à l'exception du cas du bras où les valeurs restent plus faibles.

Caractéristiques de la rupture

Au niveau local, les caractéristiques de la rupture ne peuvent être évidemment données qu'en termes de déformations. Nous avons préféré donner les valeurs à la rupture en terme de déformations linéaires, afin de les comparer aux mesures globales et surtout à celles de la littérature étant donné que les déformations de Green-Lagrange n'apparaissent jamais dans la littérature. Nous distinguerons cependant deux valeurs de déformation locale ultime[5] :

- ✓ la valeur moyenne de déformation locale ultime ε_{moy} qui est la déformation moyenne locale définie précédemment et mesurée sur la dernière image avant la rupture
- ✓ la valeur maximale de déformation locale ultime ε_{max} qui est la valeur maximale de déformation atteinte dans la zone de mesure des déformations (cf Figure 3-11-a), elle correspond aux déformations à l'endroit de la rupture, lieu

[4] Valeur moyenne par catégorie d'essais définie par la moyenne des pentes des courbes formant la catégorie d'essais et non la pente de la courbe moyenne.

[5] Valeur moyenne par catégorie d'essais définie par la moyenne des déformations locales ultimes de chacun des essais formant la catégorie et non la déformation locale ultime de la courbe moyenne.

des fortes concentrations de déformations. Cette valeur est mesurée à l'aide de l'échelle de couleur dans le logiciel ICASOFT®.

Concernant la valeur moyenne de déformation ultime (Figure 3-20-c), la différence entre les vitesses de traction n'apparaît pas du tout, les niveaux de déformations sont relativement homogènes, ils varient entre 17% et 23% avec une légère tendance, pour la peau du front, à avoir une déformation ultime dans la direction longitudinale supérieure à celle de la direction transversale, ce qui n'apparaît pas dans le cas du bras. Les écarts types sont faibles, ils ne dépassent pas un quart de la valeur moyenne pour quatre catégories sur six.

Quant à la valeur maximale de la déformation ultime (Figure 3-20-c), l'influence de la vitesse ressort un peu plus avec des valeurs quasi-statique de 60% et 65% pour des valeurs dynamiques oscillant entre 36% et 57%. De la même manière, l'influence de la direction de traction apparaît plus nettement dans chacun des cas, avec une valeur supérieure dans la direction longitudinale. Les écarts types sont ici très importants, mais il faut noter que le relevé de ces valeurs est effectué manuellement, ce qui peut induire des grands écarts liés à l'opérateur.

Si nous comparons enfin les valeurs moyenne et maximale de la déformation ultime, elles varient quasiment du simple au double quelle soit la catégorie, ce qui était prévisible.

3.3.1.3. Comparaison des analyses globale et locale

Reprenons les deux essais représentatifs RHD14 et RHS42 pour lesquels sont représentées sur un même graphique l'évolution des contraintes nominales T_{22}, d'une part en fonction des déformations globales de Green-Lagrange E_{22}, extrapolées à partir des déformations linéaires ε_{22} calculées (points bleus sur les courbes de la Figure 3-27) et d'autre part en fonction des déformations moyennes locales de Green-Lagrange E_{22moy} (ligne bleue continue sur les courbes de la Figure 3-27).

De manière générale, l'allure des courbes est assez proche.

Néanmoins, en quasi-statique, pour un même niveau de contrainte, les valeurs de déformations locales sont nettement inférieures aux valeurs globales. En effet, la valeur globale est mesurée par le capteur de déplacement entre les deux mors alors que la valeur locale correspond aux vraies déformations mesurées à la surface de l'éprouvette. L'écart entre ces deux valeurs provient donc du phénomène de glissement de l'éprouvette dans les mors. Ce phénomène est plus conséquent en quasi-statique du fait de la faible vitesse de traction et donc de la durée plus importante de l'essai. Il est facilement observable sur les vidéos.

En dynamique, sur la plupart des essais (ce qui n'est pas vraiment le cas pour RHD14), les valeurs locales oscillent autour des valeurs globales. Souvent supérieures en début d'essai elles deviennent inférieures par la suite. Toujours est il que les valeurs globales sont généralement contenues dans le "corridor local", défini par les écarts types des répartitions. Ceci signifie que le phénomène de glissement est nettement moins important qu'en quasi-statique, certainement du fait de la brièveté de l'essai. C'est ce même phénomène qui peut expliquer les différences au niveau de l'allongement ΔL mesuré localement et globalement et présenté en annexe 3.

La mesure locale s'avère donc beaucoup plus précise et plus représentative de la déformation réellement subie par l'éprouvette. Si nous nous reportons aux courbes (contrainte/déformation) regroupées en catégories d'essais, nous remarquons, notamment dans le cas Dy-Fr-Tr, que les courbes locales sont clairement moins dispersées et quasiment toutes contenues dans le corridor formé par l'écart type (Figure 3-31-b), alors que c'était loin d'être le cas pour les courbes globales (Figure 3-16-b). Cette observation démontre que la diversité inter individu semble être moins catastrophique qu'elle le paraissait sur les résultats globaux, elle n'a pas pour autant disparu sur les résultats locaux.

A propos des modules élastiques (Figure 3-19), les valeurs locales se trouvent dans tous les cas supérieures aux globales, jusqu'à 1.5 fois supérieures, ce qui est cohérent avec le fait que pour un même niveau de contrainte, les déformations locales sont plus faibles. Les écarts types, restent eux, du même ordre de grandeur.

Concernant ensuite les déformations ultimes (Figure 3-20-c), la tendance générale est une fois de plus que la déformation moyenne locale est inférieure à la valeur globale correspondante. Ceci est très marqué en quasi-statique où la valeur globale atteint quasiment le double de la valeur moyenne locale. De plus, conformément aux observations précédentes sur les courbes concernant la diminution de la dispersion, on remarque ici une très franche diminution de la valeur de l'écart type. En dynamique, la tendance est moins forte, les valeurs globales ne représentent que 1.2 à 1.5 fois les valeurs moyennes locales et les écarts types restent quasiment dans les mêmes ordres de grandeurs, conformément au faible niveau de glissement observé. Quant aux valeurs maximales locales, elles s'avèrent être relativement peu différentes des valeurs globales, notamment en quasi-statique. En dynamique, les déformations maximales locales restent toujours les plus importantes, même face aux déformations globales. Aussi surprenant que cela puisse paraître, il n'existe aucune corrélation entre ces trois valeurs de déformation ultimes.

La conclusion générale de ce paragraphe est que la corrélation d'image apporte une valeur plus fiable de déformation, vu qu'elle est mesurée à la surface de l'éprouvette, de telle sorte que les phénomènes de glissement n'entrent pas en ligne de compte. Il semble donc plus judicieux, dans la suite de l'exposé, de ne présenter que les valeurs locales de déformation.

3.3.2. Variabilité des propriétés mécaniques

Les six catégories définies précédemment regroupent des essais aux paramètres identiques. Or, même présentés par catégorie, les résultats restent fortement dispersés, ce qui nous a incité à conclure que cette dispersion était due à une importante variabilité inter individus. Dans l'objectif d'analyser la variabilité des propriétés mécaniques suivant d'autres paramètres (vitesse, direction, site de prélèvement et âge), il faut tout d'abord s'affranchir de cette variabilité inter individu. De ce fait, pour chaque paramètre analysé (vitesse, direction, site de prélèvement et âge), les comparaisons seront donc détaillées pour chacun des sujets.

De plus, suite à la confrontation des résultats locaux et globaux, il apparaît clairement que la mesure locale de déformations est la plus représentative. Toutes les valeurs de déformations et de modules élastiques donnés par la suite proviendront donc des mesures locales, effectuées par corrélation d'images.

Enfin, remarquons que nous continuons de représenter sur les courbes les déformations de Green-Lagrange E_{22} et de donner les valeurs à la rupture en terme de déformations linéaires ε_{22}.

3.3.2.1. Influence de la vitesse de traction

La variation des propriétés mécaniques en fonction de la vitesse de traction est étudiée sur un total de sept sujets, pour lesquels la peau du front est testée dans la direction transversale pour six d'entre eux et dans la direction longitudinale pour le dernier. Rappelons que sur chaque sujet, des éprouvettes appareillées sont testées soit en quasi-statique soit en dynamique d'après le schéma de la Figure 3-4-a. La différence entre les deux protocoles est évidemment la vitesse de traction, qui, en quasi-statique, est égale tout au long de l'essai à V = 15mm/min alors qu'en dynamique, elle est de V_0 = 3m/s au moment de l'impact et va diminuer jusqu'à la rupture. Ceci se traduit, en termes de vitesses de déformation moyenne locale $\dot{\varepsilon}_{22moy}$, par une valeur croissant de manière exponentielle tout au long des essais dynamiques, pouvant atteindre $100s^{-1}$ en moyenne avant la rupture, comme l'illustre sur la Figure 3-33-b dans le cas de l'essai RHD14. Sur l'ensemble des essais quasi-statiques, la vitesse de déformation en début d'essai est de l'ordre de $0.01s^{-1}$, elle diminue ensuite pour se stabiliser aux alentours de $0.002s^{-1}$ (Figure 3-33-a). Notons que le début de la phase de stabilisation de la vitesse de déformation correspond en général au début de la quatrième phase (D) sur la courbe contrainte/déformation (cf §3.3.1.1), c'est-à-dire que la vitesse de déformation diminue pendant les trois premières phases élastiques pour se stabiliser durant la phase adoucissante.

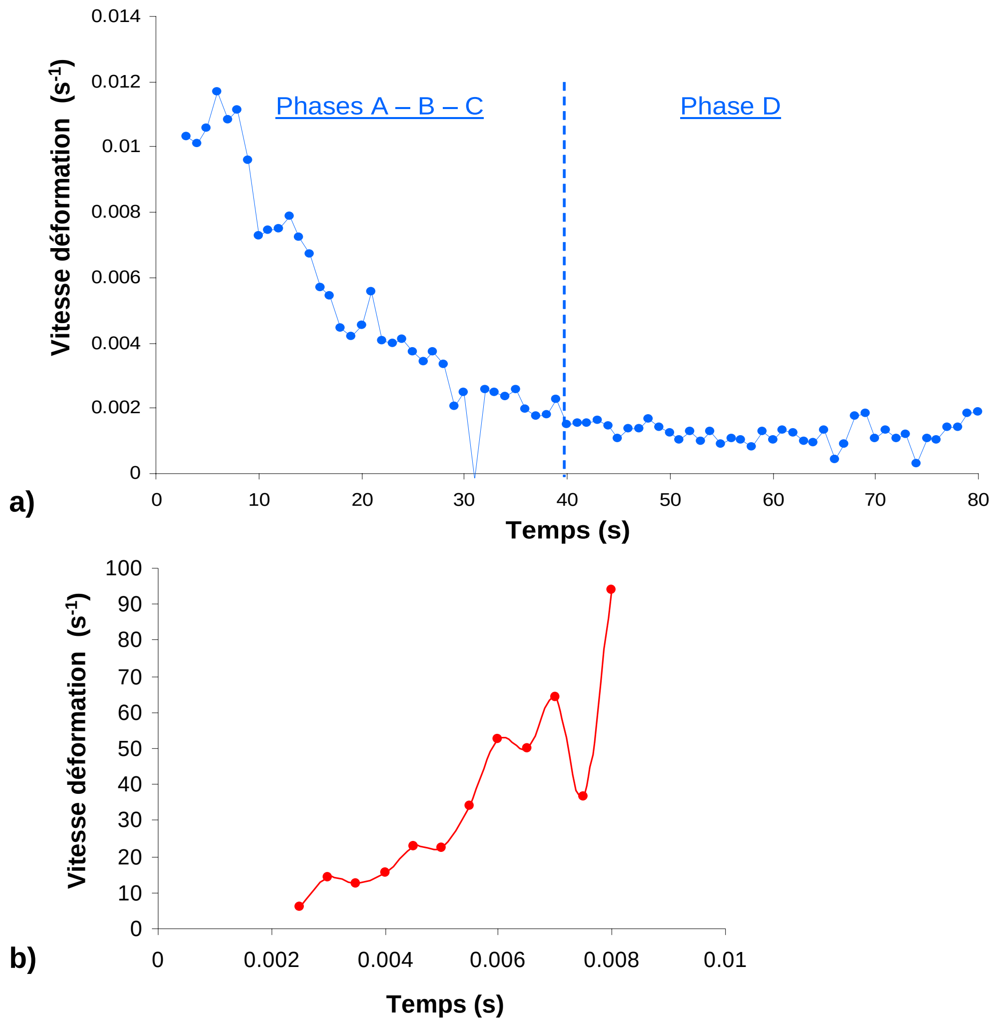


Figure 3-33 : Evolution de la vitesse de déformation moyenne locale au cours d'essais de traction quasi-statique a) et dynamique b).

Pour chacun des sujets, la comparaison porte d'une part sur l'allure générale des courbes contrainte nominale T_{22} / déformation moyenne locale E_{22moy} et d'autre part sur les valeurs moyennes, par sujet et par vitesse, des modules élastiques et des caractéristiques de la rupture. En terme de déformation ultime nous choisissons de comparer les valeurs moyennes locales $\varepsilon_{22\text{moy}}$.

Tout d'abord, comme nous l'avons vu à la fois sur les résultats globaux (cf §3.3.1.1 et Figure 3-18) et sur les résultats locaux (§3.3.1.2), nous retrouvons, sur la courbe contrainte/déformation d'un essai quasi-statique, les trois phases A, B et C définies par Daly [Daly, 1982]. De plus, à ceci s'ajoute pour nos expérimentations, une quatrième phase, que nous appelons D et qui, comme nous l'avons suggéré précédemment, correspondrait à une phase de déformations irréversibles. Ces différentes phases sont illustrées en bleu sur la courbe de l'essai quasi-statique RHS14 (Figure 3-34), complémentaire de notre essai représentatif RHD14.

Les courbes contrainte/déformation d'un essai dynamique (RHD14 par exemple) diffèrent quelque peu dans le sens où seules les phases C et D apparaissent clairement (en rouge sur la Figure 3-34). Comme il l'a déjà été évoqué, nous retrouvons ici une première phase de pente nulle qui semblerait provenir de problèmes d'acquisition. En effet, elle ne correspondrait pas à la phase A du quasi-statique, étant donné qu'elle n'existe pas sur les mesures globales (cf §3.3.1.1)

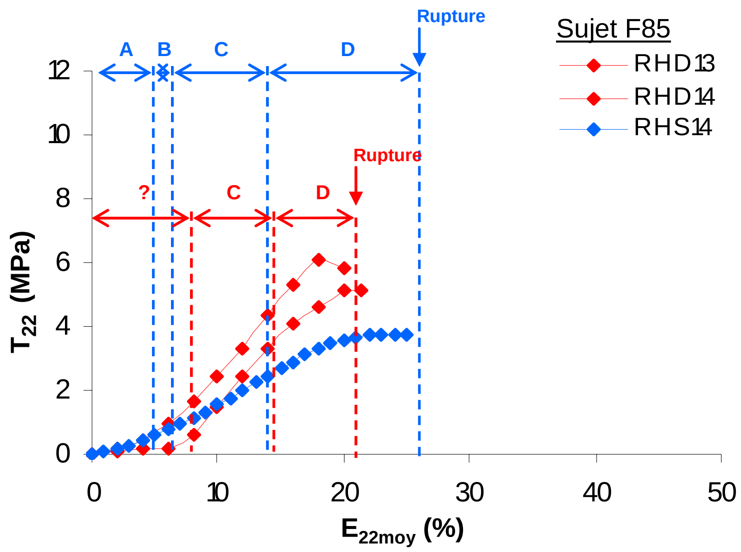


Figure 3-34 : Evolution de la contrainte nominale T_{22} en fonction de la déformation moyenne locale E_{22moy}: traction dynamique (rouge) et quasi-statique (bleu) sur peau du front dans la direction transversale – Définition des différentes phases A, B, C et D.

Sur l'ensemble des courbes de la Figure 3-35, il apparaît que la pente (El_2) varie de manière plus ou moins nette avec la vitesse de traction. Pour une majorité de sujets, elle a tendance à être supérieure en dynamique, ce que nous retrouvons sur l'histogramme de la Figure 3-36-a. De plus au niveau de la rupture, nous relevons une contrainte ultime plus importante en dynamique pour 6 sujets sur 7 (Figure 3-36-b) alors qu'en termes de valeurs moyennes des déformations ultimes, la valeur statique est légèrement plus grande pour le même nombre de sujets (Figure 3-36-c).

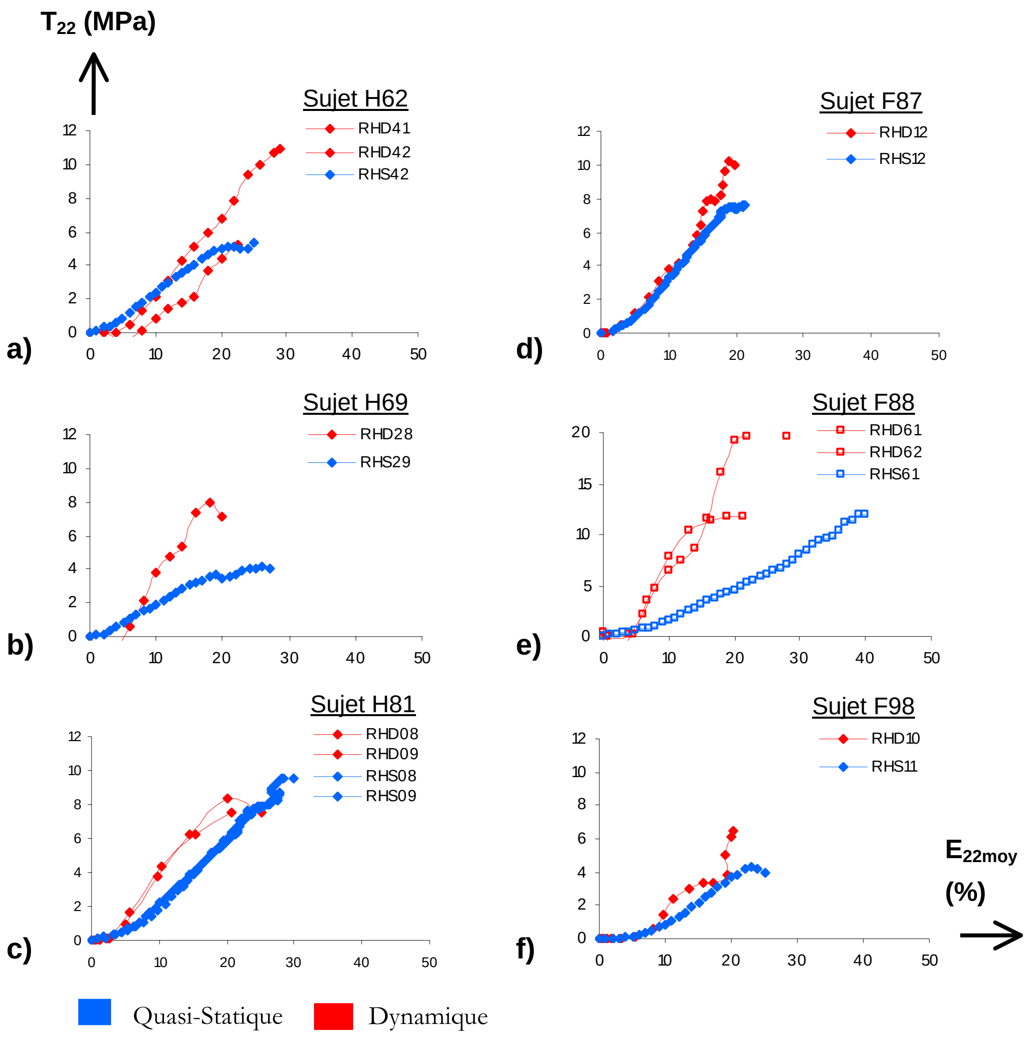


Figure 3-35 : Evolution de la contrainte nominale T_{22} en fonction de la déformation moyenne locale E_{22moy}: traction dynamique (rouge) et quasi-statique (bleu) sur peau du front dans la direction transversale, excepté e) concernant la direction longitudinale.

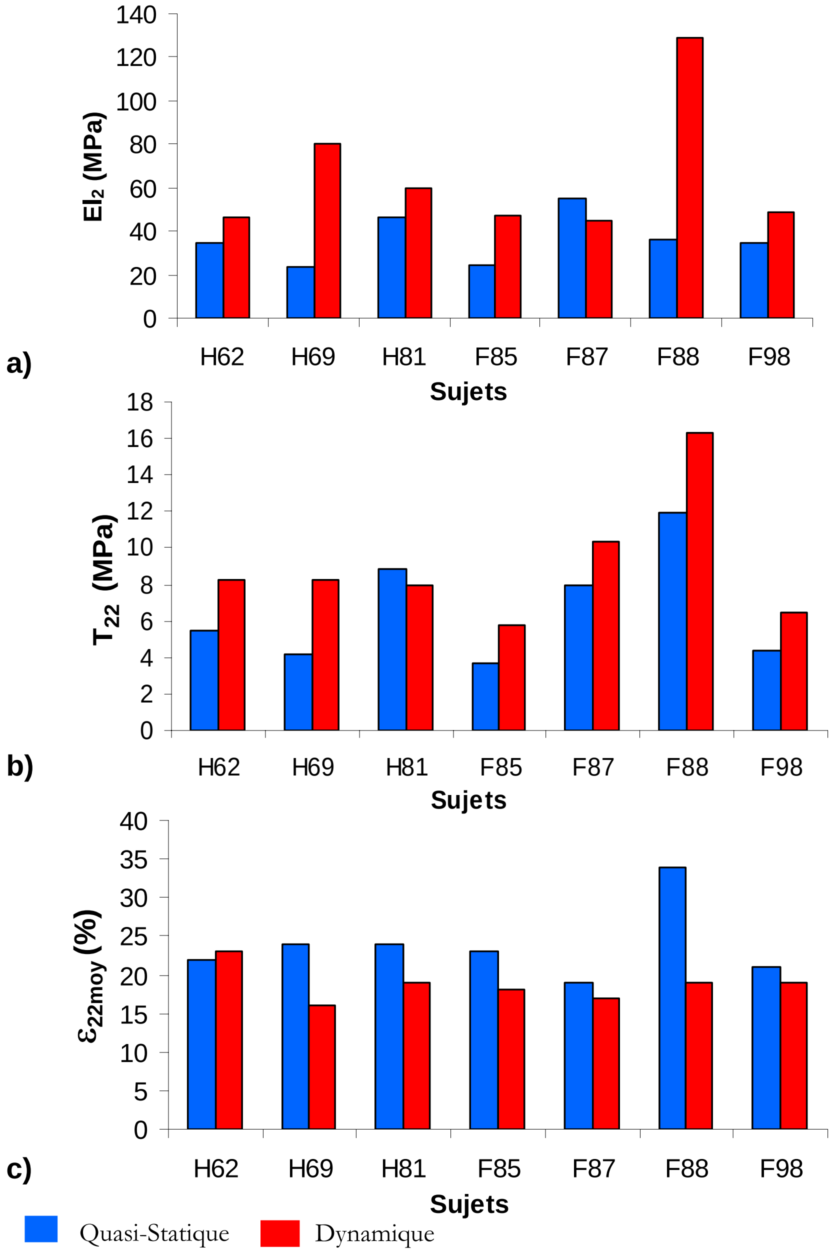


Figure 3-36 : Variation des propriétés mécaniques avec la vitesse de traction: a) module élastique local El_2 b) contrainte nominale ultime T_{22} et c) déformation linaire ultime (moyenne locale) ε_{22moy}.- Traction dynamique (rouge) et quasi-statique (bleu) sur peau du front dans la direction transversale, excepté le sujet F88 concernant la direction longitudinale.

Les valeurs représentées sur les histogrammes de la Figure 3-36 sont données en annexe 5 dans les tableaux A5-3.

3.3.2.2. Influence de la direction de traction

Nous choisissons principalement la traction quasi-statique, dans le but d'analyser l'influence de la direction de traction sur les propriétés mécaniques de la peau du front. Les résultats obtenus en dynamique sur trois autres sujets sont aussi présentés à titre indicatif uniquement, car sur un sujet est prélevée la peau du front alors que les deux autres sont relatifs à la peau des bras.

Les comparaisons sont une fois de plus réalisées d'une part sur l'allure générale des courbes contrainte nominale T_{22} / déformation moyenne locale E_{22moy} et d'autre part sur les valeurs moyennes, par sujets et par direction, des modules élastiques et des caractéristiques de la rupture.

En quasi-statique, les courbes contrainte/déformation (Figure 3-37-a, b, d, et e) ne permettent pas de dégager une tendance sur l'influence de la direction de traction. En dynamique, pour la peau du front et du bras, il est possible de faire les mêmes observations. (Figure 3-37-c, f et g).

La comparaison des propriétés mécaniques élastiques et à la rupture ne permet pas non plus de dégager des tendances (Figure 3-38).

Les valeurs représentées sur les histogrammes de la Figure 3-38 sont données en annexe 5 dans les tableaux A5-4.

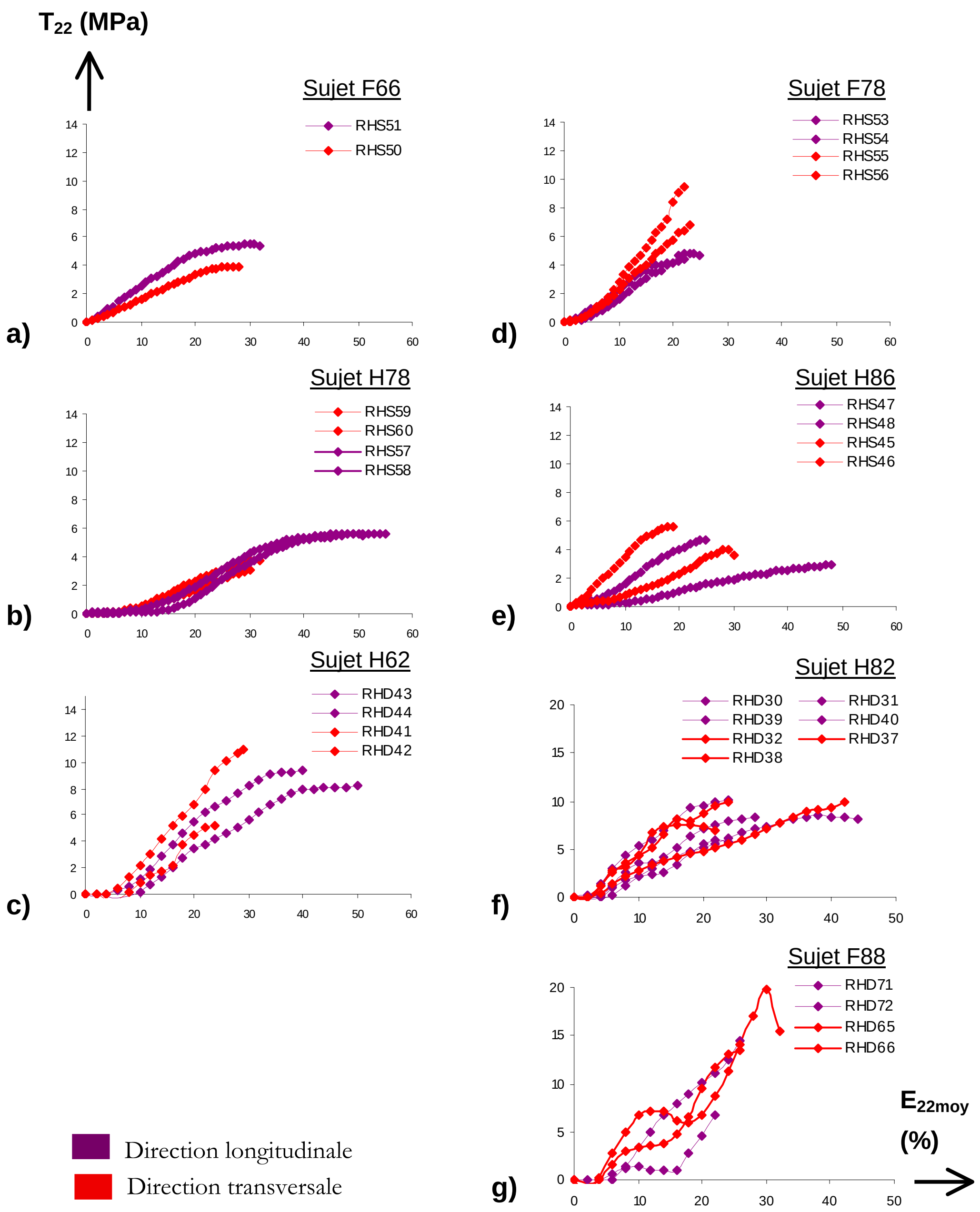


Figure 3-37 : Evolution de la contrainte nominale T_{22} en fonction de la déformation moyenne locale E_{22moy}: traction dynamique (c-f-g) et quasi-statique (a-b-d-e) sur peau du front excepté g) sur peau des bras dans la direction transversale (rouge) et longitudinale (violet).

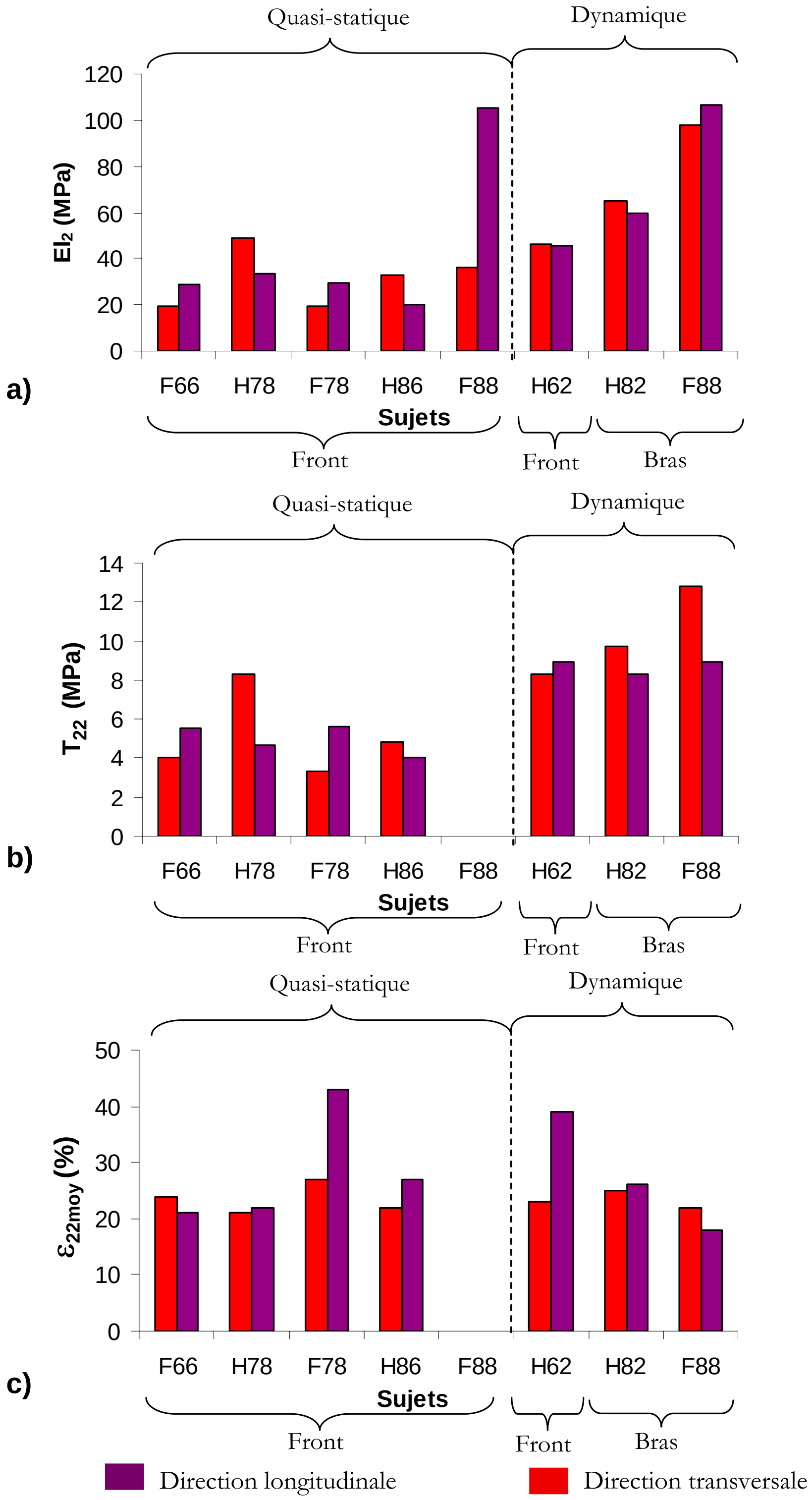


Figure 3-38 : Variation des propriétés mécaniques avec la direction de traction: a) module élastique local El_2 b) contrainte nominale ultime T_{22} et c) déformation linaire ultime (moyenne locale) ε_{22moy}.- Traction dynamique et quasi-statique sur peau du front et du bras, dans la direction transversale (rouge) et longitudinale (violet).

3.3.2.3. Influence du site de prélèvement

L'influence du site de prélèvement de la peau sur ses propriétés mécaniques est analysée sur deux sujets seulement, sur lesquels de la peau est prélevée à la fois sur le front et sur le bras. Tous les essais sont réalisés en dynamique, cependant la direction de traction diffère d'un sujet à l'autre.

Tout comme au paragraphe précédent, pour chaque sujet, nous comparons d'une part l'allure générale des courbes contrainte nominale T_{22} / déformation moyenne locale E_{22moy} et d'autre part les valeurs moyennes, par sujets et par site de prélèvement, des modules élastiques et des caractéristiques de la rupture.

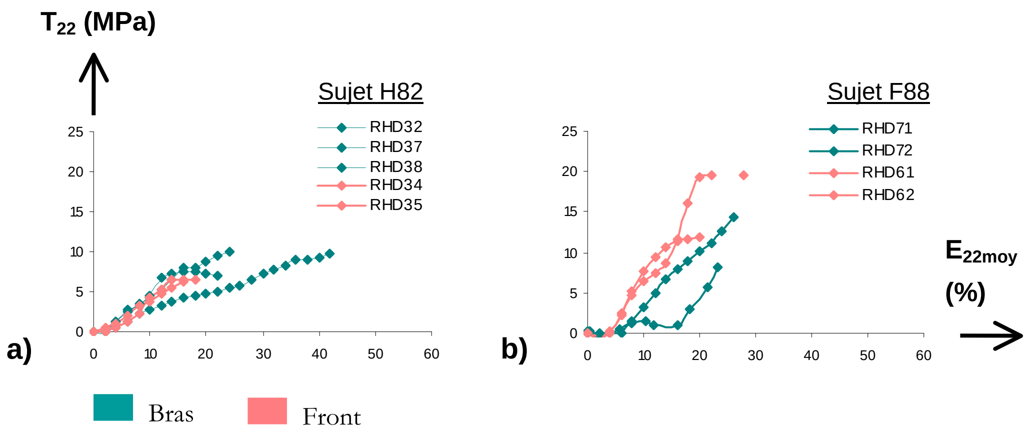


Figure 3-39 : Evolution de la contrainte nominale T_{22} en fonction de la déformation moyenne locale E_{22moy}: traction dynamique dans la direction transversale a) et longitudinale b) sur peau du front (rose) et des bras (vert).

Sur les courbes contrainte/déformation de la Figure 3-39, autant la raideur du front semble supérieure pour le sujet F88, autant les courbes du sujet H82 s'entremêlent bien. En effet, les valeurs de El_2 du sujet F88 diffèrent légèrement alors qu'elles sont quasiment identiques pour le sujet H82 (Figure 3-40-a). Concernant les caractéristiques à la rupture, que ce soit au niveau de la contrainte ultime ou de la déformation ultime, les tendances sont parfaitement opposées pour les deux sujets (Figure 3-40-a et b).

Les valeurs représentées sur les histogrammes de la Figure 3-40 sont données en annexe 5 dans les tableaux A5-5.

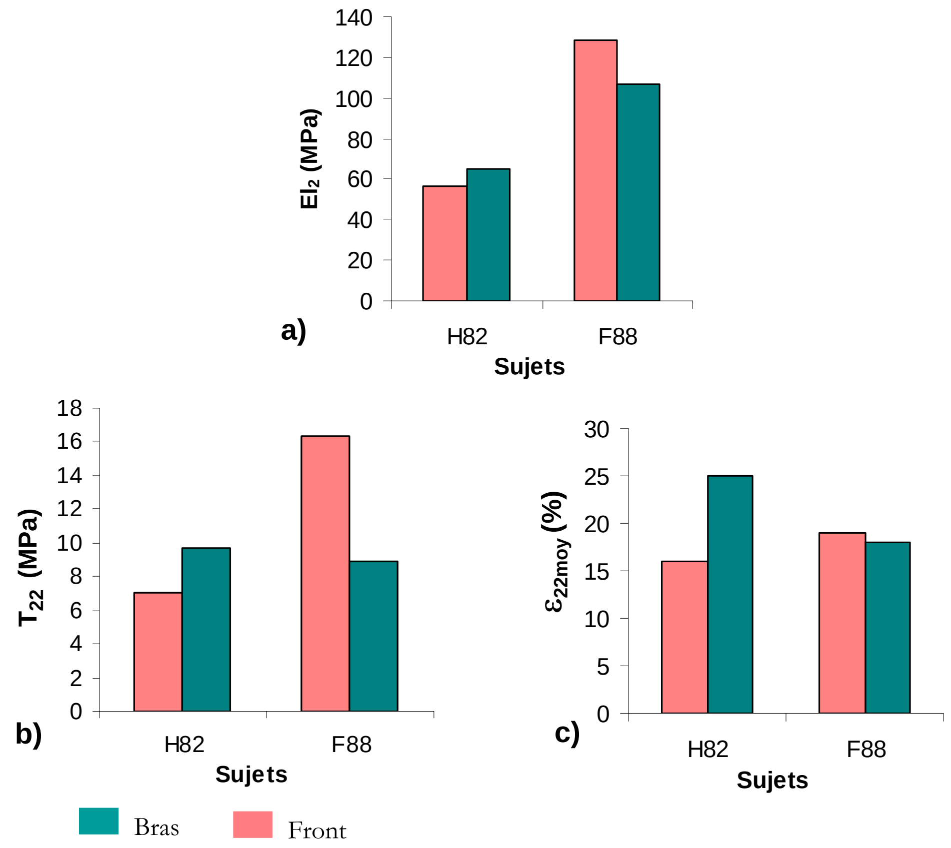


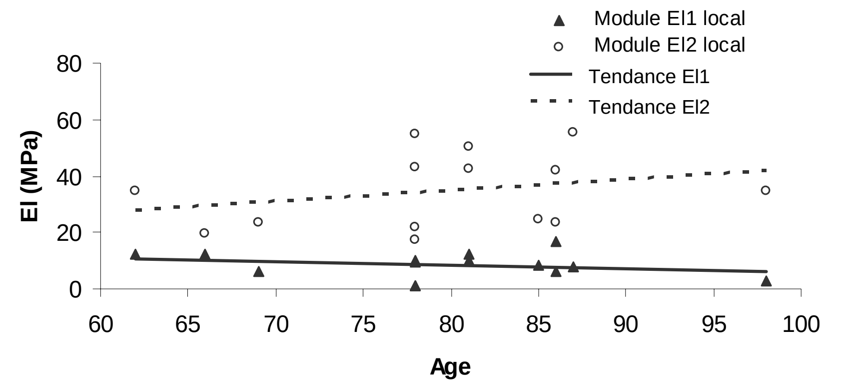
Figure 3-40 : Variation des propriétés mécaniques avec le site de prélèvement: a) module élastique local El_2 b) contrainte nominale ultime T_{22} et c) déformation linaire ultime (moyenne locale) ε_{22moy}.- Traction dynamique dans la direction transversale (H82) et longitudinale (F88) sur peau du front (rose) et des bras (vert).

3.3.2.4. Influence de l'âge

L'étude de l'influence de l'âge est effectuée sur l'ensemble des résultats exploités pour la peau du front testée dans la direction transversale, catégories regroupant le plus d'essais. Nous distinguerons cependant le cas quasi-statique (10 sujets) du cas dynamique (9 sujets). Les 19 sujets présentés sont âgés de 62 à 98 ans, cependant plus des 2/3 d'entre eux se trouvent dans la fourchette 78 – 88 ans, ce qui élève l'âge moyen à 81 ans environ.

Nous traçons sur les figures suivantes (Figure 3-41 à Figure 3-43), l'évolution de chacune des propriétés mécaniques en fonction de l'âge, à savoir les modules élastiques locaux El_1 et El_2 et les valeurs ultimes à la fois de la contrainte nominale T_{22} et de la déformation moyenne locale ε_{22moy}. Sur chacun des graphiques est ajoutée la courbe de tendance obtenue par régression linaire, donnant ainsi un aperçu rapide quant à l'évolution de la propriété avec l'âge.

a)



b)

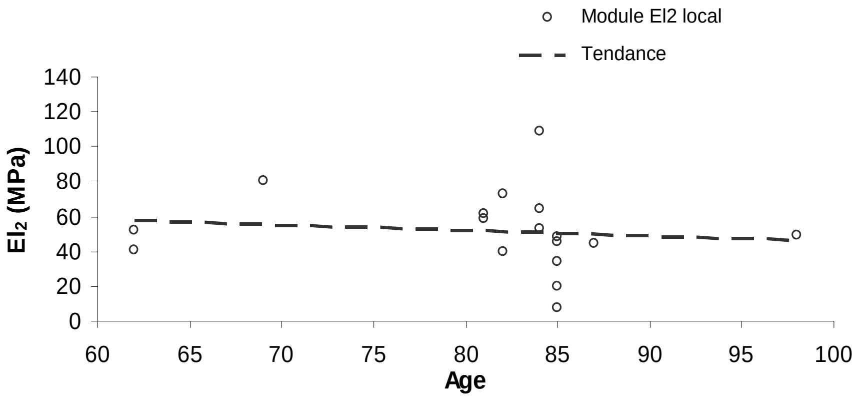


Figure 3-41 : Evolution des modules élastiques locaux avec l'âge: traction a) quasi-statique (El_1 et El_2) et b) dynamique (El_2) de la peau du front dans la direction transversale.

Dans le cas des essais dynamiques, chacune des propriétés énoncées précédemment tend à diminuer très légèrement avec l'âge: la contrainte ultime passe de 10MPa à 62ans à un peu plus de 6MPa à 98ans (Figure 3-42-b), les déformations moyennes ultimes diminuent d'une dizaine de pourcents sur la même fourchette d'âge (Figure 3-43-b) et enfin le module élastique perd 10MPa entre 62ans et 98ans sur la courbe de tendance, mais ses valeurs s'étalent entre 8MPa et 109MPa autour de 85ans (Figure 3-41-b).

En quasi-statique, seule la déformation moyenne ultime diminue de 70% à 41% entre 62 et 98 ans (Figure 3-43-a) ainsi que le module élastique El_1 (Figure 3-41-a), qui passe de 12MPa à 3MPa sur cette même fourchette d'âge. La contrainte ultime suit, elle, une très légère augmentation sur ces mêmes âges, de 5MPa à 7MPa (Figure 3-42-a). La courbe de tendance du module élastique El_2 passe de 30MPa à 45MPa de 62 à 98 ans.
En conclusion, aucune des propriétés analysées ci-dessus ne varie ostensiblement avec l'âge.

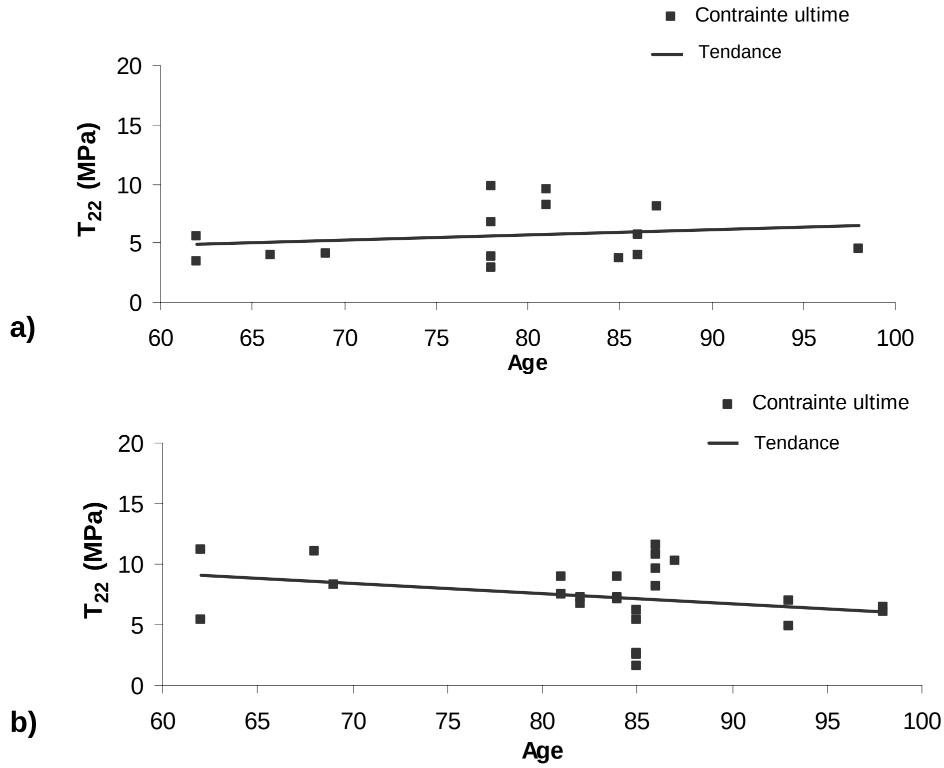


Figure 3-42 : Evolution de la contrainte nominale ultime (T_{22}) avec l'âge: traction a) quasi-statique et b) dynamique de la peau du front dans la direction transversale.

Il est ensuite intéressant de vérifier si le sexe n'a pas d'influence directe sur ces observations. La répartition homme/femme s'avère être relativement équilibrée, nous trouvons 5 hommes pour 4 femmes en dynamique et une répartition complètement équitable en quasi-statique. Cependant, les sujets féminins sont, en moyenne, légèrement plus âgés que les masculins: 77.5 ans pour les hommes et 85 ans pour les femmes. Si nous prenons en compte le sexe des sujets dans les courbes précédentes, aucune influence n'est à noter, l'évolution de chacune des propriétés en fonction de l'âge suit la tendance générale que ce soit pour les hommes ou pour les femmes.

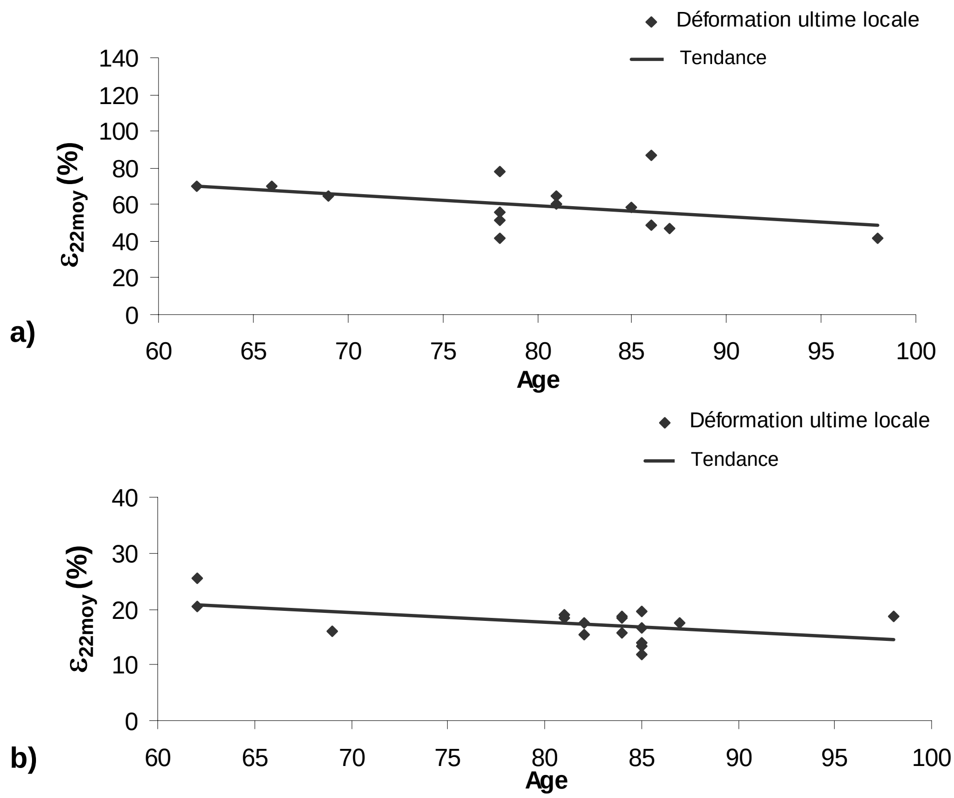


Figure 3-43 : Evolution de la déformation locale ultime (valeur moyenne ε_{22moy}) avec l'âge: traction a) quasi-statique et b) dynamique de la peau du front dans la direction transversale.

3.3.3. Observation microscopique de la structure

Ayant déterminé les propriétés mécaniques de la peau, puis analysé leurs variations à l'échelle macroscopique classique, nous descendons ensuite à l'échelle microscopique, dans le but de trouver une explication structurelle aux phénomènes macroscopiques. Comme nous l'avons déjà évoqué, nous nous focalisons sur les fibres de collagène et tentons de dégager des tendances quant aux propriétés de leur réseau. Il faut cependant noter que cette étude représente une première approche de l'utilisation de la microscopie pour une telle application. Réalisée à titre exploratoire, elle ne concerne que 4 sujets.

3.3.3.1. Epaisseur

Dans un premier temps, des mesures d'épaisseur de l'ensemble épiderme/derme sont réalisées sur de la peau du front et des bras, afin de les comparer aux valeurs e_{min} et e_{max} mesurées au pied à coulisse, directement sur l'éprouvette. Les épaisseurs obtenues par microscopie optique sont, en effet, considérées comme les plus réalistes car la limite derme/hypoderme est clairement identifiable sur les coupes histologiques de peau (Figure 3-14). Ces mesures servent donc de base à la comparaison, tout en gardant à l'esprit que les valeurs moyennes sont calculées sur deux coupes par biopsie et qu'on ne dispose pas de l'information relative à la distance entre les coupes.

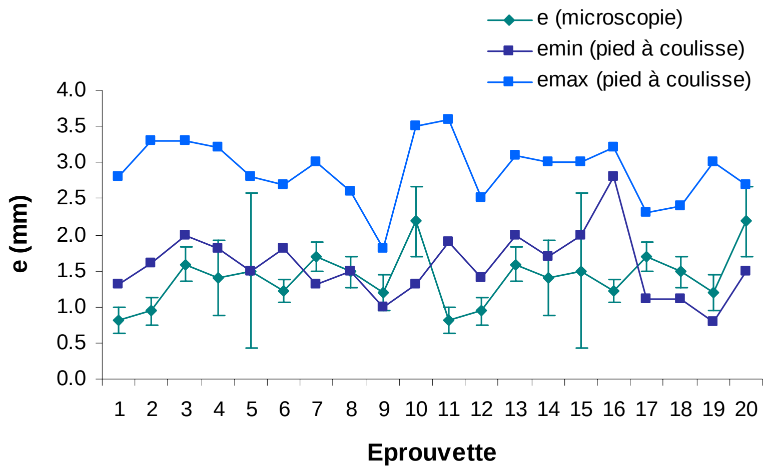


Figure 3-44 : Différentes mesures d'épaisseur d'une éprouvette de peau humaine obtenues soit en microscopie optique soit au pied à coulisse.

Le détail des résultats obtenus est donné en annexe 5. Il en résulte que, pour les 4 sujets en question, la valeur e_{min} mesurée au pied à coulisse est relativement plus proche (que la valeur e_{max}) de l'épaisseur mesurée en microscopie optique (Figure 3-44). Cette observation parait cohérente, étant donnée que la valeur e_{min} est obtenue en ne tenant pas compte de la partie d'hypoderme restant sur l'éprouvette, contrairement à e_{max}. Ceci valide le choix de e_{min} pour le calcul des contraintes, elle représente en effet la valeur d'épaisseur la plus réaliste à notre disposition pour toutes les éprouvettes.

3.3.3.2. Orientation des fibres de collagène

L'objectif, dans un deuxième temps, était d'identifier de potentielles orientations privilégiées de fibres de collagène sur la peau du front. Pour cela, des mesures de densité surfacique de fibres de collagène sont effectuées dans chacune des deux directions longitudinale et transversale.

Les valeurs représentées sur la Figure 3-45-a correspondent à la densité moyenne par direction, relevée sur chaque biopsie initiale, à raison de deux biopsies par sujet.

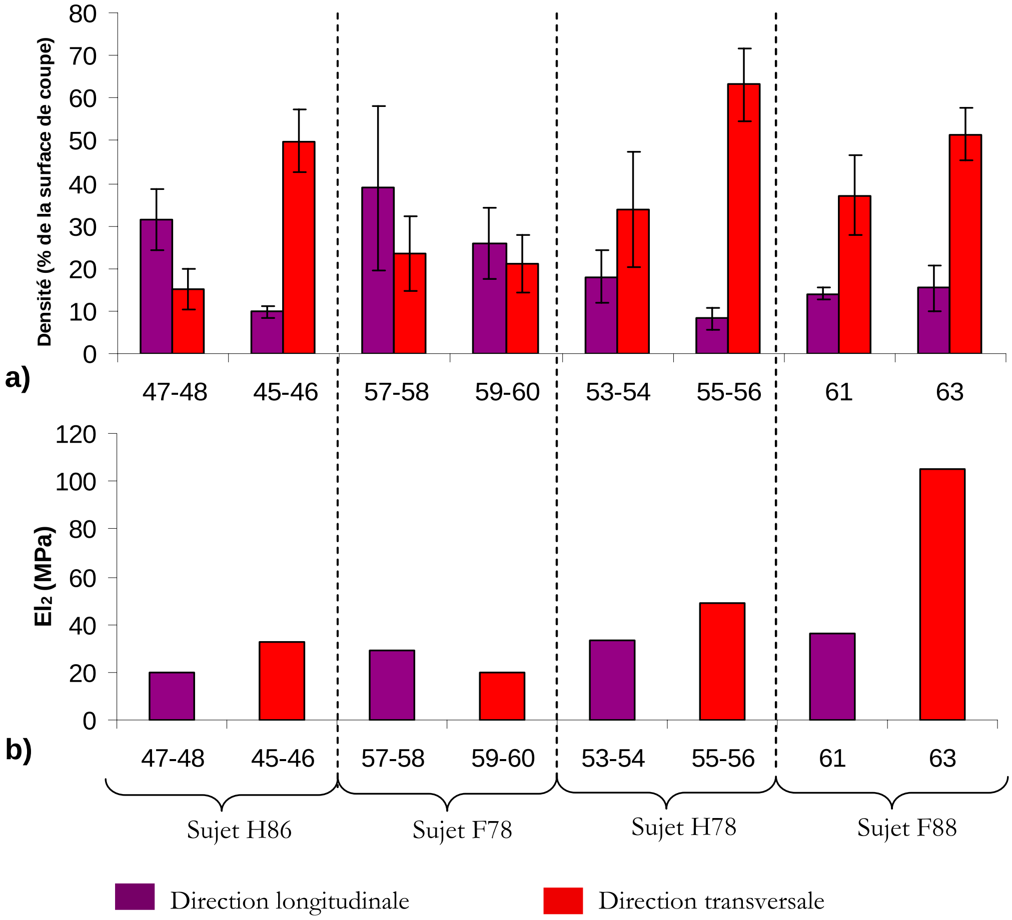


Figure 3-45 : a) Densités surfaciques de fibres de collagène dans chacune des directions transversale (rouge) et longitudinale (violet). b) Valeur locale du module élastique El_2 dans ces mêmes directions.

Concernant les sujets H78 et F88, la majorité des fibres de collagène est orientée suivant la direction transversale, avec une tendance très marquée étant donné qu'entre 40 et 60% de la surface de coupe est occupée par des fibres orientées dans la direction transversale contre environ 20% dans la direction longitudinale. La tendance inverse apparaît pour le sujet F78, elle est cependant moins marquée avec juste 10% d'écart. Le sujet H86 se démarque lui par des résultats contradictoires entre les deux biopsies.

En conclusion, il n'est à priori pas possible de dégager une tendance générale pour la peau, quant aux orientations privilégiée de ses fibres de collagène, tout du moins dans les deux directions (longitudinale et transversale) que nous nous étions définies. Cependant, si nous analysons chaque sujet indépendamment, des tendances très nettes apparaissent dans 3 cas sur 4. C'est la raison pour laquelle il est ensuite intéressant de mettre en relation ces mesures de densité de fibres par direction et les valeurs locales du module d'élasticité El_2 (Figure 3-45-b).Ce dernier est mesuré dans chacune de ces deux directions et pour chacun des sujets. Une fois de plus, une analyse par sujet s'avère indispensable, il apparaît très clairement pour les sujets H78, F78 et F88 que le module élastique est le plus important dans la direction où se trouvent la majorité des fibres de collagène. Par exemple pour le sujet F88, les valeurs à la fois du module élastique et des densités surfaciques de fibres de collagènes sont nettement supérieures dans la direction transversale. Néanmoins, concernant le sujet H86, pour lequel les mesures de densités surfaciques de fibres étaient contradictoires, les valeurs de modules sont assez proches, légèrement supérieures dans la direction transversale.

Ces résultats démontrent le fort lien entre les propriétés mécaniques macroscopiques et les propriétés microscopiques du réseau de fibres de collagène. Précisons que ces conclusions concernent des grandes déformations en quasi-statique.

Les valeurs représentées sur les histogrammes de la Figure 3-45 sont données dans le tableau A5-7 de l'annexe 5.

3.3.3.3. Mécanisme de rupture

L'observation des coupes histologiques, réalisées à partir de peau déchirée (biopsies de la rupture), permet une analyse du mécanisme de rupture. Cette étude est réalisée dans le cas de la traction quasi-statique sur 5 sujets.
Il est alors possible de distinguer assez clairement deux types de rupture :

- ✓ La rupture nette sur toute l'épaisseur de la peau, illustrée par la Figure 3-46-b.
- ✓ La rupture par glissement: elle a lieu au niveau du derme réticulaire séparant la peau en deux parties (ligne en pointillés sur les figures Figure 3-46-a et c). La partie supérieure du derme, solidaire de l'épiderme, semble s'être rétractée par retour élastique puis enroulée vers l'intérieur (Figure 3-46-a), la partie inférieure du derme semble elle être restée accrochée à l'hypoderme qui n'a pas bougé. De plus, dans certains cas (Figure 3-46-c), les fibres de collagène parallèles à la direction de traction semblent s'être déchirés et effilochées.

En confrontant ces observations avec les mesures de densités de fibres de collagène, un lien apparaît entre le type de rupture et l'orientation privilégiée des fibres de collagène.

Dans le cas de la rupture nette, les fibres sont observées en majorité perpendiculaires à la direction de traction (cas de la Figure 3-46-b). Il se pourrait donc que la rupture se fasse par décohésion de la matrice entre les faisceaux de fibres, dans un plan perpendiculaire à la direction de traction. En effet, peu de fibres ont du être sollicitées en traction.

Concernant la rupture par glissement, les fibres sont observées en majorité parallèles à la direction de traction, donc un plus grand nombre de fibres a du résister à la traction (cas de la Figure 3-46-a). La rupture se fait peut être par décohésion de la matrice dans un plan parallèle à la surface de la peau, au niveau du derme réticulaire, ce qui pourrait expliquer la division de la peau en deux parties dans le sens de l'épaisseur. A ceci s'ajoute certainement la rupture des fibres orientées dans la direction de traction, qui ont cette fois été sollicitées jusqu’à leur limite, ceci est bien visible sur la Figure 3-46-c où se trouve des amas de fibres rompues.

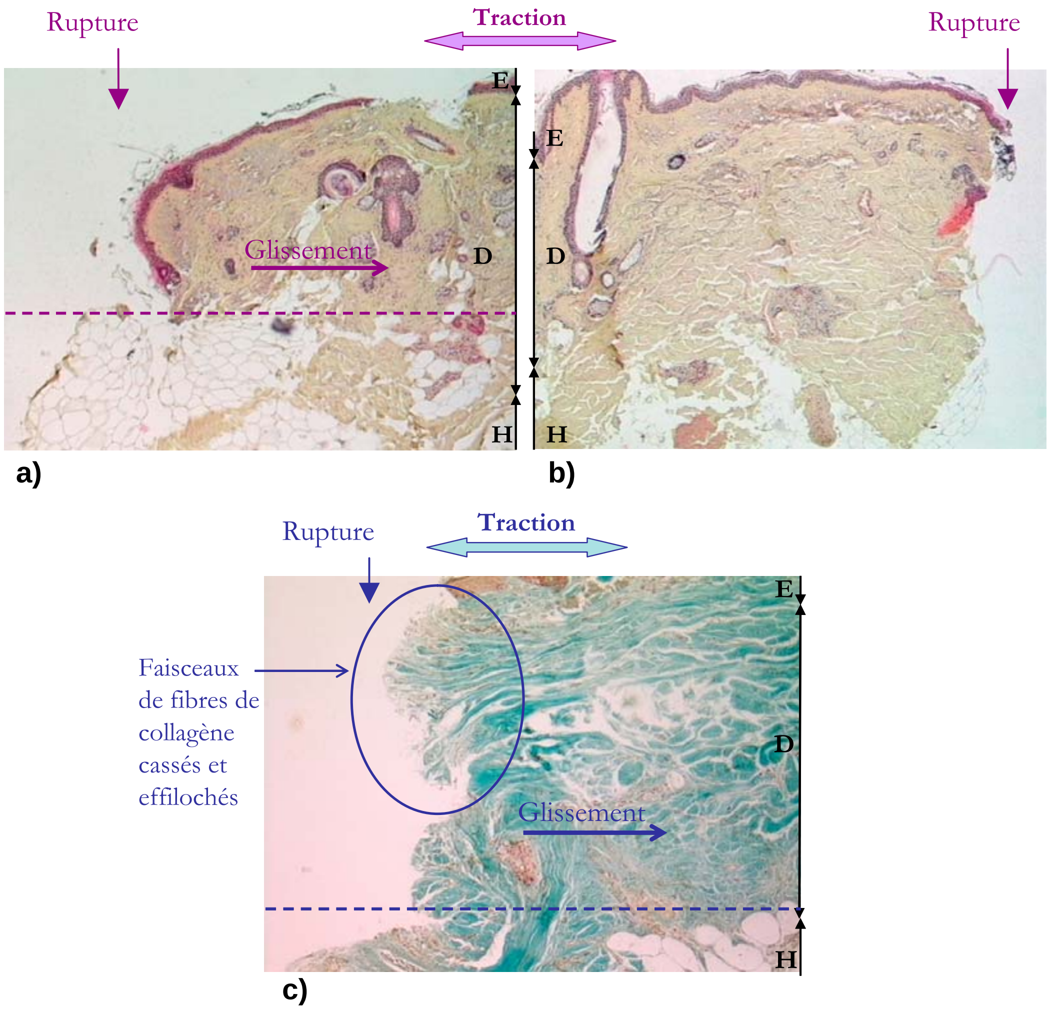


Figure 3-46 : Deux principaux types de rupture en traction quasi-statique sur la peau humaine (biopsies de la rupture): la rupture par glissement a) et c) avec effilochage des fibres de collagène c) et la rupture nette b) (E = épiderme, D = derme et H = hypoderme) – coloration HES a) et b) et coloration trichrome de Masson c).

3.4. Discussion et conclusion

3.4.1. Apports de l'étude expérimentale

De façon générale, le protocole mis en place au cours de cette étude, nous a permis d'atteindre l'objectif que nous nous étions fixé au niveau expérimental: réaliser des essais de traction unidirectionnelle jusqu'à rupture sur la peau humaine à une vitesse élevée, caractéristique d'essais dynamiques (V_0 = 3m/s). Ce type d'essais étant très peu présents dans la littérature, concernant la peau humaine. De plus, le protocole a été élargi à une deuxième vitesse de traction (V = $2.5.10^{-4}$m/s) très éloignée de la première, définissant ainsi des essais quasi-statiques. Cette partie expérimentale se voit finalement complétée par des mesures à l'échelle microscopique, de l'état du réseau de fibres de collagène avant et après rupture.

Dans cette étude, les diverses solutions techniques qui ont été choisies pour parer aux problèmes relatifs aux tissus biologiques mous, apportent à la fois des résultats valides et précis pour la peau humaine et s'avèrent tout à fait adaptés à d'autres membranes biologiques.

Nous avons choisi de compléter les données des capteurs classiques par une mesure sans contact des déformations, à l'aide de la méthode de corrélation d'images. Celle-ci s'avère d'une part, particulièrement bien adaptée aux tissus biologiques mous mais devient d'autre part, très contraignante à mettre en place sur ces tissus, spécialement en dynamique. En effet, les solutions proposées dans la littérature ne concernent que des essais à faibles vitesses et faibles déformations [Marcellier, 2001, Shangavi, 2004], alors que dans le cas de grandes déformations des problèmes de dé-corrélation sont observés [Brèque, 2002] mais non résolus. Dans notre cas, il a donc été nécessaire d'innover, le mouchetis réalisé à l'aide de mascara résiste, sans s'altérer, à l'humidité et aux grandes déformations que peut subir la peau avant la rupture. Marcellier [Marcellier, 2001] utilise les différences de texture de la peau à la place d'un mouchetis, cependant ses essais sont une fois de plus quasi-statiques et en dynamique, le contraste ne serait pas suffisant. En effet, les vitesses élevées de sollicitation imposent des réglages très fins des systèmes vidéo. L'image du mouchetis doit être nette et contrastée. Pour cela, diminuer la vitesse d'obturation améliore la netteté de l'image mais l'assombrie considérablement. Ceci peut être compensé par une ouverture adéquate de l'objectif et un éclairage intense qui éclaircissent l'image, mais trop de lumière crée des reflets sur l'éprouvette à cause de l'humidité du tissu. Face à cette série de réglages dépendant les uns des autres, un bon compromis a été trouvé permettant l'exploitation de la majorité des essais.

Par ailleurs, nous remarquerons l'étendue des capacités de cette méthode, qui, grâce à la version incrémentale du logiciel de corrélation, a permis de traiter la quasi-totalité des essais quasi-statiques jusqu'à la dernière image avant la rupture. En effet, étant donnés les niveaux de déformations élevés dans la direction de traction ainsi qu'un effet Poisson très important, les limites de la méthode de corrélation séquentielle sont rapidement atteintes alors que la méthode incrémentale présente un taux de réussite quasiment parfait jusqu'à la rupture.

L'originalité de cette analyse locale des déformations, est d'apporter à la fois des données comparables aux résultats globaux, si ce n'est qu'ils s'avèrent plus précis et d'autres résultats moins conventionnels mais plus riches en informations que des mesures classiques. Nous relevons en effet les déformations de l'éprouvette sur plus de 500 points de mesure pour une zone de mesure de 30*10mm². Ces valeurs sont plus précises dans le sens où elles sont mesurées à la surface de l'éprouvette, elles représentent donc les vraies déformations de l'éprouvette et non une valeur calculée entre les mors, incluant les phénomènes de glissement et de déformations des mors. En effet, nous avons pu remarquer l'existence de ces phénomènes de glissement, plus marqués en quasi-statique qu'en dynamique, et grâce à cette méthode sans contact de mesure des déformations, nous avons été en mesure de le quantifier.

De plus, nous disposons des trois composantes du champ de déformation et avons donc pu quantifier le cisaillement à la surface de l'éprouvette. Ces valeurs n'excèdent pas 3-4%, elles ne sont donc pas nulles, mais restent très faibles, ce qui nous permet d'affirmer que les montages assurent une traction, certes non parfaite, mais relativement homogène, à condition d'avoir positionné correctement l'éprouvette dans les mors.

Par ailleurs, il est possible de définir une déformation ultime locale plus appropriée que les valeurs moyennes classiques. C'est la valeur maximale de déformation qui est choisie pour assurer cette fonction, étant donné qu'elle représente la déformation réelle que peut supporter le tissu avant de rompre et ce à l'endroit précis de la rupture, par opposition à la valeur moyenne, qui est le fruit d'une homogénéisation des déformations sur la zone de mesure. Nous estimons que ce choix est judicieux compte tenu du phénomène de localisation des déformations, même si des auteurs comme Sacks [Sacks, 1998] choisissent souvent une zone de déformations homogènes sur l'éprouvette pour effectuer leurs mesures.

Parmi les résultats les plus intéressant de la corrélation d'images, citons aussi la possibilité de mettre en évidence l'hétérogénéité du champ de déformations d'un tissu comme la peau et plus particulièrement de quantifier son taux d'hétérogénéité. Cette mesure est considérée comme fiable et donne une information locale plus précise d'un intérêt considérable pour la compréhension du comportement du tissu. En procédant de la sorte, nous nous distinguons de la littérature où tous les auteurs utilisent une valeur moyenne de déformation pour caractériser un tissu hétérogène, cette valeur est mesurée soit à l'aide de capteur entre les mors [Arnoux, 2000, Snedecker, 2005], soit sur l'éprouvette à l'aide de marqueurs [Brèque, 2002, Lanir-b, 1974, Marcellier, 2001, Schmid, 2005] ou encore en choisissant délibérément une zone de déformations homogènes [Sacks, 1998]. Les modélisations qui s'en suivent sont ainsi effectuées en considérant le tissu homogène [Arnoux, 2000, Sacks, 2003]. Or dans l'optique de décrire précisément le comportement de la peau humaine, il apparaît donc indispensable de compléter la mesure de déformation moyenne par un indicateur du taux d'hétérogénéité du champ de déformation que nous avons défini par l'écart type de la répartition des déformations sur l'éprouvette. Ces données seront indispensables pour la validation d'un modèle représentatif. Pour toutes ces raisons, en présence de tissus biologiques hétérogènes, l'apport d'une étude locale des déformations est considérable. Des informations nouvelles, variées et précises sont ainsi disponibles.

Concernant enfin l'étude à l'échelle microscopique, elle apporte des informations intéressantes, d'un point de vue mécanique, relatives au réseau fibreux de la peau humaine, informations peu présentes dans la littérature.

3.4.2. Analyse et comparaison des résultats avec la littérature

Les essais ainsi réalisés apportent à l'échelle macroscopique, les propriétés mécaniques jusqu'à rupture de la peau humaine en traction. Ces propriétés concernent la peau du front et des bras. Elles sont déterminées à deux vitesses de traction, qui diffèrent d'un rapport 10^4 (3m/s et $2.4.10^{-4}$m/s) et dans deux directions perpendiculaires, définies en fonction de repères anatomiques. Les divers résultats obtenus permettent de tracer les courbes caractéristiques (contrainte/déformation) de la peau humaine et de calculer à la fois ses modules d'élasticité et ses caractéristiques de la rupture.

Comme l'indique la discussion précédente, les résultats globaux classiques apparaissent d'une relative fiabilité, étant donné qu'ils sont dépendants de phénomènes physiques, comme le glissement, dont la mesure locale arrive à s'affranchir. Ceci s'illustre, par exemple, par une réduction considérable de la dispersion des résultats locaux par rapport aux globaux. La diversité inter individu que l'on croyait catastrophique, en global, n'est en réalité que relativement grande ! De ce fait, dans l'objectif d'attribuer des propriétés mécaniques macroscopiques à la peau humaine, nous préférons les mesures locales, en termes de déformations.

Les propriétés locales obtenues en quasi-statique sur la peau humaine sont globalement en accord avec celles de la littérature. En effet, bien que les modules de la première phase de traction locaux (El_1) apparaissent très supérieurs aux plus grandes valeurs relevées dans la littérature: Brèque [Brèque, 2002] donne 0.7MPa et Silver [Silver, 1987] pas plus de 0.1MPa, les valeurs de module pour la deuxième phase (El_2) se situent elles dans la fourchette formée par les données des deux mêmes auteurs, à savoir entre 20MPa et 37MPa. Rappelons que tous ces auteurs effectuent des essais quasi-statiques à des vitesses inférieures à la notre (en général < $1.5.10^{-4}$m/s). De manière générale en dynamique, toutes les valeurs de modules élastiques expérimentaux (El_2), que nous avons obtenus, sont plus de deux fois supérieures à celles de E_2 données par Brèque [Brèque, 2002] et Silver [Silver, 1987] et elles sont aussi supérieures aux valeurs générales pour la peau relevées par Rollhauser [Rollhauser, 1950], Silver [Silver, 1992] ou Daly [Daly, 1979].

En termes de caractéristiques à la rupture, dans le cas quasi-statique, les résultats sont très poches dans les deux directions de traction. Les valeurs de contrainte ultimes expérimentales se situent dans la fourchette de 2-15MPa proposée par Silver [Silver, 1992], légèrement supérieures aux valeurs de 0.9-2.5MPa données par Brèque [Brèque, 2002] elles se rapprochent de celles de Yamada [Yamada, 1970] pour la peau du front, environ 4.6MPa. Les valeurs d'efforts ultimes par unité de largeur sont elles quasiment égale à la valeur de 9N/mm avancée par Yamada [Yamada, 1970]. En dynamique, une différence est à noter entre le bras et le front de telle sorte que les contraintes ultimes de la peau du bras, dans les deux directions, restent très proches de celles rapportées par Yamada [Yamada, 1970] pour ce même site de prélèvement, soit 9.4MPa alors que celles de la peau du front sont supérieures à celles du même auteur, soit 4.6MPa.

Au niveau des déformations ultimes, nous disposons de deux valeurs: les moyennes locales (ε_{22moy}) et les maxima locaux (ε_{22max}). En quasi-statique, les maxima locaux sont une fois de plus très proches des 54% donnés par Yamada [Yamada, 1970] pour la peau du front et contenues dans la fourchette 50-200% rapportée par Silver [Silver, 1992]. Néanmoins, dans la direction transversale uniquement, la tendance énoncée par Yamada [Yamada, 1970] est respectée, à savoir que la peau du front présente une déformation ultime inférieure à celle de la peau des bras. Au niveau local, toutes les valeurs moyennes de déformations ultimes sont elles très inférieures aux valeurs globales et donc aux données de la littérature, autant en quasi-statique qu'en dynamique. Quant aux maxima locaux des déformations ultimes, ils représentent plus du double des valeurs moyennes.

D'une part, la synthèse de cette comparaison avec les données bibliographiques démontre, à propos des contraintes ultimes, que les valeurs sont relativement proches de celles de la littérature et que ses variations en fonction des divers paramètres (vitesse et direction de traction, site de prélèvement) sont nettement moindres que celles des déformations ultimes. Si un critère de rupture devait être défini pour la peau humaine en général, il serait plus judicieux de choisir la valeur de contrainte. Notons que la valeur de contrainte ultime est nécessairement globale, seule mesure à notre disposition. D'autre part concernant les déformations ultimes, seuls les maxima locaux se situent dans les fourchettes de déformations ultimes, proposées par les différents auteurs de la littérature.

L'influence de la vitesse de traction se reflète tout d'abord sur l'aspect général des courbes caractéristiques (contrainte/déformation) de la traction. Si nous nous référons à la partie élastique des courbes obtenues expérimentalement en traction quasi-statique, nous observons une forme bilinéaire similaire à celle de la courbe type décrite par Daly [Daly, 1982], Silver [Silver, 1987] ou Agache [Agache, 2000] qui y distinguent trois phases. En dynamique, nos courbes expérimentales se caractérisent par une partie élastique quasiment linéaire, qui correspondrait à la troisième phase (C) en quasi-statique. D'un point de vue structurel, divers auteurs [Agache, 2000, Daly, 1982, Dunn, 1983, Schmid, 2005, Silver, 1987] affirment que le déplissage des fibres de collagène et leur réorientation dans la direction de traction sont responsables des non linéarités de la caractéristique en traction quasi-statique. L'aspect linéaire de la caractéristique en traction dynamique laisse donc supposer que ces phénomènes n'interviennent pas à des vitesses élevées.

Nous relevons ensuite une différence de raideur du tissu entre les deux vitesses de traction testées dans cette étude, le module élastique El_2 est en effet supérieur en dynamique, à l'image des observations de Snedecker [Snedecker, 2005] sur la capsule de rein et de Roeder [Roeder, 2002] sur des matrices de collagène reconstituées à partir de peau de veau. De plus l'augmentation conjointe de la contrainte ultime et de la vitesse de traction apparaît dans cette étude tout comme dans celle de Snedecker [Snedecker, 2005] ainsi que la diminution de la déformation ultime quand la vitesse augmente. Celui-ci relie l'évolution de ces propriétés à la vitesse de déformation par une loi logarithmique, étant donné qu'il n'observe plus de variation importante des propriétés mécaniques pour des vitesses de déformation supérieures à $100s^{-1}$, ce que confirment Agache [Agache, 2000] et Arnoux [Arnoux, 2000]. Il parait donc cohérent d'avoir observé une variation des propriétés mécaniques de la peau entre une vitesse de déformation relativement faible (stabilisée autour de $0.002s^{-1}$ en quasi-statique avant la rupture) et une autre très élevée, avoisinant la limite de $100s^{-1}$ (dynamique avant la rupture).

Les propriétés mécaniques de la peau humaine sont très peu affectées par les différences d'âge des sujets traités dans notre étude. En dynamique, nos résultats se rapprochent de la tendance observée par Yamada [Yamada, 1970] à raison d’une légère diminution de la déformation ultime et une diminution de la contrainte ultime avec l'âge. Il faut cependant noter que Yamada relève ces variations des propriétés mécaniques en comparant une population jeune de 10 à 49ans, à une population plus âgée représentée par la classe 70-79 ans. Or dans notre étude, tous les sujets dont nous avons disposé, se situent dans une fourchette d'âge de 78-88 ans pour une moyenne de 81 ans, ce qui est supérieur à la classe âgée définie par Yamada. Il se pourrait donc, que les mécanismes de dégradation structurelle affectant les propriétés mécaniques de la peau soient très importants entre 30 ans, âge des propriétés mécaniques "optimales" [Vitellaro, 1994, Yamada, 1970] et 70-80 ans, mais que passé cet âge, on peut supposer que la dégradation des propriétés autant mécaniques que structurelles n'est plus aussi visible.

L'étude de la variabilité des propriétés mécaniques avec le site de prélèvement n'apporte pas de tendance claire. Nous ne disposions en effet que de deux sujets dont les comportements s'opposent, ce qui ne nous permet pas de conclure. De plus, il se trouve que les sujets n'ont pas été testés dans les mêmes directions, ce qui peut être un paramètre supplémentaire faussant les tendances. Nous pouvons juste remarquer, dans le cas d'un des deux sujets, que les caractéristiques de la rupture suivent les tendances relevées par Yamada [Yamada, 1970], à savoir que les valeurs de contrainte et de déformation ultimes sont toutes deux supérieures sur la peau des bras par rapport à celle du front. Rappelons aussi que tous les essais réalisés ici sont dynamiques, il se peut qu'à une telle vitesse de traction, les différences dues aux sites de prélèvement ne soient pas notoires. Dans tous les cas, il reste à poursuivre les investigations, en testant d'autres sujets, notamment en quasi-statique.

La direction de traction semble agir avec plus de ferveur sur les propriétés mécaniques de la peau, dans le cas de la traction quasi-statique notamment. En effet, sur chaque sujet analysé séparément, apparaissent soit des différences de raideur comme l'a évoqué Wijn [Wijn, 1978], soit des variations en termes de contraintes et de déformations ultimes conformément aux dires de Yamada [Yamada, 1970]. Nous pouvons en déduire qu'il existe certes une orthotropie des propriétés mécaniques, comme le pensait Lanir [Lanir-a, 1974], cependant elle semble propre à chaque individu vu qu'aucune tendance ne se dégage pour l'ensemble des sujets. En dynamique, même une analyse par sujet ne révèle pas de nette différence entre les propriétés mécaniques obtenues dans chaque direction.

L'étude du réseau de fibres de collagène à l'échelle microscopique a permis de mettre en relation la structure avec le comportement en quasi-statique de la peau.

D'une part, deux mécanismes de rupture se distinguent sur les essais de traction quasi-statiques. Ils semblent liés aux directions privilégiées des fibres de collagène de telle sorte que la rupture que nous appelons "par glissement et effilochage" a lieu lorsque la majorité des fibres de collagène se trouvent parallèles à la direction de traction. Ce type de rupture se rapproche du processus de défibrillation décrit par Silver [Silver, 1992]. Dans la direction perpendiculaire apparaît une rupture nette, cette fois-ci plus proche du mécanisme avancé par Dunn [Dunn, 1983] qui considère que la rupture s'initie au sein de la substance non fibreuse.

D'autre part, les valeurs des modules élastiques relevées en quasi-statique sont corrélées avec les orientations privilégiées de fibres de collagène, si bien que la raideur de la peau est maximale dans la direction où se trouvent orientée la majorité des fibres de collagène. Ses observations sont valables pour chaque sujet indépendamment. Une fois de plus, il n'a pas été possible de dégager de tendance générale quant à une orientation privilégiée des faisceaux de fibres de collagène pour la peau humaine, tout du moins dans les deux directions que nous avions définies. Cette étude microscopique confirme les conclusions controversées de l'analyse bibliographique à ce sujet, à savoir que la peau humaine en général, ne possède pas de réseau de fibres de collagène clairement orienté, ce qui ne permet pas de définir clairement des directions d'orthotropie mécanique. En outre, ces orientations privilégiées de fibres de collagène, si elles existent, sont propres à chaque individu et aux sollicitations physiologiques auxquelles est soumise la peau de chacun (expressions du visage, rides dans le cas du front). Et dans ce cas là, les directions d'orthotropie du module élastique sont directement liées à celle des faisceaux de fibres de collagène. Cette étude exploratoire, apporte déjà des éléments intéressants pour un tissu peu orienté comme la peau, elle offre donc des perspectives intéressantes pour des tissus plus orientés, telles les parois de vaisseaux.

En dynamique, nous ne remarquons pas de nette variation des propriétés mécaniques. En faisant l'hypothèse d'une explication structurelle à ces variations des propriétés mécaniques, on peut penser que, lors de l'augmentation de la vitesse de traction, les phénomènes de déplissage et de réorientation des fibres de collagène disparaissent. Les effets de structure paraissent complètement amoindris à haute vitesse tout comme les variations des propriétés mécaniques.

3.4.3. Limites et perspectives du travail expérimental

Toutes ces observations et conclusions s'avèrent très satisfaisantes, puisqu'elles sont en adéquation avec celles de la littérature sur certains points et s'avèrent novatrices sur d'autres points. Cependant cette étude expérimentale compte certaines limites, notamment au niveau du protocole, qui nous permettent de dégager des perspectives pour ce travail.

Dans le cadre de cette étude, il faut en effet garder à l'esprit que lors des deux campagnes d'essais quasi-statiques et dynamiques, les montages ainsi que les systèmes d'acquisitions sont différents, même si les moyens de mesure sont identiques. Chacun sait que les résultats se voient toujours quelque peu influencés par des différences de protocole, et afin d'effectuer une analyse rigoureuse il faudrait en effet tester toutes les gammes de vitesse sur une machine unique.

Un second point se prêtant à la discussion est la vitesse de déformation, qui n'est pas constante tout au long de l'essai, spécialement en dynamique. Cependant nous ne disposons pas des machines adaptées au contrôle de ce paramètre. Et surtout, le domaine d'application de l'étude étant la biomécanique des chocs, le montage de traction dynamique est conçu dans cet optique là, afin de reproduire la rupture d'un tissu suite à un choc et dans ce cas, la traction ne se produit pas à vitesse constante.

Ensuite, le choix des deux vitesses de traction très éloignées a été effectué, dans un premier temps, pour voir si elle avait un effet réel sur les propriétés mécaniques du tissu. Il serait maintenant intéressant de tester des niveaux intermédiaires de vitesses si l'on souhaite définir une loi d'évolution des propriétés à la manière de Snedecker [Snedecker, 2005]. Cependant, il n'apparaît pas nécessaire d'alourdir les séries d'essais avec des vitesses de traction supérieures à 3m/s, car elles correspondent, au moment de la rupture à des vitesses de déformation de l'ordre de $100s^{-1}$, valeur à partir de laquelle il a été montré dans la littérature que les caractéristiques de la rupture se voient peu modifiées.

Dans le cas dynamique plus particulièrement, il reste un problème récurant lors de la réalisation d'essais de choc, qui est l'apparition de vibrations parasites, venant bruiter les mesures. Nos résultats provenant des capteurs ne sont pas épargnés, deux fréquences principales se retrouvent sur toutes les courbes, même après un filtrage des acquisitions selon les normes et une rigidification du montage. Néanmoins ces deux fréquences ont été quantifiées et leurs origines identifiées. Il reste cependant à améliorer le montage en conséquence. Par exemple concernant la première fréquence identifiée, elle est due au décalage, par rapport aux axes de guidage principaux, du centre de gravité du chariot principal à cause de l'ajout de notre petit montage de traction. Il faudrait donc, dans un premier temps, mettre un contre poids de l'autre côté du chariot principal pour le rééquilibrer. Quant à la deuxième fréquence de vibration, elle provient de mouvements d'oscillation du mors mobile par rapport à la traverse. Cependant, la liaison en question (entre le mors et la traverse) passe par le capteur d'effort, il parait donc délicat de la rigidifier.

Une première conséquence de ces vibrations parasites, est qu’en dynamique, la validité de la mesure du taux d'hétérogénéité reste quelque peu controversé pour des niveaux de déformations inférieurs à 10%. Il s'avère en effet que la valeur d'hétérogénéité du champ de déformations de la peau est relativement proche de celle du bruit de mesure dans ce cas là. Cependant, l'estimation de l'intensité du bruit de mesure, faite à partir d'essais de traction dynamique sur du silicone, semble quelque peu faussée par les problèmes de vibrations parasites. Il faut retenir que ces vibrations ci ne se retrouvent pas sur les essais sur la peau et que pour des déformations importantes, proches de la rupture qui nous intéresse, le niveau d'hétérogénéité du champ de déformations est bien supérieur au bruit de mesure. Ce qui rend les mesures du taux d'hétérogénéité en dynamique, à des niveaux de déformation supérieurs à 10%, relativement fiables.

Nous remarquons ensuite, que sur les mesures locales en dynamique, la phase élastique linéaire est précédée d'une première phase de pente nulle, qui serait certainement due à des erreurs de mesure et non une propriété du matériau. La première explication serait d'attribuer cette erreur au décalage de l'image initiale pour la corrélation d'images, prise à t = 1.5ms au lieu de t = 0ms, ce qui est peu probable car avec cette pratique, nous sous estimons la valeur de déformation (au pire) ce qui aurait tendance à réduire cette phase de pente nulle. La deuxième explication plus probable est l'effet des vibrations parasites, évoquées précédemment, venant bruiter la valeur d'effort en début d'essai. Nous observons en effet sur certains essais, un léger pic d'effort négatif sur les deux premières millisecondes, se traduisant par une contrainte quasi nulle ou négative à cette endroit là.

Les conditions d’essais du tissu biologique peuvent aussi être discutées. Lors de la mise en place d'un protocole expérimental, certains auteurs [Mansour, 1993, Koutroupi, 1990, Lanir-b, 1974] se montrent fervents défenseurs du préconditionnement des tissus biologiques jusqu'à l'obtention de résultats reproductibles. Dans cette étude, aucun préconditionnement n'a été effectué avant les essais, pour les mêmes raisons que celles énoncées par Snedeker [Snedeker, 2005]: éviter le dessèchement du tissu et être dans des conditions plus représentatives d'un accident.

Dans le cas d'essais *in vitro*, l'application d'une précontrainte permet au tissu de retrouver des conditions de tension physiologiques. Aux vues des sections moyennes de nos éprouvettes (20-30mm²), l'application d'un effort de 1N au début des essais quasi-statiques équivaut à une précontrainte de moins de 50kPa. Cette valeur est cohérente avec les données de la littérature concernant la peau. Daly [Daly, 1979] affirme que la contrainte intrinsèque *in vivo* de la peau n'excède pas quelques kilopascals. Mansour [Mansour, 1993] n'applique lui qu'un effort de 0.03N sur la peau de lapin, celle-ci doit cependant être beaucoup plus fine que la peau humaine. Dans le cas de nos essais dynamiques, ce genre de réglage n'est plus possible. En effet, lors de la chute libre du montage avant l'impact, aucun effort ne sollicite la peau, cependant, juste avant l'essai, l'éprouvette est soumise au poids de la masse mobile, ici M_0 = 1.49kg, qui génère une précontrainte.

En présence de tissus biologiques, les conditions de température et d'humidité doivent être contrôlées afin de ne pas altérer le tissu outre mesure. Certains auteurs [Lanir-a, 1974, Mansour, 1993] réalisent leurs essais sur un tissu immergé dans du sérum physiologique. Cependant, les machines que nous utilisons ici ne le permettent pas. Toutes les précautions sont prises pour conserver l'humidité du tissu, même si les essais sont réalisés à l'air ambiant. Les éprouvettes sont conservées dans une solution de sérum physiologique jusqu'au moment de l'essai, elles sont sorties uniquement pour la fixation dans les mors et le dépôt du mouchetis. De plus la durée des essais est très courte, autour d'une minute en quasi-statique et quelques millisecondes en dynamique. De ce fait les éprouvettes sont saturées en eau, ce qui ralentit le phénomène de déshydratation.

Enfin, concernant l'étude de la peau à l'échelle microscopique, elle apporte des éléments intéressants sur les propriétés du réseau de fibres de collagène et leurs influences sur les propriétés mécaniques de la peau. Il faut cependant rester très prudent quant aux conclusions qui ne sont établies qu'à partir d'un petit nombre de sujets. De plus, cette étude étant purement exploratoire, elle présente naturellement des points faibles quand vient le temps d'une analyse quantitative des résultats. En effet, les mesures d'épaisseur et de densités surfacique de fibres sont effectuées à l'aide d'un planimètre manuel. Compte tenu de la pénibilité de ces mesures, il faut rester prudent lors de l'analyse des résultats, qui pourraient être considérablement fiabilisés par des mesures automatiques par analyse d'images et seuillage. Pour une meilleure précision, les mesures pourraient être faites sur plus de coupes par biopsies, avec un espacement régulier des coupes.

Il va de soit que cette étude a été réalisée avec "un œil de mécanicien", et que pour les "puristes", elle n'est pas complète dans le sens où elle reste focalisée sur les fibres de collagène. Ce choix a été effectué suite à l'étude bibliographie présenté au chapitre 1, démontrant que seul ce constituant de la peau apportait de la résistance à la traction pour des niveaux de déformations élevés. Compte tenu de certains de nos objectifs, comprendre le mécanisme de rupture de la peau en autre, ce sont précisément les grandes déformations et la zone proche de la rupture qui nous intéresse. De plus, sur une coupe histologique, les faisceaux de fibres de collagène apparaissent clairement à des grossissement raisonnables (x25) rendant possible la détermination de leurs orientations contrairement aux fibres élastiques plus petites qui, entremêlées à l'intérieur du réseau de fibres de collagène, forment une sorte de toile d'araignée (cf Figure 1-2-d). Il faut bien entendu garder à l'esprit tous les autres constituants de la peau, qui assurent la cohésion de l'ensemble du tissu (élastine, substance fondamentale, cellules) et pour cette raison jouent indéniablement un rôle dans le mécanisme de rupture. L'élastine par exemple assure l'élasticité de la peau à des niveaux de déformations considérés comme physiologiques [Brèque, 2002, Daly, 1982, Silver, 1987] alors que la substance fondamentale devient importante en terme de viscosité, toujours à faible vitesse [Agache, 2000, Arnoux, 2000].

La microscopie optique a été choisie car elle apparaissait plus facile d'accès pour des personnes non familières à ce domaine. Il est vrai sur que les images obtenues en microscopie électronique (cf Figure 1-2-c), le niveau de détail est plus important du fait des grossissements supérieurs et les fibres apparaissent ainsi plus nettement. Cependant, dans le but d'effectuer des mesures de surface et de dégager des orientations privilégiées de fibres, il faut d'autant plus de temps que l'échelle d'observation est petite. La microscopie optique semblait donc appropriée à une étude exploratoire. Au vu des résultats encourageants qu'elle apporte, il serait intéressant de poursuivre cette démarche. Une perspective possible serait la microscopie confocale à balayage laser, dont l'avantage est qu'elle ne nécessite pas la préparation de coupes, il suffit juste de colorer le tissu avec un agent fluorescent (fluorochromes). Il serait ainsi possible d'effectuer les observations microscopiques durant l'essai, ce qui pourrait être réalisable en quasi-statique. On peut alors imaginer toutes sortes de scénarios, comme l'observation d'un éventuel phénomène de réorientation des fibres de collagène décrit par Silver [Silver, 1987] et sa quantification à l'aide de corrélation d'image sur les fibres. La seule contrainte de cette méthode, qui fait qu'elle n'a pas pu être appliquée à la peau, est qu'elle ne peut concerner que des tissus relativement fins, d'épaisseurs de l'ordre de quelques micromètres [Leuillet, 2004]. En effet, Hendricks [Hendricks, 2005] l'a testée sur la peau humaine, mais ne peut pas visualiser plus profond que l'épiderme, alors que nous sommes intéressés par la partie inférieure du derme. Elle deviendrait donc intéressante pour des tissus comme les capsules d'organes, dont l'épaisseur est de l'ordre de la centaine de micromètres [Snedecker, 2005].

3.4.4. Conclusion

En conclusion, les résultats de cette étude sur la peau humaine sont en accord avec ceux de la littérature, à vitesse de traction équivalente (cas quasi-statique) et pour des moyens de mesure équivalents (résultats globaux des capteurs). De plus, cette étude se révèle très novatrice à travers l'apport de résultats locaux nettement plus précis sur la peau humaine, et ce à des vitesses non conventionnelles car élevées (V_0 = 3m/s). Parmi ces résultats nous pouvons citer: des valeurs de déformations mesurées en tout point de la surface de l'éprouvette tout au long de l'essai, une valeur ultime de déformation (E_{22max}) plus précise car très proche en temps et en lieu de la rupture et la quantification du taux d'hétérogénéité du champ de déformations, indispensable à une bonne modélisation du comportement hétérogène du tissu. Le dernier point fort est la mise en relation de propriétés mécaniques macroscopiques (module élastique) et de phénomènes physiques (mécanisme de rupture) avec la direction privilégiée des fibres de collagène à l'échelle microscopique. Cette dernière observation se montre d'une importance considérable et va nous guider dans la définition d'un modèle de comportement représentatif.

4. Chapitre 4 : Modélisation du comportement mécanique jusqu'à rupture d'une membrane fibreuse

4.1. Introduction

Si l'on se place dans une perspective numérique à court terme, c'est-à-dire simuler les essais de traction réalisés précédemment sur la peau humaine, il convient dans un premier temps de définir une loi permettant de décrire le comportement de la peau, identifié expérimentalement.

La courbe caractéristique d'un essai de traction sur la peau humaine, démontre, dans sa partie élastique, un comportement hyperélastique non linéaire. Nous retrouvons expérimentalement la forme exponentielle, caractéristique d'un tissu conjonctif et utilisée par Arnoux [Arnoux, 2000], Tong et Fung [Tong, 1976] et Billiar et Sacks [Billiar-b, 2000, Sacks, 2003] dans leurs lois. Etant donné que nos essais se prolongent jusqu'à la rupture du tissu, la partie élastique de la courbe est suivie d'une partie où la pente s'adoucit avant la rupture proprement dite. Ce phénomène se retrouve très peu dans la littérature si ce n'est sur les résultats de Arnoux [Arnoux, 2000] concernant le ligament.

Suite à ces observations et conformément aux conclusions du chapitre 2, une loi de type exponentiel s'avère appropriée pour décrire le comportement élastique de la peau humaine, reste cependant à compléter ce genre de loi afin de pouvoir décrire la partie adoucissante de la courbe et la rupture.

Considérant maintenant des perspectives à plus long terme, qui seraient d'écrire une loi de comportement facilement applicable à tous types de membranes biologiques fibreuses. Il devient alors impératif de définir judicieusement les paramètres du matériau, tels qu'ils soient communs à tous ces tissus. Au vu des conclusions des chapitres 1 et 2 ainsi que celles de notre étude expérimentale tendant à relier les propriétés mécaniques macroscopiques à celles du réseau de fibres de collagène, il semble alors évident de définir des paramètres matériaux liés aux fibres de collagène.

En effet, autant le mécanisme de rupture que la raideur du matériau se voient modifiés en fonction des orientations privilégiées des fibres de collagène. Il devient alors essentiel d'incorporer dans la loi de comportement, une fonction de répartition des fibres permettant le choix d'orientations privilégiées, et par conséquent de faire varier la raideur du tissu suivant ces directions. Toujours dans le but d'écrire une loi applicable à d'autres tissus fibreux, il faut remarquer que, dans le cas de la peau, ces orientations privilégiées ne sont pas très marquées alors qu'elles pourraient l'être beaucoup plus sur d'autres tissus. De ce fait, il faut un paramètre de la loi permettant de faire varier le taux d'orientation des fibres dans la direction privilégiée choisie. Pour toutes ces raisons, nous trouvons judicieux de modéliser le réseau fibreux de la peau avec une fonction de répartition des fibres de forme Gaussienne, comme celle proposée par Billiar et Sacks [Billiar-b, 2000], qui inclut un paramètre d'orientation privilégiée et un autre relatif au taux d'orientation.

Enfin, dans l'optique d'écrire une loi adoucissante et permettant la rupture du tissu, reportons nous aux observations microscopiques. Elles révèlent dans certains cas une rupture des fibres parallèles à la direction de traction. Même si nous ne sommes pas certains que ce mécanisme de rupture s'applique à tous les cas de figure, il paraît réaliste de définir un critère de rupture sur les fibres. Par conséquent, la partie adoucissante de la courbe pourrait correspondre à la rupture progressive des fibres.

Si l'on souhaite ensuite simuler les essais de traction réalisés sur des éprouvettes de peau par exemple, il faut implanter la loi de comportement ainsi définie dans un modèle numérique. Ce modèle doit alors être capable de reproduire le comportement hétérogène du tissu, à la suite d'une sollicitation homogène (traction unidirectionnelle), le champ de déformation obtenu à la surface de l'éprouvette devra être hétérogène, conformément aux données expérimentales. Physiquement, on considère que le comportement hétérogène de la peau provient de l'hétérogénéité de sa structure. Il conviendrait donc de modéliser la peau par un réseau hétérogène de fibres. La solution serait de créer un modèle de membrane, discrétisé en éléments finis, tel que chaque élément ait des propriétés structurelles différentes afin de former une membrane hétérogène. Compte tenu des conditions d'essais, l'écriture d'un tel modèle doit s'effectuer dans le cadre des grandes déformations, avec prise en compte des non linéarités géométriques. Dans un premier temps, nous nous limitons à une étude statique. De plus, les effets visqueux sont négligés, étant donné que la littérature les donne peu importants sur la peau humaine (cf chapitre 2).

Dans ce chapitre, nous présenterons tout d’abord les différentes étapes de l’écriture de la loi de comportement, ainsi que son implantation dans un code éléments finis, développé sous Matlab®, dont l'étape principale est l'écriture du module tangent de comportement. Nous discuterons par la suite l’intérêt de deux méthodes de résolution du problème aux éléments finis, aux travers des résultats des tests de validation du modèle. La dernière partie de ce chapitre portera sur l'application de ce modèle à la peau humaine. Pour cela, nous réalisons des simulations dans des configurations similaires à celles des essais quasi-statiques. L'objectif est ici de comparer les résultats numériques à ceux des expérimentations, afin de vérifier la validité de la loi de comportement pour une utilisation sur la peau humaine.

4.2. Comportement mécanique du matériau

4.2.1. Hypothèses

Nous distinguerons par la suite l'échelle de la membrane, de celle de la fibre, ainsi que leurs repères associés. (Figure 4-1)

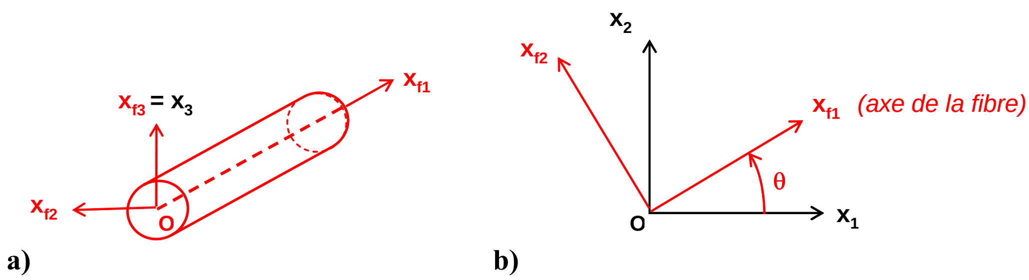


Figure 4-1: a) Fibre de collagène et son repère associé (O, x_{f1}, x_{f2}, x_{f3}) en rouge, b) repère associé à la membrane (O, x_1, x_2, x_3) en noir.

4.2.1.1. Echelle de la membrane

La peau totale est une membrane incompressible de densité égale à un, elle est modélisée par un réseau de fibres en contraintes planes. Soit (O, $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$) le repère associé à la membrane (Figure 4-1-b). Nous considérons que la peau totale est soumise à des sollicitations dans le plan ($\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$) uniquement. Il est alors possible de définir, dans le repère (O, $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$), le tenseur gradient de la transformation **F** de la membrane :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{21} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & F_{33} \end{bmatrix}$$

Équation 4-1

et le tenseur des déformations de Cauchy-Green droit **C** de la membrane dans le cas général :

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T.\mathbf{F} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix}$$

Équation 4-2

dont les premier et troisième invariants sont :

$$I_1 = tr\mathbf{C}$$

Équation 4-3

$$I_3 = \det \mathbf{C}$$

Équation 4-4

Dans le cas d'un matériau incompressible, l'évolution des déformations est alors contrainte par l'équation :

$$I_3 = 1$$

Équation 4-5

ce qui permet les simplifications suivantes :

$$C_{33} = \frac{1}{(C_{11}.C_{22} - C_{12}{}^2)}$$

Équation 4-6

$$I_1 = C_{11} + C_{22} + \frac{1}{(C_{11}.C_{22} - C_{12}{}^2)}$$

Équation 4-7

Nous introduisons aussi le second tenseur de Piola-Kirchhoff **S,** traduisant l'état de contrainte dans la membrane. Sa forme, dans l'hypothèse des contraintes planes et exprimée dans le repère (O, $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$), devient :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Équation 4-8

4.2.1.2. Echelle de la fibre

A l'intérieur du réseau, chaque fibre est un matériau incompressible à trois dimensions (Figure 4-1-a), auquel est associé le repère (O, $\mathbf{x_{f1}}$, $\mathbf{x_{f2}}$, $\mathbf{x_{f3}}$). Une fibre est définie, dans le repère (O, $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$) de la membrane, par son vecteur directeur $\mathbf{x_{f1}}$:

$$\mathbf{x_{f1}} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} \text{ avec } \theta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

Équation 4-9

$\mathbf{x_{f1}}$ renseigne sur l'orientation de la fibre dans le plan ($\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}$) par l'intermédiaire de l'angle θ.

Lors de la déformation de la membrane, nous considérons que chaque fibre est soumise à de la traction pure suivant son axe longitudinal ($\mathbf{x_{f1}}$). Dans ce cas, le tenseur des déformations de Cauchy-Green droit $\mathbf{C}_f$ de la fibre, exprimé dans le repère (O, $\mathbf{x_{f1}}$, $\mathbf{x_{f2}}$, $\mathbf{x_{f3}}$), prend la forme :

$$\mathbf{C}_f = \begin{bmatrix} C_{f11} & 0 & 0 \\ 0 & C_{f22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{f33} \end{bmatrix}_{(f)} \text{ avec } C_{f33} = C_{f22}$$

Équation 4-10

L'hypothèse d'incompressibilité de la fibre permet la simplification suivante, en appliquant l'Équation 4-5 à la fibre :

$$I_{f3} = 1 \Rightarrow C_{f22} = \frac{1}{\sqrt{C_{f11}}}$$

Équation 4-11

Le tenseur $\mathbf{C}_f$ s'exprime donc uniquement en fonction de sa composante C_{f11}. De même, l'écriture du premier invariant des déformations de la fibre est réduite à :

$$I_{f1} = C_{f11} + \frac{2}{\sqrt{C_{f11}}}$$

Équation 4-12

Nous pouvons ensuite exprimer la déformation longitudinale de la fibre, donnée par la composante C_{f11} du tenseur des déformations de Cauchy-Green droit $\mathbf{C}_f$ de la fibre, en fonction des composantes du tenseur des déformations Cauchy-Green droit $\mathbf{C}$ de la membrane :

$$\begin{aligned} \mathrm{C}_{f11} &= \mathbf{x_{f1}}^T \mathbf{C} \mathbf{x_{f1}} \\ &= C_{11}\cos^2\theta + C_{22}\sin^2\theta + 2C_{12}\cos\theta\sin\theta \end{aligned}$$

Équation 4-13

Le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff de la fibre $\mathbf{S}_f$ est lui réduit à :

$$\mathbf{S}_f = \begin{bmatrix} S_{f11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(f)} \quad \text{dans le repère } (O, \mathbf{x_{f1}}, \mathbf{x_{f2}}, \mathbf{x_{f3}})$$

Équation 4-14

4.2.2. Comportement d'une fibre

Isolons tout d'abord une des fibres du réseau constituant la membrane.

4.2.2.1. Domaine élastique

Nous posons ici l'hypothèse que chaque fibre possède un comportement hyperélastique non linéaire. De ce fait, nous lui attribuons un potentiel d'énergie de déformation w_f, dont la forme, inspirée de celle proposée par Demiray [Demiray, 1976] car écrite en fonction des invariants des déformations. Il a ensuite été adapté au cas de la fibre. Le potentiel w_f est en effet défini en fonction du premier invariant des déformations de la fibre et de deux paramètres a et b propres à celle-ci :

$$w_f(I_{f1}) = a(\exp\lfloor b(I_{f1} - 3)\rfloor - 1)$$

Équation 4-15

Il est ensuite nécessaire d'intégrer, dans l'écriture du potentiel, l'hypothèse d'incompressibilité de la fibre, en respectant la contrainte donnée par l'Équation 4-11. Pour cela, d'une part, nous utilisons la méthode proposée par Belytschko [Belytschko, 2000], qui consiste à ajouter une fonction de pénalisation f égale à zéro choisie de la forme :

$$f(I_{f3}) = -\frac{1}{2}\ln(I_{f3})$$

Équation 4-16

et d'autre part, nous ajoutons une pression hydrostatique p [Jankovich, 1981] dont l'expression sera définie par la suite. p est ici un multiplicateur de Lagrange. Le potentiel d'énergie de déformation d'une fibre incompressible s'exprime alors comme suit :

$$\widetilde{w}_f(I_{f1}, I_{f3}, p) = w_f(I_{f1}) + p.f(I_{f3})$$

Équation 4-17

Dans le domaine élastique, le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff $\mathbf{S}_f$ de la fibre dérive du potentiel d'énergie de déformation $\tilde{w}_f$ comme énoncé par l'équation 2-7.

$$\mathbf{S}_f = 2\frac{\partial \tilde{w}_f(I_{f1})}{\partial \mathbf{C}_f} = 2\frac{\partial w_f(I_{f1})}{\partial \mathbf{C}_f} + 2p\frac{\partial f(I_{f3})}{\partial \mathbf{C}_f}$$
$$= 2(\frac{\partial w_f}{\partial I_{f1}}\frac{\partial I_{f1}}{\partial \mathbf{C}_f}) + 2p\frac{\partial f}{\partial I_{f3}}\frac{\partial I_{f3}}{\partial \mathbf{C}_f}$$

Équation 4-18

$$\text{avec } \begin{cases} \dfrac{\partial I_{f1}}{\partial \mathbf{C}_f} = \mathbf{I} \\ \dfrac{\partial I_{f3}}{\partial \mathbf{C}_f} = I_{f3}\mathbf{C}_f^{-1} \end{cases}$$

Équation 4-19

$$\text{et } \frac{\partial w_f}{\partial I_{f1}} = a.b.\exp\left[b(I_{f1}-3)\right]$$

Équation 4-20

Le développement de l'Équation 4-18, l'Équation 4-19 et l'Équation 4-20 donne l'expression du tenseur $\mathbf{S}_f$ dans le repère (O, $\mathbf{x_{f1}}$, $\mathbf{x_{f2}}$, $\mathbf{x_{f3}}$) :

$$\mathbf{S}_f = 2a.b.\exp\left[b(I_{f1}-3)\right]\mathbf{I} - p\mathbf{C}_f^{-1}$$

Équation 4-21

Il reste cependant à déterminer l'expression de la pression hydrostatique *p*. Pour cela, d'après l'Équation 4-14 nous avons :

$$S_{f22} = S_{f33} = 0$$

Équation 4-22

Il est alors possible d'extraire la pression hydrostatique *p* de l'Équation 4-22 :

$$S_{f22} = 2a.b.\exp\left[b(I_{f1}-3)\right] - p\frac{1}{C_{f22}} = 0 \;\Rightarrow\; p = 2a.b.\exp\left[b(I_{f1}-3)\right]C_{f22}$$

Équation 4-23

Dans le cas d'une fibre incompressible, en incluant l'Équation 4-11 dans l'Équation 4-23, l'expression de p se réduit à :

$$p = 2a.b.\exp\left[b(I_{f1} - 3)\right]\frac{1}{\sqrt{C_{f11}}}$$

Équation 4-24

La seule composante non nulle des contraintes de Piola-Kirchhoff II de la fibre, est donc définie dans le repère (O, $\mathbf{x_{f1}}$, $\mathbf{x_{f2}}$, $\mathbf{x_{f3}}$) par l'Équation 4-25.

$$S_{f11} = 2a.b.\exp\left[b(I_{f1} - 3)\right]\left(1 - (C_{f11})^{-\frac{3}{2}}\right)$$

Équation 4-25

4.2.2.2. Critère de rupture

L'équation constitutive donnée par l'Équation 4-25 permet de décrire le comportement hyperélastique non linéaire d'une fibre dans son domaine élastique. Or, l'objectif de ce chapitre est de modéliser le comportement jusqu'à rupture d'une membrane fibreuse. Cette membrane étant un réseau de fibres, la déchirure du tissu est matérialisée par la rupture des fibres la constituant. Il devient donc nécessaire d'écrire les équations constitutives de la fibre jusqu'à rupture.

Dans cette optique, le premier choix a été d'attribuer à la fibre un comportement hyperélastique fragile régit par le système suivant :

$$\begin{cases} S_{f11} = 2a.b.\exp\left[b(I_{f1} - 3)\right]\left(1 - (C_{f11})^{-\frac{3}{2}}\right) & \text{si } C_{f11} < C_{11rupture} \\ S_{f11} = 0 & \text{si } C_{f11} \geq C_{11rupture} \end{cases}$$

Équation 4-26

Notons que le critère de rupture de la fibre est matérialisé, dans l'Équation 4-26, par le paramètre $C_{11rupture}$ définissant la déformation ultime d'une fibre suivant son axe longitudinal ($\mathbf{x_{f1}}$). Cependant, un tel comportement au niveau de la fibre (Figure 4-2-a) entraîne, au niveau de la membrane entière, une réponse en traction non satisfaisante (Figure 4-2-b), dans le sens où la rupture apparaît trop brutalement. En effet, nous avons vu au chapitre 3 que la courbe contrainte/déformation expérimentale de la peau humaine comporte une partie où la pente s'adoucit avant la rupture. Ce phénomène n'étant pas reproduit par la loi précédente, nous choisissons ensuite de décrire le comportement de la fibre par une loi hyperélastique plastique fragile :

$$\begin{cases} S_{f11} = 2a.b.\exp\left[b(I_{f1}-3)\right]\left(1-(C_{f11})^{-\frac{3}{2}}\right) & \text{si } C_{f11} < C_{11critique} \\ S_{f11} = \mathrm{S_c} & \text{si } C_{11critique} \leq C_{f11} < C_{11rupture} \\ S_{f11} = 0 & \text{si } C_{f11} \geq C_{11rupture} \end{cases}$$

Équation 4-27

$$\text{avec } \mathrm{S_c} = 2a.b.\exp\left[b(I_{1critique}-3)\right]\left(1-(C_{11critique})^{-\frac{3}{2}}\right)$$

Équation 4-28

Dans les équations constitutives précédentes (Équation 4-27), est introduit le paramètre $C_{11critique}$ définissant la déformation critique d'une fibre suivant son axe longitudinal ($\mathbf{x}_{f1}$).

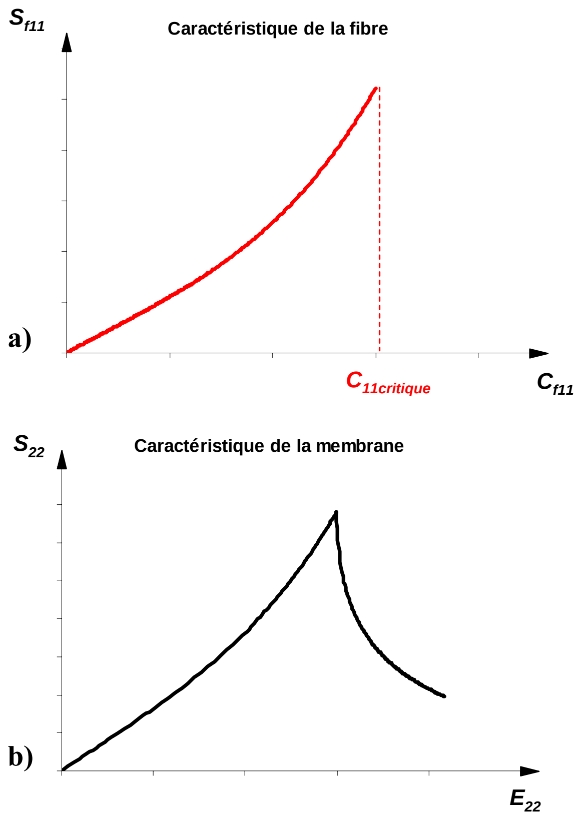


Figure 4-2 : a) Courbe caractéristique contrainte S_{f11} / déformation C_{f11} d'une fibre hyperélastique fragile et b) courbe contrainte S_{22} / déformation E_{22} correspondant à la membrane en traction.

Cette déformation critique délimite l'entrée dans le domaine plastique, sur la courbe contrainte/déformation de la fibre, avant la rupture (Figure 4-3-a). L'utilisation d'une telle loi au niveau de la fibre permet de décrire le comportement adoucissant souhaité au niveau de la membrane lors de la traction (Figure 4-3-b).

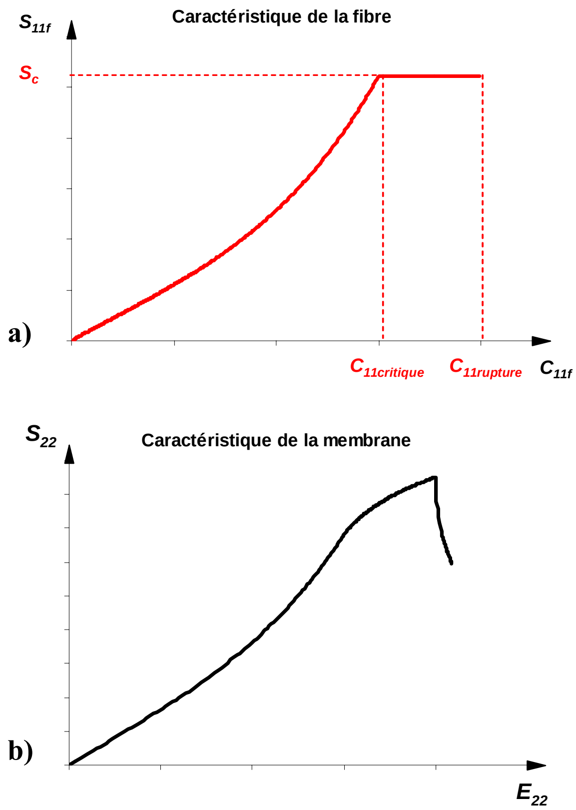


Figure 4-3 : a) Courbe caractéristique contrainte S_{f11} / déformation C_{f11} d'une fibre hyperélastique plastique fragile et b) courbe contrainte S_{22} / déformation E_{22} correspondant à la membrane en traction.

La loi hyperélastique plastique fragile sera donc retenue pour la suite, elle fait apparaître quatre paramètres propres au comportement de la fibre: deux paramètres élastiques a et b, la déformation critique $C_{11critique}$ et la déformation à la rupture $C_{11rupture}$. Nous sommes cependant conscient qu'il serait plus judicieux d'introduire le comportement de la fibre à la suite d'analyses microscopiques.

4.2.3. Comportement de la membrane entière

4.2.3.1. Organisation du réseau de fibres

L'ensemble des fibres constituant la membrane forment un réseau dans le plan (**x_1**, **x_2**) dont l'organisation est définie par la fonction statistique *R*. Cette fonction *R* est choisie de forme gaussienne, à l'image de celle proposée par Billiar et Sacks [Billiar-b, 2000], afin de décrire la distribution des orientations θ de chaque fibre dans le plan (**x_1**, **x_2**) :

$$R(\theta) = \frac{1}{\sigma_R.\sqrt{2\pi}}.\exp\left[\frac{-(\theta-\mu_R)^2}{2\sigma_R{}^2}\right] \text{ avec } \theta \in [\mu_R - \frac{\pi}{2}; \mu_R + \frac{\pi}{2}]$$

Équation 4-29

Dans l'Équation 4-29, μ_R désigne la moyenne et σ_R l'écart type de la distribution *R*. Nous attribuons une signification physique à ces deux paramètres à savoir que μ_R est assimilé à l'orientation privilégiée des fibres et σ_R à leur taux d'orientation dans cette direction privilégiée. L'utilisation de la fonction *R* fait ainsi apparaître deux paramètres propres à l'organisation des fibres dans le réseau.

De plus, la fonction *R* est définie telle que ${}^0Q_f$ désigne la quantité de fibres initiale et ${}^tQ_f$ la quantité de fibres instantanée (à l'instant *t*) :

$${}^0Q_f = \int_{{}^0\Omega_f} R(\theta).d\theta$$

Équation 4-30

$${}^tQ_f = \int_{{}^t\Omega_f} R(\theta).d\theta$$

Équation 4-31

Notons que ${}^0\Omega_f$ est le domaine d'intégration continu des angles θ tels que $\theta \in [\mu_R - \frac{\pi}{2}; \mu_R + \frac{\pi}{2}]$, alors que ${}^t\Omega_f$ est un domaine d'intégration discontinu défini par $\theta \in \left([\mu_R - \frac{\pi}{2}; \mu_R + \frac{\pi}{2}] \not\subset [\theta r_i; \theta r_i + d\theta] \right) \text{ avec } i = 1,2,...,n$.

Sont exclus de ${}^t\Omega_f$ l'ensemble des angles θr_i vérifiant :

$${}_0^tC_{11}\cos^2\theta r_i + {}_0^tC_{22}\sin^2\theta r_i + 2{}_0^tC_{12}\cos\theta r_i \sin\theta r_i \geq C_{11rupture}$$

Équation 4-32

Une interprétation physique de ${}^tQ_f$ serait la quantité de fibres résistantes dans la membrane (c'est-à-dire non cassées) étant donné que ${}^{t}\Omega_f$ correspond aux angles des fibres dont la déformation longitudinale C_{f11} est encore inférieure à la limite à la rupture $C_{11rupture}$. Les quantités de fibres sont calculées sous Matlab® par intégration numérique, le choix de la valeur de $d\theta$ sera discutée par la suite.

4.2.3.2. Equations constitutives

La membrane étant considérée comme un réseau de fibres, le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff de la membrane **S** s'exprime comme la somme des contributions de chaque fibre suivant leur orientation :

$$\mathbf{S} = \frac{1}{V}\int_V \mathbf{S}_f\Big|_{(x_1,x_2,x_3)} dV$$

Équation 4-33

L'Équation 4-33 fait apparaître le volume V de la membrane défini par :

$$V = epa\int_S dS = epa\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R(\theta)d\theta = epa.{}^{0}Q_f$$ avec *epa* épaisseur de la membrane,

Équation 4-34

et l'expression du tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff II de la fibre dans le repère (O, $\mathbf{x_{f1}}$, $\mathbf{x_{f2}}$, $\mathbf{x_{f3}}$) :

$$\mathbf{S}_f\Big|_{(x_1,x_2,x_3)} = \mathbf{P_f}^T.\mathbf{S}_f\Big|_{(x_{f1},x_{f2},x_{f3})}.\mathbf{P_f} \text{ avec } \mathbf{P_f} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Équation 4-35

Vu la définition de $\mathbf{S}_f\Big|_{(x_{f1},x_{f2},x_{f3})}$ (Équation 4-35), l'Équation 4-33 se simplifie en :

$$\mathbf{S}_f\Big|_{(x_1,x_2,x_3)} = S_{f11}.[\mathbf{x_{f1}} \otimes \mathbf{x_{f1}}]$$

Équation 4-36

En intégrant l'Équation 4-34 et l'Équation 4-36 dans l'Équation 4-33, la forme du tenseur **S** devient :

$$\mathbf{S} = \frac{1}{{}^0Q_f} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} S_{f11}.[\mathbf{x_{f1}} \otimes \mathbf{x_{f1}}].R(\theta).d\theta$$

Équation 4-37

Les formes développées des composantes non nulles du tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff II de la membrane sont données par :

$$\begin{cases} S_{11} = \dfrac{1}{{}^0Q_f} \displaystyle\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} S_{f11}(\mathbf{C}).R(\theta).\cos^2\theta.d\theta \\ S_{22} = \dfrac{1}{{}^0Q_f} \displaystyle\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} S_{f11}(\mathbf{C}).R(\theta).\sin^2\theta.d\theta \\ S_{12} = \dfrac{1}{{}^0Q_f} \displaystyle\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} S_{f11}(\mathbf{C}).R(\theta).\cos\theta.\sin\theta.d\theta \end{cases}$$

Équation 4-38

Elles représentent les équations constitutives de la membrane, à l'intérieur desquelles nous retrouvons les quatre paramètres propres aux fibres (a, b, $C_{11critique}$ et $C_{11rupture}$) et les deux paramètres relatifs à leur organisation au sein du réseau (μ_R et σ_R).

4.3. Ecriture des équations d'équilibre par la méthode des éléments finis dans le cas général

Nous donnerons dans ce paragraphe les principes généraux de la méthode des éléments finis appliquée au cas de l'élasticité non linéaire. [Bonnet, 2006, Brunet, 2001]

4.3.1. Principe des Puissances Virtuelles (PPV)

4.3.1.1. Formulation faible continue – Cas général

Plaçons nous tout d'abord dans le cas continue afin d'écrire le principe des puissances virtuelles (PPV) dans sa formulation faible en statique.

Soit un solide élastique Ω de volume V soumis à des efforts de surface imposés $\mathbf{F_{imp}}$, des efforts de volume $\mathbf{f_{imp}}$ et des déplacements imposés $\mathbf{U_{imp}}$. Sur la Figure 4-4, les surfaces S_i et S_l forment une partition de la surface totale S telle que $S_i \cup S_l = S, S_i \cap S_l = \emptyset$.

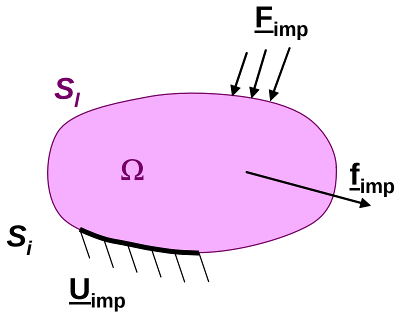


Figure 4-4 : Solide déformable Ω soumis à des efforts de surface F_{imp}, des efforts de volume f_{imp} et des déplacements imposés U_{imp}.

La forme primale du PPV, valable pour toute loi de comportement, s'exprime de manière générale en fonction de la puissance virtuelle des efforts intérieurs $P^{(int)}$ et de la puissance virtuelle des efforts extérieurs $P^{(ext)}$ comme suit :

$$P^{(\mathrm{int})} + P^{(ext)} = 0$$

Équation 4-39

Ajoutons maintenant dans l'Équation 4-39 la condition cinématique traduisant l'existence de déplacements imposés :

$$P^{(\mathrm{int})} + P^{(ext)} + P^{(liai)} = 0$$

Équation 4-40

Dans l'Équation 4-40, le terme $P^{(liai)}$ définit la puissance virtuelle des efforts de liaisons, efforts apparaissant en réaction aux déplacements imposés. Nous noterons par la suite $\hat{\mathbf{V}}$, le vecteur des vitesses virtuelles associées aux déplacements virtuels $\hat{\mathbf{U}}$:

$$\hat{\mathbf{V}} = \dot{\hat{\mathbf{U}}} = \frac{\delta \hat{\mathbf{U}}}{\delta t}$$

Équation 4-41

L'expression de la puissance virtuelle des efforts extérieurs peut s'écrire sous la forme générale :

$$P^{(ext)} = \int_V \mathbf{f_{imp}}.\hat{\mathbf{V}}.dV + \int_{\mathrm{S_l}} \mathbf{F_{imp}}.\hat{\mathbf{V}}.dS$$

Équation 4-42

En multipliant l'Équation 4-42 par δt, apparaît l'expression de l'énergie virtuelle due aux efforts extérieurs :

$$\hat{W}^{(ext)} = \int_V \mathbf{f_{imp}}.\delta\hat{\mathbf{U}}.dV + \int_{S_l} \mathbf{F_{imp}}.\delta\hat{\mathbf{U}}.dS \,,\ \forall \delta\hat{\mathbf{U}} \text{ CA}$$

Équation 4-43

De même, la puissance virtuelle des efforts de liaison, pend la forme générale donnée par l'Équation 4-45 après introduction d'un champ virtuel de multiplicateurs de Lagrange $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ et de sa variation $\hat{\boldsymbol{\Lambda}}$ sur δt (Équation 4-44) ainsi que des champs réels de déplacements **U** et de multiplicateurs de Lagrange **λ**.

$$\hat{\boldsymbol{\Lambda}} = \dot{\hat{\boldsymbol{\lambda}}} = \frac{\delta\hat{\boldsymbol{\lambda}}}{\delta t}$$

Équation 4-44

$$P^{(liai)} = \int_{S_i} \hat{\boldsymbol{\Lambda}}.(\mathbf{U} - \mathbf{U_{imp}})dS + \int_{S_i} \boldsymbol{\lambda}.(\hat{\mathbf{V}})dS$$

Équation 4-45

L'énergie virtuelle associée aux efforts de liaison s'écrit alors :

$$\hat{W}^{(liai)} = \int_{S_i} \delta\hat{\boldsymbol{\lambda}}.(\mathbf{U} - \mathbf{U_{imp}})dS + \int_{S_i} \boldsymbol{\lambda}.(\delta\hat{\mathbf{U}})dS \,,\ \forall \delta\hat{\boldsymbol{\lambda}}, \forall \delta\hat{\mathbf{U}} \text{ SA, CA}$$

Équation 4-46

4.3.1.2. Puissance virtuelle des efforts intérieurs – Grandes déformations

L'expression de la puissance virtuelle des efforts intérieurs peut prendre différentes formes suivant la mesure de déformation utilisée. Dans le cas de grandes déformations, nous choisissons les déformations de Green-Lagrange. Ceci implique d'écrire la puissance virtuelle des efforts intérieurs en fonction du taux de déformation virtuelle de Green-Lagrange $\dot{\hat{\mathbf{E}}}$ et du 2nd tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff **S**, son conjugué énergétique :

$$P^{(\text{int})} = -\int_V \mathbf{S} : \dot{\hat{\mathbf{E}}} dV$$

Équation 4-47[1]

[1] Soient **A** et **B** deux tenseurs quelconques : $\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B_{ji}$

telle que $\dot{\hat{\mathbf{E}}} = \dfrac{\delta\hat{\mathbf{E}}}{\delta t}$ et que la variation de la déformation virtuelle $\delta\hat{\mathbf{E}}(\delta\hat{\mathbf{U}})$ soit une fonction de la variation du déplacement virtuel.

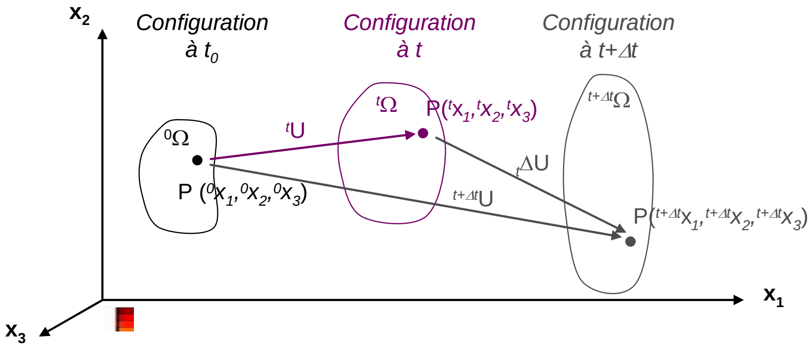


Figure 4-5 : Définition des configurations t_0, t connue et $t+\Delta t$ recherchée, pour un point matériel P appartenant à un solide déformable Ω.

Il est ensuite nécessaire d'écrire une forme incrémentale de l'Équation 4-47 permettant de trouver la configuration à l'instant $t+\Delta t$ en supposant l'équilibre réalisé à l'instant t. La configuration Ω dépendant du temps, il faut alors déterminer une configuration de référence dans laquelle les calculs seront effectués. Nous choisissons donc la formulation Lagrangienne Réactualisée impliquant que les calculs s'effectuent dans la configuration à l'instant t connue (Figure 4-5), par opposition à la formulation Lagrangienne totale pour laquelle la configuration de référence est l'instant t_0. Le calcul de la puissance virtuelle des efforts intérieurs (Équation 4-47) à l'instant $t+\Delta t$ s'effectue alors en intégrant sur le volume à l'instant t (${}^tV$) :

$$ {}^{t+\Delta t}P^{(\text{int})} = -\int_{{}^tV} {}^{t+\Delta t}_{t}\mathbf{S} : {}^{t+\Delta t}_{t}\dot{\hat{\mathbf{E}}}\, {}^t dV $$

Équation 4-48

En multipliant l'Équation 4-48 par δt, on obtient l'expression de l'énergie virtuelle de déformation à l'instant $t+\Delta t$:

$$ {}^{t+\Delta t}\hat{W}^{(\text{int})} = -\int_{{}^tV} {}^{t+\Delta t}_{t}\mathbf{S} : \delta\, {}^{t+\Delta t}_{t}\hat{\mathbf{E}}.{}^t dV \quad \text{ou} \quad {}^{t+\Delta t}\hat{W}^{(\text{int})} = -\int_{{}^tV} {}^{t+\Delta t}_{t}S_{ij}.\delta\, {}^{t+\Delta t}_{t}\hat{E}_{ji}.{}^t dV $$

Équation 4-49

Posons ensuite les décompositions incrémentales suivantes :

$$ {}^{t+\Delta t}_{t}S_{ij} = {}^{t}_{t}S_{ij} + \Delta_t S_{ij} = {}^{t}\sigma_{ij} + \Delta_t S_{ij} $$

Équation 4-50

avec ${}^{t}\sigma_{ij}$ contrainte de Cauchy à l'instant *t*

et $\Delta_t S_{ij}$ incrément des contraintes de Piola-Kirchhoff II entre les instants *t* et *t+Δt* et référencé en *t*.

$$ {}^{t+\Delta t}_{t}E_{ij} = \underbrace{{}^{t}_{t}E_{ij}}_{0} + \Delta_t E_{ij} = \Delta E_{ij} $$

Équation 4-51

${}^{t+\Delta t}_{t}E_{ij}$ est directement égal à l'incrément des déformations de Green-Lagrange entre les instant *t* et *t+Δt* et référencé en *t* que nous notons simplement ΔE_{ij}. Il est formé d'une partie linéaire en ΔU_i, $\Delta\varepsilon_{ij}$ et d'une partie quadratique en ΔU_i, Δn_{ij} :

$$ \begin{aligned} \Delta E_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(\Delta U_i)}{\partial^t x_j} + \frac{\partial(\Delta U_j)}{\partial^t x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(\Delta U_j)}{\partial^t x_i} . \frac{\partial(\Delta U_i)}{\partial^t x_j}\right) \\ &= \Delta\varepsilon_{ij} + \Delta n_{ij} \end{aligned} $$

Équation 4-52

Les mêmes équivalences sont valables pour les champs virtuels.
En intégrant l'Équation 4-50, l'Équation 4-51 et l'Équation 4-52 dans l'Équation 4-49, il vient :

$$ {}^{t+\Delta t}\hat{W}^{(\text{int})} = -\int_{{}^tV} \Delta_t S_{ij} . \delta(\Delta\hat{E}_{ij})^t dV - \int_{{}^tV} {}^{t}\sigma_{ij} . \delta(\Delta\hat{n}_{ij})^t dV - \int_{{}^tV} {}^{t}\sigma_{ij} . \delta(\Delta\hat{\varepsilon}_{ij})^t dV $$

Équation 4-53

Dans l'Équation 4-53 aucune approximation n'a encore été faite. Du fait du comportement non linéaire choisi, il est maintenant nécessaire de linéariser les termes contenant des incréments de déplacement inconnus, c'est-à-dire de la première intégrale.
L'écriture du développement de Taylor de $\Delta_t S_{ij}$, en négligeant les termes du second ordre, donne l'Équation 4-54 dans laquelle apparaît le module tangent de comportement en configuration lagrangienne réactualisée ${}_tA_{ijrs}$, associé à ${}_t\Delta S_{ij}$ et ΔE_{rs}.

$$\Delta_t S_{ij} \approx \left.\frac{\partial(\Delta_t S_{ij})}{\partial(\Delta E_{rs})}\right|_t \Delta E_{rs} \approx \left.\frac{\partial(\Delta_t S_{ij})}{\partial(\Delta E_{rs})}\right|_t (\Delta\varepsilon_{rs} + \Delta n_{rs}) \approx {}_t A_{ijrs}.\Delta\varepsilon_{rs}$$

Équation 4-54

L'approximation suivante peut aussi être faite :

$$\Delta_t S_{ij}.\delta(\Delta\hat{E}_{ij}) \approx {}_t A_{ijrs}.\Delta\varepsilon_{rs}.\delta(\Delta\hat{\varepsilon}_{ij} + \Delta\hat{n}_{ij}) \approx {}_t A_{ijrs}.\Delta\varepsilon_{rs}.\delta(\Delta\hat{\varepsilon}_{ij})$$

Équation 4-55

La forme linéarisée de l'Équation 4-53 devient :

$${}^{t+\Delta t}\hat{W}^{(\text{int})} = -\int_{{}^tV} {}_t A_{ijrs}.\Delta\varepsilon_{rs}.\delta(\Delta\hat{\varepsilon}_{ij})^t dV - \int_{{}^tV} {}^t\sigma_{ij}.\delta(\Delta\hat{n}_{ij})^t dV - \int_{{}^tV} {}^t\sigma_{ij}.\delta(\Delta\hat{\varepsilon}_{ij})^t dV$$

Équation 4-56

4.3.1.3. Discrétisation en éléments finis

Pour une formulation aux éléments finis, nous introduisons des champs de déplacement définis par des fonctions de forme. Le PPV discrétisé prendra, à l'instant $t+\Delta t$, la forme donnée par l'Équation 4-57 dans laquelle nous introduisons :

- ✓ les matrices gradient linéaire ${}^t_t\mathbf{B}_\mathbf{L}$ et non linéaire ${}^t_t\mathbf{B}_\mathbf{NL}$, qui seront définies au paragraphe 4.3.2.2,
- ✓ le module tangent de comportement en formulation Lagrangienne Réactualisée ${}_t\mathbf{A}$, dont le calcul sera explicité au paragraphe 4.4,
- ✓ le vecteur des incréments de déplacement aux nœuds $\mathbf{\Delta U}$ entre les instants t et $t+\Delta t$,
- ✓ le tenseur modifié des contraintes de Cauchy ${}_t\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{NL}$
- ✓ et la matrice $\mathbf{L}$ contenant les réductions aux nœuds à déplacement imposés.

$$-\delta\hat{\mathbf{U}}^T \underbrace{\left(\int_{{}^tV} {}^t_t\mathbf{B}_\mathbf{L}^T \; {}_t\mathbf{A} \; {}^t_t\mathbf{B}_\mathbf{L} \; {}^t dV\right)}_{{}^t_t\mathbf{K}_\mathbf{L}} \mathbf{\Delta U} - \delta\hat{\mathbf{U}}^T \underbrace{\left(\int_{{}^tV} {}^t_t\mathbf{B}_\mathbf{NL}^T \; {}^t\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{NL} \; {}^t_t\mathbf{B}_\mathbf{NL} \; {}^t dV\right)}_{{}^t_t\mathbf{K}_\mathbf{NL}} \mathbf{\Delta U} - \delta\hat{\mathbf{U}}^T \underbrace{\left(\int_{{}^tV} {}^t_t\mathbf{B}_\mathbf{L}^T \; {}^t\boldsymbol{\sigma} \; {}^t dV\right)}_{{}^t\mathbf{F}_\mathbf{int}}$$

$$+\delta\hat{\mathbf{U}}^T \underbrace{\left(\int_{{}^tV} {}^{t+\Delta t}\mathbf{f}_\mathbf{imp}.{}^t dV + \int_{{}^t\mathrm{S}_\mathrm{l}} {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_\mathbf{imp}.{}^t dS\right)}_{{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_\mathbf{ext}}$$

$$+\delta\hat{\boldsymbol{\lambda}}^T \int_{{}^t\mathrm{S}_\mathrm{i}} (\mathbf{L}.\mathbf{U} - \mathbf{U}_\mathbf{imp})^t dS + \delta\hat{\mathbf{U}}^T \underbrace{\left(\int_{{}^t\mathrm{S}_\mathrm{i}} \mathbf{L}^T.{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\lambda}.{}^t dS\right)}_{{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_\mathbf{liai}} = 0$$

Équation 4-57

La minimisation de l'Équation 4-57 par rapport à chacun des deux champs virtuels ($\delta\hat{\mathbf{U}}$ et $\delta\hat{\boldsymbol{\lambda}}$) donne les équations d'équilibre à l'instant $t+\Delta t$:

$$-\underbrace{({}_t^t\mathbf{K}_{\mathbf{L}}+{}_t^t\mathbf{K}_{\mathbf{NL}})}_{{}_t^t\mathbf{K}}\,\Delta\mathbf{U}-{}^t\mathbf{F}_{\mathbf{int}}+{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{ext}}+{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{liai}}=0$$

Équation 4-58

augmentée de la condition cinématique :

$$\mathbf{L.U}=\mathbf{U}_{\mathbf{imp}}$$

Équation 4-59

La résolution du système (Équation 4-58) + (Équation 4-59) est effectuée en supposant que les efforts internes ${}^t\mathbf{F}_{\mathbf{int}}$ et la rigidité tangente ${}_t^t\mathbf{K}$ à l'instant t sont connus, leur calcul sera détaillé au paragraphe 4.3.2.1. Il reste alors à déterminer $\Delta\mathbf{U}$ et ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{liai}}$ à l'aide des méthodes de résolution qui sont présentées au paragraphe 4.5.

4.3.2. Calcul des intégrales du PPV

Nous détaillerons ici le calcul des intégrales définissant la matrice de rigidité tangente et les efforts internes de la membrane. [Champaney, 2003, Sabourin, 2000]

4.3.2.1. Définition des intégrales élémentaires

Rappelons que l'Équation 4-58 et l'Équation 4-59 régissent l'équilibre de la membrane entière. De manière générale en éléments finis, la structure est discrétisée en un certain nombre d'éléments, ce qui permet d'introduire une matrice de rigidité tangente élémentaire ainsi que des efforts internes élémentaires. Les intégrales élémentaires qui les définissent sont alors facilement calculables. Il suffit ensuite d'assembler chaque matrice ou vecteur élémentaire afin de générer celle ou celui de la structure entière.

De plus, nous nous plaçons dans le plan de la membrane ($\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$). Les composantes, dans la troisième dimension, des tenseurs nécessaires au calcul par éléments finis (gradient de la déformation et déformations) sont obtenues à partir de l'hypothèse d'incompressibilité.

Matrice de rigidité tangente élémentaire

Tout comme la matrice de rigidité tangente totale ${}_t^t\mathbf{K}$, la matrice de rigidité tangente élémentaire ${}_t^t\mathbf{K}_e$ est composée d'une partie linéaire ${}_t^t\mathbf{K}_{\mathbf{L}(e)}$ et d'une partie non linéaire $\mathbf{K}_{\mathbf{NL}(e)}$ appelée aussi raideur géométrique (Équation 4-60).

$$ {}_t^t\mathbf{K}_e = {}_t^t\mathbf{K}_{\mathbf{L}(e)} + {}_t^t\mathbf{K}_{\mathbf{NL}(e)} $$

Équation 4-60

Les expressions de ${}_t^t\mathbf{K}_{\mathbf{L}(e)}$ et ${}_t^t\mathbf{K}_{\mathbf{NL}(e)}$ sont obtenues à partir de la forme linéarisée de l'énergie virtuelle de déformation (Équation 4-57) :

$$ {}_t^t\mathbf{K}_{\mathbf{L}(e)} = \int_{V_e} {}_t^t\mathbf{B}_{\mathbf{L}}^T \ {}_t\mathbf{A} \ {}_t^t\mathbf{B}_{\mathbf{L}} \ dV_e $$

Équation 4-61

$$ {}_t^t\mathbf{K}_{\mathbf{NL}(e)} = \int_{V_e} {}_t^t\mathbf{B}_{\mathbf{NL}}^T \ {}^t\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{NL}} \ {}_t^t\mathbf{B}_{\mathbf{NL}} \ dV_e $$

Équation 4-62

Il faut remarquer que les quatre tenseurs ${}_t^t\mathbf{B}_{\mathbf{L}}$, ${}_t^t\mathbf{B}_{\mathbf{NL}}$, ${}_t\mathbf{A}$ et ${}^t\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{NL}}$ sont définis aux points d'intégration de l'élément, alors que la matrice ${}_t^t\mathbf{K}_e$ contient les valeurs nodales de rigidité tangente.

Efforts internes élémentaires

De manière identique, l'expression des efforts internes élémentaires ${}^t\mathbf{F}_{\mathbf{int}(e)}$ dérive de la forme linéarisée de l'énergie virtuelle de déformation (Équation 4-57) :

$$ {}^t\mathbf{F}_{\mathbf{int}(e)} = \int_{V_e} {}_t^t\mathbf{B}_{\mathbf{L}}^{\ T} . \ {}^t\boldsymbol{\sigma} \, .dV_e $$

Équation 4-63

Cette équation fait apparaître le tenseur des contraintes de Cauchy σ défini aux points d'intégration de l'élément, alors que ${}^t\mathbf{F}_{\mathbf{int}(e)}$ contient les valeurs nodales des efforts internes. Le calcul détaillé de σ est donné dans le paragraphe suivant.

4.3.2.2. Définition des matrices aux points d'intégration

Toutes les définitions suivantes sont donc données en un point d'intégration G de coordonnées (ξ,η), dans le repère isoparamétrique.

Matrices gradient linéaire et non linéaire

La matrice gradient linéaire ${}_t^t\mathbf{B}_{\mathbf{L}}$ en un point G de coordonnées (ξ,η) est telle que les déformations linéaires ε en ce point s'écrivent :

$$\{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}\}(\xi,\eta) = {}_t^t\mathbf{B}_\mathbf{L}(\xi,\eta).\Delta\mathbf{U}_\mathbf{e}$$

Équation 4-64

tel que $\Delta\mathbf{U}_e^{\ T} = \begin{bmatrix}\Delta U_{1(i)} & \Delta U_{2(i)} & \Delta U_{1(j)} & \Delta U_{2(j)} & \Delta U_{1(k)} & \Delta U_{2(k)} & \Delta U_{1(l)} & \Delta U_{2(l)}\end{bmatrix}$,

où $\Delta\mathbf{U}_e$ est le vecteur des incréments de déplacements nodaux de l'élément contenant le point G. Notons que $\{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}\}$ désigne une matrice colonne construite à partir des composantes du tenseur des incréments de déformations linéaires $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ suivant la notation de Voigt :

$$\{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{bmatrix}\Delta\varepsilon_{11}\\ \Delta\varepsilon_{22}\\ 2\Delta\varepsilon_{12}\end{bmatrix}$$

Équation 4-65

Soit ${}^t\mathbf{N}$ le vecteur des fonctions de forme de l'élément défini en annexe 6 et ${}^tN_{(n)}$ la composante de ${}^t\mathbf{N}$ correspondant au nœud n. Les dérivées partielles de ${}^tN_{(n)}$ suivant $\mathbf{x_1}$ et $\mathbf{x_2}$ s'écrivent respectivement :

$$ {}^tN_{(n)},{}^tx_1 = \frac{\partial^t N_{(n)}}{\partial^t x_1} \text{ et } {}^tN_{(n)},{}^tx_2 = \frac{\partial^t N_{(n)}}{\partial^t x_2}$$

Équation 4-66

Le tenseur ${}_t^t\mathbf{B}_\mathbf{L}$ est composé des valeurs au point G des $2n$ dérivées partielles des fonctions de forme correspondant à chacun des n nœuds de l'élément.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc}\text{nœud } \mathit{1} & & & & \text{nœud } n\end{array} \\ {}_t^t\mathbf{B}_\mathbf{L}(\xi,\eta) = & \left[\begin{array}{cc|c|cc} {}^tN_{(1)},{}^tx_1 & 0 & \cdots & {}^tN_{(n)},{}^tx_1 & 0 \\ 0 & {}^tN_{(1)},{}^tx_2 & \cdots & 0 & {}^tN_{(n)},{}^tx_2 \\ {}^tN_{(1)},{}^tx_2 & {}^tN_{(1)},{}^tx_1 & \cdots & {}^tN_{(n)},{}^tx_2 & {}^tN_{(n)},{}^tx_1 \end{array}\right]\end{array}$$

Équation 4-67

Nous introduisons le tenseur ${}_t^t\widetilde{\mathbf{B}}_\mathbf{L}$ défini par l'Équation 4-68 dont le calcul s'effectue par un simple produit de tenseurs détaillé en annexe 6.

$$\{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}\} = {}_t^t\widetilde{\mathbf{B}}_\mathbf{L}.\Delta\widetilde{\mathbf{U}}_e$$

Équation 4-68

tel que $\Delta\widetilde{\mathbf{U}}_e^{\ T} = \begin{bmatrix}\Delta U_{1(i)} & \Delta U_{1(j)} & \Delta U_{1(k)} & \Delta U_{1(l)} & \Delta U_{2(i)} & \Delta U_{2(j)} & \Delta U_{2(k)} & \Delta U_{2(l)}\end{bmatrix}$.

Il suffit ensuite de réorganiser les composantes de ${}_t^t\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathbf{L}}$ pour obtenir le tenseur ${}_t^t\mathbf{B}_{\mathbf{L}}$ correspondant à $\Delta\mathbf{U}_e$.

La matrice gradient non linéaire ${}_t^t\mathbf{B}_{\mathbf{NL}}$ au même point G de coordonnées (ξ,η) est elle aussi constituée des dérivées partielles des fonctions de forme de l'élément mais leur organisation diffère:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \text{nœud } 1 & & & \text{nœud } n & \end{array} \\ {}_t^t\mathbf{B}_{\mathbf{NL}}(\xi,\eta) = & \left[\begin{array}{cc|c|cc} {}^tN_{(1)},{}^tx_1 & 0 & \cdots & {}^tN_{(n)},{}^tx_1 & 0 \\ {}^tN_{(1)},{}^tx_2 & 0 & \cdots & {}^tN_{(n)},{}^tx_2 & 0 \\ 0 & {}^tN_{(1)},{}^tx_1 & \cdots & 0 & {}^tN_{(n)},{}^tx_1 \\ 0 & {}^tN_{(1)},{}^tx_2 & \cdots & 0 & {}^tN_{(n)},{}^tx_2 \end{array}\right] \end{array}$$

Équation 4-69

Le calcul de ${}_t^t\mathbf{B}_{\mathbf{NL}}$ s'effectue directement par le produit de tenseur défini dans l'annexe 6.

Contraintes de Cauchy

Le module de comportement ${}_t\mathbf{A}$, apparaissant dans l'Équation 4-57, est dit tangent car c'est un tenseur du 4$^{\text{ème}}$ ordre reliant les incréments de contraintes de Piola-Kirchhoff II aux incréments de déformations de Green-Lagrange. La loi de comportement écrite en formulation Lagrangienne réactualisée prend donc la forme suivante au point d'intégration G de coordonnées (ξ,η) :

$$\Delta_t S_{ij} = {}_t A_{ijrs} \,.\Delta E_{rs}$$

Équation 4-70

et sa notation matricielle :

$$\{\Delta_t \mathbf{S}\} = [{}_t\mathbf{A}].\{\Delta\mathbf{E}\}$$

Équation 4-71

où $\{\Delta_t \mathbf{S}\}$ et $\{\Delta\mathbf{E}\}$ sont les matrices colonnes correspondant aux tenseurs $\Delta_t\mathbf{S}$ et $\Delta\mathbf{E}$ et définies suivant la notation de Voigt.
Pour des raisons de symétrie, $[{}_t\mathbf{A}]$ est la notation de Voigt du tenseur ${}_t\mathbf{A}$ réduit à 9 composantes tel que l'Équation 4-71 soit équivalente à :

$$\begin{Bmatrix} \Delta_t S_{11} \\ \Delta_t S_{22} \\ \Delta_t S_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_tA_{1111} & {}_tA_{1122} & {}_tA_{1112} \\ {}_tA_{2211} & {}_tA_{2222} & {}_tA_{1112} \\ {}_tA_{1211} & {}_tA_{1211} & {}_tA_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta E_{11} \\ \Delta E_{22} \\ 2\Delta E_{12} \end{Bmatrix}$$

Équation 4-72

Une fois les incréments de déformation de Green-Lagrange $\Delta\mathbf{E}$ (au point d'intégration G de coordonnées (ξ,η) et référencés à l'instant *t*), déterminés à l'aide de l'Équation 4-52, la loi de comportement énoncée dans l'Équation 4-71 permet ensuite de calculer les incréments de contraintes de Piola-Kirchhoff II $\Delta_t\mathbf{S}$ au point d'intégration G de coordonnées (ξ,η) et référencés à l'instant *t.* Or en vue du calcul de l'intégrale des efforts internes, il est nécessaire de déterminer le tenseur des contraintes de Cauchy ${}^t\boldsymbol{\sigma}$ à l'instant *t.* Pour cela, il suffit d'appliquer la série de transformations suivantes au tenseur $\Delta_t\mathbf{S}$:

- ✓ les incréments des contraintes de Piola-Kirchhoff II doivent être référencées à l'instant t_0 :

$$\boldsymbol{\Delta}_0\mathbf{S} = {}_0^t\mathbf{F}^{-1}\,\Delta_t\mathbf{S}\,{}_0^t\mathbf{F}^{-\mathbf{T}}\det({}_0^t\mathbf{F})$$

Équation 4-73

- ✓ les incréments des contraintes de Piola-Kirchhoff II référencées à l'instant t_0 peuvent être ajoutées aux contraintes de Piola-Kirchhoff II calculées entre les instants t_0 et $t\text{-}\Delta t$:

$${}_0^t\mathbf{S} = {}_0^{t-\Delta t}\mathbf{S} + \boldsymbol{\Delta}_0\mathbf{S}$$

Équation 4-74

- ✓ les contraintes de Piola-Kirchhoff II entre les instants t_0 et t ainsi obtenues sont transformées en contraintes de Cauchy à l'instant t :

$${}^t\boldsymbol{\sigma} = {}_0^t\mathbf{F}\;{}_0^t\mathbf{S}\;{}_0^t\mathbf{F}^{\mathbf{T}}\,\frac{1}{\det({}_0^t\mathbf{F})}$$

Équation 4-75

Toutes ces transformations nécessitent d'utiliser le tenseur gradient de la transformation ${}_0^t\mathbf{F}$ entre les instants t_0 et t défini au point d'intégration G de coordonnées (ξ,η) par :

$$ {}_0^t\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial {}_0^t u_{G1}}{\partial {}^0 x_1} + 1 & \dfrac{\partial {}_0^t u_{G1}}{\partial {}^0 x_2} & 0 \\ \dfrac{\partial {}_0^t u_{G2}}{\partial {}^0 x_1} & \dfrac{\partial {}_0^t u_{G2}}{\partial {}^0 x_2} + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{{}^0 epa}{{}^t epa} \end{bmatrix} $$

Équation 4-76

Remarquons que la composante ${}_0^t F_{33}$ représente la variation d'épaisseur de la membrane entre les instants t_0 (${}^0epa$) et t (${}^tepa$). Cependant les composantes ${}_0^t u_{G1}$ (suivant $\mathbf{x_1}$) et ${}_0^t u_{G2}$ (suivant $\mathbf{x_2}$) du déplacement du point G entre les instants t_0 et t ne pouvant être obtenues directement, le calcul complet du tenseur gradient de la transformation est explicité en annexe 6.

De plus, nous appellerons ${}^t\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{NL}}$ le tenseur modifié des contraintes de Cauchy à l'instant t au point d'intégration G de coordonnées (ξ,η) et utilisé lors du calcul de l'intégrale de la matrice de rigidité tangente. Il est formé des composantes de ${}^t\boldsymbol{\sigma}$ organisées comme suit :

$$ {}^{\mathbf{t}}\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{NL}}(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} {}^t\sigma_{11} & {}^t\sigma_{12} & & \\ {}^t\sigma_{12} & {}^t\sigma_{22} & & \\ & & {}^t\sigma_{11} & {}^t\sigma_{12} \\ & & {}^t\sigma_{12} & {}^t\sigma_{22} \end{bmatrix} $$

Équation 4-77

4.3.2.3. Calcul des intégrales de la membrane

Les intégrales définissant les matrices de rigidité tangente et les efforts internes ne peuvent en général se calculer analytiquement, il est alors nécessaire d'utiliser une intégration numérique.

Ayant choisi des éléments quadrilatères isoparamétriques à quatre nœuds, nous utilisons quatre points d'intégration de Gauss positionnés à l'intérieur de l'élément comme défini en annexe 6. Une valeur approchée des matrices de rigidités tangentes élémentaires et du vecteur des efforts internes élémentaires est donc obtenue par intégration par points de Gauss selon la méthode explicitée dans cette même annexe.

Les matrices ou vecteurs élémentaires ainsi obtenus doivent ensuite être assemblés afin de former ceux relatifs à la structure entière.

4.4. Implantation de la loi de comportement : calcul du module tangent cohérent

L'implantation de la loi de comportement, définie au paragraphe 4.2, dans le code élément fini passe par l'écriture du module tangent cohérent avec le comportement. Pour ce faire, nous distinguerons dans ce paragraphe la formulation Lagrangienne totale de la formulation Lagrangienne réactualisée.

4.4.1. Définition dans le domaine élastique

De manière générale, le module tangent de comportement dérive du 2nd tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff de la membrane ${}_0^t\mathbf{S}$. Or ${}_0^t\mathbf{S}$ ayant été défini (Équation 4-38) dans la configuration initiale (t_0) en fonction des composantes du tenseur des déformations de Cauchy-Green droit ${}_0^t\mathbf{C}$, le module tangent de comportement qui en découle doit être exprimé en formulation Lagrangienne totale. Nous obtenons donc au point de coordonnées (ξ,η) :

$$
{}_0\mathbf{A} = 2\frac{\partial {}_0^t\mathbf{S}}{\partial {}_0^t\mathbf{C}}
$$

Équation 4-78

Les composantes du module tangent de comportement ${}_0\mathbf{A}$ s'expriment donc :

$$
{}_0A_{ijrs} = 2\frac{\partial {}_0^tS_{ij}}{\partial {}_0^tC_{rs}} = 2\frac{\partial {}_0^tS_{ij}}{\partial {}_0^tC_{f11}}\frac{\partial {}_0^tC_{f11}}{\partial {}_0^tC_{rs}} \qquad i, j, r, s = 1, 2
$$

Équation 4-79

Or d'après l'Équation 4-38, les dérivées partielles des composantes du 2nd tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff de la membrane prennent la forme :

$$
\frac{\partial {}_0^tS_{ij}}{\partial {}_0^tC_{f11}} = \frac{1}{{}^0Q_f}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial {}_0^tS_{f11}}{\partial {}_0^tC_{f11}}(x_{f1i}.x_{f1j}).R(\theta).d\theta \qquad i, j = 1, 2
$$

Équation 4-80

sachant que $x_{f11} = \cos\theta$ et $x_{f12} = \sin\theta$.

De même d'après l'Équation 4-13, les dérivées partielles de ${}_0^tC_{f11}$ sont données par:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\, {}_0^t C_{f11}}{\partial\, {}_0^t C_{11}} = \cos^2\theta \\ \dfrac{\partial\, {}_0^t C_{f11}}{\partial\, {}_0^t C_{22}} = \sin^2\theta \\ \dfrac{\partial\, {}_0^t C_{f11}}{\partial\, {}_0^t C_{12}} = 2\cos\theta\sin\theta \end{cases}$$

Équation 4-81

Le développement de l'Équation 4-79 à l'aide de l'Équation 4-80 et de l'Équation 4-81 donne l'expression des composantes du module tangent de comportement:

$${}_0A_{ijrs} = \frac{2}{{}^0Q_f} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\, {}_0^t S_{f11}}{\partial\, {}_0^t C_{f11}} . f_{ijrs}(\theta).d\theta$$

Équation 4-82

en fonction de la dérivée partielle des contraintes de la fibre :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\, {}_0^t S_{f11}}{\partial\, {}_0^t C_{f11}} = 2a.b^2.\exp\left[b({}_0^t I_{f1} - 3)\right]\left(1 - ({}_0^t C_{f11})^{-\frac{3}{2}}\right)^2 \\ \qquad\qquad + 3a.b.\exp\left[b({}_0^t I_{f1} - 3)\right] \Big/ ({}_0^t C_{f11})^{\frac{5}{2}} & \text{si } {}_0^t C_{f11} < C_{11critique} \\ \dfrac{\partial\, {}_0^t S_{f11}}{\partial\, {}_0^t C_{f11}} = 0 & \text{si } C_{11critique} \leq {}_0^t C_{f11} < C_{11rupture} \\ \dfrac{\partial\, {}_0^t S_{f11}}{\partial\, {}_0^t C_{f11}} = 0 & \text{si } {}_0^t C_{f11} \geq C_{11rupture} \end{cases}$$

Équation 4-83

et d'une fonction scalaire en θ :

$$f_{ijrs}(\theta) = \frac{\partial\, {}_0^t C_{f11}}{\partial\, {}_0^t C_{rs}} . x_{f1i} . x_{f1j} . R(\theta)$$

Équation 4-84

Dans l'objectif de calculer l'intégrale définissant la matrice de rigidité tangente, le module tangent de comportement doit être écrit au point de coordonnées (ξ,η) en formulation Lagrangienne réactualisée. Pour cela, il suffit d'appliquer la transformation donnée par l'Équation 4-85 et permettant le passage d'une écriture en formulation Lagrangienne totale à la formulation Lagrangienne réactualisée.

$$_{t}A_{abpq} = \frac{1}{\det({}_0^t\mathbf{F})}\ {}_0^tF_{ai}\ {}_0^tF_{bj}\ {}_0A_{ijrs}\ {}_0^tF_{pr}\ {}_0^tF_{qs}$$

Équation 4-85

Cette transformation nécessite d'utiliser les composantes du tenseur gradient de la transformation ${}_0^t\mathbf{F}$ définies au point G de coordonnées (ξ,η) par l'Équation 4-76.

4.4.2. Méthode de calcul jusqu'à rupture

La définition précédente du module tangent de comportement est énoncée dans un cadre général, or son calcul au sein du modèle éléments finis s'effectue de trois manières différentes suivant deux paramètres principaux :

- ✓ la valeur instantanée de la quantité de fibres ${}^tQ_f$. définie au paragraphe 4.2.3.1,
- ✓ si le point d'intégration considéré est en charge ou en décharge.

Rappelons que ${}^0Q_f$ a été défini (Équation 4-30) comme étant la quantité initiale de fibres. Fixons maintenant une quantité minimum de fibres Q_{fmin} indiquant le seuil d'endommagement maximum d'un point d'intégration G de coordonnées (ξ,η). Le choix de la valeur optimum de Q_{fmin} sera discuté par la suite.

Il reste alors à déterminer un critère définissant l'état de charge ou de décharge d'un point d'intégration G de coordonnées (ξ,η) entre l'instant t de calcul du module tangent et le dernier état convergé défini par l'instant $t1$.
Soit ${}_0^t\mathbf{C}_{\mathbf{f11}}$ le vecteur colonne introduit lors de l'intégration numérique de l'Équation 4-30, il représente les valeurs à chaque angle $\theta \in [\mu_R - \frac{\pi}{2}; \mu_R + \frac{\pi}{2}]$ de la déformation ${}_0^tC_{f11}(\theta)$ des fibres entre les instants t_0 et t et soit ${}_0^t\mathbf{S}_{\mathbf{f11}}$ le vecteur colonne des contraintes correspondantes. Nous définissons les vecteurs ^{t}**test_c**, ^{t}**test_r** et ^{t}**test_s** de même dimension que ${}_0^t\mathbf{C}_{\mathbf{f11}}$ et composés de 0 et de 1. ^{t}**test_c** détermine les orientations dans lesquelles les fibres ont dépassé la déformation critique $C_{11critique}$ à l'instant t, ^{t}**test_r** celles où la déformation à la rupture $C_{11rupture}$ est atteinte alors que ^{t}**test_s** défini celles dont la contrainte est strictement inférieure à la valeur critique.

$${}^t\mathbf{test\_c} = ({}_0^t\mathbf{C}_{\mathbf{f11}} < C_{11critique})$$

Équation 4-86

$${}^t\mathbf{test\_r} = ({}_0^t\mathbf{C}_{\mathbf{f11}} < C_{11rupture})$$

Équation 4-87

$$^{t}\mathbf{test\_s} = ({}_{0}^{t}\mathbf{S}_{\mathbf{f11}} < S_c)$$

Équation 4-88

L'état de charge ou de décharge d'un point d'intégration G, de coordonnées (ξ,η), est ensuite défini par la routine donnée en annexe 6 et basée sur l'évolution des vecteurs $^{t}\mathbf{test\_c}$, $^{t}\mathbf{test\_r}$ et $^{t}\mathbf{test\_s}$.

Les trois méthodes de calcul du module tangent de comportement en formulation Lagrangienne réactualisée $_{t}\mathbf{A}$**,** au point G, de coordonnées (ξ,η), à l'instant *t,* sont les suivantes :

- ✓ Méthode 1 dite classique:
  Dans un premier temps, le module $_{0}\mathbf{A}$ (forme lagrangienne totale) est calculé :
  soit à partir des équations (Équation 4-82 à Équation 4-84) pour la méthode appelée 1a,
  soit à partir des mêmes équations (Équation 4-82 à Équation 4-84) où le système de l'Équation 4-83 est remplacé par une équation unique (Équation 4-89) pour la méthode notée 1b.

$$\frac{\partial {}_{0}^{t}S_{f11}}{\partial {}_{0}^{t}C_{f11}} = 2a.b^{2}.\exp\left[b({}_{0}^{t}I_{f1}-3)\right]\left(1-({}_{0}^{t}C_{f11})^{-\frac{3}{2}}\right)^{2} + 3a.b.\exp\left[b({}_{0}^{t}I_{f1}-3)\right]\Big/({}_{0}^{t}C_{f11})^{\frac{5}{2}}$$

Équation 4-89

Puis, dans les deux cas, la transformation (Équation 4-85) donne l'expression du module $_{t}\mathbf{A}$ (forme lagrangienne réactualisée).

- ✓ Méthode 2 par différence finie:
  $_{t}\mathbf{A}$ est calculé par différence finie entre le dernier état convergé noté *t1* et l'état recherché *t* suivant la formule:

$$_{t}\mathbf{A} = \frac{{}_{0}^{t}\mathbf{A}.{}_{0}^{t}\mathbf{E} - {}_{0}^{t1}\mathbf{A}.{}_{0}^{t1}\mathbf{E}}{{}_{0}^{t}\mathbf{E} - {}_{0}^{t1}\mathbf{E}}$$

Équation 4-90

où ${}_{0}^{t}\mathbf{E}$ représente le tenseur des déformations de Green-Lagrange entre les instants t_0 et *t* et ${}_{0}^{t1}\mathbf{E}$ celui entre les instants t_0 et *t1.* ${}_{0}^{t}\mathbf{A}$ et ${}_{0}^{t1}\mathbf{A}$ sont les formes Lagrangiennes totales des modules de comportement respectivement aux instants *t* et *t1*. Ils sont calculés à partir de l'Équation 4-82 en utilisant les déformations de Cauchy-Green entre les instants t_0 et *t* pour ${}_{0}^{t}\mathbf{A}$ et les instants t_0 et *t1* pour ${}_{0}^{t1}\mathbf{A}$.

- ✓ Méthode 3 à valeurs quasi nulles:
  Toutes les composantes de ${}_t\mathbf{A}$ prennent des valeurs quasiment nulles égales à 10^{-5} fois leurs valeurs à l'instant t_0.

Le choix de la méthode de calcul du module tangent est effectué comme suit :

si ${}^{t}Q_f = {}^{0}Q_f$: (*aucune fibre cassée*)

  si *Charge* (1→2 et 2→4)

   Méthode 1a

  si *Décharge élastique* (2→3) **ou** *Recharge* (3→2)

   Méthode 1b

si ${}^{0}Q_f < {}^{t}Q_f < Q_{fmin}$: (*au moins une fibre cassée*)

  si *Charge* (4→5)

   Méthode 2

  si *Décharge après rupture* (5→6) **ou** *Recharge après rupture* (6→5)

   Méthode 1b avec ${}^{t}Q_f = {}^{t1}Q_f$.

   (le nombre de fibres à l'instant t est le même que celui à l'instant $t1$)

si ${}^{t}Q_f \geq Q_{fmin}$: (*plus de la moitié de fibres cassées*)

   Méthode 3

Les numéros en bleu correspondent aux points caractéristiques représentés sur la courbe contrainte/déformation de la Figure 4-6.

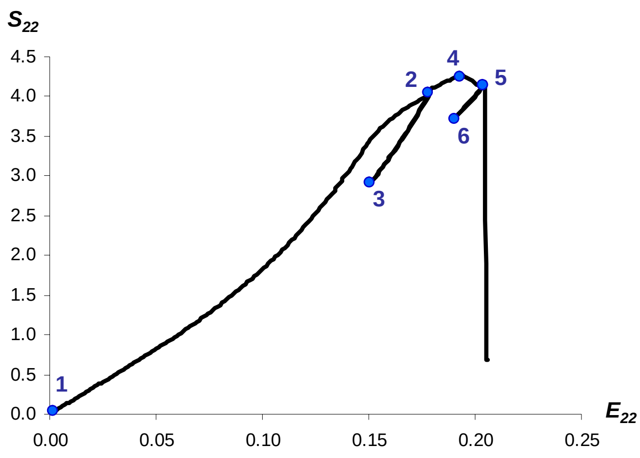


Figure 4-6 : Evolution de la contrainte de Piola-Kirchhoff II S_{22} en fonction de la déformation de Green-Lagrange E_{22} d'un élément en traction soumis à des charges et décharges successives.

4.5. Résolution numérique des équations d'équilibre

Ayant défini, au paragraphe précédent, les équations d'équilibre de la membrane ainsi que le calcul des différents tenseurs connus à l'instant t, il reste l'étape de résolution. En présence de matériau au comportement non linéaire, la résolution numérique repose le plus souvent sur des algorithmes itératifs. Pour cela, il a été nécessaire de tester plusieurs méthodes sur des cas simples afin de choisir celle permettant au mieux de simuler la traction jusqu'à rupture d'une membrane fibreuse.

Nous présenterons donc, dans ce paragraphe, les différentes méthodes employées à la résolution des équations d'équilibre à l'instant $t+\Delta t$ ainsi que les principaux résultats des tests de validation du modèle.

4.5.1. Schéma itératif de Newton-Raphson complet

4.5.1.1. Algorithme de résolution

Principe général

[Belytschko, 2000, Brunet, 2001]

La prise en compte des conditions aux limites par la méthode des multiplicateurs de Lagrange donne à résoudre le système d'équations régissant l'équilibre (Équation 4-58), qui est de la forme f(x,y)=0. La recherche des racines d'une telle équation est le plus souvent basée sur la méthode de Newton-Raphson[2] communément utilisée en analyse numérique.

Soit une fonction scalaire f et son développement de Taylor au voisinage de x_j à l'ordre 1 :

$$f(x_{j+1}) \approx f(x_j) + f'(x_j).(x_{j+1} - x_j)$$

Équation 4-91

Etant donné que nous avons posé $f(x)=0$ pour tout x racine de l'équation, écrire $f(x_{j+1}) = 0$ au premier ordre revient à :

$$x_{j+1} = x_j - \frac{f(x_j)}{f'(x_j)}$$

Équation 4-92

[2] C'est en 1669 que Mr. Newton donna les fondements de cette méthode et quelques années plus tard, Mr. Raphson la généralisa aux systèmes d'équations.

Le principe de la méthode de Newton-Raphson est de déterminer une valeur initiale pour la racine x_0, puis, par un processus itératif, de calculer la racine de l'itération j+1 à partir de la racine de l'itération j à l'aide de l'Équation 4-92, et ce jusqu'à convergence, c'est-à-dire jusqu'à avoir atteint la précision souhaitée sur la racine.

Considérant maintenant l'équilibre de la membrane, nous avons à résoudre le système défini par l'Équation 4-58 que l'on peut écrire sous la forme d'une fonction vectorielle à 2 variables :

$$\mathbf{f}(\mathbf{U},\boldsymbol{\lambda}) = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{ext}} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{int}} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{liai}} = \mathbf{0}$$

Équation 4-93

La fonction **f** est un vecteur dont toutes les composantes doivent être nulles à l'équilibre. Suivant la même démarche que précédemment, la formule de Taylor généralisée aux systèmes d'équations donne au voisinage de $({}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(j+1)}, {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\lambda}^{(j+1)})$ à l'ordre 1 :

$$\mathbf{f}({}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(j+1)}, {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\lambda}^{(j+1)}) \approx \mathbf{f}({}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(j)}, {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\lambda}^{(j)}) + \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}}\right|_{({}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(j)}, {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\lambda}^{(j)})} .({}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(j+1)} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(j)})$$
$$+ \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\right|_{({}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(j)}, {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\lambda}^{(j)})} .({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\lambda}^{(j+1)} - {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\lambda}^{(j)})$$

Équation 4-94

Précisons que nous cherchons l'équilibre à l'instant $t+\Delta t$ par des itérations successives j autour de $t+\Delta t$, et ceci sur un incrément de chargement noté i (Figure 4-7). Les valeurs des efforts externes ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{ext}}$ sont donc constantes sur tout l'incrément de chargement i, c'est-à-dire pour toutes les itérations d'équilibres j correspondantes, ce qui induit :

$$\left.\frac{\partial\, {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{ext}}}{\partial \mathbf{U}}\right|_{({}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(j)}, {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\lambda}^{(j)})} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \left.\frac{\partial\, {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{ext}}}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\right|_{({}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(j)}, {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\lambda}^{(j)})} = \mathbf{0}$$

Équation 4-95

Comme nous l'avons vu précédemment, les efforts internes sont des fonctions des déplacements **U** et les efforts de liaison dépendent du champ des multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{int}} = {}^{t+\Delta t}_{t+\Delta t}\mathbf{K} \, . \, {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$$

Équation 4-96

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{liai}} = -\mathbf{L}^T . {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\lambda}$$

Équation 4-97

Les dérivées partielles de **f** prennent donc forme suivante :

$$\left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}}\right|_{\left({}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(j)},{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\lambda}^{(j)}\right)} = -\left.\frac{\partial\, {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{int}}}{\partial \mathbf{U}}\right|_{\left({}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(j)},{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\lambda}^{(j)}\right)} = -\,{}^{t+\Delta t}_{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(j)}$$

Équation 4-98

$$\left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\right|_{\left({}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(j)},{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\lambda}^{(j)}\right)} = -\left.\frac{\partial\, {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{liai}}}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\right|_{\left({}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(j)},{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\lambda}^{(j)}\right)} = -\mathbf{L}^{T}$$

Équation 4-99

De plus, l'actualisation des déplacements et des multiplicateurs de Lagrange à chaque itération est donnée par :

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(j+1)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(j)} + \Delta\mathbf{U}^{(j+1)}$$

Équation 4-100

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\lambda}^{(j+1)} = {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\lambda}^{(j)} + \Delta\boldsymbol{\lambda}^{(j+1)}$$

Équation 4-101

En vue de déterminer les racines de $\mathbf{f}(\mathbf{U},\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}$, l'approximation par la formule de Taylor de $\mathbf{f}\left({}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(j+1)},{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\lambda}^{(j+1)}\right)$ est posée égale à zéro, ce qui permet d'écrire les équations d'équilibre en incluant l'Équation 4-95, l'Équation 4-98 et l'Équation 4-99 dans l'Équation 4-94 :

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{ext}} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{int}}^{(j)} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{liai}}^{(j)} - {}^{t+\Delta t}_{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(j)}\Delta\mathbf{U}^{(j+1)} - \mathbf{L}^{T}\Delta\boldsymbol{\lambda}^{(j+1)} = \mathbf{0}$$

Équation 4-102

Le système augmenté de la contrainte sur les déplacements imposés (Équation 4-59) prend alors la forme :

$$\begin{cases} {}^{t+\Delta t}_{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(j)}.\Delta\mathbf{U}^{(j+1)} + \mathbf{L}^{T}.\Delta\boldsymbol{\lambda}^{(j+1)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}_{\mathbf{es}}^{(j)} \\ \mathbf{L}.\Delta\mathbf{U}^{(j+1)} = {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\beta}^{(j+1)} \end{cases}$$

Équation 4-103

Nous appellerons par la suite la fonction **f :** résidu, désigné par le vecteur **Res** :

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{Res}^{(j)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{ext}} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{int}}^{(j)} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{liai}}^{(j)}$$

Équation 4-104

La méthode de Newton-Raphson amène à résoudre pour chaque itération *j*, le système linéaire en notation tensorielle (Équation 4-103 avec $j = j$-1) :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}_{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(j-1)} & \mathbf{L}^{\mathbf{T}} \\ \mathbf{L} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\widetilde{\mathbf{K}}} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{U}^{(j)} \\ \Delta\boldsymbol{\lambda}^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{Res}^{(j-1)} \\ {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\beta}^{(j)} \end{bmatrix}$$

Équation 4-105

tel que les valeurs des déplacements imposés respectent :

$$\begin{cases} {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\beta}^{(j)} = d\mathbf{U}_{\mathbf{imp}} & \text{si j} = 1 \\ {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\beta}^{(j)} = \mathbf{0} & \text{si j} > 1 \end{cases}$$

Équation 4-106

avec $d\mathbf{U}_{\mathbf{imp}}$ déplacements imposés sur l'incrément de chargement *i.*
Les vecteurs solutions $\Delta\mathbf{U}^{(j)}$ et $\Delta\boldsymbol{\lambda}^{(j)}$ servent à l'actualisation des déplacements et des multiplicateurs de Lagrange suivant le schéma itératif (Équation 4-100 et Équation 4-101).

Le schéma de Newton-Raphson est dit complet (« full Newton-Raphson ») si la matrice tangente du système $\widetilde{\mathbf{K}}$ est recalculée à chaque itération *j*. Ceci implique dans une discrétisation par éléments finis, l'actualisation à chaque itération de la matrice de rigidité tangente (**L** est constant), des contraintes et de toutes les variables d'état afin d'avoir une convergence quadratique.

Critère de convergence

Plusieurs critères de convergence existent, définis soit en énergie, en force ou en déplacement. Ils sont recalculés à la fin de chaque itération d'équilibre et la convergence est établie lorsqu'ils atteignent une valeur très petite définissant la précision souhaitée sur la solution *Tol*.
Nous choisissons ici un critère de convergence sur les résidus défini par :

$$\frac{\left\| {}^{t+\Delta t}\mathbf{Res}^{(j)} \right\|}{\max(\left\| {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{int}}{}^{(j)} \right\|, \left\| {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{ext}} \right\|, \left\| {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{liai}}{}^{(j)} \right\|)} \leq Tol$$

Équation 4-107

avec $\left\|\mathbf{V}\right\|$ = plus grande valeur des normes de chaque vecteur nodal composant **V** et *Tol* valeur très petite, choisie égale à 10^{-8} pour cette méthode de résolution.

Algorithme

L'application de la méthode de Newton-Raphson complète, à la résolution de l'équilibre de la membrane par éléments finis, peut être résumée par l'algorithme de la Figure 4-7.

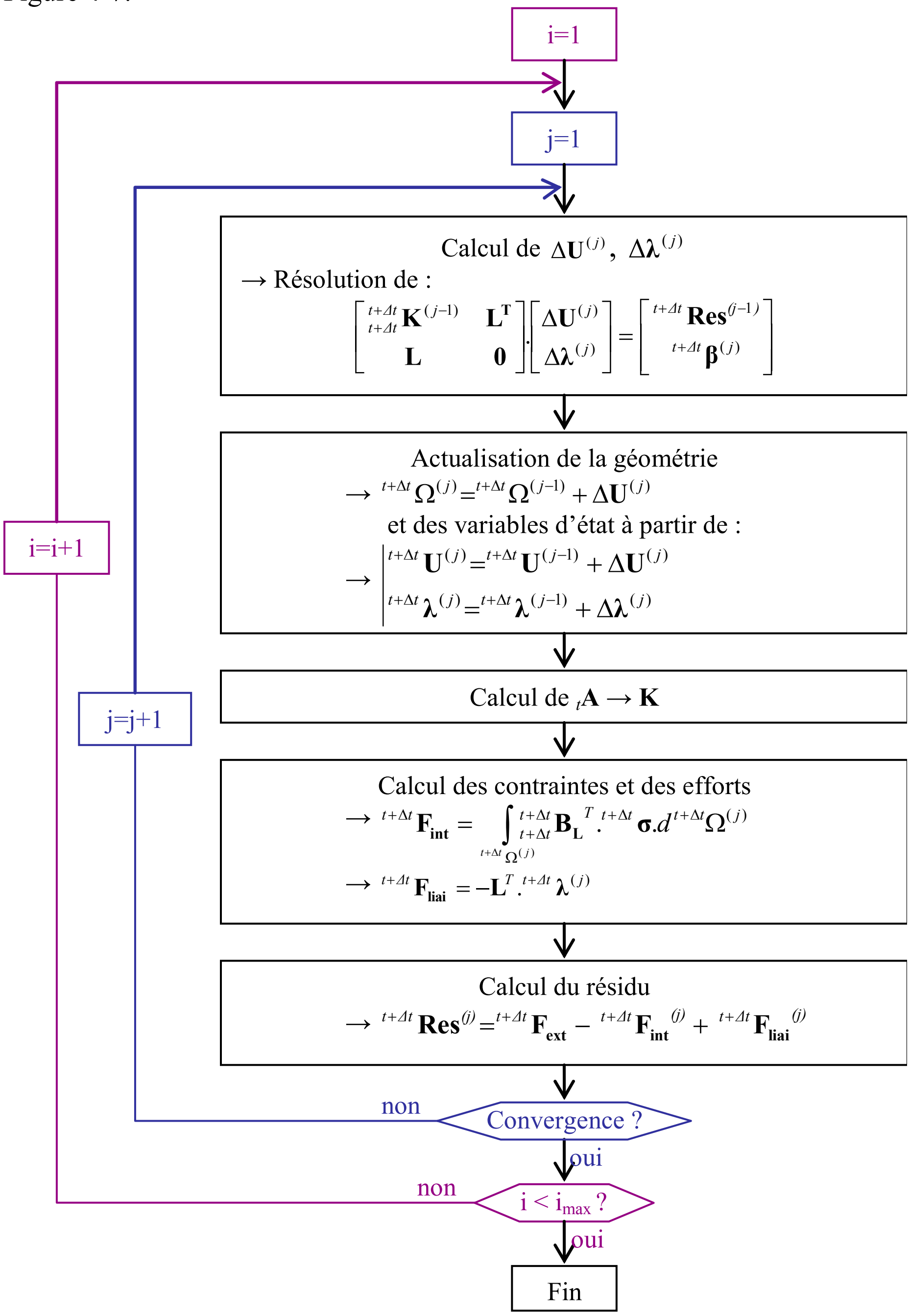


Figure 4-7 : Algorithme de résolution basée sur la méthode de Newton-Raphson complète.

Le détail des calculs de chaque étape de l'algorithme est présenté en annexe 6.

4.5.1.2. Tests de validation

Présentation générale des tests

Rappelons que notre objectif est de simuler la traction jusqu'à rupture d'une membrane fibreuse dont la répartition de fibres est hétérogène. Nous effectuons donc une série de tests élémentaires afin d'évaluer la robustesse du modèle et de la méthode de résolution dans le cas de grandes déformations entraînant la rupture de la membrane.

Les quatre tests choisis : la traction unidirectionnelle et bidirectionnelle, la rotation de solide rigide et le cisaillement pur, sont effectués sur une éprouvette carrée de 10mm de côté et 1mm d'épaisseur représentant la membrane fibreuse (cf Figures A7-1, A7-9, A7-11 et A7-13).

Cette éprouvette est dans un premier temps constituée d'un seul élément puis, dans un deuxième temps, elle est divisée en un certain nombre d'éléments afin de valider les processus d'assemblage du modèle.

Le chargement en déplacements imposés est tel que les niveaux de contraintes et de déformations maximales soient de l'ordre de ceux mesurés expérimentalement sur la peau humaine.

Concernant les paramètres du matériaux, nous avons défini (Équation 4-38) une loi de comportement pour la membrane comprenant des paramètres propres au comportement de la fibre a et b et d'autres propres à leur répartition μ_R et σ_R. La membrane étant constituée de fibres toutes identiques, les paramètres a et b ont donc des valeurs fixes en tout point de l'éprouvette. Ayant pour objectif d'appliquer ce modèle à la peau humaine, les valeurs utilisées pour les tests de validation ont été évalués à partir d'une courbe représentative d'un essai de traction dynamique sur la peau humaine (RHD14), ce qui donne :

$a = 0.5289$

$b = 14.1395$

Quant aux paramètres relatifs à la répartition des fibres μ_R et σ_R, ils permettent de modéliser une structure homogène ou hétérogène de fibres selon si leurs valeurs sont identiques sur tous les éléments de l'éprouvette ou différentes. Nous étudierons leur influence sur la réponse du modèle en testant une gamme de valeurs comprises entre 0 et $\pi/2$.

Précisons que les résultats de tous les tests sur la méthode de Newton-Raphson complète sont présentés plus en détails dans l'annexe 7.

Résultats sur un élément

Dans un premier temps, la série des quatre tests est réalisée sur un élément afin de comparer les valeurs de contraintes simulées (notées *Sef* ou σef) aux valeurs de contraintes théoriques (notées *Sth* ou σth), dans le domaine élastique puis jusqu'à rupture. Les contraintes dites théoriques sont calculées à partir de l'équation (Équation 4-38) et des déformations résultant de la simulation. Le modèle sera valide si, à chaque incrément de chargement, l'erreur relative $erreur_{ij}$ pour chaque composante S_{ij} (ou σ_{ij}) de la contrainte est suffisamment faible.

✓ *Test sur un élément dans le domaine élastique*

Les résultats de l'ensemble des tests attestent de la validité du modèle dans le sens où :

- L'erreur relative sur les contraintes reste très faible dans tous les cas. Seule la valeur dans la direction de traction est fortement affectée par les variations de taille d'incrément de chargement dans le sens où elle est de l'ordre de grandeur de celui-ci. Ceci nous permet de définir une taille optimale d'incrément de déplacement : $dU_{imp} = 10^{-3}$mm, correspondant à une valeur relativement faible pour l'erreur relative sur les contraintes et un temps de calcul correct.
- Les effets de symétrie sont donc bien respectés.
- Les conclusions quand à l'influence de l'orientation privilégiée des fibres μ_R sur les résultats semblent logiques : les niveaux de contraintes longitudinales sont maximales et la raideur plus importante quand l'orientation privilégiée des fibres est parallèle à la direction de traction.
- De même pour l'influence de l'écart type de la répartition des fibres σ_R : pour une même orientation privilégiée définie parallèle à la direction de traction, les niveaux de contraintes longitudinales et les valeurs de raideur augmentent quand σ_R diminue, ce qui parait cohérent car les fibres sont beaucoup plus concentrées dans cette direction donc apportent plus de résistance.
- La précision de l'intégrale numérique, utilisée pour le calcul des composantes du module tangent de comportement (${}_0\mathbf{A}$), n'influence pas vraiment la précision des résultats de la simulation, dans le domaine élastique. Cependant, chaque augmentation de $d\theta$ se solde par la même augmentation du temps de calcul. La valeur de $d\theta = 10^{-3}$ est alors raisonnable.

Seuls les tests de cisaillement pur apportent des conclusions controversées.

Dans le cas d'une traction suivant x_1, par exemple, un problème persiste sur la composante S_{11} des contraintes pour laquelle l'erreur relative reste de 10% même si l'incrément de chargement est de $dU_{imp} = 10^{-3}$mm.

✓ *Test sur un élément jusqu'à rupture*

Il est nécessaire ici de définir une valeur pour les deux derniers paramètres de la loi de comportement : la déformations critique $C_{11critique}$ et à la rupture $C_{11rupture}$ d'une fibre. Tout comme a et b, les valeurs des paramètres $C_{11critique}$ et $C_{11rupture}$ sont estimées à partir des résultats de l'essai dynamique RHD14 effectué sur la peau humaine :

$C_{11critique} = 1.36$

$C_{11rupture} = 1.41$

Les trois tests effectués jusqu'à rupture sont ceux générant des déformations, le test de rotation de solide rigide n'ayant aucun sens ici. La conclusion générale est qu'il est possible de simuler la rupture des fibres sur un élément en utilisant la méthode de Newton-Raphson complète mais le processus n'est pas très fiable. En effet, les erreurs relatives sur les contraintes restent faibles tant qu'aucune fibre n'est cassée. Par contre, une fois le phénomène de rupture amorcé, les valeurs de contraintes simulées deviennent nettement plus importantes que celles calculées théoriquement. De plus, une fois les premières fibres cassées, la simulation s'arête, ne permettant pas de suivre la propagation de la rupture.

Nous avons noté l'influence de certains paramètres après la rupture. Les résultats sont reproductibles dès que l'incrément de déplacement dU_{imp} est supérieur à 10^{-2}mm, la valeur choisie de $dU_{imp} = 10^{-3}$mm est donc toujours un bon compromis entre temps de calcul et précision. De plus, l'influence de la précision de l'intégration numérique (taille de $d\theta$) sur les résultats devient flagrante après la rupture. Choisir une trop grande valeur pour $d\theta$ aboutit à une courbe contrainte/déformation simulée en escaliers. La valeur de $d\theta = 10^{-3}$ est donc toujours satisfaisante, la courbe simulée est lisse.

Résultats sur plusieurs éléments

Dans un deuxième temps, l'éprouvette est discrétisée en plusieurs éléments mais garde une structure homogène de fibres, c'est-à-dire que les valeurs de μ_R et σ_R sont identiques à tous les points d'intégrations.

✓ *Test sur plusieurs éléments dans le domaine élastique*

Nous effectuons tout d'abord une validation de l'homogénéité spatiale des résultats en calculant l'écart relatif entre les valeurs extrêmes (de contraintes et de déformations) à chaque incrément de chargement. La structure étant homogène, les valeurs de déformations et de contraintes doivent être identiques à tous les points d'intégration. C'est le cas pour les deux niveaux de discrétisation (9 et 16 éléments) testés en traction unidirectionnelle et bidirectionnelle. La faible valeur d'erreur relative, de l'ordre de 10^{-4}, confirme que le processus d'assemblage du modèle est valide. Cependant, dès que les fibres prennent une orientation privilégiée différente de la direction de traction, apparaît le phénomène de cisaillement induisant des valeurs de contraintes et de déformations différentes à chaque point d'intégration.

Ensuite, les comparaisons, à certains points d'intégration, des valeurs simulées et théoriques de contraintes sont satisfaisantes à l'exception du cas des fibres majoritairement non parallèles à la direction de traction pour lequel les valeurs de contraintes simulées ne sont comparables aux valeurs théoriques que pour l'élément central.

✓ *Test sur plusieurs éléments jusqu'à rupture*

Si l'on discrétise l'éprouvette en plus de deux lignes ou deux colonnes d'éléments, le calcul ne peut pas se prolonger après la rupture des premières fibres. En effet, la méthode de résolution proposée par Newton et Raphson ne permet pas de modéliser le passage des pics, comme celui de la rupture du tissu sur notre courbe caractéristique.

4.5.2. Pilotage en longueur d'arc

4.5.2.1. Algorithme de résolution

Principe général

Le pilotage en longueur d'arc est une méthode de résolution itérative apportant des solutions au système d'équations (Équation 4-58 et Équation 4-59) tout comme la méthode précédente à une différence près : dans l'équation d'équilibre (Équation 4-58), l'effort externe à l'instant $t+\Delta t$ est le produit d'une partie constante $\mathbf{F_{ext}}$ et d'une partie variable ${}^{t+\Delta t}\alpha$ appelée facteur de charge. (Figure 4-8)

$$ {}^{t+\Delta t}\mathbf{F_{ext}} = {}^{t+\Delta t}\alpha.\mathbf{F_{ext}} $$

Équation 4-108

La méthode de Newton-Raphson énoncée ci-dessus est en fait un cas particulier de la méthode de longueur d'arc, où le facteur de charge est imposé et fixe sur toutes les itérations. Ceci entraîne, comme nous l'avons vu, qu'il est impossible d'obtenir des solutions aux points limites tels les 'pics' ou « snap-through », phénomène ayant lieu au moment de la rupture des fibres. C'est la raison pour laquelle les méthodes de longueur d'arc ont été développées, tout d'abord par Riks [Riks, 2004] puis Crisfield [Crisfield, 1991], afin de déterminer des solutions par la méthode des éléments finis après le passage des 'pics' dans le cas de loi de comportement adoucissantes.

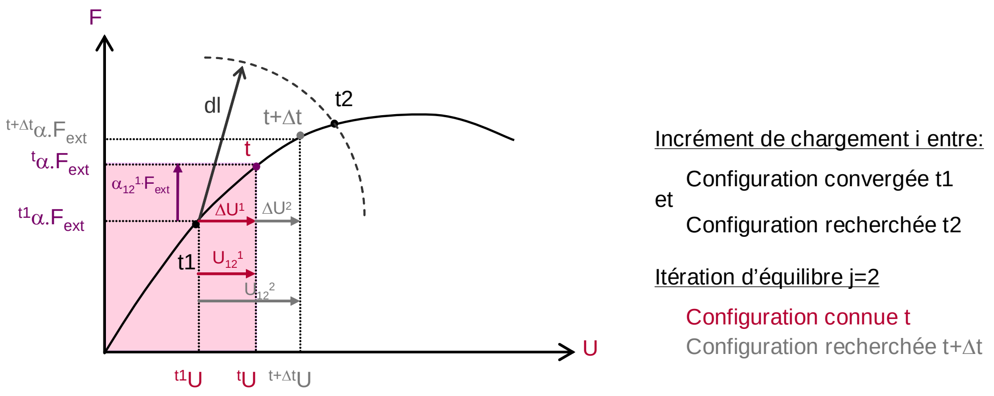


Figure 4-8 : Définition des variables et des configurations pour le pilotage en longueur d'arc.

Dans le système (Équation 4-58 et Équation 4-59) régissant l'équilibre de la membrane, le facteur de charge α constitue une inconnue supplémentaire portant à (n+1) le nombre d'inconnues pour n équations. La méthode proposée par Crisfield consiste à introduire le scalaire *l* appelé longueur d'arc définissant le rayon d'une sphère centrée sur le dernier point convergé. La solution recherchée doit donc se trouver à une longueur *l* du dernier point convergé. La définition générale (Équation 4-109) de la longueur d'arc sous forme incrémentale constitue l'équation manquante au système.

$$\Delta l^2 = (\Delta \mathbf{U}^T.\Delta \mathbf{U}) + \psi^2.\Delta\alpha^2.(\Delta \mathbf{F_{ext}}^T.\Delta \mathbf{F_{ext}})$$

Équation 4-109

Nous utiliserons la méthode dite de longueur d'arc cylindrique définie par Crisfield telle que $\psi = 0$ étant donné que les termes de chargement de l'Équation 4-109 ont peu d'effet sur des problèmes impliquant un nombre réaliste de variables.

Suivant le même schéma que précédemment, l'écriture du développement de Taylor à l'ordre 1 du système (Équation 4-58) augmenté de l'équation (Équation 4-59) aboutit à un système linéaire dont la matrice tangente est de grande taille et non symétrique, ce qui est pénalisant pour la résolution. Il convient donc d'utiliser la démarche proposée par Batoz et Dhatt [Crisfield, 1991, Mounajed, 2001] consistant, sur un incrément de chargement donné, à différencier le traitement de la première itération d'équilibre des suivantes.

Revenons donc aux équations d'équilibre de la membrane (Équation 4-58) à l'instant *t+Δt*. L'ajout d'un facteur de charge suivant la définition (Équation 4-108) permet d'écrire l'Équation 4-58 de la façon suivante:

$$
\begin{aligned}
&{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{ext}} \quad - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{int}} \quad + {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{liai}} \quad = \mathbf{0}\\
&\Leftrightarrow \mathbf{F}_{\mathbf{ext}}({}^{t+\Delta t}\alpha^{(j-1)} + \Delta\alpha^{(j)}) - ({}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{int}}{}^{(j-1)} + \mathbf{K}.\Delta\mathbf{U}^{(j)}) - \mathbf{L}_B{}^T({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\lambda}_B{}^{(j-1)} + \Delta\boldsymbol{\lambda}_B{}^{(j)}) = \mathbf{0}\\
&\Leftrightarrow \mathbf{K}.\Delta\mathbf{U}^{(j)} + \mathbf{L}_B{}^T.\Delta\boldsymbol{\lambda}_B{}^{(j)} = \underbrace{{}^{t+\Delta t}\alpha^{(j-1)}.\mathbf{F}_{\mathbf{ext}} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{int}}{}^{(j-1)} - \mathbf{L}_B{}^T.{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\lambda}_B{}^{(j-1)}}_{{}^{t+\Delta t}\mathbf{Res}^{(j-1)}} + \Delta\alpha^{(j)}.\mathbf{F}_{\mathbf{ext}}
\end{aligned}
$$

Équation 4-110

avec $\Delta\mathbf{U}$, $\Delta\lambda_B$ et $\Delta\alpha$ inconnues du problème.

Nous appellerons $\mathbf{L}_B$ la matrice contenant la réduction aux nœuds à déplacement imposé nul, c'est-à-dire la partie de la matrice $\mathbf{L}$ relative aux nœuds bloqués d'où sont exclus les noeuds supportant le chargement. λ_B représente le vecteur des forces nodales correspondantes.

Les incréments de déplacements et des multiplicateurs de Lagrange [Lorentz, 2004] sont décomposés en une partie linéaire et une partie non linéaire écrite en fonction de l'incrément du facteur de charge :

$$
\begin{cases}
\Delta\mathbf{U}^{(j)} = \Delta\mathbf{U}_{\mathbf{NL}}{}^{(j)} + \Delta\alpha^{(j)}.\Delta\mathbf{U}_{\mathbf{L}}\\
\Delta\boldsymbol{\lambda}_B{}^{(j)} = \Delta\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{NL}B}{}^{(j)} + \Delta\alpha^{(j)}.\Delta\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{L}B}
\end{cases}
$$

Équation 4-111

La combinaison de l'Équation 4-110 et de l'Équation 4-111 donne les nouvelles équations d'équilibre à satisfaire :

$$
\begin{aligned}
({}_i^i\mathbf{K}.\Delta\mathbf{U}_{\mathbf{NL}}{}^{(j)} + \mathbf{L}_B{}^T.\Delta\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{NL}B}{}^{(j)}) + \Delta\alpha^{(j)}({}_i^i\mathbf{K}.\Delta\mathbf{U}_{\mathbf{L}} + \mathbf{L}_B{}^T.\Delta\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{L}B})&\\
= {}^{t+\Delta t}\mathbf{Res}^{(j-1)} + \Delta\alpha^{(j)}.\mathbf{F}_{\mathbf{ext}}&
\end{aligned}
$$

Équation 4-112

auxquelles s'ajoute la condition cinématique sur les déplacements imposées donnée par l'Équation 4-59.

Première itération d'équilibre – Phase de prédiction

Le traitement de la première itération d'équilibre j=1 permet d'évaluer les prédicteurs linéaires $\Delta\mathbf{U}_{\mathbf{L}}$ et $\Delta\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{L}B}$. Pour cela, il suffit de résoudre le système linéaire de l'Équation 4-113 obtenu en extrayant de l'Équation 4-112 la partie relative aux incréments linéaires.

$$
\begin{bmatrix} {}_i^i\mathbf{K} & \mathbf{L}_B{}^T \\ \mathbf{L}_B & \mathbf{0} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{U}_{\mathbf{L}} \\ \Delta\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{L}B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\mathbf{ext}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}
$$

Équation 4-113

Cette première itération d'équilibre permet également de donner une estimation sur la valeur de l'incrément de chargement. $\Delta\alpha$ est choisi de la forme (Équation 4-114) proposée par Crisfield [Crisfield, 1991], son signe est positif au début du calcul (*s* est fixé égal à +1) et il deviendra négatif (*s* = -1) au passage d'un 'pic'. L'Équation 4-114 fait intervenir la valeur de la longueur d'arc sur un incrément de chargement *dl*.

$$\Delta\alpha = \pm\, dl \Big/ \sqrt{\Delta\mathbf{U_L}^T.\Delta\mathbf{U_L}} = s\, dl \Big/ \sqrt{\Delta\mathbf{U_L}^T.\Delta\mathbf{U_L}}$$

Équation 4-114

La valeur de *s* sera de +1 tant que toutes les valeurs de la matrice diagonale **D** sont positives, et *s* passera à -1 dès qu'au moins une valeur de **D** deviendra négative. **D** étant la matrice diagonale issue de la factorisation de Choleski de **K** telle que $\mathbf{K} = \mathbf{L}^\mathbf{T}.\mathbf{D}.\mathbf{L}$, avec **L** matrice triangulaire supérieure. [Mounajed, 2001]
Il en résulte une première approximation des solutions de l'équation d'équilibre (Équation 4-112) telle que :

$$\begin{cases} \Delta\mathbf{U}^{(1)} = \Delta\alpha^{(1)}.\Delta\mathbf{U_L} \\ \Delta\boldsymbol{\lambda}_B^{(1)} = \Delta\alpha^{(1)}.\Delta\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{L}B} \end{cases}$$

Équation 4-115

Remarquons que la matrice de rigidité tangente (Équation 4-113) est calculée à la première itération et reste constante sur tout l'incrément de chargement *i*, d'où la notation ${}^i_i\mathbf{K}$. Cependant, étant obtenue à partir du module tangent de comportement, elle prendra, comme lui, des valeurs différentes dans le cas de la charge ou de la décharge (cf § 4.4.2). Pour cela, une première estimation des prédicteurs linéaires est effectuée avec la matrice ${}^i_i\mathbf{K}$ calculée en début d'incrément de chargement (instant *t1*). A l'aide du ΔU obtenu, un test est effectué à chaque point de Gauss afin de déterminer s'il a été soumis à de la charge ou de la décharge entre les instants *t1* (état convergé de l'incrément précédent *i*-1) et $t+\Delta t$ (actuel *j*=1).

Si au moins un point de Gauss est en décharge, le module tangent de comportement est recalculé pour ce point de Gauss avec la méthode correspondant à la décharge (cf §4.4.2) et les valeurs des variables à l'instant *t1*. La matrice ${}^i_i\mathbf{K}$ est ensuite re-assemblée de telle sorte que les directions de recherche des solutions soient correctes à tous les points de Gauss et la phase de prédiction est re-exécutée dans son intégralité apportant la valeur définitive des prédicteurs linéaires. Le test n'est effectué qu'une seule fois par incrément de chargement, à la deuxième estimation des prédicteurs linéaires, l'algorithme poursuit sur la deuxième itération d'équilibre avec pour raideur tangente, la deuxième matrice.

Si le résultat du test donne tous les points de Gauss en charge, le passage à l'itération d'équilibre suivante se fait de manière classique après calcul du résidu (cf Figure 4-9).

De même, les prédicteurs linéaires sont déterminés uniquement à l'itération j=1.

Itérations d'équilibre suivantes – Phase de correction

Après avoir donné une estimation des solutions $\Delta\alpha$, $\Delta\mathbf{U}$ et $\Delta\boldsymbol{\lambda}_B$, les itérations suivantes (j>1) constituent une phase de correction permettant d'affiner les valeurs de ces solutions. Des correcteurs non linéaires sont donc recalculés à chaque itération jusqu'à convergence du problème. En termes de déplacements et de multiplicateurs de Lagrange, $\Delta\mathbf{U}_{\mathbf{NL}}$ et $\Delta\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{NL}B}$ sont déterminés en résolvant le système de l'Équation 4-116, constitué de la partie relative aux incréments non linéaires de l'Équation 4-112.

$$\begin{bmatrix} {}_i^i\mathbf{K} & \mathbf{L}_B{}^T \\ \mathbf{L}_B & \mathbf{0} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{U}_{\mathbf{NL}}{}^{(j)} \\ \Delta\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{NL}B}{}^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{Res}^{(j-1)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Équation 4-116

avec ${}^{t+\Delta t}\mathbf{Res}^{(j-1)} = {}^{t+\Delta t}\alpha^{(j-1)}.\mathbf{F}_{\mathbf{ext}} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{int}}{}^{(j-1)} - \mathbf{L}_B{}^T.{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\lambda}_B{}^{(j-1)}$

Il faut également calculer le correcteur sur la valeur du facteur de charge $\Delta\alpha$. Pour cela, si nous utilisons la définition de la longueur d'arc (Équation 4-109) pour le calcul de $\Delta\alpha$, nous sommes amenés à résoudre un polynôme du second degré dont les racines sont souvent complexes. Afin de simplifier la résolution, nous posons la définition suivante [Combescure, 1986] :

$$dl^2 = {}^{(i-1)}\mathbf{U}_{\mathbf{12}}{}^T.\mathbf{U}_{\mathbf{12}}{}^{(j)}$$

Équation 4-117

L'expression de l'Équation 4-117 développée est alors une équation du premier degré en $\Delta\alpha$:

$$\Leftrightarrow dl^2 = {}^{(i-1)}\mathbf{U}_{12}{}^T.(\mathbf{U}_{12}{}^{(j-1)} + \Delta\mathbf{U}^{(j)})$$
$$\Leftrightarrow dl^2 = {}^{(i-1)}\mathbf{U}_{12}{}^T.(\mathbf{U}_{12}{}^{(j-1)} + \Delta\mathbf{U}_{\mathbf{NL}}{}^{(j)} + \Delta\alpha^{(j)}.\Delta\mathbf{U}_{\mathbf{L}})$$
$$\Leftrightarrow \Delta\alpha^{(j)} = \frac{dl^2 - {}^{(i-1)}\mathbf{U}_{12}{}^T.(\mathbf{U}_{12}{}^{(j-1)} + \Delta\mathbf{U}_{\mathbf{NL}}{}^{(j)})}{{}^{(i-1)}\mathbf{U}_{12}{}^T.\Delta\mathbf{U}_{\mathbf{L}}}$$

Équation 4-118

Cette définition est utilisée dans le cas où tous les points d'intégration de Gauss de la membrane sont considérés en charge. Si au moins un d'entre eux subit une décharge, nous utilisons l'expression de la longueur d'arc donnée par l'Équation 4-119 faisant intervenir la prédiction sur le déplacement de la première itération d'équilibre, ce qui permet d'avoir la bonne direction de recherche.

$$dl^2 = \mathbf{U_{12}}^{(j-1)^T}.\mathbf{U_{12}}^{(j)}$$

Équation 4-119

L'équation du premier degré à résoudre pour l'obtention de $\Delta\alpha$ devient alors :

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow dl^2 = \mathbf{U}_{12}{}^{(j-1)^T}.(\mathbf{U}_{12}{}^{(j-1)} + \Delta\mathbf{U}^{(j)}) \\
&\Leftrightarrow dl^2 = \mathbf{U}_{12}{}^{(j-1)^T}.(\mathbf{U}_{12}{}^{(j-1)} + \Delta\mathbf{U_{NL}}^{(j)} + \Delta\alpha^{(j)}.\Delta\mathbf{U_L}) \\
&\Leftrightarrow \Delta\alpha^{(j)} = \frac{dl^2 - \mathbf{U}_{12}{}^{(j-1)^T}.(\mathbf{U}_{12}{}^{(j-1)} + \Delta\mathbf{U_{NL}}^{(j)})}{\mathbf{U}_{12}{}^{(j-1)^T}.\Delta\mathbf{U_L}}
\end{aligned}$$

Équation 4-120

L’inconvénient de cette dernière expression est qu’elle impose d’augmenter la valeur maximale du critère de convergence à $Tol = 10^{-7}$.

Actualisations

De manière générale pour toutes les itérations, l’actualisation des déplacements, des multiplicateurs de Lagrange et du facteur de charge est donnée par :

$${}^{t+\Delta t}\alpha^{(j)} = {}^{t+\Delta t}\alpha^{(j-1)} + \Delta\alpha^{(j)}$$

Équation 4-121

$$\begin{aligned}
&{}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(j)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(j-1)} + \Delta\mathbf{U}^{(j)} \\
&{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\lambda}_B{}^{(j)} = {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\lambda}_B{}^{(j-1)} + \Delta\boldsymbol{\lambda}_B{}^{(j)}
\end{aligned}$$

Équation 4-122

De plus, dans le but d’optimiser les temps de calcul, la valeur de la longueur d’arc sur l'incrément est actualisée en fin d’incrément de chargement suivant la technique préconisée par Crisfield basée sur la relation suivante :

$${}^{(i)}dl = {}^{(i-1)}dl.\sqrt{\frac{j_{convergé}}{j_{souhaité}}}$$

Équation 4-123

L'Équation 4-123 donne la valeur de la nouvelle longueur d’arc en fonction de celle de l'incrément précédent ${}^{(i-1)}dl$, du nombre d'itérations d'équilibre $j_{convergé}$ de l'incrément (i-1) et du nombre d'itérations maximales souhaitées $j_{souhaité}$. Il est cependant utile de borner l'évolution de la longueur d'arc :

$$dl_{\min} \leq \frac{{}^{(i)}dl}{{}^{(1)}dl} \leq dl_{\max}$$

Équation 4-124

Premier incrément de chargement - Amorçage de la méthode

Il est enfin important de noter que cette méthode de résolution nécessite d'être amorcé. En effet, le premier incrément de chargement (i=1) sert à initialiser dl et ${}^{t+\Delta t}\,\mathbf{F_{ext}}$. Il est donc choisi suffisamment petit pour qu'il n'y ait pas de 'pic' et qu'une solution puisse être déterminée par une autre méthode, soit la méthode de Newton-Raphson complète.

La longueur d'arc pour le deuxième incrément est donc définie par l'Équation 4-125 en fonction du déplacement à la fin du premier incrément de chargement :

$${}^{(i=2)}dl = \sqrt{{}^{t+\Delta t}_{\;\;0}\mathbf{U}^T . {}^{t+\Delta t}_{\;\;0}\mathbf{U}}$$

Équation 4-125

La valeur fixe de l'effort externe correspond à l'effort nécessaire pour créer un déplacement équivalent au déplacement imposé dans le premier incrément de chargement, soit :

$$\mathbf{F_{ext}} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F_{int}} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F_{liai\mathit{B}}} \text{ avec } {}^{t+\Delta t}\mathbf{F_{liai\mathit{B}}} = -\mathbf{L}_B{}^T . {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\lambda}_B$$

Équation 4-126

A la fin du premier incrément, ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F_{ext}} = {}^{t+\Delta t}\alpha.\mathbf{F_{ext}} = \mathbf{F_{ext}}$ ce qui implique que ${}^{t+\Delta t}\alpha$=1.

Le critère de convergence utilisé pour cette méthode est le même que celui défini précédemment dans l'algorithme de Newton-Raphson complet.

Algorithme

L'utilisation de la méthode de longueur d'arc pour la résolution des équations d'équilibre de la membrane se découpe en plusieurs étapes qui peuvent être résumées par l'algorithme de la Figure 4-9.

Les détails des calculs sont une fois de plus donnés en annexe 6.

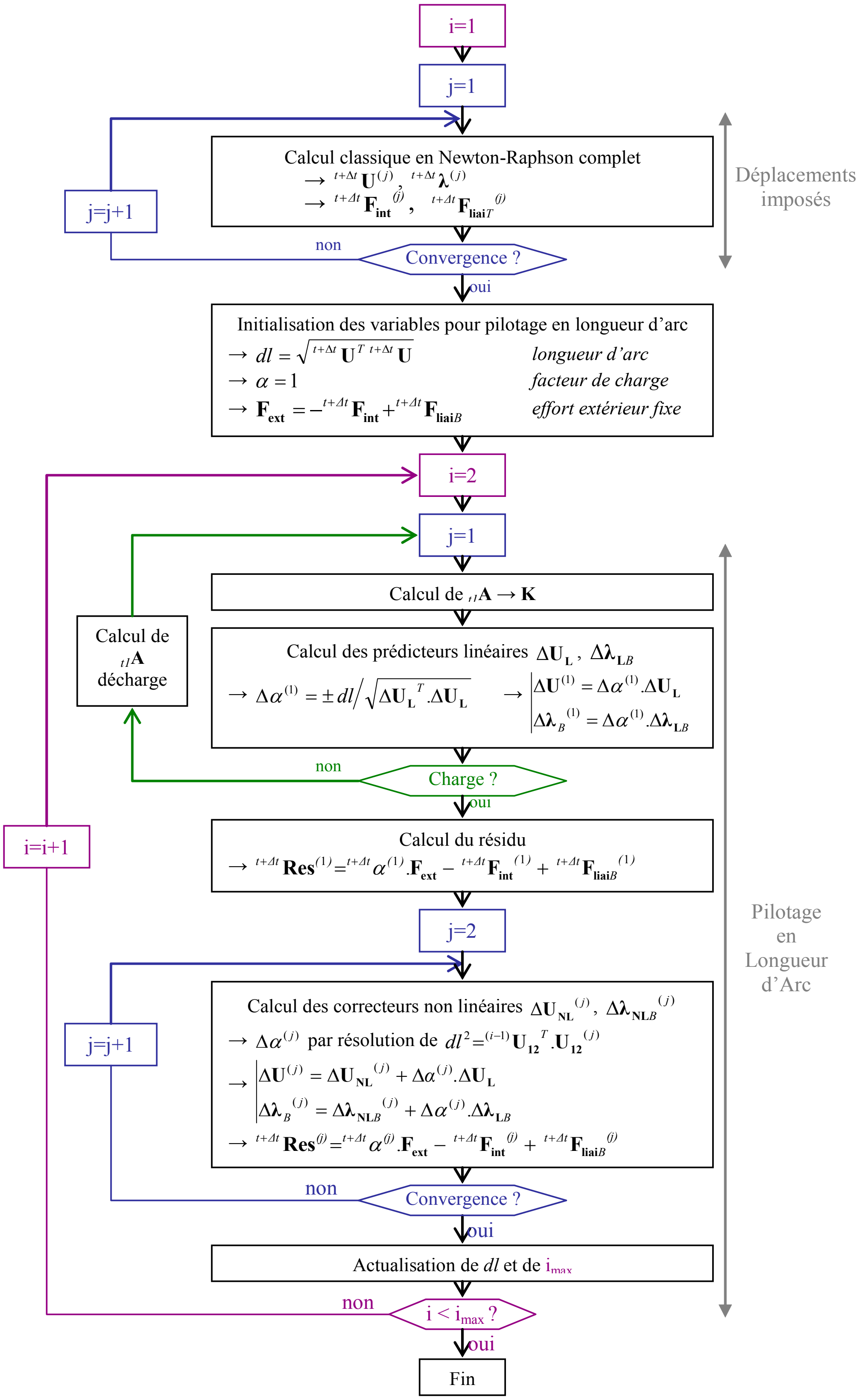


Figure 4-9 : Algorithme de résolution basée sur la méthode du pilotage par longueur d'arc.

4.5.2.2. Tests de validation

Présentation générale des tests

Toutes les hypothèses des tests effectués sur la méthode de Newton-Raphson complète sont valables ici. A ceci s'ajoute une combinaison de paramètres propres à la méthode de pilotage par longueur d'arc : les valeurs minimales et maximales de la longueur d'arc (dl_{min} et dl_{max}) et le nombre d'itérations d'équilibre souhaitées ($j_{souhaitée}$). Une combinaison satisfaisante de ces paramètres va donc être déterminée.

Par ailleurs, nous nous intéresserons plus particulièrement aux tests jusqu'à rupture et sur plusieurs éléments, afin de justifier l'emploi de cette méthode. Précisons que les résultats de tous les tests sur la méthode de pilotage par longueur d'arc sont présentés en détails dans l'annexe 8.

Résultats dans le domaine élastique

Dans un premier temps, nous effectuons des tests semblables aux précédents (méthode de Newton-Raphon complète), dans le domaine élastique, afin de s'assurer de la précision de cette nouvelle méthode. Nous comparerons donc les valeurs des contraintes simulées aux théoriques dans le cas d'une membrane discrétisée en un élément et neuf éléments.

✓ *Test sur un élément dans le domaine élastique*

Une configuration (dl_{min} = 0.005mm et dl_{max} = 0.01mm - $j_{souhaitée}$ = 6 - $\mu_R = \pi/2$ et $\sigma_R = \pi/6$ - $d\theta = 0.001$) est testée sous trois types de chargement (traction unidirectionnelle et bidirectionnelle et cisaillement pur) dans le domaine élastique afin de vérifier que l'erreur relative sur les valeurs de contraintes simulées reste faible. A tests et niveaux de contrainte identiques, nous retrouvons les résultats des tests sur la méthode de Newton-Raphon complète. L'erreur relative sur les valeurs de contraintes est de l'ordre de grandeur de la valeur de la longueur d'arc en traction unidirectionnelle (précédemment elle était égale à la valeur de l'incrément de chargement, ce qui est équivalent) et elle est bien inférieure sur les autres tests.

Dans le cas du cisaillement pur cependant, persiste l'erreur de 10% environ sur la contrainte dans la direction de traction.

✓ *Test sur 9 éléments dans le domaine élastique – membrane homogène*

Le test de la traction unidirectionnelle nous permet de vérifier ici l'homogénéité des valeurs de déformation et de contrainte sur la membrane, les écarts relatifs entre ces valeurs restent du même ordre de grandeur que celui des tests sur la méthode de Newton-Raphon complète. L'erreur relative sur les valeurs de contrainte est elle nettement inférieure ici, elle ne dépasse pas 10^{-3} alors que la valeur minimale de la longueur d'arc est de 5.10^{-3}mm. Ces résultats apparaissent donc très satisfaisants.

Résultats jusqu'à rupture

Dans un deuxième temps, les tests de traction jusqu'à rupture sont réalisés dans le but :

- de simuler le passage du « pic » et donc la dernière partie de la caractéristique contrainte/déformation, partie correspondant à la rupture progressive des fibres,
- d'observer le phénomène de propagation de la rupture, pour cela nous choisissons de tracer l'évolution du rapport ${}^{t}Q_f / {}^{0}Q_f$ (quantité de fibres instantanée / quantité de fibres initiale) appelé quantité relative de fibres qui donne une indication sur le niveau « d'endommagement » d'un point de Gauss.

✓ *Test sur un élément jusqu'à rupture*

Le test de traction unidirectionnelle jusqu'à rupture sur un élément va nous permettre de déterminer une combinaison de paramètres (dl_{min}, dl_{max}, $d\theta$ et $j_{souhaitée}$) telle que la simulation se poursuive après l'amorce de la rupture. Il faut entre autre que les dimensions de $d\theta$ (précision sur l'intégrale numérique) et dl_{min} (longueur d'arc minimale) soient compatibles. Nous choisissons $d\theta = 0.001$ vu que des valeurs inférieures de $d\theta$ n'apportent pas une précision satisfaisante sur les résultats. Dans ce cas là, une trop petite valeur de dl_{min} ne permet pas de modéliser l'après rupture (cf Figure A8-1).
Les valeurs sélectionnées pour les simulations suivantes sont donc :

- $dl_{min} = 0.05$mm et $dl_{max} = 0.1$mm
- $j_{souhaitée} = 5$
- $d\theta = 0.001$

La précision des résultats est vérifiée sur une configuration ($dl_{min} = 0.05$mm et $dl_{max} = 0.1$mm - $j_{souhaitée} = 5$ - $\mu_R = \pi/2$ et $\sigma_R = \pi/6$ - $d\theta = 0.001$). L'erreur relative sur les valeurs de contraintes simulées est de 2.10^{-2} juste avant l'amorce de rupture (à niveaux de contrainte équivalents aux tests dans le domaine élastique), ce qui est tout à fait correct compte tenu de la longueur d'arc minimale de 0.05mm.

La valeur du taux d'orientation des fibres influence la simulation de la même façon qu'avec la méthode de Newton-Raphson complète.

✓ *Test sur 9 éléments jusqu'à rupture – membrane homogène*

La traction unidirectionnelle jusqu'à rupture d'une membrane homogène discrétisée en neuf éléments apporte des résultats satisfaisants :

- Les champs de déformation et de contraintes sont homogènes ainsi que la répartition des quantités relatives de fibres aux points de Gauss (Figure 4-10).

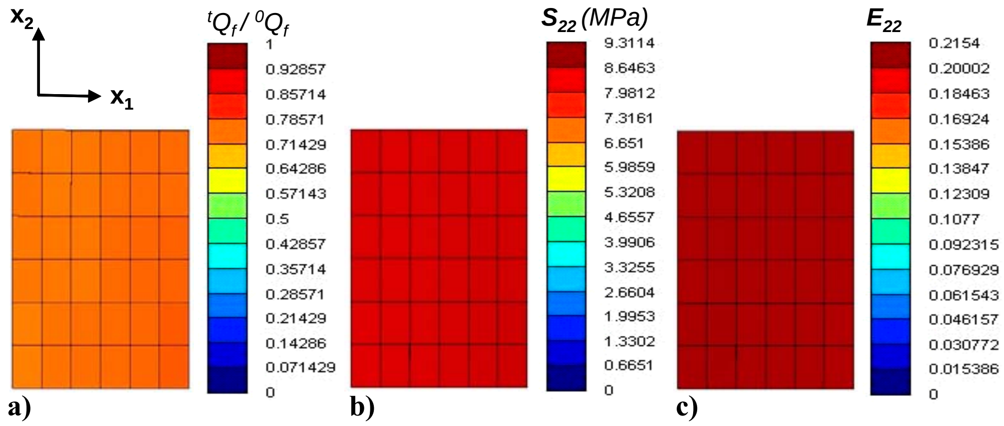


Figure 4-10 : Quantité relative de fibres a), composante S_{22} des contraintes de Piola-Kirchhoff II b) et composante E_{22} des déformations de Green-Lagrange c) aux points de Gauss d'une membrane homogène (10x10x1mm) à 9 éléments en fin de traction (a = 0.5289, b = 14.1395, C11c = 1.36, C11r = 1.41, $\mu_R = \pi/2$, $\sigma_R = \pi/6$).

- Les valeurs de contraintes simulées sont correctes, la courbe contrainte/déformation se superpose parfaitement à celle du même test (dl_{min} = 0.05mm et dl_{max} = 0.1mm - $j_{souhaitée\ e}$ = 5 - $\mu_R = \pi/2$ et $\sigma_R = \pi/6$ - $d\theta$ = 0.001), réalisé sur un élément (Figure 4-11).

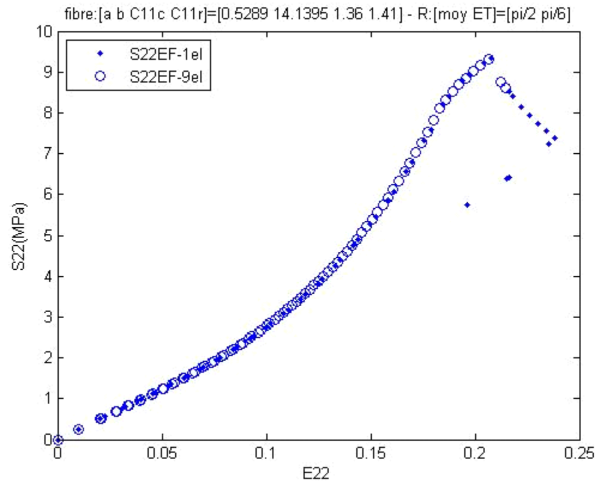


Figure 4-11 : Évolution de la composante S_{22} des contraintes de Piola-Kirchhoff II en fonction de la composante E_{22} des déformations de Green-Lagrange d'une membrane homogène (10x10x1mm) discrétisée en 1 ou 9 éléments.

Cependant, nous remarquons que la simulation se poursuit moins longtemps après l'amorce de rupture.

✓ *Test sur 9 éléments jusqu'à rupture – membrane hétérogène*

Le but est ici de construire une "pseudo" membrane hétérogène afin de mettre en évidence un début de propagation de la rupture. Pour cela, sur la membrane homogène précédente (où $\mu_R = \pi/2$ sur tous les éléments), nous ajoutons un élément (cas a de la Figure 4-12) ou plusieurs éléments (cas b de la Figure 4-12) dits "faibles", dont la valeur de μ_R est différente de telle sorte que la rupture s'initie plus rapidement sur ce ou ces éléments. Tous les autres paramètres restent identiques aux tests précédents et homogènes sur la membrane.

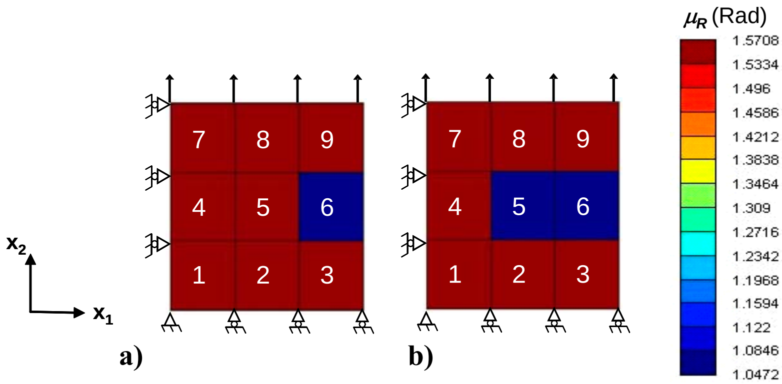


Figure 4-12 : Valeurs de μ_R sur chaque élément d'une membrane pseudo hétérogène (10x10x1mm) à 9 éléments (numérotés en blanc) a) élément 6: $\mu_R = \pi/3$ et b) éléments 5 et 6: $\mu_R = \pi/3$.

1 élément "faible" à $\mu_R = \pi/3$:

La répartition des orientations privilégiées des fibres μ_R est celle donnée par la Figure 4-12-a à savoir que $\mu_R = \pi/2$ sur tous les éléments sauf sur l'élément 6 où $\mu_R = \pi/3$. Dans cette configuration, nous obtenons l'effet escompté, c'est-à-dire des déformations plus importantes sur l'élément dit "faible" entraînant une rupture plus rapide à cet endroit là (Figure 4-13).

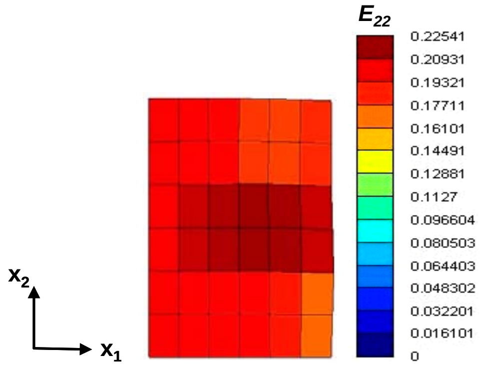


Figure 4-13 : Composante E_{22} des déformations de Green-Lagrange aux points de Gauss d'une membrane pseudo hétérogène (cas a $\mu_R = \pi/3$) en fin de traction (10x10x1mm 9 éléments, a = 0.5289, b = 14.1395, C11c = 1.36, C11r = 1.41, $\sigma_R = \pi/6$).

En effet, la quantité relative de fibres diminue tout d'abord sur cet élément, puis les éléments voisins sont peu à peu contaminés au fur et à mesure des incréments de chargement (Figure 4-14). Ce phénomène s'apparente un début de propagation de la rupture. Parallèlement nous observons des valeurs de déformations plus importantes sur cette ligne de rupture (Figure 4-13), ce qui est cohérent puisse que moins de fibres résistent, donc la raideur est plus faible ce qui entraîne à effort imposé constant plus de déformation.

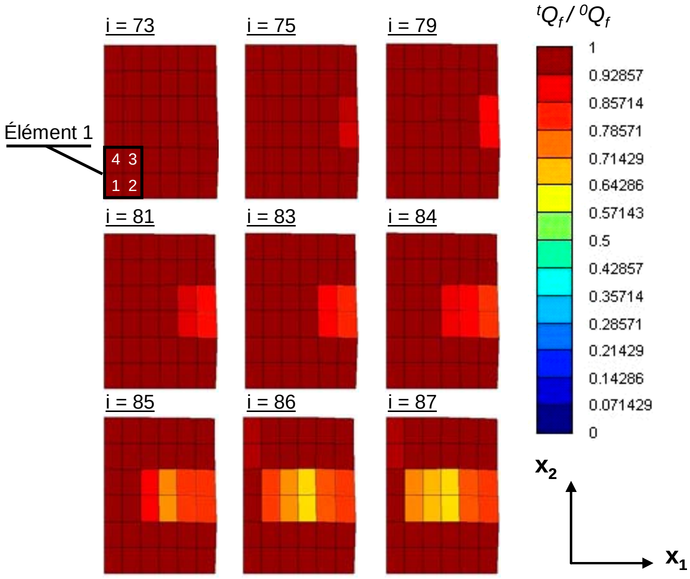


Figure 4-14 : Évolution de la quantité relative de fibres aux points de Gauss (numérotés en blanc sur l'élément 1) d'une membrane pseudo hétérogène (cas a $\mu_R = \pi/3$) entre les

incréments i = 73 et i_{max} = 87 (10x10x1mm 9 éléments, a = 0.5289, b = 14.1395, C11c = 1.36, C11r = 1.41, $\sigma_R = \pi/6$).

Enfin, les courbes contrainte/déformation obtenues (Figure 4-15) sont en accord avec les observations précédentes : l'élément 5, qui a la plus faible quantité relative de fibres est complètement cassé, sur l'élément 4, dont la quantité relative de fibre est supérieure, la rupture s'amorce juste et les autres éléments, à l'image de l'élément 2, sont soumis à de la compression (décharge).

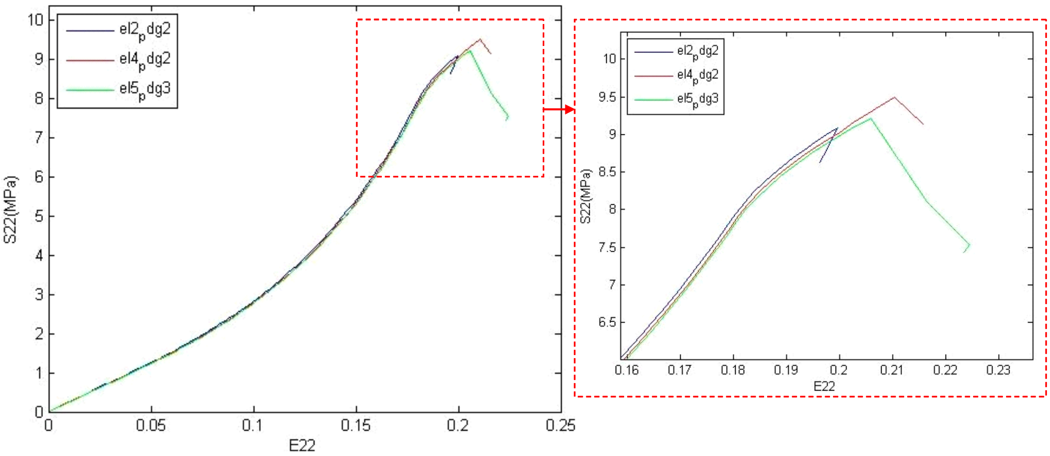


Figure 4-15 : Évolution de la composante S_{22} des contraintes de Piola-Kirchhoff II en fonction de la composante E_{22} des déformations de Green-Lagrange à certains points de Gauss d'une membrane pseudo hétérogène (cas a $\mu_R = \pi/3$) (10x10x1mm 9 éléments, a = 0.5289, b = 14.1395, C11c = 1.36, C11r = 1.41, $\sigma_R = \pi/6$).

2 éléments "faibles" à $\mu_R = \pi/3$:

Si le même test est réalisé avec cette fois-ci un deuxième élément dit « faible » (l'élément 5) telle que la répartition des orientations privilégiées des fibres μ_R soit celle de la Figure 4-12-b, la rupture se propage plus loin, jusqu'à l'autre extrémité de l'éprouvette (Figure 4-16-a) de même que les valeurs élevées de déformations touchent tous les éléments sur la largeur de l'éprouvette (Figure 4-16-b).

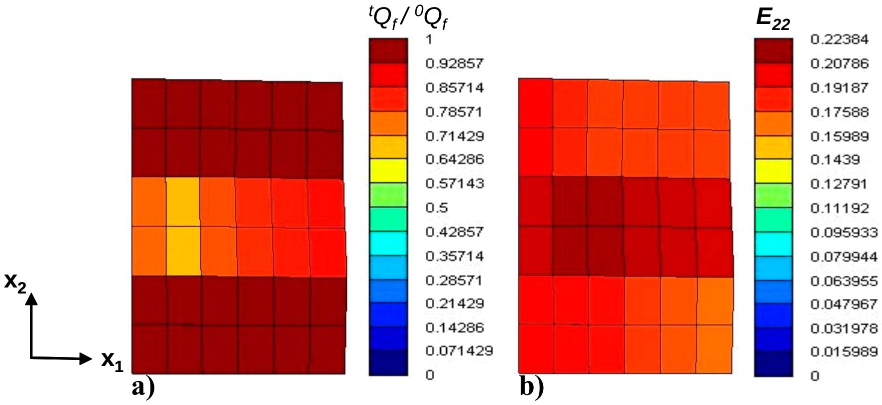


Figure 4-16 : Quantité relative de fibres a) et composante E_{22} des déformations de Green-Lagrange b) aux points de Gauss d'une membrane pseudo hétérogène (cas b $\mu_R = \pi/3$) en fin de traction (10x10x1mm 9 éléments, a = 0.5289, b = 14.1395, C11c = 1.36, C11r = 1.41, $\sigma_R = \pi/6$).

1 élément "faible" à $\mu_R = \pi/12$:

Enfin revenons au cas à un élément dit "faible" (Figure 4-12-a) mais dont la valeur de l'orientation privilégiée des fibres est $\mu_R = \pi/12$.

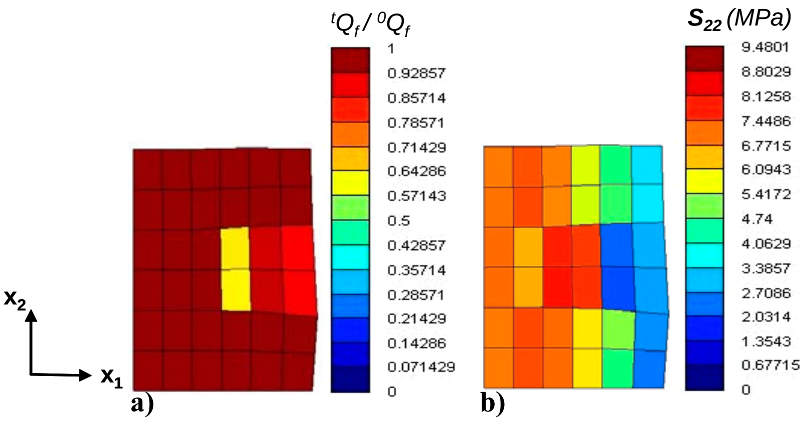


Figure 4-17 : Quantité relative de fibres a) et composante S_{22} des contraintes de Piola-Kirchhoff II b) aux points de Gauss d'une membrane pseudo hétérogène (cas b $\mu_R = \pi/12$) en fin de traction (10x10x1mm 9 éléments, a = 0.5289, b = 14.1395, C11c = 1.36, C11r = 1.41, $\sigma_R = \pi/6$).

La rupture se propage sur moins d'élément (Figure 4-17-a), car étant donnée l'importance des déformations, notamment en cisaillement (Figure 4-18-c), au niveau de l'élément « faible » (élément 6), les éléments voisins touchés (élément 5) voient leurs quantités relatives de fibres diminuer très rapidement, elles sont de l'ordre de 40% de la quantité initiale au dernier incrément de chargement i_{max} et le calcul s'arête donc.

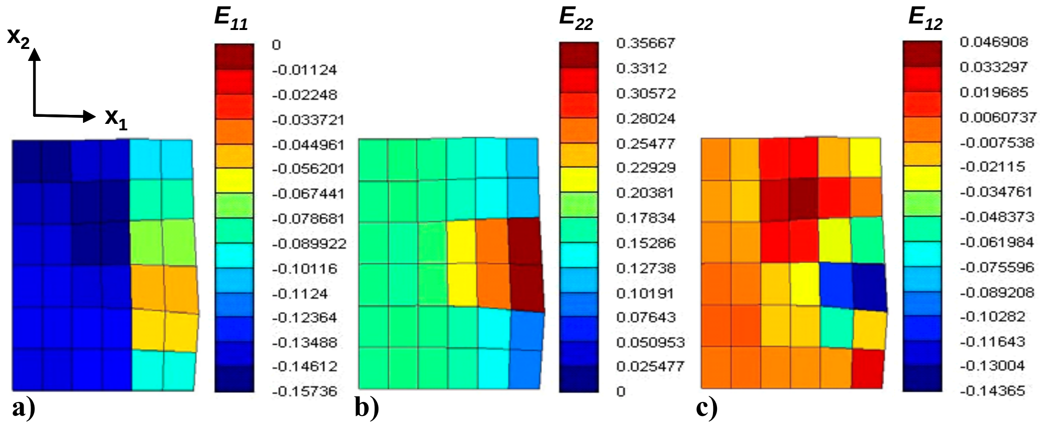


Figure 4-18 : Composantes E_{11} a), E_{22} b) et E_{22} c) des déformations de Green-Lagrange aux points de Gauss d'une membrane pseudo hétérogène (cas b $\mu_R = \pi/12$) en fin de traction (10x10x1mm 9 éléments, a = 0.5289, b = 14.1395, C11c = 1.36, C11r = 1.41, $\sigma_R = \pi/6$).

La répartition des contraintes (composante S_{22}) est logique, les valeurs sont importantes sur le front de la rupture, à gauche et très faibles à droite (Figure 4-17-b). En effet les éléments de droite (sur la Figure 4-18-a) sous soumis à de la compression, comme l'illustre la courbe contrainte/déformation de l'élément 3 (Figure 4-19). Sur cette même figure (Figure 4-19), nous remarquons que la rupture est amorcée sur l'élément 5, au point de Gauss 3, il a en effet la plus faible quantité relative de fibres. Le point de Gauss 4 de ce même élément a conservé la quantité de fibre initiale ce qui se retrouve sur la courbe contrainte/déformation car la rupture n'a pas eu lieu. Enfin, comme nous l'avons vu, l'élément 6 est soumis à un fort cisaillement (Figure 4-18-c) et sa quantité relative de fibres a diminué, nous observons donc une amorce de rupture se reflétant sur les composantes S_{11} et S_{12} des contraintes.

Finalement, si le nombre d'éléments sur la membrane est augmenté à 24, avec une configuration à deux éléments dits "faibles", les conclusions rejoignent les précédentes (cf annexe 8).

Nous pouvons en conclure que la méthode de pilotage par longueur d'arc est bien appropriée au passage de « pic » tel celui de la rupture d'un tissu. Elle permet de simuler la propagation de la rupture et les résultats des simulations semblent représenter correctement les phénomènes ayant lieu. Elle sera donc retenue pour la suite.

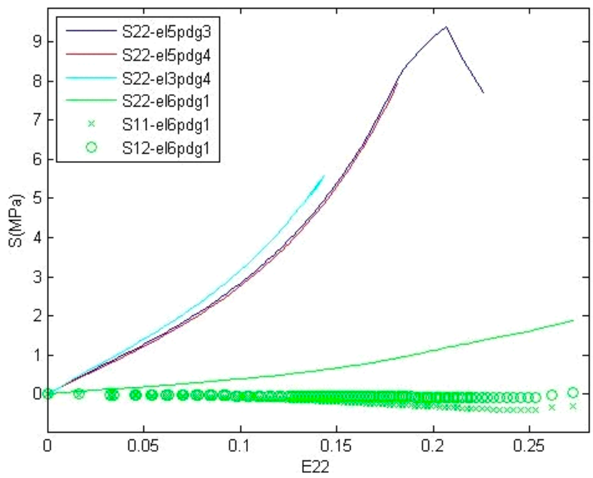


Figure 4-19 : Évolution des contraintes de Piola-Kirchhoff II en fonction de la composante E_{22} des déformations de Green-Lagrange à certains points de Gauss d'une membrane pseudo hétérogène (cas a $\mu_R = \pi/12$) (10x10x1mm 9 éléments, a = 0.5289, b = 14.1395, C11c = 1.36, C11r = 1.41, $\sigma_R = \pi/6$).

4.6. Application à la peau humaine

Nous allons, dans un dernier temps, réaliser des simulations dans des configurations similaires aux essais quasi-statiques. L'objectif est ici de comparer les résultats numériques à ceux des expérimentations afin de vérifier la validité de la loi de comportement pour une utilisation sur la peau humaine. Dans ce paragraphe, seront présentés des simulations de traction unidirectionnelle suivant la direction $\mathbf{x_2}$.

4.6.1. Structure homogène de fibres

Le but est ici de retrouver par les simulations, l'influence de l'orientation privilégiée des fibres sur les propriétés mécaniques, que nous avions mis en évidence expérimentalement sur la peau humaine. Pour cela nous nous limitons au cas d'une structure homogène de fibres (mêmes paramètres matériau sur touts les éléments) afin de faire varier uniquement le paramètre μ_R (l'orientation privilégiée des fibres), d'une simulation à l'autre. Nous comparerons ensuite les résultats numériques à ceux des essais RHS54 et RHS55, essais réalisés dans deux directions perpendiculaires et pour lesquels nous disposons à la fois des propriétés mécaniques et des données sur l'orientation privilégiée des fibres de collagène.

4.6.1.1. Hypothèses de simulation

Géométrie et discrétisation

A propos de la géométrie, nous testons deux cas de figure: un carré représentant la partie centrale rétrécie de l'éprouvette et une forme en I représentant l'éprouvette dans son intégralité.

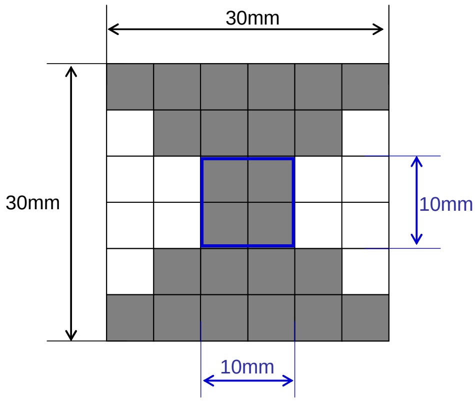


Figure 4-20 : Géométrie moyenne d'une éprouvette en I (en gris) construite à partir d'un rectangle à 36 éléments.

Les dimensions correspondent aux valeurs moyennes relevées au cours des essais de traction: la partie centrale sera un carré de côté 10mm (en bleu sur la Figure 4-20) et l'éprouvette en I découpée dans un carré de 30mm de côté (en gris sur la Figure 4-20).

Etant donné que la partie "maillage" n'a pas été une priorité dans l'écriture du modèle, nous construisons une éprouvette en I à partir d'un carré dont certains éléments (en blanc sur la Figure 4-20) sont caractérisés par un matériau élastique linéaire "mou". Concrètement, les modules tangents de comportement (${}_0\mathbf{A}$ et ${}_t\mathbf{A}$) aux points de Gauss de ces éléments seront des modules élastiques linéaires définis par un module d'Young de $E = 10^{-5}$MPa et un coefficient de Poisson de $\nu = 0.49$ tels que :

$$
{}_0\mathbf{A} = {}_t\mathbf{A} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix}
$$

Équation 4-127

Ces valeurs resteront constantes pendant tout le calcul.

Plusieurs discrétisations sont testées sur les deux géométries d'éprouvette:

- ✓ carré à un élément
- ✓ carré à 9 éléments
- ✓ éprouvette en I à 9 éléments[3]
- ✓ éprouvette en I à 36 éléments

Nous pourrons ainsi observer à la fois l'influence de la géométrie et de la discrétisation sur les résultats.

Paramètres de pilotage et matériaux

Compte tenu de l'objectif de ce paragraphe, tous les paramètres restent identiques sur tous les tests à l'exception de l'orientation privilégiée des fibres μ_R.

- ✓ Les paramètres propres à la méthode de pilotage en longueur d'arc sont ceux définis au paragraphe 4.5.2 :

  dl_{min} = 0.05mm

  dl_{max} = 0.1mm

  $j_{souhaitée}$ = 5

- ✓ La précision sur l'intégrale numérique est celle choisie au paragraphe 4.5.2.2 :

  $d\theta$ = 0.001

- ✓ Les paramètres du comportement de la fibre sont évalués de telle sorte qu'ils correspondent aux essais quasi-statiques choisis :

  a = 0.5289

  b = 14.1395

  $C_{11critique}$ = 1.34

  $C_{11rupture}$ = 1.44

- ✓ Le taux d'orientation des fibres dans la direction privilégiée ou écart type de la répartition des fibres est choisie relativement grande: $\sigma_R = \pi/2$. Notons que ce choix est effectué de manière à reproduire l'hétérogénéité du réseau de fibres avec la contrainte d'éprouvette homogène.

- ✓ Dans le but de reproduire deux essais de traction dans des directions perpendiculaires (RHS54 et RHS55), nous simulons deux essais de traction unidirectionnelle où l'orientation privilégiée des fibres diffère: elle est une fois parallèle à la direction de traction ($\mu_R = \pi/2$) et la deuxième fois perpendiculaire à la direction de traction ($\mu_R = \pi/2$).

---

[3] Le nombre d'éléments associé à une éprouvette en I correspond au nombre d'éléments du rectangle à partir duquel elle est construite.

4.6.1.2. Comparaison avec les résultats expérimentaux

L'étude histologique donnait les fibres de collagène majoritairement orientées dans la direction transversale (cf Figure 3-45-b), ce qui signifie que l'essai RHS54 a été réalisé perpendiculairement à la direction privilégiée des fibres et l'essai RHS55 parallèlement à cette même direction.

Les simulations correspondantes nous permettent de tracer l'évolution de la composante S_{22} des contraintes de Piola-Kirchhoff II en fonction de la composante E_{22} des déformations de Green-Lagrange, que nous comparons aux courbes expérimentales.

Eprouvette carrée

Dans le cas de l'éprouvette carrée à un élément, nous retrouvons sur les courbes de la Figure 4-21-a la différence de raideur caractéristique de l'orientation privilégiée des fibres. Les résultats de la simulation avec les fibres majoritairement parallèles à la direction de traction ($\mu_R = \pi/2$) se superposent à ceux de l'essai RHS55. Même remarque pour la simulation dans la direction perpendiculaire et l'essai RHS54.

Si l'éprouvette carrée est discrétisée en 9 éléments, les résultats de la simulation sont une fois de plus très proches de l'expérimentation, et ce dans les deux directions (Figure 4-21-b). Nous remarquerons seulement que le calcul s'arrête assez rapidement après le passage du pic de la rupture, ce qui semble assez logique sur une membrane homogène vu que la propagation de la rupture n'est pas possible, toutes les fibres à tous les points de Gauss rompent en même temps.

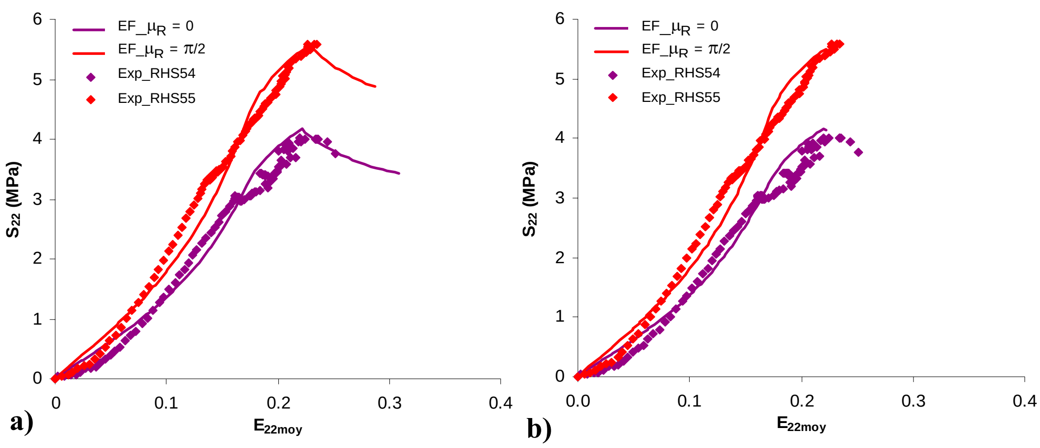


Figure 4-21 : Évolution de la composante S_{22} des contraintes de Piola-Kirchhoff II en fonction de la composante E_{22} des déformations de Green-Lagrange à certains points de Gauss d'une éprouvette homogène carrée à 1 élément a) et 9 éléments b) (10x10x1.5mm, a = 0.5289, b = 14.1395, C11c = 1.34, C11r = 1.44, $\mu_R = \pi/2$, $\sigma_R = \pi/2$).

Eprouvette en I

En premier lieu, nous vérifions que l'ajout d'un matériau "mou" sur certains éléments ne vient pas perturber les résultats. Il apparaît que toutes les composantes des contraintes sur ces éléments (exemple de l'élément 4 sur la Figure 4-22) restent inférieures à 23.5 10^{-6}MPa même au moment de la rupture. De plus, les déformations sur ces éléments, sont bien nettement supérieures à celles des autres éléments (Figure 4-23-c), ce que nous souhaitions.

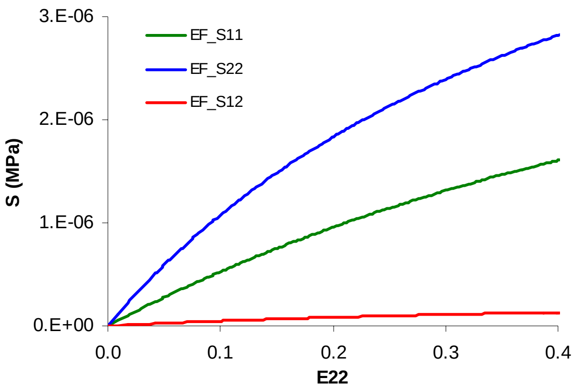


Figure 4-22 : Évolution des contraintes de Piola-Kirchhoff II en fonction de la composante E_{22} des déformations de Green-Lagrange sur l'élément 4 d'une éprouvette homogène en I à 9 éléments (10x10x1.5mm, a = 0.5289, b = 14.1395, C11c = 1.34, C11r = 1.44, $\mu_R = \pi/2$, $\sigma_R = \pi/2$).

Concernant les déformations sur les autres éléments, ceux constituant l'éprouvette de peau, elles sont beaucoup moins homogènes que dans le cas du carré, ce qui parait logique étant donnée la nouvelle géométrie choisie. Le champ obtenu est d'ailleurs symétrique. Cette observation est aussi valable pour les contraintes et dans les deux niveaux de discrétisation, comme l'illustre la Figure 4-23 pour l'éprouvette à 36 éléments. Pour la comparaison avec les résultats expérimentaux, nous sélectionnons donc les valeurs obtenues sur les éléments de la partie centrale rétrécie. Rappelons que c'est précisément sur cette partie de l'éprouvette qu'ont été mesurées les déformations par corrélation d'images.

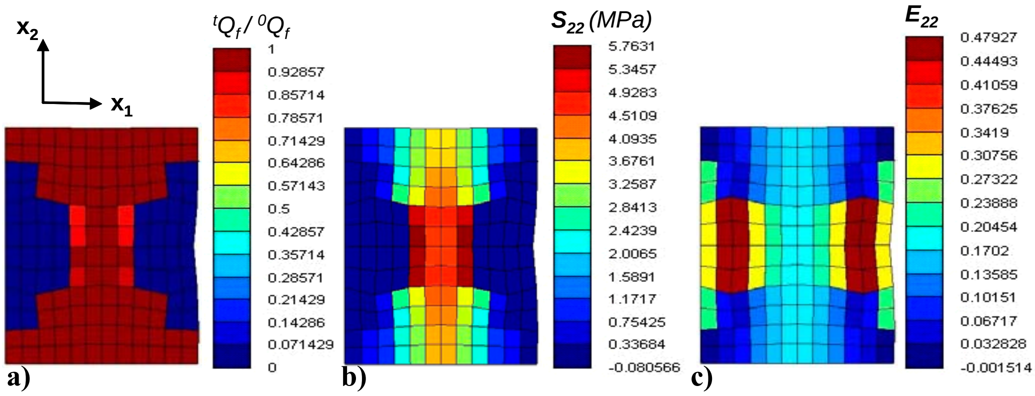


Figure 4-23 : Quantité relative de fibres a), composante S_{22} des contraintes de Piola-Kirchhoff II b) et composante E_{22} des déformations de Green-Lagrange *c)* aux points de Gauss d'une membrane homogène en fin de traction (30x30x1.5mm 36 éléments, a = 0.5289, b = 14.1395, C11c = 1.34, C11r = 1.44, $\sigma_R = \pi/2$).

Les simulations sur une éprouvette en I à 9 éléments apportent des résultats (élément central) un peu moins proches de l'expérimentation, ces écarts sont probablement dus à la variation de la géométrie de l'éprouvette. Cependant il apparaît qu'en modifiant légèrement le taux d'orientation des fibres σ_R, les résultats simulés se rapprochent des expérimentations (cas RHS54) (Figure 4-24-a). Par contre, le calcul se poursuit ici jusqu'à rupture complète de l'élément central, ce qui est encourageant car nous sommes cette fois dans une configuration plus proche de la réalité, contrairement au cas du carré.

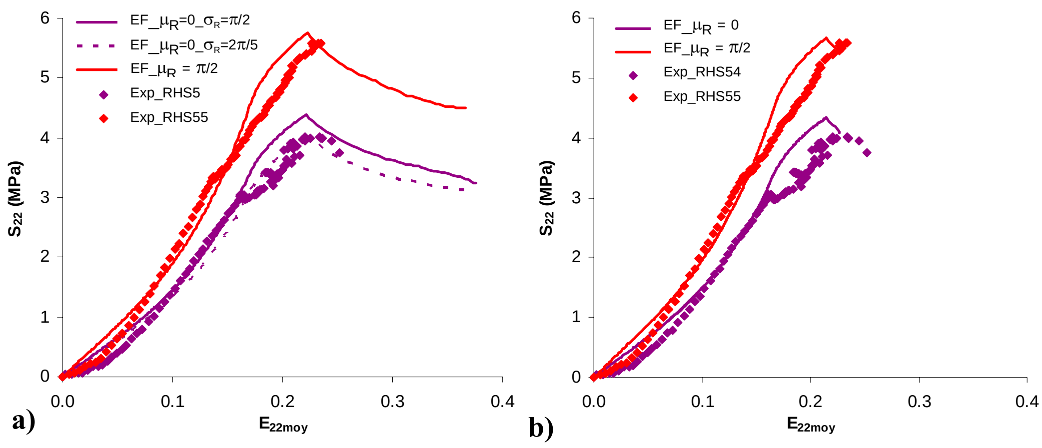


Figure 4-24 : Évolution de la composante S_{22} des contraintes de Piola-Kirchhoff II en fonction de la composante E_{22} des déformations de Green-Lagrange à certains points de Gauss d'une éprouvette homogène en I à 9 éléments a) et 36 éléments b) (30x30x1.5mm, a = 0.5289, b = 14.1395, C11c = 1.34, C11r = 1.44, $\mu_R = \pi/2$, $\sigma_R = \pi/2$).

Si la même éprouvette en I est cette fois discrétisée en 36 éléments, les résultats sont identiques au cas précédent à la différence près que le calcul s'arrête ici plus rapidement après le passage du pic de la rupture (Figure 4-24-b).

Nous avons donc montré qu'en modifiant simplement l'orientation privilégiée des fibres, notre loi permet de reproduire par la simulation le phénomène de variation de raideur de la peau que nous avions mesuré expérimentalement.

4.6.2. Structure hétérogène de fibres

4.6.2.1. Hypothèses de simulation

Géométrie et discrétisation

A chaque niveau de discrétisation, nous choisissons de tester un couple d'éprouvette formé d'une éprouvette en I et d'une éprouvette carrée qui correspond à la partie centrale de l'éprouvette en I, en termes de dimensions, de discrétisation et de paramètres matériaux,. Ceci est effectué dans le but de vérifier l'importance de la géométrie dans l'initiation et la propagation de la rupture.
Nous présentons ici deux niveaux de discrétisation :

- ✓ éprouvette en I à 64 éléments et carré à 16 éléments
- ✓ éprouvette en I à 256 éléments et carré à 36 éléments

Paramètres de pilotage

Ce sont les mêmes que précédemment.

Paramètres matériaux - Construction d'une structure aléatoire

Après avoir testé, en première approximation, une éprouvette homogène (valeurs de μ_R identiques sur tous les éléments) au taux d'orientation des fibres élevé, l'objectif est ensuite de se rapprocher le plus possible la structure fibreuse de la peau, c'est à dire reproduire des orientations privilégiées de fibres peu marquées.

Nous construisons donc une éprouvette hétérogène dans le sens où chaque élément aura une orientation privilégiée de fibres différente. L'attribution des valeurs de μ_R à chaque élément se fait suivant un processus semi aléatoire tel que les valeurs suivent une distribution gaussienne centrée en une valeur moyenne de μ_R choisie à l'avance et dont l'écart type est de 1.4rad. Le but étant que, quelle que soit le niveau de discrétisation, cette orientation privilégiée moyenne reste la même.

Pour les deux niveaux de discrétisation choisies, la répartition des orientations privilégiée de l'éprouvette à 64 éléments est une déclinaison plus grossière de celle de l'éprouvette à 256 éléments. Sur chaque éprouvette carrée, les valeurs de μ_R sont identiques à celle des éléments de la partie centrale de l'éprouvette en I correspondant (Figure 4-25).

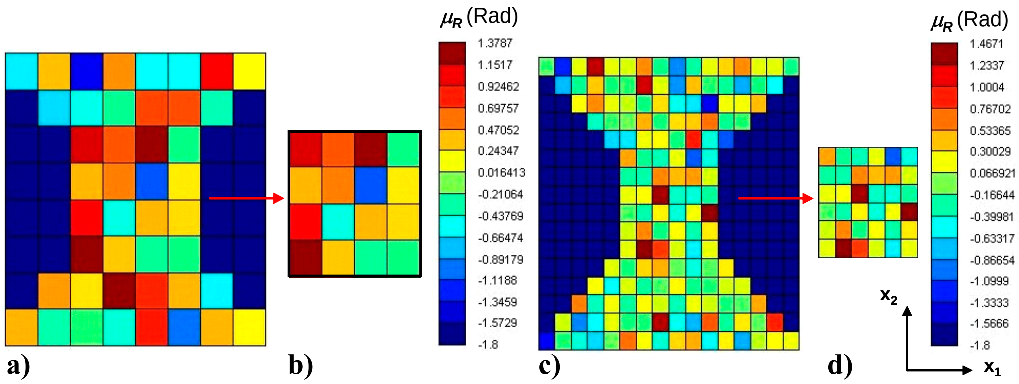


Figure 4-25 : Répartition des valeurs du paramètre μ_R (moyenne = $\pi/2$) sur les éléments d'éprouvettes en I à 64 éléments a) et 256 éléments c) et de leurs éprouvettes carrées correspondantes à respectivement 16 éléments b) et 36 éléments d).

4.6.2.2. Comparaison avec les résultats expérimentaux

Champs de déformation et de contrainte hétérogènes

✓ *Eprouvette carrée*

Quel que soit le niveau de discrétisation sur les éprouvettes carrées, les champs de déformation et de contrainte deviennent hétérogènes en fin de simulation uniquement, il y a localisation très rapide des contraintes comme des déformations dans la direction de traction. (Figure 4-26)

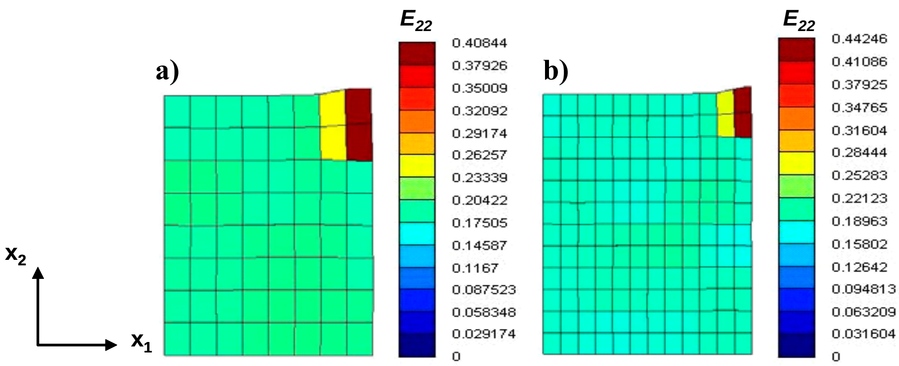


Figure 4-26 : Composante E_{22} des déformations de Green-Lagrange aux points de Gauss d'une éprouvette carrée hétérogène aléatoire à 16 éléments a) et 36 éléments b) en fin de traction (10x10x1.5mm, a = 0.5289, b = 14.1395, C11c = 1.34, C11r = 1.44, $\sigma_R = \pi/2$).

✓ *Eprouvette en I*

Le champ de déformation sur les éprouvettes en I apparaît nettement plus hétérogène, à l'image de celui de l'éprouvette à 64 éléments (Figure 4-28-a à g). Ceci est certainement du, en partie, à la géométrie. Cependant, si nous revenons sur le champ de déformation (composante E_{22moy}) de l'éprouvette en I homogène (cf Figure 4-23-c), le champ est quelque peu hétérogène (du à la géométrie) mais symétrique, alors que pour une éprouvette hétérogène, ce n'est pas le cas. Apparaissent donc des effets de la structure fibreuse.

Quand au champ de contrainte, il devient plus hétérogène quand la discrétisation est plus fine. (Figure 4-27)

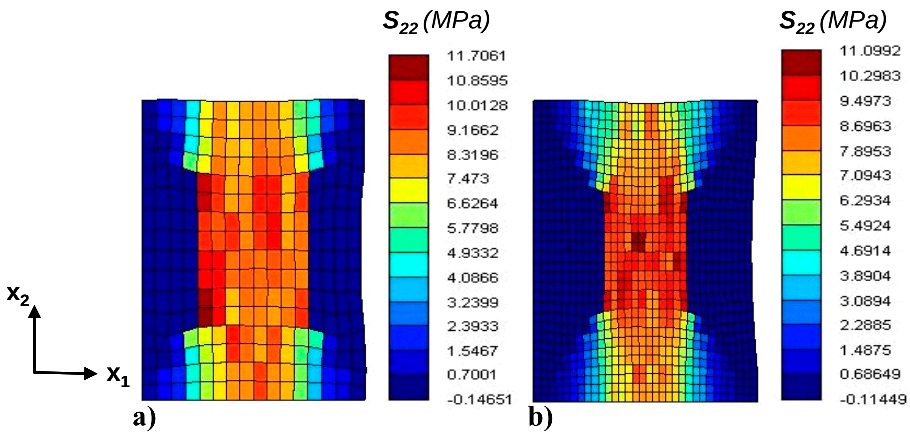


Figure 4-27 : Composante S_{22} des contraintes de Piola-Kirchhoff II aux points de Gauss d'une éprouvette en I hétérogène aléatoire à 64 éléments a) et 256 éléments b) en fin de traction (30x30x1.5mm, a = 0.5289, b = 14.1395, C11c = 1.34, C11r = 1.44, $\sigma_R = \pi/2$).

Suite à ces observations, il est possible de faire les mêmes mesures d'hétérogénéité sur le champ de déformation qu'expérimentalement. Pour cette analyse, nous sélectionnons les valeurs de déformation des éléments formant le carré central de l'éprouvette, par analogie avec la zone de mesure des déformations en corrélation d'images et nous calculons les valeurs moyennes de chaque composante E_{22moy} , E_{11moy} et E_{12moy}. A partir de ces valeurs, nous traçons dans un premier temps l'évolution de la composante S_{22moy} des contraintes de Piola-Kirchoff II en fonction des trois composantes des déformations moyennes E_{22moy} , E_{11moy} et E_{12moy} (Figure 4-29). Notons que S_{22moy} est la valeur moyenne des contraintes calculées sur tous les éléments composant l'éprouvette. Cette valeur s'avère être quelque peu supérieure à la valeur expérimentale.

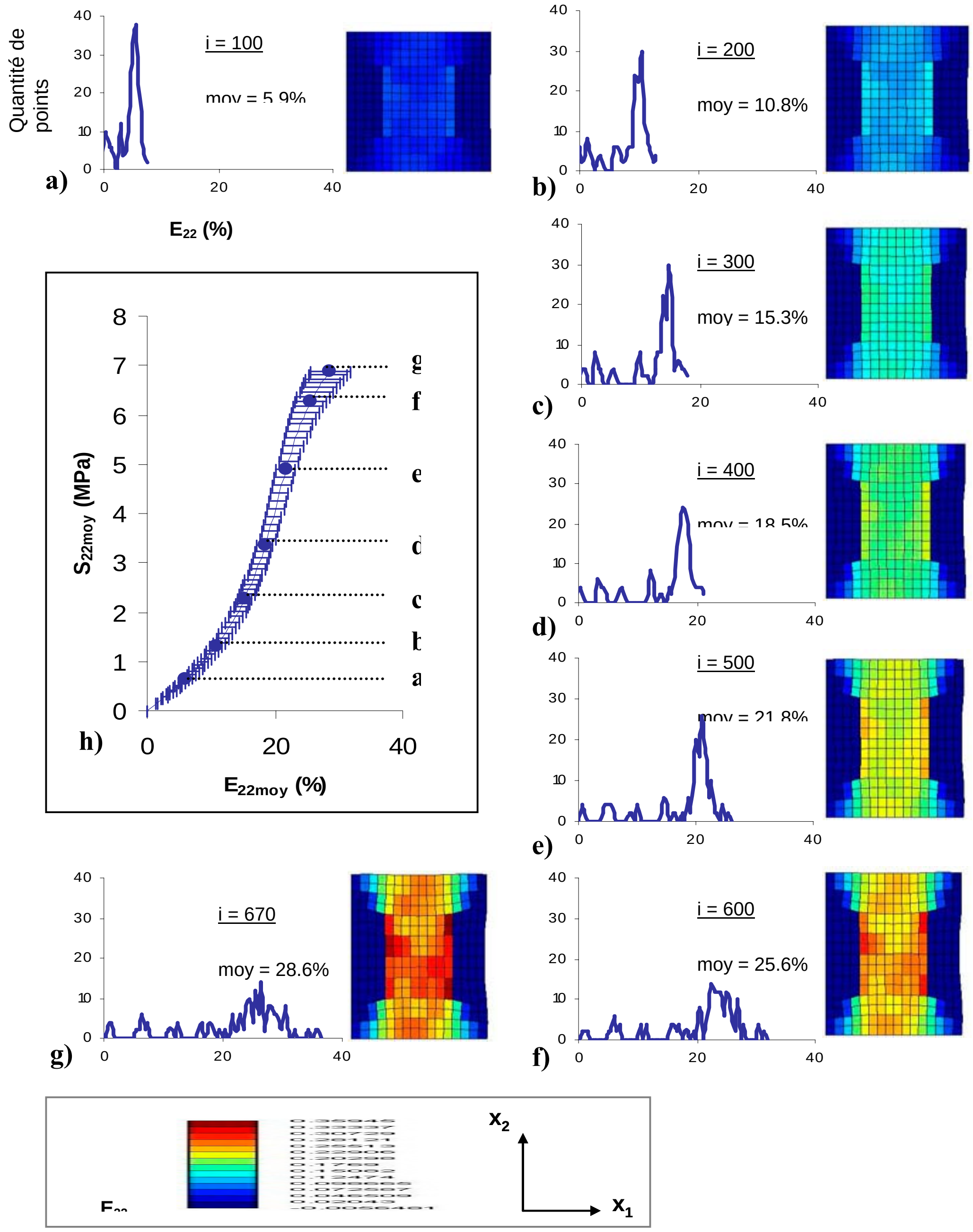


Figure 4-28 : Évolution de la contrainte moyenne S_{22moy} de Piola-Kirchhoff II en fonction de la déformation moyenne E_{22moy} de Green-Lagrange h) et histogrammes de la répartition des déformations E_{22moy} accompagnés du champ de déformation E_{22} simulé a) à g) pour une éprouvette en I hétérogène aléatoire (30x30x1.5mm 64 éléments, a = 0.5289, b = 14.1395, C11c = 1.34, C11r = 1.44, $\sigma_R = \pi/2$).

Par analogie avec les figures 3-28 et 3-29, il est ensuite intéressant de tracer les histogrammes de la répartition des déformations (composante E_{22moy}) pour plusieurs niveaux de chargement (Figure 4-28-a à g).

Dans la direction de traction, nous retrouvons sur la Figure 4-28 des écarts types croissant avec la déformation moyenne, comme cela était le cas expérimentalement, pour la composante E_{22moy}. Remarquons que sur les simulations, les concentrations de déformation sont moins marquées (images a à g de la Figure 4-28), ce qui se reflète sur les valeurs des écarts types de E_{22moy}. Celles–ci sont bien inférieures aux valeurs expérimentales (6 fois moindre) à niveau de déformation équivalent.

Dans les autres directions (Figure 4-29), les ordres de grandeur des composantes E_{11moy} et E_{12moy} sont relativement satisfaisants compte tenu du fait que les paramètres matériaux ne sont pas vraiment ajustés. Cependant, au niveau de la composante E_{12moy}, les valeurs des écarts types apparaissent plutôt élevés.

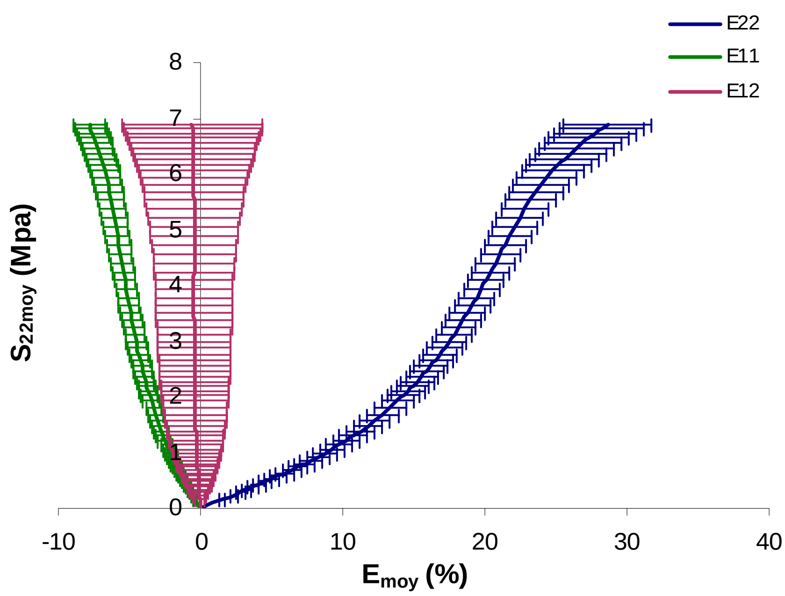


Figure 4-29 : Évolution de la contrainte moyenne S_{22moy} de Piola-Kirchhoff II en fonction des composantes E_{11moy}, E_{22moy} et E_{12moy} de la déformation moyenne de Green-Lagrange pour une éprouvette en I hétérogène aléatoire (30x30x1.5mm 64 éléments, a = 0.5289, b = 14.1395, C11c = 1.34, C11r = 1.44, $\sigma_R = \pi/2$).

Propagation de la rupture

✓ *Eprouvette carrée*

Concernant les éprouvettes carrées, la rupture s'initie au même endroit pour les deux discrétisations testées (Figure 4-30), ce qui confirme deux points importants. D'une part, la rupture n'est pas due à la géométrie de l'éprouvette mais à l'organisation du réseau de fibres. D'autre part, cette organisation reste globalement la même quel que soit le niveau de discrétisation, elle est juste définie avec plus de précision pour une discrétisation plus fine.

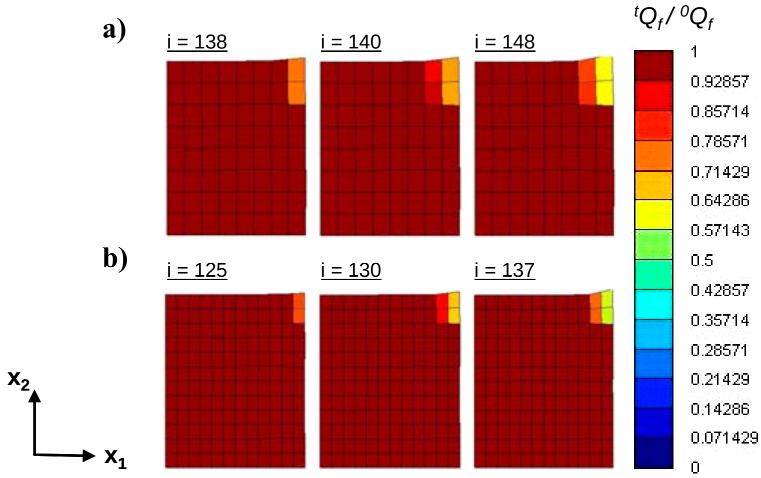


Figure 4-30 : Évolution de la quantité relative de fibres aux points de Gauss d'une éprouvette carrée hétérogène aléatoire à 16 éléments a) et 36 éléments b) à différents incréments i (10x10x1.5mm, a = 0.5289, b = 14.1395, C11c = 1.34, C11r = 1.44, $\sigma_R = \pi/2$).

✓ *Eprouvette en I*

Quelle que soit la finesse du maillage sur une éprouvette en I, la rupture s'initie dans un premier temps au niveau des arrondis de l'éprouvette, ce qui est du en grande partie à la géométrie favorisant les concentrations de contrainte. Néanmoins, à partir d'un certain stade (incrément i = 520 pour l'éprouvette à 64 éléments de la Figure 4-31-b et i = 950 pour celle à 256 éléments de la Figure 4-32), des zones de rupture apparaissent de manière aléatoire à différents endroits, pour ensuite se propager sur toute l'éprouvette. Ce phénomène est alors une conséquence de la structure hétérogène.
De plus, la forme des amorces de rupture simulées (éléments brun clair à i = 540 sur la Figure 4-31-b et i = 950 sur la Figure 4-32) rappelle des déchirures réelles que l'on voit clairement apparaître sur les deux côtés de la partie centrale d'une éprouvette de peau humaine (Figure 4-31-a).

Ce modèle, par l'association de notre loi à une structure fibreuse hétérogène aléatoire, permet de simuler des phénomènes proches de la réalité en terme d'hétérogénéité du champ de déformation et en terme de rupture.

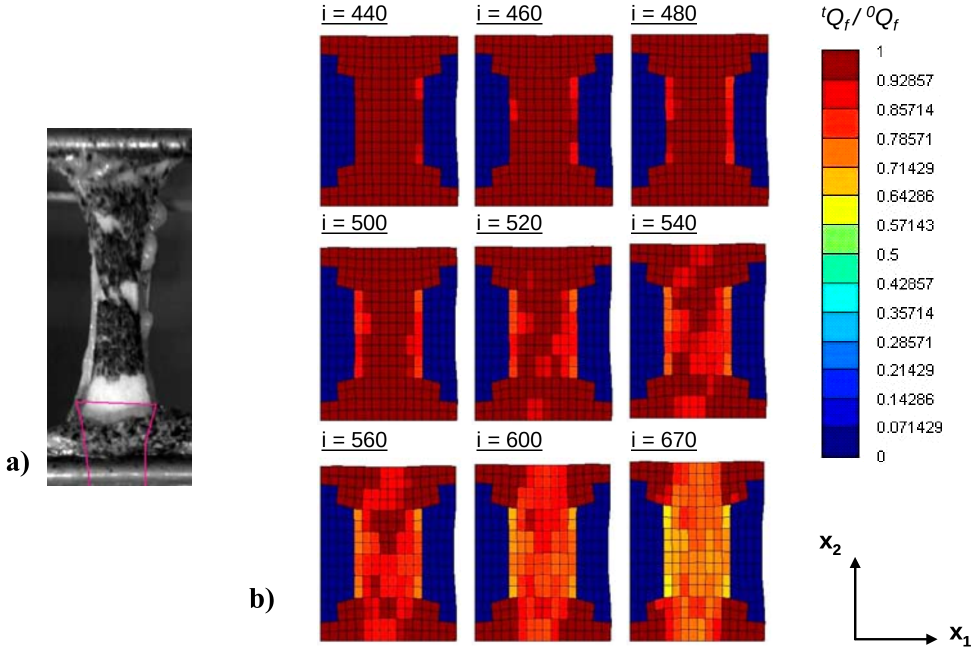


Figure 4-31 : a) Amorce de rupture sur une éprouvette de peau humaine en traction dynamique (RHD40) et b) évolution de la quantité relative de fibres aux points de Gauss d'une éprouvette en I hétérogène aléatoire des incréments i=440 à i_{max} (30x30x1.5mm, 64 éléments, a = 0.5289, b = 14.1395, C11c = 1.34, C11r = 1.44, $\sigma_R = \pi/2$).

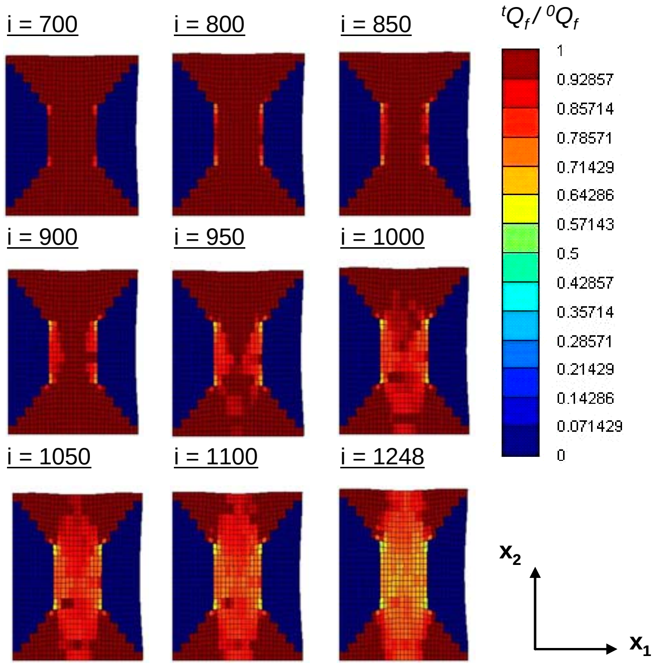


Figure 4-32 : Evolution de la quantité relative de fibres aux points de Gauss d'une éprouvette en I hétérogène aléatoire des incréments i=700 à i_{max} (30x30x1.5mm, 256 éléments, a = 0.5289, b = 14.1395, C11c = 1.34, C11r = 1.44, $\sigma_R = \pi/2$)

4.7. Discussion et conclusion

Apports du travail de modélisation

Revenons sur nos objectifs à courts termes, qui étaient de définir une loi permettant de décrire le comportement de la peau humaine, identifié expérimentalement. La loi telle qu'elle est écrite remplit parfaitement cette fonction, elle décrit le comportement hyperélastique non linéaire puis adoucissant et enfin la rupture d'un tissu fibreux.

De plus concernant les perspectives à plus long terme, elle apparaît facilement adaptable à d'autres membranes biologiques fibreuses, étant donné que les paramètres matériaux sont relatifs aux fibres, élément physique commun à tous ces tissus. Pour le passage d'un tissu à l'autre, il suffira de connaître l'organisation de la structure fibreuse du tissu, pour le réglage des paramètres de la répartition des fibres et le type de fibre constituant le réseau (collagène, type de collagène, élastine...), pour une éventuelle modification des paramètres propres au comportement de la fibre.

L'implantation de cette loi de comportement dans un modèle éléments finis offre d'autant plus de possibilités en terme de simulation. Grâce à la méthode de pilotage en longueur d'arc adaptée aux cas des grandes déformations, il devient possible de simuler le comportement d’une membrane fibreuse jusqu’à l’amorce de la rupture et même au delà. L'avantage avec notre loi de comportement est que l'on garde un nombre peu élevé de paramètres et que, par rapport aux modèles existants [Arnoux, 2000] traitant l'endommagement avec la méthode de Lemaitre et Chaboche, les paramètres que nous avons définis ont une signification physique.

Le comportement hyperélastique plastique fragile attribué aux fibres de collagène semble approprié. Pour la partie élastique uniquement, il se rapproche d'une forme proposée pour le ligament par Holzapfel [Holzapfel, 2004] comportant une partie de forme exponentielle suivie d'une partie linéaire. L'ajout de la partie fragile a été nécessaire pour modéliser la rupture et le choix d'un critère de rupture en déformation sur la fibre s'avère être le même que celui de Zohdi [Zohdi, 2007], il apporte des résultats satisfaisants. En effet, si nous nous s'intéressons à la quantité relative de fibres, elle a tendance à diminuer progressivement au cours des incréments de chargement, sur les éléments en cours de rupture, ce qui simule une rupture progressive des fibres proche des phénomènes observés expérimentalement. De plus, lorsque l'on trace l'évolution de la quantité relative de fibres sur l'éprouvette, elle reflète relativement bien la propagation de la rupture. La quantité relative de fibres donne donc une bonne indication sur le niveau d'endommagement d'un élément. La propagation de la rupture devient intéressante lorsque la simulation porte sur une membrane à géométrie (éprouvette en I) et à structure (répartition hétérogène de l'orientation des fibres) proche de la réalité. Dans ce cas là en effet, la forme des amorces de rupture s'apparente à des déchirures réelles.

Une caractéristique importante de ce modèle est qu'il devient possible de modéliser le comportement d'un tissu hétérogène, ce qui apparaît peu dans la littérature à l'exception du travail de [Stylianopoulos, 2007].

Comme nous l'avons vu au travers des différents chapitres précédents, la peau humaine ne possède pas le réseau fibreux le plus facile à modéliser, car il ne semble pas comporter d'orientations privilégiées très marquées et surtout ses orientations ne se retrouvent pas clairement d'un individu à l'autre. Nous avons donc tenté de représenter la peau de deux façons différentes. Dans un premier temps, nous choisissons une structure homogène avec un taux d'orientation des fibres dans la direction privilégiée très élevé pour simuler un réseau peu orienté, mais la préférence va à un réseau de fibres hétérogène et aléatoire comportant une orientation privilégiée moyenne de fibres, pour laquelle les résultats sont plus réalistes. Ces représentations sont certes discutables, cependant elles apportent des résultats numériques proches des phénomènes expérimentaux. Nous les avons donc exploité de façon similaire pour une comparaison plus rigoureuse.

Premièrement, nous retrouvons par la simulation la dépendance de la raideur du tissu à l'orientation privilégiée des fibres. Ce phénomène a été mis en évidence sur plusieurs géométries et plusieurs discrétisations. Tous les résultats numériques obtenus sont relativement bien corrélés avec les données d'un essai de traction quasi-statique.

Nous remarquons ensuite, sur des éprouvettes hétérogènes, que l'évolution des trois composantes des déformations est similaire à celle mise en évidence expérimentalement.

Enfin, toujours sur les éprouvettes hétérogènes, les champs de déformation et de contrainte simulés apparaissent hétérogènes, conformément à nos attentes. Notons qu'il a bien été vérifié que l'hétérogénéité n'était pas uniquement due aux effets de géométrie, mais qu'elle était en grande partie une conséquence directe de la structure fibreuse hétérogène. A partir de là, le taux d'hétérogénéité du champ de déformation a été mesuré dans la direction de traction. Son évolution est semblable à celle observée expérimentalement même si les niveaux d'hétérogénéité numériques restent un peu faibles sur les simulations réalisées à ce jour. Rappelons à propos des simulations présentées ici, que les comparaisons avec les résultats expérimentaux sont essentiellement qualitatives étant donnée que le choix des paramètres matériaux n'a pas été optimisé.

Le fait d'avoir débuté cette étude avec la peau, tissu peu évident à modéliser, permet d'illustrer les capacités du modèle, à représenter de différentes façons, un tissu à l'allure complexe. Il apparaît en effet possible de personnaliser à souhait le réseau fibreux que l'on veut modéliser. Ceci est très avantageux lorsque l'on sait que les caractéristiques micro structurelles de la peau semblent varier d'un individu à l'autre, la personnalisation devient alors possible. Un tel modèle offre d'autres perspectives intéressantes notamment pour des tissus plus orientés par exemple, où la tâche sera simplifiée.

L'intérêt de ce modèle par rapport à la littérature est qu'il combine la modélisation d'un réseau hétérogène de fibres et de sa rupture. Alors que les études récentes se concentrent soit sur la rupture d'une membrane fibreuse dont l'arrangement des fibres n'est pas réaliste [Zohdi, 2007] soit sur une structure hétérogène et orientable mais uniquement dans le domaine élastique [Stylianopoulos, 2007].

Limites du travail et perspectives

En règle générale, les résultats sur la peau humaine s'avèrent être très encourageants. Ils se montrent globalement en accord avec les résultats expérimentaux bien que les paramètres matériaux n'aient pas été "proprement" identifiés dans le cas de la peau. Ils montrent donc que, même si elles restent discutables, les hypothèses simplificatrices posées au départ semblent avoir été judicieusement choisies.

Tout d'abord, l'utilisation d'un réseau unique de fibres de collagène pourrait paraître peu réaliste mais s'avère suffisant pour ce que l'on souhaite modéliser. Il est tout à fait envisageable d'imaginer ajouter par la suite d'autres familles de fibres où les éléments entourant le réseau fibreux, comme le font [Gassser, 2006, Holzapfel, 2000, Humphrey, 1987, Van Loocke, 2004]. Cependant tous ces auteurs se limitent au domaine élastique, mais lorsqu'il s'agit de modéliser la rupture, un réseau unique de fibres est utilisé [Zohdi, 2007] par souci de simplification. De la même manière, Lanir [Lanir, 1983] et Arnoux [Arnoux, 2000] incluent dans leur modèle de la viscosité. Or tous ces ajouts se soldent par une augmentation du nombre de paramètres, qui devient quelque peu pénalisante dans une optique d'identification avec les résultats expérimentaux.

Nous avons aussi relevé dans la littérature que les fibres se réorientent suivant la direction de traction, lors d'un essai quasi-statique (cf chapitre 1) et certains auteurs comme Stylianopoulos [Stylianopoulos, 2007] modélisent ce phénomène. Il pourrait en effet être intéressant de le prendre en considération par la suite, même si dans une perspective de modélisation de traction dynamique, il faudrait tout d'abord vérifier que le phénomène ait le "temps d'avoir lieu".

Afin d'être rigoureux concernant la loi de comportement développée, il sera nécessaire d'écrire la formulation thermodynamique dissipative correspondant au comportement de la peau.

Lors de la validation du modèle par l'intermédiaire d'une série de tests, apparaissent quelques limites, spécialement dans le cas du cisaillement. Si un élément est soumis à du cisaillement pur, nous retrouvons toujours une erreur relative d'environ 10%

entre les valeurs simulée et théorique de la contrainte dans la direction de traction. Ce problème reste à éclaircir, cependant nous restons toujours dans le cas de la traction unidirectionnelle afin de simuler les essais sur peau humaine et nous relevons dans ce cas un cisaillement relativement faible.

De plus lors de la comparaison des résultats simulés à la théorie, sur des éprouvettes homogènes, persiste une erreur relative sur les valeurs de contrainte une fois le pic de rupture passé.

Dans l'optique de continuer les calculs sur un schéma implicite, il reste à optimiser la méthode du pilotage par longueur l'arc qui a été ici adaptée aux grandes déformations mais reste généralement utilisée en petites perturbations. Le choix des paramètres de pilotage apporte une précision satisfaisante sur les résultats, cependant ce choix pourrait sans doute encore être amélioré en posant des conditions sur l'évolution de ces paramètres, évitant ainsi des combinaisons numériquement incompatibles. De plus l'écriture du code éléments finis peut aussi être améliorée afin de réduire les temps de calcul.

Parmi les perspectives de ce travail, figure l'utilisation d'un schéma explicite ainsi que l'implantation de la loi de comportement dans des codes de calcul commerciaux. Ceci permettrait entre autre de s'affranchir des problèmes de maillage, dans le sens où l'ajout d'un matériau dit "mou" sur certains éléments afin de créer une éprouvette en I à partir d'un rectangle, apporte certes des résultats intéressants pour une première évaluation des capacités du modèle, mais n'est pas très réaliste. Compte tenu de la structure histologique de la peau et des autres tissus qui nous intéressent, comme les parois de vaisseaux, il serait ensuite très intéressant de construire des structures multi couches comme il l'a été fait sur les artères mais sans endommagement [Holzapfel, 2000]. Ceci serait facilité sur un code de calcul standard offrant différents types d'éléments et des facilités de maillage.

Concernant les simulations des essais sur la peau humaine, et à plus long terme d'essais sur d'autres membranes fibreuses, l'étape suivante concerne la définition d'une méthode d'optimisation pour la définition des paramètres matériaux compatibles avec les résultats expérimentaux. L'idée serait de faire coïncider le champ de déformation simulé avec celui obtenu par corrélation d'image, afin de remonter à la répartition réelle des orientations de fibres. Ceci en supposant les paramètres de la fibre définis à l'avance sur l'ensemble des essais.

Conclusion générale

De nombreuses recherches s'orientent vers la détermination des caractéristiques mécaniques de tissus mous, lorsqu'ils sont soumis à des sollicitations proches du choc automobile, dans l'optique de modéliser leur comportement jusqu'à rupture, dans ces mêmes conditions. Empreinte des mêmes objectifs, notre démarche consiste à adopter une approche structurelle du tissu, afin de paramétrer le modèle de comportement de façon judicieuse, tel qu'il soit adaptable à tous les tissus d'une même famille. Pour cela, nous nous sommes focalisés sur les tissus conjonctifs bi-tendus, dont la structure fibreuse constitue un point commun. Parmi eux, il nous a fallu choisir un tissu qui a servi à la mise en place de la méthode de caractérisation mécanique. Notre choix s'est porté sur la peau humaine, pour sa facilité de prélèvement.

Après avoir fixé un mode de sollicitation, la traction, nous nous sommes aidés de la littérature pour dégager dans un premier temps, les constituants de la microstructure de la peau qui seraient les acteurs majeurs de sa réponse à des sollicitations mécaniques, à vitesses et à niveaux de déformation élevés. Il est apparu que ce sont les fibres, et plus particulièrement les fibres de collagène qui assurent ce rôle dans le cas de déformations importantes, comme celles que l'on peut mesurer proche de la rupture. Nous avons aussi relevé que les propriétés mécaniques étaient sensibles à certains paramètres de la structure fibreuse : les directions d'anisotropie mécanique et les orientations privilégiées des fibres semblent liées, les variations des propriétés mécaniques avec le lieu de prélèvement de la peau sont dues aux différentes densités de fibres en ces lieux et les variations structurelles liées à l'age auraient des incidences mécaniques. Enfin, la vitesse de sollicitation apparaît comme un dernier paramètre, non structurel mais physique, entraînant de fortes variations au niveau des propriétés mécaniques.

Dans un deuxième temps, nous avons recensé au sein de la littérature, les éléments essentiels lors de la mise en place d'essais de traction sur des tissus biologiques mous et les méthodes utilisées par certains auteurs pour modéliser le comportement des tissus conjonctifs plans en traction. Il est apparu de manière générale, qu'il manquait de données dynamiques sur la peau humaine et que les modèles existants basés sur des considérations structurelles se limitaient à des niveaux de déformation peu élevés, ne permettant pas de décrire la rupture du tissu. Nous nous sommes donc concentrés sur ces deux points.

Pour cela, nous avons mis en place un protocole expérimental qui apporte à l'échelle macroscopique, les propriétés mécaniques du tissu jusqu'à rupture, en traction unidirectionnelle et à une vitesse élevée caractéristique d'essais dynamiques (V_0 = 3m/s). L'originalité de ce protocole est de coupler cette étude mécanique à une analyse à l'échelle de la microstructure, celle-ci renseigne sur les caractéristiques du réseau de fibres de collagène à l'état initial et après rupture.

Dans la perspective de déterminer les propriétés mécaniques d'autres tissus mous fibreux de type membrane, la mise en place de ce protocole expérimental constitue une première étape très encourageante dans le sens où, à la fois les montages de traction et les moyens de mesures sont très modulables. Ils offrent en effet la possibilité de s'adapter facilement à d'autres tissus du même type (mous de type membrane) et permettent de tester une large gamme de vitesse allant du mm/min à plus de 8m/s.

Afin de prendre en compte l'aspect hétérogène d'un tissu comme la peau, nous avons choisi de compléter les mesures classiques globales par une étude locale des déformations. La méthode de corrélation d'images utilisée ici est en effet référencée dans la littérature, cependant notre travail se distingue des études précédentes sur deux points: la méthode de corrélation d'images a su être adaptée au cas d'essais dynamiques impliquant des réglages très fins de certains paramètres et il a été possible d'atteindre des niveaux de déformation relativement importants (quasi-statique) avec la version incrémentale du logiciel.

Les donnés obtenues localement s'avèrent être plus appropriées que des mesures globales lorsqu'il s'agit de définir les propriétés de ce genre de tissu hétérogène, c'est la raison pour laquelle elles ont été retenues. D'une part, elles sont plus précises, dans le sens où elles sont mesurées à la surface de l'éprouvette, ce qui permet de s'affranchir de certains phénomènes comme le glissement. D'autre part, elles sont plus riches en informations étant donné que nous disposons de plus de 500 points de mesure sur une zone de mesure de 30*10mm² et que nous relevons les valeurs des trois composantes du champ de déformation. De plus, à partir de ces données, il nous est possible de calculer deux déformations ultimes locales, une moyenne et un maximum, ce qui nous permet de choisir la valeur la plus appropriée pour la rupture compte tenu des phénomènes de concentration de déformations. Il s'avère que c'est le maximum qui est le plus proche de la rupture en temps et en lieu. Enfin, en plus de mettre en évidence l'hétérogénéité du champ de déformation, il est possible de quantifier le taux d'hétérogénéité de ce champ, cette donnée, accompagnée de la valeur moyenne des déformations, renseigne avec précision sur le comportement d'un tissu hétérogène et devient indispensable pour la définition d'un modèle représentatif.

Les résultats obtenus au cours de cette étude sont donnés en termes de caractéristiques de la rupture et de courbes contrainte/déformation, à partir desquelles il est possible de calculer des modules élastiques. Ces propriétés sont déterminées pour la peau humaine du front et de l'intérieur des bras, à deux vitesses de traction qui diffèrent d'un rapport 10^4 (3m/s et $2.5.10^{-4}$m/s) et dans deux directions perpendiculaires définies par rapport à des repères anatomiques. L'ensemble de ces résultats expérimentaux est globalement en accord avec la littérature. Nous remarquons une forte diversité inter individu mais s'il fallait définir un critère de rupture pour la peau humaine en général, nous le donnerions en contrainte et il avoisinerait les 8MPa±2MPa (contrainte nominale).

Contrairement à la littérature, nous ne remarquons pas de nette variation des propriétés mécaniques avec le site de prélèvement, cependant il faut rester prudent à propos de ces conclusions qui ne sont établies que sur un faible nombre de sujets. De même, les différences d'âge ne semblent pas influencer nos résultats, ce que nous expliquons par le fait que les sujets testés se situent tous dans une fourchette relativement âgée où les dégradations structurelles ont déjà eu lieu. Néanmoins d'autres paramètres ont une influence plus marquée telle la vitesse de traction dont l'augmentation entraîne celle du module élastique de la deuxième phase de traction. Enfin aucune tendance n'aurait pu être dégagée quant à l'influence de la direction de traction si celle-ci n'avait pas été mise en relation avec l'orientation privilégiée des fibres de collagène, obtenue à partir de l'analyse à l'échelle microscopique de coupes histologiques. En effet, l'orientation privilégiée des fibres de collagène n'est pas commune à tous les sujets. Cependant elle apparaît être responsable des différences de raideur entre les deux directions de traction et est fortement liée au type de mécanisme de rupture : une rupture nette lorsque la majorité des fibres de collagène sont perpendiculaires à la direction de traction se distingue d'une rupture que l'on appelle "par glissement et effilochage" pour des fibres majoritairement parallèles à la direction de traction. Bien qu'exploratoire, cette étude microscopique apporte déjà des explications structurelles intéressantes sur les variations des propriétés mécaniques d'un tissu peu orienté comme la peau. Ce qui nous laisse penser que le passage de l'échelle macroscopique à l'échelle de la microstructure offre des perspectives intéressantes pour d'autres tissus fibreux à l'anisotropie structurelle plus nette.

L'étape de modélisation a nécessité tout d'abord l'écriture d'une loi de comportement générique pour toute membrane fibreuse, où le tissu est considéré comme un réseau unique de fibres. Cette loi permet de reproduire un comportement hyperélastique non linéaire de forme exponentielle puis adoucissant avant la rupture du tissu, comportement que nous avions identifié expérimentalement sur la peau humaine. Pour cela, chaque fibre est considérée comme un matériau incompressible à trois dimensions dont le comportement est régit par une loi hyperélastique plastique fragile à quatre paramètres propre aux fibres parmi lesquels figure la déformation ultime de la fibre utilisée comme critère de rupture. L'organisation de ces fibres un sein du réseau formant la peau est définie par une fonction de forme gaussienne telle que sa moyenne (μ_R) représente l'orientation privilégiée des fibres et son écart type (σ_R), leur taux d'orientation dans cette direction. En procédant de la sorte, il devient possible de simuler la rupture progressive des fibres, phénomène que nous avions pu mettre en évidence expérimentalement sur la peau humaine.

L'adaptabilité de cette loi de comportement à d'autres tissus conjonctifs est dans le choix judicieux des paramètres matériaux. Ils sont en effet peu nombreux et ont une signification physique. La modélisation de tout tissu du même type (structurellement parlant) pourra ainsi être personnalisée : il suffit alors de connaître l'organisation du réseau fibreux du tissu afin de régler les paramètres de la répartition des fibres (orientation privilégiée et taux d'orientation dans cette direction) et le type de fibres majoritaires dans le tissu (collagène, type de collagène, élastine…) pour éventuellement modifier les paramètres de la fibre.

Une caractéristique importante de la peau, est l'hétérogénéité de son champ de déformation, que l'on attribue à l'hétérogénéité de sa structure fibreuse. L'implantation de la loi de comportement dans un modèle en éléments finis, développé sous Matlab® dans un premier temps, permet ensuite de modéliser ce phénomène. En effet, les paramètres matériaux tels qu'ils sont définis nous permettent de représenter la peau par une membrane aux propriétés structurelles hétérogènes, ce qui se traduit par l'attribution aléatoire, à chaque élément, d'une valeur d'orientation privilégiée de fibres. L'originalité est ici de pouvoir personnaliser à souhait l'hétérogénéité de la membrane.

Les choix, en terme de modélisation par la méthode des éléments finis, sont guidés par les conditions des essais de traction sur la peau humaine que l'on a souhaité simuler. Aux vues des grandes déformations, nous avons utilisé le formalisme de Lagrange réactualisé, en contraintes planes, afin de prendre en compte les non linéarités géométriques. Nous avons choisi un schéma implicite et des éléments quadrilatères isoparamétriques à quatre nœuds. Concernant la résolution des équations d'équilibre, la méthode de pilotage par longueur d'arc s'est avérée indispensable au passage du pic représentant la rupture du tissu, ce que ne permet pas la méthode de Newton-Raphson complète testée auparavant. Une série de tests a permis de montrer la validité de cette méthode de résolution, adaptée ici aux cas des grandes déformations, même si quelques limites persistent lorsque apparaît un fort taux de cisaillement.

Les résultats des premières applications sur la peau humaine illustrent les capacités du modèle, elles apparaissent relativement intéressantes par rapport à ce que l'on trouve dans la littérature, même si le choix des paramètres n'est pas encore optimisé. En effet, les modèles existants restent dans le domaine élastique pour la plupart ou s'ils traitent de la rupture ne permettent pas la représentation d'un réseau de fibres représentatif de la réalité. Or, nous proposons une combinaison des deux.

En simulant un essai de traction quasi-statique sur une éprouvette à géométrie réelle (partie centrale rétrécie), nous avons pu observer un début de propagation de la rupture à travers l'évolution de la quantité relative de fibres au cours de la traction. Ce paramètre donne une bonne indication sur le niveau d'endommagement d'un élément. De plus, les formes de ces propagations se rapprochent fortement des amorces de rupture présentes sur certaines éprouvettes de peau humaine. Il a aussi été possible de reproduire par la simulation, la variation de raideur du tissu liée aux orientations privilégiées des fibres. Ces résultats ont été obtenus sur différentes géométries d'éprouvette à différentes discrétisation. Enfin, l'utilisation d'une éprouvette à la répartition hétérogène aléatoire des orientations privilégiées de fibres, rend possible la simulation de champs de déformation et de contrainte hétérogènes. A partir du champ de déformation, nous effectuons la même analyse qu'expérimentalement à savoir tracer l'évolution des trois composantes du champ et quantifier son hétérogénéité. La comparaison entre expérimentation et simulation est très satisfaisante compte tenu du fait que les paramètres matériaux ne sont pas ajustés. De ce fait, dans l'optique de finaliser cette étude sur la peau humaine, il reste à définir une méthode d'optimisation permettant l'identification des paramètres matériaux à partir des essais de traction. De même, la modélisation de la rupture doit être affinée, car le modèle proposé ici dépend pathologiquement du maillage, comme le sont les modèles d’endommagement. D'un point de vue expérimental, notons qu'il reste encore a explorer quelques gammes de vitesse et à compléter certaines études des variations des propriétés mécaniques afin de constituer une base de donnée représentative sur la peau humaine.

Au vu des résultats encourageants sur la peau humaine, plusieurs perspectives intéressantes s'offrent pour d'autres tissus fibreux, dont les lésions sont fatales lors d'accident. Nous pouvons en effet imaginer choisir un tissu peu épais, telle une capsule d'organe, rendant possible le couplage d'essais de traction avec l'observation microscopique du réseau fibreux en instantané, voire l'utilisation de la méthode de corrélation d'images sur les fibres. Ceci permettrait d'accéder aux vraies orientations de fibres à entrer dans la loi de comportement et d'observer, s'il a lieu, le phénomène de réorientation des fibres dans l'optique de l'implanter dans le modèle. Il serait ensuite intéressant de considérer des tissus aux orientations de fibres plus marquées et constitués de plusieurs couches, comme les artères. Chaque couche pourrait être testée séparément puis le tissu en un seul bloc. A partir de ces données et en supposant que la loi de comportement ait été implantée dans un code de calcul du commerce, nous pourrions reconstruire des géométries plus réalistes et réaliser des simulation sur un matériau multi couches.

D'un point de vue général, l'apport de ce travail est d'avoir traité le problème dans sa globalité, de l'expérimentation à la simulation, même si certaines limites persistent. Avoir eu une vision globale du problème nous a permis de mettre en relation les échelles macroscopique et microscopique pour ensuite retranscrire au sein du modèle les variations des propriétés mécaniques en fonction de certains paramètres de la microstructure. Ce type de démarche offre des perspectives d'avenir lorsque l'on traite de tissus biologiques, qui comme chacun sait sont complexes, propres à chaque individu et en perpétuelle évolution avec les années ou d'éventuelles pathologies. De ce fait, cette approche structurelle permet non seulement de simuler des phénomènes physiques observables mais va aussi probablement devenir la clé de la personnalisation des modèles futurs, dans le sens où face à la forte diversité inter individu, les paramètres structurels sont l'identité de chacun.

Nous espérons donc que ces données serviront, à quelque niveau que ce soit, à l'amélioration des modèles pour la prédiction des risques de blessure.

Références bibliographiques

A

[Agache, 2000] **P. Agache et al.,** Physiologie de la peau et explorations fonctionnelles cutanées, Edition Médicales internationales, Cachan, France, 2000.

[Arnoux, 2000] **P-J. Arnoux**, Modélisation des ligaments des membres porteurs, Thèse Mécanique des solides, Marseille: Université de la méditerranée, 2000, 221p.

[Arnoux, 2002] **P-J. Arnoux**, **P. Chabrand, M. Jean, J. Bonnoit**, A Visco-hyperelastic Model With Damage for the Knee Ligaments Under Dynamic Constraints, Comput. Meth. Biomech. Biomed. Eng., 2002, vol. 5, n° 2, pp. 167-174.

[Athanasiou, 2000] **K. A. Athanasiou, C. F. Zhu, D. R. Lanctot, C. F. Agrawal, X. Wang**, Fundamentals of biomechanics in tissue engineering of bone, Tissue Engineering, 2000, vol. 6, n° 4, pp. 361-381.

[Autuori, 2004] **B. Autuori**, Modélisation par éléments finis de la face humaine en vue de la simulation de sa réponse au choc, Thèse Mécanique, Lyon: INSA de Lyon, 2004, 268p.

B

[Belkoff, 1991] **S. M., Belkoff, R. C. Haut**, A structural model used to evaluate the changing microstructure of maturing rat skin, J. Biomech., 1991, vol. 24, n° 8, pp. 711-720.

[Belytschko, 2000] **T. Belytschko, W. K. Liu, B. Moran**, Nonlinear finite elements for continua and structures, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, England, 2000.

[Billiar-a, 2000] **K. L., Billiar, M. S. Sacks**, Biaxial mechanical properties of the natural and glutaraldehyde treated aortic valve cusp - Part I: Experimental Results, J. Biomech. Eng., 2000, vol. 122, n° 1, pp. 23-30.

[Billiar-b, 2000] **K. L., Billiar, M. S. Sacks**, Biaxial mechanical properties of the natural and glutaraldehyde treated aortic valve cusp - Part II: A structural constitutive model, J. Biomech. Eng., 2000, vol. 122, n° 4, pp. 327-335.

[Bonnet, 2006] **M., Bonnet, A. Frangi**, Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis, Presses Internationales Polytechniques, 2006, 302p.

[Brèque, 2002] **C. Brèque**, Développement et mise en œuvre de méthodes optiques pour la mesure de relief et de champ de déformations en vue de la modélisation d'organes biologiques, Thèse Mécanique, Poitiers: Université de Poitiers, 2002, 256p.

[Brunet, 2001] **M. Brunet**, Analyse des structures non-linéaire **[en ligne]**, Polycopié de cours, INSA de Lyon, 2001. Disponible sur: < http://docinsa.insa-lyon.fr/polycop/pont.php?cle=GMCS004A > (consulté le 06/08/2006)

C

[Chagnon, 2004] **G. Chagnon, E. Verron, L. Gornet, G. Marckmann, P. Charrier,** On the relevance of continuum damage mechanics as applied to the Mullins effect in elastomers, J. Mech. Phys. Solids, 2004, vol. 52, pp. 1627-1650.

[Chagnon, 2006] **G. Chagnon, E. Verron, G. Marckmann, L. Gornet,** Development of new constitutive equations for the Mullins effect in rubber using the network alteration theory, Int. J. Solids Struct., 2006, vol. 43, pp. 6817-6831.

[Champaney, 2003]

L. Champaney, Méthodes numériques pour la mécanique **[en ligne]**, Polycopié de cours, Université de Versailles, 2003. Disponible sur: < http://www.librecours.org/cgi-bin/course?callback=info&elt=96 > (consulté le 06/08/2006)

[Chang, 2001] **H. Chang,** Arterial anatomy of subdermal plexus of the face, Keio Journal of Medicine, 2001, vol. 50, n° 1, pp. 31-34.

[Charpail, 2006] **E. Charpail**, Analyse du comportement mécanique des côtes humaines en dynamique, Thèse Mécanique, Paris: ENSAM, 2006.

[Choi, 1990] **H. S. Choi, R. P. Vito,** Two-dimensional stress-strain relationship for canine pericardium, J. Biomech. Eng., 1990, vol. 112, pp. 153-159.

[Chuong, 2006] **C. M. Chuong, et al.,** What is the biological basis of pattern formation of skin lesions?, Exp Dermatol., 2006, vol. 15, pp. 547–564.

[Claver, 2001] **P. Clavert, J.-F. Kempf, F. Bonnomet, P. Boutemy, L. Marcelin, J.-L. Kahn,** Effects of freezing/thawing on the biomechanical properties of human tendons, Surgical and Radiologic Anatomy, 2001, vol. 23, pp. 259–262.

[Combescure, 1986]

A. Combescure, Static and dynamic buckling of large thin shells, Nuclear engineering and design, 1986, vol. 92, pp. 339–354.

[Crisfield, 1991] **M. A. Crisfield,** Nonlinear finite element analysis of solids and structures, vol. 1, Wiley, 1991.

D

[Daly, 1979] **C. H., Daly, G. F. Odland**, Age-related change in mechanical properties of human skin, J. Invest. Derm., 1979, vol. 73, pp. 84-87.

[Daly, 1982] **C. H. Daly**, Biomechanical properties of dermis, J. Invest. Derm., 1982, vol. 79, pp. 17-20.

[Decreamer, 1980]

W. F. Decreamer, M. A. Maes, V. J. Vanhuyse, An elastic stress-strain relation for soft biological tissues based on a structural model, J. Biomech., 1980, vol. 13, pp. 463-468.

[Delfino, 1997] **A. Delfino, N. Stergiopulos, J. E. Moore, Jr. and J.-J. Meister**, Residual strain effects on the stress field in a thick wall finite element model of the human carotid bifurcation, J. Biomech., 1997, vol. 30, n° 8, pp. 777-786.

[Del Prete, 2004] **Z. Del Prete, S. Antoniucci, A. H. Hoffman, P. Grigg**, Viscoelastic properties of skin in Mov-13 and Tsk mice, J. Biomech., 2004, vol. 37, pp. 1491-1497.

[Demiray, 1976] **H. Demiray,** Stresses in ventricular wall, ASME J. App. Mech., 1976, vol. 43, pp. 194-197.

[Driessen, 2005] **N. J. B. Driessen, C. V. C. Bouten, F. P. T. Baaijens**, A structural constitutive model for collagenous cardiovascular tissues incorporating the angular fiber distribution, J. Biomech. Eng., 2005, vol. 127, pp. 494-503.

[Dunn, 1983] **M. G. Dunn, F. H. Silver**, Viscoelastic behavior of human connective tissues: relative contribution of viscous and elastic components, Connect. Tissue Res., 1983, vol. 12, pp. 59-70.

F

[Frances, 1990] **C. Frances, M. C. Branchet, S. Boisnic, C. L. Lesty, L. Robert,** Elastic fibers in normal human skin. variations with age: a morphometric analysis, Archives of Gerontology and Geriatrics, 1990, vol. 10, pp. 57-67.

[Fung, 1993] **Y-C. Fung,** Mechanical properties of living tissues, Springer-Verlag, New-York, second edition, 1993.

G

[Gasser, 2006] **T. C. Gasser, R. W. Ogden, G. A. Holzapfel**, Hyperelastic modelling of arterial layers with distributed collagen fibre orientations, Journal of the Royal Society Interface, 2006, vol. 3, pp. 15-35.

[Gogly, 1998] **B. Gogly, G. Godeau, D. Septier, W. Hornebeck, B. Pellat, C. Jeandel,** Measurement of the amounts of elastic fibers in the skin and temporal arteries of healthy aged individuals by automated image analysis, Gerontology, 1998, vol. 44, pp. 318-323.

H

[Hendricks, 2005] **F. M. Hendricks,** Mechanical behaviour of human epidermal and dermal layers in vivo **[en ligne]**, Universiteitsdrukkerij TU Eindhoven, Eindhoven, The Netherlands, 2005, 107p. Disponible sur:
< http://alexandria.tue.nl/extra2/200510941.pdf> (consulté le 06/08/2007)

[Holzapfel, 2000] **G. A. Holzapfel, T. C. Gasser, R. W. Ogden**, A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models, Journal of Elasticity, 2000, vol. 61, pp. 1-48.

[Holzapfel, 2004] **G. A. Holzapfel,** Computational biomechanics of soft biological tissues, Chapter 18 **In**: Encyclopedia of Computational Mechanics, Volume 2: Solids and Structures, John Wiley & Sons, Ltd. 2004.

[Holzapfel, 2006] **G. A. Holzapfel**, Determination of material models for arterial walls from uniaxial extension tests and histological structure, Journal of Theoretical Biology, 2006, vol. 238, pp. 290-302.

[Humphrey, 1987]

J. D. Humphrey, F. C. P. Yin, A new constitutive formulation for characterizing the mechanical behaviour of soft tissues, Biophysical Journal, 1987, vol. 52, pp. 563-570.

J

[Jacquemoud-a, 2004]

C. Jacquemoud, Caractérisation des propriétés mécaniques de la peau humaine, DEA Biomécanique, Lyon: Université Claude Bernard Lyon 1, 2004, 90p.

[Jacquemoud-b, 2004]

C. Jacquemoud, P. Clerc, B. Autuori, K. Bruyere-Garnier, M. Coret, F. Morestin, Measurements of displacement and strain fields by numerical image correlation : applications to biological material testing, **In:** Proc. D16 - WG4.2 of the workshop on Biomechanical Experiments, APSN, 21 September 2004, Graz, Austria, pp. 107-114.

[Jacquemoud, 2006]

C. Jacquemoud, K. Bruyere-Garnier, M. Coret, Methodology to determine failure characteristics of planar soft tissues using a dynamic tensile test, J. Biomech., 2006, vol. 40, n°2, pp. 468-475.

[Jankovich, 1981] **E. Jankovich, F. Leblanc, M. Durand,** A finite element method for the analysis of rubber parts, experimental and analytical assessment, Computers & Structures, 1981, vol. 14, n° 5-6, pp. 385-391.

K

[Karl, 2007] **Karl Cheung**, Histology, Lecture 9 – Integument **[en ligne].** Disponible sur: <http://www.mystudies.krazykarlkave.com/histology.html> (consulté le 30/05/2007)

[Keaveny, 2001] **T. M. Keaveny, E. F. Morgan, G. L. Niebur, O. C. Yeh**, Biomechanics of trabecular bone, Annual review of biomedical engineering, 2001, vol. 3, pp. 307-333.

[Khatyr, 2004] **F. Khatyr, C. Imberdis, P. Vescovo, D. Varchon, J-M. Lagarde,** Model of the viscoelastic behaviour of skin in vivo and study of anisotropy, Skin Research and Technology, 2004, vol. 10, pp. 96-103.

[Koutroupi, 1990] **K. S Koutroupi, J. C. Barbenel,** Mechanical and failure behaviour of the stratum corneum, J. Biomech., 1990, vol. 23, n° 3, pp. 281-287.

L

[Lanir-a, 1974] **Y. Lanir, Y-C. Fung,** Two-dimensional mechanical properties of rabbit skin - I. Experimental system, J. Biomech., 1974, vol. 7, pp. 29-34.

[Lanir-b, 1974] **Y. Lanir, Y-C. Fung,** Two-dimensional mechanical properties of rabbit skin - II. Experimental results, J. Biomech., 1974, vol. 7, pp. 171-182.

[Lanir, 1983] **Y. Lanir,** Constitutive equations for fibrous connective tissues, J. Biomech., 1983, vol. 16, pp. 1-12.

[Laplante, 2002] **A. Laplante**, Mécanisme de réépithélialisation des plaies cutanées: expression des protéines de stress chez la souris et analyse à l'aide d'un nouveau modèle tridimensionnel humain développé par génie tissulaire **[en ligne]**, Thèse Médecine expérimentale, Québec: Université Laval, 2002. Disponible sur: <http://www.theses.ulaval.ca/2002/19935/19935.html> (consulté le 07/01/2004)

[Lemaître, 1988] **J. Lemaître, J-L. Chaboche**, Mécanique des matériaux solides, Paris, France, Bordas, 1988.

[Leuillet, 2004] **S. Leuillet, C. Rousselle, D. Vaudry,** Principe et cours sur la microscopie confocale à balayage laser **[en ligne]**. Disponible sur:

<http://www.univ-rouen.fr/inserm-u413/ifrmp/principe.htm> (consulté le 18/10/2004)

[Lepetit, 2004] **J. Lepetit, R. Favier, A. Grajales, P. O. Skjervold,** A simple cryogenic holder for tensile testing of soft biological tissues, J. Biomech., 2004, vol. 37, n° 4, pp. 557-562.

[Loreal] **L'oréal**, Skin science - An organ revealed **[en ligne]**. Disponible sur:
<http://www.skin-science.com> (consulté le 15/06/2006)

[Lorentz, 2004] **E. Lorentz, P. Badel,** A new path-following constraint for strain-softening finite element simulations, Int.l J. Num. Met. Eng., 2004, vol. 60, pp. 499-526.

[Lu, 2000] **H. Lu, P. D. Cary,** Deformation Measurements by Digital Image Correlation: Implementation of a Second-order Displacement Gradient, Experimental Mechanics, 2000, vol. 40, n° 4, pp. 393-400.

M

[Mansour, 1993] **J. R. Mansour, B. R. Davis, M. Srour, R. Theberge,** A method for obtaining repeatable measurements of the tensile properties of skin at low strain, J. Biomech., 1993, vol. 26, n° 2, pp. 211-216.

[Marcellier, 2001] **H. Marcellier, D. Varchon, P. Vacher, P. Humbert,** Optical analysis of displacement and strain fields on human skin, Skin Research and Technology, 2001, vol. 7, pp. 246-253.

[Mason, 2005] **M. J. Mason, C. S. Shah, M. Maddali, K. H. Yang, W. N. Hardy, C. A. Van Ee, K. Digges,** A new device for high-speed biaxial tissue testing: application to traumatic rupture of the aorta, **In**: Proc. of the SAE World Congress, 11-14 April 2005, Detroit, USA, SAE Technical Paper 2005-01-0747.

[Maurel, 1998] **W. Maurel, Y. Wu, N. Magnenat Thalmann, D. Thalmann,** Biomechanical models for soft tissue simulation, Springer (ESPRIT basic research series), 1998.

[McElhaney, 1973] **J. H. McElhaney, J. W. Melvin, V. L. Roberts, H. D. Portnoy**, Dynamics characteristics of the tissues of the head, **In**: R. M. Kenedi (ed.), Perspectives in Biomedical Engineering, 1973, MacMillan Press, London, pp. 215-222.

[Mguil-Touchal, 1997]

S. Mguil-Touchal, Une technique de corrélation directe d'images numériques: application à la détermination de courbes limites de formage et proposition d'un critère de striction, Thèse Mécanique, Lyon: Institut National des Sciences Appliquées, 1997.

[Mguil-Touchal, 1998]

S. Mguil-Touchal, F. Morestin, M. Brunet, Experimental determination of forming limit diagrams using a method of digital picture, IDDRG 98, **In**: Proc. of the 20th Biennal Congress, 1998, Genval Brussel.

[Mohan, 1982] **H. Mohan, J. W. Melvin,** Failure properties of passive human aortic tissue. I - Uniaxial tension tests, J. Biomech., 1982, vol. 15, n° 11, pp. 887-902.

[Mohan, 1983] **H. Mohan, J. W. Melvin,** Failure properties of passive human aortic tissue. II - Biaxial tension tests, J. Biomech., 1983, vol. 16, n° 1, pp. 31-34.

[Mounajed, 2001] **G. Mounajed, O. Chemali, J-V. Heck,** Développement des algorithmes de chargement automatique pour la résolution des lois de comportement avec pic avec le code de calcul Symphonie, Rapport de recherche MOCAD, 2001, 52p. Disponible sur: <http://mocad.cstb.fr/Rapports/chargement%20automatique.pdf> (consulté le 20/02/2007)

N

[Nicolle, 2004] **S. Nicolle, M. Lounis, R. Willinger**, Shear Properties of Brain Tissue over a Frequency Range Relevant for Automotive Impact Situations: New Experimental Results, Stapp Car Crash Journal, 2004, vol. 48, pp. 239-258.

[North, 1978] **J.F. North, F. Gibson,** Volume compressibility of human abdominal skin, J. Biomech., 1978, vol. 11, n° 4, pp. 203-207.

P

[Pioletti, 1997] **D. P. Pioletti**. Viscoelastic properties of soft tissues: application to knee ligaments and tendons, Thèse Sciences, Lausanne: Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1997, 106p.

Q

[Quirinia, 1991] **A. Quirinia, A. Viidik,** Freezing for postmortal storage influences the biomechanical properties of linear skin wounds, J. Biomech., 1991, vol. 24, n° 9, pp. 819-823.

R

[Riks, 2004] **E. Riks,** Buckling, Chapter 4 **In**: Encyclopedia of Computational Mechanics, Volume 2: Solids and Structures, John Wiley & Sons, Ltd. 2004.

[Robert, 2000] **L. Robert,** The process of ageing, 6th Varilux Presbyopia Forum, Vilamoura, Portugal, June 12-16th, 2000.

[Roche, 1997] **I. Roche,** Relation entre le comportement mécanique et la structuration des lattices de collagène autotendus, Thèse, Besançon: Université de Franche-Comté, 1997.

[Roeder, 2002] **B. A. Roeder, K. Kokini, J. E. Sturgis, J. P. Robinson, S. L. Voytik-Harbin,** Tensile Mechanical Properties of Three-Dimensional Type I Collagen Extracellular Matrices With Varied Microstructure, Journal of Biomechanical Engineering, 2002, vol. 124, n° 2, pp. 214-222.

[Rollhauser, 1950]

H. Rollhauser, The tensile strength of human skin, Gegenbauers morph. Jb., 1950, vol. 90, pp. 249-261.

S

[Sabourin, 2000] **F. Sabourin, E. Sallé**, Calcul des structures par éléments finis **[en ligne]**, Polycopié de cours, INSA de Lyon, 2001. Disponible sur:
< http://docinsa.insa-lyon.fr/polycop/pont.php?cle=GMCS005A > (consulté le 06/08/2006)

[Sacks, 1997] **M. S., Sacks, D. B., Smith, E. D., Hiester,** A small angle light scattering device for planar connective tissue microstructural analysis, Annals of Biomedical Engineering, 1997, vol. 25, pp 678-689.

[Sacks, 1998] **M. S. Sacks, C. J. Chuong**, Orthotropic Mechanical Properties of Chemically Treated Bovine Pericardium, Annals of Biomedical Engineering, 1998, vol. 26, pp. 892-902.

[Sacks, 1999] **M. S. Sacks**, A method for planar biaxial mechanical testing that includes in-plane shear, J. Biomech. Eng., 1999, vol. 121, pp. 551-555.

[Sacks, 2000] **M. S. Sacks**, Biaxial mechanical evaluation of planar biological materials, Journal of Elasticity, 2000, vol. 615, pp. 199-246.

[Sacks, 2003] **M. S. Sacks**, Incorporation of experimentally-derived fiber orientation into a structural constitutive model for planar collagenous tissues, J. Biomech. Eng., 2003, vol. 125, pp. 280-287.

[SAEJ211/1] **SAEJ211/1,** Rev. March, 1995, developed by the SAE Safety Test Instrumentation Standards Committee of the SAE Technical and Research Group, International, 400 Commonwealth Drive, Warrendale, Pennsylvania 15096.

[Sanghavi, 2004] **P. Sanghavi, D. Bose, J. Kerrigan, N. J. Madeley, J. Crandall,** Non-contact strain measurement of biological tissue, Biomedical Sciences Instrumentation, 2004, vol. 40, pp. 51-56.

[Schmid, 2005] **F. Schmid, G. Sommer, M. Rappolt, C. A. J. Schulze-Bauer,** † **P. Regitnig, G. A. Holzapfel, P. Laggner, H. Amenitsch**, In situ tensile testing of human aortas by time-resolved small-angle X-ray scattering, Journal of Synchrotron Radiation, 2005, vol. 12, pp. 727-733.

[Schöni, 2003] **F. Schöni-Affolter** - Département de Médecine, Division d'Histologie de l'Université de Fribourg, Division of histology **[en ligne]**. Disponible sur:
< http://perso.unifr.ch/franziska.schoeni/allg/systematik/f-system.html> (consulté le 19/11/2004)

[Schreier, 2002] **H. W. Schreier M. A. Sutton,** Systematic Errors in Digital Image Correlation Due to Undermatched Subset Shape Functions, Experimental Mechanics, 2002, vol. 42, n° 3, pp.303-310.

[Shah, 2006] **C. S. Shah, W. N. Hardy, M. J. Mason, K. H. Yang, C. A. Van Ee, R. Morgan, K. Digges,** Dynamic biaxial tissue properties of the human cadaver aorta, Stapp Car Crash Journal, 2006, vol. 50, pp. 217-246.

[Silver, 1987] **F. H. Silver,** Biological Materials: Structure, Mechanical Properties And Modeling of Soft Tissues, New York, USA, NYU Press, 1987.

[Silver, 1992] **F. H. Silver, Y. P, Kato, M., Ohno, A. J., Wasserman,** Analysis of mammalian connective tissue: relationship between hierarchical structures and mechanical properties, Journal of Long-Term Effect of Medical Implants, 1992, vol. 2, n° 2-3, pp. 165-198.

[Silver, 2001] **F. H. Silver, J. W. Freeman, D. DeVore,** Viscoelastic properties of human skin and processed dermis, Skin Research and Technology, 2001, vol. 7, n° 1, pp. 18-23.

[Snedeker, 2005] **J. G. Snedeker, P. Niederer, F. R. Schmidlin, M. Farshad, C. K. Demetropoulos, J. B. Lee, K. H. Yang,** Strain-rate dependant material properties of the porcine and human kidney capsule, J. Biomech., 2005, vol. 38, pp. 1011-1021.

[Song, 1993] **L. S. Song,** Histologic study of arrangement patterns of dermis fibers to facial Langer's lines and Kraissl's lines, Chinese journal of stomatology, 1993, vol. 28, pp. 212-215.

[Stemper, 2005] **B. D. Stemper, N. Yoganandan, F. A. Pintar,** Methodology to study intimal failure mechanics in human internal carotid arteries, J. Biomech., 2005, vol. 38, pp. 2491-2496.

[Stylianopoulos, 2007]

T. Stylianopoulos, V. H. Barocas, Volume-averaging theory for the study of the mechanics of collagen networks, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 2007, vol. 196, pp. 2981-2990.

[Subit, 2004] **D. Subit**, Modélisation de la liaison os-ligament dans l'articulation du genou, Thèse Mécanique, Marseille: Université de la méditerranée Aix - Marseille II, 2004, 174p.

[Sutton, 1983] **M. A. Sutton, W. J. Wolters, W. H. Peters, W. F. Ranson, S. R. McNeill,** Determination of displacements using an improved digital correlation method, Image and Vision Computing, 1983, vol. 1, n° 3, pp.133-139.

[Sutton, 1986] **M. A. Sutton, Mingqi cheng, W. H. Peters, Y. S. Chao, S. R. McNeill,** Application of an optimized digital correlation method to planar deformation analysis, Image and Vision Computing, 1986, vol. 4, n° 3, pp.143-150.

T

[Tong, 1976] **P. Tong, Y-C. Fung**, The stress-strain relationship for the skin, J. Biomech., 1976, vol. 9, pp. 649-657.

V

[Van Locke, 2004]

M. Van Loocke, C. G. Lyons, C. Simms, The three-dimensional mechanical properties of skeletal muscle: experiments and modelling. Chapter VIII. **In**: Topics in Bio-Mechanical Engineering, P.J. Prendergast and P.E. McHugh (Eds), 2004 **[en ligne]**. Disponible sur : <http://www.tcd.ie/bioengineering/documents/ChapterVIII_000.pdf> (consulté le 11.04.2007)

[Vescovo, 2000] **P. Vescovo et al.,** Méthodologie expérimentale sur matériaux biologiques – application à la peau humaine, **In**: C. Ribreau, Y. Berthaud, M-R. Moreau et al., Mecanotransduction 2000 - Matériaux et structures des sciences de l'ingénieur et du vivant, Ed. Gamac, 2000, 402p.

[Vitellaro, 1994] **L. Vitellaro-Zuccarello, S. Cappelletti, V. Dal Pozzo Rossi, M. Sari-Gorla**, Stereological analysis of collagen and elastic fibers in the normal human dermis: variability with age, sex, and body region, The Anatomical Record, 1994, vol. 238, pp. 153-162.

W

[Wijn, 1978] **P. F. F. Wijn, A. J. M. Brakkee, A. J. F. Vendrik,** The alinear viscoelastic properties of the human skin in vivo for small deformations, **In**: Reul H Ed., Conference digest of the 1st ICMMB, Aachen 1978, pp. 207-210.

Y

[Yamada, 1970] **H. Yamada,** Strength of biological materials, Michigan, USA, Ed. F. Gaynor Evans, 1970, 297p.

Z

[Zohdi, 2007] **T. I. Zohdi,** A computational framework for network modeling of fibrous biological tissue deformation and rupture, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 2007, vol. 196, pp. 2972-2980.

Annexe 1 :

Tableaux comparatifs des données bibliographiques

1. Propriétés mécaniques de la peau humaine en traction

Références	**Module élastique**			**Caractéristiques de la rupture**			**Tissu**	**Conditions de la traction**
	E_1	E_2	E global	Déformation	Effort/unité largeur	Contrainte	P = peau	
Khatyr, 2004			0.3 - 1.1 MPa				PH	*in vivo*
Agache, 2000	< 7 kPa	510 kPa					PH	*in vitro* immergée
Rollhauser, 1950			3 / 20 MPa				PH (enfant/adulte)	*in vitro*
Silver, 1992			6 - 35 MPa	50 - 200%		2 - 15 MPa	P	*in vitro*
Brèque, 2002	0.7 MPa	37 MPa				0.9 - 2.5 MPa	P Cochon	*in vitro* 0.08mm/s
Silver, 1987	0.1 MPa	20 MPa					PH	*in vitro*
Daly, 1982	0.005 MPa						PH	*in vitro* 0.16mm/s
Daly, 1979			30 MPa				PH - abdomen	*in vitro* à l'air
Yamada, 1970							PH - front	*in vitro*
				70%			(10-29ans)	
					10 N/mm	5.1 MPa	(30-49ans)	
				54%	9 N/mm	4.6 MPa	(moy. adultes)	
							PH - intérieur bras	*in vitro*
				120%			(10-29ans)	
					22 N/mm	10.5 MPa	(30-49ans)	
				93%	17 N/mm	9.4 MPa	(moy. adultes)	

Tableau A1-1: Propriétés mécaniques de la peau humaine en traction.

2. Propriétés mécaniques des fibres de la peau humaine en traction

Références	**Module élastique** E	**Caractéristiques de la rupture** Déformation	Contrainte	**Fibres**
				Collagène
Silver, 2001	4.4 GPa 7.3 GPa			Collagène (peau) Collagène (ligament)
Silver, 1992	500 MPa	10%	40 MPa	Collagène (ϕ 50-100μm)
Schöni, 2003	50 - 100 MPa	50%		Collagène
				Elastine
Silver, 2001	4.0 MPa 4.53 MPa			Elastine (peau) Elastine (ligament)
Silver, 1992	0.1 MPa	300%	0.1 MPa	Elastine
Schöni, 2003		120 - 150%		Elastine
Agache, 2000	0.3 MPa			Elastine

Tableau A1-2: Propriétés mécaniques des fibres de la peau humaine en traction.

3. Protocoles de traction sur tissus biologiques mous fibreux

Références	**Tissus**	**Conservation**	**Eprouvette** (dim = longueur x largeur)	**Type de traction**	**Déformations max**	**Vitesse** (m/s)	**Vit Def** (s^{-1})	**Mesures de déformations**
	peau							
Yamada, 1970	peau - sujets frais	sérum physiologique à 4°C (1 nuit à 3 jours = tissu saturé en eau)	I: centre 10x2-3mm² extrémitées 5-7mm de large	1-D // direction fibres	-> rupture	quasi-statique		dist. entre 2 extrémités de la partie étroite - micromètre
Lanir-a-b, 1974	peau lapin - abdomen	peau flotte sur sérum physiologique pendant test	carré: 35x35mm²	1-D 2-D	petites def. petites def.	quasi-statique 2.00E-05 2.00E-04 2.00E-03		dist. entre 2 paires de traits // + Video Dimensional Analyser
Daly, 1982	peau - sujets frais	sérum physiologique à 4°C (<12h)	rectangle: 50x10mm²	1-D	-> rupture	1.60E-04		grille (carrés 1mm) + photos
Belkoff, 1991	peau rat - thorax	peau testée fraîche humidifiée au sérum pendant test	I: centre 22.4x4.8mm² extrémitées 7.9x15.9mm²	1-D			0.015	capteur dist. mors MEB: observation collagène
Marcellier, 2001	peau - abdominoplastie			1-D	petites def.	quasi-statique		sans mouchetis - corrélation d'images
Brèque, 2002	peau porc		I: Lo=137mm, lo=25mm croix	1-D 2-D	-> rupture -> rupture	0.08 0.08		4 marqueurs + caméra (1i/s)
Del Prete, 2004	peau souris: 3 témoins 2 x qté collagène du témoin 0.5 x qté collagène du témoin	huile minérale	rectangle: 15x2mm	1-D				capteur LVDT micro. polarisé: observation fibres (après essai)

Tableau A1-3: Comparaison des protocoles de traction sur la peau.

Références	Tissus	Conservation	Eprouvette (dim = longueur x largeur)	Type de traction	Déformations max	Vitesse (m/s)	Vit Def (s^{-1})	Mesures de déformations
	vaisseaux							
Mohan, 1982	aorte	solution de Ringer à 1-3°C (1-7j)	I: centre 19.05x6.35mm² extrémitées 12.7x19.05mm²	1-D, longi. + circonf.	-> rupture	2.11E-04 1.5		grille rectangulaire + photos (face-côté)
Mohan, 1983	aorte	solution de Ringer à 1-3°C (1-7j)	ronde: ϕ 50-65mm	2-D, gonflement	-> rupture		0.01 20	grille circulaire
Billiar-a, 2000	valve aortique porc traitée chimiquement	sérum physiologique à 4°C (<72h)	carré 10-16mm côté	2-D, radial circonf.			0.04-0.15 0.01-0.04	9 points (carré 5x5mm²) + caméra (15Hz)
Mason. 2005	aorte		croix, centre 10x10mm²	2-D		possible -> 10m/s		motif régulier 16 points (d=2mm) + caméra (1000i/s) laser: mesure d'épaisseur
Schmid, 2005	aorte (adventice)	congélation puis sérum physiologique		1-D, longi. + circonf.		< 1.50E-3		2 lignes // aux extrémités + video-extensomètre: dist. lignes small-angle X-ray scattering: orientations fibres
Stemper, 2005	carotide	congélation dans solution de Ringer jusqu'à 24h avt essai	I: centre 15.9x7.9mm² extrémitées 14.1mm large	1-D, longi.	-> rupture	1.00E-04		grille 9 points + 2 caméras (125H) (face-arrière)
Shah, 2006	aorte	congélation	croix, centre 10x10mm²	2-D	-> rupture	1 5		motif régulier 11 points + camera (2000-3000i/s) - suivi points auto
	capsules							
Choi, 1990	péricardium chien	sérum physiologique à 5°C (<24h)	carré 40x40mm²	2-D		1.27E-04		4 points + camera
Sacks, 1998, 1999	péricarde bovin	"glutaraldehyde" solution à 4°C (>24h)	carré 25x25mm²	2-D	-> εmax=0.16		0.008	4 points (carré 5x5mm²) + caméra (15Hz)
Snedeker, 2005	capsule rénale	sérum physiologique <2h	rectangle: 8-15x5-10mm²	1-D	-> rupture	1.00E-04 7	0.005 250	capteur allongement +
	ligaments							
Arnoux, 2000	ligament genou	congélation ou solution de Winckler		1-D	-> rupture	1.98		capteur dist. mors
Sanghavi, 2004	ligament genou	frais		1-D	-> rupture			mouchetis - corrélation d'images

Tableau A1-4: Comparaison des protocoles de traction sur les vaisseaux, les capsules d'organes et les ligaments.

Références	Potentiel d'énergie de déformation W	Contraintes de Piola-Kirchhoff II S	Paramètres	Tissu
Tong, 1976	$\rho_0 W = \frac{1}{2} f_1(\alpha, E) + \frac{1}{2} c.\exp(f_2(a, E))$ $f_1(\alpha, E) = \alpha_1.E_{11}{}^2 + \alpha_2.E_{22}{}^2 + 2\alpha_4.E_{11}.E_{22}$ $f_2(a, E) = a_1.E_{11}{}^2 + a_2.E_{22}{}^2 + 2.a_4.E_{11}.E_{22}$	$S_{11} = \alpha_1 E_{11} + \alpha_4 E_{22} + c(a_1 E_{11} + a_4 E_{22})\exp[X]$ $S_{22} = \alpha_4 E_{11} + \alpha_2 E_{22} + c(a_4 E_{11} + a_2 E_{22})\exp[X]$ $X = a_1.E_{11}{}^2 + a_2.E_{22}{}^2 + 2a_4 E_{11} E_{22}$	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ a_1, a_2, a_4 c	Peau de lapin - Traction 2D
Billiar-b, 2000 Sack, 2003	- Fonction de répartition des fibres: $R(\theta) = \frac{1}{\sigma_R.\sqrt{2\pi}}.\exp\left[\frac{-(\theta-\mu_R)^2}{2\sigma_R{}^2}\right]$ - Echelle de la fibre: *w* - Echelle de la membrane: $\boldsymbol{W} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{w(E_f).R(\theta).d\theta}$	- Echelle de la fibre: $S_f = a(\exp(b.E_f) - 1)$ - Echelle de la membrane: $\mathbf{S} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} S_f(E_f).[\mathbf{x_f} \otimes \mathbf{x_f}].R(\theta).d\theta$	a, b μ_R, σ_R	Péricarde bovin / Valve aortique porc - Traction2D
Arnoux, 2000	- Loi d'évolution de l'endommagement: $\dot{D} = \frac{1}{Q(D+D_0)^{1/n}}.\alpha\beta n(D+D_0)\dot{\lambda}\left[\exp\left(\beta\left(\lambda^2+\frac{2}{\lambda}-3\right)\right)-\frac{1}{\lambda}\right]$ - Cas hyperélastique: $W_e(\mathbf{C}) = \alpha\exp[\beta(I_1-3)] - \frac{\alpha\beta}{2}(I_2-3))$ - Cas du matériau endommagé: $W_{ed}(\mathbf{C}, D) = (1-D)W_e(\mathbf{C})$	- Pression hydrostatique: $p = 2\alpha\beta(1-D)\frac{1}{\lambda}\left[\exp(\beta.K) - \frac{1}{2}\left(\lambda^2+\frac{1}{\lambda}\right)\right]$ $K = \left(\lambda^2+\frac{2}{\lambda}-3\right)$ - Cas du matériau endommagé: $S_{11} = -p\frac{1}{\lambda} + 2\alpha\beta(1-D)\left[\exp(\beta.K) - \frac{1}{\lambda}\right]$	α, β Q, n, D_0	Ligament du genou humain - Traction 1D

Tableau A1-5: Trois lois de comportement appliquées à des tissus biologiques mous fibreux.

Annexe 2 :

Protocoles expérimentaux

1. Essais de traction

Quasi-statique

Un essai de traction quasi-statique se déroule comme suit:

1- Réglage préalable de la lumière sur une chute de peau recouverte de mouchetis, ce réglage s'effectue pour chaque type de peau, c'est-à-dire pour chaque sujet, avant la série d'essais correspondants.

2- Découpe des éprouvettes.

3- Découpe des biopsies initiales, épinglage sur une plaque en polystyrène et dépôt dans une solution de sérum physiologique. Cette étape n'a lieu qu'en cas d'étude histologique, elle n'a pas pu être réalisée sur tous les essais.

4- Collage et fixation de l'éprouvette dans les barres des mors, les barres étant dissociables du support en U des mors, qui lui est solidaire de la machine de traction.

5- Dépôt du mouchetis.

6- Fixation de l'éprouvette dans les mors.

7- Mise à zéro du capteur d'effort tant que l'éprouvette n'est pas tendue.

8- Application d'un effort de 1N environ pour la mise à zéro du capteur de déplacement.

9- Lancement de l'essai et des acquisitions couplées des capteurs et de la caméra.

10- Retrait de l'éprouvette des mors.

11- Découpe des biopsies de la rupture, épinglage sur une plaque en polystyrène et dépôt dans le formol. Cette dernière étape n'a lieu qu'en cas d'étude histologique, elle n'a pas pu être réalisée sur tous les essais.

Dynamique

Concernant le protocole d'essais dynamiques, l'étape 1 est quelque peu différente dans le sens où, en plus de la lumière, il est nécessaire de régler aussi l'ouverture des objectifs afin d'optimiser le contraste soit des mires, soit du mouchetis, pour chaque type de peau.

Suivent les étapes 2 à 6 qui restent identiques, puis viennent directement les étapes 9 à 11.

2. Réalisation de coupes histologiques

Remarquons que sur certaines figures de ce paragraphe, se trouvent les abréviations suivantes : E (épiderme), D (derme), H (hypoderme).

Préparation des biopsies

- ✓ Le prélèvement des biopsies de peau humaine est effectué suivant le schéma de la figure 3-13-a: sur chaque éprouvette sont découpées une biopsie au niveau de la zone de rupture et une biopsie témoin sur la peau non étirée attenante à l'éprouvette. Notons que la même biopsie témoin sert aux deux éprouvettes appareillées attenantes.
- ✓ Les biopsies sont épinglées sur une plaque de polystyrène afin de les maintenir dans leurs dimensions initiales ≈ 10*5 mm² (Figure A2-1).
- ✓ Elles sont immédiatement déposées dans une solution de Baker (formol tamponné pH7) et y restent pendant 3 jours pour permettre la fixation du tissu.

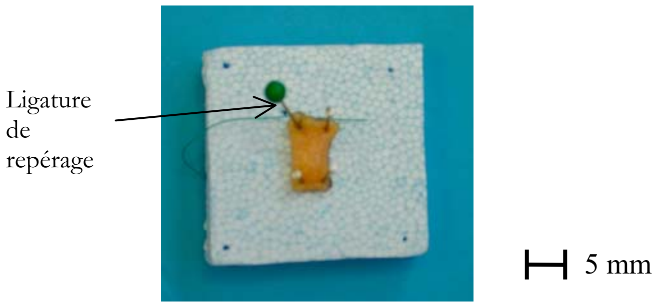


Figure A2-1 : Biopsie témoin épinglée sur une plaque de polystyrène.

⚐ Ces trois premières étapes sont réalisées au laboratoire (LBMC) à la suite des essais de traction.

Préparation des coupes histologiques

- ✓ Les biopsies sont retirées des plaques de polystyrène et déposées dans des cassettes d'inclusion.
- ✓ Elles sont soumises à un cycle automatique de déshydratation à l'alcool.
- ✓ Lors de l'inclusion en paraffine, les biopsies sont déposées dans un moule qui sera rempli de paraffine, le couvercle de la cassette d'inclusion est ensuite collé dessus pour repérage du plan de coupe. A l'intérieur du moule, les biopsies doivent être orientées suivant le schéma de la figure A2-2, de telle sorte que la découpe puisse se faire selon le

plan défini sur la figure 3-13-b. L'orientation adéquate est déterminée à partir de la ligature de repérage (étoile bleue sur la figure A2-2 cousue préalablement sur la peau).

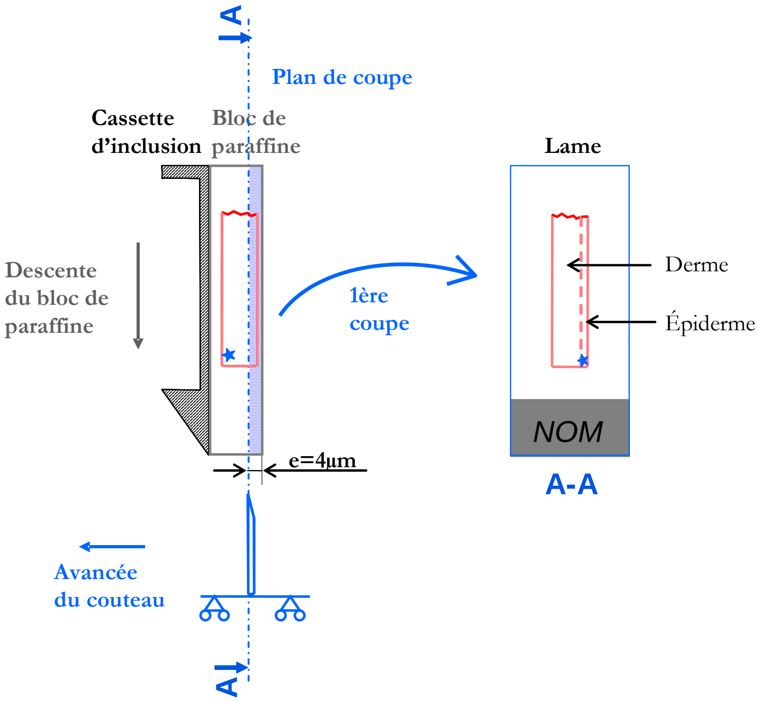


Figure A2-2 : Orientation d'une biopsie par rapport à la cassette lors de l'inclusion en paraffine telle que le plan de coupe soit parallèle au fond de la cassette – Dépôt de la coupe sur une lame.

✓ Après démoulage des blocs de paraffine, ceux-ci sont découpés au microtome suivant un plan parallèle au fond de la cassette. Les coupes ainsi réalisées, d'épaisseur 4µm, passent quelques minutes dans un bain d'eau chaude (T=40°C) pour déplissage avant d'être déposées sur une lame en verre (Figure A2-2).

✓ Le séchage des lames s'effectue en étuve soit une journée à 37°C soit une heure à 60°C.

✓ La phase de coloration se découpe en plusieurs étapes propres à chaque colorant. De manière générale, elle consiste à retirer la paraffine des coupes et appliquer successivement chacune des couleurs choisies. Sur la peau humaine, plusieurs colorations sont testées afin d'observer son réseau de fibres :

- Le trichrome de Masson colore en vert le collagène, les noyaux en bleu noir et le cytoplasme en rouge (Figure A2-3-a).
- L'HES (hématoxyline – éosine – safran) colore le collagène en jaune safran (Figure A2-3-b).

- L’Orcéine-shikata colore en brun acajou l’élastine (Figure A2-3-c).

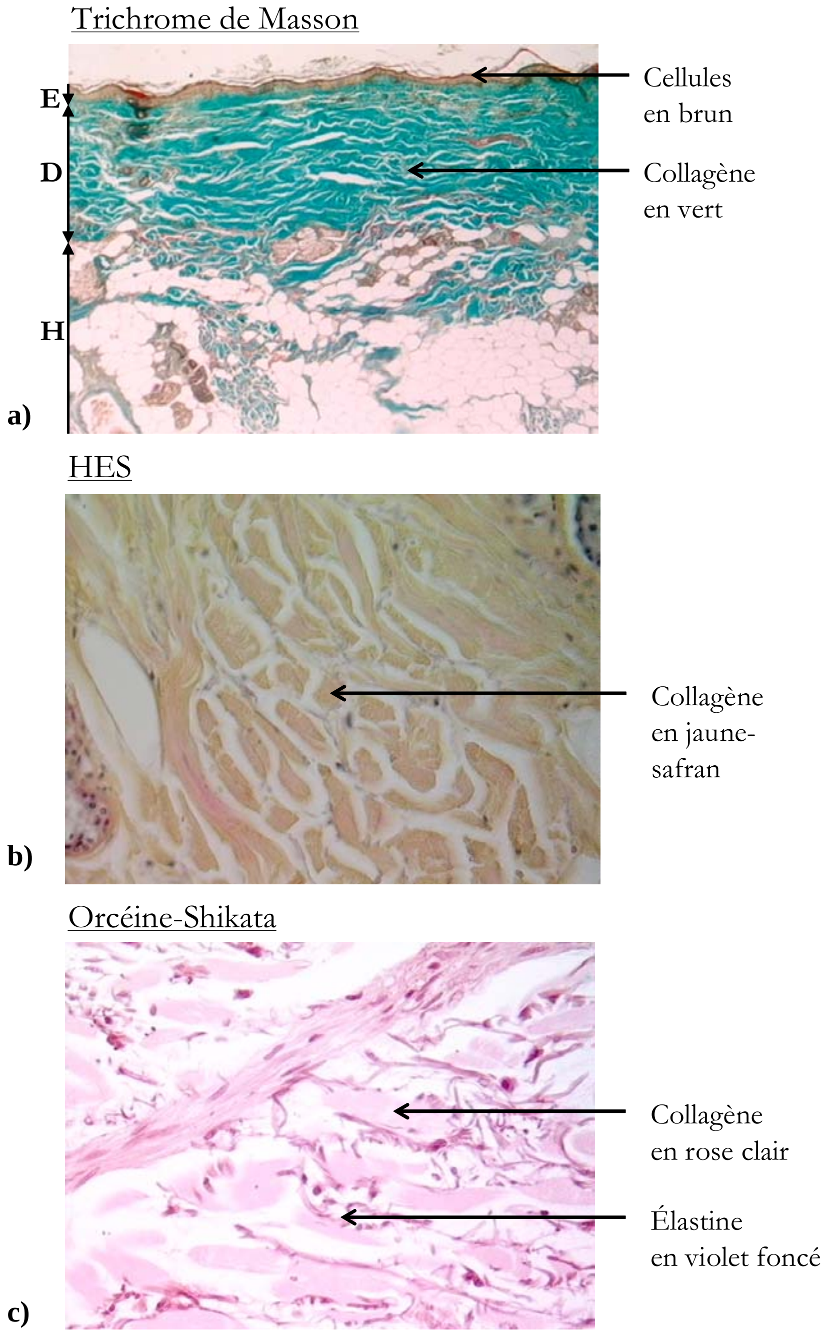


Figure A2-3 : Différentes colorations testées sur la peau humaine (biopsies témoin) : a) trichrome de Masson (peau totale grossissement x5), b) HES (derme profond grossissement x20) et c) Orcéine-shikata (derme profond grossissement x40) – microscope optique.

✓ Le montage des lames, qui correspond au collage d'une lamelle de protection sur la coupe colorée, est effectué, soit manuellement, soit automatiquement par une machine.
✓ La conservation des lames se fait à température ambiante.

⚐ La réalisation des coupes et la coloration sont effectuées, soit au Laboratoire de Recherche Dermatologique, Pav. R, Hôpital E. Herriot avec l'aide du Laboratoire Central d'Anatomie et de Cytologie Pathologique, Bât. 10, Hôpital E. Herriot, soit par la Société Novotec à Lyon. Notons que l'utilisation de colorants différents pour mettre en évidence le collagène est due aux différents opérateurs.

Observations au microscope optique

Lors des observations, nous nous intéressons essentiellement au réseau de fibres de collagène, nous sélectionnons donc uniquement les coupes colorées, soit au trichrome de Masson, soit à l'HES.
Pour cela, nous utilisons un microscope optique (Zeiss, West Germany). Si l'on souhaite visualiser la coupe de peau dans toute son épaisseur, un grossissement de x5 au maximum est nécessaire (Figure A2-3-a). A un grossissement x20, il est déjà possible de discerner les détails des faisceaux de fibres de collagène (Figure A2-5).

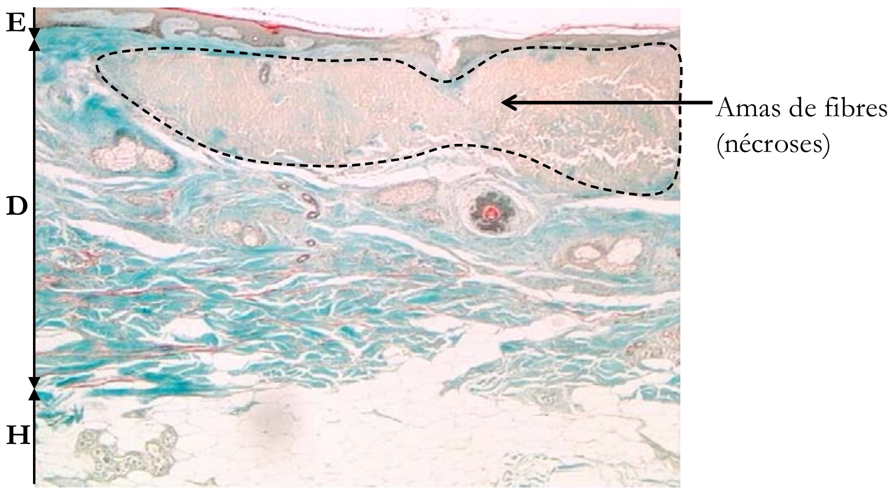


Figure A2-4 : Amas de fibres (d'élastine probablement) dans la partie supérieure du derme sur une biopsie de peau humaine étirée (coloration trichrome de Masson – microscope optique x5).

Listons quelques phénomènes caractéristiques observables sur les coupes histologiques ainsi réalisées sur la peau humaine in vitro:

✓ L'épiderme est en effet décollé du derme sur toutes les coupes:

⇨ ceci est du à la conservation en solution salée entre le prélèvement sur le sujet anatomique et l'essai.

✓ L'intensité de coloration du collagène varie d'une lame à l'autre:

⇨ ceci est du, soit à une épaisseur de coupe variable, soit à une coloration non homogène sur les différentes lames (temps d'attente différents) mais probablement pas à la variation de densité de fibres.

✓ Des trous (zones blanches) apparaissent sur les coupes au niveau du derme (Figure A2-5) :

⇨ ce sont des artéfacts de coupe.

✓ Même à l'état initial (peau non sollicitée) les fibres de collagène s'enroulent autour des poils :

⇨ il ne faut donc pas confondre ces enroulements de fibres avec les amas caractéristiques de la rupture.

✓ Sur certains sujets, il existe des amas de fibres, au niveau du derme papillaire (Figure A2-4) :

⇨ ces amas s'apparenteraient à des sortes de nécroses formées par des fibres d'élastine probablement car leur couleur n'est pas verte, il ne faut donc pas les confondre avec des faisceaux de collagène coupés dans le sens transversal.

⚐ L'observation des coupes histologiques est réalisée, soit au Laboratoire de Recherche Dermatologique, Pav. R, Hôpital E. Herriot avec l'aide de M. Haftek, soit à la Société Novotec à Lyon.

Mesures au planimètre

Les mesures d'épaisseur et de surface de fibres de collagène sont réalisées sur les biopsies témoin à l'aide du planimètre (Mini Mop, version 2.1) monté sur le microscope, en grossissement x25.

L'activation de la fonction « length » (longueur) permet de mesurer la distance entre deux points donnés par l'utilisateur sur l'image à l'aide de son pointeur alors que la fonction « area » (surface) permet le calcul de la surface contenue à l'intérieur d'une courbe fermée, que l'utilisateur décrit sur l'image avec ce même pointeur.

✓ Les mesures d'épaisseurs de l'ensemble épiderme / derme sont relevées entre la surface supérieure de l'épiderme et la surface supérieure de l'hypoderme (Figure 3-14). La valeur moyenne pour une biopsie est calculée à partir de 12 relevés effectués sur deux coupes (6 par coupe).

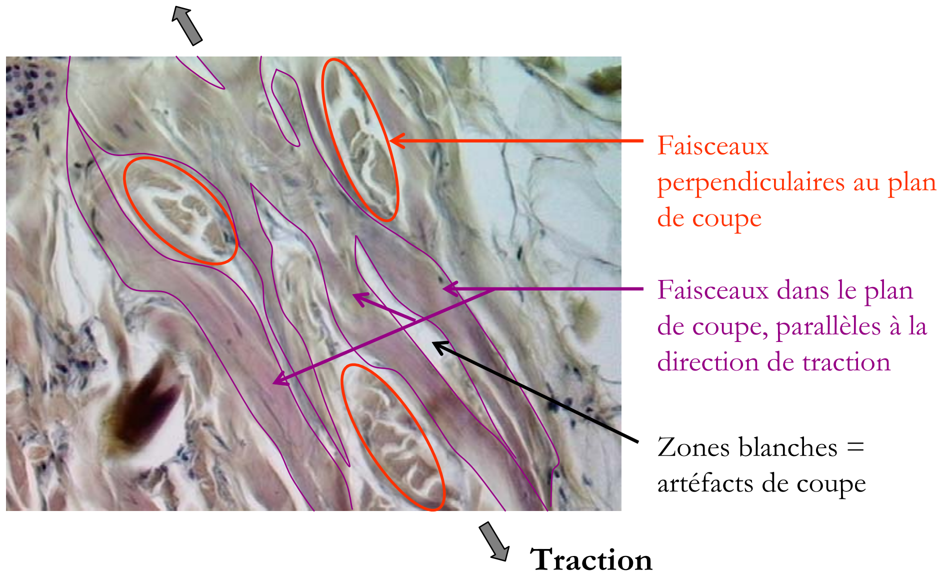


Figure A2-5 : Identification des orientations des faisceaux de fibres de collagène sur une biopsie témoin (peau humaine–coloration HES – microscope optique x20).

✓ Les mesures de surfaces de fibres de collagène sont effectuées au niveau du derme réticulaire. Trois zones de mesures par coupe sont définies dans le derme profond à la limite de l'hypoderme (Figure 3-14). A l'intérieur de ces zones, sont repérées les faisceaux de fibres de collagènes parallèles au plan de coupe (contour violet sur la figure A2-5) et ceux perpendiculaires (contour rouge sur la figure A2-5). Les mesures de surfaces de fibres dans chacune des directions sont obtenues par contourage des faisceaux de fibres. La valeur de densité surfacique de fibres dans une direction est obtenue en effectuant le rapport de la surface de fibres dans cette direction sur la surface totale de la zone d'étude. Pour chaque biopsie, sont données les densités surfaciques moyennes dans chaque direction, calculées à partir des trois valeurs des zones de mesure. Suivant la direction de découpe de la biopsie, chacune des directions de fibres, parallèle ou perpendiculaire au plan de coupe, est ensuite associée à une des directions longitudinale ou transversale définie auparavant sur le prélèvement de peau.

⚐ Les mesures sont effectuées au Laboratoire de Recherche Dermatologique, Pav. R, Hôpital E. Herriot,

3. Récapitulatif des essais réalisés

Les tableaux suivant rassemblent la totalité des essais réalisés au cours de ce travail sur la peau humaine. Pour chaque essai, sont précisés:

- la vitesse de traction: cas statique (Sta) ou dynamique (Dyn)
- le site de prélèvement de la peau: bras (Br) ou front (Fr)
- la direction de traction: longitudinale (Lo) ou transversale (Tr)
- si des coupes histologiques ont été réalisées: présence d'un H dans l'affirmative
- l'exploitation qui a pu être faite de l'essai: il est soit non exploitable (NE), soit exploitable en global uniquement à cause de problèmes d'imageries (EG) ou alors exploitable à la fois en global et en local (EGL), seuls les essais EGL sont présentés dans ce rapport.

Sujet			Essai						Exploitation
Sexe	Age	Date d'obtention	Nom	Date	Vitesse	Site prélèvement	Direction	Histologie	
H	**85**	01/07/2004	**RHD01**	07/07/2004	Dyn	F	Tr		EG
			RHD02	07/07/2004	Dyn	F	Tr		EGL
			RHD03	07/07/2004	Dyn	F	Tr		EGL
			RHD04	07/07/2004	Dyn	F	Tr		EGL
H	**68**	20/10/2004	**RHD05**	25/10/2004	Dyn	F	Tr		EG
			RHS05	26/10/2004	Sta		Tr		NE
F	**93**	20/12/2004	**RHD06**	22/12/2004	Dyn	F	Tr		EG
			RHD07	22/12/2004	Dyn	F	Tr		EG
			RHS06	22/12/2004	Sta	F	Tr		NE
			RHS07	22/12/2004	Sta	F	Tr		NE
H	**81**	17/01/2005	**RHD08**	18/01/2005	Dyn	F	Tr		EGL
			RHD09	18/01/2005	Dyn	F	Tr		EGL
			RHS08	19/01/2005	Sta	F	Tr		EGL
			RHS09	19/01/2005	Sta	F	Tr		EGL
F	**98**	16/03/2005	**RHD10**	18/03/2005	Dyn	F	Tr	H	EGL
			RHD11	18/03/2005	Dyn	F	Tr	H	EG
			RHS10	17/03/2005	Sta	F	Tr	H	NE
			RHS11	17/03/2005	Sta	F	Tr	H	EGL
F	**87**	17/03/2005	**RHD12**	18/03/2005	Dyn	F	Tr		EGL
			RHS12	17/03/2005	Sta	F	Tr		EGL
F	**85**	12/04/2005	**RHD13**	13/04/2005	Dyn	F	Tr		EGL
			RHD14	13/04/2005	Dyn	F	Tr		EGL
			RHS13	15/04/2005	Sta	F	Tr		NE
			RHS14	15/04/2005	Sta	F	Tr		EGL
H	**86**	17/06/2005	**RHD15**	24/06/2005	Dyn	BD	Tr		EG
			RHD16	24/06/2005	Dyn	BD	Tr		EG
			RHD17	24/06/2005	Dyn	BD	Tr		EG
			RHD18	24/06/2005	Dyn	BG	??		NE
			RHD19	24/06/2005	Dyn	BG	??		NE
			RHD20	24/06/2005	Dyn	F	Tr		EG
			RHD21	24/06/2005	Dyn	F	Tr		EG
			RHD22	24/06/2005	Dyn	F	Tr		EG
			RHD23	24/06/2005	Dyn	F	Tr		EG
F	**84**	19/10/2005	**RHD24**	27/10/2005	Dyn	F	Tr		EGL
			RHD25	27/10/2005	Dyn	F	Tr		NE
			RHD26	27/10/2005	Dyn	F	Tr		EGL
			RHD27	27/10/2005	Dyn	F	Tr		EGL
H	**69**	17/11/2005	**RHD28**	22/11/2005	Dyn	F	Tr		EGL
			RHD29	22/11/2005	Dyn	F	Tr		NE
			RHS28	24/11/2005	Sta	F	Tr		NE
			RHS29	24/11/2005	Sta	F	Tr		EGL

Tableau A2-1: Descriptif des essais de traction réalisés sur peau humaine.

Sujet			Essai						Exploitation
Sexe	Age	Date d'obtention	Nom	Date	Vitesse	Site prélèvement	Direction	Histologie	
H	**82**	10/08/2006	**RHD30**	11/08/2006	Dyn	BG	Lo		EGL
			RHD31	11/08/2006	Dyn	BG	Lo		EGL
			RHD32	11/08/2006	Dyn	BG	Tr		EGL
			RHD33	11/08/2006	Dyn	BG	Tr		NE
			RHD34	11/08/2006	Dyn	F	Tr		EGL
			RHD35	11/08/2006	Dyn	F	Tr		EGL
			RHD36	11/08/2006	Dyn	F	Tr		NE
			RHD37	17/08/2006	Dyn	BD	Tr		EGL
			RHD38	17/08/2006	Dyn	BD	Tr		EGL
			RHD39	17/08/2006	Dyn	BD	Lo		EGL
			RHD40	17/08/2006	Dyn	BD	Lo		EGL
H	**62**	04/09/2006	**RHD41**	06/09/2006	Dyn	F	Tr		EGL
			RHD42	06/09/2006	Dyn	F	Tr		EGL
			RHD43	06/09/2006	Dyn	F	Lo		EGL
			RHD44	06/09/2006	Dyn	F	Lo		EGL
			RHS41	08/09/2006	Sta	F	Tr		EG
			RHS42	08/09/2006	Sta	F	Tr		EGL
H	**86**	04/10/2006	**RHS45**	06/10/2006	Sta	F	Tr	H	EGL
			RHS46	06/10/2006	Sta	F	Tr	H	EGL
			RHS47	06/10/2006	Sta	F	Lo	H	EGL
			RHS48	06/10/2006	Sta	F	Lo	H	EGL
F	**66**	08/11/2006	**RHS49**	14/11/2006	Sta	F	Tr		NE
			RHS50	14/11/2006	Sta	F	Tr		EGL
			RHS51	14/11/2006	Sta	F	Lo		EGL
			RHS52	14/11/2006	Sta	F	Lo		EG
H	**78**	15/12/2006	**RHS53**	19/12/2006	Sta	F	Lo	H	EGL
			RHS54	19/12/2006	Sta	F	Lo	H	EGL
			RHS55	19/12/2006	Sta	F	Tr	H	EGL
			RHS56	19/12/2006	Sta	F	Tr	H	EGL
F	**78**	16/04/2007	**RHS57**	19/04/2007	Sta	F	Lo	H	EGL
			RHS58	19/04/2007	Sta	F	Lo	H	EGL
			RHS59	19/04/2007	Sta	F	Tr	H	EGL
			RHS60	19/04/2007	Sta	F	Tr	H	EGL
F	**88**	23/04/2007	**RHS61**	25/04/2007	Sta	F	Lo	H	EGL
			RHS63	25/04/2007	Sta	F	Tr	H	NE
			RHD61	25/04/2007	Dyn	F	Lo	H	EGL
			RHD62	25/04/2007	Dyn	F	Lo	H	EGL
			RHD63	25/04/2007	Dyn	F	Tr	H	NE
			RHD64	25/04/2007	Dyn	F	Tr	H	NE
			RHD65	25/04/2007	Dyn	BG	Tr	H	EGL
			RHD66	25/04/2007	Dyn	BG	Tr	H	EGL
			RHD67	26/04/2007	Dyn	BG	Lo	H	NE
			RHD68	26/04/2007	Dyn	BG	Lo	H	NE
			RHD69	26/04/2007	Dyn	BD	Tr	H	NE
			RHD70	26/04/2007	Dyn	BD	Tr	H	NE
			RHD71	26/04/2007	Dyn	BD	Lo	H	EGL
			RHD72	26/04/2007	Dyn	BD	Lo	H	EGL

Tableau A2-2: Descriptif des essais de traction réalisés sur peau humaine.

Annexe 3 :

Validité des mesures sur le montage de traction dynamique

1. <u>Validité des mesures sur le montage de traction dynamique</u>

Concernant le protocole d'essais dynamiques, le montage ayant été spécialement conçu pour l'occasion, il devient alors indispensable de vérifier la validité des résultats obtenus.

Etude temporelle

Plusieurs points seront analysés, mais effectuons tout d'abord, d'un point de vue qualitatif, une étude temporelle des résultats obtenus pour un essai dynamique représentatif (RHD14), comme il l'a été présenté dans [Jacquemoud, 2006]. Intéressons nous à l'évolution en fonction du temps de l'allongement global de l'éprouvette, de l'effort du mors mobile et de l'accélération du mors fixe. Il est alors possible de diviser l'essai en trois phases principales (Figure A3-2), phases que l'on retrouve sur les mesures locales du champ de déformation (composante E_{22} sur la figure 3-24).

- ✓ Premièrement, de l'instant t_0, matérialisé par l'entrée en contact du chariot principal avec le nid d'abeille, à un peu moins de t = 4ms (pour l'essai considéré), l'éprouvette n'est quasiment pas chargée. Cette première phase correspond en fait à l'arrêt progressif du chariot principal dans le nid d'abeille, durant cette période tout l'ensemble du montage (principal et secondaire) se déplace d'un bloc, de la même manière que pendant la chute libre qui précède. Il n'y a donc aucun mouvement relatif entre les mors, ce qui se traduit au niveau global par des valeurs d'allongement de l'éprouvette et d'effort du mors mobile nulles. Au niveau des mesures locales, la composante E_{22} du champ de déformation garde des valeurs très faibles et relativement homogènes.
- ✓ Deuxièmement, dès que la peau commence à être étirée (t = 4ms à 7.5ms), les valeurs globales d'allongement et d'effort augmentent. De même, les valeurs locales du champ de déformation (composante E_{22}) augmentent et des valeurs particulièrement élevées se concentrent dans certaines zones.
- ✓ Troisièmement, à l'instant correspondant à l'effort maximal (t = 7.5ms), les valeurs maximales des déformations locales (composante E_{22}) se trouvent concentrées dans la zone proche de la rupture.

Les mesures relevées sur les capteurs sont donc cohérentes avec l'évolution du champ local de déformation, mesuré par corrélation d'images.

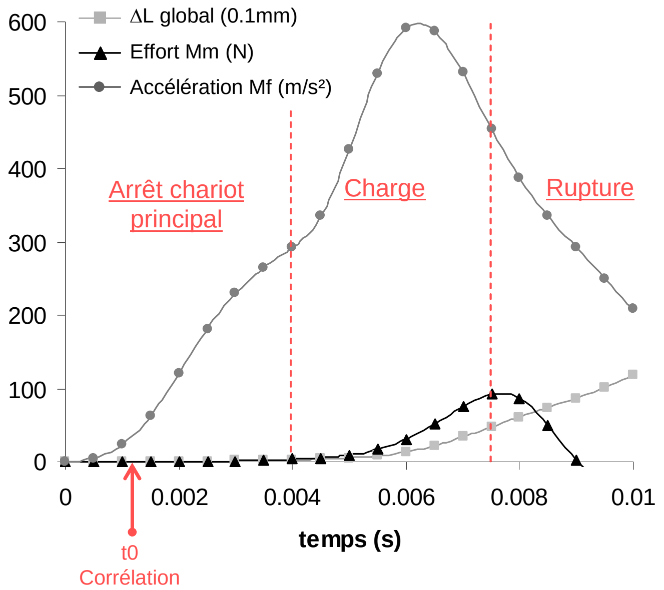


Figure A3-1: Évolution en fonction du temps de l'allongement global ΔL, de l'effort du mors mobile (Mm) et de l'accélération du mors fixe (Mf) pour l'essai RHD14 et définition des 3 phases de la traction dynamique.

<u>Comparaison des mesures d'allongement de l'éprouvette</u>

La mesure de l'allongement ΔL est doublée par un suivi de mires, apportant une nouvelle valeur de déplacement relatif du mors mobile par rapport au mors fixe, valeur toujours considérée comme globale. Le déplacement des mires (rond blanc sur font noir représenté sur la figure 3-10-a) est calculé sur chaque image à l'aide du logiciel PhotoSpot®. Les images utilisées dans ce cas sont celles de la caméra appelée "vue d'ensemble" dont le réglage du champ est effectué de telle sorte que l'ensemble du montage soit visible jusqu'à la fin de l'essai (Figure 3-10-a). Notons que cette caméra n'est pas perpendiculaire au plan de l'éprouvette, comme le montre le schéma de la figure 3-12, mais nous ne nous intéressons qu'au déplacement relatif des mires suivant x_2, cette mesure n'est pas influencée par la position de la caméra dans le plan (x_1, x_3).

Etant données les vitesses élevées de traction, nous utilisons une caméra numérique rapide SpeedCam VISARIO (Weinberger) équipée d'un objectif Nikon 35mm, fournissant des images en couleurs à une résolution de 1536*1024 pixels. La vitesse d'obturation est réglée sur 200µs dans le cas où le montage est éclairé par quatre projecteurs HMI lumière du jour LUXARC 1200Watts (LTM).

L'acquisition vidéo est réalisée à une fréquence de 1000 images/seconde à l'aide du logiciel VISART® version 1.4 et la visualisation des films sur MédiaPalyer® 2.1.

Analysons donc, d'un point de vue quantitatif, les diverses valeurs d'allongement calculées soit à partir des mesures des capteurs, soit à partir d'analyse d'images.

Au niveau global, il est en effet possible de comparer:

- l'allongement ΔL directement donné par le capteur de déplacement,
- l'allongement ΔL calculé par double intégration de l'accélération du mors mobile,
- l'allongement ΔL équivalent au déplacement relatif des mires collés sur chacun des mors et mesuré par le logiciel de suivi de mires.

Les deux premières courbes se superposent parfaitement (Figure A3-2-a), ce qui est cohérent étant donné qu'elles proviennent toutes deux de mesures des capteurs. La troisième, obtenue par analyse d'image, diffère légèrement à partir de t = 4ms, mais suit globalement la même évolution. Remarquons que la mesure globale d'allongement de l'éprouvette, utilisée par la suite, sera celle donnée directement par le capteur de déplacement, ce qui évite les erreurs de calcul.

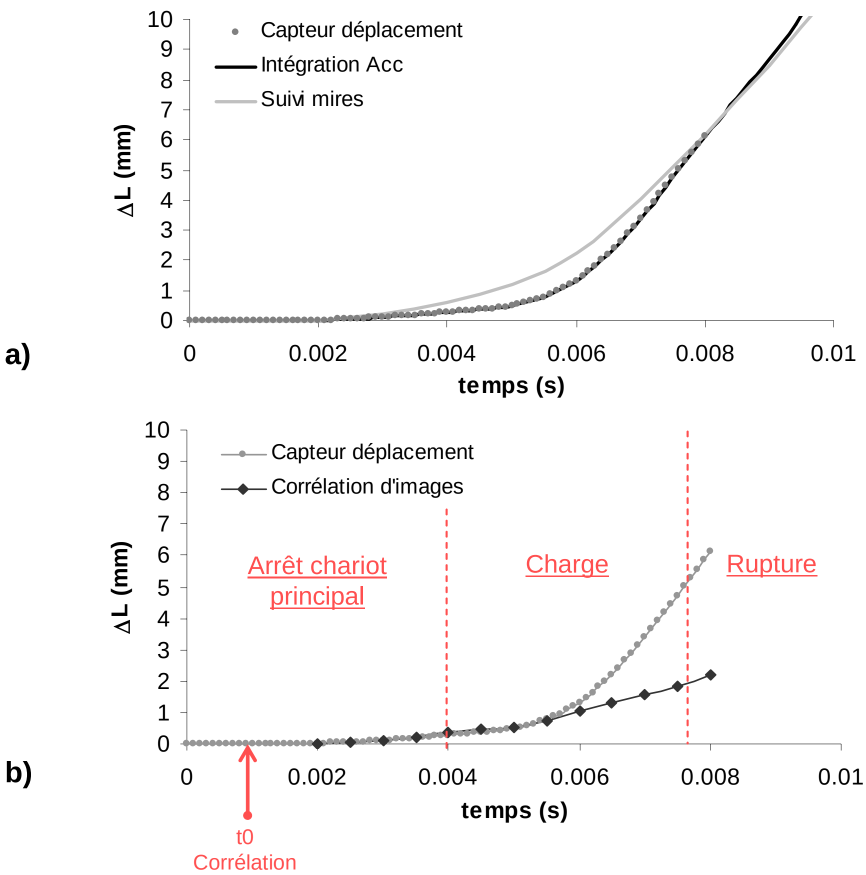


Figure A3-2: Évolution en fonction du temps de l'allongement ΔL pour l'essai RHD14: a) comparaison des valeurs globales (capteur de déplacement / intégration de l'accélération / suivi de mires) et b) comparaison des valeurs globales (capteur de déplacement) et locales (corrélation d'images).

Il s'avère ensuite intéressant de comparer l'allongement global de l'éprouvette, à une valeur mesurée localement. Cette dernière est une valeur moyenne obtenue par différence entre les déplacements aux extrémités de l'éprouvette, mesurés par corrélation d'images. Il apparaît (Figure A3-2-b) que les deux valeurs d'allongement local et global se superposent parfaitement pendant la première phase d'arrêt du chariot principal, et ce jusqu'à la moitié de la phase suivante de charge. Aux environs de t = 6ms et jusqu'à rupture du tissu, la valeur globale augmente beaucoup plus rapidement que la valeur locale. Nous donnerons par la suite les origines de cette différence, nous pouvons cependant retenir que de manière générale, les valeurs globales et locales d'allongement suivent la même évolution en fonction du temps.

Concernant la mesure des déformations par corrélation d'images, il est nécessaire de choisir une image initiale correspondant au t_0, or sur les premières images de l'essai apparaît nettement la lumière du flash qui est en effet le repère du t_0. Les images en question apparaissent donc surexposées, ce qui rend impossible l'utilisation de la corrélation d'image. Ce problème a été longuement discuté dans le précédent rapport [Jacquemoud-a, 2004] et il en résulte que choisir comme image t_0 pour la corrélation, l'image prise à t = 1.5ms, à l'extinction quasi-totale du flash, ne fausse pas les mesures de déformations. En effet, la phase d'arrêt du chariot principal dans le nid d'abeille s'étale sur 4ms à 5ms suivant les essais et durant cette phase, l'éprouvette n'est quasiment pas sollicitée. Le début de la traction n'a lieu qu'au bout de 4ms à 5 ms et elle est matérialisée par une franche augmentation des valeurs du déplacement et de l'effort (Figure A3-1).

2. Etude des vibrations parasites sur le montage de traction dynamique

En analysant les résultats donnés par les capteurs, on remarque que les valeurs mesurées au niveau du mors mobile (accélération et effort) restent relativement bruitées même après un filtrage à 180Hz. Il est donc intéressant d'identifier ces fréquences de vibrations parasites et d'en déterminer leurs origines.

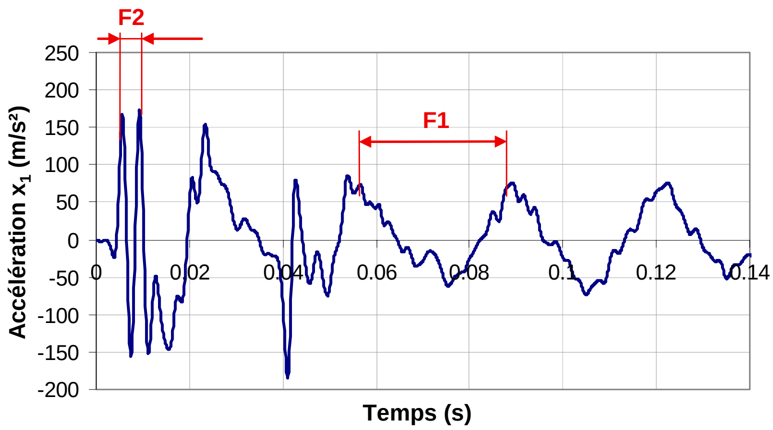
Observations préliminaires

Dans un premier temps, nous plaçons un accéléromètre sur le mors mobile mais cette fois dans la direction x_1, perpendiculaire à la direction de traction.
Il est donc possible de tracer l'évolution de l'accélération du mors mobile en fonction du temps à la fois suivant x_1 (perpendiculaire à la direction de traction) et suivant x_2 (parallèle à la direction de traction) pour les essais réalisés sur la peau.

→ Sur la courbe de l'accélération suivant x_1, apparaissent nettement 2 fréquences prédominantes: F1=30Hz et F2=300Hz (Figure A1-3-a). Notons que la fréquence F1 se retrouve facilement sur la courbe de l'accélération suivant x_2 du mors mobile (Figure A3-3-b).
Il reste donc à identifier les origines de ces vibrations parasites.

Notons que nous illustrons cette étude avec les résultats des essais sur peau humaine RHD02-34 et les essais sur silicone RSD10-11.

a)



b)

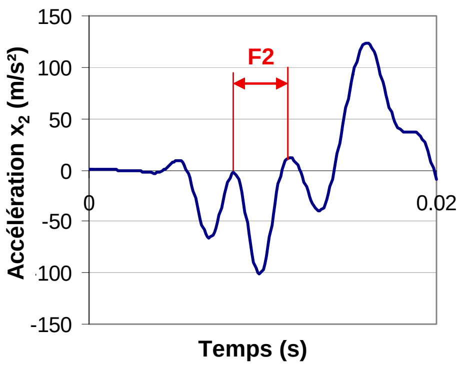


Figure A3-3: Tracé de l'accélération a) transversale et b) longitudinale en fonction du temps – Essais RHD02: peau humaine du front – traction dynamique.

<u>Mise en oeuvre</u>

Le montage de traction dynamique est équipé de 6 mires supplémentaires (numéros 3 à 8 sur la figure A3-4) en plus des 2 déjà existantes (numéros 1 et 2 sur la figure A3-4) utilisées pour la mesure de l'allongement de l'éprouvette.

Des essais complémentaires sont ensuite réalisés sur des éprouvettes en silicone, à la même vitesse (V_0 = 3m/s) que les essais sur peau humaine. Le but est de calculer les trajectoires de chacune des mires, à l'aide du logiciel de suivi de marqueur PhotoSpot® et ce, dans le cas des essais sur silicone et de quelques essais sur peau humaine.

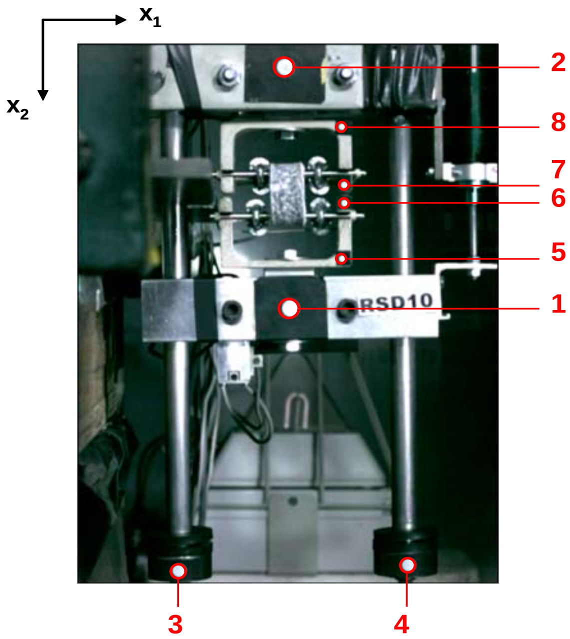


Figure A3-4: Position des mires existantes (1-2) et ajoutées (3-8) sur le montage de traction dynamique. Configuration pour un essai (RSD10) sur une éprouvette en silicone.

<u>Résultats</u>

Dans un premier temps, nous mesurons le déplacement suivant x_1 (perpendiculaire à la direction de traction) des mires 3 et 4 situées sur les butées en caoutchouc, à l'extrémité des barres de guidage secondaires.

→ La fréquence F1 de 30Hz se retrouve aisément, aussi bien sur les essais concernant la peau (RHD02: figure A3-5-a et RHD34: figure A3-6-b) que sur ceux concernant le silicone (RSH10-11: figures A3-5 et A3-6).

Ces vibrations proviennent donc d'une oscillation des barres de guidage secondaires. Elle est visible aussi sur les vidéos de la caméra "vue d'ensemble". Le fait que ces barres de guidage soient fixées sur une traverse, elle-même soudée en porte à faux sur le chariot principal entraîne un décalage du centre de gravité de l'ensemble vers la droite de la figure A3-4. Ce phénomène se traduit lors d'un essai, par l'oscillation du chariot principal dès que l'impact a eu lieu.

Nous mesurons ensuite le déplacement suivant x_1 (perpendiculaire à la direction de traction) des mires 5 et 6 situées sur le mors mobile.

→ Il est alors possible d'identifier la fréquence F2 de 300Hz, mais uniquement dans le cas d'essais sur peau (RHD02: figure A3-5 et RHD34: figure A3-6), cette fréquence n'apparaît pas dans le cas du silicone.

Ces vibrations proviennent donc d'une oscillation du mors mobile. Il existe probablement un jeu au niveau de la liaison entre le mors mobile et le chariot secondaire, certainement au niveau du capteur d'effort.

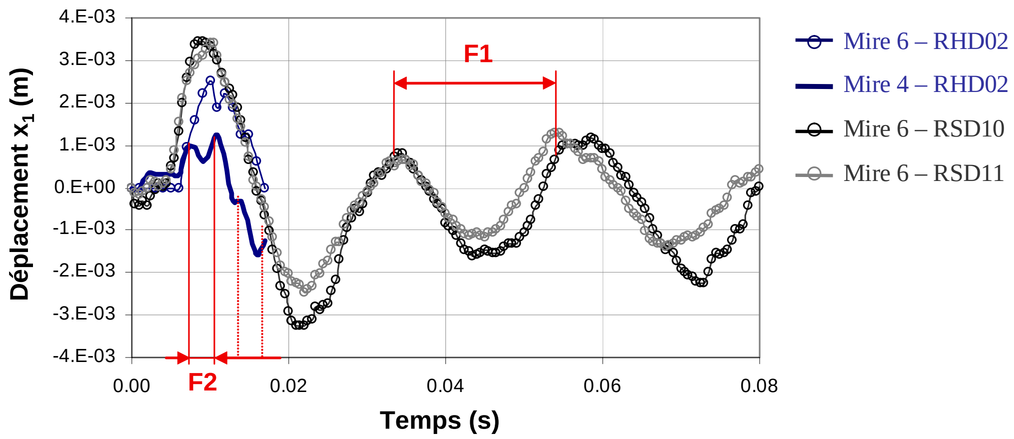


Figure A2-5: Déplacement transversal en fonction du temps de la mire 4 sur l'essai RHD02 et de la mire 6 sur les essais RHD02 et RHD10-11.

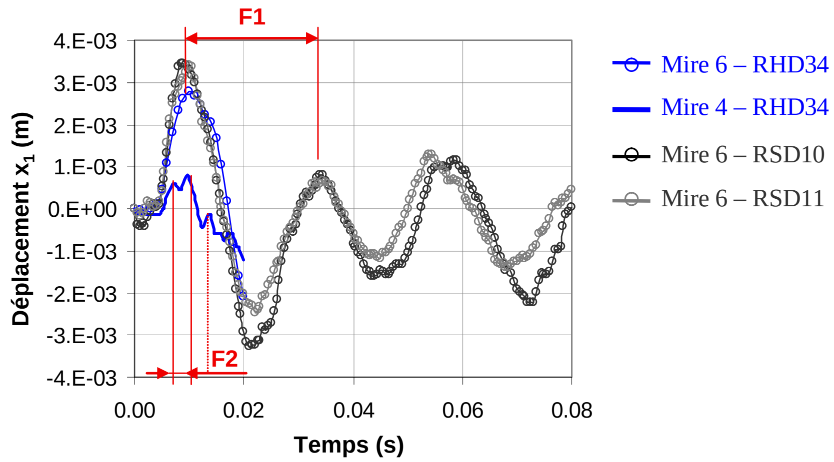


Figure A2-6: Déplacement transversal en fonction du temps de la mire 4 sur l'essai RHD34 et de la mire 6 sur les essais RHD34 et RHD10-11.

Annexe 4 :

Méthode de corrélation d'images numériques

1. Principe de fonctionnement du logiciel ICASOFT®

(Extrait de [Mguil-Touchal, 1997])

Les initiateurs de la méthode de corrélation d'images furent principalement Sutton et ses collaborateurs [Sutton, 1983, 1986, Schreier, 2002]. La méthode a ensuite été reprise, améliorée et implantée dans divers logiciels dont celui que nous utilisons : ICASOFT®. Ce logiciel est en effet basé sur la méthode de corrélation en niveaux de gris, développée au LaMCoS dans le but d'effectuer des mesures précises et rapides, à la fois de champs de déplacements et de déformations sur des structures planes. La principale caractéristique de cette technique est l'abandon de marquages classiques tels que les réseaux de cercles entrelacés ou les grilles, au profit d'un motif aléatoire, généralement obtenu par pulvérisation d'un mouchetis noir.
Cette méthode présente plusieurs avantages :

- L'utilisation d'un motif aléatoire permet une mise en oeuvre plus rapide et plus facile que le dépôt d'un motif régulier.
- La procédure doit être initialisée par l'utilisateur, mais les calculs sur l'ensemble de la zone d'étude sont entièrement automatiques.
- La méthode de corrélation entre deux images s'effectue en général avec une précision de 1/60ème de pixels.
- Plus de 15 000 points de mesures sont accessibles.

Procédure générale

Dans le but de mesurer les champs de déplacements et de déformations à la surface d'une structure plane, plusieurs étapes sont nécessaires avant et au cours de l'essai:

- La structure à étudier doit être préalablement recouverte d'un motif aléatoire appelé mouchetis. Celui-ci est préférablement composé de tâches noires sur font blanc.
- Des images de la structure, en niveaux de gris, doivent être enregistrées tout au long de l'essai. Au minimum, deux images doivent être disponibles : une image initiale et une image de la structure déformée.

L'utilisateur choisi, dans un premier temps, l'image de référence pour la corrélation. Elle correspond en général à l'image de la structure non déformée prise à l'état initial. Sur cette image, il détermine la zone de corrélation (Figure 3-11-a), qui est ensuite discrétisée en un ensemble de carrés de pixels, appelés patterns (Figure 3-11-b). L'utilisateur peut choisir la taille des patterns (entre 6 et 32 pixels) et la distance entre les centres de deux patterns adjacents (entre 6 et 20 pixels). Le choix de la taille des patterns et du pas de la grille doit être effectué en fonction du motif déposé (Figure 3-11-c) et de la densité de points de mesures souhaitée.

Rappelons qu'une image numérique se présente comme une fonction discrète représentant les niveaux de gris de chacun des pixels, dont les valeurs s'étalent de 0 à 255. La méthode de corrélation utilise donc les niveaux de gris associés à chacun des pixels de l'image. Cependant, dans le but d'atteindre une précision sub-pixel, les niveaux de gris des images doivent être interpolés, soit par une fonction bilinéaire, soit par spline cubique, de telle sorte que leur répartition ne soit plus une fonction discrète mais continue sur toute l'image.
Dans un deuxième temps, l'opérateur indique, sur l'image de référence, un motif caractéristique dont il saura retrouver le correspondant dans la seconde image. Ce motif servira de point de départ au calcul de corrélation, qui s'effectue ensuite automatiquement, sur toute la zone de corrélation, par propagation.

<u>Description de la méthode sur un pattern</u>

Considérons l'image de référence définie par l'utilisateur et une image déformée.
La méthode de corrélation utilisée est basée sur la recherche d'un champ de déplacements sur chacun des patterns de la zone de corrélation. Le champ de déplacements de chaque pattern est défini par ses deux composantes D*U(u,v)* et D*V(u,v)*, considérées comme homogènes et bilinéaires en *u* et *v* :

$$\begin{cases} DU(u,v) = a_u \cdot u + b_u \cdot v + c_u \cdot u \cdot v + d_u \\ DV(u,v) = a_v \cdot u + b_v \cdot v + c_v \cdot u \cdot v + d_v \end{cases}$$

Equation A4-1

Notons que dans une étude récente [Lu, 2000], différents types de champs de déplacements sont testés, afin d'étudier des états de déformations plus complexes.

Pour une meilleure compréhension, un pattern de référence (ABCD) et le pattern déformé (A*B*C*D*) correspondant, sont représentés sur la figure A4-1 dans le même repère, ils sont issus respectivement de l'image de référence et de l'image déformée. Leur taille est de 2x2 pixels.

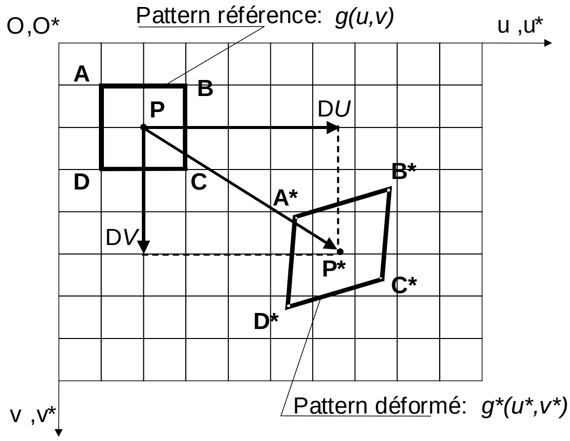


Figure A4-1 : Evolution d'un pattern (ABCD) de l'image de référence à l'image déformée et définition des 2 composantes D*U* et D*V* de son champ de déplacements.

La fonction discrète représentant le niveau de gris du pattern de référence est notée *g(u,v),* celle du pattern déformé est notée *g*(u*,v*)*. Ces deux fonctions sont reliées par la relation suivante :

$$g*(u*,v*) - g(u + DU(u,v), v + DV(u,v)) = 0$$ **Equation A4-2**

La détermination de chacun des termes (déplacement de solide rigide et déformation) des deux composantes D*U* et D*V* du champ de déplacements s'effectue par interpolation bilinéaire de la fonction g* et par minimisation d'un coefficient de corrélation.
Remarquons cependant que les deux images traitées ne sont pas nécessairement prises dans les mêmes conditions d'éclairage. Il faut donc réaliser plus qu'une simple corrélation des niveaux de gris sur chaque pattern. Le coefficient de corrélation croisé donné par l'équation A4-3 permet de calculer un facteur de corrélation normalisé, ce qui revient à comparer non plus les niveaux de gris des patterns, mais la façon dont ces niveaux de gris varient au sein de chaque pattern.

$$C = 1 - \frac{\int_{\Delta M} g(u,v) \cdot g*(u*,v*) \cdot du \cdot dv}{\sqrt{\int_{\Delta M} g(u,v)^2 \cdot du \cdot dv \cdot \int_{\Delta M} g*(u*,v*)^2 \cdot du \cdot dv}}$$ **Equation A4-3**

avec ΔM la surface du pattern considéré.
Pour chaque pattern, les valeurs des deux composantes du champs de déplacement sont

données au centre de celui–ci.

Description de la méthode sur la zone de corrélation

Lors de l'initialisation de l'algorithme de corrélation, le repérage par l'utilisateur d'un motif caractéristique comme point de départ, donne une solution approximative des deux composantes D*U* et D*V* du champ de déplacements pour le pattern considéré. Les coefficients du champ de déplacements sont déterminés sur ce premier pattern (ABCD) centré en P par un processus itératif (Figure A4-2). Les calculs de corrélation sont effectués sur les 4 carrés centrés en A, B, C et D, sommets du pattern centré en P (Figure A4-2). Les carrés sont balayés sur l'image déformée. Leurs positions sont obtenues pour la meilleure corrélation et un premier champ de déformations est évalué pour le pattern central (Figure A4-2-b). Les carrés sont adaptés selon le champ de déformations trouvé à l'itération précédente. Le balayage est réitéré et un nouveau champ de déformations pour le pattern central est évalué (Figure A4-2-c). Le calcul est arrêté lorsque, entre deux itérations, la précision demandée par l'utilisateur est atteinte (Figure A4-2-d). La solution trouvée pour le premier pattern est utilisée comme solution initiale pour les patterns adjacents. La corrélation est ainsi réalisée sur toute la zone de corrélation par propagation.

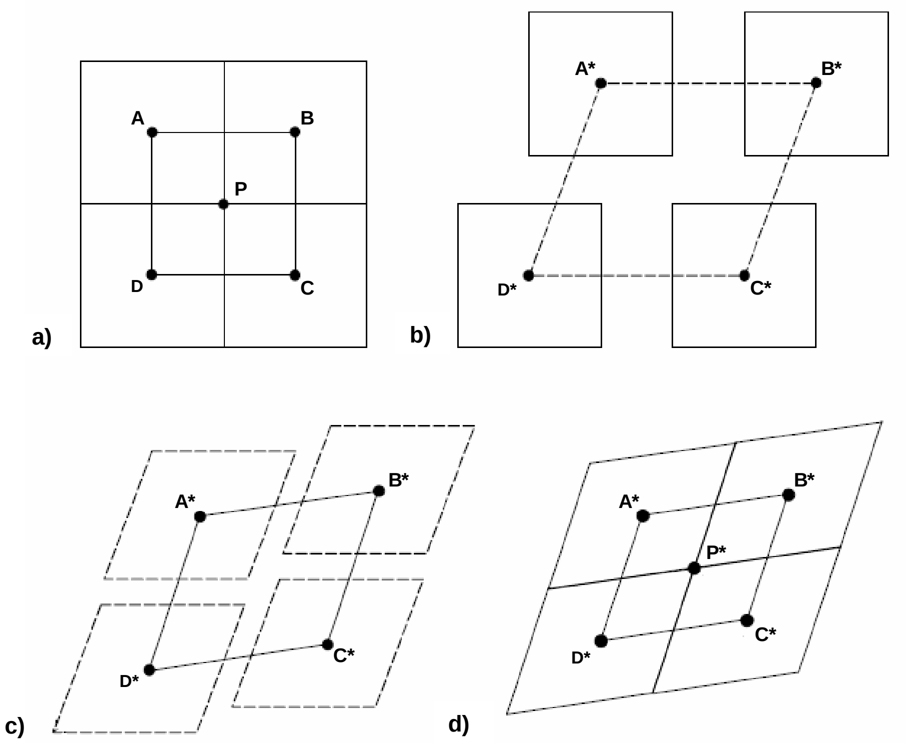


Figure A4-2 : Calcul du champ de déplacements sur un pattern : a) les 4 patterns adjacents, b) première itération, c) deuxième itération et d) arrêt du calcul.

Calcul des déformations

A partir du champ de déplacements d'un pattern, les déformations correspondantes sont calculées à l'aide des équations mathématiques classiques faisant intervenir le tenseur gradient de la transformation F. Le tenseur des déformations de Green-Lagrange prend donc la forme :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \cdot ({}^{T}\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I})$$

Equation A4-4

avec le tenseur gradient des déformations défini par:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix},\ F_{11} = \frac{\partial[DU(u,v)]}{\partial u},\ F_{12} = \frac{\partial[DU(u,v)]}{\partial v},\ F_{22} = \frac{\partial[DV(u,v)]}{\partial v} \text{ et}$$

$$F_{21} = \frac{\partial[DV(u,v)]}{\partial u}.$$

Equation A4-5

Description des méthodes séquentielle et incrémentale

La méthode de corrélation, telle qu'elle vient d'être présentée, permet la détermination d'un champ de déplacements entre une image de référence et une image déformée. Or, suivant le même principe, elle peut s'appliquer à toute une séquence d'images représentant la structure à plusieurs niveaux de déformation.

Dans ce cas, deux possibilités s'offrent à l'utilisateur :

- *La méthode de corrélation séquentielle* : l'image de référence est fixe (Figure A4-3-a), si l'utilisateur choisi l'image initiale comme image de référence, elle le restera tout au long du calcul de la séquence d'images, c'est-à-dire que le champ de déplacement pour chaque image déformée sera calculé entre celle-ci et l'image initiale.
- *La méthode de corrélation incrémentale* : l'image de référence est mobile (Figure A4-3-b), l'image initiale sert de référence au calcul du champ de déplacements entre celle-ci et la première image déformée, puis la première image déformée devient référence pour le calcul du champ de déplacement entre elle-même et la deuxième image déformée, et ainsi de suite jusqu'à la fin de la séquence d'images.

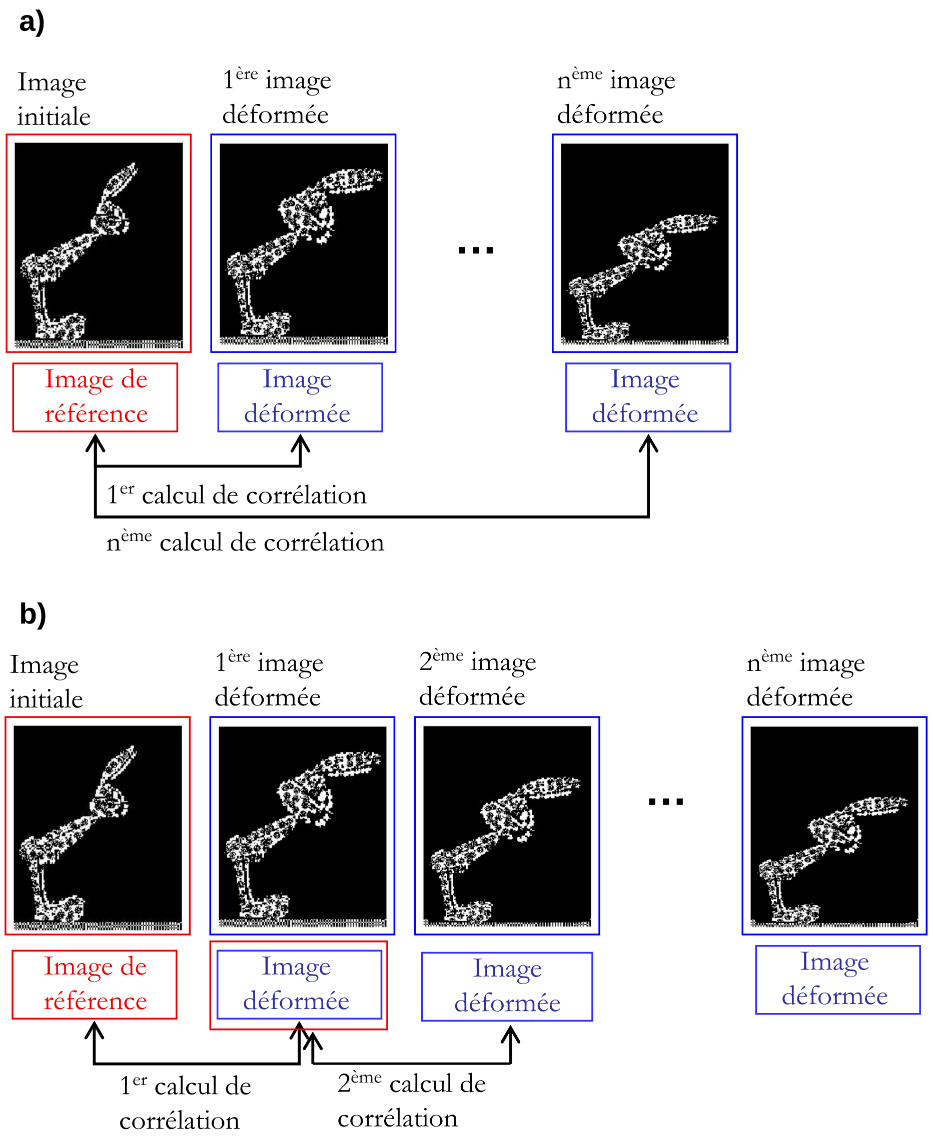


Figure A4-3: Définition des images de référence (rouge) et déformée (bleue) pour un calcul de corrélation séquentielle a) et incrémental b).

2. Validité de la méthode

La méthode de corrélation d'image est entre autre utilisée dans cette étude afin de quantifier l'hétérogénéité du champ de déformation, mesuré à la surface de la peau humaine. Il est donc nécessaire de mesurer l'intensité du bruit de mesure de la méthode de corrélation, face à l'intensité de l'hétérogénéité du champ de déformation. Pour cela des essais de traction sont réalisés sur des éprouvettes en silicone, dans les mêmes conditions quasi-statiques et dynamiques que la peau humaine. En effet, le silicone est considéré comme un matériau relativement homogène, de ce fait, son champ de déformations devrait l'être aussi. Ainsi, le taux d'hétérogénéité du champ de déformations du silicone devrait correspondre en grande partie au bruit de mesure de la corrélation d'image.
A partir des champs de déformations mesurés pour chaque essai, nous traçons l'écart type de la répartition des déformations en fonction de la valeur moyenne des déformations sur chaque image. En effet, rappelons que la valeur de l'écart type de la répartition des déformations sur une image est notre indicateur du taux d'hétérogénéité du champ de déformation. Nous distinguons le cas quasi-statique du cas dynamique et comparons les taux d'hétérogénéité des champs de déformations de quelques essais réalisés sur peau humaine et d'autres réalisés sur le silicone. Sur chaque graphique des figures A4-4 et A4-5, sont ajoutées des courbes de tendances relatives à chacun des deux matériaux.

De manière générale sur les figures A4-4 et A4-5, à même niveau de déformation, l'hétérogénéité du champ de déformations du silicone est bien inférieure à celle de la peau humaine.
Il apparaît clairement en quasi-statique (Figure A4-4) que le bruit de mesure est très inférieur à l'hétérogénéité du champ de déformations de la peau humaine, pour une déformation moyenne de l'ordre de 20% (Green-Lagrange) l'écart type du silicone est inférieur à 1% alors que la tendance sur la peau est autour de 12%. De plus, la mesure sur le silicone est très reproductible, les résultats des différents essais sont identiques d'où la représentation d'un seul d'entre eux sur la figure A4-4. Les résultats sur la peau humaine en quasi-statique sont relativement peu dispersés eux aussi.

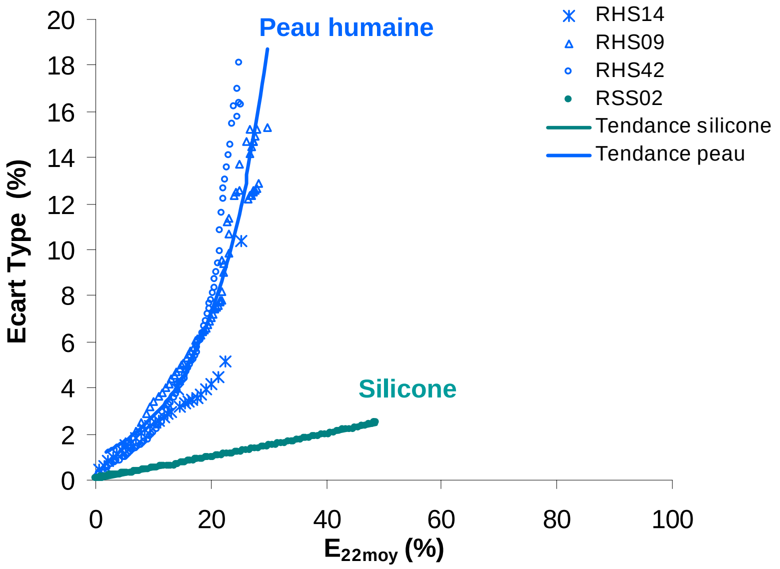


Figure A4-4: Taux d'hétérogénéité du champ de déformations locales (écart type) en fonction de la valeur moyenne locale des déformation de Green-Lagrange dans le cas d'essais de traction quasi-statiques sur peau humaine (bleu) et sur silicone (vert).

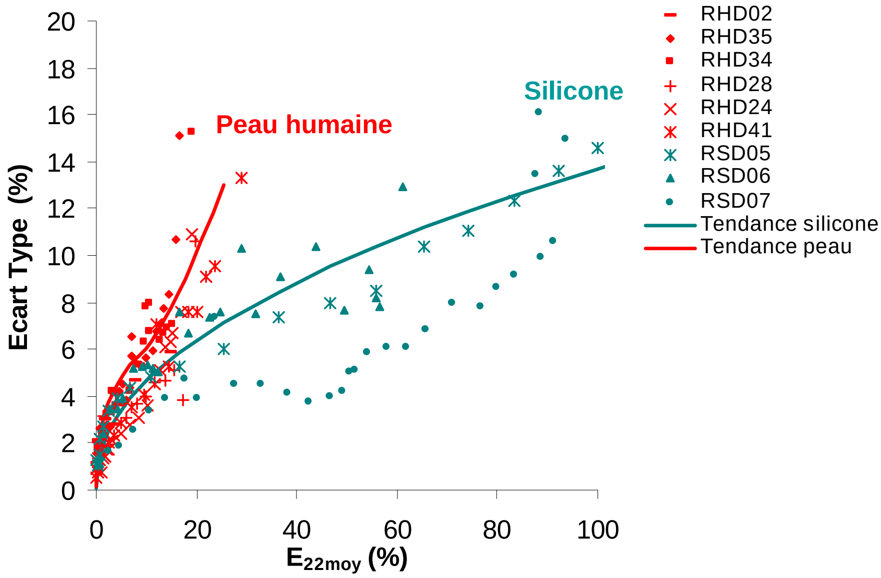


Figure A4-5: Taux d'hétérogénéité du champ de déformations locales (écart type) en fonction de la valeur moyenne locale des déformation de Green-Lagrange dans le cas d'essais de traction dynamiques sur peau humaine (rouge) et sur silicone (vert).

Sur les essais dynamiques (Figure A4-5), pour des déformations moyennes inférieures à 10%, les valeurs des écarts types sont relativement proches pour les deux matériaux.

Cependant, pour des niveaux de déformations supérieures, c'est-à-dire des déformations proches de la rupture où il est intéressant de caractériser l'hétérogénéité du champ de déformations, les écarts types relatifs à la peau humaine sont supérieurs à ceux du silicone. En effet, la tendance au niveau du silicone a une forme logarithmique alors que pour la peau humaine, l'écart type du champ de déformation augmente de manière plus rapide, spécialement près de la rupture. Il faut noter qu'en dynamique, les essais comportent encore quelques points critiques : lors de la traction sur du silicone, l'éprouvette ondule à cause des vibrations parasites, de ce fait la surface de corrélation sort du champ de la caméra sur certaines images, faussant certainement les mesures de déformations. Cependant ce phénomène n'a pas lieu sur la peau humaine, le tissu est certainement plus rigide, ce qui nous laisse penser que les mesures d'hétérogénéité sur la peau humaine sont relativement justes.

Annexe 5 :

Résultats expérimentaux

1. Propriétés mécaniques macroscopiques de la peau

Les tableaux suivants rassemblent les valeurs moyennes (en gras) et les écarts types (entre parenthèses) calculés par catégorie.

Les six catégories en question classifient les essais suivant s'ils sont réalisés en:

- traction statique – peau du front – direction longitudinale
- traction statique – peau du front – direction transversale
- traction dynamique – peau du front – direction longitudinale
- traction dynamique – peau du front – direction transversale
- traction dynamique – peau des bras – direction longitudinale
- traction dynamique – peau des bras – direction transversale

Toutes les valeurs de déformation données dans les tableaux correspondent à la composante dans la direction de traction soit ε_{22}. Les abréviations suivantes sont utilisées: direction transversale (Tr) ou longitudinale (Lo), traction quasi-statique (Sta) ou dynamique (Dyn) et peau du front (Fr) ou du bras (Br).

Modules élastiques

Essai				**Modules élastiques** **Globaux**		**Locaux**	
Vitesse	Site prélèvement	Direction	Nb Eprouvettes	Eg_1 (MPa)	Eg_2 (MPa)	El_1 (MPa)	El_2 (MPa)
Statique (2.5E-4m/s)	Front	Tr (Tr)	14	**6.2** (3.3)	**19.5** (6.0)	**8.3** (4.9)	**32.5** (12.7)
		Lo (C-C)	8	**5.7** (3.6)	**20.1** (4.5)	**5.2** (4.5)	**28.8** (7.5)
Dynamique (3m/s)	Front	Tr (Tr)	17		**44.8** (18.1)		**51.8** (23.1)
		Lo (C-C)	4		**71.8** (40.5)		**87.1** (50.0)
	Bras	Tr (Tr)	5		**66.1** (15.2)		**67.9** (16.9)
		Lo (P-D)	6		**61.7** (16.5)		**75.2** (28.3)

Tableau A5-1: Modules élastiques classées par catégorie d'essais – Peau humaine en traction unidirectionnelle.

Caractéristiques de la rupture

Essai				Caractéristiques de la rupture Globales			Locales	
Vitesse	Site prélèvement	Direction	Nb Eprouvettes	Effort / unité largeur F/l_0 (N/mm)	Contrainte T (MPa)	Déformation ε (%)	Déformation ε_{moy} (%)	ε_{max} (%)
Statique (2.5E-4m/s)	Front	Tr (Tr)	14	**9.7** (3.3)	**5.7** (2.3)	**59** (24)	**23** (3)	**60** (14)
		Lo (C-C)	8	**9.5** (3.2)	**5.7** (2.6)	**56** (22)	**30** (10)	**65** (14)
Dynamique (3m/s)	Front	Tr (Tr)	17	**10.6** (4.2)	**6.7** (2.6)	**27** (14)	**17** (3)	**36** (10)
		Lo (C-C)	4	**16.4** (6.9)	**12.6** (5.5)	**37** (9)	**29** (12)	**46** (13)
	Bras	Tr (Tr)	4	**12.8** (2.2)	**10.6** (2.4)	**36** (6)	**24** (8)	**53** (15)
		Lo (P-D)	6	**9.3** (1.0)	**8.5** (1.4)	**32** (12)	**24** (7)	**57** (20)

Tableau A5-2: Caractéristiques de la rupture classées par catégorie d'essais – Peau humaine en traction unidirectionnelle.

Variation avec la vitesse de traction

Sur chaque sujet sont réalisés deux essais quasi-statiques et deux essais dynamiques. Le tableau A5-3 donne des valeurs moyennes par sujet et par vitesse de la contrainte ultime, de la déformation ultime (valeur moyenne locale) et du module élastique El_2 (valeur locale). La troisième colonne de chaque propriété représente le rapport de la moyenne statique sur la moyenne dynamique.
Il faut noter que tous les essais sont réalisés sur de la peau du front dans la direction transversale sauf le sujet F88 qui est testé dans la direction longitudinale.

Essai			Caractéristiques de la rupture						Module élastique		
Sujet	Essais	Direction	Contrainte T (MPa)			Déformation locale ε_{moy} (%)			Module local El_2 (MPa)		
			Sta.	Dyn.	Sta/Dyn	Sta.	Dyn.	Sta/Dyn	Sta.	Dyn.	Sta/Dyn
H62	41 - 42	Tr	5.5	8.3	1.5	22	23	1.0	34.6	46.2	1.3
H69	28 -29	Tr	4.2	8.3	2.0	24	16	0.7	23.3	80.5	3.5
H81	08 - 09	Tr	8.9	8	0.9	24	19	0.8	46.4	60.1	1.3
F85	13 - 14	Tr	3.7	5.8	1.6	23	18	0.8	24.6	46.8	1.9
F87	12	Tr	8	10.3	1.3	19	17	0.9	55.4	44.5	0.8
F88	61 - 62	Lo	11.9	16.3	1.4	34	19	0.6	36.4	129	3.5
F98	10 - 11	Tr	4.4	6.5	1.5	21	19	0.9	34.9	48.8	1.4

Tableau A5-3: Variations, avec la vitesse de traction, des caractéristiques de la rupture et du module élastique local El_2 classés par sujet – Peau humaine.

Variation avec la direction de traction

Sur chaque sujet, deux éprouvettes sont prélevées et testés dans la direction transversale (Tr) et deux autres dans la direction longitudinale (Lo). Le tableau A5-4 donne des valeurs moyennes par sujet et par direction de traction de la contrainte ultime, de la déformation ultime (valeur moyenne locale) et du module élastique El_2 (valeur locale). La troisième colonne de chaque propriété représente le rapport de la moyenne dans la direction transversale sur la moyenne dans la direction longitudinale.
Il faut noter que les quatre premiers sujets sont testés en dynamique et les trois suivants en quasi-statique. De plus, tous les essais sont réalisés sur de la peau du front à l'exception des sujets H82 et F88.

Essai				**Caractéristiques de la rupture**						**Module élastique**		
Sujet	Essais	Vitesse	Site	Contrainte T (MPa)			Déformation locale ε_{moy} (%)			Module local El_2 (MPa)		
				Tr	Lo	Tr/Lo	Tr	Lo	Tr/Lo	Tr	Lo	Tr/Lo
F66	50 - 51	Sta	Fr	4	5.5	1.4	24	21	0.9	19.7	28.7	1.5
H78	53 - 56	Sta	Fr	8.3	4.7	0.6	21	22	1.0	49	33.2	0.7
F78	57 - 60	Sta	Fr	3.3	5.6	1.7	27	43	1.6	19.6	29.4	1.5
H86	45 - 48	Sta	Fr	4.8	4	0.8	22	27	1.2	32.7	20.2	0.6
F88	61 - 63	Sta	Fr							36.4	105	2.9
H62	41 - 44	Dyn	Fr	8.3	8.9	1.1	23	39	1.7	46.2	45.6	1.0
H82	30 - 38	Dyn	Br	9.7	8.3	0.9	25	26	1.0	64.9	59.4	0.9
F88	65 - 72	Dyn	Br	13	8.9	0.7	22	18	0.8	98	107	1.1

Tableau A5-4: Variations, avec la direction de traction, des caractéristiques de la rupture et du module élastique local El_2 classés par sujet – Peau humaine.

Variation avec la localisation du prélèvement

Sur chaque sujet est prélevée de la peau du front et du bras, toutes deux testées en dynamique. Le tableau A5-5 donne des valeurs moyennes par sujet et par site de prélèvement (bras ou front) de la contrainte ultime, de la déformation ultime (valeur moyenne locale) et du module élastique El_2 (valeur locale). La troisième colonne de chaque propriété représente le rapport de la moyenne du front sur la moyenne du bras.
Il faut noter que le premier sujet est testé dans la direction transversale alors que le deuxième dans la direction longitudinale.

Essai			**Caractéristiques de la rupture**						**Module élastique**		
Sujet	Essais	Direction	Contrainte T (MPa)			Déformation locale ε_{moy} (%)			Module local El_2 (MPa)		
			Front	Bras	Front/Bras	Front	Bras	Front/Bras	Front	Bras	Front/Bras
H82	32 - 38	Tr	7	9.7	1.4	16	25	1.6	56.7	64.9	1.1
F88	61 - 72	Lo	16.3	8.9	0.5	19	18	0.9	128.7	106.8	0.8

Tableau A5-5: Variations, avec la localisation du prélèvement, des caractéristiques de la

rupture et du module élastique local El_2 classés par sujet – Peau humaine en traction.

2. Propriétés structurelles microscopiques de la peau

Mesures de l'épaisseur des éprouvettes

Pour chacun des sujets ayant fait l'objet d'une étude histologique, nous comparons les trois mesures d'épaisseurs (épiderme+derme) suivantes:

- e : effectuée sur coupes histologiques à l'aide d'un planimètre en microscopie optique, moyenne de 12 valeurs relevées sur 2 coupes par biopsies (définie sur la figure 3-14)
- e_{min} : mesurée sur l'éprouvette avant l'essai à l'aide d'un pied à coulisse, mesure ne prenant pas en compte la partie d'hypoderme restant sur l'éprouvette (définie sur la figure 3-3)
- e_{max} : mesurée sur l'éprouvette avant l'essai à l'aide d'un pied à coulisse, mesure prenant en compte la partie d'hypoderme restant sur l'éprouvette (définie sur la figure 3-3)

Les trois valeurs d'épaisseur par éprouvette sont données dans le tableau A5-6.

D'après la figure 3-44, les valeurs e_{min} mesurée au pied à coulisse et e obtenue en microscopie optique sont généralement très proches, alors que e_{max} reste nettement supérieur. e apparaît comme la valeur la plus réaliste de l'épaisseur de l'ensemble épiderme/derme.

Essai		Planimètre sur coupes histologiques e (mm)										Pied à coulisse sur éprouvette					
		Coupe 1				Coupe 2						e_{min} (mm)			e_{max} (mm)		
Sujet	Nom	min	max	moyenne	ET	min	max	moyenne	ET	Moyenne	ET	Eprouvette 1	Eprouvette 2	Moyenne	Eprouvette 1	Eprouvette 2	Moyenne
Front																	
H86	RHS45-i	0.5	1.0	**0.7**	0.2	0.8	1.1	**0.9**	0.1	**0.8**	0.2	1.3	1.9	**1.6**	2.8	3.6	**3.2**
H86	RHS47-i	0.6	1.2	**0.8**	0.2	0.8	1.2	**1.0**	0.2	**0.9**	0.2	1.6	1.4	**1.5**	3.3	2.5	**2.9**
F78	RHS53-i	1.3	1.8	**1.6**	0.2	1.2	2.0	**1.6**	0.3	**1.6**	0.2	2	2	**2**	3.3	3.1	**3.2**
F78	RHS56-i	0.8	1.2	**1.0**	0.1	1.3	2.1	**1.8**	0.3	**1.4**	0.5	1.8	1.7	**1.75**	3.2	3	**3.1**
H78	RHS57-i	0.8	1.4	**1.2**	0.2	0.8	4.4	**1.9**	1.6	**1.5**	1.1	1.5	2	**1.75**	2.8	3	**2.9**
H78	RHS59-i	0.9	1.5	**1.2**	0.2	1.2	1.4	**1.3**	0.1	**1.2**	0.2	1.8	2.8	**2.3**	2.7	3.2	**2.95**
F88	RHS61-i	1.5	2.0	**1.8**	0.2	1.5	1.8	**1.6**	0.1	**1.7**	0.2	1.3	1.1	**1.2**	3	2.3	**2.65**
F88	RHS63-i	1.2	1.5	**1.4**	0.1	1.4	2.0	**1.6**	0.2	**1.5**	0.2	1.5	1.1	**1.3**	2.6	2.4	**2.5**
Bras																	
F88	RHS65-i	0.7	1.3	**1.1**	0.2	0.9	1.6	**1.3**	0.3	**1.2**	0.3	1	0.8	**0.9**	1.8	3	**2.4**
F88	RHS67-i	1.2	2.7	**1.9**	0.5	2.2	2.9	**2.5**	0.3	**2.2**	0.5	1.3	1.5	**1.4**	3.5	2.7	**3.1**

Tableau A5-6: Détails des mesures d'épaisseur par éprouvette de peau humaine effectuées sur chaque sujet.

Mesure des densités surfaciques de fibres dans chaque direction

Sur chaque sujet, une biopsie initiale est prélevée dans chacune des directions longitudinale et transversale, ces deux biopsies servent à la mesure des densités de fibres de collagène. Les valeurs moyennes par direction, présentées dans le tableau A5-7, sont calculées à partir de 3 relevés par coupe, à raison d'une coupe par biopsie.
De plus, sur chacun des 4 sujets, sont testées deux éprouvettes dans la direction longitudinale et deux autres dans la direction transversale. Les modules élastiques El_2 (valeurs locales) données dans le tableau suivant correspondent à des moyennes par direction et par sujet.

Essai			**Densité surfacique de fibres de collagène**				**Module élastique**
Sujet	Nom	Direction traction	Direction longitudinale (Lo)		Direction transversale (Tr)		Direction module = Direction traction
			moyenne (%)	ET (%)	moyenne (%)	ET (%)	El_2 (MPa)
H86	47-48	Lo	**31.4**	7.1	**15.1**	4.8	**20.2**
H86	45-46	Tr	**9.8**	1.4	**49.9**	7.3	**32.7**
F78	57-58	Lo	**38.9**	19.3	**23.6**	8.7	**29.4**
F78	59-60	Tr	**25.9**	8.5	**21.1**	6.8	**19.5**
H78	53-54	Lo	**18.1**	6.2	**33.9**	13.6	**33.2**
H78	55-56	Tr	**8.2**	2.5	**63.1**	8.6	**49.0**
F88	61	Lo	**14.1**	1.4	**37.2**	9.5	**36.4**
F88	63	Tr	**15.4**	5.3	**51.5**	6.1	**105.1**

Tableau A5-7: Densités surfaciques de fibres de collagène dans chaque direction (Tr ou Lo) et module élastique local El_2 correspondant classés par sujet – Peau humaine en traction.

Annexe 6 :

Numérique :

Discrétisation par éléments finis
Algorithmes en grand déplacement

Les éléments utilisés dans le modèle sont des éléments quadrilatères isoparamétriques à 4 nœuds et 4 points d'intégration de Gauss. Toutes les définitions sont données dans le plan de la membrane (x_1, x_2), l'expression des composantes des tenseurs suivant x_3 est obtenue en appliquant l'hypothèse d'incompressibilité.

1. Elément de référence

Nous définissons un élément de référence à quatre nœuds et son repère associé **(ξ,η).**

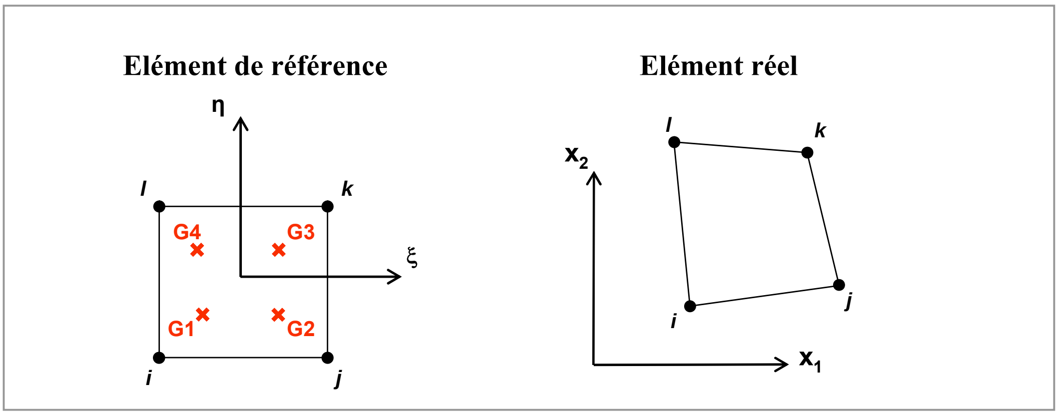


Figure A6-1: Un élément à quatre nœuds (i, j, k, l) et son élément de référence sur lequel sont représentés les quatre points de Gauss (G1, G2, G3, G4).

Les points d'intégration de Gauss: G1, G2, G3 et G4

Les 4 points d'intégration de Gauss sont définis par leur coordonnées dans le repère référence **(ξ,η):**

G1 $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ G2 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

G3 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ G4 $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Les nœuds i, j, k et l de l'élément:

Les coordonnées des nœuds de l'élément dans le repère de référence **(ξ,η)** sont**:**

i (-1,-1) ***j*** (1,-1)

k (1, 1) ***l*** (-1,-1)

Le vecteur $\mathbf{x}_e$ défini les coordonnées de chacun des nœuds dans le repère réel **($\mathbf{x_1}$,$\mathbf{x_2}$) :**

$$\mathbf{x}_e{}^T = \begin{bmatrix} x_{1(i)} & x_{2(i)} & x_{1(j)} & x_{2(j)} & x_{1(k)} & x_{2(k)} & x_{1(l)} & x_{2(l)} \end{bmatrix}$$

et le vecteur $\mathbf{U}_e$ leurs déplacements :

$$\mathbf{U}_e{}^T = \begin{bmatrix} U_{1(i)} & U_{2(i)} & U_{1(j)} & U_{2(j)} & U_{1(k)} & U_{2(k)} & U_{1(l)} & U_{2(l)} \end{bmatrix}$$

2. <u>Fonctions d'interpolation</u>

Dans le cas d'éléments isoparamétriques, les fonctions d'interpolation sur les coordonnées et celles sur les déplacements sont identiques.
Nous définissons donc le vecteur **N** des fonctions linéaires en ξ et η :

$$\mathbf{N}(\xi,\eta) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}(1-\xi)(1-\eta) & (1+\xi)(1-\eta) & (1+\xi)(1+\eta) & (1-\xi)(1+\eta)\end{bmatrix}$$

Equation A6-1

et leurs dérivées partielles:

$$\mathbf{N},\xi(\xi,\eta) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}-(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta)\end{bmatrix}$$ **Equation A6-2**

$$\mathbf{N},\eta(\xi,\eta) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}-(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi)\end{bmatrix}$$ **Equation A6-3**

Pour tout point P de l'élément, ses coordonnées $\mathbf{x_P}$, dans le repère **($\mathbf{x_1}$,$\mathbf{x_2}$),** peuvent s'interpoler à partir des coordonnées $\mathbf{x}_e$ des nœuds de l'élément:

$$\mathbf{x_P} = \mathbf{N}.\mathbf{x}_e$$ **Equation A6-4**

De même les composantes de son déplacement $\mathbf{U_P}$, dans le repère **($\mathbf{x_1}$,$\mathbf{x_2}$),** peuvent s'interpoler à partir des composantes $\mathbf{U}_e$ du déplacement des nœuds de l'élément:

$$\mathbf{U_P} = \mathbf{N}.\mathbf{U}_e$$ **Equation A6-5**

3. Transformation

La matrice Jacobienne de transformation J:

Le passage de l'élément réel à l'élément de référence s'effectue à l'aide de la matrice Jacobienne de transformation **J:**

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_1,\xi & x_2,\xi \\ x_1,\eta & x_2,\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N},\xi \\ \mathbf{N},\eta \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \mathbf{x_{1(e)}} & \mathbf{x_{2(e)}} \end{bmatrix}$$ **Equation A6-6**

avec $\mathbf{x_{1(e)}}^T = \begin{bmatrix} x_{1(i)} & x_{1(j)} & x_{1(k)} & x_{1(l)} \end{bmatrix}$ et $\mathbf{x_{2(e)}}^T = \begin{bmatrix} x_{2(i)} & x_{2(j)} & x_{2(k)} & x_{2(l)} \end{bmatrix}$

Transformation d'une fonction:

Une fonction quelconque $f(x_1,x_2)$ peut alors s'exprimer de la manière suivante:

$$\begin{bmatrix} f,x_1 \\ f,x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} . \begin{bmatrix} f,\xi \\ f,\eta \end{bmatrix} \quad \text{et inversement} \quad \begin{bmatrix} f,\xi \\ f,\eta \end{bmatrix} = \mathbf{J} . \begin{bmatrix} f,x_1 \\ f,x_2 \end{bmatrix}$$

Equation A6-7

Calcul de la valeur approchée d'une intégrale:

Une intégrale de surface du type $\iint f(x_1, x_2).dx_1.dx_2$ peut se calculer grâce à l'égalité:

$$\iint f(x_1, x_2).dx_1.dx_2 = \iint f(\xi,\ \eta).\det \mathbf{J}.d\xi\ .d\eta$$ **Equation A6-8**

Une valeur approchée de cette intégrale s'obtient par intégration numérique aux 4 points de Gauss de la façon suivante:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta).d\xi.d\eta = \sum_{i=1}^{4} \omega_i\, f(\xi_i,\eta_i) \quad \text{avec } \omega_i = 1$$ **Equation A6-9**

4. Calcul des intégrales élémentaires

Le volume élémentaire

Le volume V_e d'un élément est défini par:

$$V_e = \int_{V_e} dV_e \qquad \textbf{Equation A6-10}$$

avec $dV_e = epa.dx_1 dx_2$

L'équation A6-10 peut être transformée d'après l'équation A6-8 en:

$$V_e = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \underbrace{epa.\det(\mathbf{J})}_{\mathrm{f_V}(\xi,\eta)}.d\xi.d\eta \qquad \textbf{Equation A6-11}$$

$$\mathrm{f_V}(\xi,\eta) = epa(\xi,\eta).\det(\mathbf{J}(\xi,\eta)) \qquad \textbf{Equation A6-12}$$

et *epa* l'épaisseur au point de Gauss.

L'intégrale se calcule ensuite par intégration numérique aux points de Gauss (Equation A6-9), ce qui revient à:

$$V_e = \sum_{i=1}^{4} \mathrm{f_V}(\xi_{Gi},\eta_{Gi}) \qquad \textbf{Equation A6-13}$$

Les matrices de rigidité tangente élémentaires

La définition des matrices de rigidité tangente élémentaires donne :

$$\mathbf{K}_{\mathbf{L}(e)} = \int_{V_e} \mathbf{B}_{\mathbf{L}}^{T}\ {}_{t}\mathbf{A}\ \mathbf{B}_{\mathbf{L}}\ dV_e \qquad \textbf{Equation A6-14}$$

$$\mathbf{K}_{\mathbf{NL}(e)} = \int_{V_e} \mathbf{B}_{\mathbf{NL}}^{T}\ \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{NL}}\ \mathbf{B}_{\mathbf{NL}}\ dV_e \qquad \textbf{Equation A6-15}$$

Or d'après l'Equation A6-8, $\mathbf{K}_{\mathbf{L}(e)}$ et $\mathbf{K}_{\mathbf{NL}(e)}$ peuvent s'écrire sous la forme:

$$\mathbf{K}_{\mathbf{L}(e)} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \underbrace{\mathbf{B}_{\mathbf{L}}{}^{T}.{}_{t}\,\mathbf{A}.\mathbf{B}_{\mathbf{L}}.epa.\det(\mathbf{J})}_{\mathbf{f}_{\mathrm{L}}(\xi,\eta)}.d\xi.d\eta \qquad \textbf{Equation A6-16}$$

$$\mathbf{f}_{\mathrm{L}}(\xi,\eta) = \mathbf{B}_{\mathbf{L}}(\xi,\eta)^{T} ._{t} \mathbf{A}(\xi,\eta).\mathbf{B}_{\mathbf{L}}(\xi,\eta).epa(\xi,\eta).\det(\mathbf{J}(\xi,\eta))$$

Equation A6-17

$$\mathbf{K}_{\mathbf{NL}(e)} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \underbrace{\mathbf{B}_{\mathbf{NL}}{}^{T}.\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{NL}}.\mathbf{B}_{\mathbf{NL}}.epa.\det(\mathbf{J})}_{\mathbf{f}_{\mathrm{NL}}(\xi,\eta)}.d\xi.d\eta$$ **Equation A6-18**

$$\mathbf{f}_{\mathrm{NL}}(\xi,\eta) = \mathbf{B}_{\mathbf{NL}}(\xi,\eta)^{T}.\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{NL}}(\xi,\eta).\mathbf{B}_{\mathbf{NL}}(\xi,\eta).epa(\xi,\eta).\det(\mathbf{J}(\xi,\eta))$$

Equation A6-19

Les deux intégrales précédentes se calculent par intégration numérique aux points de Gauss (Equation A6-9), ce qui revient à:

$$\mathbf{K}_{\mathbf{L}(e)} = \sum_{i=1}^{4} \mathbf{f}_{\mathrm{L}}(\xi_{Gi},\eta_{Gi})$$ **Equation A6-20**

$$\mathbf{K}_{\mathbf{NL}(e)} = \sum_{i=1}^{4} \mathbf{f}_{\mathrm{NL}}(\xi_{Gi},\eta_{Gi})$$ **Equation A6-21**

<u>Les efforts internes élémentaires</u>

La démarche est identique pour le calcul des efforts internes élémentaires, leur définition donne :

$$\mathbf{F}_{\mathbf{int}(e)} = \int_{V_e} \mathbf{B}_{\mathbf{L}}{}^{T}.\boldsymbol{\sigma}.dV_e$$ **Equation A6-22**

Grâce à l'Equation A6-8, l'Equation A6-22 peut s'écrire sous la forme:

$$\mathbf{F}_{\mathbf{int}(e)} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \underbrace{\mathbf{B}_{\mathbf{L}}{}^{T}.\boldsymbol{\sigma}.epa.\det(\mathbf{J})}_{\mathbf{f}_{I}(\xi,\eta)}.d\xi.d\eta$$ **Equation A6-23**

$$\mathbf{f}_{\mathbf{I}}(\xi,\eta) = \mathbf{B}_{\mathrm{L}}(\xi,\eta)^{T}.\boldsymbol{\sigma}(\xi,\eta).epa(\xi,\eta).\det(\mathbf{J}(\xi,\eta))$$ **Equation A6-24**

et enfin être calculée par intégration numérique aux points de Gauss (Equation A6-9) :

$$\mathbf{F}_{\mathbf{int}(e)} = \sum_{i=1}^{4} \mathbf{f}_{\mathbf{I}}(\xi_{Gi},\eta_{Gi})$$ **Equation A6-25**

5. Compléments de calcul

Matrices gradient linéaire et non linéaire

Les expressions des fonctions vectorielles $\mathbf{f_L}$ et $\mathbf{f_{NL}}$ définies dans les équations A6-17 et A6-19 font apparaître les matrices gradient linéaires $\mathbf{B_L}$ et non linéaires $\mathbf{B_{NL}}$.
La matrice gradient linéaire $\mathbf{B_L}$, au point de coordonnées (ξ,η), s'obtient en introduisant la matrice $\widetilde{\mathbf{B}}_\mathbf{L}$ définie par :

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \widetilde{\mathbf{B}}_\mathbf{L}.\widetilde{\mathbf{U}}_e \text{ tel que } \widetilde{\mathbf{U}}_e^{\,T} = \begin{bmatrix} u_{1(i)} & u_{1(j)} & u_{1(k)} & u_{1(l)} & u_{2(i)} & u_{2(j)} & u_{2(k)} & u_{2(l)} \end{bmatrix}$$

Equation A6-26

L'expression de $\widetilde{\mathbf{B}}_\mathbf{L}$ prend la forme :

$$\widetilde{\mathbf{B}}_\mathbf{L}(\xi,\eta) = \mathbf{A_L}.\mathbf{J_{inv}}(\xi,\eta).\mathbf{N_d}(\xi,\eta)$$

Equation A6-27

avec

$$\mathbf{A_L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J_{inv}}(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}^{-1} & \\ & \mathbf{J}^{-1} \end{bmatrix}$$ composé de l'inverse de la matrice Jacobienne au point de coordonnées (ξ,η) et

$$\mathbf{N_d}(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} \mathbf{N},\xi & \\ \mathbf{N},\eta & \\ & \mathbf{N},\xi \\ & \mathbf{N},\eta \end{bmatrix}$$ composé des dérivées partielles des fonctions de forme de l'élément au point de coordonnées (ξ,η).

Rappelons que d'après l'Equation A6-26, la matrice gradient $\widetilde{\mathbf{B}}_\mathbf{L}$ correspond à $\widetilde{\mathbf{U}}_e$, ses composantes doivent être réorganisées afin d'obtenir $\mathbf{B_L}$ correspondant à $\mathbf{U}_e$ vérifiant :

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \mathbf{B_L}.\mathbf{U_e} \text{ tel que } \mathbf{U}_e^{\,T} = \begin{bmatrix} U_{1(i)} & U_{2(i)} & U_{1(j)} & U_{2(j)} & U_{1(k)} & U_{2(k)} & U_{1(l)} & U_{2(l)} \end{bmatrix}$$

Equation A6-28

La matrice gradient non linéaire $\mathbf{B_{NL}}$ au point de coordonnées (ξ,η) est directement donnée par le produit de tenseurs suivant:

$$\mathbf{B_{NL}}(\xi,\eta) = \mathbf{J_{inv}}(\xi,\eta).\mathbf{N_d}(\xi,\eta)$$ **Equation A6-29**

Gradient de la transformation

Le tenseur gradient de la transformation au point d'intégration G de coordonnées (ξ,η) est défini par :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial U_{G1}}{\partial x_1}+1 & \dfrac{\partial U_{G1}}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial U_{G2}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial U_{G2}}{\partial x_2}+1 \end{bmatrix}$$ **Equation A6-30**

Cette équation fait apparaître les composantes du vecteur des déplacements en ce point :

$$U_G = \begin{bmatrix} U_{G1} \\ U_{G2} \end{bmatrix}$$ **Equation A6-31**

dont l'expression est fonction des déplacements des quatre nœuds de l'élément auquel appartient le point d'intégration et dérivées des fonctions de forme de ces mêmes nœuds:

$$\frac{\partial U_{Gj}}{\partial x_i} = \sum_{n=1}^{4} \frac{\partial N_{(n)}}{\partial x_i} U_{j(n)}$$ **Equation A6-32**

avec $U_{i(n)}$ la composante suivant x_i du déplacement du nœud *n* et $N_{(n)}$ la fonction de forme du même nœud.

Module tangent de comportement

La routine Matlab® suivante permet de déterminer si un point d'intégration G de coordonnées (ξ,η) est soumis à de la charge ou de la décharge, dans le cas de la traction. Soit les vecteurs ^{t}**test_s,** ^{t}**test_c** et ^{t}**test_r** définis à l'instant *t* et ^{t1}**test_s,** ^{t1}**test_c** et ^{t1}**test_r** leurs valeurs à l'instant *t1*. On introduit **test_c_max** qui correspond à ^{t}**test_c** en début de décharge : point 2 ou 5 sur la Figure 4-6.
Notons que les numéros en bleu correspondent aux points caractéristiques représentés sur la courbe contrainte/déformation de la Figure 4-6.

```
if sum(ttest_r==0)==0 "aucune fibre cassée"
        if (sum((t1test_c - ttest_c)<0)>0) "nombre de fibres à déformation > C11critique diminue"
                Décharge élastique (2→3)
        else "nombre de fibres à déformation > C11critique augmente"
                if sum(test_c_max – t1test_s)>=0 "fibres à déformation > C11critique ont une
                                                  contrainte = Sc"
                        Charge élastique (1→2 et 2→4)
                else "fibres à déformation > C11critique ont une contrainte < Sc"
                        Recharge élastique (3→2)
                end
        end
else "au moins une fibre cassée"
        if (sum((t1test_c - ttest_c)<0)>0) "nombre de fibres à déformation > C11critique diminue"
                Décharge après rupture (5→6)
        else "nombre de fibres à déformation > C11critique augmente"
                if sum(test_c_max – t1test_s)>=0 "fibres à déformation > C11critique ont une
                                                  contrainte = Sc"
                        Charge après rupture (4→5)
                else "fibres à déformation > C11critique ont une contrainte < Sc"
                        Recharge après rupture (6→5)
                end
        end
end
```

6. Algorithmes détaillés

Méthode de Newton-Raphson complète

Etat Initial *t0*:

- Configuration initiale : ${}^{0}\Omega$

avec épaisseur initiale ${}^{0}epa$

- Matrices gradient : ${}^{0}_{0}\mathbf{B_L} = \mathbf{B_L}({}^{0}\Omega)$

$${}^{0}_{0}\mathbf{B_{NL}} = \mathbf{B_{NL}}({}^{0}\Omega)$$

- Déplacements : ${}^{0}\mathbf{U} = \mathbf{0}$
- Gradient de transformation : ${}^{0}_{0}\mathbf{F} = \mathbf{I_d}$
- Déformations : ${}^{0}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$, ${}^{0}\mathbf{E} = \mathbf{0}$ et ${}^{0}\mathbf{C} = \mathbf{I}$
- Quantité de fibres initiale : ${}^{0}Q_f$
- Quantité minimale de fibres à partir de laquelle l'élément est considéré comme 'killed ' : $Q_{f\,\min}$
- Module tangent de comportement :

${}_{\mathbf{t}}\mathbf{A}^{(0)} = {}_{\mathbf{0}}\mathbf{A}^{(0)}$ (en formulation LR)

avec ${}_{\mathbf{0}}\mathbf{A}^{(0)} = {}_{\mathbf{0}}\mathbf{A}({}^{0}\mathbf{C})$ (en formulation LT)

- Contraintes : ${}^{0}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$
- Efforts internes :

$${}^{0}\mathbf{F_{int}} = \int_{{}^{0}\Omega} {}^{0}_{0}\mathbf{B}^{T}.{}^{0}\boldsymbol{\sigma}.d{}^{0}\Omega \;= \mathbf{0}$$

- Multiplicateurs de Lagrange :

${}^{0}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$

- Efforts de liaison :

${}^{0}\mathbf{F_{liai}} = -\mathbf{L}^{T}.{}^{0}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$

- Efforts extérieurs : ${}^{0}\mathbf{F_{ext}} = \mathbf{0}$
- Résidu : ${}^{0}\mathbf{Res}^{(0)} = {}^{0}\mathbf{F_{ext}} - {}^{0}\mathbf{F_{int}} + {}^{0}\mathbf{F}_{\mathbf{liai}i}$
- Critère de convergence sur les résidus : $critere = 1$
- Précision : ζ =10^{-8}
- Itérations : $j = 1$ à j_{max}

Incrément de chargement *i* :

Itérations d'équilibre *j* :

Tant que (Critère de convergence : $critere < \zeta$ & Itération : $j < j_{max}$)

- Equivalence pour chaque variable (V) : ${}^{t}V^{(j)} = {}^{t+\Delta t}V^{(j-1)}$

$${}^{t}V^{(j)} = {}^{0}V \text{ si } j = 1$$

- Calcul de l'opérateur tangent:

$${}^{t+\Delta t}_{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(j-1)} \Leftarrow {}^{t+\Delta t}_{t+\Delta t}\mathbf{K}_{(e)}^{(j-1)}$$

avec

$${}^{t+\Delta t}_{t+\Delta t}\mathbf{K}_{(e)}^{(j-1)} = {}^{t+\Delta t}_{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\mathbf{L}(e)}^{(j-1)}({}^{t}_{t}\mathbf{B}_{\mathbf{L}}, {}_{\mathbf{t}}\mathbf{A}) + {}^{t+\Delta t}_{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\mathbf{NL}(e)}^{(j-1)}({}^{t}_{t}\mathbf{B}_{\mathbf{NL}}, {}^{t}\boldsymbol{\sigma})$$

$${}_{\mathbf{t}}\mathbf{A} = {}_{\mathbf{t}}\mathbf{A}({}_{\mathbf{0}}\mathbf{A}, {}^{t}_{0}\mathbf{F}) \text{ avec } {}_{\mathbf{0}}\mathbf{A} = {}_{\mathbf{0}}\mathbf{A}({}^{t}_{0}\mathbf{C}) \quad \text{(utilisé à } j\text{-1)}$$

- Calcul de β(*j*) : *(pour déplacements imposés* $\mathbf{U}_{imp}$ sur l'incrément*)*

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}(j=1) = \mathbf{U}_{imp} \\ \boldsymbol{\beta}(j>1) = \mathbf{0} \end{cases}$$

- Résolution du système linéaire:

$$\begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}_{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(j-1)} & \mathbf{L_T}^{T} \\ \mathbf{L_T} & \mathbf{0} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{U}^{(j)} \\ \Delta\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{T}}^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{Res}^{(j-1)} \\ \boldsymbol{\beta}(j) \end{bmatrix}$$

- Mise à jour du déplacement:

$${}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{U} = {}^{t}_{0}\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^{(j)}$$

- Mise à jour de la configuration:

$${}^{t+\Delta t}\Omega = {}^{t}\Omega + \Delta\mathbf{U}^{(j)}$$

- Calcul du gradient de la transformation:

$${}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\, {}^{t+\Delta t}_{0}U_1}{\partial\, {}^{0}x_1} + 1 & \dfrac{\partial\, {}^{t+\Delta t}_{0}U_1}{\partial\, {}^{0}x_2} \\ \dfrac{\partial\, {}^{t+\Delta t}_{0}U_2}{\partial\, {}^{0}x_1} & \dfrac{\partial\, {}^{t+\Delta t}_{0}U_2}{\partial\, {}^{0}x_2} + 1 \end{bmatrix} \text{ et}$$

$${}^{t+\Delta t}_{t}\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \Delta U_1^{(j)}}{\partial\, {}^{t}x_1} + 1 & \dfrac{\partial \Delta U_1^{(j)}}{\partial\, {}^{t}x_2} \\ \dfrac{\partial \Delta U_2^{(j)}}{\partial\, {}^{t}x_1} & \dfrac{\partial \Delta U_2^{(j)}}{\partial\, {}^{t}x_2} + 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } {}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}_{0}u_1 \\ {}^{t+\Delta t}_{0}u_2 \end{bmatrix} \text{ et } \Delta\mathbf{U}^{(j)} = \begin{bmatrix} \delta u_1^{(j)} \\ \delta u_2^{(j)} \end{bmatrix}$$

- Calcul des incréments de déformation:

t → *t*+*Δt*

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(j)} = {}^{t}_{t}\mathbf{B}_{\mathbf{L}}\ \Delta\mathbf{U}^{(j)}$$

$$\Rightarrow \Delta e_{ij}^{(j)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Delta U_i^{(j)}}{\partial\, {}^{t}x_j} + \frac{\partial \Delta U_j^{(j)}}{\partial\, {}^{t}x_i} \right)$$

$$\Delta\mathbf{n}^{(j)}$$

$$\Rightarrow \Delta n_{ij}^{(j)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Delta U_k^{(j)}}{\partial\, {}^{t}x_i} . \frac{\partial \Delta U_k^{(j)}}{\partial\, {}^{t}x_j} \right)$$

$$\Delta\mathbf{E}^{(j)} = \Delta\mathbf{n}^{(j)} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(j)}$$

(Green_Lagrange)

$$\Delta\mathbf{C}^{(j)} = {}^{t+\Delta t}_{t}\mathbf{F}^{\mathbf{T}}\ {}^{t+\Delta t}_{t}\mathbf{F} \qquad \text{(Cauchy-Green droit)}$$

- Calcul des déformations:

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon} = {}^{t}\boldsymbol{\varepsilon} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(j)} \qquad \text{(linéaires)}$$

$${}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{E} = {}^{t}_{0}\mathbf{E} + \Delta\mathbf{E}^{(j)} \qquad \text{(Green\_Lagrange)}$$

$${}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{C} = {}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{F}^{\mathbf{T}}\ {}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{F} \qquad \text{(Cauchy-Green droit)}$$

- Mise à jour de l'épaisseur:

$${}^{t+\Delta t}epa = {}^{t}epa\sqrt{\frac{1}{\det(\Delta\mathbf{C}^{(j)})}}$$

- Calcul du module tangent de comportement:

$${}_{\mathbf{t}}\mathbf{A} = {}_{\mathbf{t}}\mathbf{A}({}_{\mathbf{0}}\mathbf{A}, {}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{F}) \qquad \text{(en formulation LR)}$$

$${}_{\mathbf{0}}\mathbf{A} = {}_{\mathbf{0}}\mathbf{A}({}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{C}) \qquad \text{(en formulation LT)}$$

Méthode 1a

- Calcul contraintes:

$$\boldsymbol{\Delta}_{t}\mathbf{S}^{(j)} = {}_{\mathbf{t}}\mathbf{A}\,.\boldsymbol{\Delta}\mathbf{E}^{(j)} \qquad \text{(Piola-Kirchhoff 2)}$$

$$\boldsymbol{\Delta}_{0}\mathbf{S}^{(j)} = {}^{t}_{0}\mathbf{F}^{-1}\ \Delta_{t}\mathbf{S}^{(j)}\ {}^{t}_{0}\mathbf{F}^{-\mathbf{T}}\ \frac{{}^{0}epa}{{}^{t}epa.}\det({}^{t}_{0}\mathbf{F})$$

$${}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{S} = {}^{t}_{0}\mathbf{S} + \boldsymbol{\Delta}_{0}\mathbf{S}^{(j)}$$

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} = {}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{F}\ {}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{S}\ {}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{F}^{\mathbf{T}}\ \frac{{}^{0}epa}{{}^{t+\Delta t}epa.\det({}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{F})} \qquad \text{(Cauchy)}$$

- Calcul des efforts internes:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{int}} = \int_{{}^{t+\Delta t}\Omega^{(j)}} {}^{t+\Delta t}_{t+\Delta t}\mathbf{B}_{\mathbf{L}}{}^{T}.{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}.d^{t+\Delta t}\Omega$$

- Mise à jour des multiplicateurs de Lagrange:

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\lambda} = {}^{t}\boldsymbol{\lambda} + \Delta\boldsymbol{\lambda}^{(j)}$$

- Calcul des efforts de liaison:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{liai}} = -\mathbf{L}^{T}.{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\lambda}$$

- Calcul des efforts extérieurs: *(si déplacements imposés)*

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{ext}} = \mathbf{0}$$

- Calcul du résidu:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{Res} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{ext}} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{int}} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{liai}}$$

- Calcul du critère de convergence:

$$critere = \frac{\left\| {}^{t+\Delta t}\mathbf{Res} \right\|}{\max(\left\|{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{int}}\right\|, \left\|{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{ext}}\right\|, \left\|{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{liai}T}\right\|)}$$

avec $\|\mathbf{V}\|$ = plus grande valeur des normes de chaque vecteur nodal composant $\mathbf{V}$.

- $j = j + 1$

Fin

i = i +1

Fin

Méthode du pilotage en longueur d'arc

Etat Initial *t0*:

- Configuration initiale : ${}^{0}\Omega$

avec épaisseur initiale ${}^{0}epa$

- Matrices gradient : ${}^{0}_{0}\mathbf{B_L} = \mathbf{B_L}({}^{0}\Omega)$

$${}^{0}_{0}\mathbf{B_{NL}} = \mathbf{B_{NL}}({}^{0}\Omega)$$

- Déplacements : ${}^{0}\mathbf{U} = \mathbf{0}$
- Gradient de transformation : ${}^{0}_{0}\mathbf{F} = \mathbf{I_d}$
- Déformations : ${}^{0}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$, ${}^{0}\mathbf{E} = \mathbf{0}$ et ${}^{0}\mathbf{C} = \mathbf{I}$
- Quantité de fibres initiale : ${}^{0}Q_f$

- Quantité minimale de fibres à partir de laquelle l'élément est considéré comme 'killed ' : $Q_{f\,\min}$

- Module tangent de comportement :

${}_{\mathbf{t}}\mathbf{A}^{(0)} = {}_{\mathbf{0}}\mathbf{A}^{(0)}$ (en formulation LR)

avec ${}_{\mathbf{0}}\mathbf{A}^{(0)} = {}_{\mathbf{0}}\mathbf{A}({}^{0}\mathbf{C})$ (en formulation LT)

- Contraintes : ${}^{0}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$

- Efforts internes :

$${}^{0}\mathbf{F_{int}} = \int_{{}^{0}\Omega} {}^{0}_{0}\mathbf{B}^{T} . {}^{0}\boldsymbol{\sigma} . d\,{}^{0}\Omega = \mathbf{0}$$

- Multiplicateurs de Lagrange :

${}^{0}\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{T}} = \mathbf{0}$ (tous les déplacements imposés)

${}^{0}\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{B}} = \mathbf{0}$ (blocages uniquement)

- Efforts de liaison :

$${}^{0}\mathbf{F}_{\mathbf{liai}T} = -\mathbf{L_T}^{T} . {}^{0}\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{T}} = \mathbf{0}$$

$${}^{0}\mathbf{F}_{\mathbf{liai}B} = -\mathbf{L_B}^{T} . {}^{0}\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{B}} = \mathbf{0}$$

- Efforts extérieurs : ${}^{0}\mathbf{F_{ext}} = \mathbf{0}$
- Résidu : ${}^{0}\mathbf{Res}^{(0)} = {}^{0}\mathbf{F_{ext}} - {}^{0}\mathbf{F_{int}} + {}^{0}\mathbf{F}_{\mathbf{liai}T}$

- Critère de convergence sur les résidus : $critere = 1$
- Précision : $\zeta = 10^{-8}$

- Itérations : $j = 1$ à j_{max}

Incrément de chargement $i = 1$:

Itérations d'équilibre j :

Tant que (Critère de convergence : $critere < \zeta$ & Itération : $j < j_{max}$)

- Equivalence pour chaque variable (V) : ${}^{t}\mathrm{V}^{(j)} = {}^{t+\Delta t}\mathrm{V}^{(j-1)}$

  ${}^{t}\mathrm{V}^{(j)} = {}^{0}\mathrm{V}$ si $j = 1$

- Calcul de l'opérateur tangent:

$${}^{t}_{t}\mathbf{K}^{(j)} \Leftarrow {}^{t}_{t}\mathbf{K}_{(e)}{}^{(j)}$$

avec

$${}^{t}_{t}\mathbf{K}_{(e)}{}^{(j)} = {}^{t}_{t}\mathbf{K}_{\mathbf{L}(e)}{}^{(j)}({}^{t}_{t}\mathbf{B}_{\mathbf{L}}, {}_{\mathbf{t}}\mathbf{A}) + {}^{t}_{t}\mathbf{K}_{\mathbf{NL}(e)}{}^{(j)}({}^{t}_{t}\mathbf{B}_{\mathbf{NL}}, {}^{t}\boldsymbol{\sigma})$$

$${}_{\mathbf{t}}\mathbf{A} = {}_{\mathbf{t}}\mathbf{A}({}_{\mathbf{0}}\mathbf{A}, {}^{t}_{0}\mathbf{F}) \text{ avec } {}_{\mathbf{0}}\mathbf{A} = {}_{\mathbf{0}}\mathbf{A}({}^{t}_{0}\mathbf{C}) \quad \text{(utilisé à } j\text{-1)}$$

- Calcul de $\beta(j)$: *(pour déplacements imposés* $\mathbf{U}_{imp}$ sur l'incrément*)*

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}(j=1) = \mathbf{U}_{imp} \\ \boldsymbol{\beta}(j>1) = \mathbf{0} \end{cases}$$

- Résolution du système linéaire:

$$\begin{bmatrix} {}^{t}_{t}\mathbf{K}^{(j)} & \mathbf{L_T}^{T} \\ \mathbf{L_T} & \mathbf{0} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{U}^{(j)} \\ \Delta\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{T}}{}^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{t}\mathbf{Res}^{(j)} \\ \boldsymbol{\beta}(j) \end{bmatrix}$$

- Mise à jour du déplacement:

$${}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{U} = {}^{t}_{0}\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^{(j)}$$

- Mise à jour de la configuration:

$${}^{t+\Delta t}\Omega = {}^{t}\Omega + \Delta\mathbf{U}^{(j)}$$

- Calcul du gradient de la transformation:

$${}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\, {}^{t+\Delta t}_{0}U_1}{\partial\, {}^{0}x_1} + 1 & \dfrac{\partial\, {}^{t+\Delta t}_{0}U_1}{\partial\, {}^{0}x_2} \\ \dfrac{\partial\, {}^{t+\Delta t}_{0}U_2}{\partial\, {}^{0}x_1} & \dfrac{\partial\, {}^{t+\Delta t}_{0}U_2}{\partial\, {}^{0}x_2} + 1 \end{bmatrix} \text{ et}$$

$${}^{t+\Delta t}_{t}\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \Delta U_1^{(j)}}{\partial\, {}^{t}x_1} + 1 & \dfrac{\partial \Delta U_1^{(j)}}{\partial\, {}^{t}x_2} \\ \dfrac{\partial \Delta U_2^{(j)}}{\partial\, {}^{t}x_1} & \dfrac{\partial \Delta U_2^{(j)}}{\partial\, {}^{t}x_2} + 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } {}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}_{0}U_1 \\ {}^{t+\Delta t}_{0}U_2 \end{bmatrix} \text{ et } \Delta\mathbf{U}^{(j)} = \begin{bmatrix} \Delta U_1^{(j)} \\ \Delta U_2^{(j)} \end{bmatrix}$$

- Calcul des incréments de déformation:

$t \rightarrow t+\Delta t$

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(j)} = {}^{t}_{t}\mathbf{B}_{\mathbf{L}}\ \Delta\mathbf{U}^{(j)} \Rightarrow \Delta e_{ij}^{(j)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Delta U_i^{(j)}}{\partial\, {}^{t}x_j} + \frac{\partial \Delta U_j^{(j)}}{\partial\, {}^{t}x_i}\right)$$

$$\Delta\mathbf{n}^{(j)} \Rightarrow \Delta n_{ij}^{(j)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Delta U_k^{(j)}}{\partial\, {}^{t}x_i} . \frac{\partial \Delta U_k^{(j)}}{\partial\, {}^{t}x_j}\right)$$

$$\Delta\mathbf{E}^{(j)} = \Delta\mathbf{n}^{(j)} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(j)} \quad \text{(Green\_Lagrange)}$$

$$\Delta\mathbf{C}^{(j)} = {}^{t+\Delta t}_{t}\mathbf{F}^{\mathbf{T}}\ {}^{t+\Delta t}_{t}\mathbf{F} \quad \text{(Cauchy-Green droit)}$$

- Calcul des déformations:

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon} = {}^{t}\boldsymbol{\varepsilon} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(j)} \quad \text{(linéaires)}$$

$${}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{E} = {}^{t}_{0}\mathbf{E} + \Delta\mathbf{E}^{(j)} \quad \text{(Green\_Lagrange)}$$

$${}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{C} = {}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{F}^{\mathbf{T}}\ {}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{F} \quad \text{(Cauchy-Green droit)}$$

- Mise à jour de l'épaisseur:

$$^{t+\Delta t}epa = {}^{t}epa\sqrt{\frac{1}{\det(\Delta \mathbf{C}^{(j)})}}$$

- Calcul du module tangent de comportement:

$${}_{\mathbf{t}}\mathbf{A} = {}_{\mathbf{t}}\mathbf{A}({}_{\mathbf{0}}\mathbf{A}, {}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{F}) \qquad \text{(en formulation LR)}$$

$${}_{\mathbf{0}}\mathbf{A} = {}_{\mathbf{0}}\mathbf{A}({}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{C}) \qquad \text{(en formulation LT)}$$

Méthode 1a

- Calcul contraintes:

$$\Delta_t \mathbf{S}^{(j)} = {}_{\mathbf{t}}\mathbf{A} . \Delta \mathbf{E}^{(j)} \qquad \text{(Piola-Kirchhoff 2)}$$

$$\Delta_0 \mathbf{S}^{(j)} = {}^{t}_{0}\mathbf{F}^{-1}\ \Delta_t \mathbf{S}^{(j)}\ {}^{t}_{0}\mathbf{F}^{-\mathbf{T}} \frac{{}^{0}epa}{{}^{t}epa.} \det({}^{t}_{0}\mathbf{F})$$

$${}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{S} = {}^{t}_{0}\mathbf{S} + \Delta_0 \mathbf{S}^{(j)}$$

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} = {}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{F}\ {}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{S}\ {}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{F}^{\mathbf{T}} \frac{{}^{0}epa}{{}^{t+\Delta t}epa.\det({}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{F})} \qquad \text{(Cauchy)}$$

- Calcul des efforts internes:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{int}} = \int_{{}^{t+\Delta t}\Omega^{(j)}} {}^{t+\Delta t}_{t+\Delta t}\mathbf{B}_{\mathbf{L}}{}^{T} . {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} . d\,{}^{t+\Delta t}\Omega$$

- Mise à jour des multiplicateurs de Lagrange:

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\lambda}_T = {}^{t}\boldsymbol{\lambda}_T + \Delta\boldsymbol{\lambda}_T{}^{(j)}$$

- Calcul des efforts de liaison:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{liai}} = -\mathbf{L}^T . {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\lambda}_T$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{liai}B} = -\mathbf{L}_B{}^T . {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\lambda}_B$$

- Calcul des efforts extérieurs: *(si déplacements imposés)*

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{ext}} = \mathbf{0}$$

- Calcul du résidu:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{Res} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{ext}} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{int}} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{liai}T}$$

- Calcul du critère de convergence:

$$critere = \frac{\left\| {}^{t+\Delta t}\mathbf{Res} \right\|}{\max(\left\| {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{int}} \right\|, \left\| {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{ext}} \right\|, \left\| {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{liai}T} \right\|)}$$

avec $\left\|\mathbf{V}\right\|$ = plus grande valeur des normes de chaque vecteur nodal composant **V**.

- $j = j + 1$

Fin

i = 2

<u>Initialisation des variables pour pilotage en longueur d'arc :</u>

- Incrément de déplacement : $^{(i=1)}\mathbf{U}_{12} = {}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{U}$
- Longueur d'arc : $^{(i=2)}dl = \sqrt{{}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{U}^T . {}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{U}}$
- Effort extérieur (valeur fixe) : $\mathbf{F}_{\mathbf{ext}} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{int}} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{liai}B}$
  avec
  $${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{liai}B} = -\mathbf{L}_B{}^T . {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\lambda}_B$$
- Facteur de chargement : ${}^{t}\alpha = 1$
- ${}^{t1}_{0}\mathbf{A}_{old} = {}_{\mathbf{0}}\mathbf{A}^{(j=0)}$
- ${}^{t1}_{0}\mathbf{E}_{old} = {}^{0}_{0}\mathbf{E} = \mathbf{0}$

Incréments de chargement $i = 2$ à i_{max}:

Itération d'équilibre $j = 1$ – Phase de prédiction :

$j = 1$ ($t = t1$)

- Calcul du module tangent de comportement en $t1$ en fonction de la quantité de fibres en $t1$:

- Module de charge : ${}_{\mathbf{t1}}\mathbf{A}_{ch}$

- Module de décharge : ${}_{\mathbf{t1}}\mathbf{A}_{dch}$

si ${}^{t1}Q_f = {}^{0}Q_f$ *(si aucune fibre cassée)*

si charge

méthode 1a :

$${}_{\mathbf{t1}}\mathbf{A} = {}_{\mathbf{t1}}\mathbf{A}({}_{\mathbf{0}}\mathbf{A}, {}^{t1}_{0}\mathbf{F}) \qquad \text{(en formulation LR)}$$

$${}_{\mathbf{0}}\mathbf{A} = {}_{\mathbf{0}}\mathbf{A}({}^{t1}_{0}\mathbf{C}) \qquad \text{(en formulation LT)}$$

si décharge élastique

méthode 1b :

$${}_{\mathbf{t1}}\mathbf{A} = {}_{\mathbf{t1}}\mathbf{A}({}_{\mathbf{0}}\mathbf{A}, {}^{t1}_{0}\mathbf{F}) \qquad \text{(en formulation LR)}$$

$${}_{\mathbf{0}}\mathbf{A} = {}_{\mathbf{0}}\mathbf{A}({}^{t1}_{0}\mathbf{C}) \qquad \text{(en formulation LT)}$$

si $Q_{f\,\min} < {}^{t1}Q_f < {}^{0}Q_f$ *(si au moins 1 fibre cassée)*

si charge

méthode 2

$${}_{\mathbf{t1}}\mathbf{A} = \frac{{}^{t1}_{0}\mathbf{A}.{}^{t1}_{0}\mathbf{E} - {}^{t1}_{0}\mathbf{A}_{old}.{}^{t1}_{0}\mathbf{E}_{old}}{{}^{t1}_{0}\mathbf{E} - {}^{t1}_{0}\mathbf{E}_{old}}$$

${}^{t1}_{0}\mathbf{A}_{old}$ et ${}^{t1}_{0}\mathbf{E}_{old}$ calculés à l'incrément *i-1*

${}^{t1}_{0}\mathbf{A} = {}_{0}\mathbf{A}({}^{t1}_{0}\mathbf{C})$ de l'incrément i

si décharge après rupture

méthode 1b :

$${}_{\mathbf{t1}}\mathbf{A} = {}_{\mathbf{t1}}\mathbf{A}({}_{\mathbf{0}}\mathbf{A}, {}^{t1}_{0}\mathbf{F}) \qquad \text{(en formulation LR)}$$

$${}_{\mathbf{0}}\mathbf{A} = {}_{\mathbf{0}}\mathbf{A}({}^{t1}_{0}\mathbf{C}) \qquad \text{(en formulation LT)}$$

avec ${}^{t}Q_f = {}^{t1}Q_f$

si ${}^{t1}Q_f \geq Q_{f\,\min}$ *(quantité fibres restantes trop faible)*

méthode 3

$${}_{\mathbf{t1}}\mathbf{A} = {}_{\mathbf{t1}}\mathbf{A}(i = 1).10^{-4}$$

- Attribution du module de charge ou décharge à chaque point de Gauss en fonction de ce qu'il a subit sur l'incrément (i-1)

$${}_{\mathbf{t1}}\mathbf{A} = {}_{\mathbf{t1}}\mathbf{A}_{ch} \text{ ou } {}_{\mathbf{t1}}\mathbf{A} = {}_{\mathbf{t1}}\mathbf{A}_{dch}$$

- Calcul de l'opérateur tangent:

$${}^{t1}_{t1}\mathbf{K} \Leftarrow {}^{t1}_{t1}\mathbf{K}_{(e)}$$

avec

$${}^{t1}_{t1}\mathbf{K}_{(e)} = {}^{t1}_{t1}\mathbf{K}_{\mathbf{L}(e)}({}^{t1}_{t1}\mathbf{B}_{\mathbf{L}}, {}_{\mathbf{t1}}\mathbf{A}) + {}^{t1}_{t1}\mathbf{K}_{\mathbf{NL}(e)}({}^{t1}_{t1}\mathbf{B}_{\mathbf{NL}}, {}^{t1}\boldsymbol{\sigma})$$

- Résolution du système linéaire:

$$\begin{bmatrix} {}^{t1}_{t1}\mathbf{K} & \mathbf{L_B}^T \\ \mathbf{L_B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{U_L} \\ \Delta\boldsymbol{\lambda}_\mathbf{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F_{ext}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

- Prédicteurs linéaires :

$$\Delta\alpha^{(1)} = s.{}^{(i)}dl \Big/ \sqrt{\Delta\mathbf{U_L}^T.\Delta\mathbf{U_L}}$$

$$\left| \begin{array}{l} \Delta\mathbf{U}^{(1)} = \Delta\alpha^{(1)}.\Delta\mathbf{U_L} \\ \Delta\boldsymbol{\lambda}^{(1)} = \Delta\alpha^{(1)}.\Delta\boldsymbol{\lambda}_\mathbf{L} \end{array} \right.$$

- Mise à jour du facteur de charge:

$$^{t+\Delta t}\alpha = {}^{t}\alpha + \Delta\alpha^{(1)}$$

- Mise à jour du déplacement:

$$^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{U} = {}^{t}_{0}\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^{(1)}$$

$$\mathbf{U}_{12}{}^{(1)} = \Delta\mathbf{U}^{(1)}$$

- Mise à jour de la configuration:

$$^{t+\Delta t}\Omega = {}^{t}\Omega + \Delta\mathbf{U}^{(1)}$$

- Calcul du gradient de la transformation:

$$^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\, ^{t+\Delta t}_{0}U_1}{\partial\, ^{0}x_1} + 1 & \dfrac{\partial\, ^{t+\Delta t}_{0}U_1}{\partial\, ^{0}x_2} \\ \dfrac{\partial\, ^{t+\Delta t}_{0}U_2}{\partial\, ^{0}x_1} & \dfrac{\partial\, ^{t+\Delta t}_{0}U_2}{\partial\, ^{0}x_2} + 1 \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$^{t}_{0}\mathbf{F} = {}^{t1}_{0}\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\, ^{t}_{0}U_1}{\partial\, ^{t}x_1} + 1 & \dfrac{\partial\, ^{t}_{0}U_1}{\partial\, ^{t}x_2} \\ \dfrac{\partial\, ^{t}_{0}U_2}{\partial\, ^{t}x_1} & \dfrac{\partial\, ^{t}_{0}U_2}{\partial\, ^{t}x_2} + 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } ^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} ^{t+\Delta t}_{0}U_1 \\ ^{t+\Delta t}_{0}U_2 \end{bmatrix}, \quad ^{t}_{0}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} ^{t}_{0}U_1 \\ ^{t}_{0}U_2 \end{bmatrix}$$

- Calcul des incréments de déformation:

t (= t1) → t+Δt

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = {}^{t1}_{t1}\mathbf{B_L}\ \Delta\mathbf{U}^{(1)} \Rightarrow \Delta e_{ij}{}^{(1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Delta U_i^{(1)}}{\partial\, ^{t}x_j} + \frac{\partial \Delta U_j^{(1)}}{\partial\, ^{t}x_i}\right)$$

$$\Delta\mathbf{n}^{(1)} \Rightarrow \Delta n_{ij}{}^{(1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Delta U_k^{(1)}}{\partial\, ^{t}x_i} \cdot \frac{\partial \Delta U_k^{(1)}}{\partial\, ^{t}x_j}\right)$$

$$\Delta\mathbf{E}^{(1)} = \Delta\mathbf{n}^{(1)} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} \qquad \text{(Green\_Lagrange)}$$

$$\Delta\mathbf{C}^{(1)} = {}^{t+\Delta t}_{t}\mathbf{F}^{\mathbf{T}}\ {}^{t+\Delta t}_{t}\mathbf{F} \qquad \text{(Cauchy-Green droit)}$$

- Calcul des déformations:

$$^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon} = {}^{t}\boldsymbol{\varepsilon} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} \qquad \text{(linéaires)}$$

$$^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{E} = {}^{t}_{0}\mathbf{E} + \Delta\mathbf{E}^{(1)} \qquad \text{(Green\_Lagrange)}$$

$$^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{C} = {}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{F}^{\mathbf{T}}\ {}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{F} \qquad \text{(Cauchy-Green droit)}$$

- Mise à jour de l'épaisseur:

$$^{t+\Delta t}epa = {}^{t}epa\sqrt{\frac{1}{\det(\Delta\mathbf{C}^{(1)})}}$$

Si charge à tous les points de Gauss

→*Poursuite du calcul avec* $^{t1}_{t1}\mathbf{K}$ constant sur l'incrément *i*

- Calcul des contraintes:

$$\boldsymbol{\Delta}_{t1}\mathbf{S}^{(1)} = {}_{\mathbf{t1}}\mathbf{A}\,.\boldsymbol{\Delta}\mathbf{E}^{(1)} \qquad \text{(Piola-Kirchhoff 2)}$$

$$\boldsymbol{\Delta}_{0}\mathbf{S}^{(1)} = {}^{t1}_{0}\mathbf{F}^{-1}\ \Delta_{t1}\mathbf{S}^{(1)}\ {}^{t1}_{0}\mathbf{F}^{-\mathbf{T}}\ \frac{^{0}epa}{^{t1}epa.}\det({}^{t1}_{0}\mathbf{F})$$

$$^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{S} = {}^{t1}_{0}\mathbf{S} + \boldsymbol{\Delta}_{0}\mathbf{S}^{(1)}$$

$$^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} = {}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{F}\ {}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{S}\ {}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{F}^{\mathbf{T}}\ \frac{^{0}epa}{^{t+\Delta t}epa.\det({}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{F})} \qquad \text{(Cauchy)}$$

- Calcul des efforts internes:

$$^{t+\Delta t}\mathbf{F_{int}} = \int_{^{t+\Delta t}\Omega} {}^{t+\Delta t}_{t+\Delta t}\mathbf{B_L}{}^{T} \cdot {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}.d\,^{t+\Delta t}\Omega$$

- Mise à jour des multiplicateurs de Lagrange:

$$^{t+\Delta t}_{0}\boldsymbol{\lambda}_B = {}^{t}_{0}\boldsymbol{\lambda}_B + \Delta\boldsymbol{\lambda}_B{}^{(1)}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{B12}{}^{(1)} = \Delta\boldsymbol{\lambda}_B{}^{(1)}$$

- Calcul des efforts de liaison:

$$^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{liai}B} = -\mathbf{L_B}{}^T . {}^{t+\Delta t}_{\;0}\boldsymbol{\lambda}_B$$

- Calcul des efforts extérieurs:

$$^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{ext}} = {}^{t+\Delta t}\alpha.\mathbf{F}_{\mathbf{ext}}$$

- Calcul du résidu:

$$^{t+\Delta t}\mathbf{Res}^{(j)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{ext}} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{int}} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{liai}B}$$

- Calcul du critère de convergence:

$$critere = \frac{\left\| {}^{t+\Delta t}\mathbf{Res}^{(j)} \right\|}{\max\left(\left\| {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{int}} \right\|, \left\| {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{ext}} \right\|, \left\| {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{liai}B} \right\|\right)}$$

sinon (si au moins 1 point de Gauss en décharge)

→ *Correction de* ${}^{t1}_{t1}\mathbf{K}$ et ré exécution de la phase de prédiction

- Attribution du module tangent de comportement de charge ou décharge à chaque point de Gauss en fonction de ce qu'il a subit sur l'incrément entre t1 et t+Δt :

$$_{\mathbf{t}1}\mathbf{A} = {}_{\mathbf{t}1}\mathbf{A}_{ch} \text{ ou } {}_{\mathbf{t}1}\mathbf{A} = {}_{\mathbf{t}1}\mathbf{A}_{dch}$$

- Calcul de l'opérateur tangent:

$${}^{t1}_{t1}\mathbf{K} \Leftarrow {}^{t1}_{t1}\mathbf{K}_{(e)}$$

avec

$${}^{t1}_{t1}\mathbf{K}_{(e)} = {}^{t1}_{t1}\mathbf{K}_{\mathbf{L}(e)}({}^{t1}_{t1}\mathbf{B}_{\mathbf{L}}, {}_{\mathbf{t}1}\mathbf{A}) + {}^{t1}_{t1}\mathbf{K}_{\mathbf{NL}(e)}({}^{t1}_{t1}\mathbf{B}_{\mathbf{NL}}, {}^{t1}\boldsymbol{\sigma})$$

${}^{t1}_{t1}\mathbf{K}$ constant sur l'incrément *i*

- Résolution du système linéaire:

$$\begin{bmatrix} {}^{t1}_{t1}\mathbf{K} & \mathbf{L_B}{}^T \\ \mathbf{L_B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{U_L} \\ \Delta\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{L}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F_{ext}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

- Prédicteurs linéaires :

$$\Delta\alpha^{(1)} = s.{}^{(i)}dl \Big/ \sqrt{\Delta\mathbf{U_L}{}^T.\Delta\mathbf{U_L}}$$

$$\left| \begin{array}{l} \Delta\mathbf{U}^{(1)} = \Delta\alpha^{(1)}.\Delta\mathbf{U_L} \\ \Delta\boldsymbol{\lambda}^{(1)} = \Delta\alpha^{(1)}.\Delta\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{L}} \end{array} \right.$$

- Mise à jour du facteur de charge:

$$^{t+\Delta t}\alpha = {}^t\alpha + \Delta\alpha^{(1)}$$

- Mise à jour du déplacement:

$$^{t+\Delta t}_{\;0}\mathbf{U} = {}^t_0\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^{(1)}$$

$$\mathbf{U}_{12}{}^{(1)} = \Delta\mathbf{U}^{(1)}$$

- Mise à jour de la configuration:

$$^{t+\Delta t}\Omega = {}^t\Omega + \Delta\mathbf{U}^{(1)}$$

- Calcul du gradient de la transformation:

$$^{t+\Delta t}_{\;0}\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\, {}^{t+\Delta t}_{\;0}U_1}{\partial\, {}^0x_1} + 1 & \dfrac{\partial\, {}^{t+\Delta t}_{\;0}U_1}{\partial\, {}^0x_2} \\ \dfrac{\partial\, {}^{t+\Delta t}_{\;0}U_2}{\partial\, {}^0x_1} & \dfrac{\partial\, {}^{t+\Delta t}_{\;0}U_2}{\partial\, {}^0x_2} + 1 \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$^t_0\mathbf{F} = {}^{t1}_0\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\, {}^t_0U_1}{\partial\, {}^0x_1} + 1 & \dfrac{\partial\, {}^t_0U_1}{\partial\, {}^0x_2} \\ \dfrac{\partial\, {}^t_0U_2}{\partial\, {}^0x_1} & \dfrac{\partial\, {}^t_0U_2}{\partial\, {}^0x_2} + 1 \end{bmatrix}$$

avec $\,^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{U}=\begin{bmatrix} ^{t+\Delta t}_{0}U_1 \\ ^{t+\Delta t}_{0}U_2 \end{bmatrix},\ ^{t}_{0}\mathbf{U}=\begin{bmatrix} ^{t}_{0}U_1 \\ ^{t}_{0}U_2 \end{bmatrix}$

- Calcul des incréments de déformation:

t (= t1) → t+Δt

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}={}^{t1}_{t1}\mathbf{B_L}\ \Delta\mathbf{U}^{(1)} \Rightarrow \Delta e_{ij}^{\ (1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Delta U_i^{(1)}}{\partial^t x_j}+\frac{\partial\Delta U_j^{(1)}}{\partial^t x_i}\right)$$

$$\Delta\mathbf{n}^{(1)} \qquad \Rightarrow \Delta n_{ij}^{\ (1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Delta U_k^{(1)}}{\partial^t x_i}.\frac{\partial\Delta U_k^{(1)}}{\partial^t x_j}\right)$$

$$\Delta\mathbf{E}^{(1)}=\Delta\mathbf{n}^{(1)}+\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} \qquad \text{(Green\_Lagrange)}$$

$$\Delta\mathbf{C}^{(1)}={}^{t+\Delta t}_{t}\mathbf{F}^{\mathbf{T}}\ {}^{t+\Delta t}_{t}\mathbf{F} \qquad \text{(Cauchy-Green droit)}$$

- Calcul des déformations:

$$^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}={}^{t}\boldsymbol{\varepsilon}+\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} \qquad \text{(linéaires)}$$

$$^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{E}={}^{t}_{0}\mathbf{E}+\Delta\mathbf{E}^{(1)} \qquad \text{(Green\_Lagrange)}$$

$$^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{C}={}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{F}^{\mathbf{T}}\ {}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{F} \qquad \text{(Cauchy-Green droit)}$$

- Mise à jour de l'épaisseur:

$$^{t+\Delta t}epa={}^{t}epa\sqrt{\frac{1}{\det(\Delta\mathbf{C}^{(1)})}}$$

- Calcul des contraintes:

$$\boldsymbol{\Delta}_{t1}\mathbf{S}^{(1)}={}_{\mathbf{t1}}\mathbf{A}\,.\boldsymbol{\Delta}\mathbf{E}^{(1)} \qquad \text{(Piola-Kirchhoff 2)}$$

$$\boldsymbol{\Delta}_{0}\mathbf{S}^{(1)}={}^{t1}_{0}\mathbf{F}^{-1}\ \Delta_{t1}\mathbf{S}^{(1)}\ {}^{t1}_{0}\mathbf{F}^{-\mathbf{T}}\ \frac{^{0}epa}{^{t1}epa.}\det({}^{t1}_{0}\mathbf{F})$$

$$^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{S}={}^{t1}_{0}\mathbf{S}+\boldsymbol{\Delta}_{0}\mathbf{S}^{(1)}$$

$$^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}={}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{F}\ {}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{S}\ {}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{F}^{\mathbf{T}}\ \frac{^{0}epa}{^{t+\Delta t}epa.\det({}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{F})} \qquad \text{(Cauchy)}$$

- Calcul des efforts internes:

$$^{t+\Delta t}\mathbf{F_{int}}=\int_{^{t+\Delta t}\Omega}{}^{t+\Delta t}_{t+\Delta t}\mathbf{B_L}^{T}.\,^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}.d^{t+\Delta t}\Omega$$

- Mise à jour des multiplicateurs de Lagrange:

$$^{t+\Delta t}_{0}\boldsymbol{\lambda}_B={}^{t}_{0}\boldsymbol{\lambda}_B+\Delta\boldsymbol{\lambda}_B^{\ (1)}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{B12}^{\ (1)}=\Delta\boldsymbol{\lambda}_B^{\ (1)}$$

- Calcul des efforts de liaison:

$$^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{liai}B}=-\mathbf{L_B}^{T}.\,^{t+\Delta t}_{0}\boldsymbol{\lambda}_B$$

- Calcul des efforts extérieurs:

$$^{t+\Delta t}\mathbf{F_{ext}}={}^{t+\Delta t}\alpha.\mathbf{F_{ext}}$$

- Calcul du résidu:

$$^{t+\Delta t}\mathbf{Res}^{(j)}={}^{t+\Delta t}\mathbf{F_{ext}}-{}^{t+\Delta t}\mathbf{F_{int}}+{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{liai}B}$$

- Calcul du critère de convergence:

$$critere=\frac{\left\|^{t+\Delta t}\mathbf{Res}^{(j)}\right\|}{\max(\left\|^{t+\Delta t}\mathbf{F_{int}}\right\|,\left\|^{t+\Delta t}\mathbf{F_{ext}}\right\|,\left\|^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{liai}B}\right\|)}$$

- $j=j+1$

Itérations d'équilibres j > 1 – Phase de correction :

Tant que (Critère de convergence : $critere<\zeta$ & Itération : $j<j_{max}$)

- Résolution du système linéaire:

$$\begin{bmatrix} {}_{t1}^{t1}\mathbf{K} & \mathbf{L_B}^T \\ \mathbf{L_B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{U_{NL}}^{(j)} \\ \Delta\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{NL}}^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{Res}^{(j-1)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

- Résolution de l'équation de contrainte:

Si charge à tous les points de Gauss

$${}^{(i)}dl^2 = {}^{(i-1)}\mathbf{U}_{12}{}^T.\mathbf{U}_{12}{}^{(j)}$$

$$\Delta\alpha^{(j)} = \frac{{}^{(i)}dl^2 - {}^{(i-1)}\mathbf{U}_{12}{}^T.(\mathbf{U}_{12}{}^{(j-1)} + \Delta\mathbf{U_{NL}}^{(j)})}{{}^{(i-1)}\mathbf{U}_{12}{}^T.\Delta\mathbf{U_L}}$$

sinon (si au moins 1 point de Gauss en décharge)

$${}^{(i)}dl^2 = \mathbf{U}_{12}{}^{(j-1)^T}.\mathbf{U}_{12}{}^{(j)}$$

$$\Delta\alpha^{(j)} = \frac{{}^{(i)}dl^2 - \mathbf{U}_{12}{}^{(j-1)^T}.(\mathbf{U}_{12}{}^{(j-1)} + \Delta\mathbf{U_{NL}}^{(j)})}{\mathbf{U}_{12}{}^{(j-1)^T}.\Delta\mathbf{U_L}}$$

Fin

- Mise à jour du facteur de charge:

$${}^{t+\Delta t}\alpha = {}^{t}\alpha + \Delta\alpha^{(j)}$$

- Mise à jour des incréments:

$$\left|\begin{array}{l} \Delta\mathbf{U}^{(j)} = \Delta\mathbf{U_{NL}}^{(j)} + \Delta\alpha^{(j)}.\Delta\mathbf{U_L} \\ \Delta\boldsymbol{\lambda}^{(j)} = \Delta\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{NL}}^{(j)} + \Delta\alpha^{(j)}.\Delta\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{L}} \end{array}\right.$$

- Mise à jour du déplacement:

$${}_{0}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}_{0}^{t}\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^{(j)}$$

$$\mathbf{U}_{12}{}^{(j)} = \mathbf{U}_{12}{}^{(j-1)} + \Delta\mathbf{U}^{(j)}$$

- Mise à jour de la configuration:

$${}^{t+\Delta t}\Omega = {}^{t}\Omega + \Delta\mathbf{U}^{(j)}$$

- Calcul du gradient de la transformation:

$${}_{0}^{t+\Delta t}\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\,{}_{0}^{t+\Delta t}U_1}{\partial\,{}^{0}x_1} + 1 & \dfrac{\partial\,{}_{0}^{t+\Delta t}U_1}{\partial\,{}^{0}x_2} \\ \dfrac{\partial\,{}_{0}^{t+\Delta t}U_2}{\partial\,{}^{0}x_1} & \dfrac{\partial\,{}_{0}^{t+\Delta t}U_2}{\partial\,{}^{0}x_2} + 1 \end{bmatrix},\quad {}_{0}^{t1}\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\,{}_{0}^{t1}U_1}{\partial\,{}^{0}x_1} + 1 & \dfrac{\partial\,{}_{0}^{t1}U_1}{\partial\,{}^{0}x_2} \\ \dfrac{\partial\,{}_{0}^{t1}U_2}{\partial\,{}^{0}x_1} & \dfrac{\partial\,{}_{0}^{t1}U_2}{\partial\,{}^{0}x_2} + 1 \end{bmatrix} \text{ et}$$

$${}_{t}^{t+\Delta t}\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\Delta U_1^{(j)}}{\partial\,{}^{t}x_1} + 1 & \dfrac{\partial\Delta U_1^{(j)}}{\partial\,{}^{t}x_2} \\ \dfrac{\partial\Delta U_2^{(j)}}{\partial\,{}^{t}x_1} & \dfrac{\partial\Delta U_2^{(j)}}{\partial\,{}^{t}x_2} + 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } {}_{0}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} {}_{0}^{t+\Delta t}U_1 \\ {}_{0}^{t+\Delta t}U_2 \end{bmatrix},\ {}_{0}^{t1}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} {}_{0}^{t1}U_1 \\ {}_{0}^{t1}U_2 \end{bmatrix},\ \Delta\mathbf{U}^{(j)} = \begin{bmatrix} \Delta U_1^{(j)} \\ \Delta U_2^{(j)} \end{bmatrix}$$

- Calcul des incréments de déformation:

t → t+Δt

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(j)} = {}_{t}^{t}\mathbf{B_L}\ \Delta\mathbf{U}^{(j)} \Rightarrow \Delta e_{ij}^{(j)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Delta U_i^{(j)}}{\partial\,{}^{t}x_j} + \frac{\partial\Delta U_j^{(j)}}{\partial\,{}^{t}x_i}\right)$$

$$\Delta\mathbf{n}^{(j)} \Rightarrow \Delta n_{ij}^{(j)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Delta U_k^{(j)}}{\partial\,{}^{t}x_i}.\frac{\partial\Delta U_k^{(j)}}{\partial\,{}^{t}x_j}\right)$$

$$\Delta\mathbf{E}^{(j)} = \Delta\mathbf{n}^{(j)} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(j)} \qquad \text{(Green\_Lagrange)}$$

$$\Delta\mathbf{C}^{(j)} = {}_{t}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^T\ {}_{t}^{t+\Delta t}\mathbf{F} \qquad \text{(Cauchy-Green droit)}$$

t1 → t+Δt

$${}_{t1}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon} = {}_{t1}^{t1}\mathbf{B_L}\ \mathbf{U}_{12}{}^{(j)} \Rightarrow {}_{t1}^{t+\Delta t}e_{ij}^{(j)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\,{}_{t1}^{t+\Delta t}U_i}{\partial\,{}^{t1}x_j} + \frac{\partial\,{}_{t1}^{t+\Delta t}U_j}{\partial\,{}^{t1}x_i}\right)$$

$${}_{t1}^{t+\Delta t}\mathbf{n} \Rightarrow {}_{t1}^{t+\Delta t}n_{ij}^{(j)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\,{}_{t1}^{t+\Delta t}U_k}{\partial\,{}^{t1}x_i}.\frac{\partial\,{}_{t1}^{t+\Delta t}U_k}{\partial\,{}^{t1}x_j}\right)$$

$${}_{t1}^{t+\Delta t}\mathbf{E} = {}_{t1}^{t+\Delta t}\mathbf{n} + {}_{t1}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon} \qquad \text{(Green\_Lagrange)}$$

- Calcul des déformations:

$$^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon} = {}^{t}\boldsymbol{\varepsilon} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(j)} \quad \text{(linéaires)}$$

$$^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{E} = {}^{t}_{0}\mathbf{E} + \Delta\mathbf{E}^{(j)} \quad \text{(Green\_Lagrange)}$$

$$^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{C} = {}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{F}^{T}\ {}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{F} \quad \text{(Cauchy-Green droit)}$$

- Mise à jour de l'épaisseur:

$$^{t+\Delta t}epa = {}^{t}epa\sqrt{\frac{1}{\det(\Delta\mathbf{C}^{(j)})}}$$

- Calcul des contraintes:

A chaque point de Gauss attribution du module tangent de comportement de charge ou décharge suivant ce qu'il a subit entre t1 et t+Δt :

Si charge au point de Gauss

$$_{\mathbf{t1}}\mathbf{A} = {}_{\mathbf{t1}}\mathbf{A}_{ch}$$

sinon (si point de Gauss en décharge)

$$_{\mathbf{t1}}\mathbf{A} = {}_{\mathbf{t1}}\mathbf{A}_{dch}$$

Fin

$$\Delta_{t1}\mathbf{S}^{(j)} = {}_{\mathbf{t1}}\mathbf{A}\,.\,{}^{t+\Delta t}_{t1}\mathbf{E} \quad \text{(Piola-Kirchhoff 2)}$$

$$\Delta_{0}\mathbf{S}^{(j)} = {}^{t1}_{0}\mathbf{F}^{-1}\ \Delta_{t1}\mathbf{S}^{(j)}\ {}^{t1}_{0}\mathbf{F}^{-T}\ \frac{^{0}epa}{^{t1}epa.}\det({}^{t1}_{0}\mathbf{F})$$

$$^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{S} = {}^{t1}_{0}\mathbf{S} + \Delta_{0}\mathbf{S}^{(j)}$$

$$^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} = {}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{F}\ {}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{S}\ {}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{F}^{T}\ \frac{^{0}epa}{^{t+\Delta t}epa.\det({}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{F})} \quad \text{(Cauchy)}$$

- Calcul des efforts internes:

$$^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{int}} = \int_{^{t+\Delta t}\Omega} {}^{t+\Delta t}_{t+\Delta t}\mathbf{B}_{\mathbf{L}}{}^{T}\,.\,{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}.d^{t+\Delta t}\Omega$$

- Mise à jour des multiplicateurs de Lagrange:

$$^{t+\Delta t}_{0}\boldsymbol{\lambda}_{B} = {}^{t}_{0}\boldsymbol{\lambda}_{B} + \Delta\boldsymbol{\lambda}_{B}{}^{(j)}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{B12}{}^{(j)} = \boldsymbol{\lambda}_{B12}{}^{(j-1)} + \Delta\boldsymbol{\lambda}_{B}{}^{(j)}$$

- Calcul des efforts de liaison:

$$^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{liai}B} = -\mathbf{L}_{\mathbf{B}}{}^{T}\,.\,{}^{t+\Delta t}_{0}\boldsymbol{\lambda}_{B}$$

- Calcul des efforts extérieurs:

$$^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{ext}} = {}^{t+\Delta t}\alpha.\mathbf{F}_{\mathbf{ext}}$$

- Calcul du résidu:

$$^{t+\Delta t}\mathbf{Res}^{(j)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{ext}} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{int}} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{liai}B}$$

- Calcul du critère de convergence:

$$critere = \frac{\left\|{}^{t+\Delta t}\mathbf{Res}^{(j)}\right\|}{\max(\left\|{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{int}}\right\|,\left\|{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{ext}}\right\|,\left\|{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\mathbf{liai}B}\right\|)}$$

- $j = j + 1$

Fin

i = i + 1

Actualisation des variables pour incrément *i+1* :

$$^{t1}_{0}\mathbf{A}_{old} = {}_{0}\mathbf{A}\ ,\ {}^{t1}_{0}\mathbf{E}_{old} = {}^{t1}_{0}\mathbf{E} \text{ et } {}^{t1}_{0}\mathbf{E} = {}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{E}$$

$$^{(i)}dl = {}^{(i-1)}dl.\sqrt{\frac{j_{convergé}}{j_{souhaité}}} \text{ et actualisation de } i_{max}$$

Fin

Annexe 7 :

Tests de validation – Méthode de Newton-Raphson complète

1. Hypothèses

- Géométrie de l'éprouvette :
  L_0=10mm
  l_0=10mm
  epa=1mm

- Paramètres de comportement des fibres :
  $a = 0.5289$
  $b = 14.1395$
  $C_{11critique} = 1.36$
  $C_{11rupture} = 1.41$

⇨ valeurs propres au comportement de la fibre, elles sont toutes supposées identiques.

- Paramètres de la répartition des fibres :
  μ_R = moyenne de la répartition $R(\theta)$
  σ_R = écart type de la répartition $R(\theta)$

⇨ valeurs variant suivant les tests afin d'étudier leur influence.

- Contraintes simulées de Piola-Kirchhoff II : $\mathbf{S}_{EF}$

⇨ calcul à l'aide du modèle éléments finis.

- Contraintes simulées de Cauchy: $\boldsymbol{\sigma}_{EF}$

⇨ calcul à l'aide du modèle éléments finis.

- Contraintes théoriques de Piola-Kirchhoff II : $\mathbf{S}_{\mathbf{TH}}$

⇨ calcul à partir des équations constitutives de la loi de comportement (Equation 4-38) et des déformations résultant de la simulation.

- Contraintes théoriques de Cauchy : $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{TH}}$

⇨ $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{TH}} = \dfrac{1}{\det(\mathbf{F})}\mathbf{F}^{\mathbf{T}}\mathbf{S}_{\mathbf{TH}}\mathbf{F}$ avec **F** résultant de la simulation.

- Calcul de l'erreur relative $erreur_{ij}$ pour chaque composante S_{ij} (ou σ_{ij}) de la contrainte :

⇨ $erreur_{ij} = \dfrac{S_{EFij} - S_{THij}}{\max(S_{TH11}, S_{TH22}, S_{TH12})}$

Chaque composante du vecteur $erreur_{ij}$ correspond à un incrément de chargement, les valeurs données dans les tableaux de résultats sont des maxima qui correspondent donc au dernier incrément de chargement.

- Calcul de l'écart relatif $ecart_{ij}$ entre la valeur maximale $S_{EFij\max}$ et la valeur minimale $S_{EFij\min}$ de toutes les valeurs aux points de Gauss de la composante S_{ij} (ou σ_{ij}) de la contrainte simulée:

$$\Rightarrow ecart_{ij} = \frac{S_{EFij\max} - S_{EFij\min}}{\max(S_{EF11}, S_{EF22}, S_{EF12})}$$

Le même calcul est effectué pour les composantes E_{ij} et C_{ij} des déformations. Ceci dans le cas des simulations avec plusieurs éléments.

2. Test sur un élément dans le domaine élastique

Test 1 : Traction unidirectionnelle

Test 1.1 : Paramètres de la répartition des fibres constants

Propriétés de la membrane :

L'orientation privilégiée des fibres correspond à la direction de traction :
- Traction suivant $\mathbf{x_1}$ $\Rightarrow$ $\mu_R=0$
- Traction suivant $\mathbf{x_2}$ $\Rightarrow$ $\mu_R=\pi/2$

Le taux d'orientation des fibres est constant : $\sigma_R=\pi/6$

Chargement:
- Déplacement imposé Ux_2=2mm en n incréments dUx_2 ou Ux_1=2mm en n incréments dUx_1. (Les composantes des déplacements imposés totaux $\mathbf{U_{imp}}$ et sur un incrément $\mathbf{dU_{imp}}$ sont notées Ux_i et dUx_i afin d'alléger les écritures)

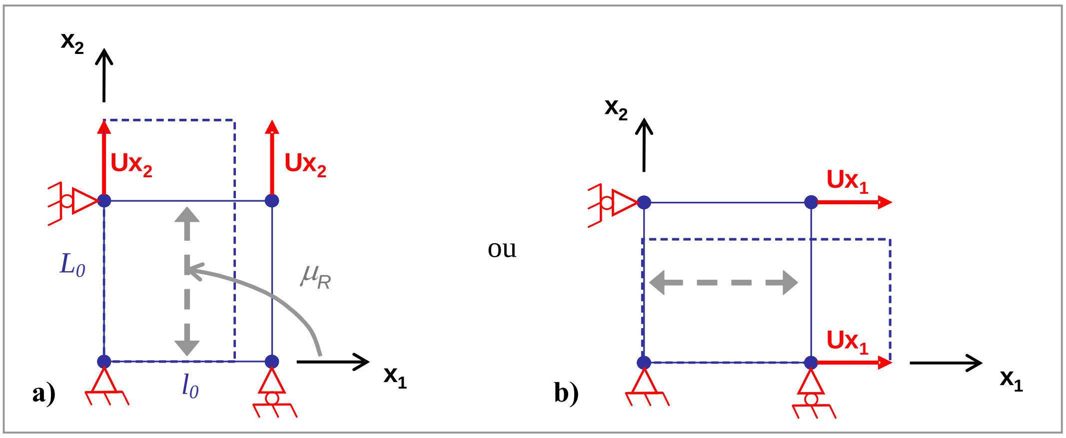


Figure A7-1 : Traction unidirectionnelle sur un élément suivant x_2 (a) avec $\mu_R = \pi/2$ et suivant x_1 (b) avec $\mu_R = 0$.

<u>Comparaison des valeurs de contraintes simulées et théoriques – cas traction suivant $\mathbf{x_2}$:</u>

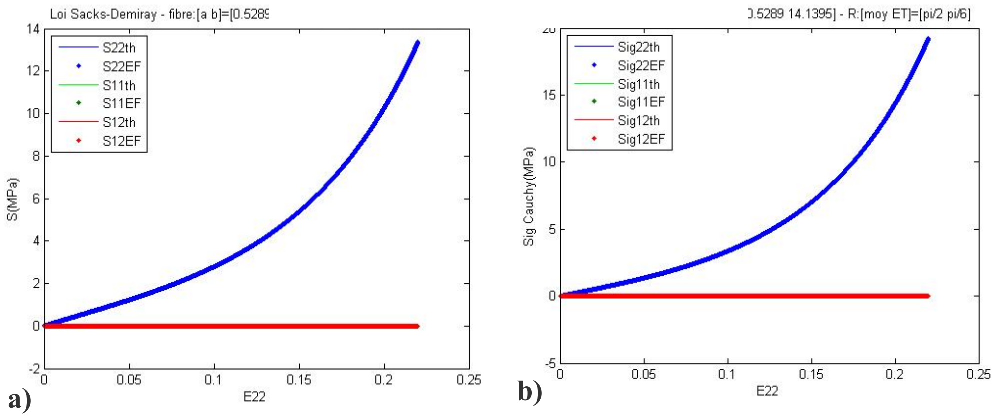


Figure A7-2 : Contraintes de Piola-Kirchhoff II (a) et de Cauchy (b) en fonction de la composante E22 des déformations de Green-Lagrange : comparaison des valeurs simulées et théoriques sur un élément dans le domaine élastique pour a=0.5289, b=14.1395, μ_R=π/2 et σ_R=π/6.

<u>Comparaison des valeurs maximales des contraintes simulées et théoriques– cas traction suivant $\mathbf{x_2}$:</u>

Les valeurs d'erreur relative sont les valeurs maximales, elles correspondent au dernier pas de chargement.

	Piola-Kirchhoff 2 (MPa)		Erreur relative	Cauchy (MPa)		Erreur relative
Composante	S_{EF}	S_{Th}	$(S_{EF}-S_{Th})/max(S_{Th})$	σ_{EF}	σ_{Th}	$(\sigma_{EF}-\sigma_{Th})/max(\sigma_{Th})$
11	-5.13E-05	-5.68E-04	3.87E-05	-3.38E-05	-3.74E-04	1.77E-05
22	**13.3629**	**13.3488**	**0.0010**	**19.2425**	**19.2223**	0.0010
12	4.44E-05	-1.83E-05	4.70E-06	1.24E-05	-4.86E-05	3.17E-06

Tableau A7-1: Traction Ux_2 = 2mm avec dUx_2 = 0.001mm - μ_R=π/2 et σ_R=π/6

	Piola-Kirchhoff 2 (MPa)		Erreur relative	Cauchy (MPa)		Erreur relative
Composante	S_{EF}	S_{Th}	$(S_{EF}-S_{Th})/max(S_{Th})$	σ_{EF}	σ_{Th}	$(\sigma_{EF}-\sigma_{Th})/max(\sigma_{Th})$
11	-6.16E-06	-5.78E-05	3.87E-06	-4.05E-06	-3.80E-05	1.77E-06
22	**13.3505**	**13.3491**	**0.0001**	**19.2247**	**19.2227**	0.0001
12	7.77E-06	1.54E-06	4.67E-07	3.95E-06	-2.12E-06	3.16E-07

Tableau A7-2: Traction Ux_2 = 2mm avec dUx_2 = 0.0001mm - μ_R=π/2 et σ_R=π/6

<u>Evolution de l'erreur relative en fonction de l'incrément de déplacement– cas traction suivant $\mathbf{x_2}$:</u>

Différentes tailles d'incréments sont testées:

- dUx_2 = 0.01mm avec n=200
- dUx_2 = 0.001mm avec n=2000
- dUx_2 = 0.0001mm avec n=20000

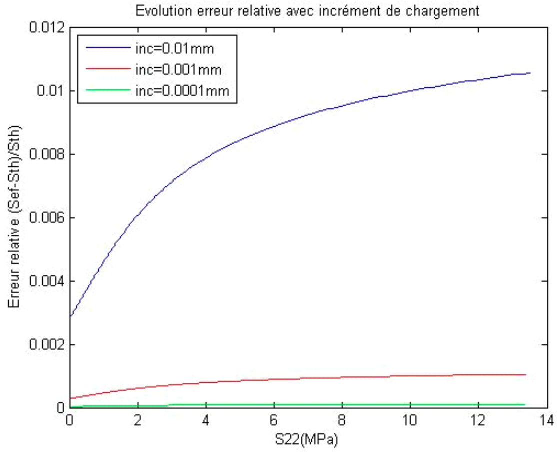


Figure A7-3 : Evolution de l'erreur relative sur la composante S22 des contraintes de Piola-Kirchhoff II en fonction de S22: cas dUx_2=0.01mm, dUx_2=0.001mm et dUx_2=0.0001mm.

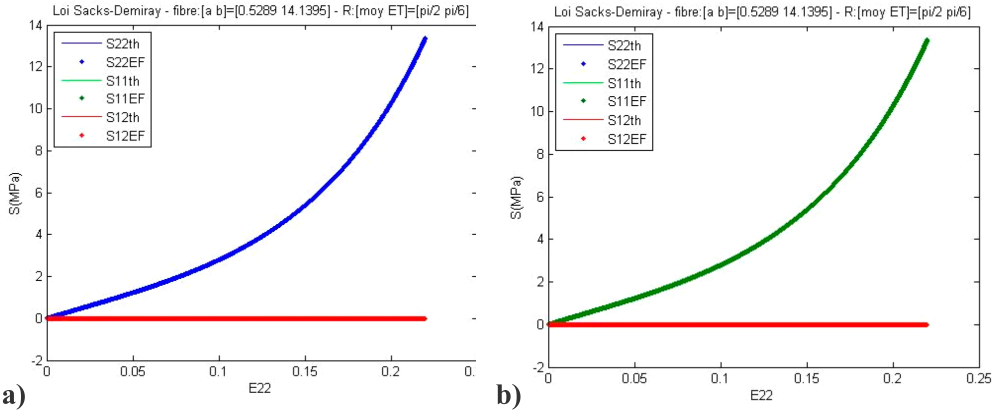
Pour une contrainte maximale *S22* de l'ordre de 13MPa, l'erreur relative maximale sur la valeur de *S22* est égale à la valeur de l'incrément dUx_2.

Incrément dU_{x2}	Erreur relative $(S_{EF22} - S_{Th22})/S_{Th22}$
1.E-02	1.05E-02
1.E-03	1.05E-03
1.E-04	1.05E-04

Tableau A7-3: Evolution de l'erreur relative en fonction de la taille d'incrément de chargement.

Influence de la direction de traction :

Etant donné les hypothèses de ce test, à savoir que la direction privilégiée des fibres est fixée parallèle à la direction de traction dans les 2 cas, les résultats de la traction suivant Ux_1 sont identiques à ceux de la traction suivant Ux_2.



a) **b)**

Figure A7-4 : Contraintes de Piola-Kirchhoff II en fonction de la composante E22 des déformations de Green-Lagrange (a) (Traction *Ux2*) et en fonction de la composante E11 (b) (Traction *Ux1*) : comparaison des valeurs simulées et théoriques sur un élément dans le domaine élastique pour a=0.5289, b=14.1395, σ_R=π/6 ,μ_R=π/2 (a) et μ_R=0 (b).

Les valeurs maximales d'erreurs relatives sont identiques à celles de la traction suivant Ux_2 :

Composante	Piola-Kirchhoff 2 (MPa)		Erreur relative	Cauchy (MPa)		Erreur relative
	S_{EF}	S_{Th}	$(S_{EF}-S_{Th})/max(S_{Th})$	σ_{EF}	σ_{Th}	$(\sigma_{EF}-\sigma_{Th})/max(\sigma_{Th})$
11	**13.3631**	**13.3490**	**0.0011**	**19.2428**	**19.2225**	0.0011
22	1.22E-04	-2.94E-04	3.11E-05	8.02E-05	-1.93E-04	1.42E-05
12	3.59E-04	-2.21E-04	4.34E-05	5.29E-05	-2.94E-04	1.81E-05

Tableau A7-4: Traction Ux_1 = 2mm avec dUx_1 =0.001mm et *n*=2000 - μ_R=0 et σ_R=π/6

Composante	Piola-Kirchhoff 2 (MPa)		Erreur relative	Cauchy (MPa)		Erreur relative
	S_{EF}	S_{Th}	$(S_{EF}-S_{Th})/max(S_{Th})$	σ_{EF}	σ_{Th}	$(\sigma_{EF}-\sigma_{Th})/max(\sigma_{Th})$
11	**13.3505**	**13.3491**	**0.0001**	**19.22475**	**19.22272**	0.0001
22	1.11E-05	-3.04E-05	3.11E-06	7.30E-06	-2.00E-05	1.42E-06
12	3.37E-05	-2.43E-05	4.34E-06	5.24E-06	-3.10E-05	1.89E-06

Tableau A7-5: Traction Ux_1 = 2mm avec dUx_1 =0.0001mm et *n*=20000 - μ_R=0 et σ_R=π/6

Etant donné les propriétés de symétrie, des tests dans une seule direction suffisent pour la validation.

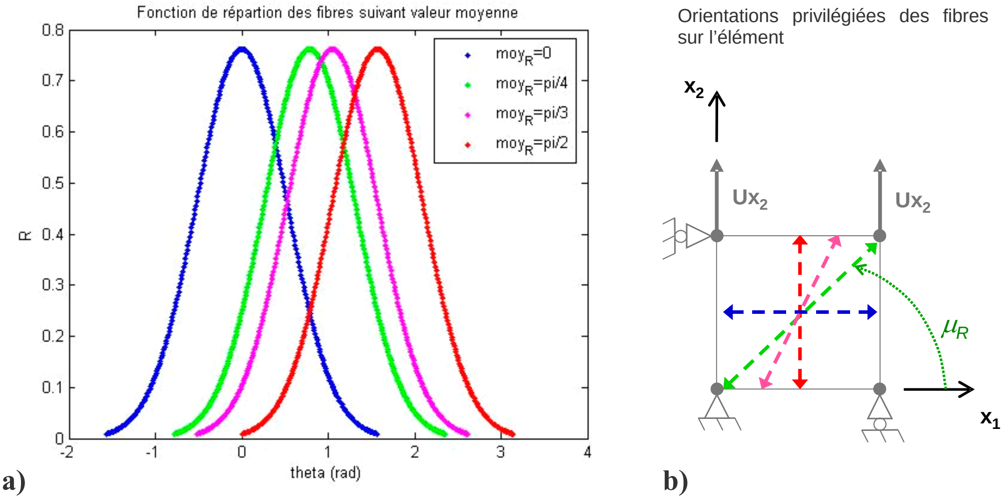
Test 1.2 : Influence de l'orientation privilégiée des fibres

<u>Propriétés de la membrane :</u>

Etude de l'influence de l'orientation privilégiée des fibres par rapport à la direction de traction $\mathbf{x_2}$:

- Cas1 : μ_R=π/2
- Cas2 : μ_R=π/3
- Cas3 : μ_R=π/4
- Cas4 : μ_R=0

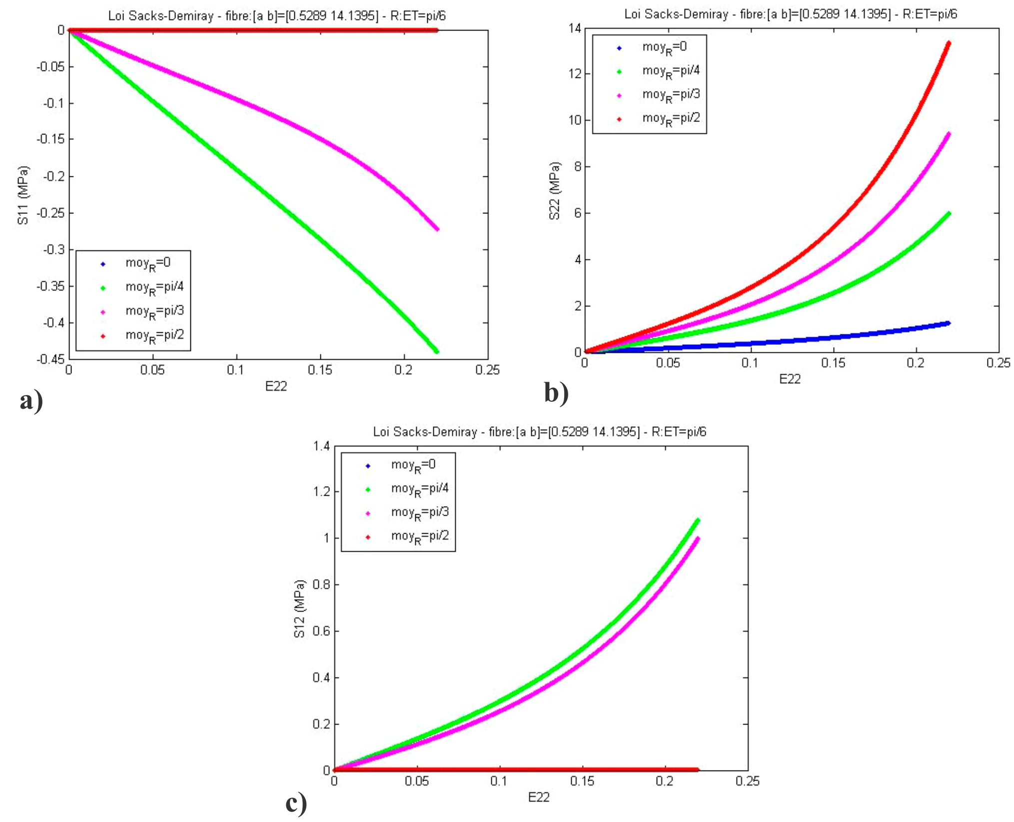
Le taux d'orientation des fibres est constant : σ_R=π/6



a) b)

Figure A7-5 : a) Allure de la fonction de répartition des fibres *R* pour les différentes valeurs de la moyenne. b) Orientations privilégiées des fibres représentées sur l'élément.

Comparaison des valeurs de contraintes simulées et théoriques:



a) b) c)

Figure A7-6 : Contraintes de Piola-Kirchhoff II (composantes S11 (a), S22 (b) et S12 (c)) en fonction de la composante E22 des déformations de Green-Lagrange: valeurs simulées sur un élément dans le domaine élastique pour a=0.5289, b=14.1395, $\sigma_R=\pi/6$ et $\mu_R=0$ - $\pi/4$ - $\pi/3$ - $\pi/2$.

Dans la direction de traction, la raideur diminue entre le cas où la majorité des fibres est parallèle à la direction de traction (μ_R=π/2) et le cas où elle est perpendiculaire (μ_R=0).
De plus, apparaît un phénomène de cisaillement (Figure A7-6) dans le cas où μ_R=π/4 et μ_R=π/3, c'est-à-dire lorsque les fibres ne sont ni majoritairement parallèles ni majoritairement perpendiculaires à la direction de traction.

Test 1.3 : Influence du taux d'orientation des fibres

<u>Propriétés de la membrane :</u>
L'orientation privilégiée des fibres correspond à la direction de traction $\mathbf{x_2}$: μ_R=π/2
Etude de l'influence du taux d'orientation des fibres :

- Cas1 : σ_R=π/3
- Cas2 : σ_R=π/6
- Cas3 : σ_R=π/12

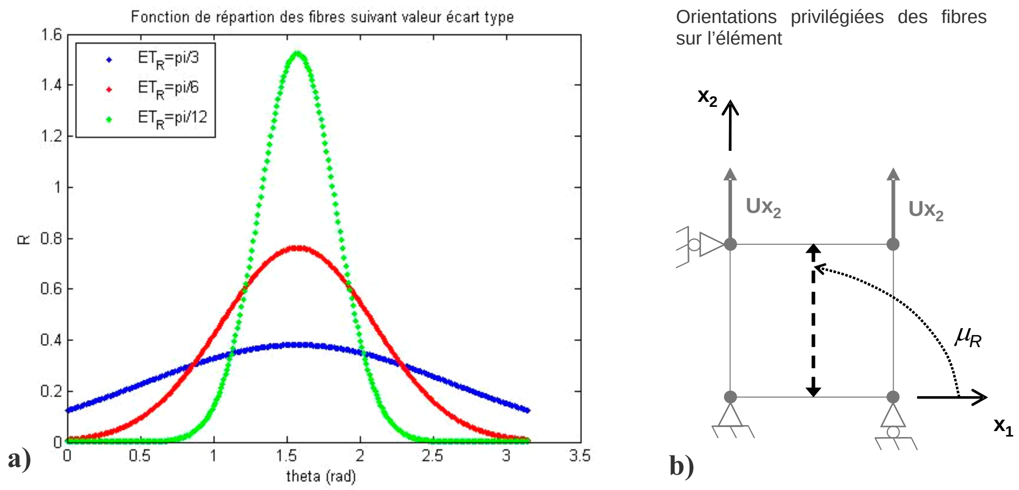


Figure A7-7 : Allure de la fonction de répartition des fibres *R* (a) pour les différentes valeurs de l'écart type et une orientation privilégiée des fibres $\mu_R=\pi/2$ représentée sur l'élément (b).

Plus le taux d'orientation des fibres σ_R diminue (Figure A7-8), plus les valeurs de contraintes, toutes composantes confondues, deviennent grandes.

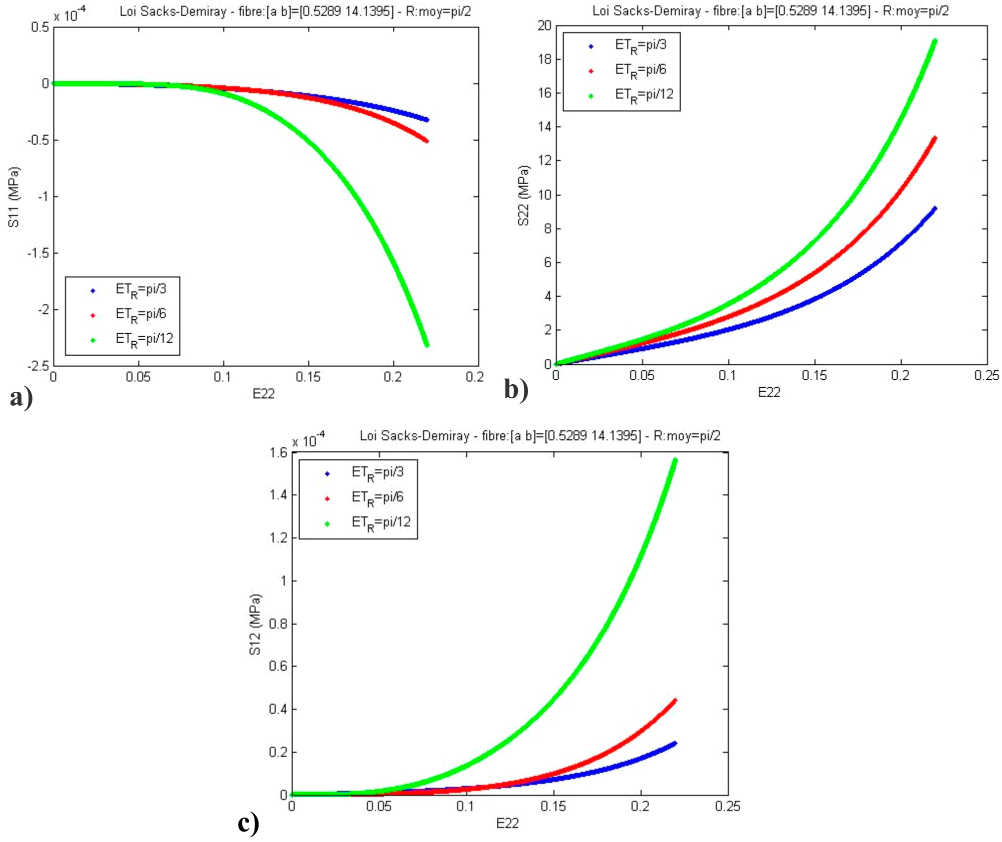


Figure A7-8 : Contraintes de Piola-Kirchhoff II (composantes S11 (a), S22 (b) et S12 (c)) en fonction de la composante E22 des déformations de Green-Lagrange: valeurs simulées sur un élément dans le domaine élastique pour a=0.5289, b=14.1395, μ_R=π/2 et σ_R=π/3 - π/6 - π/12.

Test 2 : Traction bidirectionnelle

Propriétés de la membrane :

- Orientation privilégiée des fibres: $\mu_R = \pi/2$
- Taux d'orientation des fibres: $\sigma_R = \pi/6$

Chargement:

- Déplacements imposés $\begin{cases} Ux_1 = 2\text{mm} \text{ avec } dUx_1 = 0.001\text{mm} \\ Ux_2 = 1\text{mm} \text{ avec } dUx_2 = 0.0005\text{mm} \end{cases}$ et n=2000

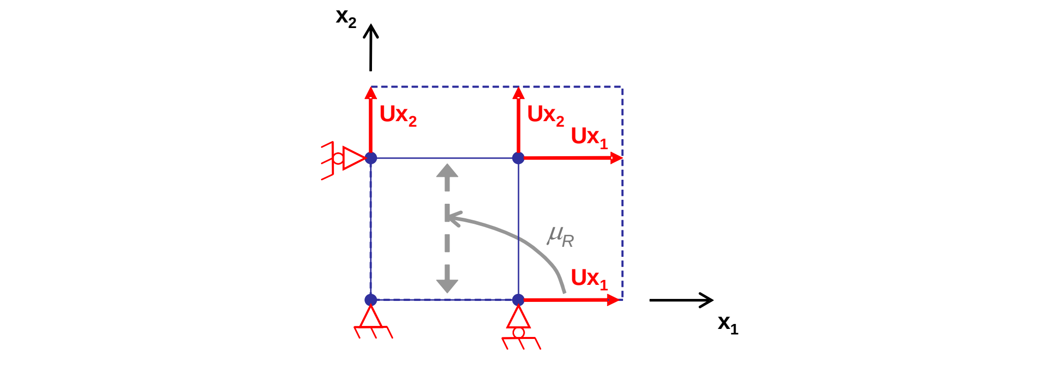


Figure A7-9 : Traction bidirectionnelle sur un élément suivant x_1 et x_2 avec $\mu_R = \pi/2$.

Valeurs de déformations théoriques:

- Allongements finaux : $\begin{cases} \lambda_{11} = \dfrac{l_0 + Ux_1}{l_0} \\ \lambda_{22} = \dfrac{L_0 + Ux_2}{L_0} \end{cases}$ ⇨ soit $\begin{cases} \lambda_{11} = 1.2 \\ \lambda_{22} = 1.1 \end{cases}$

- Tenseur gradient de la transformation: $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 \\ 0 & \lambda_{22} \end{bmatrix}$ ⇨ soit $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}$

- Tenseur des déformations de Green_Lagrange: $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \lambda_{11}{}^2 - 1 & 0 \\ 0 & \lambda_{22}{}^2 - 1 \end{bmatrix}$

⇨ soit $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0.22 & 0 \\ 0 & 0.105 \end{bmatrix}$

- Tenseur des déformations de Cauchy-Green: $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda_{11}{}^2 & 0 \\ 0 & \lambda_{22}{}^2 \end{bmatrix}$

⇨ soit $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1.44 & 0 \\ 0 & 1.21 \end{bmatrix}$

Validation des déformations simulées à l'aide du modèle éléments finis:

Composante	Grad. Tranformation F_{EF}	Green-Lagrange E_{EF}	Cauchy-Green C_{EF}
11	1.200	0.220	1.440
22	1.100	0.105	1.210
12	0	0	0
21	0	0	0

Tableau A7-6 : Déformations simulées – Traction bidirectionnelle Ux_1 = 2mm avec dUx_1 = 0.001mm et Ux_1 = 1mm avec dUx_1 = 0.0005mm.

Comparaison des valeurs de contraintes simulées et théoriques :

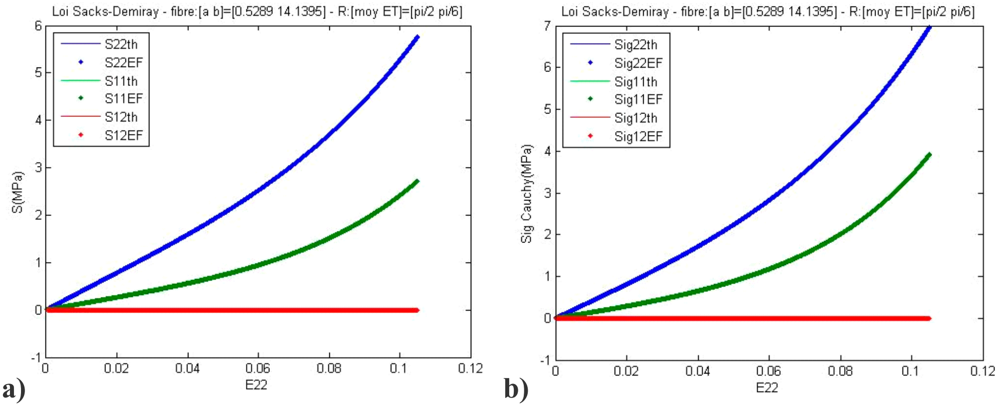


Figure A7-10 : Contraintes de Piola-Kirchhoff II (a) et de Cauchy (b) en fonction de la composante E22 des déformations de Green-Lagrange : comparaison des valeurs simulées et théoriques sur un élément dans le domaine élastique pour a=0.5289, b=14.1395, $\mu_R=\pi/2$ et $\sigma_R=\pi/6$.

Comparaison des valeurs maximales des contraintes simulées et théoriques :

	Piola-Kirchhoff 2 (MPa)		Erreur relative	Cauchy (MPa)		Erreur relative
Composante	S_{EF}	S_{Th}	$(S_{EF}-S_{Th})/max(S_{Th})$	σ_{EF}	σ_{Th}	$(\sigma_{EF}-\sigma_{Th})/max(\sigma_{Th})$
11	**2.7216**	**2.7194**	**0.0004**	**3.9192**	**3.9159**	**0.0005**
22	**5.7585**	**5.7556**	**0.0005**	**6.9678**	**6.9643**	**0.0005**
12	-1.60E-06	-1.60E-06	-2.98E-10	-2.11E-06	-2.11E-06	-3.25E-10

Tableau A7-7 : Traction Ux_1 = 2mm avec dUx_1 = 0.001mm et Ux_2 = 1mm avec dUx_2 = 0.0005mm - $\mu_R=\pi/2$ et $\sigma_R=\pi/6$.

Test 3 : Rotation de solide rigide

Propriétés de la membrane :

- Orientation privilégiée des fibres : $\mu_R=\pi/2$
- Taux d'orientation des fibres : $\sigma_R=\pi/6$

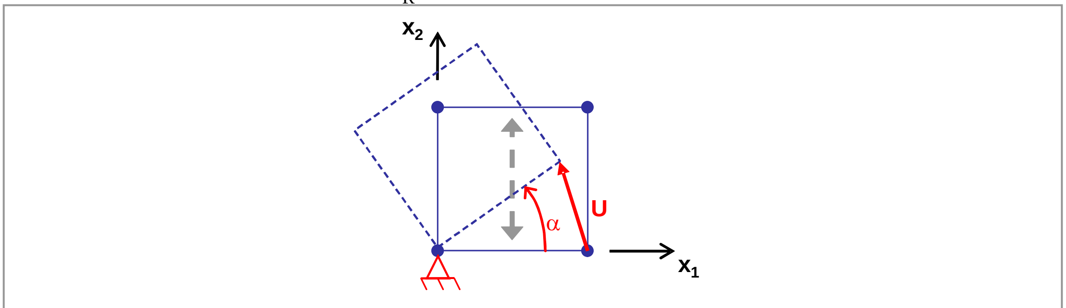


Figure A7-11 : Rotation de solide rigide sur un élément avec $\mu_R = \pi/2$.

<u>Chargement:</u>

Déplacement imposé $U = \begin{bmatrix} l_0 \cos(\alpha) - l_0 \\ l_0 \sin(\alpha) \end{bmatrix}$ équivalent à une rotation d'angle α=π/6

en n incréments $\left| \begin{array}{l} \text{- cas1: } d\alpha = \pi/24 \\ \text{- cas2: } d\alpha = \pi/48 \\ \text{- cas3: } d\alpha = \pi/96 \end{array} \right.$

<u>Valeurs théoriques:</u>

- Gradient de la transformation: $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

⇨ soit $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0.8660 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.8660 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Déformations : $\mathbf{E} = \mathbf{C} = \mathbf{0}$
- Contraintes : $\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$

<u>Validation des valeurs max simulées à l'aide du modèle éléments finis:</u>

<u>- cas1 :</u>

Rotation d'angle α=π/6 avec $d\alpha$=π/24 et n=4 - $\mu_R=\pi/2$ et $\sigma_R=\pi/6$:

Composante	Grad. Tranformation F_{EF}
11	0.8495
22	0.8847
12	-0.4703
21	0.4943
33	1.0162

Tableau A7-8: Gradient de la transformation simulé.

Les valeurs de déformations (Green-Lagrange et Cauchy-Green) sont différentes à chaque point de Gauss (PdG). Le phénomène identique apparaît pour les contraintes.

Composante	Green-Lagrange			
	E_{EF} - PdG1	*E_{EF} - PdG2*	*E_{EF} - PdG3*	*E_{EF} - PdG4*
11	-5.E-03	-5.E-03	-2.E-02	-2.E-02
22	2.E-03	4.E-03	4.E-03	2.E-03
12	4.E-02	2.E-02	3.E-02	4.E-02
21	4.E-02	2.E-02	3.E-02	4.E-02

Composante	Cauchy-Green			
	C_{EF} - PdG1	*C_{EF} - PdG2*	*C_{EF} - PdG3*	*C_{EF} - PdG4*
11	0.99080	0.99080	0.96590	0.96590
22	1.00396	1.00809	1.00809	1.00396
12	7.16E-02	4.65E-02	5.08E-02	7.56E-02
21	7.16E-02	4.65E-02	5.08E-02	7.56E-02

Composante	Piola-Kirchhoff 2 (MPa)			
	S_{EF} - PdG1	*S_{EF} - PdG2*	*S_{EF} - PdG3*	*S_{EF} - PdG4*
11	6.E-02	3.E-02	-3.E-02	8.E-03
22	9.E-04	3.E-02	-5.E-04	-3.E-02
12	2.E-02	1.E-02	-2.E-02	-1.E-02
21	2.E-02	1.E-02	-2.E-02	-1.E-02

Tableau A7-9: Déformations et contraintes simulées

<u>- cas2 :</u>

Rotation d'angle $\alpha=\pi/6$ avec $d\alpha=\pi/48$ et $n=8$ - $\mu_R=\pi/2$ et $\sigma_R=\pi/6$:

Composante	Grad. Tranformation *F_{EF}*
11	0.8626
22	0.8706
12	-0.4930
21	0.4989
33	1.0031

Tableau A7-10: Gradient de la transformation simulé

Composante	Green-Lagrange			
	E_{EF} - PdG1	*E_{EF} - PdG2*	*E_{EF} - PdG3*	*E_{EF} - PdG4*
11	-9.E-04	-9.E-04	-3.E-03	-3.E-03
22	5.E-04	1.E-03	1.E-03	5.E-04
12	9.E-03	6.E-03	6.E-03	9.E-03
21	9.E-03	6.E-03	6.E-03	9.E-03

Composante	Cauchy-Green			
	C_{EF} - PdG1	*C_{EF} - PdG2*	*C_{EF} - PdG3*	*C_{EF} - PdG4*
11	0.99813	0.99813	0.99304	0.99304
22	1.00095	1.00200	1.00200	1.00095
12	2.E-02	1.E-02	1.E-02	2.E-02
21	2.E-02	1.E-02	1.E-02	2.E-02

Composante	Piola-Kirchhoff 2 (MPa)			
	S_{EF} - PdG1	*S_{EF} - PdG2*	*S_{EF} - PdG3*	*S_{EF} - PdG4*
11	2.E-02	8.E-03	-5.E-03	2.E-03
22	-2.E-04	7.E-03	8.E-05	-7.E-03
12	6.E-03	2.E-03	-5.E-03	-2.E-03
21	6.E-03	2.E-03	-5.E-03	-2.E-03

Tableau A7-11: Déformations et contraintes simulées

<u>- cas3 :</u>

Rotation d'angle $\alpha=\pi/6$ avec $d\alpha=\pi/96$ et $n=16$ - $\mu_R=\pi/2$ et $\sigma_R=\pi/6$:

Composante	Grad. Tranformation F_{EF}
11	0.8653
22	0.8671
12	-0.4983
21	0.4998
33	1.0006

Composante	Green-Lagrange			
	E_{EF} - PdG1	*E_{EF} - PdG2*	*E_{EF} - PdG3*	*E_{EF} - PdG4*
11	-2.E-04	-2.E-04	-8.E-04	-8.E-04
22	1.E-04	2.E-04	2.E-04	1.E-04
12	2.E-03	1.E-03	2.E-03	2.E-03
21	2.E-03	1.E-03	2.E-03	2.E-03

Composante	Cauchy-Green			
	C_{EF} - PdG1	*C_{EF} - PdG2*	*C_{EF} - PdG3*	*C_{EF} - PdG4*
11	0.99960	0.99960	0.99849	0.99849
22	1.00022	1.00049	1.00049	1.00022
12	4.E-03	3.E-03	3.E-03	4.E-03
21	4.E-03	3.E-03	3.E-03	4.E-03

Composante	Piola-Kirchhoff 2 (MPa)			
	S_{EF} - PdG1	*S_{EF} - PdG2*	*S_{EF} - PdG3*	*S_{EF} - PdG4*
11	4.E-03	2.E-03	-1.E-03	5.E-04
22	-3.E-05	2.E-03	2.E-05	-2.E-03
12	1.E-03	3.E-04	-1.E-03	-3.E-04
21	1.E-03	3.E-04	-1.E-03	-3.E-04

Tableau A7-12: Gradient de la transformation, déformations et contraintes simulés.

<u>Evolution des valeurs de déformations simulées en fonction de la taille de l'incrément de chargement $d\alpha$:</u>

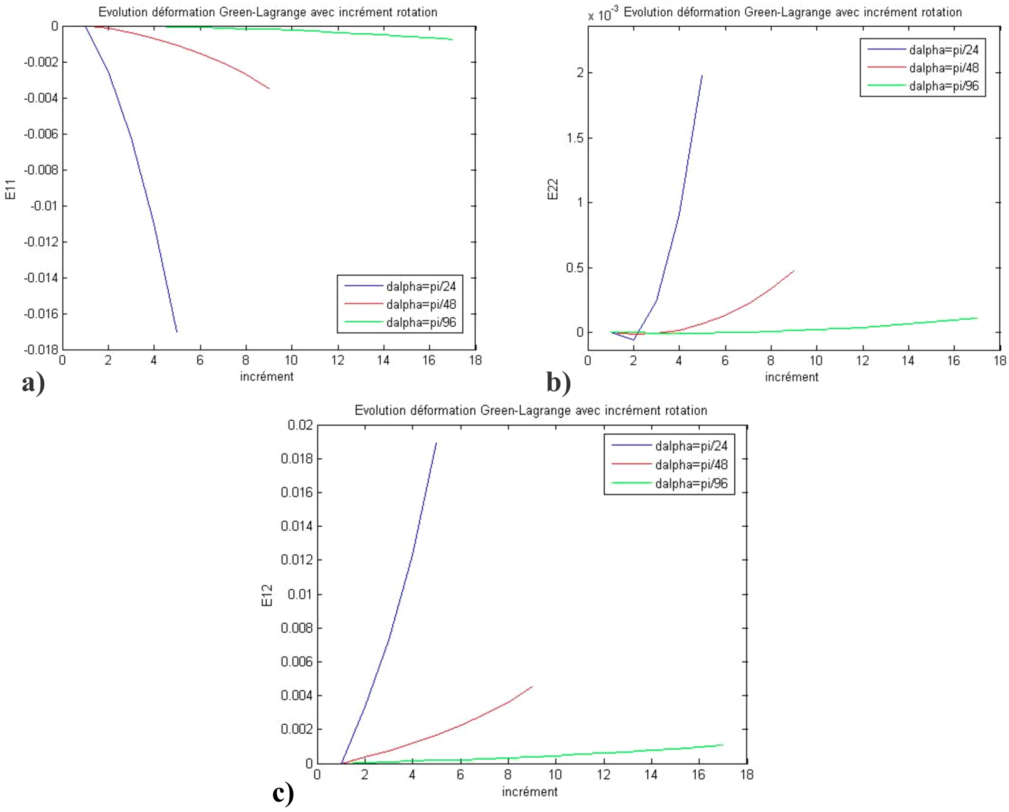


Figure A7-12 : Valeurs des déformations de Green-Lagrange au point de Gauss 4 à chaque incrément de chargement : a) composante E11, b) composante E22, c) composante E12 : cas $d\alpha = \pi/24$, $d\alpha = \pi/48$ et $d\alpha = \pi/96$.

Les valeurs de déformation diminuent considérablement quand l'incrément $d\alpha$ augmente.

Test 4 : Cisaillement pur

Propriétés de la membrane :

- Orientation privilégiée des fibres : $\mu_R=\pi/2$
- Taux d'orientation des fibres : $\sigma_R=\pi/6$

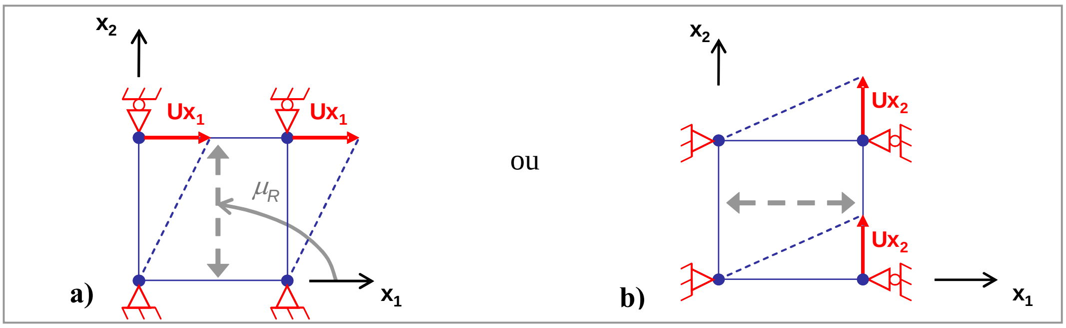


Figure A7-13 : Cisaillement pur sur un élément avec déplacement imposé suivant x_1 - $\mu_R = \pi/2$ (a) et déplacement imposé suivant x_2 - $\mu_R = 0$ (b).

Chargement:

- Déplacement imposé : Ux_2=2mm en n incréments dUx_2 ou Ux_1=2mm en n incréments dUx_1.

Valeurs de déformations théoriques – cas traction suivant $\mathbf{x_1}$:

- Allongement final : $\lambda_{12} = \dfrac{Ux_1}{L_0}$ ⇨ soit $\lambda_{12} = 0.2$

- Tenseur gradient de la transformation: $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ⇨ soit $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Tenseur des déformations de Green_Lagrange: $\mathbf{E} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I}) = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \lambda_{12} \\ \lambda_{12} & \lambda_{12}{}^2 \end{bmatrix}$

⇨ soit
- cas1: $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0.05 \\ 0.05 & 0.005 \end{bmatrix}$
- cas2: $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.02 \end{bmatrix}$

- Tenseur des déformations de Cauchy-Green: $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_{12} \\ \lambda_{12} & 1+\lambda_{12}{}^2 \end{bmatrix}$

⇨ soit $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0.2 & 1.04 \end{bmatrix}$

Validation des déformations simulées à l'aide du modèle éléments finis – cas traction suivant $\mathbf{x_1}$:

Composante	Grad. Tranformation F_{EF}	Green-Lagrange E_{EF}	Cauchy-Green C_{EF}
11	1.00	0	1.00
22	1.00	0.02	1.04
12	0.20	0.10	0.20
21	0	0.10	0.20

Tableau A7-13 : Cisaillement Ux_1 = 2mm avec dUx_1 = 0.001mm -μ_R=π/2 et σ_R=π/6.

Comparaison des valeurs maximales des contraintes simulées et théoriques – cas traction suivant $\mathbf{x_1}$:

Composante	Piola-Kirchhoff 2 (MPa) S_{EF}	S_{Th}	Erreur relative $(S_{EF}-S_{Th})/max(S_{Th})$	Cauchy (MPa) σ_{EF}	σ_{Th}	Erreur relative $(\sigma_{EF}-\sigma_{Th})/max(\sigma_{Th})$
11	-0.2241	-0.0733	-0.1131	0.3245	0.4751	-0.1069
22	0.3828	0.3822	0.0005	0.3828	0.3822	0.0004
12	**1.3331**	**1.3328**	**0.0002**	**1.4097**	**1.4093**	**0.0003**

Tableau A7-14 : Cisaillement Ux_1 = 2mm avec dUx_1 = 0.001mm -μ_R=π/2 et σ_R=π/6.

Influence de la direction de traction :

Composante	Piola-Kirchhoff 2 (MPa) S_{EF}	S_{Th}	Erreur relative $(S_{EF}-S_{Th})/max(S_{Th})$	Cauchy (MPa) σ_{EF}	σ_{Th}	Erreur relative $(\sigma_{EF}-\sigma_{Th})/max(\sigma_{Th})$
11	0.3828	0.3822	0.0005	0.3828	0.3822	0.0004
22	-0.2241	-0.0733	-0.1131	0.3245	0.4751	-0.1069
12	**1.3331**	**1.3328**	**0.0002**	**1.4097**	**1.4093**	0.0003

Tableau A7-15 : Cisaillement Ux_2 = 2mm avec dUx_2 = 0.001mm - $\mu_R=\pi/2$ et $\sigma_R=\pi/6$.

De même qu'en traction unidirectionnelle, les résultats d'un cisaillement suivant Ux_2 avec $\mu_R = \pi/2$ sont identiques à ceux du cisaillement suivant Ux_1 avec $\mu_R = 0$.

Comparaison des valeurs de contraintes simulées et théoriques – cas traction suivant $\mathbf{x_1}$:

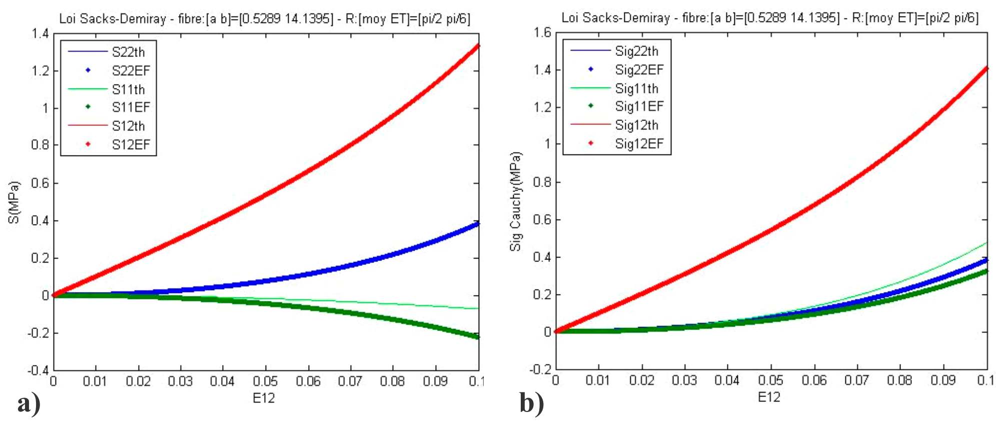


Figure A7-14 : Contraintes de Piola-Kirchhoff II (a) et de Cauchy (b) en fonction de la composante E12 des déformations de Green-Lagrange : comparaison des valeurs simulées et théoriques sur un élément dans le domaine élastique pour a=0.5289, b=14.1395, $\mu_R=\pi/2$ et $\sigma_R=\pi/6$.

3. Test sur un élément jusqu'à rupture

Test 1 : Traction unidirectionnelle

De manière générale, une fois la rupture amorcée, les écarts entre les valeurs de contraintes théoriques et simulées étant tellement importants, nous ne présenterons ici que des courbes afin de donner un aperçu qualitatif de l'influence de chaque paramètre après rupture.

Test 1.1 : Influence de l'incrément de chargement

Propriétés de la membrane :

- Orientation privilégiée des fibres: $\mu_R = \pi/2$
- Taux d'orientation des fibres: $\sigma_R = \pi/6$

<u>Chargement:</u>

- Déplacement imposé Ux_2=2.5mm en n incréments dUx_2 :
  - dUx_2 = 0.1mm avec n=25
  - dUx_2 = 0.01mm avec n=250
  - dUx_2 = 0.001mm avec n=2500

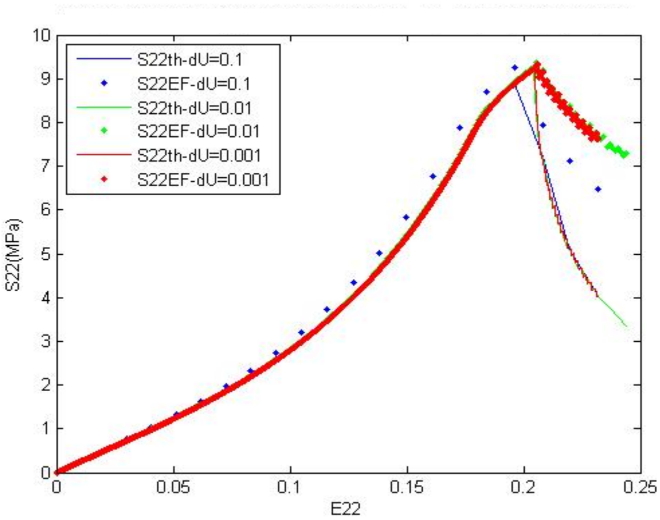


Figure A7-15 : Composante S22 des contraintes de Piola-Kirchhoff II en fonction de la composante E22 des déformations de Green-Lagrange : comparaison des valeurs simulées et théoriques sur un élément jusqu'à rupture pour a=0.5289, b=14.1395, C_{11c}=1.36, C_{11R}=1.41 μ_R=π/2 et σ_R=π/6.: cas *dUx_2*=0.1mm, *dUx_2*=0.01mm et *dUx_2*=0.001mm.

Test 1.2 : Influence de la précision de l'intégrale numérique

<u>Propriétés de la membrane :</u>

- Orientation privilégiée des fibres: $\mu_R = \pi/2$
- Taux d'orientation des fibres: $\sigma_R = \pi/6$

<u>Chargement:</u>

- Déplacement imposé Ux_2=2.5mm en n incréments dUx_2 = 0.01mm.

<u>Différentes valeurs de $d\theta$ sont testées :</u>

- $d\theta$ = 0.1
- $d\theta$ = 0.01
- $d\theta$ = 0.001

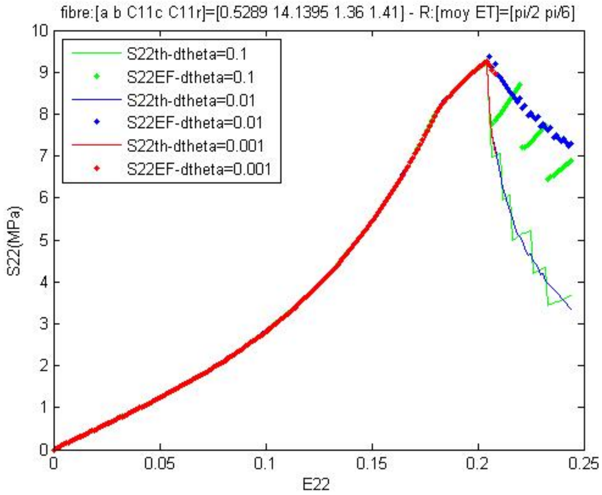


Figure A7-16 : Composante S22 des contraintes de Piola-Kirchhoff II en fonction de la composante E22 des déformations de Green-Lagrange : comparaison des valeurs simulées et théoriques sur un élément jusqu'à rupture pour a=0.5289, b=14.1395, C_{11c}=1.36, C_{11R}=1.41 μ_R=π/2 et σ_R=π/6 : cas $d\theta$=0.1, $d\theta$=0.01 et $d\theta$=0.001.

La valeur de $d\theta = 0.001$ donne la réponse la plus satisfaisante, une courbe lisse, il ne faut pas descendre en dessous.

Test 1.3 : Influence du taux d'orientation des fibres

<u>Propriétés de la membrane :</u>

L'orientation privilégiée des fibres correspond à la direction de traction : $\mu_R = \pi/2$

Etude de l'influence de l'écart type de la fonction de répartition des fibres :

- $\sigma_R = \pi/2$
- $\sigma_R = \pi/3$
- $\sigma_R = \pi/6$

<u>Chargement:</u>

- Déplacement imposé Ux_2=2.5mm en n incréments dUx_2 = 0.01mm.

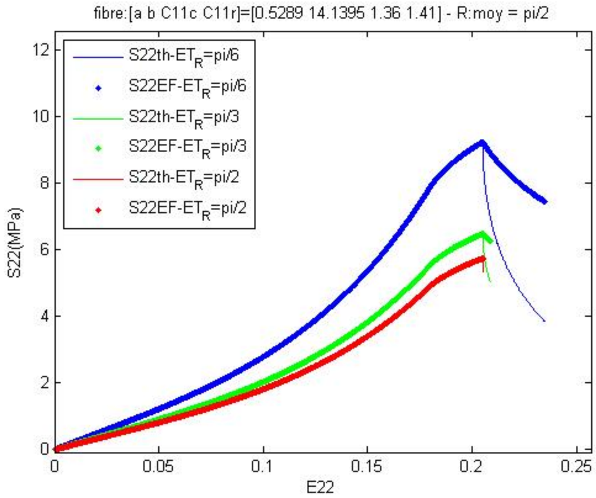


Figure A7-17 : Composante S22 des contraintes de Piola-Kirchhoff II en fonction de la composante E22 des déformations de Green-Lagrange : comparaison des valeurs simulées et théoriques sur un élément jusqu'à rupture pour a=0.5289, b=14.1395, C_{11c}=1.36, C_{11R}=1.41 $\mu_R=\pi/2$ et $\sigma_R=\pi/6$.: cas $\sigma_R = \pi/2$, $\sigma_R = \pi/3$ et $\sigma_R = \pi/6$.

4. Test sur 9 éléments dans le domaine élastique

La membrane simulée étant homogène, les paramètres de la loi de comportement ont des valeurs identiques à tous les points d'intégration.

Test 1 : Traction unidirectionnelle

Test 1.1 : Paramètres de la répartition des fibres constants

Propriétés de la membrane :
Orientation privilégiée des fibres: $\mu_R = \pi/2$
Taux d'orientation des fibres: $\sigma_R = \pi/6$
Chargement:
Déplacement imposé Ux_2=2mm en *n* incréments dUx_2 = 0.01mm.

Ecart entre les valeurs extrêmes de contraintes simulées à tous les points de Gauss:
Ecart calculé sur les valeurs de contraintes du dernier incrément de chargement.

Composante	Green-Lagrange $(E_{ijmax}-E_{ijmin})/E_{max}$	Cauchy-Green $(C_{ijmax}-C_{ijmin})/C_{max}$	Piola-Kirchhoff 2 $(S_{ijmax}-S_{ijmin})/S_{max}$	Cauchy $(\sigma_{ijmax}-\sigma_{ijmin})/\sigma_{max}$
11	1.41E-04	4.32E-05	1.12E-04	5.13E-05
22	6.64E-05	2.03E-05	1.72E-04	1.59E-04
12	1.20E-04	1.84E-05	4.60E-05	1.93E-05

Tableau A7-16 : Ecart entre valeurs extrêmes de contraintes - Traction Ux_2 = 2mm avec dUx_2 = 0.001mm -$\mu_R=\pi/2$ et $\sigma_R=\pi/6$.

Comparaison des valeurs maximales des contraintes simulées et théoriques pour certains points de Gauss (pdg):

el9 - pdg4 Composante	Piola-Kirchhoff 2 (MPa) S_{EF}	 S_{Th}	Erreur relative $(S_{EF}-S_{Th})/max(S_{Th})$	Cauchy (MPa) σ_{EF}	 σ_{Th}	Erreur relative $(\sigma_{EF}-\sigma_{Th})/max(\sigma_{Th})$
11	-1.01E-04	-7.87E-04	5.14E-05	-6.67E-05	-5.18E-04	2.35E-05
22	**13.3635**	**13.3474**	**0.0012**	**19.2432**	**19.2201**	**0.0012**
12	4.50E-04	-5.10E-04	7.19E-05	1.01E-04	-8.33E-04	4.86E-05

el1 - pdg1 Composante	Piola-Kirchhoff 2 (MPa) S_{EF}	 S_{Th}	Erreur relative $(S_{EF}-S_{Th})/max(S_{Th})$	Cauchy (MPa) σ_{EF}	 σ_{Th}	Erreur relative $(\sigma_{EF}-\sigma_{Th})/max(\sigma_{Th})$
11	6.41E-04	5.50E-06	4.76E-05	4.22E-04	3.62E-06	2.18E-05
22	**13.3642**	**13.3496**	**0.0011**	**19.2445**	**19.2235**	**0.0011**
12	8.78E-05	1.75E-05	5.27E-06	4.88E-05	-1.96E-05	3.56E-06

el5 - pdg2 Composante	Piola-Kirchhoff 2 (MPa) S_{EF}	 S_{Th}	Erreur relative $(S_{EF}-S_{Th})/max(S_{Th})$	Cauchy (MPa) σ_{EF}	 σ_{Th}	Erreur relative $(\sigma_{EF}-\sigma_{Th})/max(\sigma_{Th})$
11	1.34E-04	-5.54E-04	5.16E-05	8.83E-05	-3.65E-04	2.36E-05
22	**13.3635**	**13.3490**	**0.0011**	**19.2435**	**19.2226**	**0.0011**
12	6.82E-04	-2.79E-04	7.20E-05	3.30E-04	-6.05E-04	4.87E-05

Tableau A7-17 : Valeurs max de contraintes - Traction Ux_2 = 2mm avec dUx_2 = 0.001mm - μ_R=π/2 et σ_R=π/6.

Test 1.2 : Influence de l'orientation privilégiée des fibres

Propriétés de la membrane :

- Orientation privilégiée des fibres: $\mu_R = \pi/4$
- Taux d'orientation des fibres: $\sigma_R = \pi/6$

Chargement:

- Déplacement imposé Ux_2=2mm en *n* incréments dUx_2 = 0.01mm.

Ecart entre les valeurs extrêmes de contraintes simulées à tous les points de Gauss:

Ecart calculé sur les valeurs de contraintes du dernier incrément de chargement.

Composante	Green-Lagrange $(E_{ijmax}-E_{ijmin})/E_{max}$	Cauchy-Green $(C_{ijmax}-C_{ijmin})/C_{max}$	Piola-Kirchhoff 2 $(S_{ijmax}-S_{ijmin})/S_{max}$	Cauchy $(\sigma_{ijmax}-\sigma_{ijmin})/\sigma_{max}$
11	5.39E-01	1.76E-01	4.43E-01	2.70E-01
22	1.81E-01	5.92E-02	5.51E-01	5.76E-01
12	3.85E-01	6.29E-02	2.23E-01	2.08E-01

Tableau A7-18 : Ecart entre valeurs extrêmes de contraintes - Traction Ux_2 = 2mm avec dUx_2 = 0.001mm -μ_R=π/4 et σ_R=π/6.

<u>Comparaison des valeurs maximales des contraintes simulées et théoriques pour certains points de Gauss (pdg):</u>

el9 - pdg4	Piola-Kirchhoff 2 (MPa)		Erreur relative	Cauchy (MPa)		Erreur relative
Composante	S_{EF}	S_{Th}	$(S_{EF}-S_{Th})/max(S_{Th})$	σ_{EF}	σ_{Th}	$(\sigma_{EF}-\sigma_{Th})/max(\sigma_{Th})$
11	-1.58E-01	-9.76E-01	6.13E-02	-2.09E-01	-8.08E-01	3.12E-02
22	**6.1330**	**5.3728**	**0.1415**	**8.8918**	**7.7968**	**0.1404**
12	7.66E-01	-7.31E-02	6.28E-02	3.12E-01	-5.58E-01	4.53E-02

el1 - pdg1	Piola-Kirchhoff 2 (MPa)		Erreur relative	Cauchy (MPa)		Erreur relative
Composante	S_{EF}	S_{Th}	$(S_{EF}-S_{Th})/max(S_{Th})$	σ_{EF}	σ_{Th}	$(\sigma_{EF}-\sigma_{Th})/max(\sigma_{Th})$
11	2.28E+00	1.48E+00	5.98E-02	2.27E+00	1.49E+00	4.08E-02
22	**9.4586**	**7.9963**	**0.1829**	**13.9667**	**11.8218**	**0.1814**
12	2.51E+00	1.33E+00	8.85E-02	2.88E+00	1.46E+00	7.42E-02

el5 - pdg2	Piola-Kirchhoff 2 (MPa)		Erreur relative	Cauchy (MPa)		Erreur relative
Composante	S_{EF}	S_{Th}	$(S_{EF}-S_{Th})/max(S_{Th})$	σ_{EF}	σ_{Th}	$(\sigma_{EF}-\sigma_{Th})/max(\sigma_{Th})$
11	4.70E-01	3.70E-01	7.49E-03	3.12E-01	2.30E-01	4.30E-03
22	**6.1461**	**6.0613**	**0.0140**	**8.8751**	**8.7514**	**0.0141**
12	1.15E+00	1.08E+00	5.08E-03	8.45E-01	7.73E-01	3.74E-03

Tableau A7-19 : Valeurs max de contraintes - Traction Ux_2 = 2mm avec dUx_2 = 0.001mm - $\mu_R=\pi/4$ et $\sigma_R=\pi/6$.

Dès que les fibres ne sont plus parallèles ou perpendiculaires à la direction de traction, apparaît le phénomène de cisaillement induisant des valeurs de contraintes non homogènes sur la membrane. Les valeurs de contraintes simulées ne sont comparables aux valeurs théoriques que pour l'élément central.

Test 1.3 : Influence du taux d'orientation des fibres

Les observations sont identiques aux tests sur un élément.

<u>Test 2 : Traction bidirectionnelle</u>

Test 2.1 : Orientation privilégiée des fibres parallèle à une direction de traction

<u>Propriétés de la membrane :</u>
- Orientation privilégiée des fibres: $\mu_R = \pi/2$
- Taux d'orientation des fibres: $\sigma_R = \pi/6$

<u>Chargement :</u>
- Déplacements imposés $\begin{cases} Ux_1 = 2\text{mm avec } dUx_1 = 0.001\text{mm} \\ Ux_2 = 1\text{mm avec } dUx_2 = 0.0005\text{mm} \end{cases}$ et n=2000

<u>Ecart entre les valeurs extrêmes de contraintes simulées à tous les points de Gauss:</u>

Composante	Green-Lagrange $(E_{ijmax}-E_{ijmin})/E_{max}$	Cauchy-Green $(C_{ijmax}-C_{ijmin})/C_{max}$	Piola-Kirchhoff 2 $(S_{ijmax}-S_{ijmin})/S_{max}$	Cauchy $(\sigma_{ijmax}-\sigma_{ijmin})/\sigma_{max}$
11	2.45E-04	7.48E-05	3.13E-05	2.99E-05
22	4.82E-05	1.47E-05	2.21E-05	2.43E-05
12	5.71E-05	8.72E-06	5.66E-06	7.92E-06

Tableau A7-20 : Ecart entre valeurs extrêmes de contraintes - Traction Ux_1 = 2mm avec dUx_1 = 0.001mm et Ux_2 = 1mm avec dUx_2 = 0.0005mm -$\mu_R=\pi/2$ et $\sigma_R=\pi/6$.

<u>Comparaison des valeurs maximales des contraintes simulées et théoriques pour certains points de Gauss (pdg):</u>

el5 - pdg2 Composante	Piola-Kirchhoff 2 (MPa) S_{EF}	S_{Th}	Erreur relative $(S_{EF}-S_{Th})/max(S_{Th})$	Cauchy (MPa) σ_{EF}	σ_{Th}	Erreur relative $(\sigma_{EF}-\sigma_{Th})/max(\sigma_{Th})$
11	**2.7217**	**2.7196**	**0.0004**	**3.9193**	**3.9163**	**0.0004**
22	**5.7585**	**5.7559**	**0.0005**	**6.9678**	**6.9646**	**0.0005**
12	-1.90E-06	-3.59E-04	6.21E-05	-5.85E-05	-5.30E-04	6.77E-05

el9 - pdg4 Composante	Piola-Kirchhoff 2 (MPa) S_{EF}	S_{Th}	Erreur relative $(S_{EF}-S_{Th})/max(S_{Th})$	Cauchy (MPa) σ_{EF}	σ_{Th}	Erreur relative $(\sigma_{EF}-\sigma_{Th})/max(\sigma_{Th})$
11	**2.7216**	**2.7192**	**0.0004**	**3.9191**	**3.9155**	**0.0005**
22	**5.7584**	**5.7557**	**0.0005**	**6.9678**	**6.9645**	**0.0005**
12	8.49E-06	-1.32E-04	2.45E-05	-1.13E-05	-1.97E-04	2.67E-05

Tableau A7-21 : Valeurs max de contraintes - Traction Ux_1 = 2mm avec dUx_1 = 0.001mm et Ux_2 = 1mm avec dUx_2 = 0.0005mm -$\mu_R=\pi/2$ et $\sigma_R=\pi/6$.

Test 2.2 : Orientation privilégiée des fibres quelconque

<u>Propriétés de la membrane :</u>

- Orientation privilégiée des fibres: $\mu_R = \pi/4$
- Taux d'orientation des fibres: $\sigma_R = \pi/6$

<u>Chargement :</u>

- Déplacements imposés $\begin{cases} Ux_1 = 2\text{mm avec } dUx_1 = 0.001\text{mm} \\ Ux_2 = 1\text{mm avec } dUx_2 = 0.0005\text{mm} \end{cases}$ et n=2000

<u>Ecart entre les valeurs extrêmes de contraintes simulées à tous les points de Gauss:</u>

Composante	Green-Lagrange $(E_{ijmax}-E_{ijmin})/E_{max}$	Cauchy-Green $(C_{ijmax}-C_{ijmin})/C_{max}$	Piola-Kirchhoff 2 $(S_{ijmax}-S_{ijmin})/S_{max}$	Cauchy $(\sigma_{ijmax}-\sigma_{ijmin})/\sigma_{max}$
11	2.89E-01	9.78E-02	7.40E-01	7.65E-01
22	6.94E-01	2.35E-01	5.58E-01	5.24E-01
12	4.92E-01	8.32E-02	3.46E-01	3.48E-01

Tableau A7-22 : Ecart entre valeurs extrêmes de contraintes - Traction Ux_1 = 2mm avec dUx_1 = 0.001mm et Ux_2 = 1mm avec dUx_2 = 0.0005mm -$\mu_R=\pi/4$ et $\sigma_R=\pi/6$.

Les champs de déformations et de contraintes ne sont pas homogènes sur la membrane (Figure A7-18).

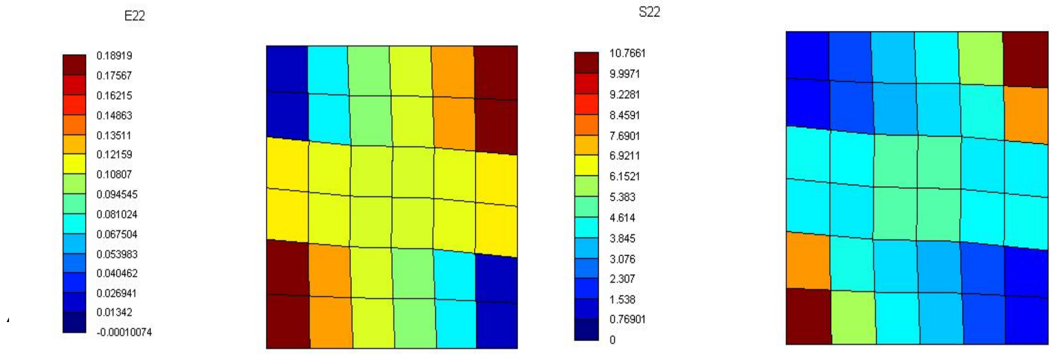


Figure A7-18 : Déformations de Green-Lagrange E22 et contraintes de Piola-Kirchhoff II S22 aux point de Gauss en fin de traction : $Ux_1 = 2$mm et $Ux_2 = 1$mm -$\mu_R=\pi/4$ et $\sigma_R=\pi/6$.

<u>Comparaison des valeurs maximales des contraintes simulées et théoriques pour certains points de Gauss (pdg):</u>

el5 - pdg2	Piola-Kirchhoff 2 (MPa)		Erreur relative	Cauchy (MPa)		Erreur relative
Composante	S_{EF}	S_{Th}	$(S_{EF}-S_{Th})/max(S_{Th})$	σ_{EF}	σ_{Th}	$(\sigma_{EF}-\sigma_{Th})/max(\sigma_{Th})$
11	**9.6094**	**9.5325**	**0.0081**	**14.0000**	**13.8854**	**0.0083**
22	**4.9167**	**4.8033**	**0.0119**	**5.8028**	**5.6690**	**0.0096**
12	3.94E+00	3.85E+00	9.37E-03	5.04E+00	4.93E+00	8.53E-03

el9 - pdg4	Piola-Kirchhoff 2 (MPa)		Erreur relative	Cauchy (MPa)		Erreur relative
Composante	S_{EF}	S_{Th}	$(S_{EF}-S_{Th})/max(S_{Th})$	σ_{EF}	σ_{Th}	$(\sigma_{EF}-\sigma_{Th})/max(\sigma_{Th})$
11	**13.4205**	**11.4815**	**0.1689**	**19.9063**	**17.1521**	**0.1606**
22	**5.7978**	**4.5359**	**0.1099**	**7.2048**	**5.6765**	**0.0891**
12	4.06E+00	2.16E+00	0.1649	5.09E+00	2.56E+00	1.47E-01

Tableau A7-23 : Valeurs max de contraintes - Traction $Ux_1 = 2$mm avec $dUx_1 = 0.001$mm et $Ux_2 = 1$mm avec $dUx_2 = 0.0005$mm -$\mu_R=\pi/4$ et $\sigma_R=\pi/6$.

Une fois de plus en présence de phénomènes de cisaillement, les valeurs simulées ne sont proches des valeurs théoriques que pour l'élément central (élément 5).

<u>Test 3 : Rotation de solide rigide</u>

La rotation de solide rigide n'a pas de sens sur plusieurs éléments, à part si l'on contraint tous les nœuds ce qui est sans intérêt.

<u>Test 4 : Cisaillement pur</u>

<u>Propriétés de la membrane :</u>
- Orientation privilégiée des fibres: $\mu_R = \pi/2$
- Taux d'orientation des fibres: $\sigma_R = \pi/6$

<u>Chargement :</u>
- Déplacement imposé Ux_1=2mm en n=2000 incréments dUx_1 = 0.001mm.

Ecart entre les valeurs extrêmes de contraintes simulées à tous les points de Gauss:

Composante	Green-Lagrange $(E_{ijmax} - E_{ijmin})/E_{max}$	Cauchy-Green $(C_{ijmax} - C_{ijmin})/C_{max}$	Piola-Kirchhoff 2 $(S_{ijmax} - S_{ijmin})/S_{max}$	Cauchy $(\sigma_{ijmax} - \sigma_{ijmin})/\sigma_{max}$
11	7.20E-02	2.76E-02	4.43E-01	3.97E-01
22	4.63E-01	1.77E-01	1.79E+00	1.66E+00
12	3.77E-01	7.23E-02	3.25E-01	3.37E-01

Tableau A7-24 : Ecart entre valeurs extrêmes de contraintes – Cisaillement Ux_1 = 2mm avec dUx_1 = 0.001mm -μ_R=π/2 et σ_R=π/6.

Les champs de déformations et de contraintes ne sont pas homogènes sur la membrane (Figure A7-19). En effet, seuls les nœuds des bords sont à déplacement imposé, il parait donc évident que les déformations ne soient pas homogènes sur tous les éléments. Si l'on enlève un degré de liberté à tous les nœuds (la translation suivant x_2), le champ de déformation est alors bien homogène.

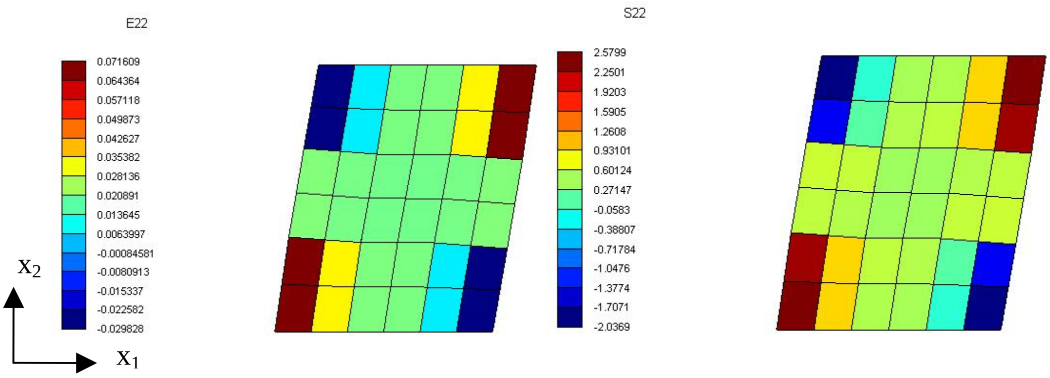


Figure A7-19 : Déformations de Green-Lagrange E22 et contraintes de Piola-Kirchhoff II S22 aux point de Gauss en fin de traction : Ux_1 = 2mm -μ_R=π/2 et σ_R=π/6.

Comparaison des valeurs maximales des contraintes simulées et théoriques pour certains points de Gauss (pdg):

Les valeurs maximales de contraintes aux points de Gauss sont complètement différentes des valeurs théoriques.

5. Test sur 16 éléments dans le domaine élastique

Test 1 : Traction unidirectionnelle

Test 1.1 : Paramètres de la répartition des fibres constants

Propriétés de la membrane :

- Orientation privilégiée des fibres: μ_R = π/2
- Taux d'orientation des fibres: σ_R = π/6

Chargement:

- Déplacement imposé Ux_2=2mm en n incréments dUx_2 = 0.001mm.

Ecart entre les valeurs extrêmes de contraintes simulées à tous les points de Gauss:

Ecart calculé sur les valeurs de contraintes du dernier incrément de chargement.

Composante	Green-Lagrange $(E_{ijmax}-E_{ijmin})/E_{max}$	Cauchy-Green $(C_{ijmax}-C_{ijmin})/C_{max}$	Piola-Kirchhoff 2 $(S_{ijmax}-S_{ijmin})/S_{max}$	Cauchy $(\sigma_{ijmax}-\sigma_{ijmin})/\sigma_{max}$
11	2.42E-04	7.38E-05	1.87E-04	8.56E-05
22	9.80E-05	2.99E-05	3.16E-04	2.96E-04
12	1.90E-04	2.90E-05	6.82E-05	3.24E-05

Tableau A7-25 : Ecart entre valeurs extrêmes de contraintes - Traction Ux_2 = 2mm avec dUx_2 = 0.001mm -μ_R=π/2 et σ_R=π/6.

Comparaison des valeurs maximales des contraintes simulées et théoriques pour certains points de Gauss (pdg):

el9 - pdg4	Piola-Kirchhoff 2 (MPa)		Erreur relative	Cauchy (MPa)		Erreur relative
Composante	S_{EF}	S_{Th}	$(S_{EF}-S_{Th})/max(S_{Th})$	σ_{EF}	σ_{Th}	$(\sigma_{EF}-\sigma_{Th})/max(\sigma_{Th})$
11	-5.04E-04	-2.02E-04	-2.26E-05	-3.32E-04	-1.33E-04	-1.03E-05
22	**13.3639**	**13.3488**	**0.0011**	**19.2440**	**19.2223**	**0.0011**
12	1.44E-04	1.84E-04	-2.97E-06	1.16E-04	1.54E-04	-2.01E-06

el1 - pdg4	Piola-Kirchhoff 2 (MPa)		Erreur relative	Cauchy (MPa)		Erreur relative
Composante	S_{EF}	S_{Th}	$(S_{EF}-S_{Th})/max(S_{Th})$	σ_{EF}	σ_{Th}	$(\sigma_{EF}-\sigma_{Th})/max(\sigma_{Th})$
11	8.69E-04	2.60E-04	4.57E-05	5.72E-04	1.71E-04	2.09E-05
22	**13.3652**	**13.3500**	**0.0011**	**19.2460**	**19.2241**	**0.0011**
12	7.53E-05	3.67E-05	2.89E-06	3.88E-05	1.26E-06	1.95E-06

el5 - pdg2	Piola-Kirchhoff 2 (MPa)		Erreur relative	Cauchy (MPa)		Erreur relative
Composante	S_{EF}	S_{Th}	$(S_{EF}-S_{Th})/max(S_{Th})$	σ_{EF}	σ_{Th}	$(\sigma_{EF}-\sigma_{Th})/max(\sigma_{Th})$
11	6.64E-04	1.73E-04	3.68E-05	4.37E-04	1.14E-04	1.68E-05
22	**13.3643**	**13.3501**	**0.0011**	**19.2448**	**19.2242**	**0.0011**
12	5.73E-04	1.31E-04	3.31E-05	4.52E-04	2.23E-05	2.23E-05

Tableau A7-26 : Valeurs max de contraintes - Traction Ux_2 = 2mm avec dUx_2 = 0.001mm - μ_R=π/2 et σ_R=π/6.

Annexe 8 :

Tests de validation – Méthode du pilotage en longueur d'arc

1. Hypothèses

Les hypothèses sont toutes identiques à celles de l'annexe 7 à l'exception de la méthode de résolution des équations d'équilibre. Nous utilisons cette fois-ci le pilotage en longueur d'arc.

2. Test sur un élément dans le domaine élastique

Test 1 : Traction unidirectionnelle

Test 1.1 : Paramètres de la répartition des fibres constants

Propriétés de la membrane :
- Orientation privilégiée des fibres suivant la direction de traction $\mathbf{x_2}$: $\mu_R=\pi/2$
- Taux d'orientation des fibres : $\sigma_R=\pi/6$
- Précision sur l'intégrale numérique : $d\theta = 0.001$

Chargement:
- Traction suivant $\mathbf{x_2}$.
- Longueur d'arc : dl_{min} = 0.005mm / dl_{max} = 0.01mm
- Nombre d'itérations d'équilibre maximales souhaitées : $j_{maximale} = 6$

Comparaison des valeurs maximales des contraintes simulées et théoriques :
Les valeurs d'erreur relative sont calculées à des niveaux de contrainte équivalents à ceux des tests de la méthode de Newton-Raphson complète.

Composante	Piola-Kirchhoff 2 (MPa)		Erreur relative	Cauchy (MPa)		Erreur relative
	S_{EF}	S_{Th}	$(S_{EF}-S_{Th})/max(S_{Th})$	σ_{EF}	σ_{Th}	$(\sigma_{EF}-\sigma_{Th})/max(\sigma_{Th})$
11	2.80E-07	-1.32E-03	1.29E-04	1.90E-07	-8.94E-04	6.25E-05
22	**10.1878**	**10.2150**	**-0.0057**	**14.2586**	**14.2967**	-0.0057
12	5.41E-09	4.00E-09	1.38E-10	9.43E-08	9.32E-08	7.89E-11

Tableau A8-1: Traction $U x_2$ avec dl_{min} = 0.005mm / dl_{max} = 0.01mm - $j_{maximale}$ = 6 - $\mu_R=\pi/2$ et $\sigma_R=\pi/6$ - $d\theta$ = 0.001.

L'erreur relative sur les valeurs maximales de contrainte est de l'ordre de grandeur de la longueur d'arc sur l'incrément de chargement.

Test 2 : Traction bidirectionnelle

Propriétés de la membrane :
- Orientation privilégiée des fibres: $\mu_R = \pi/2$
- Taux d'orientation des fibres: $\sigma_R = \pi/6$

Chargement:

- Traction suivant $\mathbf{x_1}$ et $\mathbf{x_2}$ telle que $dUx_2 = 2dUx_1$.
- Longueur d'arc : dl_{min} = 0.005mm / dl_{max} = 0.01mm
- Nombre d'itérations d'équilibre maximales souhaitées : $j_{maximale} = 6$

Comparaison des valeurs maximales des contraintes simulées et théoriques :

	Piola-Kirchhoff 2 (MPa)		Erreur relative	Cauchy (MPa)		Erreur relative
Composante	S_{EF}	S_{Th}	$(S_{EF}-S_{Th})/max(S_{Th})$	σ_{EF}	σ_{Th}	$(\sigma_{EF}-\sigma_{Th})/max(\sigma_{Th})$
11	**3.4461**	**3.4521**	**-0.0004**	**4.5627**	**4.5706**	**-0.0004**
22	**15.4160**	**15.4442**	**-0.0018**	**21.5533**	**21.5927**	**-0.0018**
12	-5.06E-08	-5.41E-08	2.28E-10	-6.86E-08	-7.34E-08	2.21E-10

Tableau A8-2 : Traction Ux_1 et Ux_2 telle que $dUx_2 = 2dUx_1$ avec dl_{min} = 0.005mm / dl_{max} = 0.01mm - $j_{maximale} = 6$ - $\mu_R=\pi/2$ et $\sigma_R=\pi/6$ - $d\theta = 0.001$.

Test 4 : Cisaillement pur

Propriétés de la membrane :
- Orientation privilégiée des fibres : $\mu_R=\pi/2$
- Taux d'orientation des fibres : $\sigma_R=\pi/6$

Chargement:
- Traction suivant $\mathbf{x_1}$.
- Longueur d'arc : dl_{min} = 0.005mm / dl_{max} = 0.01mm
- Nombre d'itérations d'équilibre maximales souhaitées : $j_{maximale} = 6$

Comparaison des valeurs maximales des contraintes simulées et théoriques :

	Piola-Kirchhoff 2 (MPa)		Erreur relative	Cauchy (MPa)		Erreur relative
Composante	S_{EF}	S_{Th}	$(S_{EF}-S_{Th})/max(S_{Th})$	σ_{EF}	σ_{Th}	$(\sigma_{EF}-\sigma_{Th})/max(\sigma_{Th})$
11	-0.2881	-0.1194	-0.1191	0.3164	0.4827	-0.1117
22	0.3766	0.3773	-0.0005	0.3766	0.3773	-0.0005
12	**1.4191**	**1.4163**	**0.0020**	**1.4916**	**1.4890**	**0.0018**

Tableau A8-3 : Cisaillement Ux_1 avec avec dl_{min} = 0.005mm / dl_{max} = 0.01mm - $j_{maximale} = 6$ - $\mu_R=\pi/2$ et $\sigma_R=\pi/6$ - $d\theta = 0.001$.

3. Test sur un élément jusqu'à rupture

Test 1 : Traction unidirectionnelle

Test 1.1 : Influence de la longueur d'arc minimale

Propriétés de la membrane :
- Orientation privilégiée des fibres: $\mu_R = \pi/2$
- Taux d'orientation des fibres: $\sigma_R = \pi/6$
- Précision sur l'intégrale numérique : $d\theta = 0.001$

Chargement:

- Traction suivant $\mathbf{x_2}$.
- Longueur d'arc : dl_{max} = 0.1mm et
    - dl_{min} = 0.05mm
    - dl_{min} = 0.01mm
    - dl_{min} = 0.005mm
- Nombre d'itérations d'équilibre maximales souhaitées : $j_{maximale}$ = 5

Comparaison des valeurs de contraintes simulées et théoriques – cas traction suivant $\mathbf{x_2}$:

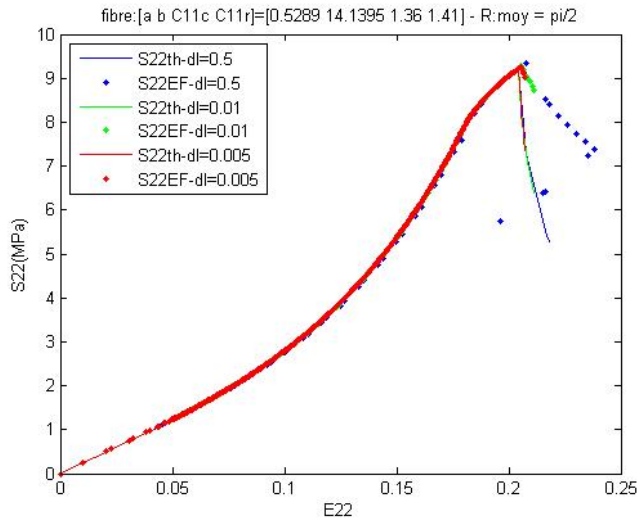


Figure A8-1 : Composante S22 des contraintes de Piola-Kirchhoff II en fonction de la composante E22 des déformations de Green-Lagrange : comparaison des valeurs simulées et théoriques sur un élément jusqu'à rupture pour a=0.5289, b=14.1395, C_{11c}=1.36, C_{11R}=1.41 $\mu_R=\pi/2$ et $\sigma_R=\pi/6$: cas dl_{min} =0.05mm, dl_{min} =0.01mm et dl_{min} =0.005mm.

Comparaison des valeurs maximales des contraintes simulées et théoriques :

Composante	Piola-Kirchhoff 2 (MPa) S_{EF}	S_{Th}	Erreur relative $(S_{EF}-S_{Th})/max(S_{Th})$	Cauchy (MPa) σ_{EF}	σ_{Th}	Erreur relative $(\sigma_{EF}-\sigma_{Th})/max(\sigma_{Th})$
11	4.35E-06	-2.04E-02	2.22E-03	2.94E-06	-1.37E-02	1.06E-03
22	**9.2250**	**9.2032**	**0.0024**	**12.9930**	**12.9622**	**0.0024**
12	1.33E-06	1.98E-04	-2.14E-05	4.87E-05	2.40E-04	-1.48E-05

Tableau A8-4: Traction Ux_2 avec dl_{min} = 0.05mm / dl_{max} = 0.1mm - $j_{maximale}$ = 5 - $\mu_R=\pi/2$ et $\sigma_R=\pi/6$ - $d\theta$ = 0.001.

Composante	Piola-Kirchhoff 2 (MPa) S_{EF}	S_{Th}	Erreur relative $(S_{EF}-S_{Th})/max(S_{Th})$	Cauchy (MPa) σ_{EF}	σ_{Th}	Erreur relative $(\sigma_{EF}-\sigma_{Th})/max(\sigma_{Th})$
11	4.08E-07	-6.61E-03	7.18E-04	2.76E-07	-4.46E-03	3.44E-04
22	**9.2128**	**9.2026**	**0.0011**	**12.9725**	**12.9580**	**0.0011**
12	8.33E-06	-8.28E-06	1.80E-06	3.73E-06	-1.25E-05	1.25E-06

Tableau A8-5: Traction Ux_2 avec dl_{min} = 0.01mm / dl_{max} = 0.1mm - $j_{maximale}$ = 5 - $\mu_R=\pi/2$ et $\sigma_R=\pi/6$ - $d\theta$ = 0.001.

Composante	Piola-Kirchhoff 2 (MPa) S_{EF}	S_{Th}	Erreur relative $(S_{EF}-S_{Th})/max(S_{Th})$	Cauchy (MPa) σ_{EF}	σ_{Th}	Erreur relative $(\sigma_{EF}-\sigma_{Th})/max(\sigma_{Th})$
11	4.97E-06	-5.08E-03	5.51E-04	3.36E-06	-3.43E-03	2.64E-04
22	**9.2318**	**9.2227**	**0.0010**	**13.0090**	**12.9961**	**0.0010**
12	3.22E-05	-2.73E-05	6.45E-06	9.84E-06	-4.81E-05	4.46E-06

Tableau A8-6: Traction Ux_2 avec dl_{min} = 0.005mm / dl_{max} = 0.1mm - $j_{maximale}$ = 5 - $\mu_R=\pi/2$ et $\sigma_R=\pi/6$ - $d\theta$ = 0.001.

Test 1.2 : Influence de la précision de l'intégrale numérique

<u>Propriétés de la membrane :</u>

- Orientation privilégiée des fibres: $\mu_R = \pi/2$

- Taux d'orientation des fibres: $\sigma_R = \pi/6$

<u>Chargement:</u>

- Traction suivant $\mathbf{x_1}$.

- Longueur d'arc : dl_{min} = 0.005mm / dl_{max} = 0.01mm

- Nombre d'itérations d'équilibre maximales souhaitées : $j_{maximale}$ = 6

<u>Différentes valeurs de $d\theta$ sont testées :</u>

- $d\theta$ = 0.001
- $d\theta$ = 0.01
- $d\theta$ = 0.1

<u>Comparaison des valeurs de contraintes simulées et théoriques – cas traction suivant $\mathbf{x_2}$:</u>

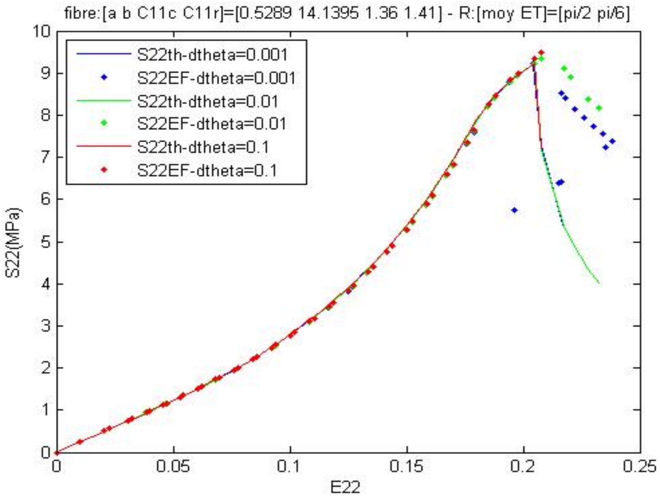


Figure A8-2 : Composante S22 des contraintes de Piola-Kirchhoff II en fonction de la composante E22 des déformations de Green-Lagrange : comparaison des valeurs simulées et théoriques sur un élément jusqu'à rupture pour a=0.5289, b=14.1395, C_{11c}=1.36, C_{11R}=1.41 $\mu_R=\pi/2$ et $\sigma_R=\pi/6$: cas $d\theta$=0.001, $d\theta$=0.01 et $d\theta$=0.1.

<u>Comparaison des valeurs maximales des contraintes simulées et théoriques :</u>

Les résultats du cas $d\theta = 0.001$ sont donnés dans le Tableau A8-6.

Composante	Piola-Kirchhoff 2 (MPa) S_{EF}	S_{Th}	Erreur relative $(S_{EF}-S_{Th})/max(S_{Th})$	Cauchy (MPa) σ_{EF}	σ_{Th}	Erreur relative $(\sigma_{EF}-\sigma_{Th})/max(\sigma_{Th})$
11	-6.78E-06	-1.65E-02	1.79E-03	-4.57E-06	-1.11E-02	8.58E-04
22	**9.2362**	**9.2205**	**0.0017**	**13.0165**	**12.9944**	**0.0017**
12	-1.66E-04	1.72E-04	-3.67E-05	-5.92E-05	2.70E-04	-2.53E-05

Tableau A8-7: Traction Ux_2 avec dl_{min} = 0.05mm / dl_{max} = 0.1mm - $j_{maximale}$ = 5 - $\mu_R=\pi/2$ et $\sigma_R=\pi/6$ - $d\theta = 0.01$.

Composante	Piola-Kirchhoff 2 (MPa) S_{EF}	S_{Th}	Erreur relative $(S_{EF}-S_{Th})/max(S_{Th})$	Cauchy (MPa) σ_{EF}	σ_{Th}	Erreur relative $(\sigma_{EF}-\sigma_{Th})/max(\sigma_{Th})$
11	-4.64E-04	1.70E-03	-2.34E-04	-3.14E-04	1.15E-03	-1.12E-04
22	**9.3463**	**9.2299**	**0.0126**	**13.1724**	**13.0083**	**0.0126**
12	-3.54E-03	2.93E-03	-7.01E-04	-1.25E-03	5.04E-03	-4.83E-04

Tableau A8-8: Traction Ux_2 avec dl_{min} = 0.05mm / dl_{max} = 0.1mm - $j_{maximale}$ = 5 - $\mu_R=\pi/2$ et $\sigma_R=\pi/6$ - $d\theta = 0.1$.

Test 1.3 : Influence du taux d'orientation des fibres

<u>Propriétés de la membrane :</u>

- Orientation privilégiée des fibres : $\mu_R = \pi/2$
- Ecart type de la fonction de répartition des fibres :
    - $\sigma_R = \pi/2$
    - $\sigma_R = \pi/3$
    - $\sigma_R = \pi/6$
- Précision sur l'intégrale numérique : $d\theta = 0.001$

<u>Chargement:</u>

- Traction suivant $\mathbf{x_2}$.
- Longueur d'arc : dl_{min} = 0.05mm / dl_{max} = 0.1mm
- Nombre d'itérations d'équilibre maximales souhaitées : $j_{maximale}$ = 5

Comparaison des valeurs de contraintes simulées et théoriques – cas traction suivant **x_2**:

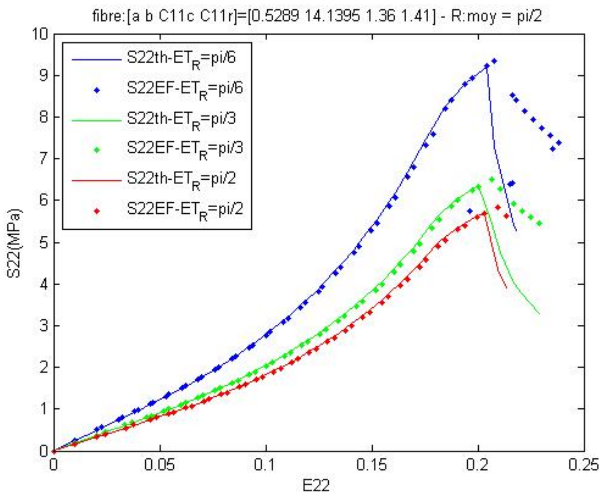


Figure A8-3 : Composante S22 des contraintes de Piola-Kirchhoff II en fonction de la composante E22 des déformations de Green-Lagrange : comparaison des valeurs simulées et théoriques sur un élément jusqu'à rupture pour a=0.5289, b=14.1395, C_{11c}=1.36, C_{11R}=1.41 $\mu_R=\pi/2$: cas $\sigma_R = \pi/2$, $\sigma_R = \pi/3$ et $\sigma_R = \pi/6$.

4. Test sur 9 éléments dans le domaine élastique – membrane homogène

La membrane simulée étant homogène, les paramètres de la loi de comportement ont des valeurs identiques à tous les points d'intégration.

Test 1 : Traction unidirectionnelle

Test 1.1 : Paramètres de la répartition des fibres constants

Propriétés de la membrane :
- Orientation privilégiée des fibres suivant la direction de traction **x_2** : $\mu_R=\pi/2$
- Taux d'orientation des fibres : $\sigma_R=\pi/6$
- Précision sur l'intégrale numérique : $d\theta = 0.001$

Chargement:
- Traction suivant **x_2**.
- Longueur d'arc : dl_{min} = 0.005mm / dl_{max} = 0.01mm
- Nombre d'itérations d'équilibre maximales souhaitées : $j_{maximale}$ = 6

Ecart entre les valeurs extrêmes de contraintes simulées à tous les points de Gauss:

Composante	Green-Lagrange $(E_{ijmax}-E_{ijmin})/E_{max}$	Cauchy-Green $(C_{ijmax}-C_{ijmin})/C_{max}$	Piola-Kirchhoff 2 $(S_{ijmax}-S_{ijmin})/S_{max}$	Cauchy $(\sigma_{ijmax}-\sigma_{ijmin})/\sigma_{max}$
11	2.62E-04	8.13E-05	1.26E-04	5.70E-05
22	5.11E-05	1.58E-05	1.25E-04	1.40E-04
12	1.38E-04	2.14E-05	3.29E-05	3.87E-05

Tableau A8-9 : Ecart entre valeurs extrêmes de contraintes - Traction Ux_2 avec dl_{min} = 0.005mm / dl_{max} = 0.01mm - $j_{maximale}$ = 6 - $\mu_R=\pi/2$ et $\sigma_R=\pi/6$ - $d\theta$ = 0.001.

Comparaison des valeurs maximales des contraintes simulées et théoriques pour certains points de Gauss (pdg):

el9 - pdg4	Piola-Kirchhoff 2 (MPa)		Erreur relative	Cauchy (MPa)		Erreur relative
Composante	S_{EF}	S_{Th}	$(S_{EF}-S_{Th})/max(S_{Th})$	σ_{EF}	σ_{Th}	$(\sigma_{EF}-\sigma_{Th})/max(\sigma_{Th})$
11	-1.12E-07	-7.95E-04	5.62E-05	-7.32E-08	-5.19E-04	2.53E-05
22	**14.1266**	**14.1462**	**-0.0014**	**20.4648**	**20.4932**	**-0.0014**
12	-3.42E-07	-3.53E-07	7.67E-10	-1.05E-06	-1.06E-06	5.63E-10

el1 - pdg1	Piola-Kirchhoff 2 (MPa)		Erreur relative	Cauchy (MPa)		Erreur relative
Composante	S_{EF}	S_{Th}	$(S_{EF}-S_{Th})/max(S_{Th})$	σ_{EF}	σ_{Th}	$(\sigma_{EF}-\sigma_{Th})/max(\sigma_{Th})$
11	1.73E-07	-7.94E-04	5.62E-05	1.13E-07	-5.19E-04	2.53E-05
22	**14.1266**	**14.1462**	**-0.0014**	**20.4648**	**20.4932**	**-0.0014**
12	3.52E-08	3.28E-08	1.73E-10	-2.73E-08	-2.98E-08	1.20E-10

el5 - pdg2	Piola-Kirchhoff 2 (MPa)		Erreur relative	Cauchy (MPa)		Erreur relative
Composante	S_{EF}	S_{Th}	$(S_{EF}-S_{Th})/max(S_{Th})$	σ_{EF}	σ_{Th}	$(\sigma_{EF}-\sigma_{Th})/max(\sigma_{Th})$
11	-2.85E-08	-7.95E-04	5.62E-05	-1.86E-08	-5.19E-04	2.53E-05
22	**14.1266**	**14.1462**	**-0.0014**	**20.4648**	**20.4932**	**-0.0014**
12	3.80E-07	3.17E-07	4.50E-09	7.93E-07	7.31E-07	2.99E-09

Tableau A8-10 : Valeurs max de contraintes - Traction Ux_2 avec dl_{min} = 0.005mm / dl_{max} = 0.01mm - $j_{maximale}$ = 6 - $\mu_R=\pi/2$ et $\sigma_R=\pi/6$ - $d\theta$ = 0.001.

5. Test sur 9 éléments jusqu'à rupture – membrane homogène

Test 1 : Traction unidirectionnelle

Propriétés de la membrane :

- Orientation privilégiée des fibres: $\mu_R = \pi/2$
- Taux d'orientation des fibres: $\sigma_R = \pi/6$
- Précision sur l'intégrale numérique : $d\theta = 0.001$

Chargement:

- Traction suivant $\mathbf{x_2}$.
- Longueur d'arc : dl_{min} = 0.05mm / dl_{max} = 0.1mm
- Nombre d'itérations d'équilibre maximales souhaitées : $j_{maximale}$ = 5

Courbe contrainte/déformation simulée :

Cf Figure 4-11

<u>Champs de contrainte et de déformation, quantité relative de fibres simulés :</u>
Cf Figure 4-10

6. <u>Test sur 9 éléments jusqu'à rupture – membrane hétérogène</u>

<u>Test 1 : Traction unidirectionnelle</u>

<u>Chargement:</u>
- Traction suivant $\mathbf{x_2}$.
- Longueur d'arc : dl_{min} = 0.05mm / dl_{max} = 0.1mm
- Nombre d'itérations d'équilibre maximales souhaitées : $j_{maximale}$ = 5

Test 1.1 : Propriétés de la membrane cas a

<u>Propriétés de la membrane :</u> (Cf Figure 4-12-a)
- Orientation privilégiée des fibres: $\mu_R = \pi/2$ (éléments 1 à 5, 7 à 9)
$\mu_R = \pi/3$ (élément 6)
- Taux d'orientation des fibres: $\sigma_R = \pi/6$
- Précision sur l'intégrale numérique : $d\theta = 0.001$

<u>Courbes contrainte/déformation simulées aux points de Gauss caractéristiques:</u>
Cf Figure 4-15
<u>Evolution de quantité relative de fibres simulée :</u>
Cf Figure 4-14
<u>Champs de contrainte et de déformation simulés :</u>
Cf Figure 4-13 pour E_{22}

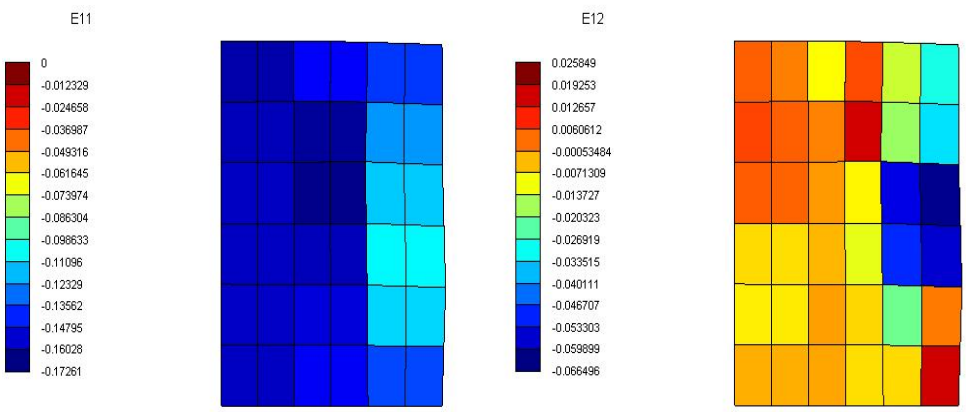


Figure A8-4 : Déformations de Green-Lagrange E11 et E12 aux points de Gauss en fin de traction – membrane hétérogène cas a - a=0.5289, b=14.1395, C_{11c}=1.36, C_{11R}=1.41, $\mu_R=\pi/2$ ou $\pi/3$, $\sigma_R = \pi/6$.

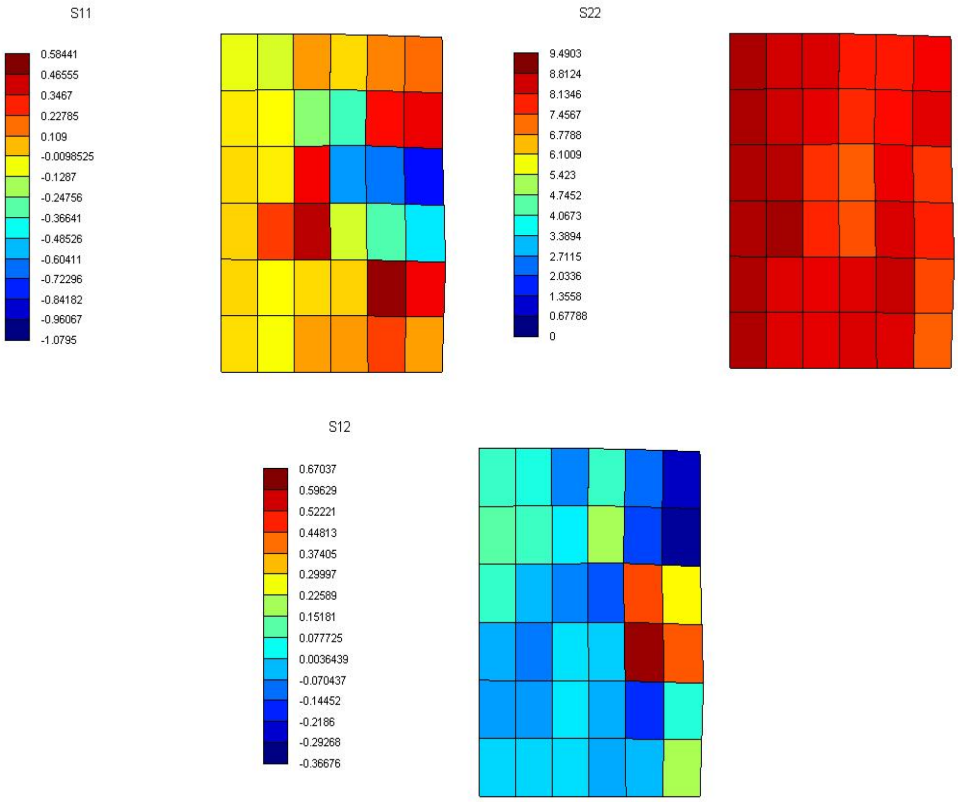


Figure A8-5 : Contraintes de Piola-Kirchhoff II S11, S22 et S12 aux points de Gauss en fin de traction – membrane hétérogène cas a - a=0.5289, b=14.1395, C_{11c}=1.36, C_{11R}=1.41, $\mu_R=\pi/2$ ou $\pi/3$, $\sigma_R = \pi/6$.

Test 1.2 : Propriétés de la membrane cas b

<u>Propriétés de la membrane :</u> (Cf Figure 4-12-b)

- Orientation privilégiée des fibres: $\mu_R = \pi/2$ (éléments 1 à 4, 7 à 9)

  $\mu_R = \pi/3$ (éléments 5 et 6)

- Taux d'orientation des fibres: $\sigma_R = \pi/6$
- Précision sur l'intégrale numérique : $d\theta = 0.001$

<u>Evolution de quantité relative de fibres simulée :</u>

Cf Figure 4-16

<u>Champs de déformation simulés :</u>

Cf Figure 4-16

Test 1.3 : Propriétés de la membrane cas a

<u>Propriétés de la membrane :</u> (Cf Figure 4-12-a)

- Orientation privilégiée des fibres: $\mu_R = \pi/2$ (éléments 1 à 5, 7 à 9)

  $\mu_R = \pi/12$ (élément 6)

- Taux d'orientation des fibres: $\sigma_R = \pi/6$
- Précision sur l'intégrale numérique : $d\theta = 0.001$

<u>Courbes contrainte/déformation simulées aux points de Gauss caractéristiques:</u>

Cf Figure 4-19

<u>Champs de contrainte et de déformation, quantité relative de fibres simulés :</u>

Cf Figure 4-17 et 4-18

7. <u>Test sur 24 éléments jusqu'à rupture – membrane hétérogène</u>

<u>Test 1 : Traction unidirectionnelle</u>

<u>Chargement:</u>

- Traction suivant $\mathbf{x_2}$.
- Longueur d'arc : dl_{min} = 0.05mm / dl_{max} = 0.1mm
- Nombre d'itérations d'équilibre maximales souhaitées : $j_{maximale} = 5$

Test 1.1 : Propriétés de la membrane cas b

<u>Propriétés de la membrane :</u> (Cf Figure 4-12-b)

- Orientation privilégiée des fibres: $\mu_R = \pi/2$ (éléments 1 à 10, 13 à 24)
  $\mu_R = \pi/12$ (éléments 11 et 12)
- Taux d'orientation des fibres: $\sigma_R = \pi/6$
- Précision sur l'intégrale numérique : $d\theta = 0.001$

<u>Evolution de la quantité relative de fibres simulée :</u>

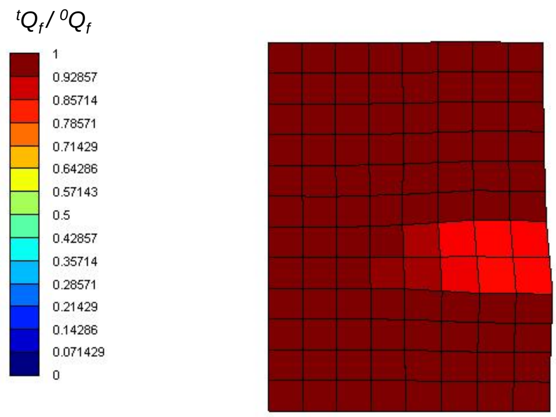


Figure A8-6 : Rapport ^tQ_f / ^0Q_f aux points de Gauss en fin de traction – membrane hétérogène cas b - a=0.5289, b=14.1395, C_{11c}=1.36, C_{11R}=1.41, $\mu_R=\pi/2$ ou $\pi/12$, $\sigma_R = \pi/6$.

Champs de contrainte et de déformation simulés :

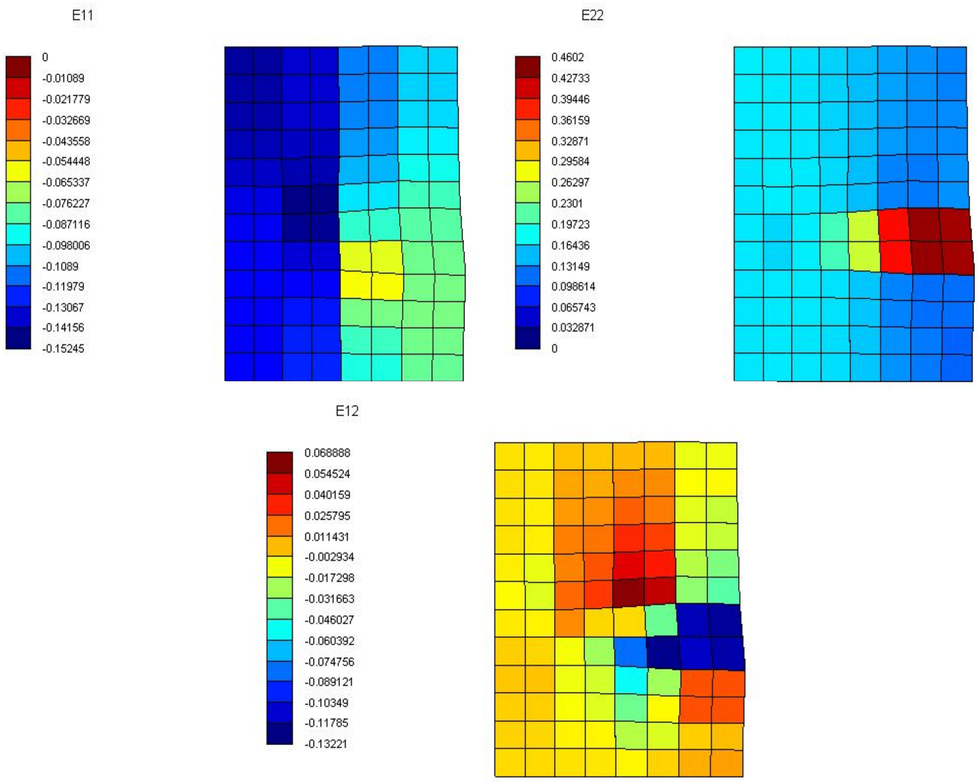


Figure A8-7 : Déformations de Green-Lagrange E11, E22 et E12 aux points de Gauss en fin de traction – membrane hétérogène cas b - a=0.5289, b=14.1395, C_{11c}=1.36, C_{11R}=1.41, μ_R=π/2 ou π/12, σ_R = π/6.

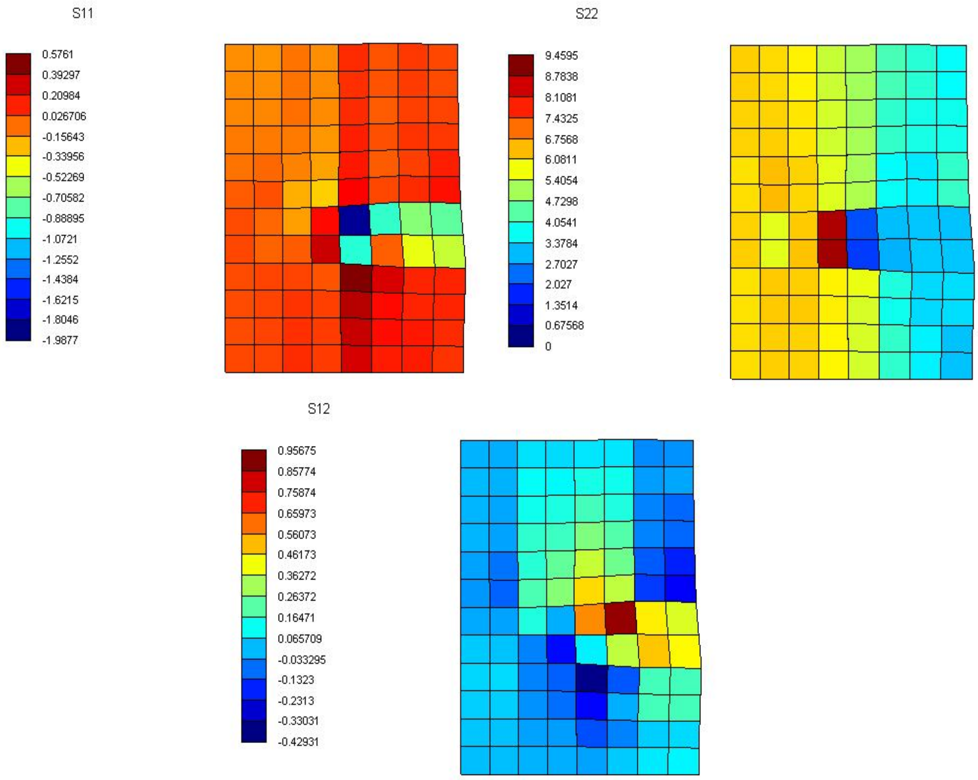


Figure A8-8 : Contraintes de Piola-Kirchhoff II S11, S22 et S12 aux points de Gauss en fin de traction – membrane hétérogène cas b - a=0.5289, b=14.1395, C_{11c}=1.36, C_{11R}=1.41, $\mu_R=\pi/2$ ou $\pi/12$, $\sigma_R = \pi/6$.

Abstract

Focusing on planar and fibrous soft tissues, this work has consisted in determining both the mechanical properties and the failure characteristics of the human skin, in loading conditions close to an impact. In the experimental study, the results have pointed out the relationship between some micro structural parameters of the tissue and the mechanical properties measured at the macroscopic scale. According to this micro/macro dependency, a constitutive law, including structural parameters related to the fibres, has been implemented in a finite element model. The main advantage of such a model is to more locally simulate the tissue behaviour and its failure.

The experiments on the human skin bring original and more precise data than classical studies. On the one hand, a heterogeneous strain field has clearly appeared and its heterogeneity has been quantified thanks to a full field measurement technique adapted to the skin. On the other hand, at the microscopic scale, the collagen fibre orientations have been determined and linked to different rupture mechanisms. The first simulations on the human skin have pointed out the importance of using a structural constitutive law in order to model complex physical phenomenon (heterogeneous strain field, gradual rupture of the tissue).

Being easily suitable for any planar and fibrous soft tissues, both the testing methodology and the finite element model present interesting perspectives for tissues that are severely injured in automotive collisions. Then, considering individual diversity, such a structural approach will enable to personalize models as structural parameters are everyone's identity.

Keywords: Human skin, Nonlinear hyperelasticity, Damage, Multi-scale structural constitutive law, Finite elements.

THESE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

NOM : JACQUEMOUD DATE de SOUTENANCE : 17/12/07

Prénoms : Clémentine

TITRE : Caractérisation mécanique et modélisation du comportement jusqu'à rupture de membranes biologiques fibreuses : application à la peau humaine

NATURE : Doctorat Numéro d'ordre : 2007 ISAL 0113

Ecole doctorale : Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique

Spécialité : Mécanique

RESUME :

Ce travail représente la caractérisation et la modélisation mécanique complète d'une membrane biologique fibreuse : la peau humaine, lorsqu'elle est soumise à des sollicitations proches du choc conduisant à sa rupture. En effet, l'étude expérimentale a permis de mettre en relation des paramètres de la micro structure fibreuse avec les propriétés mécaniques du tissu, mesurées à l'échelle macroscopique. Cette évolution conjointe des propriétés à différentes échelles, a ensuite pu être retranscrite dans une loi de comportement à deux échelles. Son implantation dans un code éléments finis apporte ainsi une description locale du comportement du tissu.

Les premières applications sur la peau humaine apportent, d'un point de vue expérimental, en plus des caractéristiques mécaniques classiques jusqu'à rupture, des données non conventionnelles et plus précises, d'une part sur le comportement de ce tissu (mesure du champ de déformation, quantification de son hétérogénéité) et d'autre part sur sa micro structure (orientation privilégiée des fibres, mécanisme de rupture). Les premières simulations sur la peau humaine mettent en évidence l'importance d'inclure, dans la loi de comportement, des paramètres propres aux fibres et à leur répartition dans le tissu, afin de modéliser des phénomènes observés expérimentalement (champ de déformation hétérogène, rupture progressive du tissu).

Le protocole expérimental ainsi que le modèle de comportement ont été définis de telle sorte qu'ils puissent s'adapter aisément à tout type de membrane fibreuse, ce qui offre des perspectives intéressantes concernant les tissus sévèrement touchés lors d'accidents. De plus, compte tenu de la forte diversité inter individu, cette approche structurelle semble ouvrir la voie de la personnalisation des modèles, dans le sens où les paramètres structurels sont l'identité de chacun.

MOTS-CLES : Peau humaine, Hyperélasticité non linéaire, Endommagement, Loi de comportement multi-échelles, Eléments finis.

Laboratoire (s) de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures (INSA-Lyon CNRS UMR5259)
&
Laboratoire de Biomécanique et Mécanique des Chocs (INRETS-UCBL UMR_T 9406)

Directeurs de thèse : Alain COMBESCURE
&
Jean-Pierre VERRIEST

Président de jury : Marek HAFTEK

Composition du jury : Alain COMBESCURE
Jean-Pierre VERRIEST
Patrick CHABRAND
Laurent GORNET
Michael GILCHRIST

Membres invités: Bernard CAMBOU
Michel CORET