

THÈSE

MODELISATION PAR LA METHODE SPH DE L'IMPACT D'UN RESERVOIR REMPLI DE FLUIDE

Présentée devant

l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

pour obtenir

le GRADE DE DOCTEUR

École doctorale :

Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique

Spécialité :

MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

par

Bertrand MAUREL

Ingénieur diplômé de l'INSA de Lyon.

Thèse soutenue le 23 janvier 2008 devant la Commission d'examen

Jury

ANTONIO HUERTA	Professeur	Président
FRANCESCO CHINESTA	Professeur	Rapporteur
EMMANUEL DELANGRE	Professeur	Rapporteur
JACKY FABIS	Ingénieur	Examineur
SERGUEI POTAPOV	Ingénieur	Examineur
ALAIN COMBESCURE	Professeur	Directeur de thèse

LaMCoS - UMR CNRS 5514 - INSA de Lyon
20, avenue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex (FRANCE)

Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu messieurs Chinesta et Delangre pour avoir accepté la charge de rapporteur de ce travail de thèse. J'adresse également mes remerciements à messieurs Huerta et Fabis pour leur participation au jury.

Ce travail est le fruit d'une collaboration entre le Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures (LaMCoS), laboratoire de l'INSA de Lyon et le service Recherche et Développement de EDF.

Dans ce cadre je tiens donc à remercier tout particulièrement Alain Combescure (LaMCoS) mon directeur de thèse et Sergeui Potapov (EDF). Je voudrais exprimer également ma gratitude envers toutes les personnes ayant contribué au bon déroulement de ce travail, plus particulièrement Hariddh Bung (CEA), Folco Casadei (JRC Ispra) et Jacky Fabis (ONERA).

Enfin mes pensées vont également à toutes les personnes que j'ai eu la chance de côtoyer durant ces trois années passées au sein du LaMCoS, parmi lesquelles Guillaume Peillex, Ludovic Gallego, Vincent Boucly, Claire Vayssière, Daniel Maisonnette, Yann Chuzel-Marmot et tous les autres ...

Résumé

Afin de garantir la sûreté de certaines installations, leur résistance à la chute d'un avion doit être prise en compte. La difficulté et le coût d'essais réels rendent la simulation indispensable pour ce type d'études. Cependant les phénomènes à représenter sont particulièrement complexes. Ainsi par exemple l'éventration des réservoirs de carburant et la fuite de celui-ci au travers des déchirures se révèlent particulièrement difficiles à modéliser à l'aide d'outils classiques comme la méthode des éléments finis. En effet, les grandes déformations du fluide, les effets de sloshing dans le réservoir, les impacts multiples et la fracturation du réservoir sont autant de phénomènes complexes et coûteux à traiter lorsque l'on utilise une méthode de calcul requérant un maillage en particulier à cause des problèmes de remaillage.

Le travail de thèse a donc consisté à développer un outil de simulation numérique utilisant une approche meshless (ou sans maillage) capable de simuler la déformation et la rupture de structures minces sous l'impact d'un fluide. Un modèle de coque épaisse meshless (Mindlin-Reissner) basé sur la méthode SPH a ainsi été réalisé. Un algorithme de contact a de plus été mis au point pour la gestion des interactions entre la structure et le fluide également modélisé par la méthode SPH. Ces travaux ont été réalisés et inclus dans le logiciel de dynamique rapide Europlexus du CEA.

Dans un but de validation expérimentale des essais d'éventration de réservoirs par impacts ont également été réalisés en coopération avec l'ONERA (Organisme National d'Etudes et de Recherches Aéronautiques).

MOTS CLÉS: meshless, méthode SPH, coque, interactions fluide-structure

Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	v
Liste des tableaux	ix
Introduction	1
1 La méthode SPH	9
1.1 La méthode SPH	11
1.1.1 La principe de la méthode	11
1.1.2 Formulation SPH d'un gradient ou d'un divergent	13
1.1.3 Equations SPH	14
1.1.4 Viscosité artificielle	16
1.1.5 Longueur de lissage variable	17
1.2 La consistance de la méthode SPH	18
1.2.1 Le problème de consistance	18
1.2.2 La méthode SPH normalisée	19
1.2.3 La méthode MLSPH	21
1.3 La méthode SPH dans Europlexus	24
1.3.1 Les algorithmes existant dans Europlexus	24
1.3.2 L'implémentation d'un loi de comportement elasto-plastique	26
1.4 Traitement des problèmes de stabilité de la méthode SPH	28
1.4.1 Les problèmes de stabilité	28
1.4.2 Différentes solutions testées	32
1.4.3 La formulation SPH lagrangienne totale	35
1.4.4 Autres techniques existantes	39
1.5 Validation numérique	41
1.5.1 Cas tests élastiques	41
1.5.2 Cas tests élasto-plastiques	44
1.6 Conclusions	47

2	La méthode SPH coque	49
2.1	La formulation SPH coque	51
2.1.1	La formulation coque	51
2.1.2	Le problème de sous intégration	56
2.1.3	Viscosité artificielle pour les coques	58
2.1.4	Traitement des conditions de bords	60
2.1.5	Cas tests de validation	62
2.2	Le modèle de plasticité	68
2.2.1	Le modèle global	68
2.2.2	L'algorithme de plasticité	70
2.2.3	Exemples Numériques	71
2.3	Applications : Rupture	73
2.3.1	Critère de rupture	73
2.3.2	Exemples	74
2.3.3	Perspectives pour la rupture	75
2.4	Conclusion	76
3	La gestion du contact	79
3.1	La gestion du contact avec la méthode SPH	80
3.2	La méthode pinball	81
3.2.1	Détection du contact	81
3.2.2	Calcul des forces de contact	82
3.2.3	Gestion du rebond	86
3.3	Adaptation de la méthode pinball aux contacts SPH/SPH	86
3.3.1	Modifications des algorithmes	87
3.3.2	Calcul des normales	88
3.4	Validation numérique	89
3.4.1	Indentation d'un massif	89
3.4.2	Oscillateur acoustique 1D	91
3.4.3	Impact d'une colonne de fluide sur un massif	93
3.4.4	Impact d'une colonne de fluide sur une plaque	97
3.5	Conclusions et perspectives	101
4	Validation expérimentale	103
4.1	Le problème traité	104
4.1.1	Présentation du modèle	104
4.1.2	Taille et formes des éprouvettes	104
4.1.3	Modèle SPH	106
4.2	Dispositif expérimental	107
4.2.1	Composition de l'installation	107
4.2.2	Composition de la chaîne de mesure	109
4.2.3	Déroulement des essais	112
4.3	Corrélation essais-calculs	112

4.3.1	Validation théorique du modèle	112
4.3.2	Etude de l'essai E20A5	115
4.3.3	Etude de l'essai TFA5	118
4.4	Conclusion	122
Conclusions et perspectives		125
Annexe		127
Bibliographie		131

Table des figures

1	<i>Centrale nucléaire de Nogent</i>	1
2	<i>Incendies générés par des crashes d'avions</i>	2
3	<i>Position et capacité des réservoirs de carburant d'un Boeing 757</i>	3
4	<i>Maillage complet d'un boeing 747 (5700 éléments triangles)</i>	4
5	<i>Jet d'eau sur turbine Pelton</i>	6
1.1	<i>Voisinage d'une bille</i>	12
1.2	<i>Fonction noyau en 1D (a) et en 2D (b)</i>	14
1.3	<i>Dérivée de la fonction noyau en 1D (a) et en 2D (b)</i>	15
1.4	<i>Répartition des valeurs de Ψ a) et de Λ b)</i>	19
1.5	<i>Répartition des valeurs de Ψ a) et de Λ b)</i>	21
1.6	<i>organigramme initiale de la méthode SPH dans Europlexus</i>	25
1.7	<i>Organigramme de la méthode SPH solide elastoplastique dans europlexus</i>	29
1.8	<i>Evolution du déplacement à l'extrémité de la barre</i>	30
1.9	<i>Evolution de la vitesse de la bille perturbée : a) compression b) traction .</i>	30
1.10	<i>mode de déformation à énergie nulle (hourglass)</i>	32
1.11	<i>Essai de traction : déformée observée</i>	32
1.12	<i>Effet du filtrage 1D avec $\alpha = 0.5$</i>	33
1.13	<i>Evolution du déplacement à l'extrémité de la barre</i>	34
1.14	<i>Evolution de la flèche à l'extrémité de la barre</i>	34
1.15	<i>Flexion d'une barre</i>	37
1.16	<i>Evolution de la vitesse longitudinale de la bille perturbée</i>	37
1.17	<i>Organigramme de la méthode SPH lagrangienne totale</i>	38
1.18	<i>Position des stress points en 1D</i>	40
1.19	<i>Discrétisation fine de la barre</i>	42
1.20	<i>Schéma du problème traité</i>	42
1.21	<i>Déplacement à l'extrémité de la barre</i>	43
1.22	<i>Schéma du problème traité</i>	43
1.23	<i>Flèche à l'extrémité de la barre</i>	44
1.24	<i>Répartition de la contrainte de Von Mises</i>	44
1.25	<i>Courbe de traction utilisée</i>	45
1.26	<i>Barreau en début(a) et fin de simulation (b)</i>	46
1.27	<i>Comparaison des solutions SPH (gauche) et EF (droite)</i>	47
1.28	<i>Barre en traction et rupture (la couleur rouge identifie les zones plastiques)</i>	48

2.1	<i>Bille SPH coque</i>	51
2.2	<i>Déformée observée en SPH sans Stress Points (amplification x3)</i>	56
2.3	<i>Déformée observée avec ajouts de Stress Points (amplification x3)</i>	56
2.4	<i>Positionnement des Stress Points</i>	57
2.5	<i>Mode de déformation à energie nulle en 2D</i>	58
2.6	<i>Autre type de positionnement des stress points</i>	58
2.7	<i>Normales extérieures \vec{n}_b sur les bords</i>	61
2.8	<i>Normales extérieures \vec{n}_b sur les bords</i>	61
2.9	<i>Influence de la prise en compte de la bille centrale : Sans a) et avec b)</i>	63
2.10	<i>Déformées observées</i>	64
2.11	<i>Déformées observées</i>	65
2.12	<i>Twisted beam</i>	66
2.13	<i>Pinched cylinder : initial configuration</i>	66
2.14	<i>Pinched cylinder : deformed shape</i>	66
2.15	<i>Pinched cylinder : Load-displacement diagram</i>	67
2.16	<i>Vitesse de convergence</i>	67
2.17	<i>Discrétisation normale</i>	68
2.18	<i>Discrétisation alternative</i>	68
2.19	<i>Evolution de la flèche à l'extrémité de la lamelle</i>	72
2.20	<i>Comparaison des déformées obtenues</i>	72
2.21	<i>Comparaison des déformées résiduelles obtenues (a) SPH et b) FEM)</i>	73
2.22	<i>Evolution de la vitesse du projectile</i>	73
2.23	<i>Rupture de la plaque fissurée : b) 800 billes b) 3200 billes d) 12800 billes</i>	75
2.24	<i>Perforation d'une plaque</i>	76
2.25	<i>Perforation d'une plaque</i>	77
3.1	<i>Impact d'une colonne fluide (rouge) sur un massif (bleu)</i>	81
3.2	<i>exemple de génération des pinballs pour deux corps EF</i>	82
3.3	<i>exemple de génération de pinballs avec leurs normales associées</i>	84
3.4	<i>Différentes grandeurs intervenant dans le contact</i>	84
3.5	<i>Calcul des normales dans le cas d'une coque</i>	88
3.6	<i>Calcul des normales dans le cas d'une poutre en grandes déformations</i>	89
3.7	<i>a) Massif SPH + indenteur b) déformée finale</i>	90
3.8	<i>Evolution de la force F en fonction du temps</i>	90
3.9	<i>Problème du piston (gauche) et problème traité (droite)</i>	91
3.10	<i>Détermination graphique de la solution analytique</i>	92
3.11	<i>Modèle SPH utilisé</i>	93
3.12	<i>Réponse du modèle SPH (gauche) et Volumes finis / Elements finis (droite)</i>	94
3.13	<i>Consitution du modèle</i>	95
3.14	<i>Déformées observées à différents instants : t=0.2,0.4 et 0.6 msec</i>	95
3.15	<i>Energies cinétiques et de déformations</i>	96
3.16	<i>Energies cinétiques et de déformations</i>	96
3.17	<i>Déformées observées à t=800 µsec : a) cas 2 b) cas 3 c) cas 1</i>	96

3.18	<i>Déplacement vertical du massif</i>	97
3.19	<i>Evolution de la pression au bas de la colonne fluide</i>	98
3.20	<i>Déplacement vertical au centre de la plaque (cas élastique)</i>	99
3.21	<i>Déformées observées à différents instants</i>	99
3.22	<i>Déplacement vertical au centre de la plaque (cas plastique)</i>	100
3.23	<i>Energies cinétiques et de déformations</i>	100
3.24	<i>Problème de détection du contact</i>	101
4.1	<i>Dispositif expérimental</i>	105
4.2	<i>Allure des éprouvettes</i>	106
4.3	<i>Eprouvette en situation fixée au cylindre et au support</i>	106
4.4	<i>Différentes vues du modèle SPH utilisé</i>	107
4.5	<i>Courbe de traction utilisée</i>	108
4.6	<i>Vue générale du dispositif</i>	109
4.7	<i>Environnement d'essai au pied de la tour de crash</i>	110
4.8	<i>Vue du dispositif de face (gauche) et de derrière (droite)</i>	111
4.9	<i>Evolution de la force exercée sur le piston</i>	114
4.10	<i>Evolution de la force exercée sur le piston</i>	115
4.11	<i>Jet de sortie du fluide</i>	116
4.12	<i>Bulbes</i>	117
4.13	<i>Pression dans le cylindre</i>	118
4.14	<i>choc à 5 m/s</i>	119
4.15	<i>Vitesses des particules présentes dans le jet</i>	119
4.16	<i>choc à 2 m/s</i>	120
4.17	<i>Vitesses des particules présentes dans le jet</i>	120
4.18	<i>Essai TFA5</i>	121
4.19	<i>Essai TFA5</i>	122
4.20	<i>Pression dans le cylindre</i>	122

Liste des tableaux

1	Capacité en carburant de quelques avions commerciaux	3
1.1	Comparaisons des solutions SPH et EF	46
4.1	Liste des essais réalisés	113
4.2	Comparaisons des résultats de calculs à la solution théorique	114

Introduction

Contexte

La protection des citoyens et des installations a toujours constitué un axe prioritaire d'études et de recherche pour une grande société comme EDF. Cependant le développement récent des menaces terroristes a renforcé l'intérêt pour ce type de sujet. En effet aujourd'hui de nouveaux scénarios doivent être pris compte, comme par exemple le détournement d'un avion de ligne et sa chute sur un bâtiment à l'instar des événements dramatiques qui se sont déroulés à New York le 11 septembre 2001.

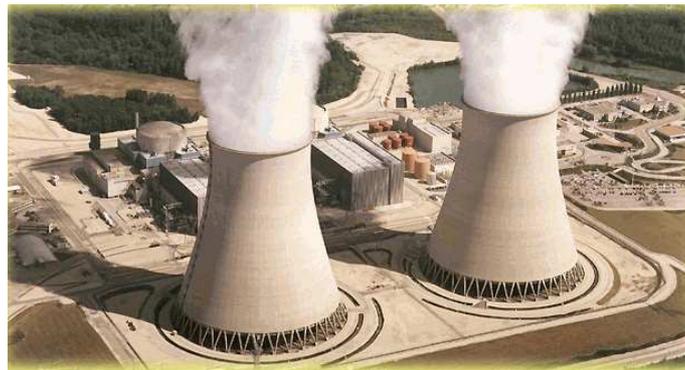


FIG. 1: *Centrale nucléaire de Nogent*

Ces attentats ont mis en lumière une spécificité très importante et souvent négligée des crashes d'avions de ligne qui est l'influence du carburant et des effets thermiques liés aux incendies générés par son embrasement. En effet à la fin des années 60 les ingénieurs et architectes en charge du projet de construction des tours du World Trade Center à New York avaient pris en compte la possibilité du crash d'un avion commercial, ayant à l'esprit l'accident survenu 20 ans plus tôt le 28 juillet 1945. Ce jour là en effet un bombardier de type B-25 avait percuté accidentellement et pour cause de mauvaise visibilité le plus haut gratte ciel de New York à l'époque l'Empire State building. Les tours du WTC étaient donc dimensionnées de manière à résister au choc généré par l'impact du plus gros appareil de l'époque le boeing 707. Elles ont d'ailleurs toutes les deux parfaitement résisté aux effets du choc. Par contre la dispersion et l'embrasement du carburant au sein de la structure métallique à l'origine de l'effondrement des bâtiments n'avaient pas été

envisagés.

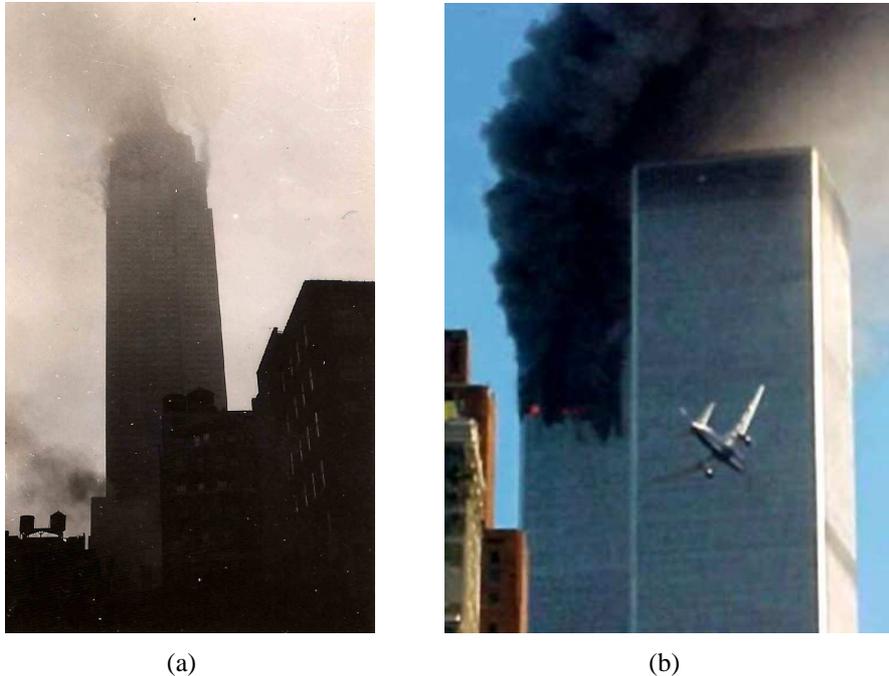


FIG. 2: *a) Empire state building en feu après l'impact d'un boeing b25 (juillet 1945) - b) Attentats du World Trade Center (septembre 2001)*

Pour mieux comprendre l'importance de ces problématiques liées au carburant on peut se référer au tableau 1. On se rend alors compte que pour la plupart des avions de ligne la masse de carburant embarquée est considérable et peut facilement représenter la moitié de la masse de l'avion au décollage soit également la moitié de son énergie cinétique. De plus comme on peut le voir sur la figure 3 cette masse n'est pas localisée, au contraire elle se trouve répartie sur toute la surface des ailes ce qui facilite grandement sa dispersion et son écoulement en cas de crash. Il est donc indispensable pour pouvoir prévoir les effets d'un crash d'avion de pouvoir simuler le comportement du carburant. Cela nécessite la modélisation de problèmes d'interactions fluide-structure très complexes faisant intervenir de nombreux phénomènes fortement non linéaires, des déchirures sur les parois du réservoir, la fuite du carburant au travers de ces déchirures ou encore la fracturation de la structure en béton armé.

Etat de l'art

Pour réaliser ce type d'étude, l'outil de modélisation le plus communément utilisé est la méthode des éléments finis. Cette méthode (que nous noterons MEF ou FEM par la suite) s'est en effet imposée depuis son apparition dans les années 50 comme un outil standard car fiable et éprouvé. Elle présente cependant un certain nombre d'inconvénients

appareil	Capacité en carburant	Masse de carburant	Part du carburant dans la masse max au décollage
Airbus A380	325000 l	260 t	48%
Boeing 747-400	216000 l	173 t	43%
Boeing 777-200 LR	202000 l	161 t	47%
Airbus A340-300	140000 l	116 t	41%
Boeing 757-200	43000 l	35 t	30%

TAB. 1: Capacité en carburant de quelques avions commerciaux

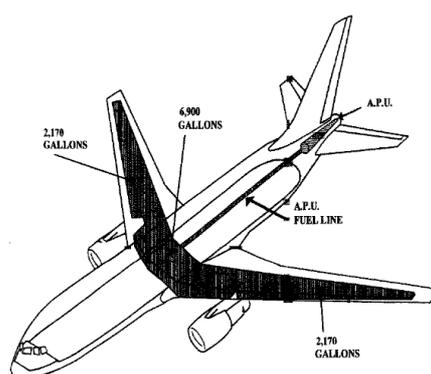


FIG. 3: Position et capacité des réservoirs de carburant d'un Boeing 757

majeurs liés à l'utilisation d'un maillage. Le premier inconvénient provient de la création même du maillage. En effet pour que le comportement de la MEF soit optimal le maillage doit satisfaire à un certain nombre de contraintes. Il doit ainsi être conforme, les éléments doivent avoir des formes raisonnables et les contours extérieurs des corps doivent être respectés. Ceci peut s'avérer parfois très fastidieux à tel point que dans des situations industrielles le maillage de géométries très complexes provenant de la CAO peut ainsi couramment représenter plus de 80% du temps nécessaire à la réalisation d'une étude.

L'utilisation d'un maillage s'avère également assez problématique dans le cas de grandes déformations dans la mesure où certains éléments peuvent se distordre très fortement. D'importantes erreurs vont alors être introduites dans le calcul. De plus dans le cadre de la dynamique rapide des schémas d'intégration en temps explicite sont utilisés, le risque est alors très grand de voir l'écrasement d'un ou plusieurs éléments faire

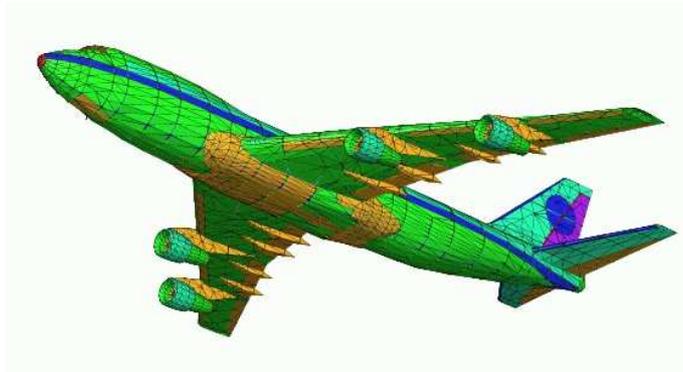


FIG. 4: *Maillage complet d'un boeing 747 (5700 éléments triangles)*

chuter le pas de temps et ainsi empêcher d'atteindre correctement la fin de la simulation. Enfin les éléments ne peuvent pas non plus se couper ce qui interdit la prise en compte de ruptures ou de détachements de matière.

La solution pour remédier à l'ensemble de ces problèmes consiste à faire évoluer le maillage au cours du calcul. Ces opérations de remaillage peuvent cependant s'avérer complexes à mettre en oeuvre et coûteuses en temps de calcul. De plus des transferts de données doivent être réalisés entre ancien et nouveau maillage ce qui peut constituer une source d'erreur supplémentaire. Les approches eulériennes constituent une autre alternative intéressante dans la mesure où elles permettent de gérer de grands écoulements de matière sans déformations de maillage. Cette aptitude les rend d'ailleurs particulièrement attrayantes dans le domaine de la mécanique des fluides. Ces méthodes restent toutefois peu applicables au cas qui nous intéresse étant donné sa nature fondamentalement lagrangienne. En effet la présence de nombreux bords et interfaces et leur constante évolution au cours de la simulation nécessitent une approche de type lagrangienne.

Pour ce qui concerne plus spécifiquement les problèmes de rupture il existe là encore différentes solutions. On peut ainsi évoquer ici les méthodes dites "d'érosion" [JOH 87] qui offrent la possibilité de représenter des décohésions de matière en éliminant du calcul les éléments trop déformés. Cette technique est cependant souvent à l'origine de pertes excessives de masse ou d'énergie et se révèle assez dépendante au maillage.

L'ensemble de ces limitations a amené naturellement de nombreux chercheurs à imaginer de nouvelles méthodes numériques n'utilisant plus de maillage. Il semble qu'historiquement la toute première tentative soit celle de Daly ([DAL 65]) qui développa au milieu des années 60 au laboratoire du Los Alamos la méthode MPEF (Méthode des Particules et des Forces) initialement dédiée à la simulation d'impacts de corps fluides puis par la suite étendue aux corps solides [JOH 89],[JOH 86].

L'apparition de la méthode SPH ou smoothed particles hydrodynamics en 1977

avec les travaux de Gingold et Monaghan [GIN 77] est cependant souvent évoquée un peu abusivement comme étant le point de départ du développement des méthodes sans maillage. Ce domaine n'a cessé depuis de se développer et regroupe aujourd'hui un grand nombre de méthodes différentes dont les principales sont :

- Methode des différences finies généralisées [LIS 84]
- Element Free Galerkin (EFG) [BEL 94]
- Reproducing Kernel Particle Method (RKPM) [LIU 95]
- Diffuse elements [NAY 92]
- Meshless finite element [IDE 03]
- Hp Clouds [DUA 95]

Pour une revue plus complète et détaillée on pourra se référer à [LI 02]

Toutes ces méthodes se différencient notamment par la nature des fonctions de forme utilisées et surtout par la manière dont sont résolues les équations de la mécanique des milieux continus. Li et Liu [LI 02] proposent ainsi un classement en deux catégories. La première catégorie rassemble l'ensemble des méthodes basées sur une formulation forte de ces équations parmi lesquelles se trouvent notamment la méthode SPH et ses variantes ou encore la méthode des différences finies généralisées .

La seconde catégorie quant à elle regroupe les méthodes utilisant une formulation faible résolue par l'intermédiaire de méthodes de Galerkin. Elle inclue notamment les méthodes RKPM, EFG ou encore Hpclouds qui utilisent une intégration spatiale de gauss à l'instar de la méthode des éléments finis. L'intégration spatiale étant alors réalisée à l'aide d'un maillage éléments finis classique de "fond". Ce dernier n'est toutefois pas soumis aux mêmes contraintes que dans le cas de la MEF et se révèle donc beaucoup plus simple à réaliser.

Les méthodes de cette deuxième catégorie se révèlent plus précises que celles de la première du fait de l'intégration de gauss et de fonctions de forme plus évoluées. Elles sont ainsi prioritairement destinées aux calculs faisant intervenir de grandes déformations ou des géométries complexes à mailler. Cependant l'utilisation d'un maillage de fond leur fait perdre une partie de leur aspect meshfree, ce qui complique la gestion de fractures et de ruptures. Pour simuler des problèmes d'impacts ou de perforations on leur préfère donc plutôt des approches totalement meshfree comme la méthode SPH et ses variantes.

La méthode SPH telle qu'elle a été proposée par Gingol et Monaghan était initialement destinée à la simulation d'expansions de nuages de gaz célestes. Son potentiel important a cependant rapidement été identifié et de nouvelles applications lui ont été trouvées rapidement. Elle a ainsi été employée avec succès pour la modélisation d'écoulements de fluides (ce qui constitue encore aujourd'hui son principal champ d'application). Son intérêt pour la modélisation de solides n'a pas non plus été ignoré en particulier pour

les problèmes d'impacts à haute vitesse et de perforation [LIB 91],[GRA 01].

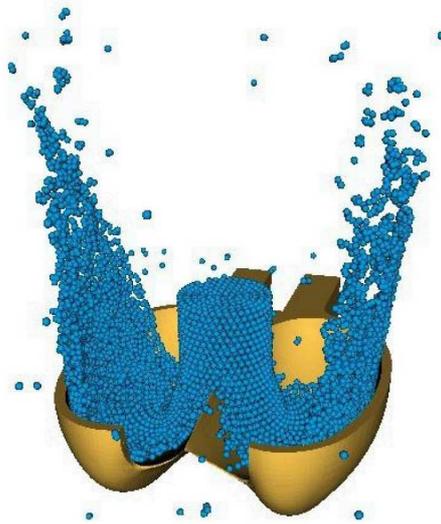


FIG. 5: *Modélisation d'un jet d'eau sur une aube de turbine pelton avec la méthode SPH*

L'utilisation de cette méthode semble donc tout à fait pertinente pour étudier l'impact d'un réservoir rempli de fluide, que ce soit pour modéliser le fluide contenu dans le réservoir ou pour étudier la déformation et la déchirure des parois. La méthode SPH a d'ailleurs déjà été employée pour simuler la perforation de plaques épaisses [MEH 06] et semble bien fonctionner pour des perforations localisées. Cependant les parois du réservoir sont des structures très fines et dans ce cas l'approche SPH volumique 3D peut se révéler peu appropriée. En effet la taille des particules doit être suffisamment petite pour pouvoir en positionner un certain nombre dans l'épaisseur de la coque ce qui implique d'utiliser un très grand nombre de particules pour modéliser l'ensemble du réservoir. Cela se traduit par des coûts de calculs prohibitifs.

La capacité à pouvoir modéliser ce type de structures à l'aide d'une seule couche de billes est donc très intéressante dans la mesure où elle permet de conserver des finesses de discrétisation raisonnables et ainsi d'assurer des temps de calcul relativement faibles. Ce constat a d'ailleurs déjà été fait par différents auteurs pour les méthodes RKPM et EFG. En effet pour pouvoir modéliser des coques en grandes déformations (mise en forme, emboutissage) ces méthodes ont été utilisées. Elles ont tout d'abord été employées de manière volumique [NOG 00],[LI 00] puis des approches purement coque ont été proposées. La méthode EFG par exemple a ainsi été couplée dans un premier temps à la théorie des coques minces de Kirchoff-Love [KRY 96],[RAB ss] puis par la suite à la théorie des coques épaisses de Mindlin Reissner avec traitement des problèmes de verrouillage en cisaillement [WAN 04],[KAN 01].

Objectifs et cadre du travail de thèse

L'objectif de ce travail de thèse consiste à développer au sein du code de calcul Europlexus, un modèle numérique adapté à la simulation de l'éventration de réservoirs sous impact. Europlexus est en effet l'outil standard utilisé par EDF pour traiter les problèmes de dynamique rapide. Il s'agit d'un code de dynamique de structures développé conjointement par le CEA saclay, EDF, Samtech, la Snecma et le JRC (Joint Research Center Ispra Italie) principalement pour l'étude des tenues mécaniques des composants de réacteurs nucléaires dans l'hypothèse de situations accidentelles. Il est cependant également utilisé pour simuler une grande variété d'impacts, la tenue de structures de génie civil soumises à des agressions diverses ou encore la modélisation de systèmes articulés ou de circuits de tuyauterie. Pour cela il possède de très nombreux modèles lui permettant d'analyser des situations extrêmement variées comme les chocs, les impacts ou encore les explosions et leurs conséquences sur les structures. Les méthodes meshless sont bien évidemment présentes puisque les méthodes MPEF et SPH sont disponibles, mais uniquement pour des corps fluides.

L'objectif fixé est donc de faire évoluer le module SPH existant de Europlexus pour pouvoir disposer d'un modèle SPH complet capable de traiter simultanément le comportement du fluide, celui des parois et de disposer de bases pour pouvoir traiter à l'avenir la fracturation de la structure en béton impactée par le réservoir. Les éléments principaux à mettre en place sont donc dans un premier temps une formulation SPH solide élastoplastique, puis une formulation SPH solide adaptée aux coques et enfin un algorithme de couplage permettant de gérer les interactions entre les différentes parties du modèle.

Plan du mémoire

La première partie de ce mémoire sera consacrée à la présentation de la méthode SPH solide volumique implémentée dans Europlexus. La formulation SPH y sera ainsi présentée ainsi que les différents problèmes posés par son utilisation et les solutions retenues à partir de la littérature pour y remédier. Le fonctionnement de l'algorithme sera également abordé en détail ainsi que les différents cas tests utilisés pour sa validation.

La deuxième partie présentera la manière avec laquelle la formulation volumique a été adaptée à la simulation des coques en utilisant la théorie des coques épaisses de Mindlin-Reissner tandis que la troisième partie abordera les algorithmes de couplage utilisés pour gérer les interactions entre corps. Enfin la dernière partie présentera quelques comparaisons entre des résultats de mesures provenant d'essais simulant la fuite d'un réservoir sous pression et les calculs associés réalisés avec le modèle SPH.

Chapitre 1

La méthode SPH

Ce premier chapitre est consacré à la présentation du formalisme SPH et de ses principaux développements. Les différents problèmes posés par cette méthode seront également abordés ainsi que les solutions retenues pour les éliminer. Enfin une description sera faite de l'algorithme SPH solide 3D tel qu'il a été implémenté dans Europlexus ainsi que les différents calculs de validation réalisés.

Sommaire

1.1	La méthode SPH	11
1.1.1	La principe de la méthode	11
1.1.2	Formulation SPH d'un gradient ou d'un divergent	13
1.1.3	Equations SPH	14
1.1.4	Viscosité artificielle	16
1.1.5	Longueur de lissage variable	17
1.2	La consistance de la méthode SPH	18
1.2.1	Le problème de consistance	18
1.2.2	La méthode SPH normalisée	19
1.2.3	La méthode MLSPH	21
1.3	La méthode SPH dans Europlexus	24
1.3.1	Les algorithmes existant dans Europlexus	24

1.3.2	L'implémentation d'un loi de comportement elasto-plastique	26
1.4	Traitement des problèmes de stabilité de la méthode SPH	28
1.4.1	Les problèmes de stabilité	28
1.4.2	Différentes solutions testées	32
1.4.3	La formulation SPH lagrangienne totale	35
1.4.4	Autres techniques existantes	39
1.5	Validation numérique	41
1.5.1	Cas tests élastiques	41
1.5.2	Cas tests élasto-plastiques	44
1.6	Conclusions	47

1.1 La méthode SPH

1.1.1 La principe de la méthode

La base mathématique de la méthode SPH repose sur le fait que la valeur d'une fonction f quelconque, définie sur un domaine Ω , en un point de coordonnées \vec{x} de Ω peut s'écrire à l'aide d'une distribution de dirac δ sous la forme :

$$f(\vec{x}) = \int_{\Omega} f(\vec{y})\delta(\vec{x} - \vec{y})d\Omega \quad (1.1)$$

Cette expression peut être approchée en remplaçant le dirac par une fonction cloche ou fonction noyau noté W . Celle-ci doit être à support compact ce qui signifie que ses valeurs doivent être non nulles à l'intérieur d'un certain domaine Ω_i qui correspond à son domaine et nulle à l'extérieur. Si on nomme h le paramètre de la fonction noyau qui définit la taille du support alors à partir de l'équation 1.1 on peut écrire :

$$f(\vec{x}) \approx \tilde{f}(\vec{x}) = \int_{\Omega} f(\vec{y})W(\vec{x} - \vec{y}, h)d\Omega \quad (1.2)$$

Il est important de noter à ce niveau que si h tend vers 0 alors la fonction noyau tend vers une distribution de dirac et on obtient donc :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{f}(\vec{x}) = f(\vec{x}) \quad (1.3)$$

Pour intégrer spatialement l'équation 1.2 on utilise numériquement l'intégration nodale. On suppose ainsi que le domaine Ω est discrétisé par un ensemble de N noeuds, et à chaque noeud j on associe une portion de Ω qui est en fait un volume noté V_j . On obtient alors les résultats suivants :

$$\int_{\Omega} g(\vec{y})d\Omega \approx \sum_j^N g(\vec{y}_j)V_j \text{ avec } \Omega = \sum_j^N V_j \quad (1.4)$$

Cela permet d'obtenir une expression discrète de l'équation 1.2 :

$$f(\vec{x}_i) \approx \sum_j^N W(\vec{x}_i - \vec{x}_j, h)V_j \quad (1.5)$$

En notant $W(\vec{x}_i - \vec{x}_j, h)V_j = N_j$ on obtient une équation tout à fait semblable à l'interpolation classique en éléments finis.

$$f(\vec{x}_i) \approx \sum_j^N f(\vec{x}_j)N_j \quad (1.6)$$

La différence principale résidant ici dans le fait que l'interpolation fait intervenir la totalité des noeuds de la discrétisation contrairement à l'interpolation EF où seuls les noeuds de l'élément interviennent. Dans la pratique cependant la fonction noyau étant à support compact on peut réduire la sommation de l'équation 1.5 aux seuls N_v noeuds

présents à l'intérieur du support et pour lesquels W est non nul. L'ensemble de ces noeuds forme ainsi ce qu'on appellera par la suite le voisinage de la particule i . L'équation 1.5 s'écrit alors :

$$f(\vec{x}_i) \approx \sum_j^{N_v} f(\vec{x}_j) W(\vec{x}_i - \vec{x}_j, h) V_j \quad (1.7)$$

NB : par la suite afin d'alléger les équations on remplacera $W(\vec{x}_i - \vec{x}_j, h)$ par W_{ij}

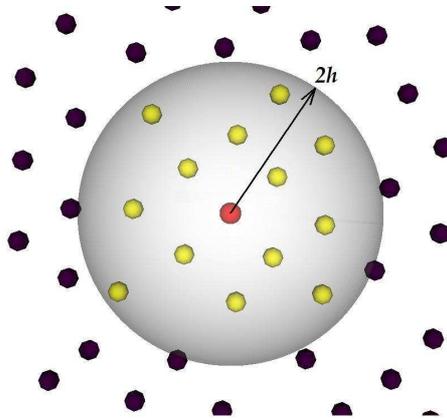


FIG. 1.1: Voisinage d'une bille

Les fonctions de forme SPH sont donc directement construites à partir de la fonction noyau, le choix de cette dernière est par conséquent particulièrement important. En théorie toute fonction $W(\vec{x})$ ayant les propriétés suivantes peut être utilisée comme fonction noyau :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{condition de partition de l'unité : } \int_{\Omega} W(\vec{x} - \vec{y}, h) d\Omega = 1 \\ \text{support compact : } W(\vec{x} - \vec{y}, h) \neq 0 \text{ dans } \Omega_i \text{ et nul ailleurs} \\ \text{monotonie : } W(\vec{x} - \vec{y}, h) \text{ doit décroître de manière monotone} \\ \lim_{h \rightarrow 0} W(\vec{x} - \vec{y}, h) = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \end{array} \right. \quad (1.8)$$

De nombreuses fonctions ont ainsi été proposées et testées de type spline, gaussienne ou exponentielles (se référer à [FUL 96] pour une analyse complète des performances de divers noyau SPH). Celle qui est aujourd'hui assez communément admise comme l'une des plus performantes est une fonction spline appelée W3 ou B3 et définie par :

$$W_{ij} = C \begin{cases} \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3} - (r_{ij}/h)^2 + \frac{1}{2} (r_{ij}/h)^3 \right) & \text{si } 0 \leq r_{ij}/h \leq 1 \\ \frac{1}{4} (2 - r_{ij}/h)^3 & \text{si } 1 < r_{ij}/h < 2 \\ 0 & \text{si } r_{ij}/h \geq 2 \end{cases} \quad (1.9)$$

Dans cette expression r_{ij} correspond à la distance entre les billes i et j et C correspond à un facteur de normalisation utilisé pour assurer la condition de partition de l'unité. Les valeurs de C sont respectivement $2/3h$, $10/\pi h^3$ et $1/7\pi h^2$ selon que l'on se trouve en 1D, 2D ou 3D.

Il est important de noter que cette fonction noyau ne dépend que de la distance entre un point i et son voisin j . Le support est donc sphérique et le voisinage d'une bille est en fait composé de toutes les billes voisines pour lesquelles $r_{ij} < 2h$ comme on peut le voir sur la figure 1.1.

1.1.2 Formulation SPH d'un gradient ou d'un divergent

Le principe présenté avec l'équation 1.1 pour définir la valeur d'un champ peut tout à fait être utilisé pour définir le gradient de ce même champ. On obtient alors :

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}) = \int_{\Omega} \vec{\nabla} f(\vec{y}) W(\vec{x} - \vec{y}, h) d\Omega \quad (1.10)$$

On réalise ensuite sur cette équation une intégration par parties :

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}) = \int_{\Omega} \vec{\nabla} (f(\vec{y}) W(\vec{x} - \vec{y}, h)) d\Omega - \int_{\Omega} f(\vec{y}) \vec{\nabla} W(\vec{x} - \vec{y}, h) d\Omega \quad (1.11)$$

Le premier terme de l'équation 1.11 peut être réécrit en utilisant le théorème de la divergence :

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} (f(\vec{y}) W(\vec{x} - \vec{y}, h)) d\Omega = \int_{\partial\Omega} f(\vec{y}) W(\vec{x} - \vec{y}, h) d\Gamma \quad (1.12)$$

Si le point de coordonnées \vec{x} est suffisamment loin des bords alors l'intersection entre le bord du domaine $\partial\Omega$ et le support de la fonction noyau centrée en \vec{x} est nulle. On en déduit donc :

$$\int_{\partial\Omega} f(\vec{y}) W(\vec{x} - \vec{y}, h) d\Gamma = 0 \quad (1.13)$$

On en utilisant les équations 1.13 et 1.11 on obtient :

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}) \approx - \int_{\Omega} f(\vec{y}) \vec{\nabla} W(\vec{x} - \vec{y}, h) d\Omega \quad (1.14)$$

NB : Il faut noter que cette équation n'est exacte que loin des bords et n'est qu'une approximation pour les points se trouvant près des bords.

On déduit ensuite comme précédemment par intégration nodale l'expression discrète de l'équation 1.14 :

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}_i) \approx \sum_j^N f(\vec{x}_j) \vec{\nabla} W_{ij} V_j \quad (1.15)$$

Le gradient du noyau $\vec{\nabla} W_{ij}$ quand à lui est déterminé par :

$$\vec{\nabla} W_{ij} = \frac{\vec{x}_i - \vec{x}_j}{\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|} \frac{\partial W}{\partial r}(\vec{x}_i - \vec{x}_j, h) \quad (1.16)$$

Avec :

$$\frac{\partial W_{ij}}{\partial r} = C \begin{cases} \frac{3}{2h} \left(-2 (r_{ij}/h) + \frac{3}{2} (r_{ij}/h)^2 \right) & \text{si } 0 \leq r_{ij}/h \leq 1 \\ -\frac{3}{4h} (2 - r_{ij}/h)^2 & \text{si } 1 < r_{ij}/h < 2 \\ 0 & \text{si } r_{ij}/h \geq 2 \end{cases} \quad (1.17)$$

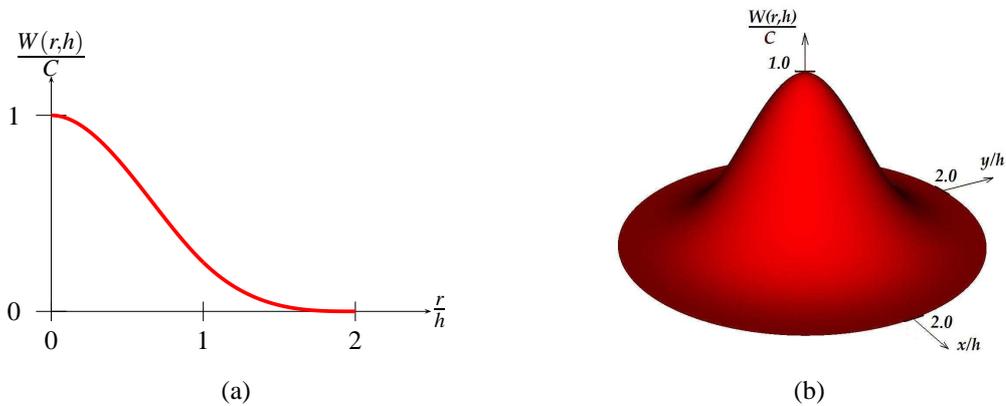


FIG. 1.2: Fonction noyau en 1D (a) et en 2D (b)

1.1.3 Equations SPH

La méthode SPH est basée sur une formulation forte des équations de la mécanique des milieux continus. La première d'entre elles est l'équation de continuité qui pour une particule i s'écrit :

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_i = -\rho_i \cdot \text{div}(\vec{v}) \quad (1.18)$$

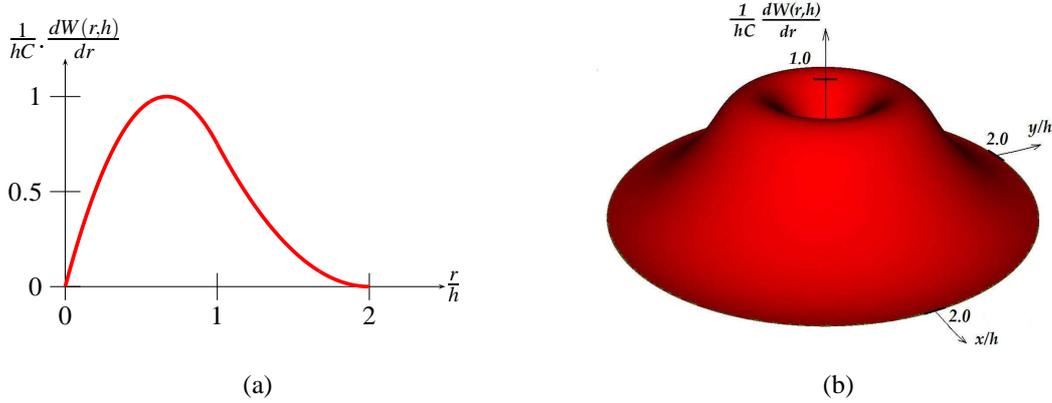


FIG. 1.3: Dérivée de la fonction noyau en 1D (a) et en 2D (b)

On en obtient une expression discrète à partir de l'équation 1.15 :

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_i = -\rho_i \cdot \sum_j V_j \vec{v}_j \cdot \vec{\nabla} W_{ij} \quad (1.19)$$

Cependant dans la littérature SPH on trouve plutôt la forme suivante :

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_i = -\rho_i \cdot \sum_j V_j (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot \vec{\nabla} W_{ij} \quad (1.20)$$

L'intérêt principale de cette expression par rapport à la précédente est d'imposer que la variation de masse volumique soit nulle pour toute particule SPH dans le cas d'un mouvement de translation de corps rigide (champ de vitesse uniforme), ce qui n'est pas garanti par l'expression 1.19. La justification théorique de la formulation 1.20 provient du résultat suivant si on applique l'équation 1.14 à une fonction k constante :

$$\vec{\nabla} k = \int_{\Omega} k \vec{\nabla} W(\vec{x} - \vec{y}, h) d\Omega = 0 \quad (1.21)$$

Ainsi en associant les équations 1.14 et 1.21 on obtient :

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}) = - \int_{\Omega} f(\vec{y}) \vec{\nabla} W(\vec{x} - \vec{y}, h) d\Omega + \int_{\Omega} f(\vec{x}) \vec{\nabla} W(\vec{x} - \vec{y}, h) d\Omega \quad (1.22)$$

$$= - \int_{\Omega} f(\vec{y}) \vec{\nabla} W(\vec{x} - \vec{y}, h) d\Omega + f(\vec{x}) \int_{\Omega} \vec{\nabla} W(\vec{x} - \vec{y}, h) d\Omega \quad (1.23)$$

$$= \int_{\Omega} (f(\vec{x}) - f(\vec{y})) \vec{\nabla} W(\vec{x} - \vec{y}, h) d\Omega \quad (1.24)$$

La seconde équation de la mécanique des milieux continus est l'équation de conservation de la quantité de mouvement qui s'écrit pour une particule i :

$$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)_i = \text{div}(\boldsymbol{\sigma})/\rho \quad (1.25)$$

Comme pour l'équation de continuité on peut la discrétiser à l'aide de l'équation :

$$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)_i = -\frac{1}{\rho_i} \sum_j (V_j \sigma_j \vec{\nabla} W_{ij}) \vec{\nabla} \phi_{ij} \quad (1.26)$$

On déduit l'expression de la force exercée par le noeud j sur le noeud i notée \vec{f}_{ji} :

$$\vec{f}_{ji} = -\frac{V_j}{\rho_i} (\sigma_j \vec{\nabla} W_{ij}) \vec{\nabla} W_{ij} \quad (1.27)$$

On se rend compte alors que l'utilisation de l'expression 1.26 ne respecte pas le principe de Newton, c'est à dire que $\vec{f}_{ij} \neq -\vec{f}_{ji}$. Cela explique pourquoi une formulation différente est utilisée en SPH [GRA 01], qui est en fait une forme symétrisée de la précédente :

$$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)_i = \sum_j m_j \left(\frac{\sigma_i}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j}{\rho_j^2}\right) \vec{\nabla} W_{ij} \quad (1.28)$$

1.1.4 Viscosité artificielle

Constatant dès le départ des problèmes d'instabilités dynamiques, Monaghan et Gingold ont incorporé dans la méthode SPH un terme dissipatif de type visqueux [GIN 83]. Celui ci joue un rôle particulièrement important dans tous les problèmes faisant intervenir des chocs. L'expression de cette viscosité provient en fait de la viscosité artificielle proposée par Neuman et Richtmyer [NEU 50]. Celle ci se définit très simplement en 1D par une pression visqueuse Π qui est calculée de la manière suivante :

$$\rho \Pi = \begin{cases} -\alpha \cdot c_s \cdot h \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \cdot h^2 \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 & \text{si } \frac{\partial v}{\partial x} \leq 0 \\ 0 & \text{si } \frac{\partial v}{\partial x} \geq 0 \end{cases} \quad (1.29)$$

Dans l'expression précédente les grandeurs α et β sont respectivement les coefficients de viscosité linéaire et quadratique, h est la taille de maille et c_s correspond à la vitesse du son dans le matériau. L'approche utilisée dans la méthode SPH consiste à associer la viscosité artificielle à chaque couple de bille i-j. On utilise ainsi en 1D l'expression approchée suivante pour déterminer $\partial v / \partial x$:

$$\mu_{ij} = \frac{v_i - v_j}{x_i - x_j} \quad (1.30)$$

En remplaçant $\partial v / \partial x$ par μ_{ij} dans l'équation 1.29 on obtient :

$$\rho_{ij} \Pi_{ij} = \begin{cases} -\alpha \cdot c_{s_{ij}} \cdot h \cdot \mu_{ij} + \beta \cdot h^2 \cdot \mu_{ij}^2 & \text{si } \mu_{ij} \leq 0 \\ 0 & \text{si } \mu_{ij} \geq 0 \end{cases} \quad \text{avec } \rho_{ij} = \frac{\rho_i + \rho_j}{2} \quad (1.31)$$

En réalité on utilise généralement pour μ_{ij} une expression un peu différente, qui permet en particulier d'éviter les problèmes de division par zéro :

$$\mu_{ij} = \frac{(v_i - v_j)(x_i - x_j)}{(x_i - x_j)^2 + \varepsilon^2} \quad (1.32)$$

NB : La valeur de ε dans europlexus est fixée à $0.1 \times h^2$

Cette formulation 1D peut être ensuite facilement étendue au 3D en calculant μ_{ij} de la manière suivante :

$$\mu_{ij} = \frac{(\vec{v}_i - \vec{v}_j)(\vec{x}_i - \vec{x}_j)}{\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|^2 + \varepsilon^2} \quad (1.33)$$

Une fois calculée la pression visqueuse Π_{ij} est ajoutée aux tenseurs des contraintes des deux billes i et j . L'équation de conservation de la quantité de mouvement 1.28 devient :

$$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)_i = \sum_j m_j \left(\frac{\sigma_i}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij}\right) \vec{\nabla} W_{ij} \quad (1.34)$$

Il est important de noter que l'influence de la viscosité artificielle peut être très importante dans certains calculs. Le choix des paramètres α et β est donc important comme l'a montré Johnson [JOH 96a]. Les valeurs communément admises sont ainsi 0.2 pour *alpha* et 4.0 pour *beta* mais ces valeurs peuvent changer fortement avec le matériau utilisé. Ainsi par exemple dans Europlexus les valeurs conseillées pour l'eau sont :

$$\begin{cases} 0.8 \leq \alpha \leq 1.5 \\ 1 \leq \beta \leq 3 \end{cases} \quad (1.35)$$

1.1.5 Longueur de lissage variable

Comme nous l'avons déjà évoqué, l'expression de la fonction noyau dépend de la longueur de lissage h . Dans le cas d'un gradient ou d'un divergent, comme on peut le voir figure 1.3(a) la dérivée de la fonction noyau diminue avec r/h si ce rapport devient inférieur à 0.7. Pratiquement, cela signifie que deux particules se rapprochant trop, voient leurs interactions diminuer, ce qui n'est pas physique et peut conduire à des erreurs importantes. Il est donc important de s'assurer que r/h soit toujours supérieur à 0.7. Il faut également s'assurer dans le cas de grandes déformations que le noyau reste toujours assez grand pour pouvoir contenir un nombre suffisant de voisins.

Pour respecter ces diverses conditions, il est nécessaire de faire évoluer h au cours du calcul. On définit ainsi une valeur h_{ij} de h pour chaque couple de particules et qui est donnée par la formule :

$$h_{ij} = \varphi \frac{d_i + d_j}{2} \quad (1.36)$$

Dans cette expression d_i et d_j sont les diamètres respectifs des billes i et j et φ est la longueur de lissage adimensionnée ou DSD (Dimensionless Smoothing Distance). Ce paramètre permet de faire varier la taille du noyau. En le faisant augmenter on augmente la taille du support du noyau c'est-à-dire qu'on augmente la zone d'influence de chaque bille. Dans Europlexus pour un fluide φ est fixé à 0.8 mais cette valeur peut évoluer en respectant cependant le critère suivant :

$$0.8 \leq \varphi \leq 1.5 \quad (1.37)$$

NB : On remplacera par la suite dans toutes les équations précédentes $W_{ij} = W(\vec{x} - \vec{y}, h)$ par $W_{ij} = W(\vec{x} - \vec{y}, h_{ij})$

Enfin la variation du rayon des billes d_i et d_j est déterminée à chaque pas de temps à l'aide de la variation de la masse volumique fournie par l'équation de continuité 1.20. En effet la masse m_i de chaque bille étant constante au cours du calcul, on en déduit :

$$m_i = \text{constante} = \rho_i \cdot V_i = \rho_i \cdot d_i^3 \quad (1.38)$$

$$\left(\frac{\partial d}{\partial t} \right)_i = -\frac{1}{3} \cdot \frac{d_i}{\rho_i} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_i \quad (1.39)$$

1.2 La consistance de la méthode SPH

1.2.1 Le problème de consistance

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent il est possible avec la méthode SPH d'interpoler un champ à l'aide de la formule 1.7 ou de calculer son gradient en utilisant l'équation 1.15. On peut montrer aisément que ces deux expressions sont en fait d'assez mauvaises approximations qui ne respectent pas les conditions de consistance.

On parle ici de consistance à l'ordre n pour caractériser la capacité d'une interpolation à représenter exactement un polynôme d'ordre inférieur ou égal à n . Les expressions 1.7 et 1.15 ne sont ainsi pas consistantes à l'ordre zéro, ce qui signifie pour un champ f constant :

$$\begin{cases} \tilde{f}(\vec{x}_i) = \sum_j^{N_v} f \cdot W(\vec{x}_i - \vec{x}_j, h) V_j \neq f \\ \nabla \tilde{f}(\vec{x}_i) = \sum_j^{N_v} f \vec{\nabla} W_{ij} V_j \neq 0 \end{cases} \quad (1.40)$$

On peut réaliser exactement le même constat pour la consistance à l'ordre 1, c'est à dire avec un champ f tri linéaire dans l'espace :

$$\begin{cases} \tilde{f}(\vec{x}_i) = \sum_j^{N_v} f(\vec{x}_j) \cdot W(\vec{x}_i - \vec{x}_j, h) V_j \neq f(\vec{x}_i) \\ \nabla \tilde{f}(\vec{x}_i) = \sum_j^{N_v} f(\vec{x}_j) \vec{\nabla} W_{ij} V_j \neq 1 \end{cases} \quad (1.41)$$

La qualité de ces approximations est d'autant plus mauvaise que les billes où elles sont réalisées manquent de voisins. Ainsi les problèmes de consistance se révèlent surtout sur les bords. On peut mettre cela facilement en évidence en réalisant sur chaque bille d'un cube le calcul des deux grandeurs suivantes :

$$\begin{cases} \Psi_i = \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) / \Psi_{exact} \text{ avec } \Psi_{exact} = 3 \\ \Lambda_i = \left(\frac{\partial x^2}{\partial x} + \frac{\partial y^2}{\partial y} + \frac{\partial z^2}{\partial z} \right) / \Lambda_{exact} \text{ avec } \Lambda_{exact} = 2(x_i + y_i + z_i) \end{cases} \quad (1.42)$$

Comme on peut le voir sur les figure 1.4(a) et 1.4(b) les valeurs respectives de Ψ et Λ sont proches de 1 donc correctes uniquement au centre du cube et se détériorent très fortement en s'approchant des bords. Ainsi par exemple pour les billes se trouvant aux sommets du cube et qui ne disposent que de 1/8 de leur voisinage les valeurs de Ψ et Λ valent respectivement 0.226 et 0.209 ce qui représente près de 80% d'erreur ! Ceci explique le comportement assez médiocre observé en général avec la méthode SPH sur les bords.

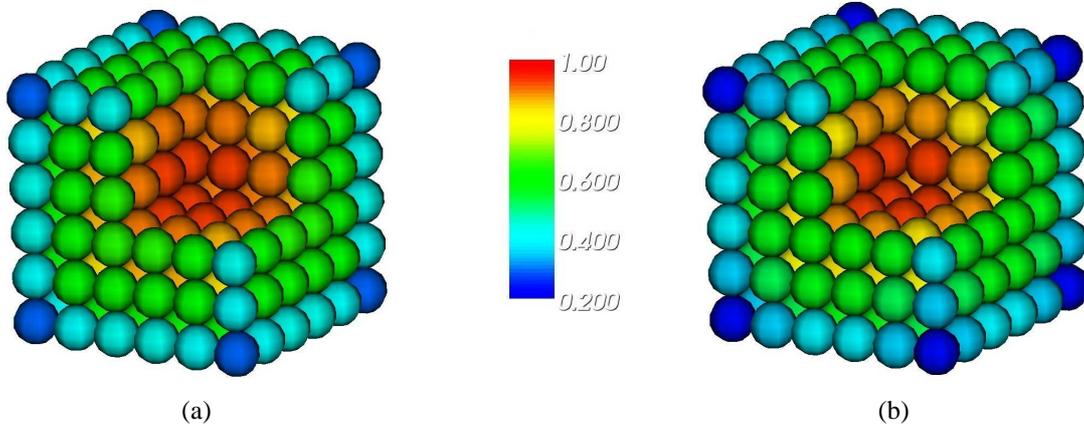


FIG. 1.4: Répartition des valeurs de Ψ a) et de Λ b)

1.2.2 La méthode SPH normalisée

Les problèmes de consistance affectent notablement la précision de la méthode comme nous l'avons vu au paragraphe précédent. Il a également été montré par Belytschko [BEL 05] que le non respect de la condition de consistance à l'ordre 1 empêche la convergence en maillage de la méthode si la taille du noyau diminue avec la taille

des billes. En effet la méthode SPH ne converge que si la taille du noyau est maintenue constante lorsque la discrétisation est affinée.

Partant de ces constats de nombreux développements ont été proposés par la communauté SPH afin de rendre la méthode consistante. La première tentative est celle de Monaghan et Gingold [GRA 01] avec le concept de symétrisation déjà évoqué et utilisé pour établir l'équation 1.20. Cette forme est consistante à l'ordre 0 étant donné que le gradient d'un champ constant est désormais rigoureusement nul.

Par la suite Johnson et Beissel [JOH 96b] on introduit une correction supplémentaire à l'expression précédente permettant d'assurer la consistance à l'ordre 1. Cette technique nommée normalisation introduit dans le calcul de la dérivée d'un champ en 1D un coefficient correctif λ défini par :

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_i = -\lambda \sum_j V_j (f(\vec{x}_i) - f(\vec{x}_j)) \frac{dW_{ij}}{dx} \quad (1.43)$$

Le coefficient λ est ensuite déterminé de manière à assurer l'exactitude du calcul de la dérivée dans le cas d'un champ linéaire $f = k.x$. On obtient alors :

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_i = k = -\lambda \sum_j V_j (k\vec{x}_i - k\vec{x}_j) \frac{dW_{ij}}{dx} \quad (1.44)$$

On en déduit l'expression de λ :

$$\lambda = \frac{1}{\sum_j V_j (\vec{x}_i - \vec{x}_j) W_{ij,x}} \quad (1.45)$$

Dans cet expression comme dans le reste de ce mémoire on utilise la notation n_x pour remplacer dn/dx .

Le calcul de la dérivée s'écrit alors :

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_i = \frac{\sum_j V_j (f(\vec{x}_i) - f(\vec{x}_j)) W_{ij,x}}{\sum_j V_j (\vec{x}_i - \vec{x}_j) W_{ij,x}} \quad (1.46)$$

Cette technique a ensuite été étendu aux calculs de gradient en 3D par Randles et Libersky [RAN 96] qui ont en fait remplacé le coefficient λ par une matrice de correction \mathbf{B} définie par :

$$\mathbf{B} = \mathbf{H}^{-1} \text{ avec } H_{\alpha\beta} = \sum_j V_j (x_i^\alpha - x_j^\alpha) W_{ij,x}^\beta \quad (1.47)$$

L'expression du calcul de gradient s'écrit ainsi :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \mathbf{B} \cdot \sum_j V_j (f(\vec{x}_i) - f(\vec{x}_j)) \vec{\nabla} W_{ij} \quad (1.48)$$

Si on utilise cette formulation normalisée pour réaliser à nouveau le calcul des grandeurs Ψ et Λ on obtient les résultats des figures 1.5(a) et 1.5(b). En les comparant

aux résultats des figures 1.4(a) et 1.4(b) on voit très clairement le gain apporté par cette technique. On remarque en particulier que le calcul de Ψ est exact pour chaque bille, ce qui était attendu (vu que les champs à dériver sont linéaires) et que l'erreur maxi observée sur le calcul de Λ n'est plus que de 17%.

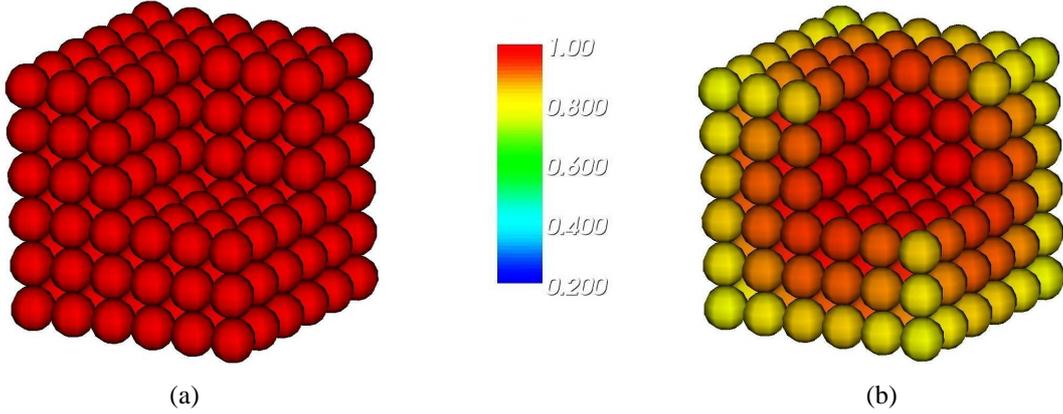


FIG. 1.5: Répartition des valeurs de Ψ a) et de Λ b)

En utilisant cette formulation Randles et Libersky ont ensuite proposé une nouvelle écriture des équations de conservation :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_i = -\rho_i \mathbf{B} \sum_j V_j (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \vec{\nabla} W_{ij} \\ \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_i = \sum_j m_j \mathbf{B} (\boldsymbol{\sigma}_i - \boldsymbol{\sigma}_j + \Pi_{ij}) \vec{\nabla} W_{ij} \end{cases} \quad (1.49)$$

On peut mentionner ici qu'il existe encore d'autres techniques très similaires, comme la Krongauz Belytschko method (KBM method) proposée par Rabczuk et Belytschko [BEL 00] ou la méthode GPA [JOH 02].

1.2.3 La méthode MLSPH

Une autre approche permettant de rendre la méthode SPH consistante est l'utilisation de fonctions de forme de type MLS. La particularité de cette technique est d'offrir la possibilité de réaliser des approximations consistantes à n'importe quelle ordre en intégrant les conditions de consistance directement dans la création des fonctions d'interpolation.

L'approximation d'un champ s'écrit ainsi sur chaque bille i sous la forme d'une décomposition sur une base polynomiale :

$$\tilde{U}(\vec{x}) = \sum_k^m p_k(\vec{x}_i) a_k(\vec{x}) = \vec{p}^T(\vec{x}) \vec{a}(\vec{x}) \quad (1.50)$$

Ici m est le nombre de monômes $p_i(\vec{x})$ constituant la base polynomiale utilisée auxquels on associe des coefficients notés $a_i(\vec{x})$. La détermination des coefficients se fait par minimisation d'un résidu. Ce résidu noté J s'exprime de la manière suivante :

$$J = \sum_i^N w(\vec{x} - \vec{x}_i) (\tilde{U}(\vec{x}_i) - U(\vec{x}_i))^2 \quad (1.51)$$

$$= \sum_i^N w(\vec{x} - \vec{x}_i) \left[\sum_k^m p_k(\vec{x}_i) a_k(\vec{x}) - U(\vec{x}_i) \right]^2 \quad (1.52)$$

Ce qui peut être réécrit sous la forme :

$$J = (\mathbf{P}\vec{a} - \vec{U})^T \mathbf{W}(\vec{x}) (\mathbf{P}\vec{a} - \vec{U}) \quad (1.53)$$

avec :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1(\vec{x}_1) & p_2(\vec{x}_1) & \dots & p_m(\vec{x}_1) \\ p_1(\vec{x}_2) & p_2(\vec{x}_2) & \dots & p_m(\vec{x}_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1(\vec{x}_n) & p_2(\vec{x}_n) & \dots & p_m(\vec{x}_n) \end{bmatrix} \quad (1.54)$$

et :

$$\mathbf{W}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} w(\vec{x} - \vec{x}_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w(\vec{x} - \vec{x}_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & w(\vec{x} - \vec{x}_n) \end{bmatrix} \quad (1.55)$$

Les coefficients sont ensuite calculés à l'aide des extremums de J :

$$\frac{\partial J}{\partial \vec{a}} = \mathbf{P}^T \mathbf{W}(\vec{x}) \mathbf{P} \cdot \vec{a}(\vec{x}) - \mathbf{P}^T \mathbf{W}(\vec{x}) \vec{U} = 0 \quad (1.56)$$

$$= \mathbf{A}(\vec{x}) \vec{a}(\vec{x}) - \mathbf{G}(\vec{x}) \vec{U} = 0 \quad (1.57)$$

Avec \mathbf{A} (nommée matrice de moments) et \mathbf{G} définis par :

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{W}(\vec{x}) \mathbf{P} \quad (1.58)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{P}^T \mathbf{W}(\vec{x}) \quad (1.59)$$

On en déduit l'expression des coefficients :

$$\vec{a}(\vec{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\vec{x}) \mathbf{G}(\vec{x}) \cdot \vec{U} \quad (1.60)$$

Il vient alors :

$$\tilde{U}(\vec{x}) = \vec{p}^T(\vec{x}) \cdot \mathbf{A}^{-1}(\vec{x}) \mathbf{G}(\vec{x}) \cdot \vec{U} \quad (1.61)$$

Ce qui peut être écrit sous une forme plus conventionnelle :

$$\tilde{U}(\vec{x}) = \vec{\Phi}_j^T \cdot \vec{U} = \sum_j^{N_v} \Phi_j \cdot U(\vec{x}_j) \quad (1.62)$$

Avec :

$$\vec{\Phi}^T = \langle \Phi_1 \ \Phi_2 \ \dots \ \Phi_n \rangle = \vec{p}^T(\vec{x}) \cdot \mathbf{A}^{-1}(\vec{x}) \mathbf{G}(\vec{x}) \quad (1.63)$$

On peut montrer aisément que l'interpolation réalisée dans l'équation 1.62 est capable de reproduire exactement toutes les fonctions présentes dans sa base. Pour obtenir une approximation MLS consistante à l'ordre n il suffit donc d'utiliser une base polynomiale complète d'ordre n. Ainsi par exemple en 3D pour assurer des consistances à l'ordre 0,1 et 2 il faut utiliser respectivement les bases suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ordre 0 : } \vec{p}^T(\vec{x}) = \langle 1 \rangle \\ \text{ordre 1 : } \vec{p}^T(\vec{x}) = \langle 1 \ x \ y \ z \rangle \\ \text{ordre 2 : } \vec{p}^T(\vec{x}) = \langle 1 \ x \ y \ z \ xy \ xz \ yz \ x^2 \ y^2 \ z^2 \rangle \end{array} \right. \quad (1.64)$$

NB : Dans le cas de l'ordre 0 (k=0) les fonctions d'interpolations portent le nom de fonctions de Shepard et sont définies par :

$$(\vec{\Phi}_i^k)^T = \frac{W(\vec{x} - \vec{x}_i)}{\sum_j^{N_v} W(\vec{x} - \vec{x}_j)} \quad (1.65)$$

L'évaluation de la dérivée d'un champ se fait ensuite à l'aide de la formule :

$$\tilde{U}(\vec{x})_{,x_k} = \sum_j^{N_v} \Phi_{j,x_k} \cdot U(\vec{x}_j) \quad (1.66)$$

La dérivée des fonctions de forme est réalisée de la manière suivante :

$$\vec{\Phi}_{,x_k}^T = \langle \Phi_{1,x_k} \ \Phi_{2,x_k} \ \dots \ \Phi_{n,x_k} \rangle \quad (1.67)$$

$$= (\vec{p}^T(\vec{x}) \cdot \mathbf{A}^{-1}(\vec{x}) \mathbf{G}(\vec{x}))_{,x_k} \quad (1.68)$$

$$= \vec{p}^T(\vec{x})_{,x_k} \cdot \mathbf{A}^{-1}(\vec{x}) \cdot \mathbf{G}(\vec{x}) + \vec{p}^T(\vec{x}) \cdot \mathbf{A}^{-1}(\vec{x})_{,x_k} \cdot \mathbf{G}(\vec{x}) \quad (1.69)$$

$$+ \vec{p}^T(\vec{x}) \cdot \mathbf{A}^{-1}(\vec{x}) \cdot \mathbf{G}(\vec{x})_{,x_k} \quad (1.70)$$

Cette expression de la dérivée des fonctions de forme est souvent simplifiée en n'gardant que le premier terme. On parle alors de dérivée diffuse qui s'écrit :

$$\vec{\Phi}_{,x_k}^T = \vec{p}^T(\vec{x})_{,x_k} \cdot \mathbf{A}^{-1}(\vec{x}) \cdot \mathbf{G}(\vec{x}) \quad (1.71)$$

On peut ensuite utiliser l'équation 1.66 pour discrétiser les équations de conservation qui s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_i = -\rho_i \cdot \sum_j^{N_v} V_j (\vec{v}_j) \vec{\nabla} \Phi_j \\ \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_i = -\sum_j^{N_v} m_j (\sigma_j + \Pi_{ij}) \vec{\nabla} \Phi_j \end{cases} \quad (1.72)$$

Cette nouvelle version de la méthode SPH a initialement été proposée par Dilts ([DIL 99],[DIL 00]) qui l'a baptisée méthode MLSPH.

1.3 La méthode SPH dans Europlexus

1.3.1 Les algorithmes existant dans Europlexus

La méthode SPH a été très tôt implémentée dans le code de calcul Plexus principalement pour modéliser des impacts de corps fluide sur des structures. Les algorithmes déjà existant permettent ainsi la modélisation de fluides. Ils sont basés sur la formulation SPH classique de Monaghan non normalisée, c'est à dire que les équations de conservation prennent les formes classiques 1.20 et 1.34. Les contraintes pour leur part sont calculées à l'aide d'une loi de comportement fluide. Cela signifie que le tenseur de contraintes σ peut être écrit sous la forme :

$$\sigma = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} \quad (1.73)$$

Le tenseur des contraintes est ainsi composé d'une partie sphérique associée à la pression dans le fluide p et d'une partie déviatorique qui fait intervenir la viscosité dynamique du fluide μ et le tenseur des taux de déformations \mathbf{D} .

La pression dans le fluide est déterminée à chaque pas de temps à l'aide de l'équation de continuité 1.20. En effet cette équation permet de déterminer l'incrément de masse volumique $\delta\rho$, qui permet ensuite de calculer l'incrément de pression à l'aide d'une loi de comportement en pression de type fluide acoustique définie par :

$$\delta p = \delta\rho \cdot C^2 \text{ avec } C \text{ vitesse du son dans le fluide} \quad (1.74)$$

NB : Cette expression n'est cependant valable que si les effets de compressibilité restent faibles, ce qui est le cas le plus souvent pour l'eau lorsque les vitesses d'impact restent faibles par rapport à la vitesse du son dans l'eau.

Pour ce qui concerne la partie déviatorique, \mathbf{D} est déterminé en utilisant le même formalisme que celui employé pour le calcul du gradient des vitesses dans l'équation de continuité 1.20 :

$$\mathbf{D} = -\rho_i \cdot \sum_j V_j (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \vec{\nabla} W_{ij} \quad (1.75)$$

Le fonctionnement du module SPH d'Europlexus peut être résumé à l'aide de l'organigramme présenté figure 1.6.

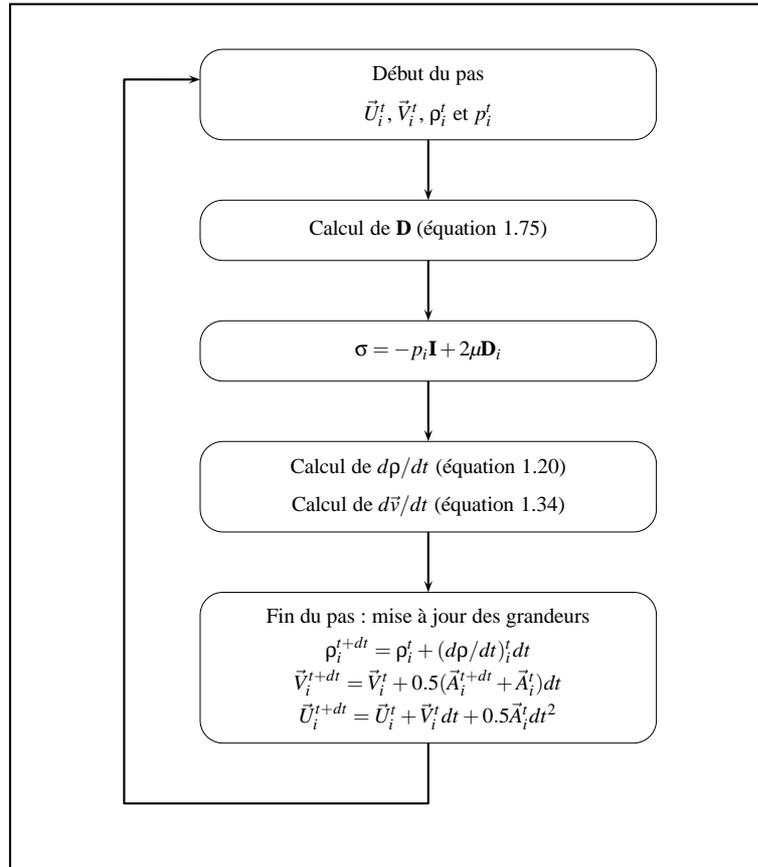


FIG. 1.6: organigramme initiale de la méthode SPH dans Europlexus

Le pas de temps est déterminé à l'aide de la formule de Lattanzio :

$$\delta t = 0.3 \frac{h}{\sqrt{C^2 + V_{max}^2}} \quad (1.76)$$

Dans cette expression c est la vitesse de l'onde de compression et V_{max} est la plus grande vitesse observée sur les particules.

D'autres lois de comportement sont également disponibles. Ainsi il existe un deuxième matériau fluide, la gélatine poreuse utilisée pour représenter le corps de volatiles lors de la modélisation d'ingestions d'oiseaux dans un réacteur d'avion. (Pour plus de détails concernant ce matériau se référer à la thèse d'Antoine Letellier [LET 96]). Une loi de comportement de type solide élastique a également été implémentée dans Europlexus dans le cadre de cas mêmes travaux. Dans ce cas l'expression du tenseur des contraintes est identique à 1.77 mais fait cette fois intervenir une la loi de Hooke :

$$\boldsymbol{\sigma} = -\lambda.\text{trac}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.77)$$

Dans cette équation λ et μ correspondent aux coefficients de Lamé tandis que \mathbf{E} est le tenseur des déformations qui est déterminé de la même manière que le calcul du tenseur des taux de déformations précédemment :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \rho_i \cdot \sum_j V_j (\vec{u}_i - \vec{u}_j) \vec{\nabla} W_{ij} \quad (1.78)$$

1.3.2 L'implémentation d'un loi de comportement elasto-plastique

Le développement d'une formulation SPH solide élasto-plastique sous Europlexus, qui a été l'une des premières tâches à accomplir dans le cadre de ce travail de thèse, s'est donc fait en se basant sur les algorithmes existants que nous venons de présenter. Cependant l'étude bibliographique d'une part et les premiers résultats de calcul obtenus d'autre part ont conduit à réaliser un certain nombre de modifications.

La première de ces modifications concerne le formalisme SPH employé. En effet pour pouvoir s'affranchir des problèmes de consistance précédemment évoqués le choix a été fait d'utiliser une formulation normalisée. Le calcul du tenseur des déformations, qui a été corrigé en utilisant la technique de normalisation de Randles et Libersky, s'écrit à présent :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\mathbf{B} \cdot \rho_i \cdot \sum_j V_j (\vec{u}_i - \vec{u}_j) \vec{\nabla} W_{ij} \quad (1.79)$$

De même l'équation de continuité de Randles et libersky 1.49 est employée en lieu et place de la forme standard 1.20. L'équation de conservation de la quantité de mouvement par contre a été conservée sous sa forme classique 1.34. Ce choix s'explique par le fait que cette expression offre l'avantage dans le cas d'un solide de respecter naturellement les conditions de bord libres. En effet les billes de bord ne disposent que d'une fraction de leur voisinage. Tous les voisins manquants se comportent en fait comme des voisins portant une contrainte nulle. Tout ce passe ainsi comme si le vide était modélisé par un ensemble de billes portant chacune une contrainte nulle. Dans ces conditions on peut alors montrer le résultat suivant sur les bords :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} \cong \vec{0} \quad \text{avec } \vec{n} \text{ normale extérieure au volume} \quad (1.80)$$

Aucun traitement des conditions de bords libre n'est ainsi nécessaire. A l'inverse avec la formule 1.49 le résultat 1.80 n'est plus valable étant donné que les fonctions de forme sont corrigées justement pour compenser l'absence des voisins manquants. Dans ce cas pour pouvoir respecter les conditions de bord libre un traitement explicite des bords doit être réalisé qui peut s'avérer coûteux et complexe.

L'autre modification importante apportée aux algorithmes d'Europlexus, pour pouvoir traiter l'elasto-plasticité a consisté à utiliser une formulation incrémentale. Ainsi désormais on calcule à chaque pas de temps l'incrément de déformations :

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = -\mathbf{B} \cdot \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (\vec{\delta}u_i - \vec{\delta}u_j) \vec{\nabla}W_{ij} \quad (1.81)$$

On en déduit l'incrément de contrainte élastique $\delta\boldsymbol{\sigma}_{el}$:

$$\delta\boldsymbol{\sigma}_{el} = \lambda \cdot \text{trac}(\delta\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu\delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.82)$$

On peut alors utiliser, pour calculer la plasticité la même approche que celle qui est employée dans Europlexus pour les éléments finis. On définit ainsi le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^*$ et sa partie déviatorique $\boldsymbol{\Delta}$:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma}^t + \delta\boldsymbol{\sigma}_{el} = -p^* \mathbf{I} + \boldsymbol{\Delta} \quad (1.83)$$

Le modèle de plasticité étant de type Von-Mises, en notant $\sigma_Y(\psi)$ la limite élastique (fonction de la déformation plastique équivalente ψ), le seuil de plasticité est défini par :

$$J_2(\boldsymbol{\Delta}) = \sigma_{VM}(\boldsymbol{\Delta}) - \sigma_Y(\psi) = 0 \quad (1.84)$$

Dans le cas où le seuil de plasticité n'est pas franchi, $J_2(\boldsymbol{\Delta}) < 0$, le comportement est élastique et on écrit simplement :

$$\boldsymbol{\sigma}^{t+\delta t} = \boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma}^t + \delta\boldsymbol{\sigma}_{el} \quad (1.85)$$

Si par contre le seuil de plasticité est franchi, $J_2(\boldsymbol{\Delta}) > 0$ le comportement devient plastique et les variables internes doivent être modifiées. On détermine alors l'incrément de déformation plastique équivalente $\delta\psi$ de la manière suivante :

$$\delta\psi = \frac{\sigma_{VM} - \sigma_Y^n}{3\mu + \frac{\partial\sigma_Y}{\partial\psi}} \quad (1.86)$$

NB : La démonstration de cette formule est fournie en annexe.

Les deux grandeurs ψ et σ_Y sont ensuite mise à jour simultanément :

$$\begin{cases} \psi^{n+1} = \psi^n + \delta\psi \\ \sigma_Y^{n+1} = \sigma_Y^n + \frac{\partial\sigma_Y}{\partial\psi} \delta\psi \end{cases} \quad (1.87)$$

NB : $\frac{\partial \sigma_Y}{\partial \psi}$ est calculé à partir de la courbe de traction fournie par l'utilisateur

On utilise enfin la méthode du retour radial pour ramener la contrainte sur le seuil de plasticité. On écrit ainsi :

$$\sigma^{n+1} = -p^* \mathbf{I} + \zeta \Delta \quad \text{avec} \quad \zeta = \frac{\sigma_Y^{n+1}}{J_2(\Delta)} \quad (1.88)$$

Le fonctionnement de cet algorithme, comme le précédent peut être résumé à l'aide de l'organigramme présenté sur la figure 1.7.

1.4 Traitement des problèmes de stabilité de la méthode SPH

1.4.1 Les problèmes de stabilité

L'établissement de la formulation SPH s'est heurté également à d'importants problèmes de stabilité. Ces derniers apparaissent lors de calculs très simples comme par exemple celui d'une barre en traction. Cette barre à une section carré est en acier (module d'Young $E=2e11$ Pa, $\nu=0.3$ et $\rho=7800$ kg/m³). Un effort de traction est appliqué à l'extrémité de la barre sous la forme d'une rampe. L'évolution du déplacement longitudinal à l'extrémité de la barre, représentée sur la figure 1.8, est très éloignée de la solution analytique qui est linéaire en fonction du temps. La réponse de la barre n'est en fait correcte qu'au tout début du calcul lorsque les déformations restent petites, ensuite le comportement de la barre se dégrade très fortement et des fractures purement numériques apparaissent comme on peut le voir sur la figure 1.11.

Une autre manifestation caractéristique de l'instabilité de la méthode SPH a été observée sur la même géométrie soumise cette fois à des contraintes uniformes de traction ou de compression. On injecte ensuite une perturbation sous la forme d'une vitesse initiale (ici de 50 m/s) sur une bille située à l'extrémité de la barre. On se rend ainsi compte sur les figures 1.9(a) et 1.9(b) que les résultats obtenus sont très différents. Dans le cas de contraintes de compression la perturbation disparaît rapidement tandis qu'elle s'amplifie fortement pour des contraintes de traction.

NB : Cet exemple est très proche de celui proposé par Belytschko [BEL 00] pour illustrer les problèmes de stabilité des méthodes meshless.

L'étude bibliographique réalisée a montré que ces problèmes de stabilité ont été abondamment traités dans la littérature. Il semble que la toute première étude sur le sujet soit celle de Swegle, Wen et Hicks [SWE 94] en 1994 qui analysèrent la stabilité de la méthode SPH en 1D. Ils ont ainsi mis en évidence l'instabilité de la méthode et l'ont reliée à la présence simultanée de contraintes de traction et d'un signe négatif pour la dérivée seconde de la fonction noyau. Ce constat est d'ailleurs à l'origine du

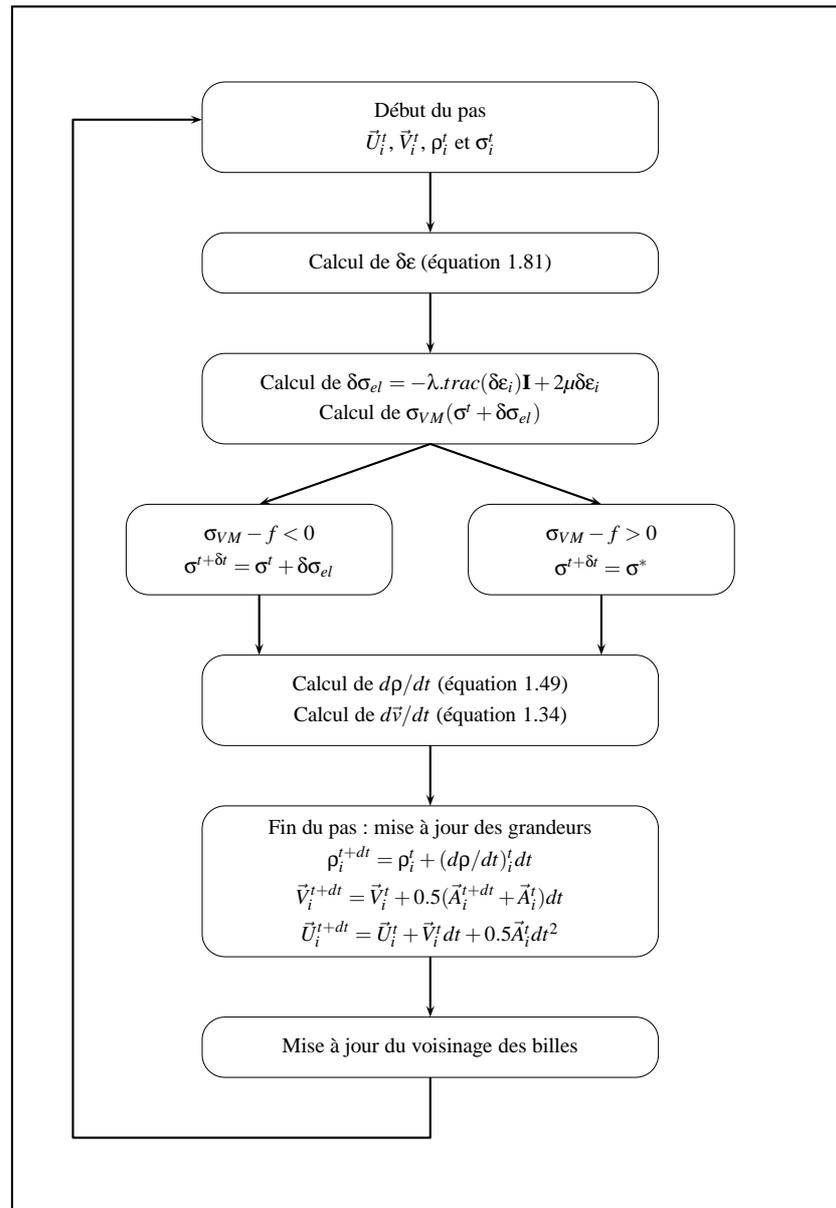


FIG. 1.7: Organigramme de la méthode SPH solide elastoplastique dans europlexus

nom de "Tensile instability" ou instabilité en tension couramment repris par les autres auteurs. Pour un résumé complet de tous les travaux existant se référer à [BEL 00]. Cette publication de Belytchko doit d'ailleurs être évoquée plus en détail car elle fournit l'une des analyses les plus approfondies et les plus abouties sur la stabilité des méthodes meshless. Elle met ainsi en évidence trois causes d'instabilité :

- instabilité des équations discrètes SPH dans le cas de contraintes de traction

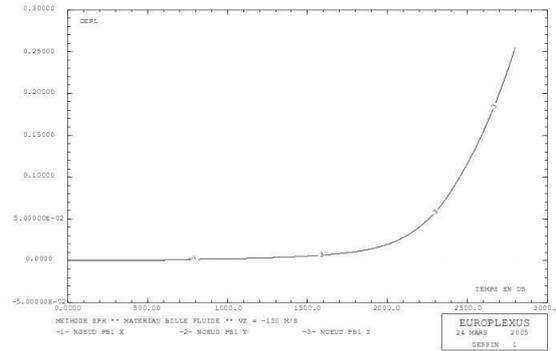


FIG. 1.8: Evolution du déplacement à l'extrémité de la barre

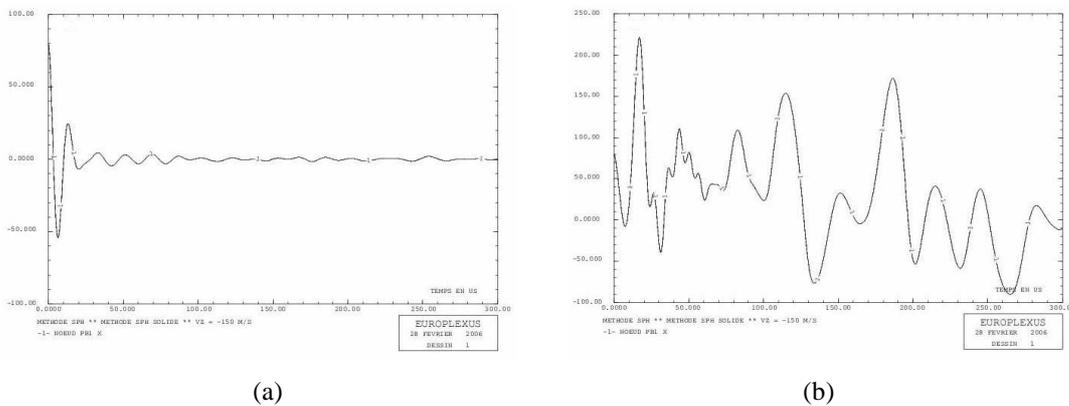


FIG. 1.9: Evolution de la vitesse de la bille perturbée : a) compression b) traction

- problèmes de sous intégration
- instabilité des équations de la mécanique des milieux continus dans le cas de fortes contraintes de compression (flambage)

La première cause d'instabilité correspond à la tensile instability décrite par Swegle, et observée sur la figure 1.9(b). La deuxième quant à elle est commune à l'ensemble des méthodes meshless utilisant une intégration nodale comme la méthode SPH. Elle est en ce sens tout à fait comparable aux problèmes de Hourglass connus avec la méthode des éléments finis. Le problème vient du fait que toutes les grandeurs cinématiques sont stockées sur une même particule. Pour mieux comprendre ces phénomènes on peut, comme l'a fait Dyka [DYK 97], utiliser l'analogie entre la méthode des différences finies en 1D et la méthode SPH 1D. Le calcul de la dérivée du champ de déplacement pour une particule i ayant pour voisins $i+1$ et $i-1$ et avec une distance h uniforme entre les particules s'écrit ainsi :

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)_i = \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} \quad (1.89)$$

De la même manière la dérivée seconde s'écrit :

$$\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_i = \frac{(dU/dx)_{i+1} - (dU/dx)_{i-1}}{2h} \quad (1.90)$$

En couplant les équations 1.89 et 1.90 on obtient :

$$\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_i = \frac{U_{i+2} + U_{i-2} - 2U_i}{4h^2} \quad (1.91)$$

Ce résultat correspond à l'expression exacte du calcul de la dérivée seconde dans le cas d'un maillage deux fois plus grossier. Si l'on suppose un matériau élastique linéaire l'accélération de la particule i peut être calculée de la manière suivante :

$$a_i = \frac{1}{\rho_i} \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)_i = \frac{E}{\rho_i} \left(\frac{d\varepsilon}{dx}\right)_i = \frac{E}{\rho_i} \left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_i \quad (1.92)$$

En reprenant le résultat de l'équation 1.91 on obtient :

$$a_i = \frac{E}{\rho_i} \left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_i = \frac{U_{i+2} + U_{i-2} - 2U_i}{4h^2} \quad (1.93)$$

Il apparaît alors très nettement que calcul de l'accélération de la particule i ne fait pas intervenir ses voisins immédiats $i+1$ et $i-1$. Cela signifie que le modèle SPH ainsi créé est constitué en fait de deux modèles indépendants constitués des billes $i-2, i, i+2$ d'une part et $i-3, i-1, i+1, i+3$ d'autre part. Cela signifie encore que des déplacements relatifs peuvent librement apparaître entre les deux séries de billes.

Le problème de hourglass peut également être vu d'une autre manière. En effet si on considère le mode de déformation caractérisé par un déplacement longitudinal valant alternativement $+1$ et -1 comme présenté sur la figure 1.10 alors on peut montrer en utilisant la formule 1.89 que les déformations calculées sur toutes les billes sont rigoureusement nulles. Ce mode de déformation ne génère donc pas de contraintes et pas d'énergie de déformations, voilà pourquoi il est souvent appelé mode à énergie nulle. Ce mode parasite va donc pouvoir librement se développer et perturber les simulations au point d'entraîner dans certains cas comme on peut le voir au bas de la figure 1.10 la création d'agglomérats de particules.

La formation de ces agglomérats rend la répartition de billes moins homogène. La totalité des déformations, lors d'un essai de traction se localise donc entre les agglomérats. En se référant à nouveau à la figure 1.10 on peut dire que la distance entre la bille i et la bille $i+1$ va avoir tendance à diminuer tandis que celle entre i et $i-1$ va fortement augmenter. L'éloignement progressif de ces billes va entraîner une baisse de l'intensité de leur interaction (due à la forme en cloche de la fonction noyau) ce qui aura pour effet à son tour d'augmenter l'éloignement. Cela schéma explique la rapidité de développement de

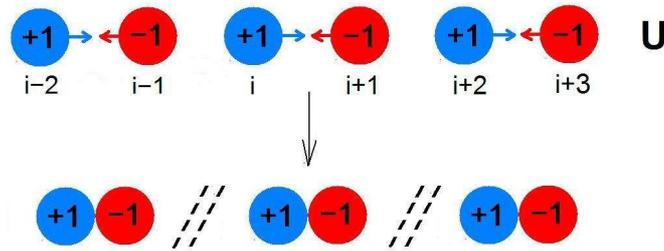


FIG. 1.10: mode de déformation à énergie nulle (hourglass)

ce mode de déformation. Les billes vont finir par s'éloigner suffisamment pour sortir de leur voisinages respectifs et donc perdent totalement leur interactions. La barre va alors se fracturer.

Tout ce raisonnement même si il est réalisé en 1D, permet très bien d'expliquer ce qui se passe sur le cas test 3D de la barre en traction. En effet sur la figure 1.11 les agglomérats et le positionnement des fractures entre les agglomérats sont clairement visibles, les différents plans de billes se comportant alors sensiblement comme des particules SPH 1D.

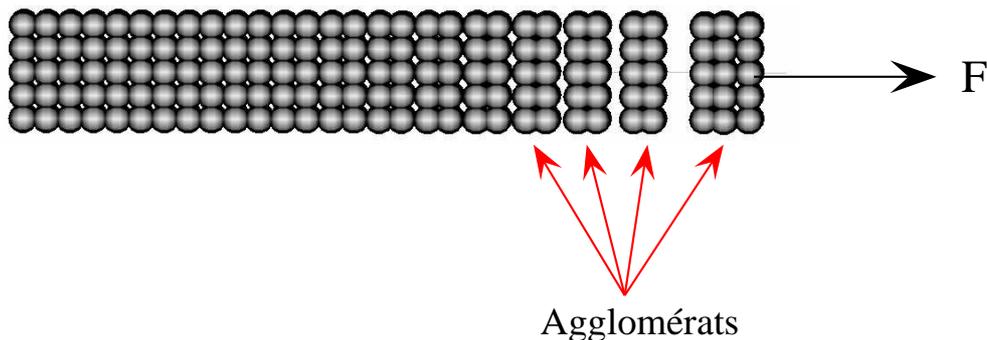


FIG. 1.11: Essai de traction : déformée observée

1.4.2 Différentes solutions testées

La littérature est également relativement riche en remèdes à ces problèmes d'instabilité. Ces différentes solutions ont été testées successivement. La première technique à avoir été codée dans Europlexus correspond aussi historiquement à la première à avoir été proposée. Elle est issue à nouveau des travaux précurseurs de Swegle, Wen et Hicks [SWE 94]. Ils ont ainsi introduit en 1D un filtre spatial nommé Conservative Smoothing dont la fonction principale est d'éliminer les oscillations de courtes longueurs d'onde (longueur d'onde inférieure ou égale à la distance entre les particules) et en particulier les modes de déformations parasites (agglomérats) issus de la sous intégration.

Ce filtre est appliqué sur les vitesses. La vitesse de chaque bille V_i est ainsi remplacée dans les équations par son équivalent filtré \widehat{V}_i défini par :

$$\widehat{V}_i = V_i + \alpha \left[\frac{V_{i+1} + V_{i-1}}{2} - V_i \right] \quad (1.94)$$

NB : α est un paramètre compris entre 0 et 0.5

L'efficacité de ce filtre sur les problèmes de sous intégration peut être facilement mise en évidence en reprenant l'exemple simple d'une barre modélisée par la méthode des différences finies 1D. Le chargement est imposé de manière à obtenir une répartition linéaire de la vitesse le long de la barre. Conformément à ce qui a été évoqué précédemment, le champ de vitesse V est sévèrement distordu (deux billes successives i et $i+1$ ont la même vitesse), comme on peut le voir sur la figure 1.12 et ces distorsions disparaissent complètement avec l'utilisation du filtrage.

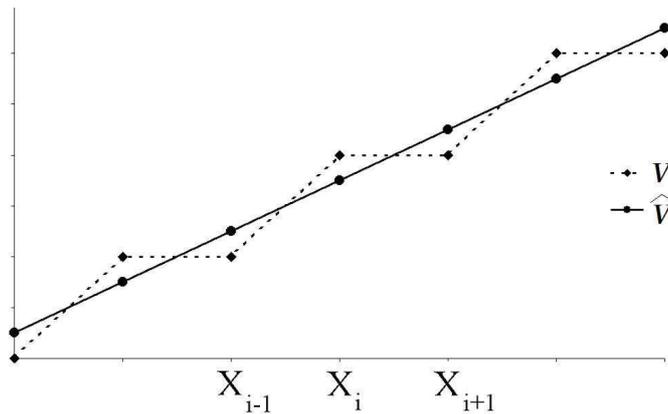


FIG. 1.12: Effet du filtrage 1D avec $\alpha = 0.5$

La version du filtre testée sous Europlexus correspond celle proposée par Randles et Libersky [RAN 96] qui est en fait une extension de la méthode de Swegle aux problèmes 3D. Dans ce cas les vecteurs vitesses filtrés $\widehat{\vec{V}}$ s'écrivent :

$$\widehat{\vec{V}}_i = \vec{V}_i + \alpha \left[\frac{\sum_j^{Nb} m_j W_{ij} \vec{V}_j / \rho_j}{\sum_j^{Nb} m_j W_{ij} / \rho_j} - \vec{V}_i \right] \quad (1.95)$$

Cette technique est très attrayante par sa simplicité et son coût très faible en temps de calcul. Elle semble également particulièrement efficace en 1D et sur certains cas tests 3D. Par exemple sur le cas test de la barre élastique 3D en traction décrit précédemment on observe désormais un comportement correct comme on peut le voir sur la figure 1.13 où l'évolution du déplacement correspond cette fois à la solution analytique (linéaire en fonction du temps). De plus les fractures numériques ont disparus. D'autres illustrations

1. La méthode SPH

des performances de cette méthode peuvent être trouvées dans les papiers des Swegle et de Randles et Libersky.

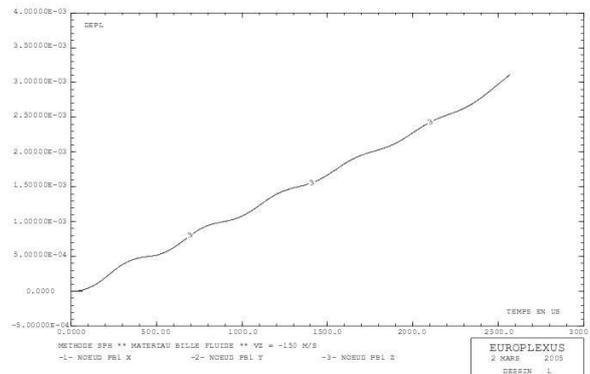


FIG. 1.13: Evolution du déplacement à l'extrémité de la barre

Cependant sur des problèmes plus complexes la dissipation introduite par le filtre peut devenir très importante. Par exemple en reprenant la même barre que précédemment mise en oscillations libres de flexion, l'étude de l'évolution de la flèche à l'extrémité de la barre sur la figure 1.4.2 montre pour un facteur α fixé à 0.5 une très forte atténuation des oscillations. Le même type de problème apparaît sur les cas tests élastoplastiques où les déformations plastiques sont fortement réduites du fait de la dissipation artificielle due au filtrage.

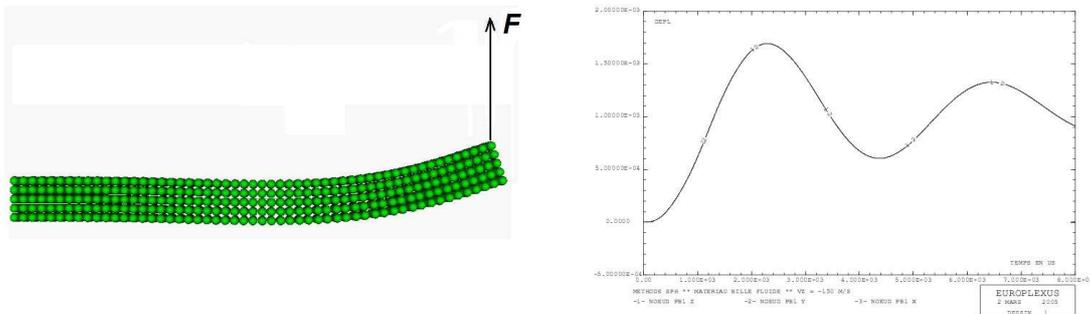


FIG. 1.14: Evolution de la flèche à l'extrémité de la barre

Le problème réside dans le fait que le filtre atténue tous les modes de déformations dont la longueur d'onde est proche de la taille des billes. Cela signifie que cette méthode ne fonctionne correctement que si la discrétisation utilisée est suffisamment fine pour que le filtrage n'affecte pas les modes de déformations physiques de la structure. La répartition des billes doit également rester relativement homogène. Ces contraintes rendent donc dans la pratique l'utilisation de cette méthode relativement difficile en particulier si on souhaite utiliser les discrétisations assez grossières.

Il est important de mentionner également que le méthode SPH ne devient pas complètement stable, le filtrage ne faisant que ralentir l'apparition des instabilités et ce d'autant plus que α est important. Mais dans le même temps l'augmentation de α entraîne une augmentation de la dissipation. Le choix de la valeur de α devient donc souvent assez problématique. Pour toutes ces raisons nous avons rapidement abandonné cette technique.

Notre intérêt s'est ensuite porté sur une autre approche initiée cette fois par Monaghan, Swift et Gray [GRA 01]. Elle consiste à stabiliser la méthode SPH par l'ajout de forces artificielles exercées sur chaque particule. L'équation 1.49 devient ainsi :

$$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)_i = \sum_j m_j \left(\frac{\sigma_i}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} - f_{ij}^n \left(\frac{\mathbf{R}_i}{\rho_i^2} + \frac{\mathbf{R}_j}{\rho_j^2} \right) \right) \vec{\nabla} W_{ij} \quad (1.96)$$

Les termes stabilisateurs sont déterminés de manière à permettre aux équations SPH de respecter certains critères de stabilité. Le tenseur \mathbf{R} est semblable à un tenseur de contraintes d'où sont nom de tenseur des contraintes artificielles. Il est déterminé dans le repère des contraintes principales. Dans ce repère ses valeurs sont définies comme nulles sauf dans le cas de contraintes de traction :

$$\begin{cases} \text{si } \sigma_i^{aa} > 0 \text{ alors } R_i^{aa} = -\eta \sigma_i^{aa} \text{ avec } 0.3 < \eta < 0.8 \\ \text{si } \sigma_i^{aa} < 0 \text{ alors } R_i^{aa} = 0 \end{cases} \quad (1.97)$$

Le paramètre f_{ij}^n pour sa part est défini par :

$$f_{ij}^n = \left(\frac{W_{ij}}{W(r=h,h)} \right)^n \text{ avec avec } n = 2 \text{ ou } n = 3 \quad (1.98)$$

Comme l'a mentionné Monaghan cette technique semble être très efficace pour éliminer les fractures numériques mais souffre des mêmes problèmes que la méthode précédente à savoir qu'elle ne fonctionne correctement que si la taille des billes est suffisamment petite. En effet si la discrétisation est trop grossière les forces artificielles introduites perturbent le comportement d'ensemble de la structure. De plus les différents calculs réalisés sous Europlexus avec cette méthode n'ont pas permis de déterminer de valeurs de η satisfaisantes pour l'ensemble des cas tests. Ces constatations nous ont donc amené comme dans le cas précédent à abandonner cette approche.

1.4.3 La formulation SPH lagrangienne totale

La stratégie qui a finalement été retenue est celle proposée par Belytschko dans [BEL 00]. Cette méthode repose sur le constat que l'instabilité en tension est liée à l'utilisation du noyau SPH classique qui peut être qualifié d'eulérien. Belytschko propose ainsi de remplacer ce noyau par un noyau lagrangien noté W^o . Celui-ci a la même expression que le précédent mais fait intervenir les positions initiales des billes \vec{x}_i^0 et \vec{x}_j^0 . On peut ainsi écrire :

$$W_{ij}^o = W(\bar{x}_i^0 - \bar{x}_j^0, h_o) \quad (1.99)$$

L'utilisation de ce noyau lagrangien signifie que désormais la configuration initiale est la configuration de référence et que l'on passe d'une formulation lagrangienne réactualisée à une formulation lagrangienne totale. Dans l'équation 1.34 le tenseur des contraintes de Cauchy est remplacé par le tenseur des contraintes nominales \mathbf{P} (transposé du tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff 1) et toutes les opérations de dérivations se font par rapport à la configuration initiale. L'équation 1.34 devient ainsi :

$$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)_i = \sum_j m_j^0 \left(\frac{\mathbf{P}_i}{(\rho_i^0)^2} + \frac{\mathbf{P}_j}{(\rho_j^0)^2} + \Pi_{ij} \right) \vec{\nabla}^0 W_{ij}^0 \quad (1.100)$$

Le tenseur des contraintes \mathbf{P} est obtenu à partir du tenseur de Green-Lagrange \mathbf{E} lui même défini par :

$$(E_{\alpha\beta})_i = \frac{1}{2} \sum_j \frac{m_j}{\rho_j^0} \left[(U_{\alpha_i} - U_{\alpha_j}) \frac{\partial W_{ij}^0}{\partial x_{\beta}^0} + (U_{\beta_i} - U_{\beta_j}) \frac{\partial W_{ij}^0}{\partial x_{\alpha}^0} \right] \quad (1.101)$$

On utilise en réalité l'incrément du tenseur de green lagrange $\delta\mathbf{E}$ dont l'expression en tenant compte des termes non linéaires est :

$$(\delta E_{\alpha\beta})_i = \frac{1}{2} (\delta U_{\alpha,\beta} + \delta U_{\beta,\alpha} + U_{\alpha,\beta} \delta U_{\beta,\alpha} + U_{\beta,\alpha} \delta U_{\alpha,\beta}) + \frac{1}{2} (\delta U_{\beta,\alpha} \delta U_{\alpha,\beta}) \quad (1.102)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_j \frac{m_j}{\rho_j^0} \left[(\delta U_{\alpha_i} - \delta U_{\alpha_j}) \frac{\partial W_{ij}^0}{\partial x_{\beta}^0} + (\delta U_{\beta_i} - \delta U_{\beta_j}) \frac{\partial W_{ij}^0}{\partial x_{\alpha}^0} \right] \quad (1.103)$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\left(\sum_j \frac{m_j}{\rho_j^0} (\delta U_{\alpha_i} - \delta U_{\alpha_j}) \frac{\partial W_{ij}^0}{\partial x_{\beta}^0} \right) \cdot \left(\sum_j \frac{m_j}{\rho_j^0} (U_{\beta_i} - U_{\beta_j}) \frac{\partial W_{ij}^0}{\partial x_{\alpha}^0} \right) \right] \quad (1.104)$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\left(\sum_j \frac{m_j}{\rho_j^0} (\delta U_{\beta_i} - \delta U_{\beta_j}) \frac{\partial W_{ij}^0}{\partial x_{\alpha}^0} \right) \cdot \left(\sum_j \frac{m_j}{\rho_j^0} (U_{\alpha_i} - U_{\alpha_j}) \frac{\partial W_{ij}^0}{\partial x_{\beta}^0} \right) \right] \quad (1.105)$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\left(\sum_j \frac{m_j}{\rho_j^0} (\delta U_{\alpha_i} - \delta U_{\alpha_j}) \frac{\partial W_{ij}^0}{\partial x_{\beta}^0} \right) \cdot \left(\sum_j \frac{m_j}{\rho_j^0} (\delta U_{\beta_i} - \delta U_{\beta_j}) \frac{\partial W_{ij}^0}{\partial x_{\alpha}^0} \right) \right] \quad (1.106)$$

On peut exprimer également la matrice gradient de la transformation \mathbf{F} :

$$(F_{\alpha\beta})_i = \frac{1}{2} \sum_j \frac{m_j}{\rho_j^0} \left[(x_{\alpha_i} - x_{\alpha_j}) \frac{\partial W_{ij}^0}{\partial x_{\beta}^0} + (x_{\beta_i} - x_{\beta_j}) \frac{\partial W_{ij}^0}{\partial x_{\alpha}^0} \right] \quad (1.107)$$

Afin d'illustrer la robustesse de cette nouvelle formulation, le cas test de la barre en flexion présenté précédemment est repris avec cette fois des efforts fléchissants nettement plus importants. Comme on peut le voir en comparant les figures 1.15(a) et 1.15(b)

les problèmes de stabilité disparaissent et il devient possible de simuler de grands déplacements et de relativement grandes déformations. Le même constat peut être fait sur le cas de la barre précontrainte soumise à une perturbation comme l'atteste la figure 1.16.

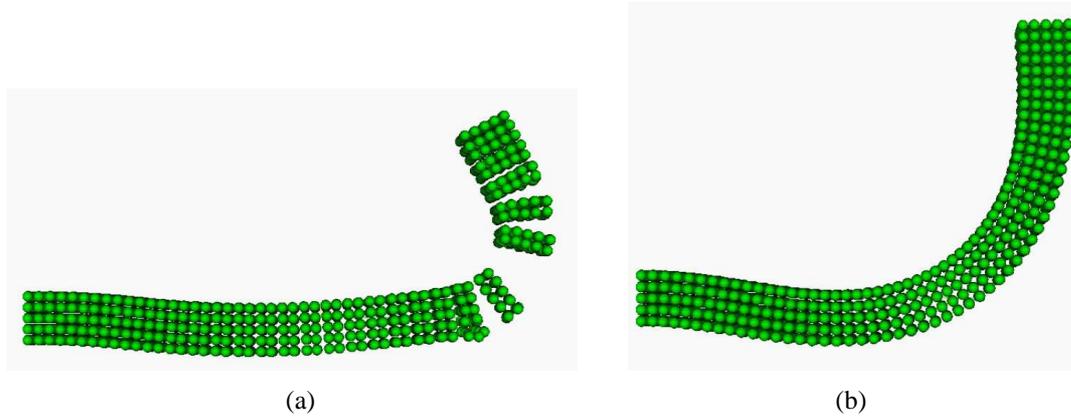


FIG. 1.15: Flexion d'une barre : a) formulation SPH classique b) formulation SPH lagrangienne totale

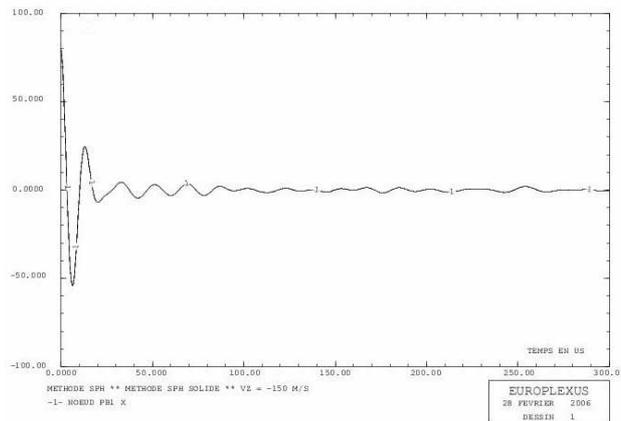


FIG. 1.16: Evolution de la vitesse longitudinale de la bille perturbée

Comme on peut le voir l'utilisation d'une formulation lagrangienne totale se révèle particulièrement efficace et contrairement aux méthodes précédentes n'introduit ni termes artificiels ni paramètres de calage. Cette stratégie fonctionne de plus très bien quelque soit la finesse de la discrétisation employée et n'introduit pas de dissipation.

Cette formulation présente encore d'autres avantages. En effet il n'est désormais plus nécessaire de mettre à jour certaines quantités à chaque pas de temps. Par exemple comme on peut le voir dans la formule 1.100 on ne fait plus intervenir les masses volumiques ρ mais les masses volumiques initiales ρ^0 , il n'est donc plus nécessaire d'utiliser l'équation de continuité. De même la configuration de référence étant la configuration initiale il n'est

plus nécessaire de mettre à jour le voisinage des billes à chaque pas de temps. Les voisinages sont recherchés uniquement au premier pas puis stockés, ce qui permet de réduire les coûts de calculs. En réalité la formulation lagrangienne totale nécessite de réaliser un certain nombre d'opérations supplémentaires comme le calcul de \mathbf{F} pour chaque bille, son inversion, des produits matriciels etc ... Le gain en temps CPU n'est donc appréciable que lorsque le nombre de billes devient important, étant donné que le coût de la recherche des voisins augmente plus vite avec le nombre de billes que le coût du reste des opérations.

En tenant compte de ces modifications l'organigramme de la méthode (figure 1.7) évolue et est remplacé par l'organigramme de la figure 1.17.

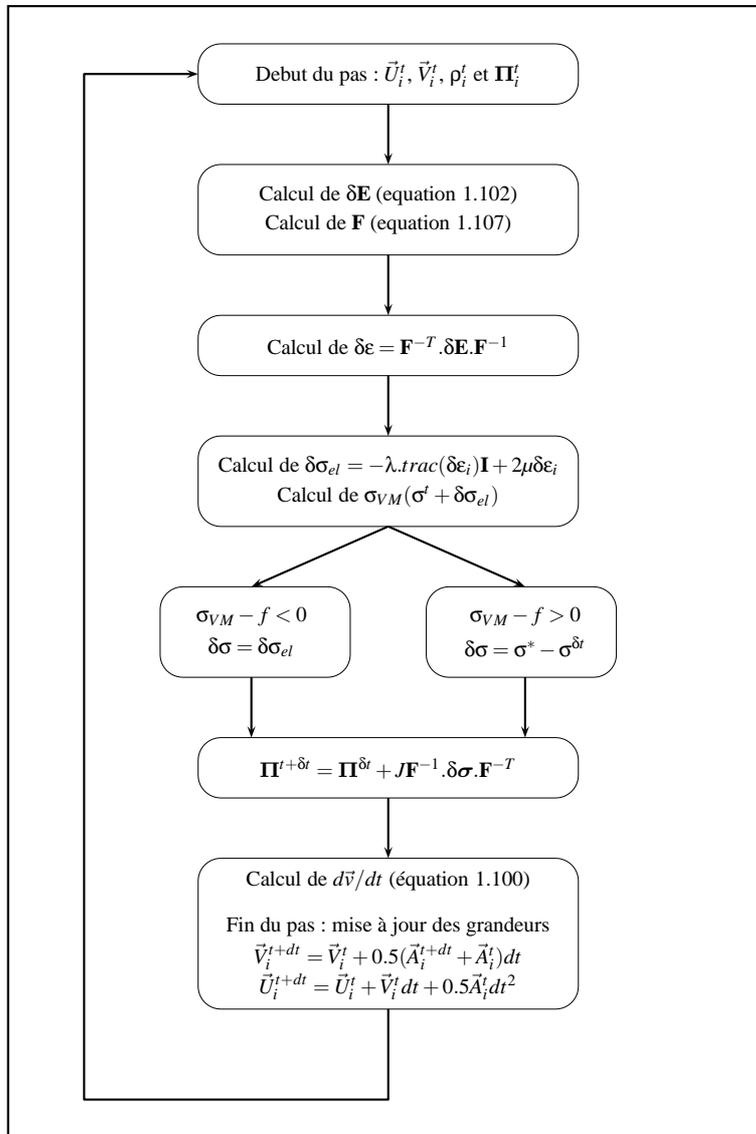


FIG. 1.17: Organigramme de la méthode SPH lagrangienne totale

NB : Dans cet organigramme Π est le tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff 2. Ce sont les incréments de ce tenseur que l'on somme à chaque pas de temps. C'est également à partir de ce tenseur une fois mis à jour que l'on détermine le tenseur \mathbf{P} utilisé dans l'équation 1.100.

On est cependant en droit de s'interroger sur la pertinence de cette approche qui fige le voisinage des billes et remet ainsi en cause l'un des principaux intérêts de la méthode SPH. Il est clair qu'elle n'est pas applicable à la modélisation de fluides étant donné que les déformations du maillage peuvent devenir très importantes. Le voisinage d'une bille peut ainsi être amené à changer très fortement. A l'inverse dans le cas d'un corps solide, y compris pour des déformations importantes, le voisinage d'une bille reste le même. Il n'évolue en fait que dans deux types de situations. La première lors d'un contact et dans ce cas de nouvelles liaisons apparaissent, mais nous verrons plus tard qu'il est possible de gérer les contacts sans avoir à modifier le voisinage des billes. La seconde lors d'une rupture où des liaisons disparaissent mais là encore comme nous le verrons par la suite il suffit pour gérer cette situation de retirer des tableaux de voisinage les liaisons rompues. Il faut cependant remarquer comme l'ont fait notamment Vidal, Bonet et Huerta [VID] que dans le cas de très grandes déformations l'approche lagrangienne totale peut conduire à des erreurs, et qu'il est préférable dans ce cas de réactualiser périodiquement la configuration de référence. On considère cependant dans le cadre de ce travail que la rupture apparaît suffisamment tôt pour que de tels niveaux de déformations ne soient pas atteints.

1.4.4 Autres techniques existantes

L'utilisation d'une formulation lagrangienne totale, comme le décrit Belytschko lui même n'élimine en réalité que la tensile instability. L'intégration spatiale étant toujours une intégration nodale les problèmes de hourglass sont toujours présents, mais sont cependant très fortement réduits. Cela s'explique par le fait que la configuration de référence est la configuration initiale, elle n'évolue donc pas au cours du calcul. Ainsi les modes à énergie nulle ne vont plus pouvoir affecter le calcul des fonctions de formes ce qui va empêcher leur développement.

Pour éliminer totalement ces modes parasites la seule méthode mathématiquement rigoureuse est de modifier l'intégration spatiale. Une première solution consiste à utiliser une intégration exacte. Son principe consiste en fait simplement à utiliser un maillage éléments finis en fond pour réaliser une intégration classique à l'aide de points de Gauss. Cette stratégie est notamment employée dans les méthodes EFG et RKPM [BEL 96]. Cette approche est précise et stable, mais se révèle en général relativement coûteuse et de plus n'est pas totalement meshless. Une autre stratégie plus récente est celle de l'intégration conforme proposée par Wang et Chen dans [CHE 00], l'idée principale étant de remplacer l'intégration sur une cellule par l'intégration d'un divergent sur un contour en utilisant le théorème de la divergence.

Il existe enfin une troisième possibilité pour modifier l'intégration spatiale, il s'agit de la méthode des stress points introduite par Dyka [DYK 97]. Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent les problèmes de sous intégration peuvent être associés au calcul des accélérations qui font intervenir deux dérivations successives des mêmes champs aux mêmes points. Partant de ce constat Dyka a proposé en 1D de décaler ces deux dérivations en introduisant des points fictifs. Sur ces derniers vont être calculés les contraintes par dérivation des déplacements (d'où leur nom de stress points) tandis que le gradient des contraintes reste calculé sur les particules SPH. Dans le cas d'une répartition uniforme de particules en 1D les stress points sont ainsi positionnés comme sur la figure 1.18, c'est à dire à équidistance entre deux particules. L'intérêt de cette méthode peut être compris aisément en reprenant la démonstration précédente faite avec la méthodes des différences finies. Ainsi une particule i est désormais encadrée par deux voisins $i-1$ et $i+1$ et deux stress points $i-1/2$ et $i+1/2$. Les contraintes calculées sur les stress points sont définies par :

$$\sigma_{i+1/2} = E \frac{dU}{dx} = E \frac{U_{i+1} - U_i}{h} \quad (1.108)$$

$$a_i = \frac{E}{\rho_i} \left(\frac{d\sigma}{dx} \right)_i = E \frac{\sigma_{i+1/2} - \sigma_{i-1/2}}{h/2} \quad (1.109)$$

En incluant l'équation 1.108 dans 1.109 on obtient :

$$a_i = E \frac{U_{i+1} + U_{i-1} - 2U_i}{h^2} \quad (1.110)$$

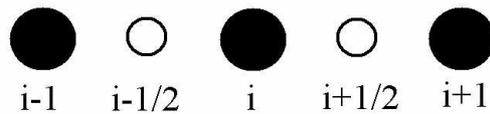


FIG. 1.18: Position des stress points en 1D

L'expression de l'accélération est cette fois exacte et prend bien en compte les voisins immédiats $i-1$ et $i+1$ de la bille i . Les modes de hourglass sont donc rigoureusement supprimés. On peut montrer de même que le mode de déformation de la figure 1.10 génère bien cette fois des contraintes au niveau des stress points et ne pourra donc pas se développer.

Comme l'ont montré Randles et Libersky [RAN 96],[RAN 00] cette technique se généralise très facilement aux cas 2D et 3D. Dans le cadre d'une formulation SPH classique (lagrangienne réactualisée) Randles et Libersky ont proposé l'expression suivante pour l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho_i \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_i = \sum_p m_p \left(\frac{\sigma_p}{\rho_p} + \Pi_{ip} \right) \vec{\nabla} W_{ip} \quad (1.111)$$

NB : l'indice p correspond aux stress points présents dans le voisinage de la particule i

NB : Une fois placés les stress points doivent se déplacer afin de suivre le mouvement des particules. Pour ce faire les vitesses des stress points sont obtenues à chaque pas de temps en les interpolant à partir des vitesses calculées sur les vraies particules.

Belytschko et Rabczuk dans [BEL 05] ont proposé une approche assez similaire. Dans cette formulation les contraintes sont portées simultanément par les stress points et les particules et l'équation 1.34 devient alors :

$$\rho_i \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_i = \sum_j m_j \left(\frac{\sigma_j}{\rho_j} + \Pi_{ij} \right) \vec{\nabla} W_{ij} + \sum_p m_p \left(\frac{\sigma_p}{\rho_p} \right) \vec{\nabla} W_{ip} \quad (1.112)$$

La méthode des stress points permet d'éliminer les problèmes de sous intégration mais à contrario ne résout pas les problèmes d'instabilité en tension. Il semble alors que le meilleur moyen d'assurer la stabilité de la méthode SPH soit d'utiliser les techniques des stress points avec une formulation lagrangienne totale.

1.5 Validation numérique

La méthode SPH programmée dans Europlexus a été validée sur différents cas tests élastiques et plastiques par des comparaisons avec des simulations éléments finis.

1.5.1 Cas tests élastiques

Un grand nombre de calculs élastiques linéaires ont été réalisés mais nous ne nous intéresserons ici qu'à certains d'entre eux. Nous présenterons ainsi un essai de traction sur une barre et un essai de flexion sur une poutre.

- Dans le cas de la traction une barre de section carrée est utilisée. Sa géométrie est donnée sur la figure 1.20 et son matériau est un acier standard (Module d'Young $E=210$ Gpa, $\mu=0.33$, $\rho=7800$ Kg/m³). Cette barre est discrétisée de deux manières différentes. De manière très fine tout d'abord (figure 1.19) avec 44800 billes de diamètre 2.5 mm positionnées selon un réseau cubique (ce qui représente 20x20 billes par section) et de manière plus grossière avec 11000 billes de diamètre 5 mm (soit 10x10 billes par section). Cette barre est encastree à l'une de ses extrémités et soumise à un effort de traction à l'autre. Cet effort est appliqué sous la forme d'une rampe de durée 1 ms puis d'un pallier d'intensité 1.5e8 N.

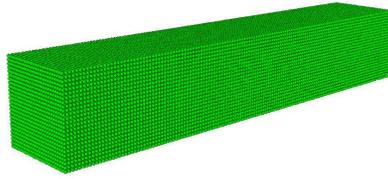


FIG. 1.19: *Discrétisation fine de la barre*

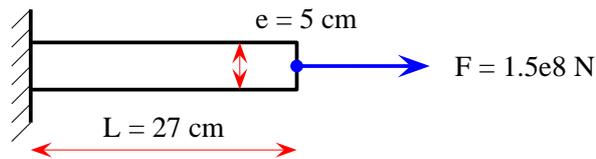


FIG. 1.20: *Schéma du problème traité*

NB : Le chargement est en fait imposé sur la couche de billes se trouvant à l'extrémité de la barre ainsi que sur les deux couches suivantes. De même pour assurer l'encastrement 3 couches de billes sont bloquées à l'autre extrémité.

Pour étudier l'influence de la normalisation de Randles-Libersy présentée au paragraphe 1.2.2 on réalise deux séries d'essais, l'une utilisant des fonctions de forme normalisées et l'autre des fonctions de forme SPH classiques et ce pour les deux discrétisations.

On réalise ainsi 4 essais :

- cas 1 : Discrétisation très fine avec méthode SPH normalisée
- cas 2 : Discrétisation grossière avec méthode SPH normalisée
- cas 3 : Discrétisation SPH très fine avec méthode SPH classique
- cas 4 : Discrétisation grossière avec méthode SPH classique

Le déplacement longitudinal de l'extrémité de la barre est comparé à une solution de référence provenant d'un modèle éléments finis très fin. Les résultats obtenus (figure 1.21) mettent en valeur le très bon comportement de la méthode SPH lorsque la normalisation est utilisée (cas 1 et 2). A l'inverse il apparaît clairement que la méthode SPH classique donne des résultats nettement moins satisfaisants et surtout qu'elle ne converge pas vers la solution exacte.

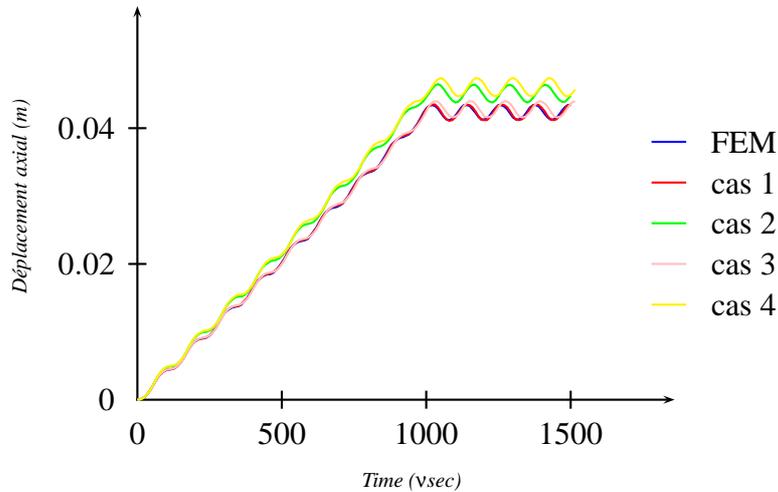


FIG. 1.21: Déplacement à l'extrémité de la barre

Pour ce calcul comme pour les suivants la méthode SPH se révèle nettement plus couteuse en temps CPU que le méthode éléments finis. Pour une finesse identique le cout est à peu près 5 fois plus important.

- Le modèle utilisé pour l'essai de flexion est semblable au précédent. En effet la poutre est à nouveau de section carré (5cm x 5cm) et la matériau est identique. Cette fois cependant pour augmenter la flexibilité de la structure une longueur deux fois plus importante est utilisée à savoir 53 cm. La discrétisation utilisée correspond à la discrétisation grossière du cas précédent (10x10 billes par section). Le problème traité (figure 1.22) est en fait celui d'une poutre console, encastree à une extrémité et soumise à un effort transversal F à l'autre.

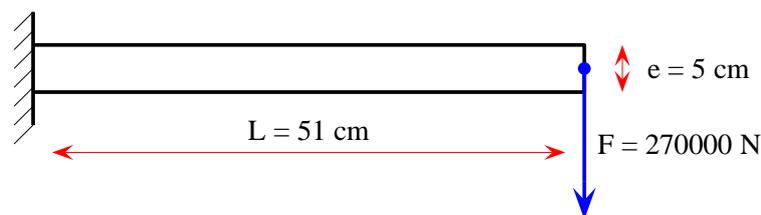


FIG. 1.22: Schéma du problème traité

La comparaison des évolutions de la flèche à l'extrémité de la barre (figure 1.23) et de la répartition de la contrainte de Von-Mises (1.26) montre à nouveau une bonne concordance.

NB : Il faut noter cependant une petite erreur (6%) sur la flèche pour l'amplitude et pour la fréquence. Cette erreur est évidemment liée à la grossièreté de la discrétisation utilisée. On peut remarquer cependant que la différence par rapport à

la solution exacte est un peu plus importante que dans le cas de la traction pour la même finesse. Cela s'explique par le fait que le modèle SPH ne reproduit pas exactement la géométrie de la poutre et en particulier la longueur libre hors dans le cas d'une poutre console la flèche est proportionnelle au cube de la longueur libre. L'erreur faite sur la longueur libre a donc beaucoup plus d'effet que dans le cas de la traction.

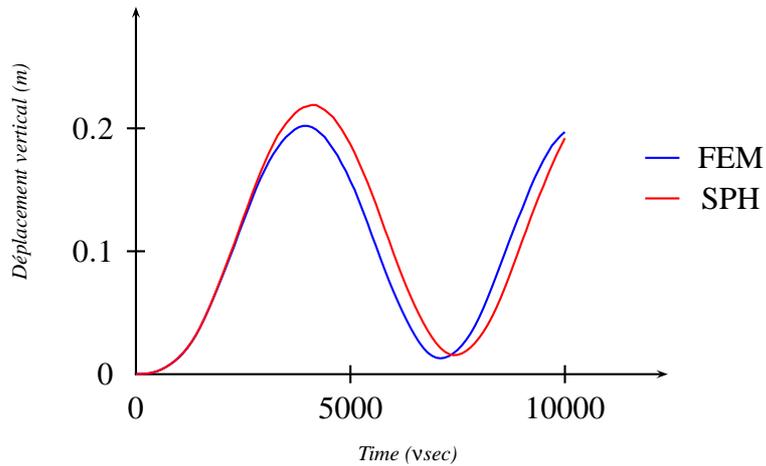


FIG. 1.23: Flèche à l'extrémité de la barre

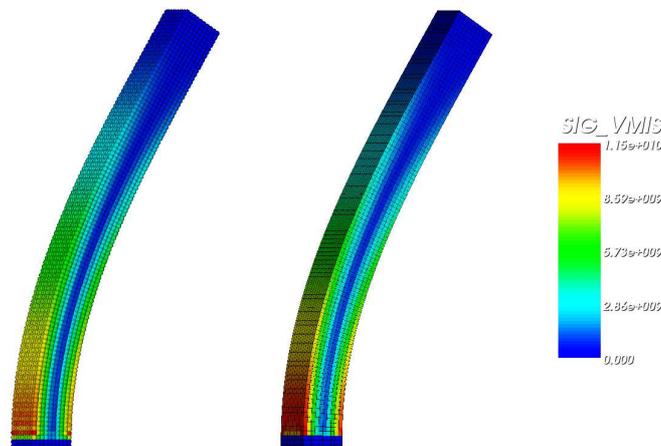


FIG. 1.24: Répartition de la contrainte de Von Mises dans la barre dans le cas SPH (gauche) et EF (droite)

1.5.2 Cas tests élasto-plastiques

Divers cas tests elasto-plastiques ont également été réalisés. On en présentera ici deux.

- Le premier est un cas test assez courant dans la littérature traitant de la modélisation de solides par des méthodes meshless. Il s’agit du problème de la barre de Taylor. Le but est de modéliser l’impact d’un barreau cylindrique sur une surface plane rigide. Le diamètre du barreau est de 40 mm et sa hauteur de 140 mm tandis que la vitesse d’impact est de 250 m/s. Il est constitué d’acier ($E=2.1e11$ Pa, $\rho=7800$ Kg/m³, $\nu=0.3$) elastoplastique à écrouissage isotrope linéaire. La courbe de traction est donnée sur la figure 1.25.

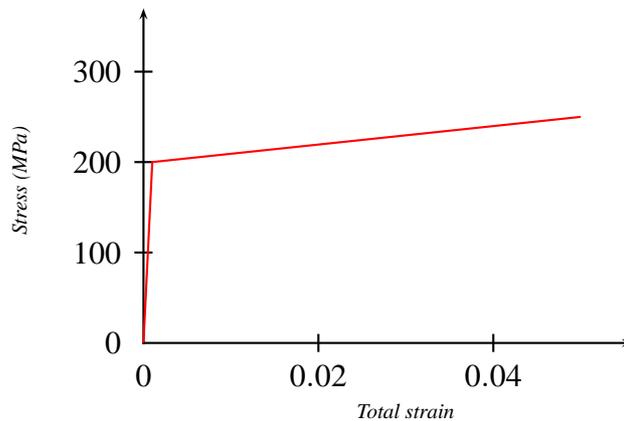


FIG. 1.25: Courbe de traction utilisée

Le cylindre est représenté à l’aide de 77600 billes SPH de diamètre 2 mm (figure 1.26(a)). La géométrie du problème ne permet cependant plus d’utiliser un réseau cubique pour positionner les billes ni même un réseau hexagonal compact. Le réseau doit donc être construit de manière différente. La technique utilisée se base sur un empilement de couches de billes identiques. Ces couches sont ensuite construites de manière à assurer d’une part une répartition de billes la plus homogène possible et d’autre part à respecter la géométrie circulaire de la section.

L’impact du barreau se traduit comme on peut le voir sur la déformée obtenue en fin de calcul (figure 1.26(b)) par d’importantes déformations (la quasi totalité de l’énergie cinétique est dissipée par plasticité). On remarque en particulier un écrasement important du barreau avec une variation très significative de sa hauteur et une forte augmentation du diamètre à sa base. On va s’intéresser par la suite à ces deux grandeurs pour caractériser les niveaux de déformations dans le barreau au cours de l’impact.

Pour la validation on réalise à nouveau deux simulations, l’une utilisant la méthode SPH et l’autre une discrétisation éléments finis de même finesse avec les éléments Tétraèdre d’Europlexus. On compare pour les deux cas la variation de la hauteur et du diamètre à la base du cylindre (table 1.1) ainsi que l’allure plus générale de la déformée et la répartition des contraintes de Von-Mises (figure 1.27). Les résultats

	Diamètre après impact	Hauteur après impact
Simulation SPH	94.0 mm	89.3 mm
Simulation EF	91.7 mm	87.3 mm

TAB. 1.1: Comparaisons des solutions SPH et EF

obtenus sont très proches (moins de 3% d'erreur sur le diamètre et la hauteur du cylindre) ce qui atteste du bon fonctionnement de l'algorithme SPH dans le cas de la plasticité.

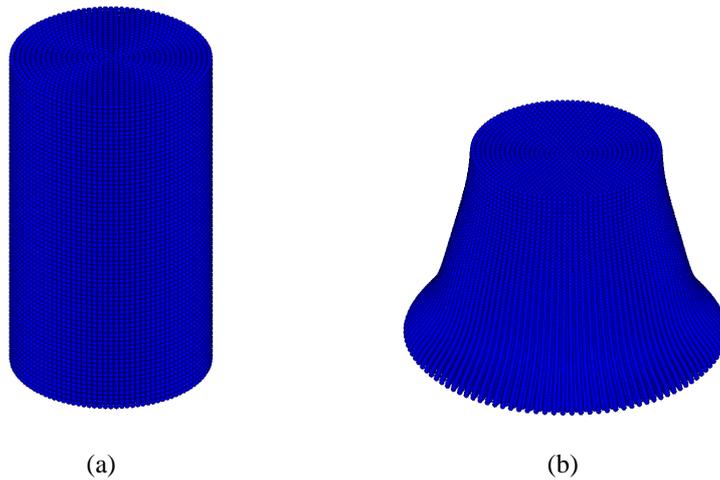


FIG. 1.26: Barreau en début(a) et fin de simulation (b)

- Pour illustrer la capacité de la méthode SPH à modéliser de relativement grandes déformations et des fractures on réalise un essai de traction similaire à celui du paragraphe précédent. La discrétisation à 10x10 billes par section est réutilisée avec le même matériau mais cette fois plastique parfait ($\sigma_y=400$ Mpa). Un déplacement vertical est imposé aux deux extrémités de la barre avec une vitesse constante de 16 m/s. Lors de la simulation présentée sur la figure 1.28 on voit clairement apparaître comme on pouvait s'y attendre des effets de striction puis des ruptures.

NB : Pour ce calcul un critère de rupture très simple basé sur la distance entre billes est employé. Si cette distance dépasse une distance critique on coupe la liaison. Ceci est nécessaire étant donné que la formulation SPH est lagrangienne totale et que donc les billes ne peuvent plus perdre leur interactions "naturellement".

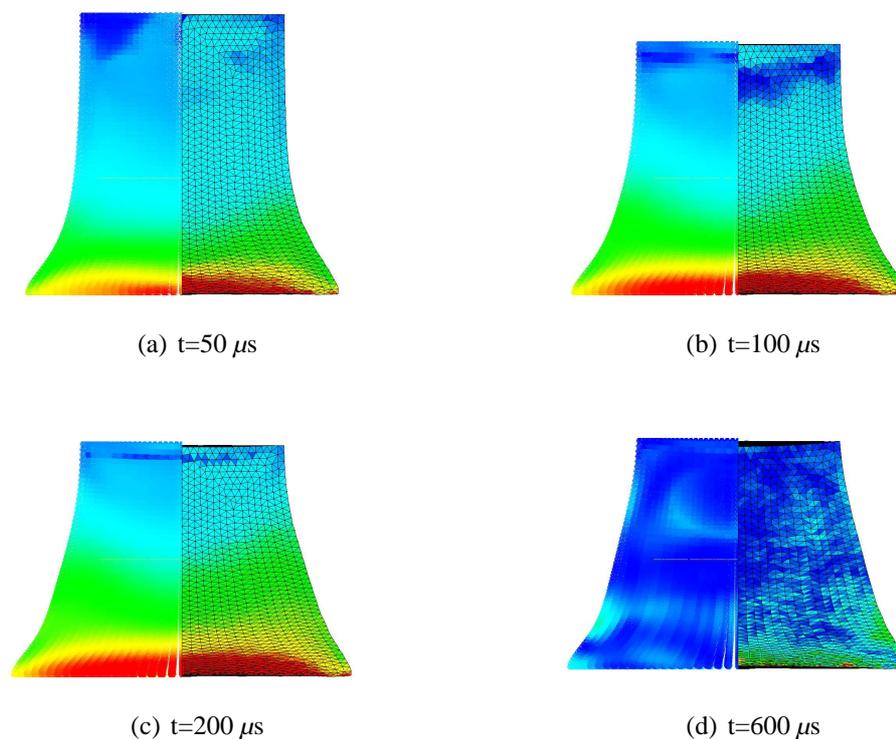


FIG. 1.27: *Comparaison des solutions SPH (gauche) et EF (droite)*

NB : Dans ce calcul la dépendance à la vitesse de déformation est assez importante. En effet avec des vitesses de déformations relativement importantes la plasticité se localise près des bords. Si par contre la déformation est imposée beaucoup plus lentement alors on ne va observer plus qu'une seule zone de striction au milieu de la barre.

1.6 Conclusions

Dans cette partie nous avons montré comment adapter la méthode SPH à la modélisation de solides. Nous avons notamment mis en évidence les deux principaux problèmes dont souffre la méthode SPH à savoir les problèmes de stabilité et de consistance. Nous avons enfin montré comment en se basant sur la littérature il était possible de traiter ces problèmes. L'utilisation d'une formulation lagrangienne totale a ainsi été retenue pour rendre la méthode SPH stable tandis que le recours à la normalisation de Randles-Libersky a permis de rendre la méthode consistante. Ces choix ont enfin été validés sur différents cas tests par comparaison avec des solutions éléments finis.

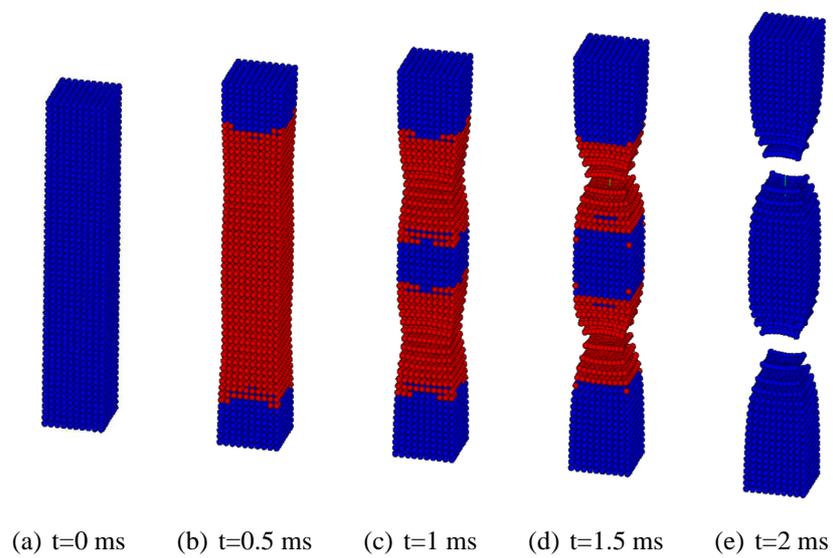


FIG. 1.28: *Barre en traction et rupture (la couleur rouge identifie les zones plastiques)*

Chapitre 2

La méthode SPH coque

Dans ce second chapitre, nous allons montrer comment adapter le formalisme SPH présenté au chapitre précédent à la modélisation de coques. Ces modifications permettront ainsi de modéliser une coque à l'aide d'une seule couche de billes positionnées sur le plan moyen. Un modèle de plasticité de type global dans l'épaisseur sera également présenté. Enfin à titre d'illustration du potentiel de la méthode des simulations de rupture utilisant un critère de rupture simple seront présentées.

Sommaire

2.1	La formulation SPH coque	51
2.1.1	La formulation coque	51
2.1.2	Le problème de sous intégration	56
2.1.3	Viscosité artificielle pour les coques	58
2.1.4	Traitement des conditions de bords	60
2.1.5	Cas tests de validation	62
2.2	Le modèle de plasticité	68
2.2.1	Le modèle global	68
2.2.2	L'algorithme de plasticité	70
2.2.3	Exemples Numériques	71

2.3 Applications : Rupture	73
2.3.1 Critère de rupture	73
2.3.2 Exemples	74
2.3.3 Perspectives pour la rupture	75
2.4 Conclusion	76

2.1 La formulation SPH coque

2.1.1 La formulation coque

On s'intéresse désormais à la modélisation d'une coque à l'aide de la théorie des coques épaisses de Mindlin-Reissner. Le comportement de la coque est ainsi déterminé uniquement à partir d'un modèle discrétisé sur son plan moyen. Chacun des points du plan moyen est affecté d'une épaisseur qui peut bien sûr être variable dans l'espace et le temps. La coque est modélisée par une seule nappe de billes possédant 3 degrés de liberté de translation et 2 degrés de liberté supplémentaires en rotation θ_x et θ_y dans le plan tangent à la coque (figure 2.1).

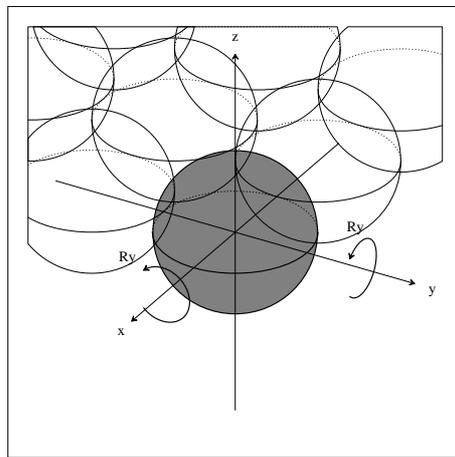


FIG. 2.1: Bille SPH coque

NB : les points SPH ne disposent pas de degré de liberté de rotation dans le plan appelé aussi drilling rotation.

Les vecteur position \vec{X} de tout point M situé à la distance ξ du plan moyen s'écrit :

$$\vec{X} = \vec{X}_m + \xi \cdot \vec{n} \quad , \quad \xi \in [-h/2; h/2] \quad \text{avec } h \text{ épaisseur de la coque}$$

Le déplacement \vec{U} de ce même point M s'écrit de la même manière :

$$\vec{U} = \vec{U}_m + \xi \cdot (\vec{n} - \vec{n}_o) = \vec{U}_m + \xi \cdot \Delta \vec{n} \quad (2.1)$$

\vec{n} est le vecteur pseudo normal (\vec{n}_o étant le vecteur pseudo normal initial) qui matérialise l'orientation de la matière par rapport au plan moyen. Il se calcule à partir de l'histoire des degrés de liberté en rotation : la manière de mettre à jour le vecteur \vec{n} sera expliquée à la fin de ce paragraphe. La formulation coque utilisée ici est une formulation de coque épaisse (Mindlin-Reissner) ce qui signifie que l'influence du cisaillement est pris en compte et que le vecteur pseudo normal ne reste pas normal au plan moyen.

On introduit le repère R_{L_o} qui est le repère local associé à la plaque dans sa position initiale. Dans ce repère les coordonnées locales initiales de chaque point x_{L_o}, y_{L_o} et z_{L_o} sont définies à partir des coordonnées générales initiales x_0, y_0, z_0 par une matrice de rotation \mathbf{G}_0 :

$$\begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{pmatrix} = \mathbf{G}_0^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_{L_o} \\ y_{L_o} \\ z_{L_o} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

L'équation 2.1 peut se réécrire sous la forme :

$$\vec{U}(x_{L_o}, y_{L_o}) = \vec{U}_m(x_{L_o}, y_{L_o}) + z_{L_o} (\vec{n}(x_{L_o}, y_{L_o}) - \vec{n}_o(x_{L_o}, y_{L_o})) \quad (2.3)$$

NB : les sections étant initialement perpendiculaires au plan moyen de la plaque, le vecteur pseudo normal initial est parallèle à l'axe z_{L_o} ce qui implique l'équation $z_{L_o} = \xi$

Ce repère R_{L_o} est également très important dans la mesure où l'on y calcul les fonctions de forme lagrangiennes totales Φ_{L_o} . On applique en effet dans ce repère un formalisme SPH 2D. Ce formalisme comme dans le cas 3D pour des raisons de précision est choisis de manière à respecter les conditions de consistance à l'ordre 1. Cependant contrairement au cas précédent on préfère utiliser ici des fonctions de forme MLS d'ordre 1 en lieu et place des fonctions SPH normalisées. Ce choix s'explique comme nous le verrons par la suite par la nécessité avec la formulation SPH coque de réaliser l'interpolation de certaines grandeurs. La normalisation de Randles et Libersky utilisée précédemment ne corrige que le calcul du gradient et les conditions de consistance ne sont pas respectées par l'interpolation. Des fonctions de forme de type MLS 1 on donc été retenues car elles permettent comme nous l'avons évoqué au paragraphe 1.2.3 d'assurer la condition de consistance simultanément sur l'interpolation et sur le calcul de gradient.

Dans le repère R_{L_o} le calcul du gradient d'un champ s'écrit :

$$\vec{\nabla}_{L_o} f = \sum_{j=1}^N \vec{\nabla} \phi_{L_o j} f_j = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x_{L_o} \\ \partial f / \partial y_{L_o} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

On en déduit l'expression du même gradient dans le repère global R_g :

$$\vec{\nabla}_0 f = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x_0 \\ \partial f / \partial y_0 \\ \partial f / \partial z_0 \end{pmatrix} = \mathbf{G}_0 \cdot \vec{\nabla}_{L_o} f = \mathbf{G}_0 \cdot \begin{pmatrix} \partial f / \partial x_{L_o} \\ \partial f / \partial y_{L_o} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

$$(\nabla_0 f)_q = \frac{\partial f}{\partial x_{q0}} = G_{0qk} \cdot (\nabla_{L_o} f)_k = G_{0qk} \cdot \sum_{j=1}^N (\Phi_{,x_{kL_o}})_j \cdot f_j = \sum_{j=1}^N G_{0qk} \cdot (\Phi_{,x_{kL_o}})_j \cdot f_j \quad (2.6)$$

$$= \sum_{j=1}^N (\Phi'_{,x_{q0}})_j \cdot f_j \quad \text{avec} \quad (\Phi'_{,x_0})_j = G_{0ik} \cdot (\Phi_{,x_{kL_o}})_j \quad (2.7)$$

On aboutit donc finalement à :

$$\vec{\nabla}_0 f = \sum_{j=1}^N \vec{\nabla} \phi_{0j}' f_j \quad (2.8)$$

A l'aide de l'équation précédente et des équations 2.3 et 2.5 on peut donc définir la matrice gradient \mathbf{F} pour un point du plan moyen ($z_{L0} = \xi=0$) :

$$\mathbf{F} = \mathbf{G}_0 \cdot \mathbf{F}_3 \quad \text{avec} \quad \mathbf{F}_3 = \begin{bmatrix} x_{,xL_0} & x_{,yL_0} & x_{,zL_0} \\ y_{,xL_0} & y_{,yL_0} & y_{,zL_0} \\ z_{,xL_0} & z_{,yL_0} & z_{,zL_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,xL_0} & x_{,yL_0} & n_x \\ y_{,xL_0} & y_{,yL_0} & n_y \\ z_{,xL_0} & z_{,yL_0} & n_z \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Le tenseur des déformations de Green-Lagrange s'écrit ensuite en notation indicielle de la manière suivante (les termes non linéaires sont pris en compte mais ne sont pas présentés ici pour simplifier les expressions) :

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \cdot (U_{i,j_0} + U_{j,i_0}) = E_{m_{ij}} + E_{f_{ij}}(\xi) \quad (2.10)$$

$$\text{avec } E_{m_{ij}} = \frac{1}{2} \cdot (U_{m_{i,j_0}} + U_{m_{j,i_0}}) \quad \text{et} \quad E_{f_{ij}}(\xi) = \frac{\xi}{2} \cdot (\Delta n_{i,j_0} + \Delta n_{j,i_0}) \quad (2.11)$$

Le tenseur \mathbf{E} se décompose donc en une partie constante dans l'épaisseur \mathbf{E}_m associée aux effets de membrane et de cisaillement transverse, et une partie linéaire dans l'épaisseur $\mathbf{E}_f(\xi)$ associée aux effets de flexion. Les déformations doivent ensuite être écrites dans le repère local dans la configuration actuelle R_L lié à chaque point du plan moyen de la plaque, afin de calculer les contraintes en respectant l'hypothèse des contraintes planes. Pour définir ce repère on détermine deux vecteurs du plan moyen \vec{n}_2' et \vec{n}_2 . La normale \vec{n}_3 au plan est définie par :

$$\vec{n}_2' = \frac{\partial \vec{X}(x_L, y_L)}{\partial x_L}; \quad \vec{n}_2 = \frac{\partial \vec{X}(x_L, y_L)}{\partial y_L} \quad (2.12)$$

$$\vec{n}_3 = \vec{n}_2' \wedge \vec{n}_2 \quad (2.13)$$

On complète enfin la base avec un troisième vecteur \vec{n}_1 :

$$\vec{n}_1 = \vec{n}_3 \wedge \vec{n}_2 \quad (2.14)$$

A partir des 3 vecteurs de base obtenus on définit la matrice de rotation \mathbf{G}_L reliant le repère local R_L au repère global R_g .

NB : On peut remarquer que dans le cas d'une formulation lagrangienne réactualisée où la configuration de référence est régulièrement mise à jour on a l'égalité $\mathbf{G}_0 = \mathbf{G}_L$

On en déduit l'expression des déformations locales de membrane et cisaillement $\boldsymbol{\varepsilon}_{L_m}$ et de flexion $\boldsymbol{\varepsilon}_{L_f}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{L_m} = \mathbf{G}_L \cdot \mathbf{F}^{-t} \cdot \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{G}_L^T \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{L_f} = \mathbf{G}_L \cdot \mathbf{F}^{-t} \cdot \mathbf{E}_f \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{G}_L^T \quad (2.15)$$

Les déformations peuvent se réécrire, toujours dans le repère local sous la forme de vecteurs de déformations généralisés $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_g$ et $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$ définis par :

$$\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_g = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{L_{mxx}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{L_{myy}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{L_{mxy}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{L_{fxx}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{L_{fyy}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{L_{fxy}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_c = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{L_{m_xz}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{L_{m_yz}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

On définit de la même manière les vecteurs de contraintes généralisées $\vec{\boldsymbol{\sigma}}_g$ et $\vec{\boldsymbol{\sigma}}_c$ par :

$$\vec{\boldsymbol{\sigma}}_g = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{L_{mxx}} \\ \boldsymbol{\sigma}_{L_{myy}} \\ \boldsymbol{\sigma}_{L_{mxy}} \\ \boldsymbol{\sigma}_{L_{fxx}} \\ \boldsymbol{\sigma}_{L_{fyy}} \\ \boldsymbol{\sigma}_{L_{fxy}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{\boldsymbol{\sigma}}_c = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{L_{m_xz}} \\ \boldsymbol{\sigma}_{L_{m_yz}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Les éléments de réduction en membrane N_{ij} , en cisaillement T_i et les moments de flexions m_{ij} étant obtenus par intégration dans l'épaisseur :

$$\begin{cases} N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\sigma}_{L_{m_{ij}}}(\xi) \cdot d\xi = h \boldsymbol{\sigma}_{L_{m_{ij}}} \\ T_i = \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\sigma}_{L_{c_{iz}}}(\xi) \cdot d\xi = h \boldsymbol{\sigma}_{L_{c_{iz}}} \\ m_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\sigma}_{L_{f_{ij}}}(\xi) \cdot \xi \cdot d\xi = \frac{h^3}{12} \boldsymbol{\sigma}_{L_{f_{ij}}} \end{cases} \quad (2.18)$$

La loi de Hooke en contraintes planes est utilisée pour relier contraintes et déformations et les contraintes de cisaillement transverses sont reliées aux déformations correspondantes avec les relations habituelles :

$$\vec{\boldsymbol{\sigma}}_g = \mathbf{C} \cdot \vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{C}' & 0 \\ 0 & \mathbf{C}' \end{bmatrix} \cdot \vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_g \quad \text{avec} \quad \mathbf{C}' = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

$$\vec{\boldsymbol{\sigma}}_c = \mathbf{G} \cdot \vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_c \quad \text{avec} \quad \mathbf{G} = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.20)$$

Les contraintes généralisées intégrées dans l'épaisseur sont ensuite écrites sous la forme de deux matrices :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} N_{xx} & N_{xy} & T_x \\ N_{xy} & N_{yy} & T_y \\ T_x & T_y & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_{xx} & m_{xy} & 0 \\ m_{xy} & m_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

A l'aide de \mathbf{S} on peut exprimer le tenseur des contraintes nominales \mathbf{P} :

$$\mathbf{P} = \mathbf{G}_L^T \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{G}_L \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{s} \cdot \mathbf{F}^T \quad (2.22)$$

On en déduit l'écriture de l'équation d'équilibre en membrane et cisaillement transverse :

$$\mathbf{P}^T \cdot \vec{\nabla}_0 = \rho_0 \cdot \vec{U} \quad (2.23)$$

Le calcul des accélérations angulaires $\ddot{\theta}_{x_L}$ et $\ddot{\theta}_{y_L}$ est ensuite réalisé à l'aide des deux équations d'équilibre en rotation définies dans le repère local R_L par :

$$\begin{cases} m_{yy,y} + m_{xy,x} + h \cdot \sigma_{yz} = I \cdot \ddot{\theta}_{x_L} \\ m_{xx,x} + m_{xy,y} - h \cdot \sigma_{xz} = I \cdot \ddot{\theta}_{y_L} \end{cases} \quad \text{avec } I \text{ inertie en rotation} \quad (2.24)$$

Ce qui peut se reformuler sous forme matricielle :

$$\mathbf{L} \cdot \text{div}(\mathbf{m}) + \vec{T}_L = \mathbf{L} \cdot \mathbf{m}^T \cdot \vec{\nabla}_L + \vec{T}_L = I \cdot \vec{\ddot{\theta}}_L \quad (2.25)$$

$$\text{avec } \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{T}_L = \begin{bmatrix} h \cdot \sigma_{yz} \\ -h \cdot \sigma_{xz} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

L'équation 2.25 devient dans le repère global et en formulation lagrangienne totale :

$$\mathbf{M}^T \cdot \vec{\nabla}_0 + \vec{T}_0 = I_0 \cdot \vec{\ddot{\theta}} \quad (2.27)$$

avec :

$$\mathbf{M} = J \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{G}_L^T \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{G}_L \quad \text{et} \quad \vec{T}_0 = J \cdot \mathbf{G}_L \cdot \vec{T}_L \quad (\text{avec } \mathbf{J} = \det(\mathbf{F})) \quad (2.28)$$

NB : le tenseur M s'apparente donc pour les contraintes de flexion au tenseur des contraintes nominales P pour les contraintes constantes dans l'épaisseur.

Les équations 2.23 et 2.27 se discrétisent enfin sous la forme :

$$\begin{cases} I_0 \cdot \vec{\ddot{\theta}} = \sum_{j=1}^N \cdot \mathbf{M}_j \cdot \vec{\nabla}_0 \phi'_{0ij} + \vec{T}_0 \\ \rho_0 \cdot \vec{V} = \sum_{j=1}^N \cdot \mathbf{P}_j \cdot \vec{\nabla}_0 \phi'_{0ij} \end{cases} \quad (2.29)$$

Le vecteur des accélérations angulaires $\vec{\ddot{\theta}}$ ainsi obtenu permet de mettre à jour le vecteur pseudo normal \vec{n} . On définit ici une nouvelle matrice \mathbf{G}_n^t qui traduit la rotation du

vecteur pseudo normal par rapport à sa position initiale \vec{n}_0 et son incrément $\Delta\mathbf{G}_n$ la rotation de \vec{n} au cours d'un pas de temps. A partir de $\vec{\theta}$ on détermine le vecteur incrément de rotation $\Delta\vec{\theta}$ qui définit la rotation du vecteur pseudo normal au cours d'un pas de temps grâce à l'intégration temporelle. La matrice de rotation correspondante $\Delta\mathbf{G}_n$ est ensuite calculée à l'aide de la formule de Rodrigues [BET 98]. On en déduit :

$$\begin{cases} \mathbf{G}_n^{t+\Delta t} = \Delta\mathbf{G}_n \cdot \mathbf{G}_n^t \\ \vec{n}^{t+\Delta t} = \mathbf{G}_n^{t+\Delta t} \cdot \vec{n}_0 \end{cases} \quad (2.30)$$

2.1.2 Le problème de sous intégration

Comme nous l'avons vu au paragraphe 1.4.3 l'utilisation d'une formulation lagrangienne totale n'élimine pas les problèmes de sous intégration. Dans le cas d'une formulation SPH coque ces problèmes sont beaucoup plus gênants que pour une formulation volumique. Ceci s'explique par le fait que les perturbations occasionnées sur le positionnement des points par les modes de hourglass affectent fortement les courbures locales, le calcul des normales et donc le comportement global de la coque. Cela apparaît très clairement sur l'exemple de déformée de la figure 2.2, qui correspond à une plaque carrée encastrée sur ses 4 bords et soumise à une pression uniforme. La présence des modes parasites y est clairement visible.

Le choix a donc été fait ici d'utiliser la méthode des stress points vue au paragraphe 1.4.4. Pour chaque bille i ayant un nombre N_q des stress points notés q dans son voisinage l'équation 2.29 s'écrit alors :

$$\begin{cases} I_0 \cdot \vec{\theta} = \sum_{q=1}^{N_q} \mathbf{M}_q \cdot \vec{\nabla}_0 \phi'_{0iq} + \vec{T}_0 \\ \rho_0 \cdot \vec{V} = \sum_{q=1}^{N_q} \mathbf{P}_q \cdot \vec{\nabla}_0 \phi'_{0iq} \end{cases} \quad (2.31)$$

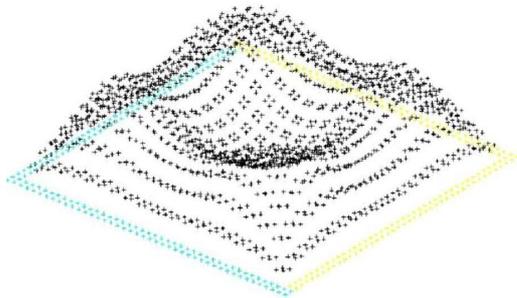


FIG. 2.2: Déformée observée en SPH sans Stress Points (amplification x3)

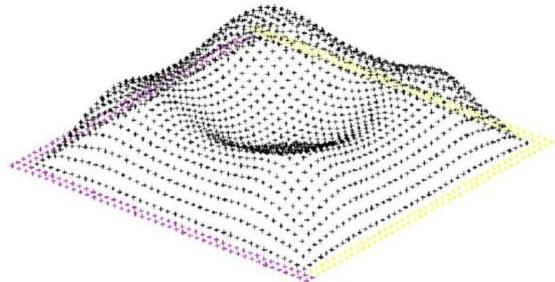


FIG. 2.3: Déformée observée avec ajouts de Stress Points (amplification x3)

Comme on peut le voir sur la figure 2.3 le comportement est considérablement amélioré par l'utilisation des stress points et les modes parasites ont disparu.

NB : La stratégie de Rabczuk et Belytchko qui consiste à calculer simultanément les contraintes sur les stress points et sur les billes SPH a été testée dans les mêmes conditions et donne des résultats très similaires. L'approche classique lui a donc été préférée pour la majorité des calculs étant donné qu'elle s'avère moins coûteuse, le calcul des contraintes n'étant réalisé que sur la moitié des points.

Les grandeurs cinématiques nécessaires au calcul des déformations et des contraintes sur les stress points, à savoir la position \vec{X} , la vitesse \vec{V} et le vecteur pseudo normal \vec{n} de chaque stress point sont interpolés sur les particules voisines. Notons que pour obtenir une bonne rigidité de flexion une bonne représentation des courbures est nécessaire, ce qui impose d'interpoler les vecteurs pseudo normaux avec des fonctions au moins consistantes à l'ordre 2. Des fonctions d'interpolation MLS d'ordre différents ont été testées, et l'ordre 2 a été choisi car nécessitant la prise en compte de moins de voisins.

Le choix du positionnement des stress points est également un paramètre très important. La méthode la plus simple consiste dans le cas d'un réseau de billes régulier à positionner un stress point au centre de chaque cellule comme on peut le voir sur la figure 2.4. C'est d'ailleurs ce choix qui a été retenu dans la majorité des cas tests présentés par la suite.

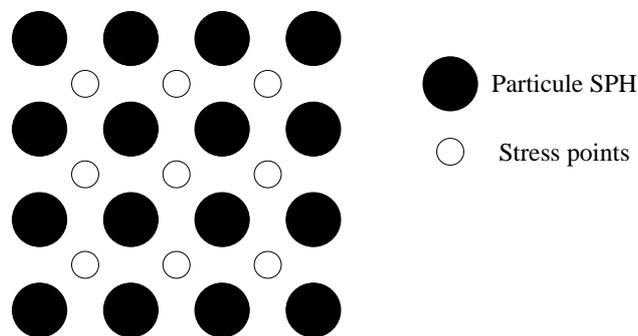


FIG. 2.4: *Positionnement des Stress Points*

Il est cependant important de remarquer comme l'ont fait Belytchko et Rabczuk [BEL 00] que l'utilisation d'un seul stress point par cellule n'est pas suffisante en 2D pour éliminer totalement les problèmes de sous intégration. Il existe ainsi comme on peut le voir sur la figure 2.5 un mode de déformation à énergie nulle qui peut donc librement se développer. Pour le traiter il suffit de placer au moins deux stress points dans chaque carré formé par les particules comme par exemple ce qui est présenté figure 2.6. Dans [BEL 00] Belytchko et Rabczuk ont proposé d'autres types de positionnement et notamment dans le cas où la répartition de billes n'est pas homogène. Dans ce cas l'utilisation de diagrammes de Voronoi est préconisée, les stress points pouvant alors être placés au centre des triangles de Delaunay associés.

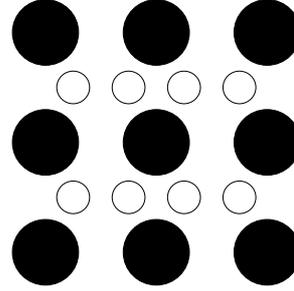
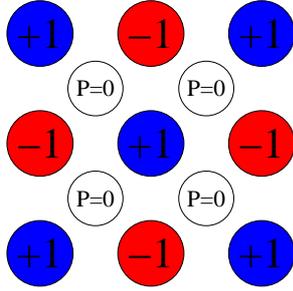


FIG. 2.5: Mode de déformation à énergie nulle en 2D

FIG. 2.6: Autre type de positionnement des stress points

2.1.3 Viscosité artificielle pour les coques

Le concept de viscosité artificielle vu au paragraphe 1.1.4 a été adapté aux coques minces. Un terme visqueux associé à la membrane a tout d'abord été ajouté, suivi d'un autre lié au cisaillement transverse. L'idée essentielle est de choisir la forme de l'amortissement de telle sorte qu'il n'agisse que sur les très hautes fréquences associées aux oscillations engendrées par les mouvements de deux points voisins. Pour exprimer les forces visqueuses on introduit un repère local associé à chaque liaison entre deux billes i - j . Ce repère noté R_{L^*} est semblable à R_L mais l'un de ses vecteurs de base noté \vec{r}_{ij} est orienté selon la direction de la liaison i - j tandis que celui qui est normal au plan est noté \vec{s}_{ij} .

Une pression visqueuse P_{vij} associée à chaque liaison est ainsi définie de la même manière que le terme visqueux de Monaghan de l'équation 1.31 :

$$P_{vij} = \rho_{ij}^2 \Pi_{ij} = \rho_{ij} (-\alpha \cdot d \cdot c \cdot \mu_{ij} + \beta \cdot d^2 \cdot \mu_{ij}^2) \quad \text{avec} \quad \mu_{ij} = \frac{(\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot \vec{r}_{ij}}{r^2 + \varepsilon} \quad (2.32)$$

NB : Dans l'équation précédente α , β , c et ε ont la même signification que précédemment tandis que r correspond à la distance entre les billes i et j .

La force totale générée sur la bille i par la pression exercée par l'ensemble de ses voisins s'écrit :

$$\vec{f}_m = \frac{m_i}{\rho_i} \cdot \vec{\text{grad}}(P_v) \quad (2.33)$$

$$= h \cdot S_i \cdot \mathbf{F}^{-1} \vec{\text{grad}}_0(P_v) \quad (2.34)$$

$$= h \cdot S_i \cdot \mathbf{F}^{-1} \sum_{j=1}^N P_{vij} \vec{\nabla} \phi'_{0ij} \quad (2.35)$$

On en déduit l'expression de la force visqueuse $\vec{f}_{m_{ij}}$ exercée par la bille j sur la bille i :

$$\vec{f}_{m_{ij}} = h.S_i.P_{vij}.\mathbf{F}^{-1}\vec{\nabla}\phi'_{0_{ij}} \quad (2.36)$$

NB : Dans l'expression précédente on peut remarquer que l'on a $\vec{\nabla}\phi'_{0_{ij}} = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{r}_{ij}$ ce qui illustre bien le fait que la force s'exerce dans la direction de la liaison i-j.

Dans le cadre de la formulation coque cette viscosité n'a d'effet que sur la membrane et comme on peut le voir dans 2.32 ne fait pas intervenir la composante hors plan des vitesses. Ce type d'amortissement est bien choisi pour les fluides étant donné que l'on ne veut pas créer de contraintes artificielles de cisaillement susceptibles de perturber les écoulements. Dans le cas des coques ce type de viscosité ne contrôle pas les modes d'instabilité faisant intervenir les vitesses normales normales au plan tangent. La viscosité de Monaghan a donc été étendue dans le cadre de son travail afin de générer également des contraintes visqueuses de cisaillement. Dans le cas simple d'une poutre cette contrainte visqueuse s'écrit :

$$\tau = \eta.\frac{\partial(\vec{v}.\vec{s})}{\partial x} \text{ avec } \eta = \gamma.\rho.d.c \quad (2.37)$$

NB : Le paramètre γ est un paramètre de calage qui ressemble aux paramètres habituels α et β . La valeur de 0.2 semble un choix efficace sur tous les tests faits

On en déduit l'expression simplifiée de cette contrainte de cisaillement transverse :

$$\tau_{ij} = \eta.\frac{(\vec{v}_i - \vec{v}_j).\vec{s}_{ij}}{x_i - x_j} = -\eta.\frac{(\vec{v}_i - \vec{v}_j).\vec{s}_{ij}}{r} \quad (2.38)$$

Dans le cas d'une plaque en 3D, τ_{ij} devient un tenseur τ_{ij} faisant intervenir uniquement des contraintes de cisaillement transverse. Il peut s'écrire alors dans le repère R_{L^*} sous la forme :

$$\tau_{ij} = -\eta.\frac{(\vec{v}_i - \vec{v}_j).\vec{s}_{ij}}{r} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Comme précédemment on déduit de cette viscosité une force $\vec{f}_{s_{ij}}$ associée à la liaison i-j :

$$\vec{f}_{s_{ij}} = h.S_i.\tau_{g_{ij}}.\vec{\nabla}\Phi_{ij} = h.S_i.\mathbf{F}^{-1}.\tau_{g_{ij}}.\vec{\nabla}\phi'_{0_{ij}} \quad (2.40)$$

NB : $\tau_{g_{ij}}$ correspond au tenseur des contraintes visqueuse écrit dans R_g .

L'expression de la force visqueuse totale notée \vec{f}_{vij} est donc :

$$\vec{f}_{vij} = \vec{f}_{mij} + \vec{f}_{sij} = h.S_i.\mathbf{F}^{-1}.(P_{vij}\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}_{gij})\vec{\nabla}\phi'_{0ij} \quad (2.41)$$

On peut montrer que $\vec{f}_{vij} \neq \vec{f}_{vji}$ et qu'ainsi le principe de symétrie des actions de Newton n'est pas respecté. On symétrise alors l'expression de la force en définissant une nouvelle force visqueuse \vec{f}'_{vij} par :

$$\vec{f}'_{vij} = \frac{1}{2}(\vec{f}_{vij} + \vec{f}_{vji}) \quad (2.42)$$

Une dissipation a également été ajoutée sur les degrés de liberté en rotation. Cette dissipation est en fait un filtre de Balsara identique à celui présenté dans [RAN 96] qui se comportent comme un filtre haute fréquence. Dans les calculs les vecteurs pseudo-normaux \vec{n}_i sont remplacés par leurs équivalents filtrés $\widehat{\vec{n}}_i$ définis de la même manière que dans l'équation 2.43 :

$$\widehat{\vec{n}}_i = \vec{n}_i + \alpha \left[\frac{\sum_{j=1}^N m_j W_{ij} \vec{n}_j / \rho_j}{\sum_{j=1}^N m_j W_{ij} / \rho_j} - \vec{n}_i \right] \quad \text{avec } \alpha = 0.01 \quad (2.43)$$

NB : Dans le cas de coques l'énergie cinétique associée aux degrés de liberté en rotation étant très faible, le risque de dissipation excessive est ici minime.

2.1.4 Traitement des conditions de bords

Nous allons présenter ici la manière de traiter les deux types de conditions limites essentielles, encastrement et bords libres. La modélisation des conditions d'encastrement se fait de manière assez naturelle en prolongeant la plaque et en bloquant les déplacements de plusieurs rangées de billes. Le choix s'est porté ici sur 3 rangées comme on peut le voir sur la figure 2.7.

NB : L'encastrement d'une seule rangée de billes fournis malgré tout des résultats corrects même si de nettement moins bonne qualité.

Pour ce qui concerne les bords libres, comme nous l'avons vu au paragraphe 1.3.2, l'utilisation de fonctions de forme MLS impose un traitement explicite des conditions de bords libres. Pour résoudre cette question on procède en deux étapes. Il faut tout d'abord identifier les points de bords. On utilise pour cela une approche qui reprend les résultats vus au paragraphe 1.2.1 sur la consistance de l'interpolation SPH. On définit sur chaque bille une fonction β à l'aide de la formule :

$$\beta_i = \sum_{j=1}^N f(\vec{x}_i) W(\vec{x}_i - \vec{x}_j, h) S_j \neq 1 \quad (2.44)$$

Cette expression correspond en fait à l'interpolation SPH classique (équation 1.7) sur la bille i d'un champ valant 1 en tous points. Comme nous l'avons vu la qualité de cette interpolation sera la meilleure quand le voisinage de la bille i sera complet donc loin

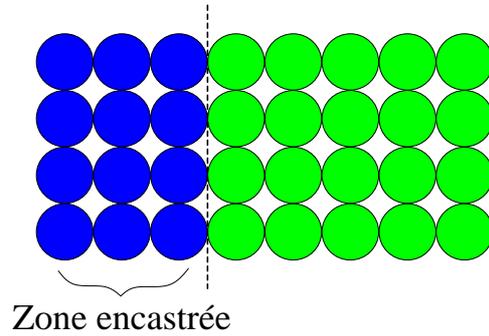


FIG. 2.7: Normales extérieures \vec{n}_b sur les bords

des bords. A l'inverse la valeur de β_i sera de plus en plus médiocre et donc proche de zéro en se rapprochant des bords. Cette approche peut ainsi être comparée à la méthode des levelset, les bords étant définis par l'iso zéro de β .

L'analogie avec la méthode des levelset peut être poursuivie avec le calcul des normales aux bords \vec{n}_b , puisqu'en effet celles ci s'écrivent sous la forme :

$$\vec{n}_b = \vec{grad}(\beta) / \|\vec{grad}(\beta)\| \quad (2.45)$$

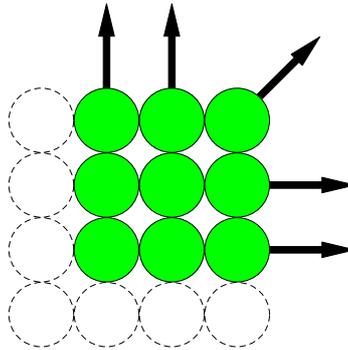


FIG. 2.8: Normales extérieures \vec{n}_b sur les bords

Une fois les billes de bord détectées et les normales calculées les conditions limites peuvent être imposées. Dans le cas des bords libres on impose la condition suivante :

$$\sigma \cdot \vec{n}_b = \vec{0} \quad (2.46)$$

De la même manière avec la formulation lagrangienne totale on écrit :

$$\mathbf{P} \cdot \vec{n}_{b_0} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \vec{n}_{b_0} = \frac{\vec{grad}_0(\beta)}{\|\vec{grad}_0(\beta)\|} \quad (2.47)$$

Numériquement cela revient à écrire le tenseur des contraintes nominales \mathbf{P} dans le repère local orienté selon la normale initiale \vec{n}_{b_0} et à annuler les composantes correspondantes.

L'utilisation de stress points permet cependant de simplifier grandement cette technique. En effet comme l'ont fait Vignevic et Campbell [VIG 00] on ne discrétise les bords qu'avec de vraies particules. Dans ces conditions les contraintes n'étant pas calculées sur ces points aucun traitement n'est nécessaire. Cette solution peut cependant conduire à des erreurs sur les bords. Cela apparaît clairement sur le calcul de la flexion d'une barre en 2D soumise à un déplacement imposé à son extrémité. La déformée observée sur la figure 2.9(a) est anormale et ne correspond en rien à la solution de référence. En réalité les bords sont rigidifiés artificiellement par ces erreurs ce qui bloque la flexion. La déformée ainsi obtenue ne fait alors plus intervenir que du cisaillement transverse.

Ces résultats peuvent s'expliquer par le fait que sur les bords, les fonctions de forme MLS sont considérablement déformées pour pouvoir assurer les conditions de consistance linéaire. Le calcul de la dérivée des contraintes (qui n'évoluent pas linéairement dans l'espace) dans la direction de la normale au bord devient de très mauvaise qualité. La solution trouvée pour résoudre ce problème consiste simplement à intégrer les billes de bords dans leur propre voisinage de stress points. Cela permet de réduire très fortement la distorsion des fonctions de forme. Les équations d'équilibre 2.48 s'écrivent alors :

$$\begin{cases} I_0 \cdot \vec{\theta} = \sum_{q=1}^{N_q} \mathbf{M}_q \cdot \vec{\nabla}_0 \phi'_{0iq} + \mathbf{M}_i \cdot \vec{\nabla}_0 \phi'_{0ii} + \vec{T}_0 \\ \rho_0 \cdot \vec{V} = \sum_{q=1}^{N_q} \mathbf{P}_q \cdot \vec{\nabla}_0 \phi'_{0iq} + \mathbf{P}_i \cdot \vec{\nabla}_0 \phi'_{0ii} \end{cases} \quad (2.48)$$

Les tenseurs \mathbf{P}_i et \mathbf{M}_i quant à eux sont en fait simplement mis à zéro. Dans le cas de l'exemple précédent il apparaît clairement au regard des figure 2.9(a) et 2.9(b) que cette modification permet d'améliorer considérablement le comportement de la méthode et d'aboutir à un comportement correct de la barre.

2.1.5 Cas tests de validation

La formulation SPH coque qui vient d'être présentée a été validée par comparaison à des résultats obtenus avec les éléments finis coque de Europlexus à savoir principalement des éléments de coque épaisse de Mindlin-Reissner MITC4 (Q4GS dans Europlexus) et des éléments de coque mince de Kirchoff COQ4. Le matériau utilisé dans la plupart des cas est un acier classique : $\rho = 7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $E = 2e11 \text{ Pa}$ et $\nu = 0.3$.

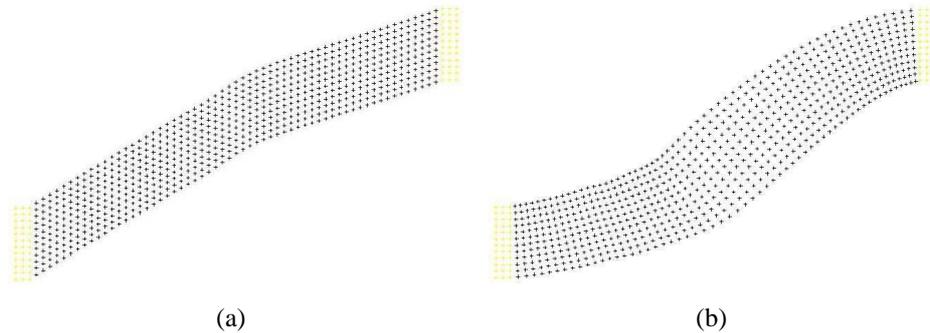


FIG. 2.9: Influence de la prise en compte de la bille centrale : Sans a) et avec b)

Sauf indications contraintes la répartition de Stress points correspond à celle de la figure 2.4. De plus pour les comparaisons SPH/EF une discrétisation de même finesse est employée, ce qui signifie que la taille des quadrangles correspondent à celle des billes SPH.

- Le premier calcul présenté est celui d'une plaque carrée supposée plane, de dimensions 1m x 1m et d'épaisseur 1cm et encadrée sur ses quatre bords. Le chargement imposé est une pression uniforme de 16 MPa. Les déformées observées avec les méthodes MLSPH et EF Q4GS à divers instants sont présentées respectivement sur les figures 2.10(a), 2.10(b), 2.10(c) et 2.10(d) et montrent une très bonne concordance. Il en est de même lorsqu'on compare l'évolution de la flèche au centre de la plaque au cours du temps (figure 2.10(e)).
- Le deuxième cas test est très similaire au précédent, puisque la même géométrie et le même matériau sont utilisés. La différence réside en fait dans le chargement puisque ici un déplacement vertical est imposé sur deux cotés de la plaque (représentés en noir sur la figure 2.11(b)) tandis que les deux autres sont laissés libres. Une onde de flexion est ainsi générée et se propage dans la plaque. Le déplacement vertical du point de contrôle A est étudié et comme on peut le voir sur la figure 2.11(c) à nouveau les résultats obtenus avec les deux méthodes sont très proches.

NB : La déformée de la figure 2.11(a) a été obtenue en réalisant lors du post-traitement (avec le logiciel Paraview) une triangulation de Delaunay. L'intérêt de cette démarche est de reconstituer la "peau" de la coque pour observer plus facilement qu'avec les représentations classiques la propagation des ondes de flexion.

- Pour évaluer l'influence du gauchissement de la structure le cas test de la poutre vrillée a été étudié. Ce cas test initialement présenté par Mc Neal et Harder dans [NEA 85] fait partie des tests de référence pour la validation d'éléments finis coque. Il s'agit en fait d'une poutre vrillée à 90^0 , de longueur 12m, de largeur 1.1m

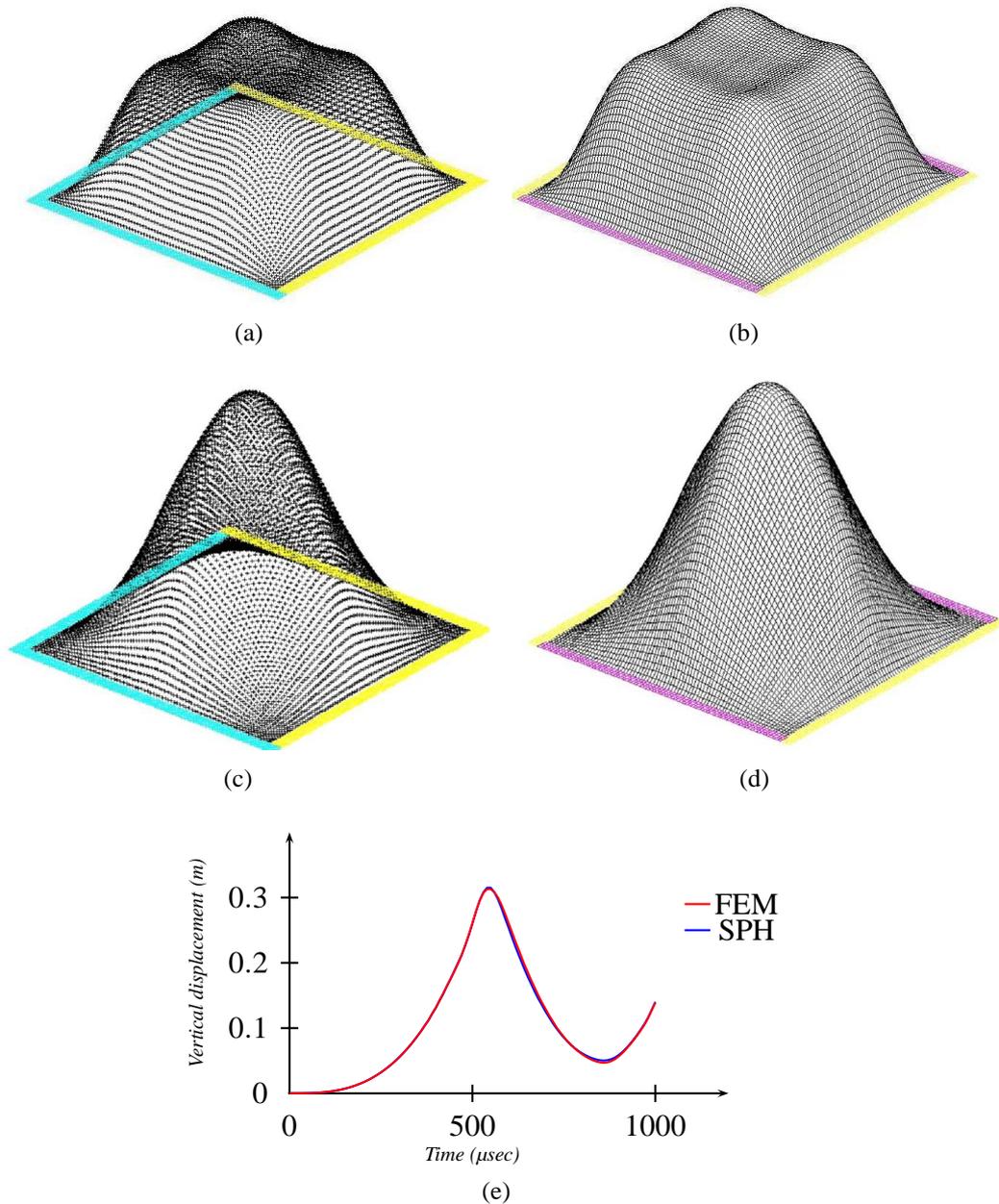


FIG. 2.10: *Deformées observées (amplification $\times 3$) aux temps $t = 0.4 \text{ ms}$ (a) SPH, b) EF) et $t=0.8\text{ms}$ (c) SPH d) EF), e) Comparaison de l'évolution de la flèche au centre de la plaque*

et d'épaisseur 32cm. Elle est soumise à une force verticale à son extrémité de 1N. La matériau employé dans ce cas a les caractéristiques suivantes : $\rho = 7800\text{kg.m}^{-3}$, $E = 2.9e7 \text{ Pa}$ et $\nu = 0.22$. Le déplacement maximal dynamique observé est ensuite comparé avec la solution de référence qui est en fait le résultat statique proposée

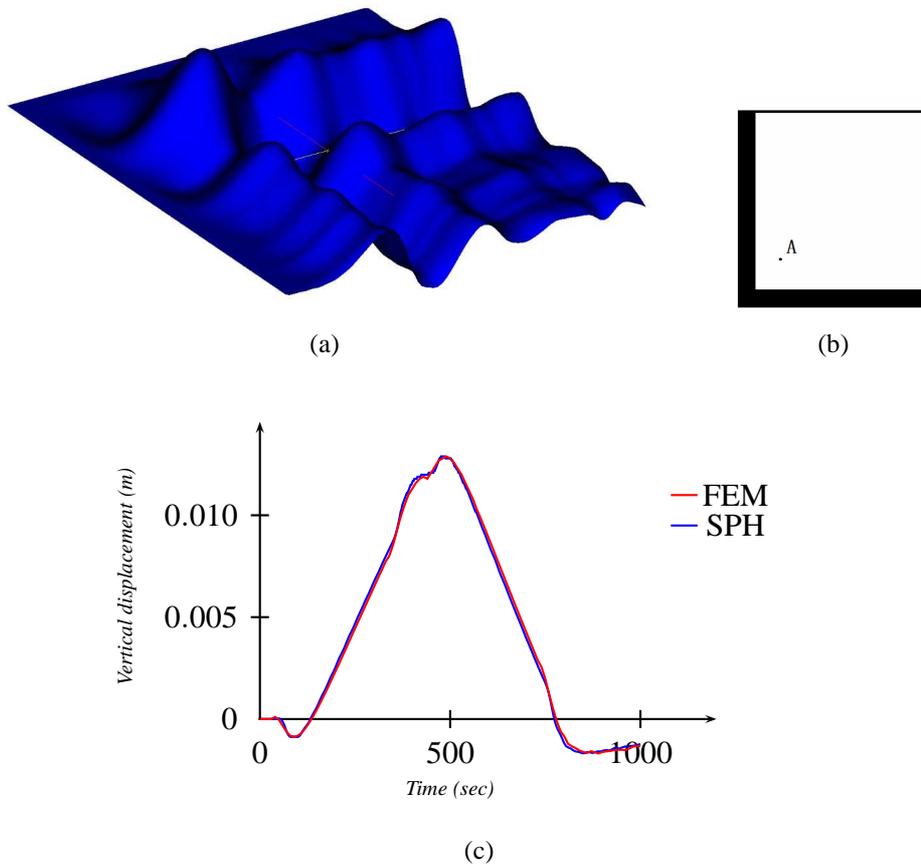
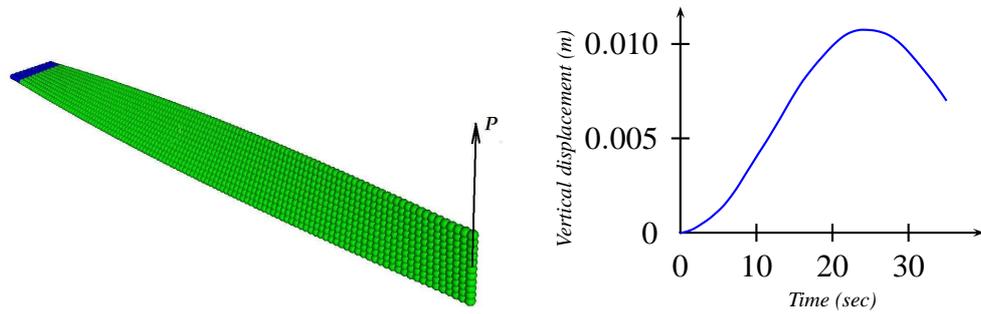


FIG. 2.11: a) Déformée au temps $t = 0.4 \text{ ms}$, b) position du point de contrôle, c) Comparaison de l'évolution de la flèche au centre de la plaque

par Mac Neal dans [NEA 85] (solution EF convergée) de 0.005424 multiplié par 2. Les résultats obtenus (figure 2.12) sont donc très bons.

- Un autre cas test de référence très sévère, faisant intervenir de grands déplacements et de grandes rotations est celui du cylindre pincé proposé par Jiang et Chernuka [JIA 94] et repris notamment par Rabczuk pour valider le comportement de la méthode EFG coque [RAB ss]. Il s'agit d'un cas test quasi statique dans lequel un cylindre de 4.953m de rayon, d'épaisseur 0.094m et de hauteur 10.35m est soumis à deux forces ponctuelles diamétralement opposées P exercées aux points A et A' (figure 2.13). Les caractéristiques du matériau sont : module d'Young $1.05e6 \text{ Pa}$ et coefficient de Poisson 0.3125. On étudie ensuite les déplacements radiaux des points A, B et C en fonction du chargement. Pour ce cas test une intégration plus riche a été utilisée en doublant le nombre de stress points utilisés (figure 2.6). La comparaison des résultats obtenus avec les solutions de référence proposées par Masud, Tham et Liu [MAS 00] est présentée sur la figure 2.1.5. Le



	Max displacement
SPH solution	1.078e-2 m
Reference solution (Mc Neal et al)	1.084e-2 m

FIG. 2.12: *Twisted beam : Comparaison des déplacements dynamiques maxi observés à l'extrémité de la barre*

comportement de la méthode SPH coque est donc tout à fait satisfaisant.

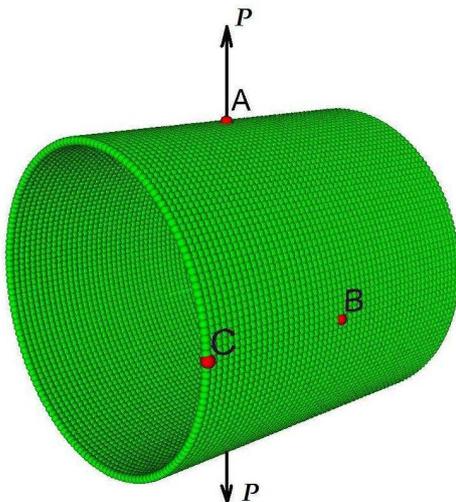


FIG. 2.13: *Pinched cylinder : initial configuration*

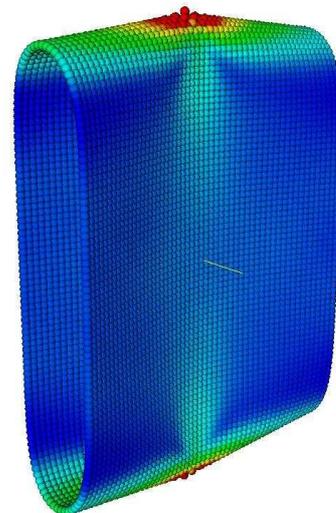


FIG. 2.14: *Pinched cylinder : deformed shape*

- Une étude de la convergence en maillage de la méthode a également été réalisée. Pour ce faire un cas très simple a été utilisé, il s'agit d'une poutre 1D en traction soumise à un champ de déplacement imposé linéaire dans la direction de la poutre. On détermine ensuite l'erreur commise sur le calcul des forces intérieures en comparant les valeurs obtenues sur chaque bille aux valeurs définies analytiquement. L'évolution de la norme L2 de l'erreur avec la finesse de la discrétisation est présentée sur la figure 2.16. On peut y voir que l'ordre de convergence est proche de 2

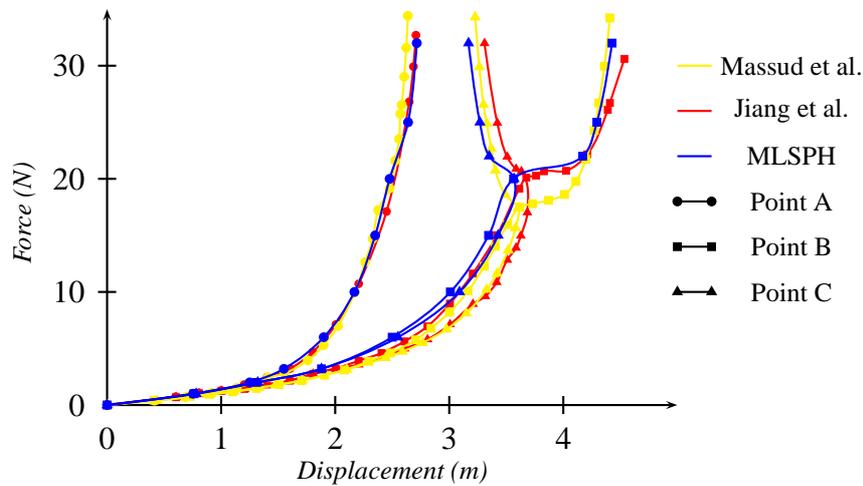


FIG. 2.15: *Pinched cylinder : Load-displacement diagram*

donc quasiment le même que celui de la méthode des éléments finis, ce qui confirme un résultat déjà évoqué dans la littérature.

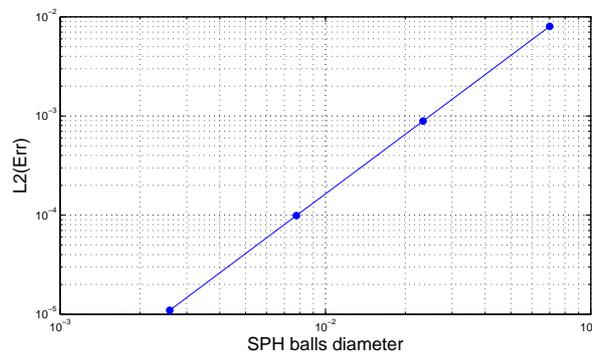


FIG. 2.16: *Vitesse de convergence*

Il est cependant important de remarquer que l'ordre de convergence observé dans les cas tests habituels n'est que de 1. La vitesse de convergence est alors pénalisée par la manière d'imposer les conditions limites. En effet en SPH classiquement pour que la masse totale des billes soit la bonne on positionne les billes sur les bords de telle manière que leur rayon soit tangent au bord du domaine comme on peut le voir sur la figure 2.17. Les centres de ces billes se trouvent alors à l'intérieur du domaine et à une distance de un rayon des bords. Lorsque que l'on va affiner le maillage, le rayon des billes diminuant ces points vont se rapprocher des bords et les conditions limites vont donc se déplacer. D'une certaine manière les conditions limites vont donc "converger" à l'ordre 1 et imposer la vitesse de convergence de l'ensemble. La

solution utilisée dans l'exemple précédent a donc consisté à positionner directement le centre des billes de bords sur les vrais bords du domaine comme sur la figure 2.18. La masse des billes de bord a ensuite été divisée par 2 ou 4 selon que la bille se trouve sur une arête ou sur un coin. Cette technique permet d'avoir un bon ordre de convergence mais devient rapidement coûteuse et complexe à mettre en oeuvre, en particulier dans les cas où les bords ont des formes non régulières comme par exemple dans le cas de ruptures. Cela explique pourquoi elle n'a pas été retenue pour tous les autres calculs mais des réflexions supplémentaires pourront par la suite être menées pour généraliser son emploi.

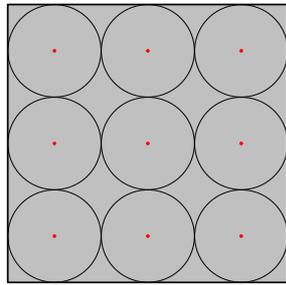


FIG. 2.17: *Discretisation normale*

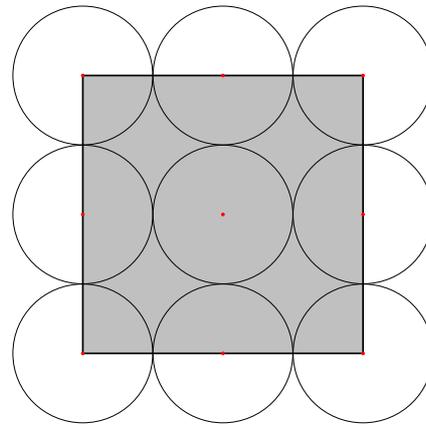


FIG. 2.18: *Discretisation alternative*

2.2 Le modèle de plasticité

2.2.1 Le modèle global

Dans les cas que l'on cherche à modéliser les niveaux de déformations peuvent devenir relativement importants. Le comportement du matériau ne reste plus élastique et devient très souvent élastoplastique. La prise en compte de la plasticité s'avère donc nécessaire. Lorsque la plasticité apparaît, l'hypothèse de linéarité des contraintes dans l'épaisseur de la théorie de Mindlin-Reissner n'est plus valable. Une intégration des contraintes dans l'épaisseur semble donc naturelle et nécessaire. Pour ce faire l'une des techniques les plus courantes dans le cadre de la méthode des éléments finis appliqués aux coques consiste à réaliser une intégration à l'aide d'un certain nombre de points de Gauss supplémentaires (généralement de l'ordre de 5) répartis dans l'épaisseur. Une approche plus simple et moins coûteuse permet de calculer directement les contraintes plastiques à l'aide des éléments de réductions en membrane et flexion. Cette approche a été initiée par Ilyushin [ILY 56] et se base sur l'hypothèse que toute la section plastifie en même temps : cette hypothèse est exacte lorsque la coque voit seulement des efforts de membrane. Dans le

cas d'un matériau plastique parfait on peut ainsi écrire le critère de plasticité sous la forme suivante :

$$f = (\sigma_{VM})^2 - (\sigma_y^0)^2 \quad (2.49)$$

La contrainte équivalente est définie par :

$$(\sigma_{VM})^2 = (\sigma_{L_m}^{eq})^2 + \frac{1}{\psi^2} (\sigma_{L_b}^{eq})^2 + \frac{1}{\psi\sqrt{3}} (\sigma_{L_m}^{eq} \sigma_{L_b}^{eq}) + \kappa (\sigma_{L_s}^{eq})^2 \quad (2.50)$$

Dans cette expression les éléments de réduction équivalents sont définis également au sens de Von-Mises :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\sigma_{L_m}^{eq})^2 = \sigma_{L_{mxx}}^2 + \sigma_{L_{myy}}^2 + 3\sigma_{L_{mxy}}^2 - \sigma_{L_{mxx}} \sigma_{L_{myy}} \\ (\sigma_{L_b}^{eq})^2 = \sigma_{L_{bxx}}^2 + \sigma_{L_{byy}}^2 + 3\sigma_{L_{bxy}}^2 - \sigma_{L_{bxx}} \sigma_{L_{byy}} \\ \sigma_{L_m}^{eq} \sigma_{L_b}^{eq} = \sigma_{L_{mxx}} \sigma_{L_{bxx}} + \sigma_{L_{myy}} \sigma_{L_{byy}} + 3\sigma_{L_{mxy}} \sigma_{L_{bxy}} - \frac{1}{2} (\sigma_{L_{mxx}} \sigma_{L_{byy}} + \sigma_{L_{myy}} \sigma_{L_{bxx}}) \\ (\sigma_{L_s}^{eq})^2 = 3\sigma_{L_{sxz}}^2 + 3\sigma_{L_{myz}}^2 \end{array} \right. \quad (2.51)$$

Rq : Dans la suite nous ferons l'hypothèse que les contraintes de cisaillement transverse n'interviennent pas dans la plasticité ce qui équivaut à annuler le paramètre κ .

Enfin le paramètre ψ permet de régler l'apparition de la rotule plastique à travers l'épaisseur. Dans le cas d'une sollicitation en flexion pure : $\psi = 1$ signifie qu'une rotule plastique apparaît dès que la peau plastifie, et $\psi = \frac{3}{2}$ signifie que la rotule plastique apparaît quand toute l'épaisseur de la coque est plastique.

Pour une coque en flexion pure la loi moment/courbure présente un écrouissage apparent lié au développement progressif de la plasticité à travers l'épaisseur. Pour prendre en compte cet effet Crisfield a modifié l'équation 2.50 en permettant au paramètre ψ de varier entre 1 et 1.5 en fonction de la déformation plastique équivalente de flexion. La formule 2.49 peut également facilement s'étendre au cas des matériaux à écrouissage isotrope en prenant en compte l'écrouissage de la courbe de traction du matériau en fonction de la déformation plastique équivalente p :

$$f = (\sigma_{VM})^2 - (\sigma_y(p))^2 \quad (2.52)$$

En reprenant l'écriture proposée par Zeng et Combescure [ZEN 01] on peut mettre l'équation 2.50 sous la forme :

$$f = \vec{\sigma}_g^t \cdot \mathbf{H} \cdot \vec{\sigma}_g - (\sigma_y(p))^2 \quad (2.53)$$

Dans cette équation la matrice \mathbf{H} est définie par :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \frac{1}{2\psi\sqrt{3}}\mathbf{A} \\ \frac{1}{2\psi\sqrt{3}}\mathbf{A} & \frac{1}{\psi^2}\mathbf{A} \end{bmatrix} \text{ avec } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

2.2.2 L'algorithme de plasticité

L'algorithme de plasticité utilisé est basé comme précédemment dans le cas volumique sur la méthode du retour radial. Sa construction proposée par Zeng et Combescure [ZEN 01] est d'ailleurs tout à fait semblable à celle présentée au paragraphe 1.3.2 et dans l'annexe B.

On suppose ainsi que l'on connaît au pas de temps n le tenseur des contraintes généralisées $\vec{\sigma}_g^n$, l'incrément de déformations $\Delta\vec{\epsilon}_g$ et la limite élastique σ_y^n et l'on cherche à en déterminer les valeurs au pas $n+1$ de $\vec{\sigma}_g^{n+1}$ et de σ_y^{n+1} .

La prédiction élastique est :

$$\vec{\sigma}_g^{*n+1} = \vec{\sigma}_g^n + \mathbf{C} \cdot \Delta\vec{\epsilon} \quad (2.55)$$

Si l'on dépasse la limite élastique l'incrément de contrainte se calcule ensuite grâce à la formule 2.19 :

$$\vec{\sigma}_g^{n+1} = \vec{\sigma}_g^n + \mathbf{C} \cdot (\Delta\vec{\epsilon}_g - \Delta\vec{\epsilon}_p) \quad (2.56)$$

$$\vec{\sigma}_g^{n+1} = \vec{\sigma}_g^{*n+1} - \mathbf{C} \cdot \Delta\vec{\epsilon}_p \quad (2.57)$$

L'incrément de déformations plastique $\Delta\vec{\epsilon}_p$ provient de la loi d'écoulement et de l'incrément de déformation plastique équivalent Δp :

$$\Delta\vec{\epsilon}_p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_g} \cdot \Delta\lambda \quad \text{avec} \quad \Delta\lambda = \frac{\Delta p}{\sigma_y^{n+1}} \quad (2.58)$$

En tenant compte de l'équation 2.53 on obtient :

$$\Delta\vec{\epsilon}_p = \frac{\Delta p}{\sigma_y^{n+1}} \cdot \mathbf{H} \cdot \vec{\sigma}_g^{n+1} \approx \frac{\Delta p}{\sigma_{VM}} \cdot \mathbf{H} \cdot \vec{\sigma}_g^{*n+1} \quad (2.59)$$

On obtient donc à partir des équations 4.13 et 4.16 un système de 2 équations à 2 inconnues $\vec{\sigma}_g^{n+1}$ et Δp :

$$\begin{cases} \vec{\sigma}_g^{n+1} = (1 - \Delta p \cdot \mathbf{Q}) \cdot \vec{\sigma}_g^{*n+1} & \text{avec } \mathbf{Q} = \frac{1}{\sigma_{VM}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{H} \\ (\vec{\sigma}_g^{n+1})^t \cdot \mathbf{H} \cdot \vec{\sigma}_g^{n+1} = \sigma_y^{n+1} = \sigma_y^n + \frac{\partial \sigma_y}{\partial E_p} \cdot \Delta p \end{cases} \quad (2.60)$$

On en déduit :

$$(\sigma_y^{n+1})^2 = ((1 - \Delta p \cdot \mathbf{Q}) \cdot \vec{\sigma}_g^{*n+1})^t \cdot \mathbf{H} \cdot (1 - \Delta p \cdot \mathbf{Q}) \cdot \vec{\sigma}_g^{*n+1} \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned}
 (\sigma_y^{n+1})^2 = & (\vec{\sigma}_g^{*n+1})^t \cdot \mathbf{H} \cdot \vec{\sigma}_g^{*n+1} - 2\Delta p \cdot (\vec{\sigma}_g^{*n+1})^t \cdot \mathbf{Q}^t \mathbf{H} \cdot \vec{\sigma}_g^{*n+1} \\
 & + \Delta E_p^2 \cdot (\vec{\sigma}_g^{*n+1})^t \cdot \mathbf{Q}^t \mathbf{H} \mathbf{Q} \cdot \vec{\sigma}_g^{*n+1}
 \end{aligned} \quad (2.62)$$

On obtient en introduisant le paramètre $\gamma = \frac{1}{\sigma_{VM}} \cdot (\vec{\sigma}_g^{*n+1})^t \cdot \mathbf{Q}^t \mathbf{H} \cdot \vec{\sigma}_g^{*n+1}$:

$$(\sigma_y^{n+1})^2 = \sigma_{VM}^2 - 2\sigma_{VM}\Delta p \cdot \gamma + \Delta E_p^2 \cdot \gamma^2 \quad (2.63)$$

On en déduit en ne gardant que la solution convenable :

$$\sigma_y^{n+1} = \sigma_{VM} - \Delta p \cdot \gamma \quad (2.64)$$

En utilisant de plus la définition de la nouvelle limite élastique σ_y^{n+1} :

$$\sigma_y^{n+1} = \sigma_y^n + \frac{\partial \sigma_y}{\partial E_p} \cdot \Delta p \quad (2.65)$$

On déduit ainsi l'expression de Δp :

$$\Delta p = \frac{\sigma_{VM} - \sigma_y^n}{\gamma + \frac{\partial \sigma_y}{\partial E_p}} \quad (2.66)$$

La nouvelle contrainte $\vec{\sigma}_g^{n+1}$ est ainsi déterminée ainsi que sa contrainte équivalente σ'_{VM} . Cette contrainte est ensuite corrigée par la méthode du retour radial afin d'imposer qu'elle se trouve exactement sur la surface de charge.

$$\vec{\sigma}_g^{c n+1} = \frac{\sigma_y^{n+1}}{\sigma'_{VM}} \cdot \vec{\sigma}_g^{n+1} \quad (2.67)$$

2.2.3 Exemples Numériques

Comme dans le cas élastique une validation est réalisée par comparaison avec des solutions éléments finis. On utilise à nouveau les éléments Q4GS (MITC4), pour lesquels la plasticité est gérée par la méthode classique d'intégration dans l'épaisseur avec 5 points de Gauss et les éléments COQ4 qui utilisent la méthode globale.

- Le premier calcul proposé est celui d'une lamelle encadrée à une extrémité et soumise à une vitesse verticale initiale de 120m/s. Sa longueur est de 1.2m, sa largeur de 0.5m et son épaisseur de 0.12m. Le matériau utilisé, assimilé à de l'aluminium ($E=0.75e11$ Pa, $\rho = 2800Kg/m^3$), est de type Von Mises isotrope non écrouissable (plasticité parfaite) avec une limite élastique $\sigma_y = 200$ Mpa. On compare ainsi l'évolution des flèches à l'extrémité de la lamelle obtenue en SPH avec celle obtenue en utilisant des éléments Q4GS (figure 2.19) ainsi que la répartition des contraintes de Von mises obtenue en utilisant cette fois des éléments

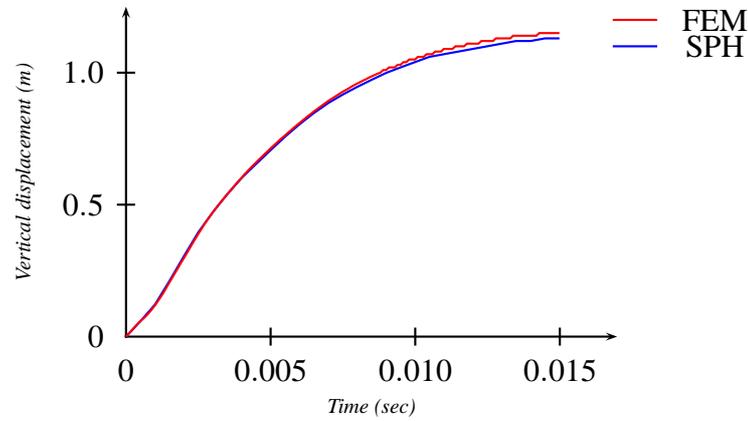


FIG. 2.19: Evolution de la flèche à l'extrémité de la lamelle

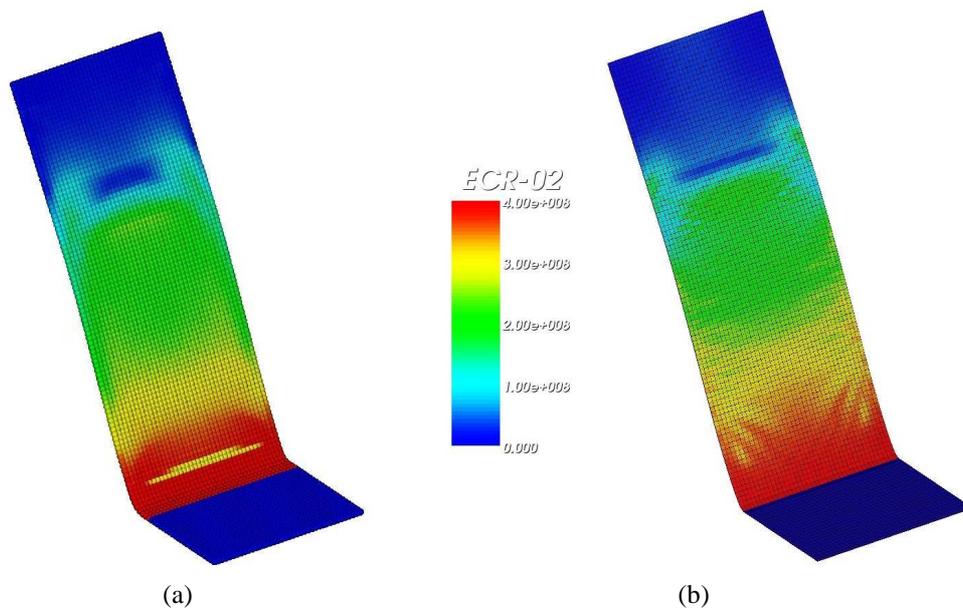


FIG. 2.20: Comparaison des déformées et des répartitions des contraintes de Von-Mises obtenues au temps $t=9ms$ (a) SPH et b) FEM)

COQ4 (figure 2.20). Dans les deux cas la concordance des résultats est très bonne.

- Le deuxième cas test présenté est celui d'un cylindre identique à celui du test du Pinched cylinder et ayant le même matériau que dans le cas test précédent. Ce cylindre est impacté par un projectile sphérique indéformable de diamètre 2m et de masse 22000 Kg à la vitesse de 200m/s. Le calcul réalisé à nouveau simultanément avec la méthode SPH coque et les éléments finis Q4GS. La comparaison de la dé-

formée du cylindre après impact (figure 2.21) ainsi que de l'évolution de la vitesse du projectile (figure 2.22) montrent à nouveau une très bonne concordance.

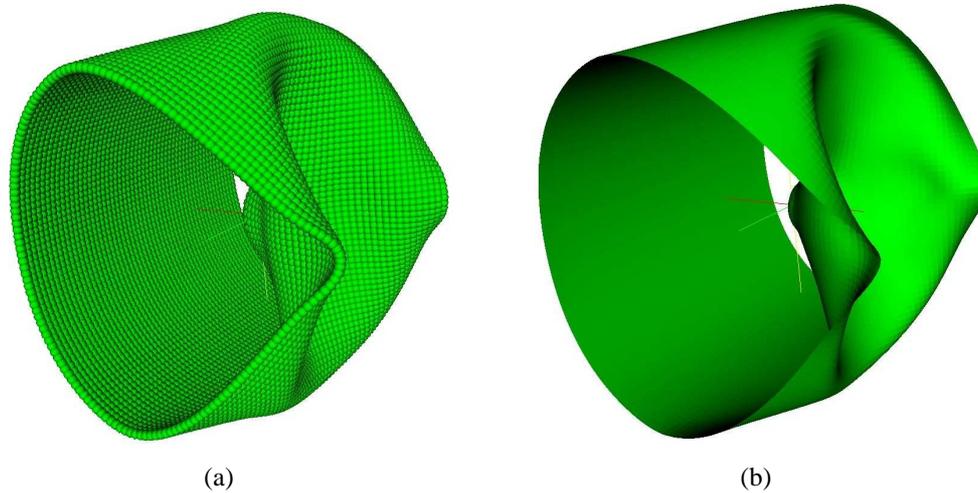


FIG. 2.21: Comparaison des déformées résiduelles obtenues (a) SPH et b) FEM)

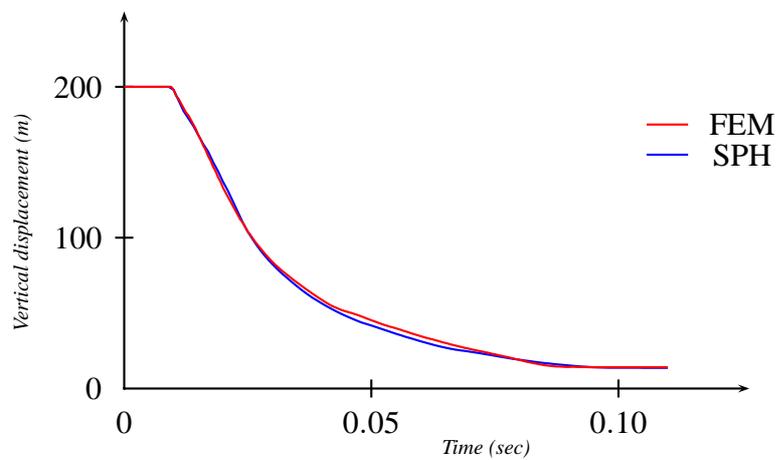


FIG. 2.22: Evolution de la vitesse du projectile

2.3 Applications : Rupture

2.3.1 Critère de rupture

L'utilisation d'une formulation Lagrangienne totale et le fait de ne pas mettre à jour le voisinage des billes rend la méthode incapable de gérer naturellement les ruptures et décohésions de matière. Pour pallier cet inconvénient un critère de rupture doit être utilisé

afin de casser les liaisons entre billes qui se trouvent de part et d'autre de la fracture. Pour ce faire un critère très simple faisant intervenir les distance initiales do_{ij} et actuelles d_{ij} entre billes a été utilisé. Ainsi la liaison i-j est considérée comme rompu si :

$$d_{ij} > (1 + \epsilon_R) \times do_{ij} \quad (2.68)$$

NB : La déformation à rupture d'un acier étant proche de 30% on choisira $\epsilon_R = 0.3$

Si la liaison i-j est rompue alors i est retirée du voisinage de j et réciproquement. Les fonctions de forme sont alors actualisées pour prendre en compte ces variations de voisinage. Une mise à jour de la liste des billes de bords est également réalisée et les conditions limites de bords libres sont imposées aux billes situées sur les nouveaux bords générés par la fracture. On peut noter de plus que comme l'on cherche à discrétiser les bords uniquement à l'aide de vraies particules, on élimine ainsi du calcul tout les stress points se trouvant dans la zone de rupture.

Concernant les fonctions de forme il faut remarquer que leur construction nécessite la présence d'un nombre suffisant de voisins. Par exemple pour les fonctions MLS d'ordre 1 3 voisins sont nécessaire et 6 dans pour l'ordre 2. Au fur et à mesure que les billes perdent leurs voisins une "dégradation" des fonctions de formes doit donc être réalisée pour arriver à l'ordre 0 dans le cas où la bille a moins de 3 voisins. Enfin les billes ne disposant plus que d'un seul voisin sont éliminés du calcul.

2.3.2 Exemples

Plusieurs simulations de rupture ont été réalisées. Compte tenu de la grande simplicité du critère de rupture utilisée celles ci doivent être considérées uniquement comme des illustrations de la capacité de la méthode à gérer des ruptures. Aucune validation n'a donc été réalisée.

Le premier calcul est entièrement 2D. Il s'agit comme on peut le voir sur la figure 2.23(a) d'une lamelle pré fissurée sur la moitié de sa largeur et soumise à des efforts de traction à ses deux extrémités. Le matériau est un acier classique supposé plastique parfait ($E=210 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $\sigma_y = 400 \text{ Mpa}$) et le chargement un déplacement imposé. Les résultats de la simulation, présentés sur les figures 2.23(b), 2.23(c) et 2.23(d) sont tout à fait en accord avec le résultat d'essai attendu qui est une propagation de la fissure à 45° par rapport à la fissure initiale. ce qui est tout à fait en accord avec . On observe de plus sensiblement le même résultat avec différentes finesses de discrétisations ce qui confirme une faible dépendance au maillage.

L'autre simulation réalisée est celle de la perforation d'une plaque carré de 1m de coté et d'épaisseur variant entre 1 et 5 cm par un projectile sphérique indéformable de diamètre 20mm et de grande masse. La matériau de la plaque est le même que précédemment et la vitesse du projectile est de 300 m/s. Les simulations présentées figures 2.24, 2.25(a) et 2.25(b) font apparaître comme souvent dans des essais de ce type un processus de pétalisation. Même si elles n'ont pas été comparés à des résultats expérimentaux on peut

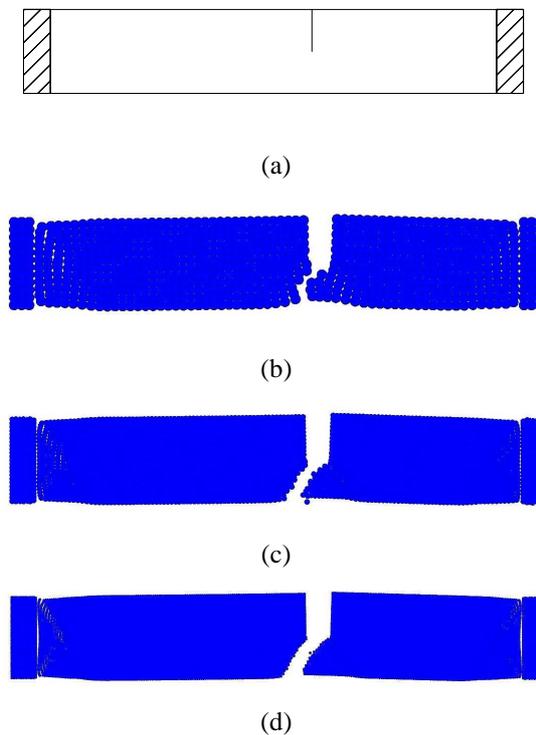


FIG. 2.23: Rupture de la plaque fissurée : b) 800 billes b) 3200 billes d) 12800 billes

tout de même observer que les déformées obtenues sont assez physiques. Le nombre et la forme des pétales différent en fonction de l'épaisseur de la plaque, mais on observe sur les figures 2.25(a) et 2.25(b) comme dans le cas précédent que la dépendance des ruptures au maillage est faible.

2.3.3 Perspectives pour la rupture

Ces cas tests très simples illustrent la capacité de la méthode à gérer des ruptures. Des améliorations importantes peuvent cependant être apportées tant au niveau de la gestion de la rupture que du critère de rupture utilisé. En effet pour respecter la chronologie de la rupture une technique dite d'opacité peut par exemple être envisagée. Cette idée consiste à considérer une liaison cassée comme un écran opaque. Toutes les liaisons "passant au travers" de cet écran devant ensuite être coupées. Cela permet en particulier d'assurer la coupure des liaisons avec les voisins les plus éloignés d'une bille si les liaisons les plus courtes sont coupées ce qui n'est pas rigoureusement assuré par la technique actuelle trop simpliste. De même un critère de rupture plus pertinent doit être mis en oeuvre afin de pouvoir détecter de manière plus fine les liaisons à couper afin de limiter le nombre de liaisons à couper et d'éviter une désagrégation du modèle au niveau des zones de rupture.

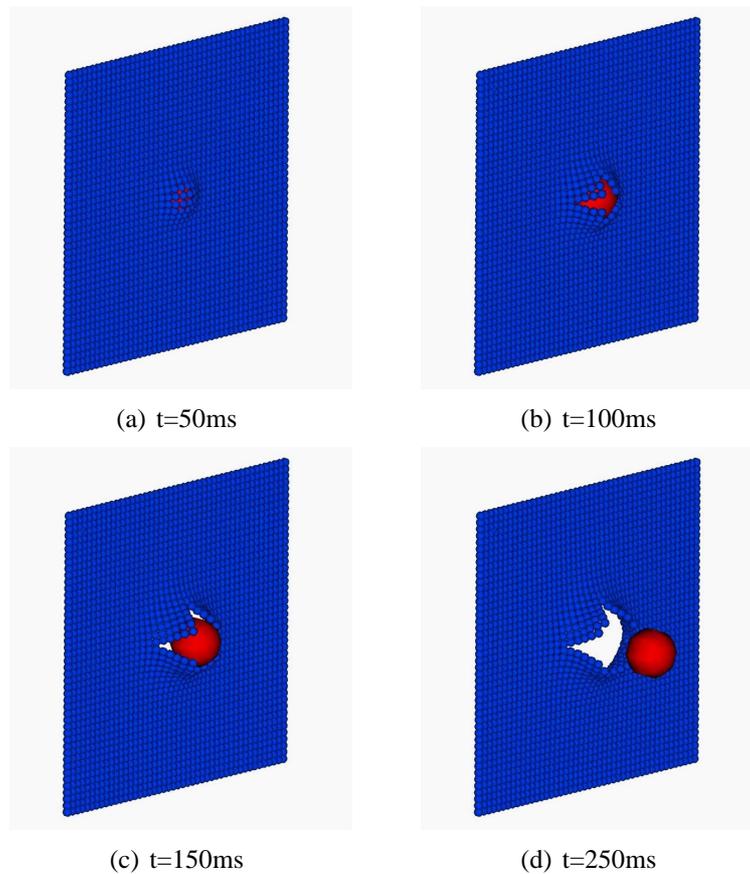


FIG. 2.24: *Perforation d'une plaque d'épaisseur 1 cm par un projectile sphérique (4000 billes)*

2.4 Conclusion

La modélisation d'une coque par la méthode SPH en utilisant une seule couche de billes s'avère donc possible. La formulation mise au point semble de plus stable et précise au vu des différents calculs réalisés. Sur quelques cas simples elle se révèle également capable de gérer simplement et efficacement des ruptures et des déchirures. Des améliorations importantes peuvent cependant être envisagées sur ce point avec l'utilisation d'algorithmes de rupture plus évolués et surtout d'un critère de rupture plus réaliste.

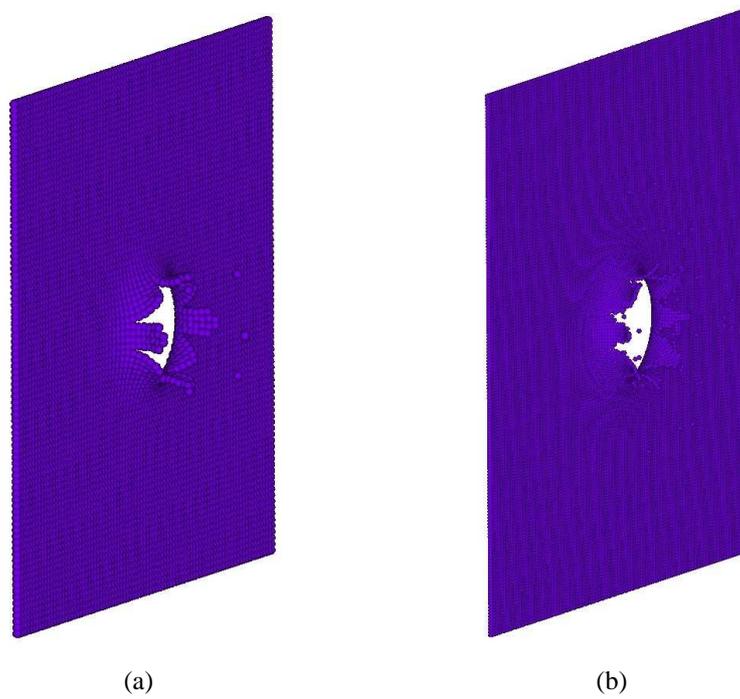


FIG. 2.25: *Perforation d'une plaque d'épaisseur 5cm par un projectile sphérique : a) 15000 billes b) 60000 billes*

Chapitre 3

La gestion du contact

Ce chapitre est consacré à la présentation des algorithmes utilisés pour la gestion des contacts entre deux corps modélisés par la méthode SPH. La technique utilisée reprend en grande partie la méthode pinball d'europlexus qui est un outil fiable et robuste pour ce type de problèmes.

Sommaire

3.1	La gestion du contact avec la méthode SPH	80
3.2	La méthode pinball	81
3.2.1	Détection du contact	81
3.2.2	Calcul des forces de contact	82
3.2.3	Gestion du rebond	86
3.3	Adaptation de la méthode pinball aux contacts SPH/SPH	86
3.3.1	Modifications des algorithmes	87
3.3.2	Calcul des normales	88
3.4	Validation numérique	89
3.4.1	Indentation d'un massif	89
3.4.2	Oscillateur acoustique 1D	91
3.4.3	Impact d'une colonne de fluide sur un massif	93
3.4.4	Impact d'une colonne de fluide sur une plaque	97
3.5	Conclusions et perspectives	101

3.1 La gestion du contact avec la méthode SPH

Il existe dans la littérature relativement peu de solutions pour la gestion de contacts entre des corps modélisés par la méthode SPH. L'une des rares solutions proposées est la méthode dite "naturelle". Cette méthode consiste en fait simplement à laisser les deux corps interagir librement. Les billes de bord de l'un des corps devenant les voisines de celles de l'autre corps et inversement.

Cette méthode présente cependant deux limitations de taille :

- Les rayons des billes des deux corps doivent être proches
- La différence de masse volumique entre les deux corps doit être faible

On comprend alors aisément que le cas des interactions entre un fluide et une structure, où les différences de masse volumique sont proches de 10, sort de ce cadre très restrictif.

Pour illustrer le type de problèmes que l'on peut rencontrer avec cette méthode on réalise un cas test très simple. On modélise l'impact d'une colonne d'eau ($\rho=1000 \text{ kg/m}^3$, $c=1450 \text{ m/s}$) modélisée par 625 billes ($5 \times 5 \times 25$) de diamètre 1cm impactant à 150m/s un massif en acier ($\rho=7800 \text{ kg/m}^3$, $E=2e11 \text{ Pa}$, $\nu=0.3$) représenté par 845 billes ($13 \times 13 \times 5$) de même taille. L'allure des déformées observées est présentée sur la figure 3.1. Sur cet essai il apparaît clairement que les billes fluides ne viennent pas en contact avec les billes solides et s'arrêtent bien avant. Cet effet très caractéristique est appelé dans la littérature effet "coussin d'air". On peut également remarquer que des billes solides sont "aspirées" par le fluide. Cela traduit le fait que d'importantes instabilités se produisent dans le solide, celles-ci étant liées à l'utilisation d'une formulation lagrangienne réactualisée dans ce calcul.

On peut cependant trouver dans différents travaux, comme par exemple ceux de Randles et Libersky [RAN 96] ou de Parshikov et Medin [PAR 02], différentes améliorations pour tenter de remédier à ces problèmes. Malgré ces améliorations, la méthode naturelle pose un autre problème très important. En effet elle n'est pas compatible avec la formulation lagrangienne totale utilisée pour les solides. Dans ce cas la prise en compte des nouveaux voisins qui apparaissent suite aux contacts n'est pas possible. Il devient donc nécessaire d'établir une formulation capable de gérer directement les interactions entre les billes indépendamment de la formulation SPH. Partant d'un constat assez similaire Johnson et Beissel ont proposé dans [JOH 02] de traiter les contacts entre des massifs SPH à l'aide de forces d'interactions déterminées par des méthodes de pénalisation. La solution que nous avons finalement retenue pour la gestion des contacts consiste à réutiliser une approche très similaire à celle-ci existant déjà dans Europlexus pour traiter les impacts de manière générale, la méthode Pinball.

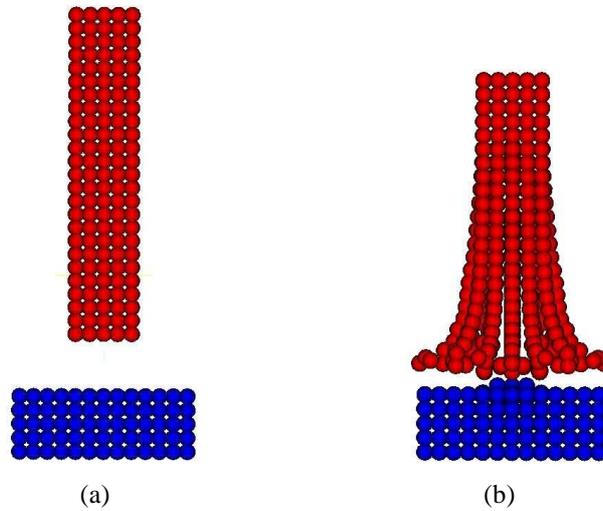


FIG. 3.1: Impact d'une colonne fluide (rouge) sur un massif (bleu)

3.2 La méthode pinball

Dans les calculs de dynamique rapide faisant intervenir plusieurs corps solides déformables maillés en Éléments finis la méthode la plus souvent utilisée pour gérer les problèmes de contacts/ impacts est la logique dite Maître/Esclave qui consiste à détecter la pénétration des faces des éléments maîtres par les noeuds des éléments esclaves. Cependant cette méthode pose un certain nombre de problèmes en particulier par la dissymétrie qu'elle engendre. En effet le choix du maître et de l'esclave est arbitraire et inverser cette affectation peut parfois modifier significativement les résultats obtenus. L'autre difficulté importante à laquelle on est confronté lorsqu'on utilise cette méthode est qu'il existe un certain nombre de cas dits "pathologiques" pour lesquels le contact n'est pas détecté. L'ensemble de ces constatations a donc poussé Belytschko et Neal [BEL 91] à mettre au point une nouvelle méthode, la méthode pinball, permettant de détecter de manière plus simple et plus efficace les contacts. Cette méthode a ensuite été implémentée dans Europlexus [CAS 03],[CAS 05]. La description qui va suivre s'inspire en grande partie de ces travaux, on pourra donc s'y référer pour plus de détails.

3.2.1 Détection du contact

Le principe fondamental de la méthode pinball, comme on peut le voir sur la figure 3.2.1, consiste à insérer des billes dans les éléments finis se trouvant sur les bords des solides entrant en contact. La détection du contact peut alors être exprimée simplement à l'aide des interpénétrations entre ces billes.

Une couleur est associée à chaque bille en fonction du rattachement de celle-ci à l'un ou l'autre des corps, ce qui permet de ne rechercher par la suite les contacts que pour des couples de billes de couleurs différentes (il est possible cependant de gérer le contact

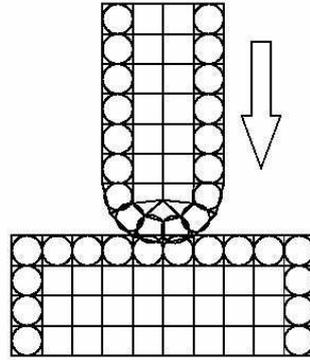


FIG. 3.2: *exemple de génération des pinballs pour deux corps EF*

entre deux billes de même couleur pour les cas d'auto-contacts).

Une bille i est ensuite considérée en contact avec une bille j si il y a interpénétration, ce qui signifie :

$$d_{ij} \leq |R_i - R_j| \quad (3.1)$$

NB : d_{ij} correspond à la distance entre deux billes tandis que R_i et R_j sont les rayons des pinballs i et j

Cette méthode de détection des contacts se révèle donc particulièrement simple ce qui la rend très efficace. On peut ainsi montrer qu'elle permet de s'affranchir de la quasi totalité des cas pathologiques rencontrés avec les méthodes conventionnelles de type maître/esclave.

3.2.2 Calcul des forces de contact

Lorsque deux pinballs sont en contact des forces de répulsion apparaissent. Le calcul de celle-ci peut se faire suivant deux approches différentes :

- méthode de pénalisation : Il s'agit de la méthode initialement employée par Belytshko, mais elle présente l'inconvénient de recourir à des paramètres de calage dont la détermination n'est pas toujours aisée,
- multiplicateurs de Lagrange : C'est la méthode utilisée sous Europlexus et c'est donc à celle-ci que nous allons nous intéresser.

Comme nous l'avons déjà vue au paragraphe 1.3.1, Europlexus est un code de calcul dynamique explicite basé sur un schéma d'intégration en temps de type différences centrées. L'accélération d'une bille est calculée à chaque pas de temps à l'aide de l'équation

suivante :

$$m.\vec{a}^t = \vec{f}_e^t - \vec{f}_i^t \quad (3.2)$$

A partir des accélérations on peut mettre à jour les vitesses à l'aide de l'expression également vu au paragraphe 1.3.1 :

$$\vec{v}^{t+\Delta t} = \vec{v}^t + \frac{1}{2}(\vec{a}^t + \vec{a}^{t+\Delta t})\Delta t \quad (3.3)$$

En réalité dans Europlexus les algorithmes de gestion de contacts utilisent les vitesses avancées au demi pas $\vec{v}^{t+\Delta t/2}$ et $\vec{v}^{t+3\Delta t/2}$. Le passage de l'une à l'autre se fait en écrivant :

$$\vec{v}^{t+3\Delta t/2} = \vec{v}^{t+\Delta t/2} + \vec{a}^{t+\Delta t}\Delta t \quad (3.4)$$

Si la bille entre en contact, alors l'équation 3.2 doit être modifiée au pas de temps suivant pour faire intervenir une force supplémentaire notée \vec{r} traduisant le contact. Elle devient :

$$m.\vec{a}^{t+\Delta t} = \vec{f}_e^{t+\Delta t} - \vec{f}_i^{t+\Delta t} - \vec{r}_i^{t+\Delta t} \quad (3.5)$$

Cette force de réaction est déterminée de manière à permettre aux nouvelles vitesses $\vec{v}^{t+3\Delta t/2}$ de respecter la condition de compatibilité des vitesses. Celle-ci impose que les composantes normales à la surface de contact des vitesses soient égales. Ainsi pour deux billes i et j en contact, en notant \vec{n} le vecteur normal à la surface de contact, on écrit :

$$(\vec{v}_i^{t+3\Delta t/2} - \vec{v}_j^{t+3\Delta t/2}) \cdot \vec{n}^{t+\Delta t} = \vec{0} \quad (3.6)$$

Le vecteur normal \vec{n} est une grandeur fondamentale dans la gestion du contact. La méthode la plus simple pour le déterminer consiste à utiliser la direction de la droite reliant les centres des deux billes. En notant \vec{x}_i et \vec{x}_j les positions respectives des centres des pinballs i et j on obtient :

$$\vec{n} = \frac{\vec{x}_i - \vec{x}_j}{\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|} \quad (3.7)$$

Cette technique est utilisée par défaut dans Europlexus voilà pourquoi par la suite nous désignerons normales par défaut les vecteurs \vec{n} calculés de cette manière. Il existe cependant d'autres techniques se basant notamment sur la géométrie des Eléments finis parents des pinballs, mais elles ne seront pas détaillées ici. Pour plus de détails sur ce sujet se référer à [CAS 03].

NB : On peut noter dans l'équation 3.6 que les vitesses utilisées sont avancées au demi pas suivant c'est à dire à $t + 3\Delta t/2$ tandis que les normales sont calculées sur la géométrie au pas $t + \Delta t$. L'erreur théorique ainsi commise est cependant négligeable.

Comme une bille peut entrer en contact simultanément avec plusieurs autres, sa vitesse peut être amenée à devoir respecter plusieurs conditions de compatibilité en même temps.

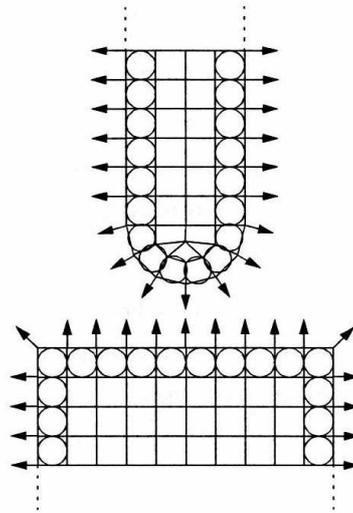


FIG. 3.3: *exemple de génération de pinballs avec leurs normales associées*

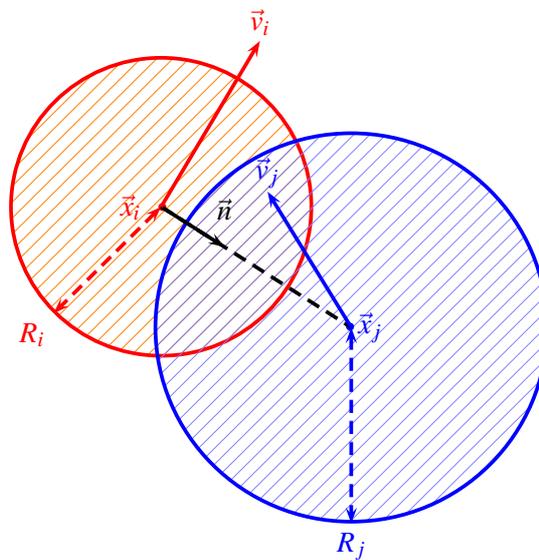


FIG. 3.4: *Différentes grandeurs intervenant dans le contact*

L'ensemble des équations 3.6 forme alors un système d'équation que l'on peut noter sous la forme :

$$\mathbf{C} \cdot \vec{V}^{t+3\Delta t/2} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \vec{V}^{t+3\Delta t/2} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ v_{i_1}^{t+3\Delta t/2} \\ v_{i_2}^{t+3\Delta t/2} \\ v_{i_3}^{t+3\Delta t/2} \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

NB : Le vecteur \vec{V} a une dimension variable car il regroupe l'ensemble des degrés de libertés concernés par les conditions de contact au cours des différents pas de temps. Les vecteurs accélération \vec{A} ou encore forces par la suite auront la même dimension.

En injectant dans l'équation 3.8 l'équation 3.4 on obtient :

$$\mathbf{C} \cdot (\vec{V}^{t+\Delta t/2} + \Delta t \cdot \vec{A}^{t+\Delta t}) = \vec{0} \quad (3.9)$$

Soit écrit sous une autre forme :

$$\mathbf{C} \cdot \vec{A}^{t+\Delta t} = \frac{-1}{\Delta t} \mathbf{C} \vec{V}^{t+\Delta t/2} \quad (3.10)$$

De même à l'aide de l'équation 3.5 on trouve :

$$\mathbf{C} \cdot \vec{A}^{t+\Delta t} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{M}^{-1} (\vec{f}_e^{t+\Delta t} - \vec{f}_i^{t+\Delta t} - \vec{r}^{t+\Delta t}) \quad (3.11)$$

La force de réaction que l'on cherche à calculer s'écrit également sous la forme :

$$\vec{r}^{t+\Delta t} = \mathbf{C}^t \cdot \vec{\lambda} \quad (3.12)$$

Dans cette équation le vecteur $\vec{\lambda}$ est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange. A partir de cette expression et en réarrangeant l'ordre des termes de l'équation 3.11 on aboutit à :

$$\mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{C}^t \cdot \vec{\lambda} = \mathbf{C} \cdot \vec{A}^{n+1} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{M}^{-1} (\vec{f}_e^{t+\Delta t} - \vec{f}_i^{t+\Delta t}) \quad (3.13)$$

On peut écrire cette dernière expression plus simplement sous la forme :

$$\mathbf{B} \cdot \vec{\lambda} = \mathbf{W} \quad (3.14)$$

Avec :

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{C}^t \quad (3.15)$$

$$(3.16)$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{C} \cdot \vec{A}^{t+\Delta t} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{M}^{-1} (\vec{f}_e^{t+\Delta t} - \vec{f}_i^{t+\Delta t}) \quad (3.17)$$

$$= \frac{-1}{\Delta t} \mathbf{C} \cdot \vec{V}^{t+\Delta t} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{M}^{-1} (\vec{f}_e^{t+\Delta t} - \vec{f}_i^{t+\Delta t}) \quad (3.18)$$

On peut alors obtenir les multiplicateurs de Lagrange en écrivant simplement :

$$\vec{\lambda} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{W} \quad (3.19)$$

On déduit enfin de la formule 3.12 les valeurs des forces de réaction dues au contact.

3.2.3 Gestion du rebond

Comme nous l'avons déjà évoqué deux billes pinballs sont considérées en interaction si elles s'interpénètrent. Une fois le contact traité il faut être capable de déterminer le rebond c'est-à-dire le moment où les billes vont commencer à s'éloigner. Les forces de contact calculées étant en effet des forces de répulsion elles n'ont de sens que si les pinballs sont dans une phase de rapprochement.

Pour détecter le rebond il existe actuellement deux techniques dans Europlexus, une méthode dite à posteriori et une méthode dite a priori. La méthode a posteriori étant la moins performante elle ne sera pas traitée ici. La méthode dite "a priori" quant à elle est actuellement la méthode par défaut dans Europlexus. Son principe est assez simple et reprend une grande partie du formalisme déjà employé. On se place à nouveau au pas de temps $t + \Delta t$ et on regarde un couple de pinballs i, j en interaction. On suppose initialement qu'il n'y a pas contact entre ces billes et donc qu'aucune forces de réaction n'est appliquée. Une prédiction des positions des billes au pas de temps suivant peut être réalisée en utilisant l'équation 3.2. En notant avec une * toutes les grandeurs associées à cette configuration virtuelle on peut écrire :

$$m \cdot \vec{a}^* = \vec{f}_e^{t+\Delta t} - \vec{f}_i^{t+\Delta t} \quad (3.20)$$

$$\vec{v}^* = \vec{v}^{t+\Delta t/2} + \vec{a}^{t+\Delta t} \Delta t \quad (3.21)$$

$$\vec{x}^* = \vec{x}^{t+\Delta t} + \vec{v}^* \Delta t \quad (3.22)$$

On réalise ainsi une prédiction d_{ij}^* de la distance entre les deux centres et on la compare à la valeur actuelle d_{ij} . On considère alors simplement qu'il y a rebond si :

$$d_{ij}^* \geq d_{ij} \quad (3.23)$$

3.3 Adaptation de la méthode pinball aux contacts SPH/SPH

La méthode pinball que nous venons de décrire de par sa nature, reposant sur l'utilisation de billes est naturellement transposable à la gestion de contacts entre corps modélisés en SPH. Les pinballs correspondant alors simplement aux billes se trouvant sur les bords des corps en contact.

3.3.1 Modifications des algorithmes

La méthode Pinball implémentée dans Europlexus a été conçue dès le départ pour pouvoir prendre en compte une grande variété d'éléments. Elle offre donc déjà la possibilité de gérer de nombreux types de contacts comme par exemple entre des billes SPH et des éléments finis, entre des points matériels et des éléments finis ou encore entre des billes SPH et points matériels. Cependant dans le cadre qui nous intéresse, à savoir le contact entre deux corps SPH, un certain nombre de modifications sont nécessaires.

La seule modification vraiment indispensable à apporter est l'ajout de ce que nous appellerons par la suite un "effet masque". En effet comme nous l'avons vu précédemment si rien n'est fait lorsque qu'un corps SPH fluide (utilisant un formalisme lagrangien réactualisé) va rencontrer un corps solide il va intégrer les billes de ce dernier dans le voisinage des siennes. Une interaction parasite va donc apparaître et conduire la plupart du temps à des comportements aberrants. Pour éliminer cela il faut donc empêcher les deux corps de se "voir" autrement qu'au travers de la méthode pinball. Dans la pratique cela est réalisé en modifiant l'algorithme de recherche des voisins. Tous les voisins repérés n'étant pas de la même nature que la bille centrale ne sont pas pris en compte. Vis-à-vis de cette distinction pour l'instant seuls trois types de billes peuvent ainsi être identifiés :

- bille fluide,
- bille solide,
- bille coque.

NB : Les contacts entre deux coques ou entre deux corps solides ne sont ainsi pour l'instant possibles que si ils ne sont pas en contact au début du calcul. En effet si deux corps solides sont en contact au pas de temps 0 il ne sera pas possible de les différencier et ils seront traités comme un seul massif. Des évolutions sont donc à prévoir sur ce point.

Dans le cas de billes fluides les voisins non pris en compte ne sont pas ignorés complètement et sont stockés dans des tableaux de voisinage alternatifs. Ces tableaux sont ensuite utilisés pour la gestion des contacts. En effet dans la méthode pinball implémentée dans Europlexus la recherche des connections n'est pas optimisée. Ainsi si N est le nombre de pinballs déclarées au début du calcul, pour chaque pinball on considère que tous les autres pinballs du problème peuvent potentiellement entrer en contact. On va donc tester N connections possibles pour chaque pinball soit un total de N^2 opérations. La modification réalisée consiste, dans le cas où l'un des deux corps est un fluide, à ne chercher les connections possibles que pour les pinballs associés à des billes fluides. On ne cherche alors pour ces billes les interpénétrations qu'avec les pinballs associées à des billes solides ou coques se trouvant dans leur voisinage. Cela réduit le plus souvent à moins de 5 le nombre de connections à tester pour chaque bille soit $5N_f$ (N_f étant le nombre de pinballs fluides) opérations au total si les corps sont en contact et à 0 si ils ne le sont pas. Dans les calculs où le nombre de billes est important on divise fréquemment le temps de calcul par 20 ce qui illustre bien l'intérêt de cette modification.

3.3.2 Calcul des normales

Comme nous l'avons vu les normales sont des grandeurs fondamentales pour la gestion des contacts. Une attention toute particulière doit donc être dédiée à leur détermination. L'utilisation des normales par défaut définies par l'équation 3.7 présente l'avantage d'être une approche simple et robuste. Il s'agit de plus dans Europlexus de la seule solution possible lorsque l'on utilise la méthode pinball avec des éléments autres que les éléments finis. La direction du contact ainsi définie peut s'avérer cependant très différente de la direction réelle. Une détermination plus réaliste des normales est donc nécessaire.

Nous ne nous intéresserons ici qu'aux contacts de type fluide-solide ou fluide-coque. Dans ces deux cas on considère alors que c'est la géométrie du corps le moins déformable donc le solide ou la coque qui va imposer la direction du contact.

Dans le cas d'une coque, la normale à la surface de contact est donc simplement la normale au plan moyen de la coque. Les vecteurs normaux \vec{n} correspondent alors aux vecteurs \vec{n}_3 définis dans l'équation 2.13 du paragraphe 2.1.1.

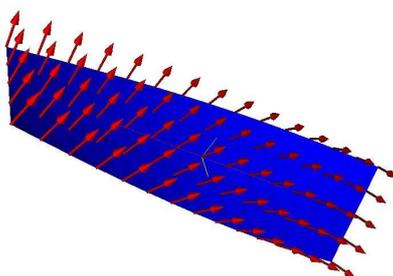


FIG. 3.5: Calcul des normales dans le cas d'une coque

Pour les solides un calcul des normales aux bords doit être réalisé. Pour ce faire on réutilise en 3D la même technique que celle présentée au paragraphe 2.1.4 en 2D pour les coques. Les vecteurs \vec{n} sont alors calculés à partir de l'équation suivante :

$$\vec{n} = \mathbf{F}^{-1}\vec{n}_0 = \mathbf{F}^{-1} \frac{\vec{grad}_0(\beta)}{\|\vec{grad}_0(\beta)\|} \quad (3.24)$$

Comme on peut le voir sur la figure 3.6 même pour des structures subissant de grandes déformations le calcul des normales donne des résultats tout à fait satisfaisants.

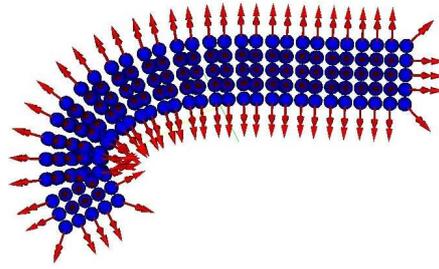


FIG. 3.6: Calcul des normales dans le cas d'une poutre en grandes déformations

3.4 Validation numérique

3.4.1 Indentation d'un massif

La première validation numérique réalisée correspond à un cas test proposé dans Europlexus pour la validation de la méthode pinball avec des éléments finis. Il s'agit de modéliser l'indentation d'un massif constitué d'un acier classique ($E=2e11$ Pa, $\nu=0.3$ et $\rho=7800\text{kg}/\text{m}^3$) supposé plastique parfait (limite élastique $\sigma_y=5.10^7$ Pa) par un indenteur sphérique rigide. Le rayon R de l'indenteur est de 0.5m tandis que le massif est un parallélépipède de dimensions $6R \times 6R \times 3R$ soit $3\text{m} \times 3\text{m} \times 1.5\text{m}$. L'indenteur descend à une vitesse constante de 10 m/s. On étudie alors la force à exercer sur l'indenteur pour assurer sa descente et on compare les solutions obtenues à une solution de référence.

La solution de référence est fournie dans [CAS 05] et établie la relation suivante entre la force F et la profondeur de pénétration δ :

$$F = 6,405.10^8 . \delta \quad (3.25)$$

A partir de cette expression on peut définir l'évolution de F en fonction du temps étant donné que la vitesse de descente est constante et fixée à $10\text{m}/\text{s}$. On obtient alors :

$$F = 6,405.10^9 . t \quad (3.26)$$

Pour la simulation on utilise un massif modélisé par la méthode SPH solide tandis que l'indenteur est représenté par un élément de type point matériel de grande masse. On associe alors à ce point matériel une pinball de rayon R . Dans ce cas particulier le corps le moins déformable est l'indenteur, c'est donc à partir de lui que l'on va définir les normales pour le contact. Sa géométrie étant sphérique les normales exactes correspondent en fait aux normales par défaut, on utilisera donc ces dernières pour les calculs.

Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 3.8 et montrent une bonne concordance avec la solution de référence.

NB : La présence des nombreux "pics" sur la solution SPH peut s'expliquer par l'existence de cycles de décollement/recollement. En effet le recollement implique pour les billes concernées une accommodation de leur vitesse à la vitesse de l'indenteur sur un seul pas de temps.

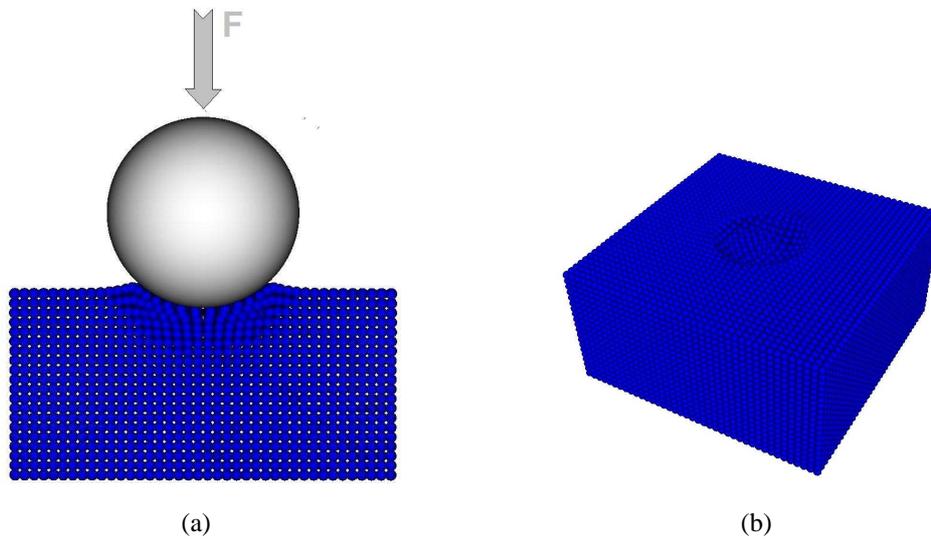


FIG. 3.7: a) Massif SPH + indenteur b) déformée finale

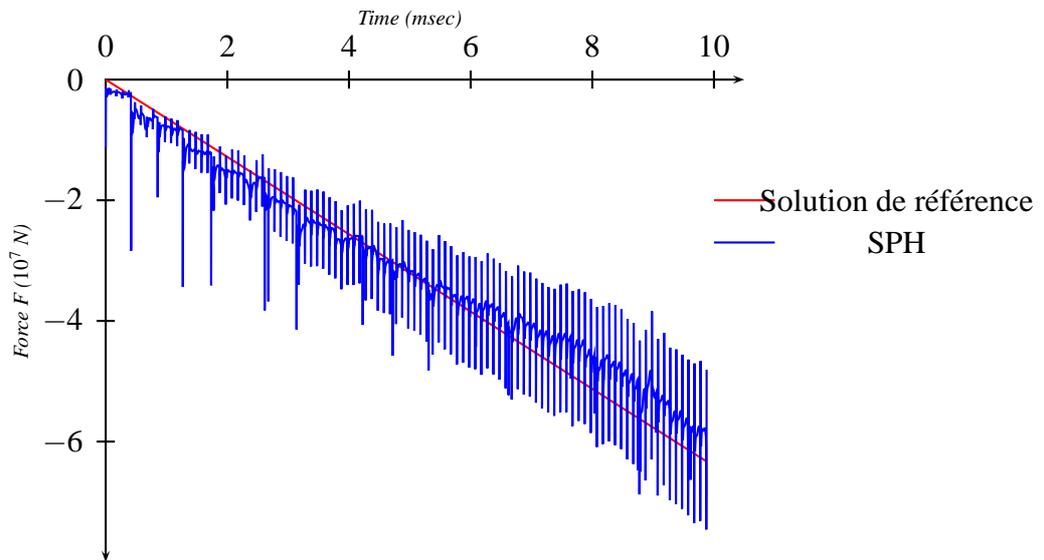


FIG. 3.8: Evolution de la force F en fonction du temps

3.4.2 Oscillateur acoustique 1D

Pour étudier le comportement de l'algorithme pinball dans le cas d'interactions entre un fluide et une structure on s'intéresse au problème du piston. Il s'agit d'un cas simple unidimensionnel classique qui présente l'avantage de disposer d'une solution analytique dans le domaine fréquentiel. Il fait intervenir une colonne de fluide peu compressible emprisonnée dans un tube aux parois rigides. Ce tube est fermé à l'une de ses extrémités par un fond rigide et à l'autre par un piston de masse m lui-même retenu par un ressort de raideur k . Le problème traité ici est légèrement différent puisqu'on remplace le système masse/ressort par un solide de masse et de raideur équivalente (figure 3.9).

NB : Les grandeurs associées aux parties fluides et solides seront par la suite identifiées respectivement par les indices f et s .

Les dimensions du modèle sont $L_f=1.0\text{m}$ et $L_s=0.2\text{m}$ pour une section carré de coté 10cm. Le fluide utilisé est assimilable à de l'eau, avec $\rho_f=1000\text{ kg/m}^3$ et $c_f=1500\text{ m/s}$, tandis que les caractéristiques du solide sont $E=2e8\text{ Pa}$, $c_s=316\text{ m/s}$ et $\rho_s=2000\text{ kg/m}^3$.

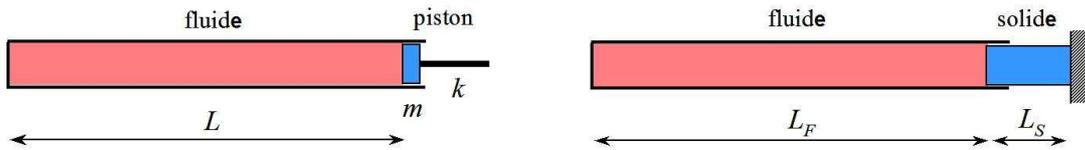


FIG. 3.9: *Problème du piston (gauche) et problème traité (droite)*

- On détermine tout d'abord analytiquement la fréquence d'oscillation du système couplé. On suppose que le système n'est soumis qu'à de petites déformations autour sa position d'équilibre. Les deux grandeurs fondamentales intervenant dans l'étude du comportement du système couplé sont la pression dans le fluide p et le déplacement u_s dans le solide. L'évolution de ces deux grandeurs peut être déterminée à l'aide des équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

Les solutions du système d'équations ainsi obtenu sont recherchées sous la forme :

$$\begin{cases} p(x,t) = P(x)e^{i\omega t} \\ u_s(x,t) = U(x)e^{i\omega t} \end{cases} \quad (3.28)$$

On peut écrire alors le système 3.27 de la manière suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + k_f^2 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0 \text{ avec } k_f^2 = \frac{\omega^2}{c_f^2} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + k_s^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \text{ avec } k_s^2 = \frac{\omega^2}{c_s^2} \end{cases} \quad (3.29)$$

Les solutions de ce système sont :

$$\begin{cases} P(x) = C_1.e^{ik_ft} + C_2.e^{-ik_ft} \\ U(x) = C_3.e^{ik_st} + C_4.e^{-ik_st} \end{cases} \quad (3.30)$$

Les constantes C1,C2,C3 et C4 sont déterminées à l'aide des conditions limites :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(0) = 0 \\ U(L_f + L_s) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x}(L_f) = \frac{N}{ES} = \frac{-P}{S} \\ \frac{\partial P}{\partial x} = \rho_f \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\rho_f \omega^2 U \end{cases} \quad (3.31)$$

La résolution du système ainsi obtenu conduit à la relation suivante :

$$\frac{\tan(\omega L_f / c_f)}{\tan(\omega L_s / c_s)} = \lambda \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{\rho_f c_f c_s}{E} \quad (3.32)$$

La solution de l'équation 3.32 est ensuite déterminée graphiquement à partir de la figure 3.10. La pulsation propre du système est ainsi de 2275 rad/s.

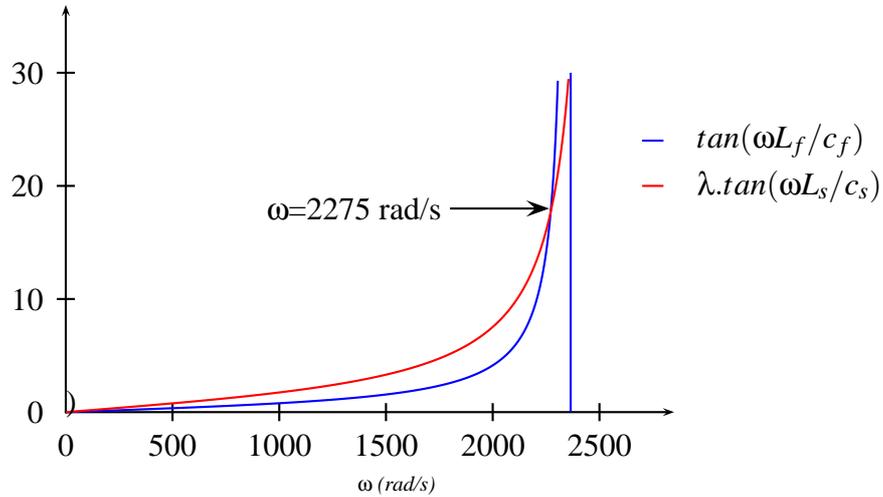


FIG. 3.10: Détermination graphique de la solution analytique

- Le modèle SPH utilisé est présenté sur la figure 3.11. Il est constitué de 12200 billes de diamètre 1cm ce qui représente 10x10 billes par section. La fréquence des oscillations obtenues lorsqu'on impose une force F de 12500N est comparée à la solution analytique tandis que l'amplitude est validée par comparaison avec les résultats provenant d'un modèle Volume Finis (pour la partie fluide) / Eléments finis (pour la partie solide). Les réponses des deux modèles en pression, vitesse et

déplacement au niveau de l'interface sont visibles sur la figure 3.12. La période des oscillations observées dans le cas SPH est ainsi de 2.72 ms ce qui correspond à une pulsation de 2310 rad/s donc très proche de la solution analytique. De même comme on peut le voir sur la figure 3.12 les réponses des deux modèles sont très similaires. Le couplage fluide/structure ici est donc géré de manière tout à fait satisfaisante.

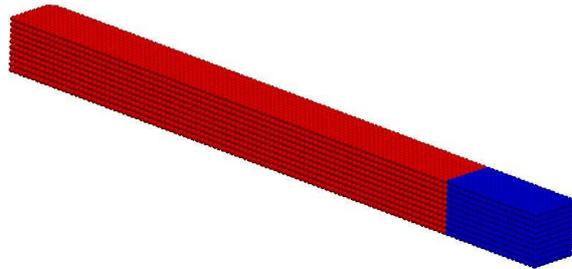


FIG. 3.11: *Modèle SPH utilisé*

3.4.3 Impact d'une colonne de fluide sur un massif

Dans cet essai on cherche à modéliser l'impact à 150 m/s d'une colonne de fluide sur un massif. Les éléments constitutifs du modèle sont résumés sur la figure 3.13 tandis que l'allure générale du déroulement de la simulation est présenté sur la figure 3.14. On réalise cinq séries de calculs définis de la manière suivante :

- cas 1 : calcul servant de référence. Ce modèle est similaire à celui de la figure 3.13 mais le massif y est modélisé par la méthode des éléments finis. On utilise alors le couplage classique existant sous Europlexus entre billes SPH et éléments finis. Pour une description de cette méthode de couplage se référer à la thèse d'Antoine Letellier [LET 96].
- cas 2 : calcul entièrement en SPH avec couplage par la méthode pinball utilisant les normales calculées.
- cas 3 : identique au cas 2 mais les normales calculées sont remplacées par les normales par défaut.
- cas 4 : identique au cas 2 mais la colonne fluide est légèrement décalée par rapport au massif. (Dans ce cas la mesure réalisée est celle de l'énergie cinétique de la partie fluide)
- cas 5 : identique au cas 4 mais les normales calculées sont remplacées par les normales par défaut.

3. La gestion du contact

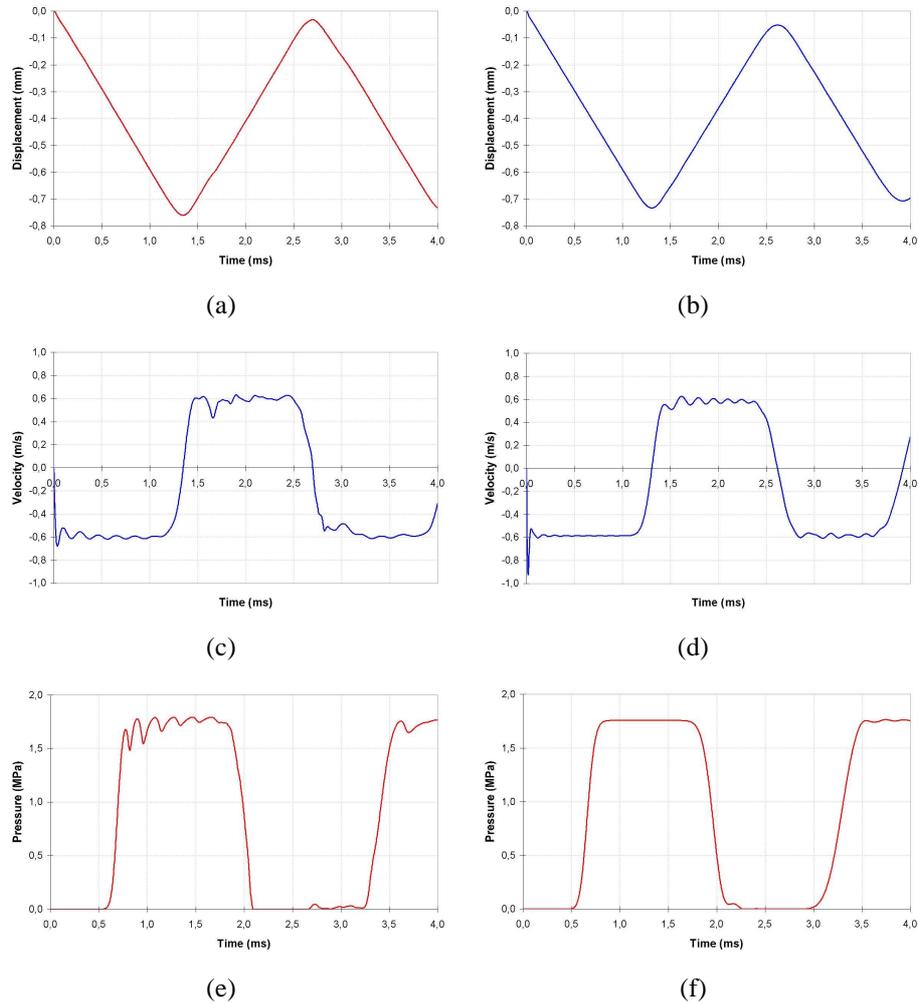


FIG. 3.12: Réponse du modèle SPH (gauche) et Volumes finis / Elements finis (droite)

Des comparaisons sont ensuite réalisées entre les résultats des différents essais. On compare tout d'abord l'évolution des énergies de déformations et cinétiques dans les parties solides et fluides du modèle. Comme on peut le voir sur les figures 3.15 et 3.16 les cas 1 et 2 donnent des résultats très proches ce qui atteste du bon comportement de la méthode pinball utilisant les normales calculées. A l'inverse il apparaît clairement que le cas 3 est sensiblement différent des autres ce qui dénote un comportement nettement moins satisfaisant de la méthode pinball lorsque les normales par défaut sont utilisées. On remarque en particulier dans le cas 3 que le fluide perd d'avantage d'énergie cinétique que dans les autres essais et que dans le même temps le massif reçoit plus d'énergie de déformations. Cela s'explique aisément par la présence de pseudo forces de frottement dues à l'orientation des normales qui ne sont pas perpendiculaires à la surface de contact.

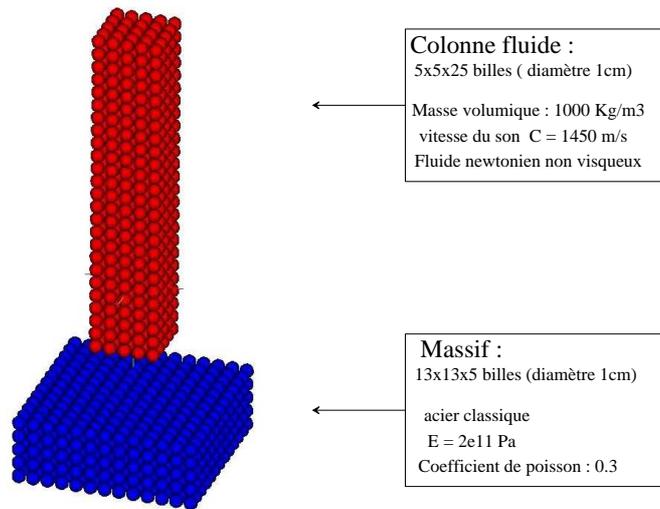


FIG. 3.13: *Consitution du modèle*

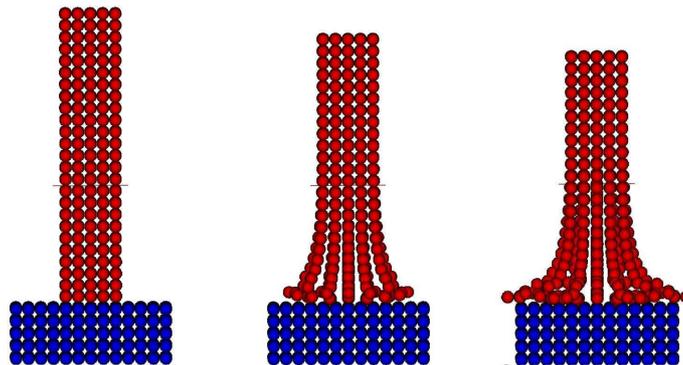


FIG. 3.14: *Déformées observées à différents instants : t=0.2,0.4 et 0.6 msec*

Une constatation similaire peut être faite en étudiant l'écoulement du fluide sur le massif après impact (3.17). Dans ce cas un modèle plus fin constitué de billes deux fois plus petites est utilisé. En effet comme on peut le voir sur la figure 3.17(b) dans le cas 2 l'écoulement du fluide est fortement perturbé par la mauvaise orientation des normales. A l'inverse avec les normales calculées le comportement apparaît comme très bon et très proche de celui obtenu avec le couplage EF/SPH.

Les cas 4 et 5 mettent en évidence un autre aspect de la supériorité des normales calculées sur les normales par défaut. Il s'agit de la moins grande dépendance des résultats à la position relative des billes en contact. En effet dans les cas 2 et 3, par commodité les billes fluides sont placées rigoureusement à la verticale des billes solides. On peut donc craindre que le choix de cette configuration particulière n'est une influence sur les résultats. La très bonne concordance des résultats des cas 2 et 4 (figure 3.15) montre clairement que ce n'est pas le cas lorsqu'on utilise les normales calculées mais

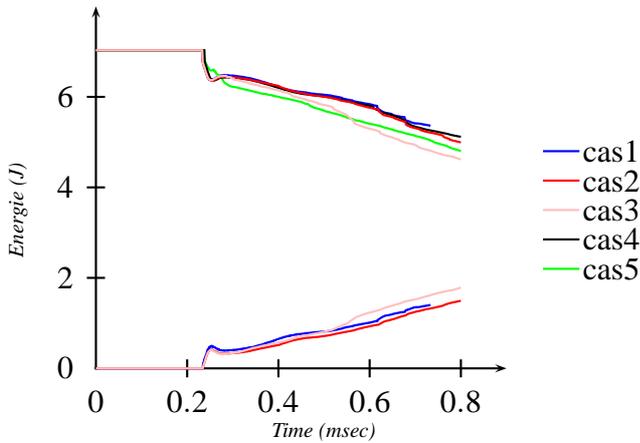


FIG. 3.15: Evolution des énergies cinétiques (haut) et de déformations (bas) de la partie fluide

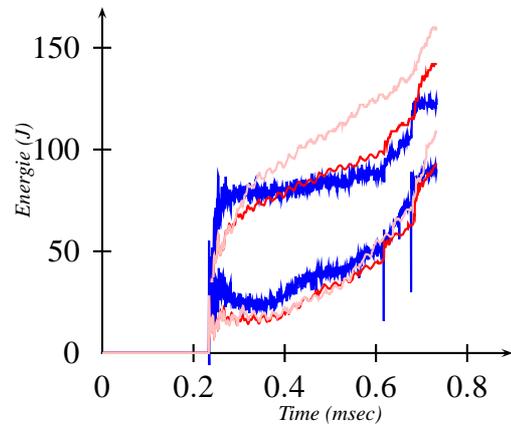


FIG. 3.16: Evolution des énergies cinétiques (haut) et de déformations (bas) de la partie solide

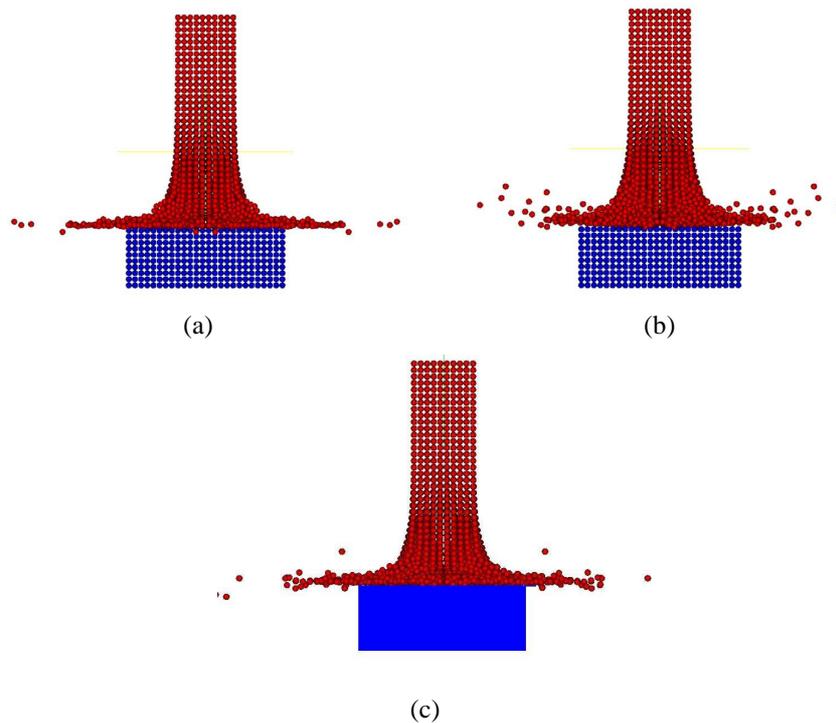


FIG. 3.17: Déformées observées à $t=800 \mu\text{sec}$: a) cas 2 b) cas 3 c) cas 1

qu'à l'inverse le problème se pose pour les normales par défaut étant donné que les différences entre les résultats des cas 3 et 5 sont notables.

Enfin l'étude du déplacement vertical du massif a également été réalisée pour les cas 1 et cas 2 (figure 3.18). Les courbes obtenues sont encore une fois très proches ce qui illustre

à nouveau le bon comportement du couplage pinball lorsque les normales calculées sont utilisées.

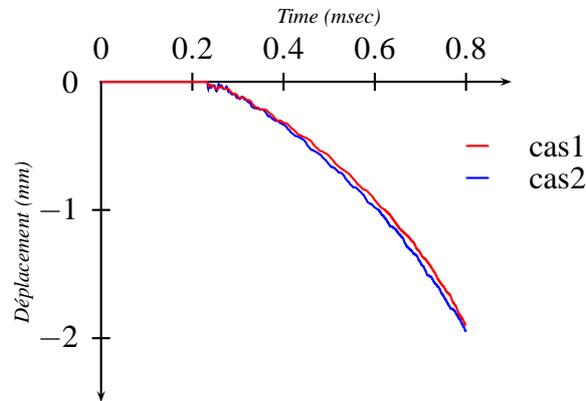


FIG. 3.18: Déplacement vertical du massif

3.4.4 Impact d'une colonne de fluide sur une plaque

On s'intéresse à présent à l'interaction entre un fluide et une coque. On étudie donc un problème similaire au précédent mais dans lequel le massif a été remplacée par une plaque carrée de dimensions 1m x 1m, d'épaisseur 1cm et constitué d'un acier classique ($E=2e11$ Pa, $\nu=0.3$, $\rho=7800$ kg/m³). La colonne de fluide pour sa part est la même que précédemment.

- Dans un premier temps la plaque est indéformable (masse des billes coque infinies) et le cas est traité en 1D (seul le déplacement vertical des billes est autorisé). Dans cette situation simplifiée une solution analytique est disponible [LET 96]. En effet si la colonne fluide impacte la plaque à une vitesse V_{imp} la pression au bas de la colonne correspond à un step dont la durée T correspond à un aller-retour de l'onde de compression dans la barre et l'intensité P_H à la pression de hugoniot. En notant comme précédemment c_f la vitesse du son dans le fluide et L_f la longueur de la colonne de fluide on peut écrire :

$$\begin{cases} T = 2L_f/c_f \\ P_H = \rho_f c_f V_{imp} \end{cases} \quad (3.33)$$

L'application numérique en prenant $L_f=25$ cm et $V_{imp}=150$ m/s donne :

- $T = 345 \mu\text{sec}$

– $P_H = 217 \text{ Mpa}$

Les valeurs de T et de P_H obtenues par le calcul sont données par la figure 3.19. Les erreurs relatives sont de l'ordre de 1 % pour T et de 2 % pour la pression. Les résultats sont donc très satisfaisants.

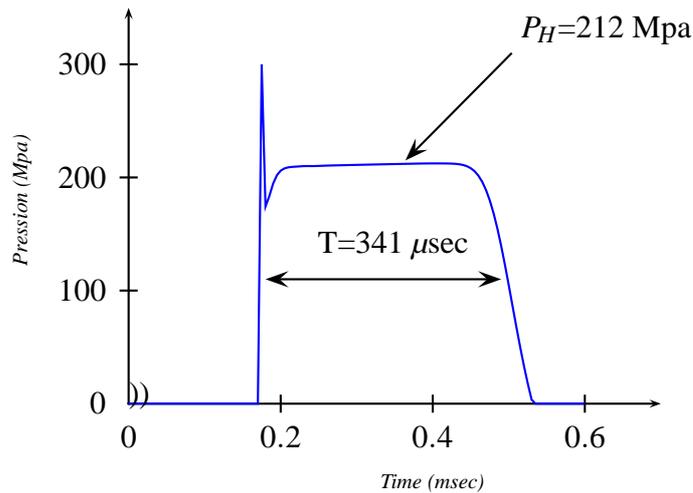


FIG. 3.19: Evolution de la pression au bas de la colonne fluide

- La deuxième étape consiste à utiliser une plaque déformable élastique. Afin d'obtenir des déformations plus significatives la vitesse d'impact est augmentée et passe de 150 m/s dans le cas précédent à 500 m/s. De même la masse volumique du fluide est plus importante (3000 Kg/m^3). Pour valider le comportement du système on utilise comme pour le massif une comparaison des résultats obtenus avec ceux issus d'un modèle faisant intervenir la même colonne fluide mais une plaque constituée d'éléments finis Q4GS et un couplage de type Letellier entre les billes SPH et les éléments coque. La comparaison de la flèche au centre de la plaque (figure 3.20) montre que le comportement des deux modèles est extrêmement proche. Les déformées au cours du calcul (figure 3.21) se révèlent également quasi identiques. Le couplage pinball semble donc capable de gérer de manière très performante l'interaction entre un fluide et une coque.
- La même démarche est ensuite conduite avec une plaque élastoplastique. Le matériau est supposé plastique parfait de limite élastique $\sigma_y=400 \text{ MPa}$. Dans ce cas la plaque devenant beaucoup plus déformable du fait de la plasticité il n'est plus nécessaire d'augmenter artificiellement la masse de fluide et une masse volumique de 1000 kg/m^3 est appliquée. De plus l'épaisseur de la plaque est pour ce calcul de 2.5 cm. Les figures 3.22 et 3.23 attestent à nouveau du bon comportement du modèle SPH comme dans le cas plastique.

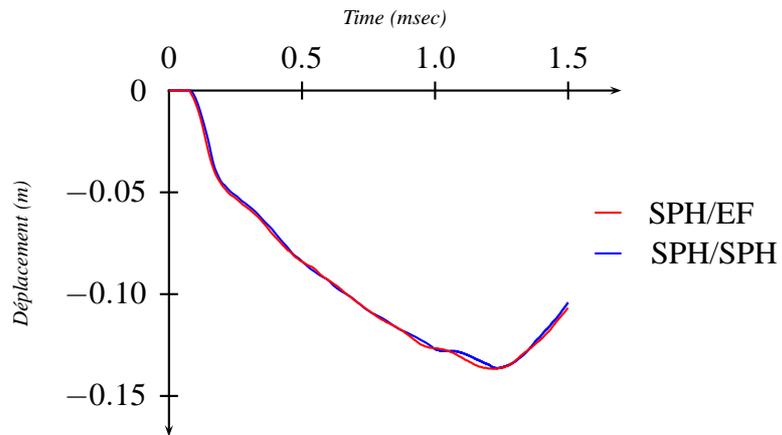


FIG. 3.20: Déplacement vertical au centre de la plaque (cas élastique)

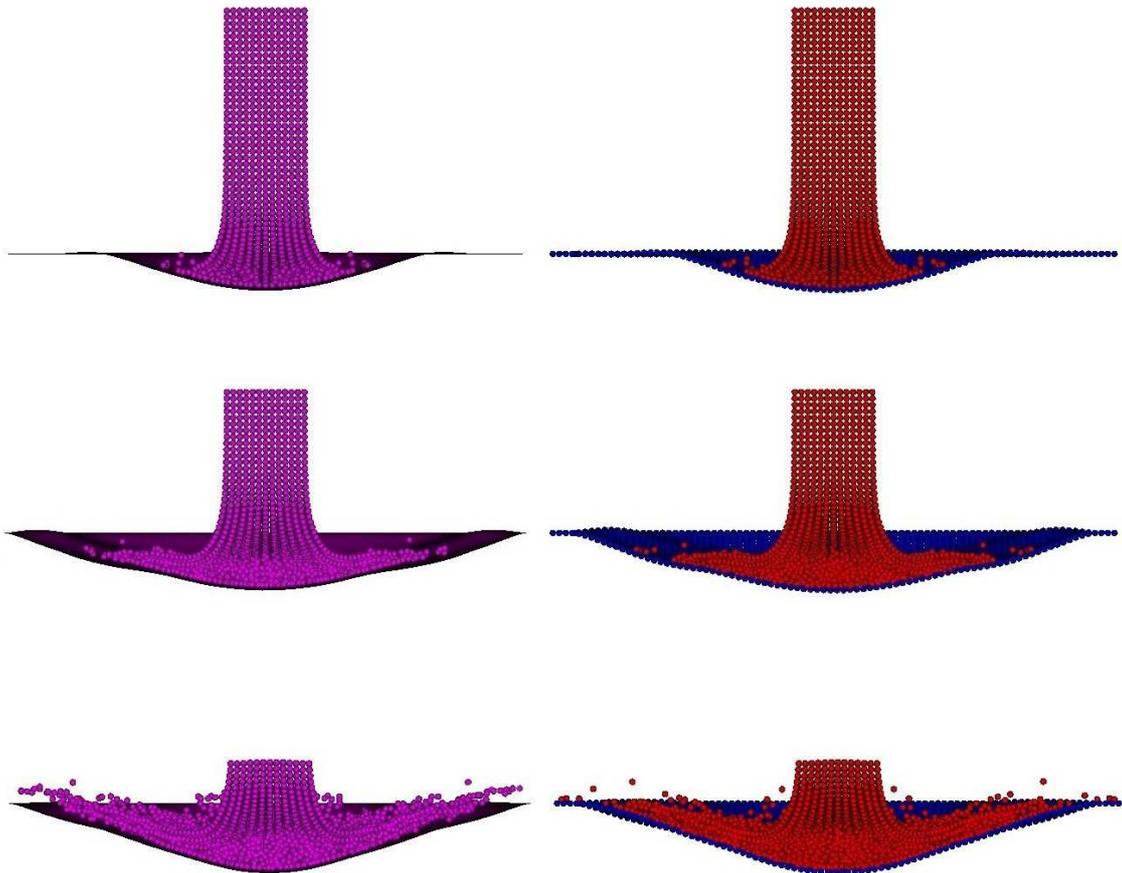


FIG. 3.21: Déformées observées à différents instants ($t=0.4$, 0.8 et 1.2 msec) avec une plaque EF (gauche) et SPH (droite)

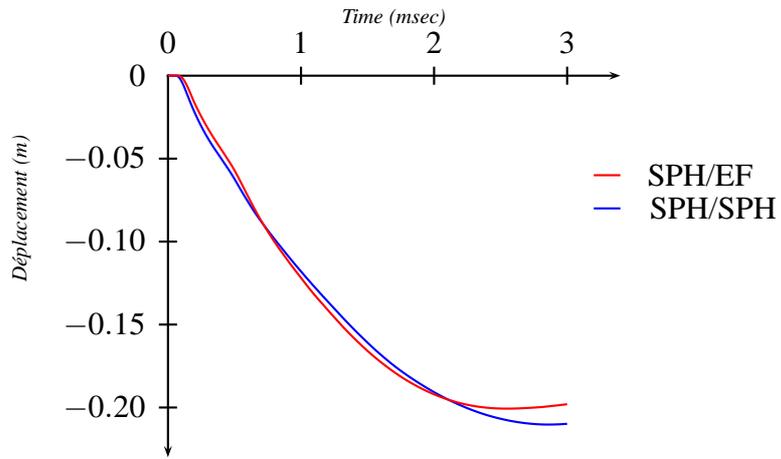


FIG. 3.22: *Déplacement vertical au centre de la plaque (cas plastique)*

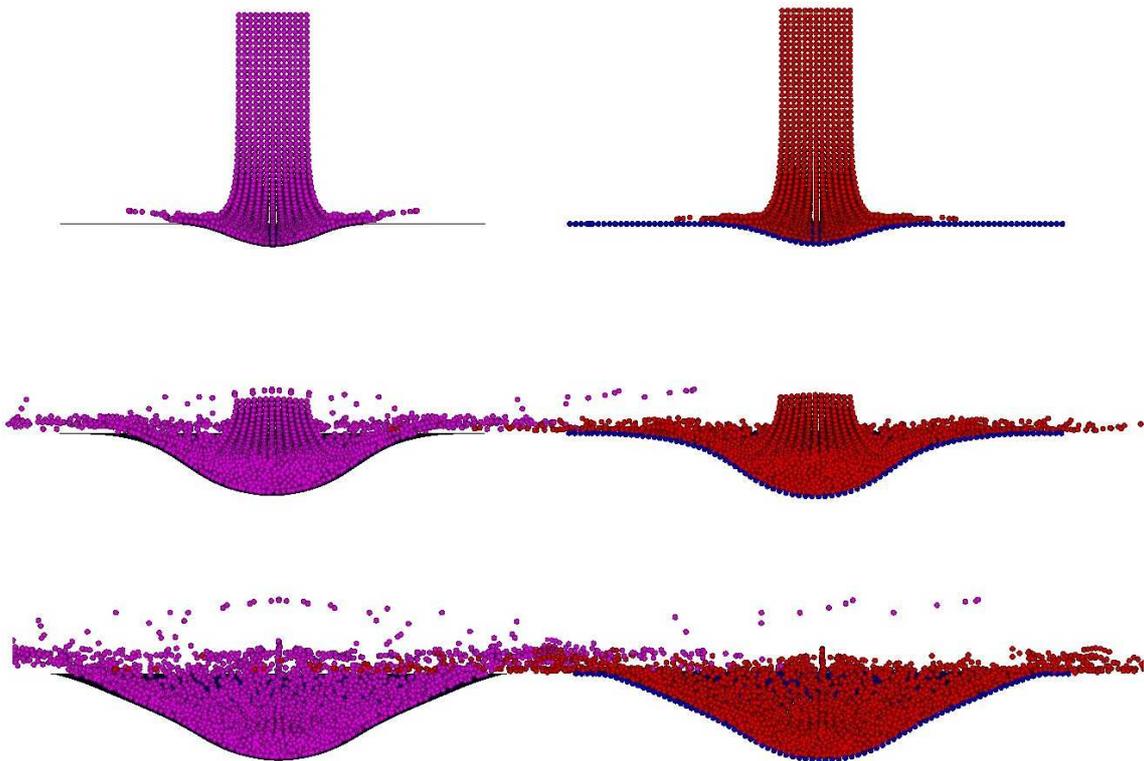


FIG. 3.23: *Déformées observées à différents instants ($t=0.4, 1.2$ et 2.0 msec) avec une plaque EF (gauche) et SPH (droite)*

3.5 Conclusions et perspectives

Les différents essais réalisés ont donc permis de mettre en évidence le fait que la méthode pinball, dans le cas où des normales aux surfaces de contact correctes sont utilisées, constitue un outil très performant pour la gestion des contacts entre plusieurs corps modélisés par la méthode SPH.

Il est cependant important de préciser ici que le module Pinball d'Europlexus que nous avons employé est encore au stade de développement (par le CCR d'Ispra). Un certain nombre d'améliorations et d'optimisations sont ainsi envisageables.

On peut évoquer tout d'abord la gestion du diamètre des billes. En effet pour les solides ou pour les coques soumises à de fortes déformations, des trous peuvent apparaître dans la structure simplement par éloignement des pinballs. Les billes fluides peuvent dès lors passer au travers. Pour remédier à ce problème une dilatation du diamètre des pinballs en rapport avec la déformation des corps pourra par exemple être effectuée afin de maintenir "l'étanchéité".

On peut citer également un problème spécifique aux coques. Comme on peut le voir sur la figure 3.24 dans la détection du contact l'épaisseur h de la plaque n'est pas prise en compte. En effet le diamètre des pinballs correspond à la taille de maille d qui généralement est beaucoup plus grande que l'épaisseur. Ainsi vis à vis de la détection du contact tout se passe comme si l'épaisseur de la plaque était d . On peut donc envisager d'affiner la méthode de détection du contact en remplaçant les pinballs sphérique par des pinballs cylindrique de rayon $d/2$ et de hauteur h .

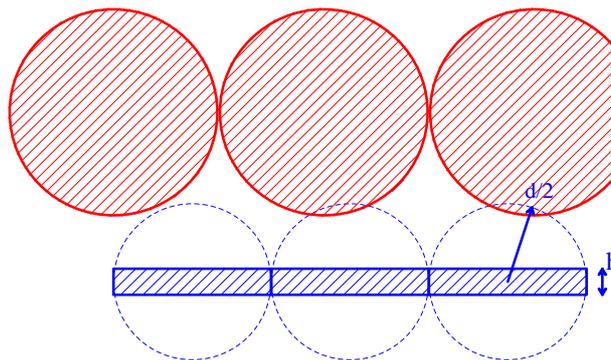


FIG. 3.24: *Problème de détection du contact*

Un autre point important à éliminer est l'impossibilité actuelle de coupler la méthode pinball à d'autres algorithmes de gestion des contacts ou d'imposer des conditions limites aux billes associées à des pinballs. En effet l'architecture actuelle d'Europlexus

3. La gestion du contact

et du module pinball font que le calcul des forces de contact ne prend pas en compte les éventuelles conditions supplémentaires imposées à ces billes. Une technique de résolution itérative prenant en compte toutes les conditions à satisfaire peut donc être envisagée pour s'affranchir de ces problèmes.

Enfin une autre piste intéressante est l'ajout de frottement dans le contact. En effet il est tout à fait possible connaissant les forces de contact qui sont des forces normales aux surfaces de contact de déduire des forces tangentielles à l'aide d'un coefficient de frottement.

Chapitre 4

Validation expérimentale

Dans ce chapitre on cherche à valider expérimentalement le comportement d'un modèle SPH complet faisant intervenir une partie fluide et une partie coque couplées par la méthode pinball. Pour ce faire des résultats de calculs ont été comparés à des résultats expérimentaux provenant d'essais réalisés en collaboration avec l'ONERA de lille.

Sommaire

4.1	Le problème traité	104
4.1.1	Présentation du modèle	104
4.1.2	Taille et formes des éprouvettes	104
4.1.3	Modèle SPH	106
4.2	Dispositif expérimental	107
4.2.1	Composition de l'installation	107
4.2.2	Composition de la chaîne de mesure	109
4.2.3	Déroulement des essais	112
4.3	Corrélation essais-calculs	112
4.3.1	Validation théorique du modèle	112
4.3.2	Etude de l'essai E20A5	115
4.3.3	Etude de l'essai TFA5	118
4.4	Conclusion	122

4.1 Le problème traité

L'objectif initial de ces travaux étant la modélisation des fuites de carburant d'un réservoir sous impact on va chercher ici à reproduire expérimentalement un phénomène assez similaire. On souhaite ainsi en particulier observer la déformation des parois du réservoir par la surpression générée dans le fluide suite à l'impact ainsi que les fuites du fluide par les trous.

4.1.1 Présentation du modèle

Le dispositif utilisé, réalisé par les équipes de l'ONERA de Lille, est présenté sur la figure 4.1. Comme on peut le voir il est composé principalement d'un réservoir cylindrique rigide réalisé en acier munis à son sommet d'un piston réalisé dans le même matériau et fermé à sa base par une éprouvette déformable en aluminium (AU4G) . Pour simuler le choc une masse est lâchée du haut d'une tour de crash. Cette masse vient impacter le piston à une vitesse prédéfinie (fonction de la hauteur de largage). Ce choc aura pour effet de générer une forte surpression dans le réservoir (qui va déformer l'éprouvette) et de chasser le fluide. Le fluide va ensuite s'évacuer soit au travers d'un trou préalablement réalisé dans l'éprouvette, soit en provoquant une déchirure de l'éprouvette elle-même initiée par la présence d'entailles. La présence de ces trous ou de ces entailles permet de simuler les fuites de fluide.

Les dimensions du système sont :

- masse $M = 245 \text{ Kg}$,
- vitesse d'impact $V = 2 \text{ ou } 5 \text{ m/s}$,
- hauteur de fluide $H = 23 \text{ cm}$,
- diamètre intérieur du cylindre $D = 8 \text{ cm}$.

4.1.2 Taille et formes des éprouvettes

Les éprouvettes ont été réalisées également dans les ateliers de l'ONERA de Lille. Elles sont obtenues par lamages dans des blocs d'aluminium de dimensions 200x200x25 mm. Le lamage a une diamètre de 80mm (correspondant au diamètre intérieur du cylindre) et une profondeur variable. Trois configurations sont ainsi retenues :

- pas de lamage ce qui permet d'avoir un fond de réservoir épais (25mm) qui peut alors être supposé indéformable,
- lamage de profondeur 23 mm ce qui correspond alors à fond fin déformable d'épaisseur 2mm,
- lamage de profondeur 24 mm ce qui correspond alors à fond très fin d'épaisseur 1mm,

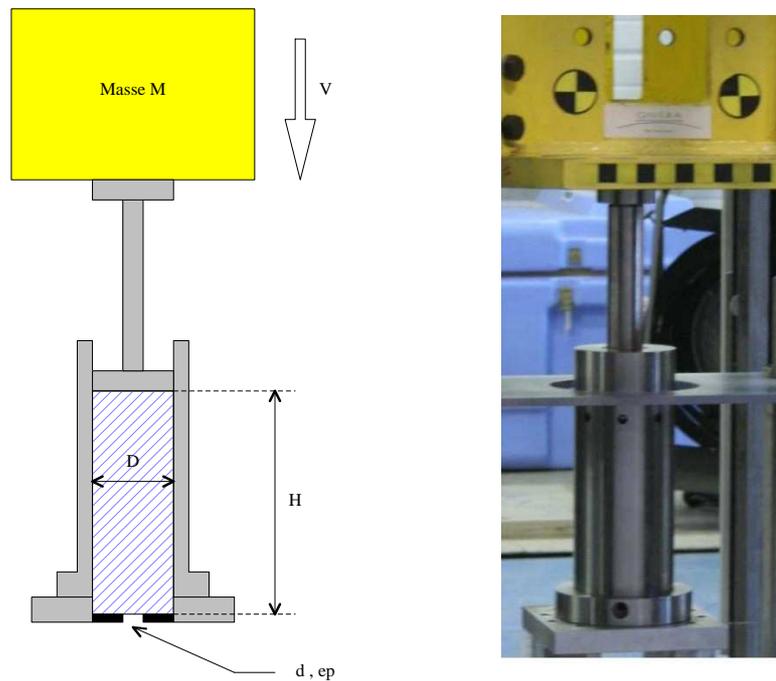


FIG. 4.1: *Dispositif expérimental*

En plus de la profondeur de lamage les éprouvettes se différencient également par la forme du trou. Quatre configurations ont été retenues :

- fond plein, pas de trou,
- trou circulaire de diamètre 14 ou 20 mm,
- entailles réalisées en forme de X afin d’observer l’ouverture de 4 pétales sous la pression de fluide (la longueur des 2 entailles est de 20mm),
- entailles réalisées en forme de U afin d’observer la flexion d’un lamelle (de forme carrée et de côté 20mm).

Pour pouvoir les mettre en situation comme sur l’image 4.3 les éprouvettes sont munies de trous taraudés permettant d’assurer la liaison avec le cylindre et la fixation au support. Pour ce faire 12 trous sont répartis de manière circulaire pour la liaison avec le cylindre et 8 autres pour la fixation au support.



FIG. 4.2: *Eprouvettes munies d'entailles en X (vue du coté inférieur) et en U (coté inférieur et supérieur)*



FIG. 4.3: *Eprouvette en situation fixée au cylindre et au support*

4.1.3 Modèle SPH

Le modèle SPH utilisé pour les simulations est présenté sur la figure 4.4. Il se compose d'une partie fluide (rouge) constituée par 106 couches de 1261 billes de diamètre 2.05mm soit un total de 133666 billes fluides et du fond déformable (bleu) représenté par une seule couche d'environ 1000 billes de même diamètre. Le nombre de billes composant le fond pouvant varier en fonction de la taille et de la forme du trou.

NB : Les limitations informatiques, en particulier les problèmes d'allocation de

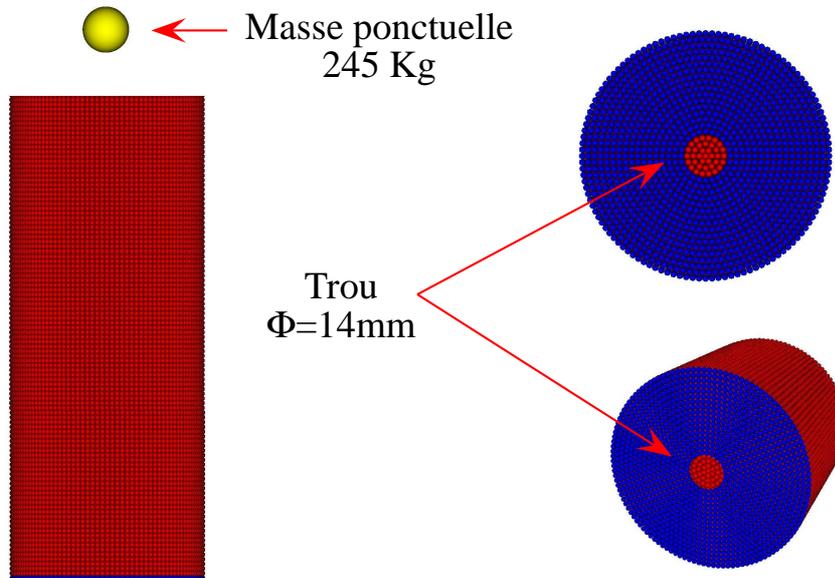


FIG. 4.4: Différentes vues du modèle SPH utilisé

mémoire sur la machine utilisée ainsi que le coût en temps CPU imposent d'utiliser un nombre de billes relativement faible proche de 100000. L'utilisation de billes de diamètre 2.05mm permet ainsi de discrétiser l'ensemble du volume avec 133000 billes. Cette discrétisation s'avère cependant relativement grossière et en particulier vis à vis de la taille du trou et de celle du flux de sortie. Cette constatation devra être gardée à l'esprit tout au long de cette étude afin de mieux apprécier la précision des résultats obtenus.

Les caractéristiques du fluide sont les mêmes que dans le chapitre 3 à savoir celles de l'eau $\rho=1000 \text{ Kg/m}^3$ et $c=1450 \text{ m/s}$. Le fond pour sa part est composé de duralumin (AU4G - ou 2017 A). Ses caractéristiques ($E=7.233e10 \text{ Pa}$, $\rho=2800 \text{ Kg/m}^3$, $\nu=0.33$, limite élastique de 300 Mpa) ainsi que sa courbe de traction (figure 4.5) sont issues de [cou02].

Enfin pour représenter la masse lâchée une masse ponctuelle de 245 Kg est utilisée. Cette masse est associée à une pinball de très grand diamètre (1Km) située à 1 km au dessus du sommet du cylindre. Cette petite astuce permet d'obtenir un projectile plan au niveau de la zone de contact.

4.2 Dispositif expérimental

4.2.1 Composition de l'installation

Les différents essais ont été réalisés à l'aide de la tour de crash de l'ONERA de Lille (4.6). Il s'agit d'un équipement particulièrement performant permettant de réaliser les largages de chariots avec une parfaite maîtrise des conditions aux limites (masse, vitesse, énergie, incidence, fréquence de résonance, etc ...) et de relever précisément les

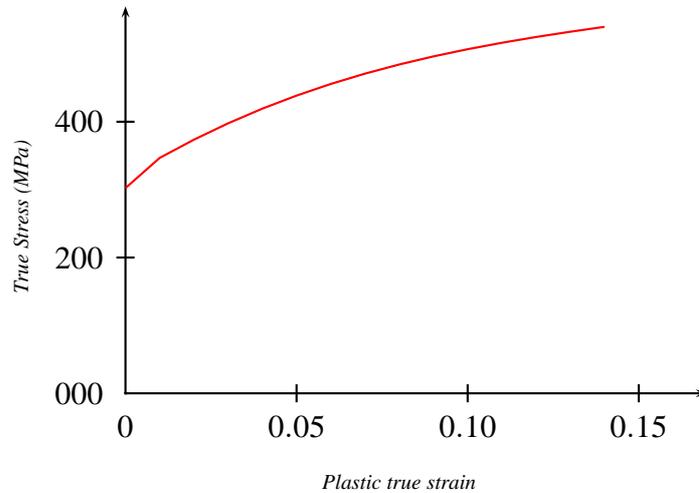


FIG. 4.5: *Courbe de traction utilisée*

mesurandes intéressant le phénomène.

Ses principales caractéristiques sont :

- une hauteur de largage maximale de 15 m,
- une vitesse d'impact pouvant atteindre 20 m/s avec l'adjonction de sandows,
- une énergie d'impact maximale de 100 000 Joules,
- un équipement dynamométrique piézoélectrique KISTLER (non requis dans cette étude),
- une dimension et une masse de chariot adaptables (dans notre cas 600*600*600mm et 245kg),
- une taque d'essais de 4 ms,
- une masse sismique de 80 tonnes découplant la zone de crash de l'infrastructure.

La spécificité de cette tour réside dans le caractère modulable de la zone de crash. En effet la distance entre les rails de guidage du chariot peut être adaptée en fonction des besoins. Elle dispose de plus de nombreux équipements, qu'ils soient dynamométriques, extensométriques ou de cinématographie rapide. Cet environnement d'essais est représenté sur l'image 4.7.

L'installation est également équipée d'un peson permettant de contrôler la masse de l'impacteur et d'un capteur de déplacement affichant directement sur le boîtier de commande la hauteur de largage.

Pour les configurations qui nous intéressent c'est à dire des vitesses d'impact de 2 m/s et 5 m/s les hauteurs de largage H_l ont été respectivement de 0.204m et de 1.274m calculées à l'aide de la formule simple :

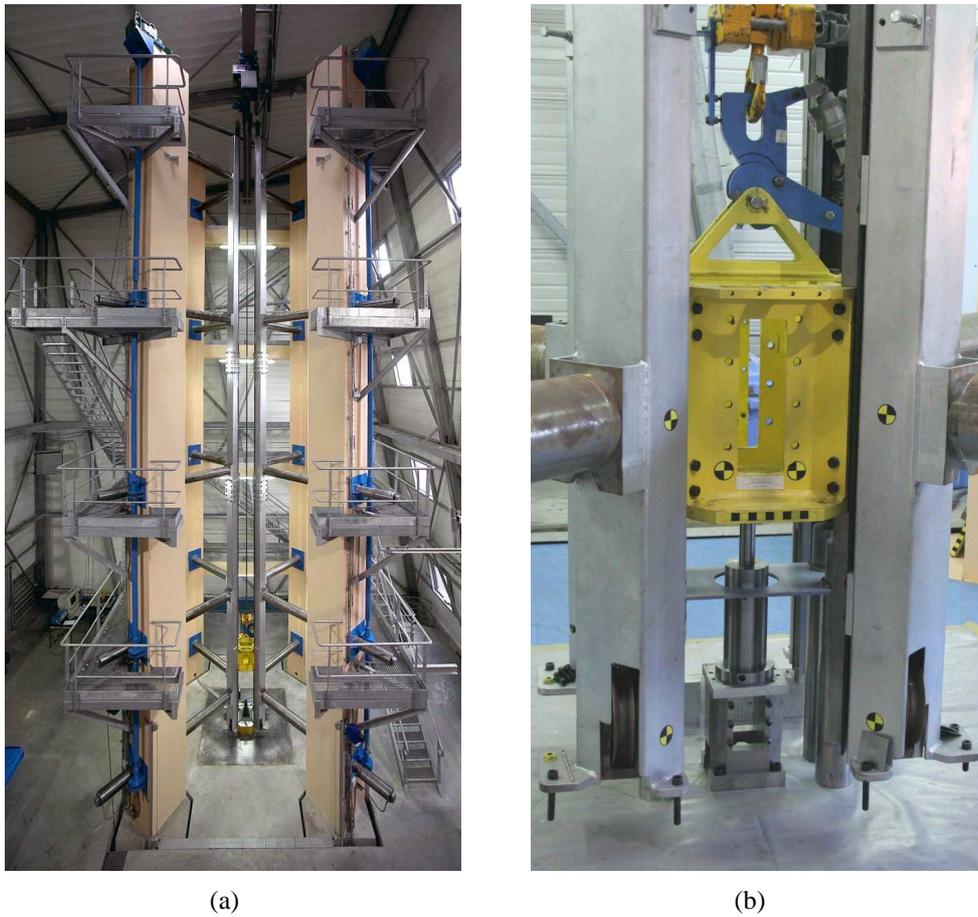


FIG. 4.6: *Vue générale de la Tour de crash a) et positionnement du dispositif au bas de la tour b) avec chariot en position basse*

$$H_l = \frac{V^2}{2g} \quad (4.1)$$

4.2.2 Composition de la chaîne de mesure

Les différents éléments constituant la chaîne de mesure sont :

- Capteur de déplacement optique : Un capteur de déplacement optique est utilisé pour mesurer le déplacement du chariot au cours de l'essai.

Il s'agit d'un capteur à triangulation optique de marque "BULLIER" (Ref : M5L/400-10B24NK-KSR) possédant une course de 400 mm.



FIG. 4.7: *Environnement d'essai au pied de la tour de crash*

- Capteur de pression piézo électrique KISTLER : Un capteur de pression est placé en partie basse du cylindre sur la paroi latérale afin de mesurer l'évolution de la pression dans le réservoir.

C'est un capteur piézo-électrique de marque KISTLER (modèle : 601 H) ayant une étendue de mesure de 1000 bars et une fréquence propre de 150 kHz.

- Imagerie rapide : Une caméra vidéo rapide haute résolution (Visario de WEINBERGER) est utilisée pour saisir le comportement de la membrane et l'écoulement du fluide lors de l'impact. A la cadence de 1000 images par seconde, la résolution est de 1536 * 1024 pixels et le temps d'exposition peut être réduit à 15 microsecondes. Pour notre application, nous avons dû réduire la résolution à 768 * 512 pixels pour accroître la cadence afin d'atteindre 4 000 images par seconde et ainsi saisir quelques images du phénomène initial.

L'utilisation de projecteurs de type HMI (lumière froide) de forte puissance (2*4000 W) a permis de réduire le temps de pose à 15 microsecondes sans avoir l'inconvénient de réchauffer l'échantillon.

- Jauges de déformations : Chaque éprouvette est équipée d'une jauge de déformation. Cette mesure par jauge a pour objectifs de recueillir le taux de déformation et l'état de plasticité résiduel de l'éprouvette à l'emplacement de la jauge en fonction des conditions de chargement.

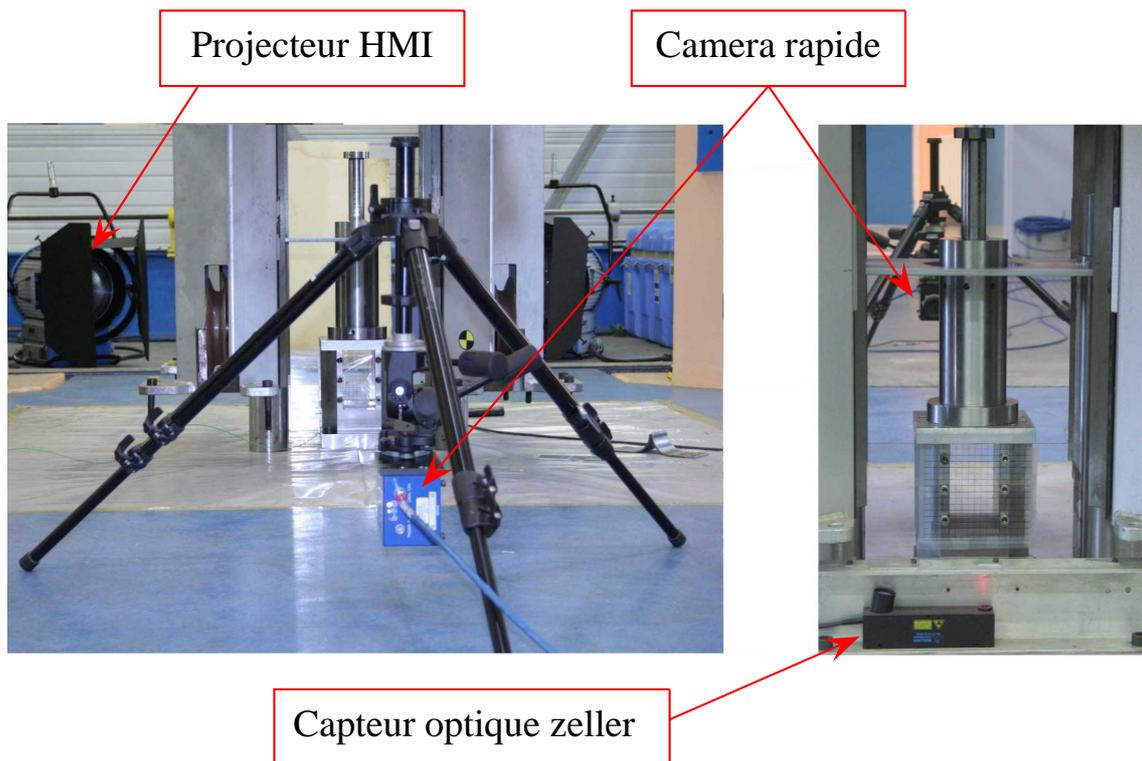


FIG. 4.8: Vue du dispositif de face (gauche) et de derrière (droite)

Les jauges utilisées sont des jauges TML de type YFLA 2 à grand allongement (15%) avec un branchement de type quart de pont. Les essais sont effectués avec un filtre passe-bas à 75 kHz. Une tension d'excitation faible de 3.5 V est retenue pour limiter la dérive thermique et remédier au faible pouvoir dissipatif des jauges dû aux petites dimensions des grilles (2 x 1.8 mmš).

- Centrale d'acquisition rapide : Pour l'acquisition des données, un analyseur de transitoire multi-voies (NICOLET Multipro) a été utilisé. Il est équipé de cartes d'acquisition d'une capacité maximale de 1 Méga échantillons par seconde chacune, avec une résolution sur 12 bits ; chaque carte étant sécable en 1, 2 ou 4 voies de mesure.

Le trigger de déclenchement est commun à la carte d'acquisition et à la caméra, pour permettre la synchronisation des deux sources d'acquisition. Un logiciel d'exploitation du système d'acquisition, installé sur un micro-ordinateur gère les entrées / sorties via une interface IEEE.

4.2.3 Déroulement des essais

La procédure d'essais reprend la chronologie des opérations suivantes :

- encastrement de l'éprouvette en extrémité de la chambre de pressurisation,
- occultation des orifices avec de la paraffine ou du ruban adhésif,
- remplissage de la chambre avec de l'eau sans bulle résiduelle,
- mise en contact du chariot sur le piston et remise à zéro de la mesure de hauteur,
- vérification du bon fonctionnement du capteur de déplacement,
- élévation du chariot à la hauteur de largage correspondant à la vitesse d'impact,
- mise en route des éclairages HMI (pour atteindre leur pleine puissance au moment de l'essai) devant un déflecteur noir servant à éviter l'échauffement du montage,
- équilibrage automatique du pont de jauge, reset de la mesure de pression et armement de l'acquisition et de la caméra rapide,
- retrait du déflecteur noir et évacuation de l'aire de crash pour actionner le bouton de largage.

Ce protocole a été respecté pour tous les essais réalisés qui sont au nombre de 19. Pour pouvoir ensuite efficacement accéder aux données récoltées une nomenclature a été mise en place afin de nommer de manière claire et explicite chaque essai. La liste des 19 essais réalisés ainsi que leur noms et leurs caractéristiques sont fournis dans le tableau 4.1.

4.3 Corrélation essais-calculs

4.3.1 Validation théorique du modèle

Avant de réaliser des comparaisons entre essais et calculs on cherche à valider le comportement du modèle SPH présenté au paragraphe 4.1.3. On s'intéresse donc à des cas simplifiés pour lesquels des solutions analytiques existent. De plus pour réduire les temps de calcul on réduit la hauteur du cylindre à seulement 7cm.

- On considère ainsi dans un premier temps le cas où il n'y a pas d'éprouvette. Les parois du cylindre étant indéformables l'étude de la surpression générée par l'impact du piston dans le fluide se révèle identique à celle réalisée au paragraphe 3.4.4. L'évolution de la pression au niveau du piston va donc comme précédemment

n^o de l'essai	n^o d'éprouvette	type de fond	vitesse d'impact
1	E14A5	Epais (25mm) avec Trou $\phi=14$ mm	5 m/s
2	E14B5	idem	idem
3	E14C5	idem	idem
4	E14A2	Epais (25mm) avec Trou $\phi=14$ mm	2 m/s
5	E14B2	idem	idem
6	E14B2	idem	idem
7	E20A2	Epais (25mm) avec Trou $\phi=20$ mm	2 m/s
8	E20A5	Epais (25mm) avec Trou $\phi=20$ mm	5 m/s
9	F14A2	Fin (2mm) avec Trou $\phi=14$ mm	2 m/s
10	F14A5	Fin (2mm) avec Trou $\phi=14$ mm	5 m/s
11	FXA2	Fin (2mm) avec Entaille en X	2 m/s
12	FUA2	Fin (2mm) avec Entaille en U	2 m/s
13	FUA5	Fin (2mm) avec Entaille en U	5 m/s
14	FXA5	Fin (2mm) avec Entaille en X	5 m/s
15	TF14A5	Très fin (1mm) avec Entaille en U	5 m/s
16	TFA5	Très fin (1mm) sans trou	5 m/s
17	F14E3A5	Fin (2mm) avec trou + entailles 3mm	5 m/s
18	FE20A5	Fin (2mm) sans trou avec entailles 20mm	5 m/s

TAB. 4.1: Liste des essais réalisés

4. Validation expérimentale

	Durée du step Δt	Force exercée sur le piston
solution analytique	98 μs	36440 N
résultats de calcul	105 μs	36650 N

TAB. 4.2: Comparaisons des résultats de calculs à la solution théorique

prendre la forme d'un step dont la durée Δt correspond a un allé-retour de l'onde de compression et l'intensité à la pression de Hugoniot.

Les résultats de calculs (tirés de la figure 4.9 sont comparés à l'application numérique réalisée pour une vitesse d'impact de 5m/s et les caractéristiques classiques de l'eau (tableau 4.2). La correspondance s'avère donc très bonne.

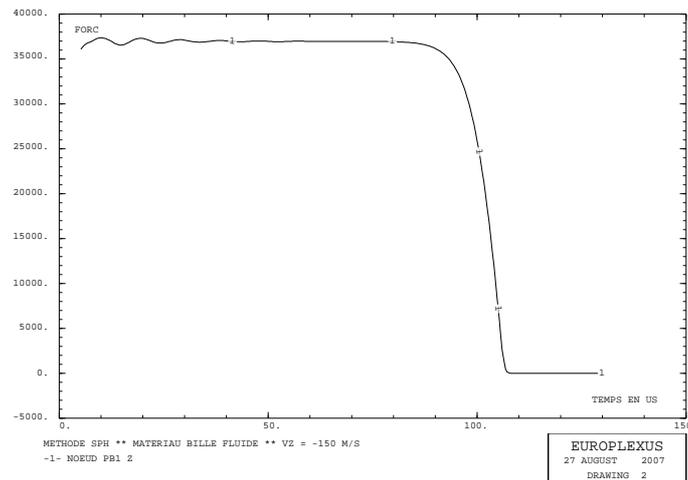


FIG. 4.9: Evolution de la force exercée sur le piston

- Le deuxième benchmark réalisé considère le même modèle mais avec un fond plein et indéformable. Dans ce cas la surpression dans le réservoir va être liée à la compression volumétrique du fluide lors de la descente du piston.

La relation entre variation de volume ΔV et variation de masse volumique $\Delta \rho$ pour un fluide acoustique est donnée par :

$$\Delta P = c^2 \Delta \rho \quad (4.2)$$

NB : avec c vitesse du son dans le fluide

La masse totale de fluide M_{fl} restant constante on a :

$$\Delta M_{fl} = 0 = \Delta \rho V + \rho \Delta V \quad (4.3)$$

$$\Delta \rho = -\rho \frac{\Delta V}{V} \quad (4.4)$$

La section S du cylindre étant également constante on peut écrire en notant h la hauteur de fluide :

$$\Delta \rho = -\rho \frac{\Delta h}{h} \quad (4.5)$$

$$\Delta P = -C^2 \rho \frac{\Delta h}{h} \quad (4.6)$$

Enfin notant V_{imp} la vitesse de descente du piston supposée constante (la masse du chariot est prise 100 fois plus grande que celle de l'essai) on obtient la relation donnant l'évolution de la pression en fonction du temps :

$$\Delta P = C^2 \rho \frac{V_{imp} \Delta t}{h} \quad (4.7)$$

L'augmentation de pression dans notre cas, pour une vitesse de 5 m/s et une durée de 300 μs est de 450 bar. Sur la courbe 4.10 issue du calcul on lit un incrément de force exercée sur le piston de 225000N ce qui correspond à 455 bar donc très proche de la solution théorique.

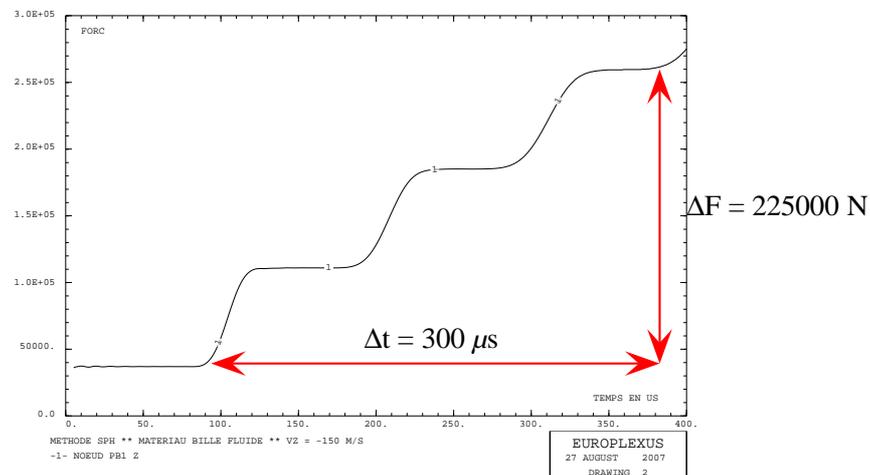


FIG. 4.10: Evolution de la force exercée sur le piston

4.3.2 Etude de l'essai E20A5

Le premier essai étudié est référencé E20A5 dans le tableau 4.2. Il s'agit d'une éprouvette à fond épais (25mm) munie d'un trou de diamètre 20mm et la vitesse d'impact

est de 5 m/s. Nous allons nous intéresser ici surtout à l'allure du jet à la sortie du trou, à la vitesse de sortie du jet et à l'évolution de la pression dans le cylindre. La figure 4.11 représente la sortie du jet au travers du trou à différents instants. On peut observer dans le flux des "bulbes" à intervalle régulier générés par les surpressions dans le fluide. Ces bulbes sont également visibles sur les images prises au cours des essais 4.12. (On représente ici une image prise au cours d'un autre essai le E20A5 car étant très claire et les bulbes y étant bien visibles).

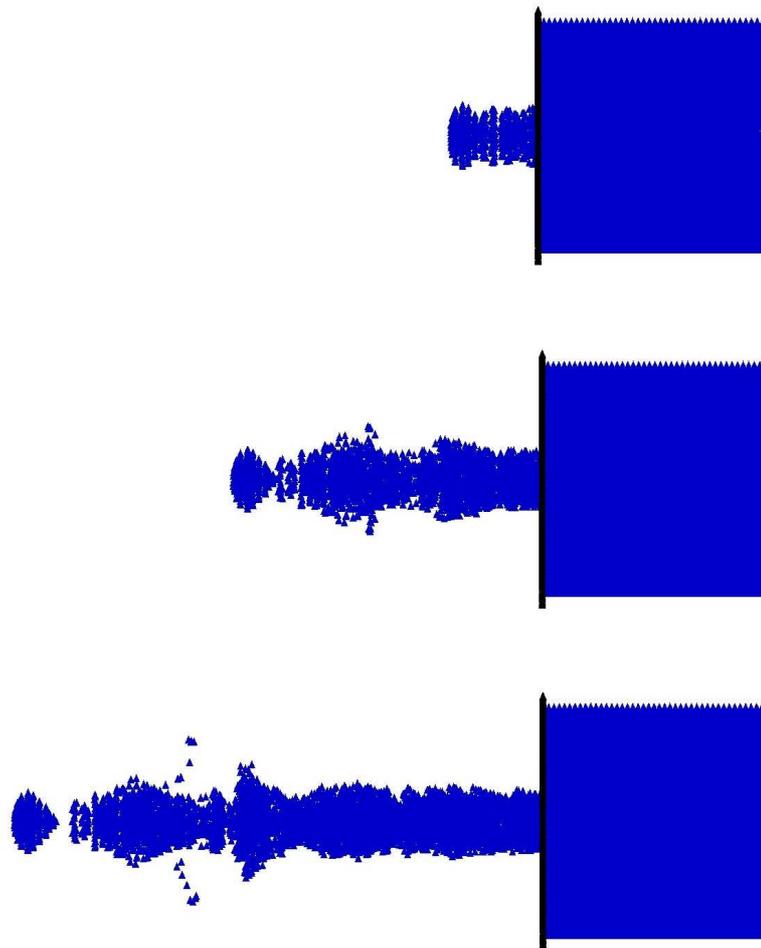


FIG. 4.11: *Impact à 5 m/s : sortie du fluide aux temps 0.6 ms, 1.4 ms et 2.2 ms*

On s'intéresse ensuite à l'évolution de la pression à la base du cylindre. Pour tenter d'évaluer l'influence de la déformation des différentes parties de la structure supposées initialement rigides, on introduit dans le modèle un ressort (modélisé à l'aide d'éléments poutres) entre la masse lâchée et la partie supérieure du cylindre permettant de représenter le piston.

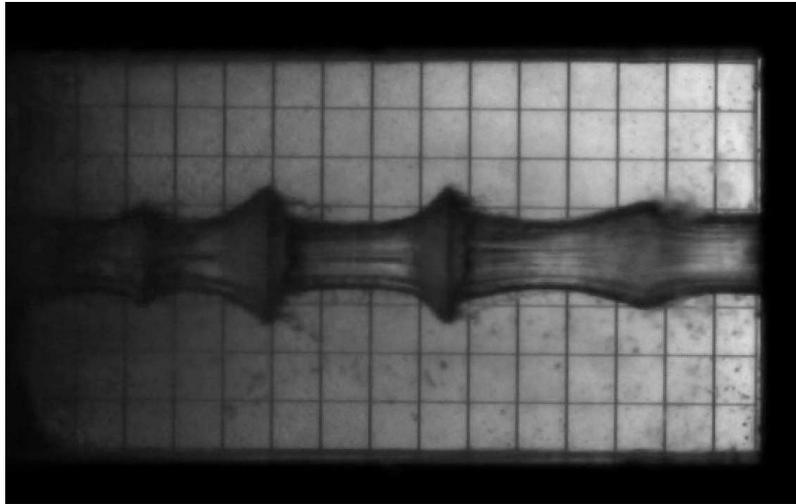


FIG. 4.12: *Exemple de bulbes clairement visibles (essai E20A2)*

Les pressions calculées à l'aide des différents modèles sont représentées sur la figure 4.13. Il apparaît alors très clairement que l'influence de la déformation du piston sur les résultats est très importante. Avec les deux modèles on arrive à peu près à retrouver les niveaux de pression expérimentaux et la tendance légèrement décroissante de ces niveaux de pression. Par contre avec un piston rigide la fréquence des pics de pression est presque le double de celle observée expérimentalement tandis qu'avec un piston déformable on retrouve à la fois la fréquence expérimentale et l'amplitude des pics. Ce calcul permet de mettre en évidence la complexité du problème étudié, l'ensemble fluide/piston se comportant ici comme un véritable oscillateur fluide/structure.

NB : Il faut cependant noter que pour ces calculs le piston a été supposé (par erreur) dans le même matériau que l'éprouvette (AU4G) alors qu'en réalité il est constitué d'acier. On peut donc supposer que l'utilisation des données matériau réelles du piston soit en mesure d'influencer légèrement les résultats.

On s'intéresse enfin à la vitesse de sortie du fluide. Pour déterminer expérimentalement cette vitesse on compare le déplacement d'un motif entre deux images successives. La figure 4.14 permet ainsi de déterminer que le déplacement du motif est de 2.3 cm. Le temps écoulé entre deux images étant de 0.25 ms (à 4000 images/sec) on en déduit une vitesse de sortie de 92 m/s.

Pour déterminer la vitesse de sortie dans le calcul SPH on suit au cours du temps l'évolution de la vitesse de plusieurs particules se trouvant dans le jet. Les courbes obtenues présentées sur la figure 4.15 indiquent un vitesse de sortie de l'ordre de 96 m/s

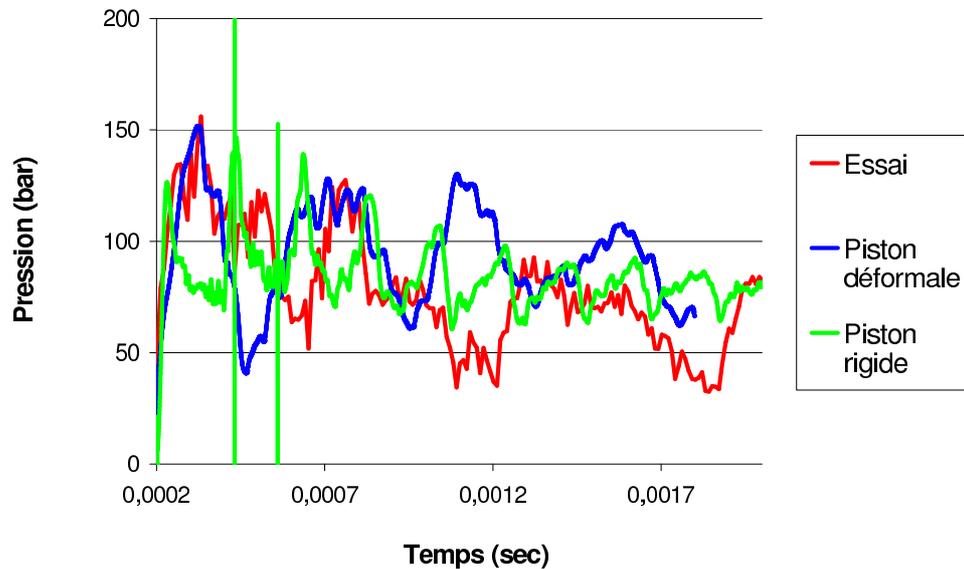


FIG. 4.13: *Pression dans le cylindre*

ce qui est donc très proche de la valeur expérimentale.

NB : On peut remarquer que cette valeur est supérieure à celle obtenue par simple conservation du volume qui est de 80m/s. Ceci s'explique par le diamètre du jet de sortie qui s'avère inférieure à celle du trou.

Pour s'assurer que la concordance des résultats n'est pas purement fortuite le même travail a été conduit avec l'essai E20A2 pour lequel la vitesse d'impact est de 2 m/s. Les données tirées des figures 4.17 et 4.16 permettent d'aboutir à une vitesse expérimentale de 44 m/s pour une vitesse calculée voisine de 45 m/s. Là encore les résultats sont très proches.

4.3.3 Etude de l'essai TFA5

Le second essai traité est l'essai TFA5. Cet essai présente l'avantage de ne pas faire intervenir de fuites de fluide dans la mesure où l'éprouvette n'est pas munie de trous. Le problème traité s'avère donc nettement plus simple. Nous allons étudier ici la déformation du fond et l'évolution de pression dans le cylindre.

L'épaisseur de l'éprouvette étant très faible (1mm) un déchirement a été observé comme on peut le voir sur les images de la figure 4.18. Ce déchirement s'explique d'ailleurs aisément par la présence de contraintes de cisaillement très importantes au niveau du raccord entre la partie fine déformable et le reste de l'éprouvette. La méthodologie présentée au paragraphe 2.3.1 ne permet pas de simuler de ce type de

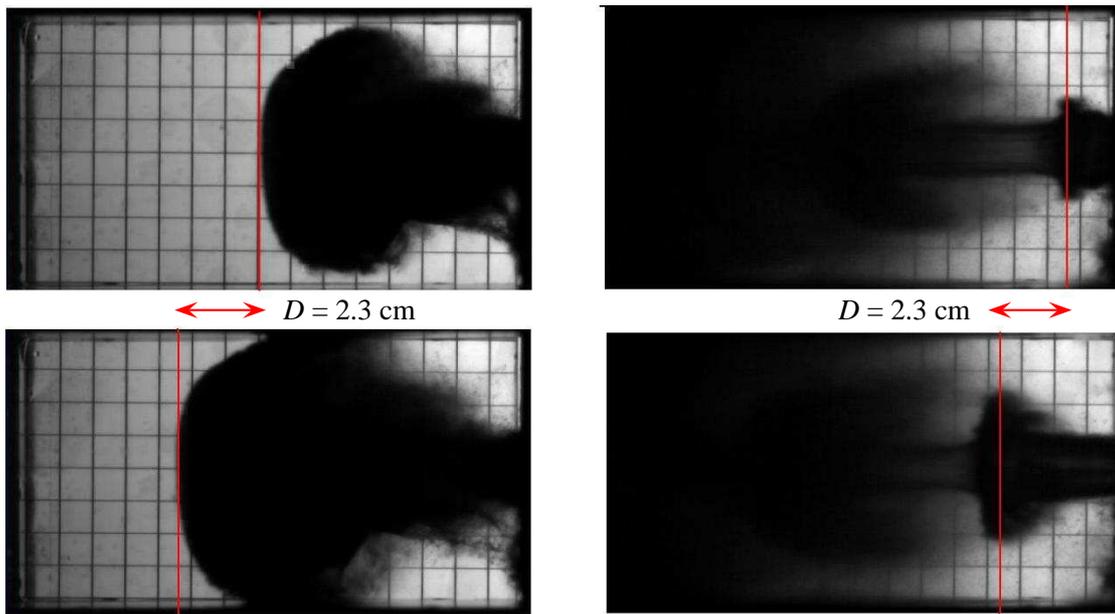


FIG. 4.14: Comparaison entre les images 7/8 (gauche) et 16/17 (droite)

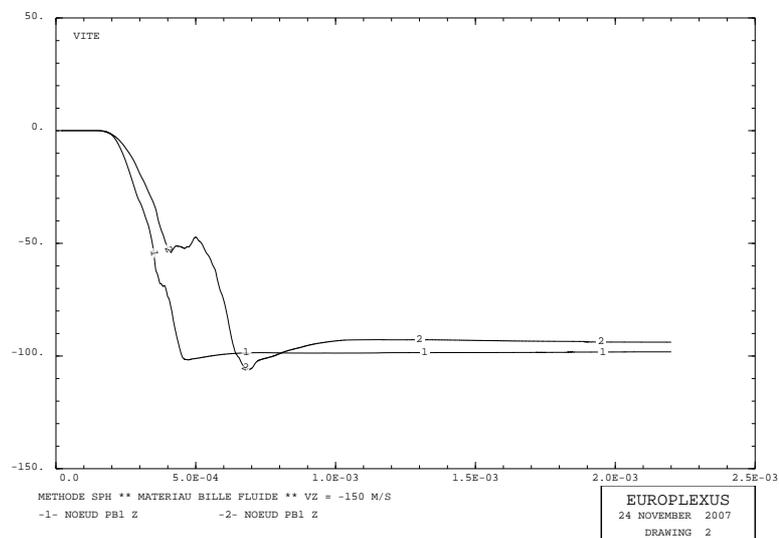


FIG. 4.15: Vitesses des particules présentes dans le jet

rupture dans la mesure où le critère de rupture n'est sensible qu'aux effets de membrane. Nous ne tenterons donc pas ici de représenter la rupture observée durant cet essai.

Suite aux constatations faites au paragraphe précédent, le modèle à piston déformable

4. Validation expérimentale

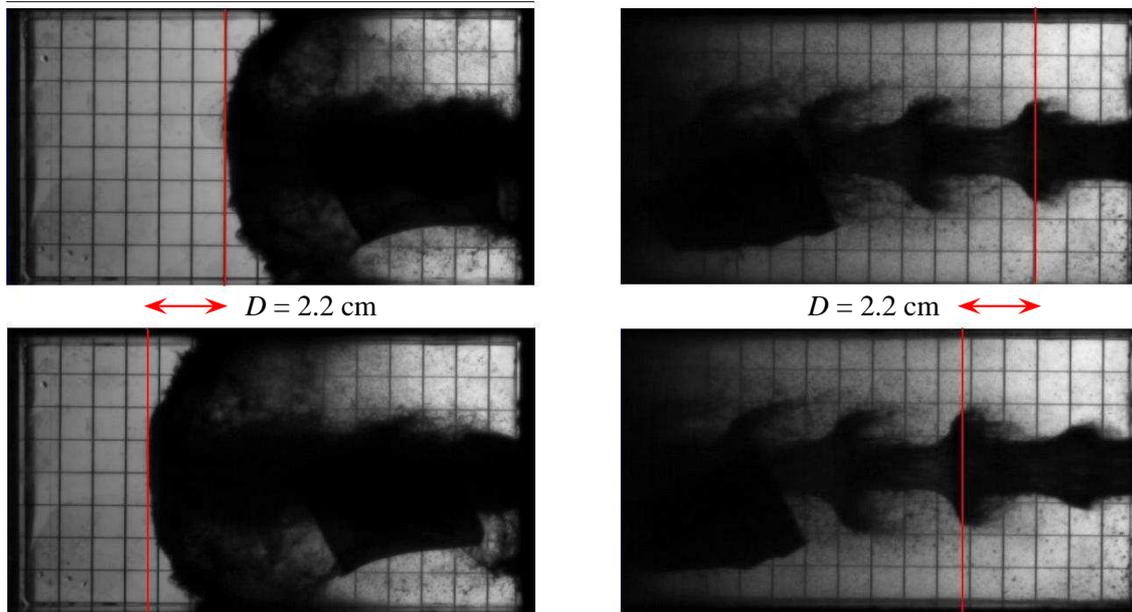


FIG. 4.16: Comparaison entre les images 7/9 (gauche) et 16/18 (droite)

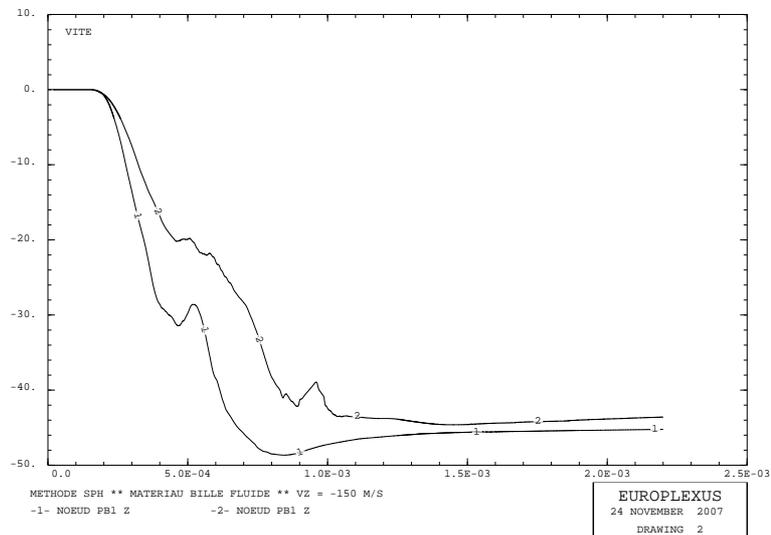


FIG. 4.17: Vitesses des particules présentes dans le jet

est conservé. De plus pour pouvoir mieux évaluer le comportement du modèle SPH par rapport aux hypothèses faites un modèle éléments finis ALE 2D axisymétrique a été réalisée. Dans ce modèle (figure 4.19) le piston est représenté à l'aide d'éléments quadrangle de même que le fluide tandis que des éléments poutre sont utilisés pour

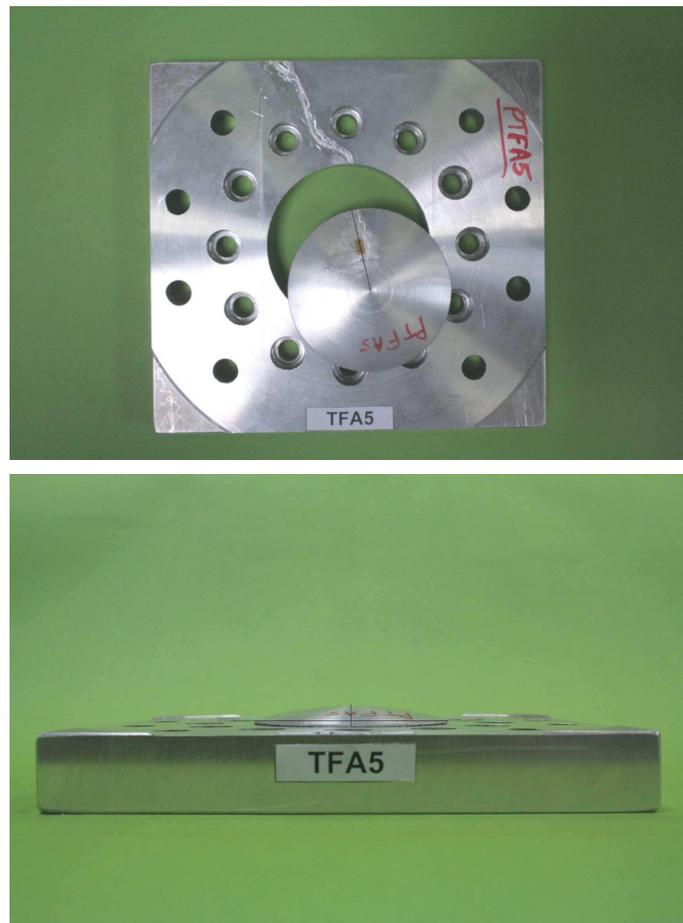


FIG. 4.18: *Forme de l'éprouvette à la fin de l'essai*

l'éprouvette.

La comparaison de l'évolution des pressions dans le cylindre est présentée sur la figure 4.20. Les résultats obtenus avec les deux modèles numériques sont donc très proches. Par contre certaines différences existent avec les résultats expérimentaux. On observe en particulier une rigidité excessive des deux modèles qui se traduit par une mauvaise prise en compte des effets chocs et en particulier des pics de pression trop violents.

On peut donc tout naturellement penser que la déformabilité d'autres éléments du dispositif comme les parois du cylindre, le corps de l'éprouvette, les vis de fixation, le bâti etc ... ont également une influence sur les résultats et expliquent en partie les différences qui subsistent entre essais et calculs. Cependant par manque de temps la prise en compte de tous ces éléments dans le modèle SPH n'a pas pu être réalisée.

NB : Dans le modèle ALE de la viscosité a été introduite dans le fluide afin d'éliminer

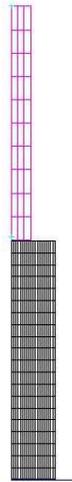


FIG. 4.19: *Modèle éléments finis / ALE*

certaines oscillations parasites. De plus la même remarque que celle du paragraphe précédent peut être faite sur les données matériau utilisées pour le piston.

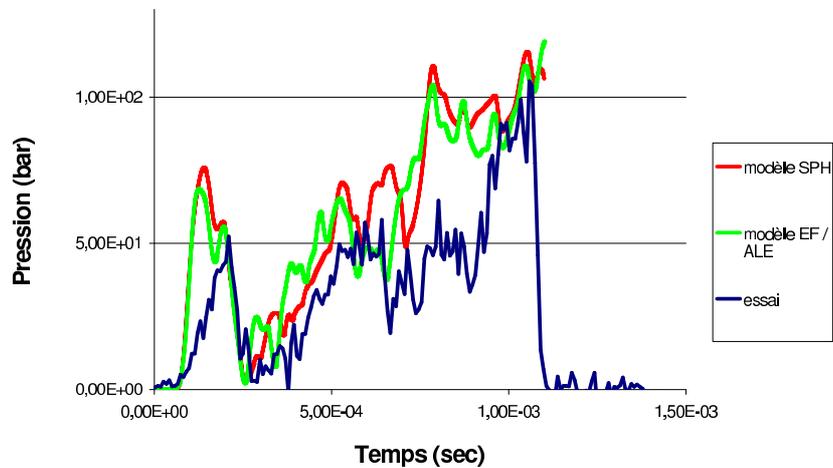


FIG. 4.20: *Presson dans le cylindre*

4.4 Conclusion

Les différentes validations théoriques réalisées ainsi que la comparaison avec un modèle éléments finis / ALE montrent un bon comportement du modèle SPH. Ce modèle

SPH arrive de plus globalement à reproduire les niveaux de pression dans le cylindre obtenus expérimentalement et le débit de fluide lorsqu'un trou est présent. Cependant des différences notables entre essais et calculs demeurent. Ces différences peuvent s'expliquer en partie par le trop grand degré de simplification du modèle utilisé. On peut donc penser que les résultats seraient nettement améliorés par la prise en compte des effets suivants :

- Effets visqueux : Un frottement important ayant été constaté lors des essais entre le piston et le cylindre on peut penser qu'il serait intéressant d'introduire des effets visqueux au niveau du piston.
- Déformabilité des structures : La déformation de structures comme le cylindre, le bâtis, les vis de fixation est vraisemblablement à considérer.
- Variation d'épaisseur : Dans les cas faisant intervenir des fonds très fin, les ruptures par cisaillement observées laissent à penser que localement de très grands niveaux de déformations sont atteints et que donc dans ces zones la variation d'épaisseur soit à prendre en compte.

Enfin un couplage efficace entre SPH fluide et éléments finis fluide serait à prévoir ici afin de pouvoir modéliser plus grossièrement la partie supérieure du fluide à l'aide d'éléments finis et dans le même temps de manière plus fine le fluide situé près du trou.

Conclusions et perspectives

Ce travail de thèse a donc permis de faire nettement évoluer les capacités du code de calcul europlexus dans le domaine de la modélisation à l'aide de méthodes sans maillages. En effet comme nous l'avons vu dans la première partie de ce mémoire il est désormais possible à l'aide des travaux réalisés de modéliser sous europlexus des solides élastoplastiques . La méthode SPH proposée présente de plus l'avantage par rapport à celle préalablement utilisée dans Europlexus d'être stable. Les problèmes de stabilité étant résolus par l'utilisation d'une formulation lagrangienne totale. De même le recours à des fonctions de forme normalisées permet d'éliminer les problèmes de consistance et ainsi d'améliorer la précision et d'assurer la convergence de la méthode.

Cet outil se révélant cependant peut adapté au traitement de structures très minces comme les parois d'un réservoir une nouvelle formulation SPH adaptée à la modélisation de coques a été développée. Cette formulation qui adapte le formalisme SPH à la théorie des coques épaisses de Mindlin Reissner permet de modéliser une coque à l'aide d'une seule couche de billes. L'utilisation d'une intégration spatiale par stress points, de fonctions de forme de type MLS ainsi que d'un traitement simple et efficace des conditions limites permettent d'obtenir une méthode stable et précise. La méthode proposée se révèle de plus capable de simuler de manière simple et efficace des ruptures ou déchirures de coques.

Enfin une évolution de la méthode pinball a été proposée pour assurer la gestion des interactions de type fluide-structure dans le cadre d'un modèle faisant intervenir simultanément des parties fluide, solide ou coques toutes modélisées par de la méthode SPH.

Un certains nombre d'améliorations sont toutefois à prévoir.

- Pour ce qui concerne la modélisation de coques deux axes principaux de développement peuvent être envisagé. Le premier concerne l'élimination des problèmes de verrouillage qui n'ont pas été traités pour l'instant et qui peuvent poser problèmes dans le cas de plaques très minces. Le second concerne la rupture puisqu'en effet pour l'instant le critère de rupture utilisé est tout à fait simpliste et mériterait donc d'être remplacé par un critère nettement plus évolué faisant intervenir par exemple de l'endommagement.

- Les différentes améliorations introduites lors du développement de la méthode SPH coque peuvent également être appliquées au code volumique 3D, comme par exemple l'utilisation de fonctions de formes MLS ou la méthode de stabilisation par stress points, ce qui n'a pu être entrepris par manque de temps.
- Un certain nombre d'évolutions peuvent également être apportées à l'algorithme Pinball utilisé notamment dans le cas des coques avec la prise en compte de l'épaisseur de la coque dans la détection du contact. Il serait également intéressant de pouvoir coupler la méthode Pinball aux autres algorithmes de gestion de liaisons d'Europlexus afin de pouvoir imposer des conditions cinématiques supplémentaires aux pinballs.
- Enfin une validation expérimentale plus poussée serait à prévoir en utilisant un modèle SPH plus évolué.

Annexe

Formulation SPH elastoplastique 3D : calcul de l'incrément de déformation plastique équivalente :

Pour simplifier la démonstration les contraintes sont réécrites sous la forme d'un vecteur $\vec{\sigma}$:

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Le seuil de plasticité au sens de Von-mises s'écrit dans ce cas :

$$J_2(\Delta) = \sigma_{VM} - \sigma_Y = 0 \quad \text{avec} \quad \sigma_{VM}^2 = \frac{3}{2} \vec{\sigma}^t \cdot \vec{\sigma} \quad (4.9)$$

On peut montrer, étant donné que σ_{VM} et σ_Y sont positifs que le critère précédent est équivalent au critère suivant :

$$J_2'(\Delta) = (\sigma_{VM} - \sigma_Y) \times (\sigma_{VM} + \sigma_Y) = \sigma_{VM}^2 - \sigma_Y^2 = 0 \quad (4.10)$$

En notant le tenseur des contraintes à l'instant suivant $\vec{\sigma}^{n+1}$ et celui à l'instant présent $\vec{\sigma}^n$ on écrit dans le cas élastique :

$$\vec{\sigma}^{n+1} = \vec{\sigma}^{*n+1} = \vec{\sigma}^n + \mathbf{C} \cdot \Delta \vec{\epsilon} \quad (4.11)$$

Dans le cas plastique ($f > 0$) on écrit :

$$\vec{\sigma}^{n+1} = \vec{\sigma}^n + \mathbf{C} \cdot (\Delta \vec{\epsilon} - \Delta \vec{\epsilon}_p) \quad (4.12)$$

$$\vec{\sigma}^{n+1} = \vec{\sigma}^{*n+1} - \mathbf{C} \cdot \Delta \vec{\epsilon}_p \quad (4.13)$$

En faisant l'hypothèse que les déformations plastiques conservent le volume ($trac(\Delta \vec{\epsilon}_p) = 0$) on peut écrire :

$$\vec{\sigma}^{n+1} = \vec{\sigma}^{*n+1} - 2\mu\Delta\vec{\epsilon}_p \quad (4.14)$$

L'incrément de déformations plastique $\Delta\vec{\epsilon}_p$ est calculé à partir de la loi d'écoulement et de l'incrément de déformation plastique équivalent $\Delta\psi$:

$$\Delta\vec{\epsilon}_p = \frac{\partial J'_2(\Delta)}{\partial \vec{\sigma}} \cdot \Delta\lambda \quad \text{avec} \quad \Delta\lambda = \frac{\Delta\psi}{\sigma_y^{n+1}} \quad (4.15)$$

En tenant compte de l'équation 2.53 on obtient :

$$\Delta\vec{\epsilon}_p = \frac{3}{2} \frac{\Delta\psi}{\sigma_y^{n+1}} \cdot \vec{\sigma}^{n+1} \approx \frac{3}{2} \frac{\Delta\psi}{\sigma_{VM}} \cdot \vec{\sigma}^{*n+1} \quad (4.16)$$

On obtient donc à partir des équations 4.13 et 4.16 un système de 2 équations à 2 inconnues $\vec{\sigma}^{n+1}$ et $\Delta\psi$:

$$\begin{cases} \vec{\sigma}^{n+1} = (1 - \Delta\psi \cdot \mathbf{Q}) \cdot \vec{\sigma}_g^{*n+1} \quad \text{avec} \quad \mathbf{Q} = \frac{3\mu}{\sigma_{VM}} \cdot \mathbf{I} \\ \frac{3}{2} (\vec{\sigma}^{n+1})^t \cdot \vec{\sigma}^{n+1} = (\sigma_y^{n+1})^2 \quad \text{avec} \quad \sigma_y^n + \frac{\partial \sigma_y}{\partial \psi} \cdot \Delta\psi \end{cases} \quad (4.17)$$

On en déduit :

$$(\sigma_y^{n+1})^2 = \frac{3}{2} ((1 - \Delta\psi \cdot \mathbf{Q}) \cdot \vec{\sigma}_g^{*n+1})^t \cdot ((1 - \Delta\psi \cdot \mathbf{Q}) \cdot \vec{\sigma}_g^{*n+1}) \quad (4.18)$$

$$= \frac{3}{2} ((\vec{\sigma}_g^{*n+1})^t \cdot \vec{\sigma}_g^{*n+1} - 2\Delta\psi \cdot (\vec{\sigma}_g^{*n+1})^t \cdot \mathbf{Q}^t \cdot \vec{\sigma}_g^{*n+1} + \Delta\psi^2 \cdot (\vec{\sigma}_g^{*n+1})^t \cdot \mathbf{Q}^t \cdot \mathbf{Q} \cdot \vec{\sigma}_g^{*n+1}) \quad (4.19)$$

$$= \sigma_{VM}^2 - 2 \left(\frac{3}{2} \Delta\psi \cdot (\vec{\sigma}_g^{*n+1})^t \cdot \mathbf{Q}^t \cdot \vec{\sigma}_g^{*n+1} \right) + \frac{3}{2} \Delta\psi^2 \cdot (\vec{\sigma}_g^{*n+1})^t \cdot \mathbf{Q}^t \cdot \vec{\sigma}_g^{*n+1} \cdot (\vec{\sigma}_g^{*n+1})^t \cdot \mathbf{Q} \cdot \vec{\sigma}_g^{*n+1} \quad (4.20)$$

On peut ensuite remarquer l'égalité suivante :

$$\frac{3}{2\sigma_{VM}} \cdot (\vec{\sigma}_g^{*n+1})^t \cdot \mathbf{Q}^t \cdot \vec{\sigma}_g^{*n+1} = 3\mu \quad (4.21)$$

L'équation 4.18 peut ainsi être mise sous la forme :

$$(\sigma_y^{n+1})^2 = \sigma_{VM}^2 - 2(3\mu \cdot \sigma_{VM} \cdot \Delta\psi) + \Delta\psi^2 \cdot 9\mu^2 \quad (4.22)$$

On en déduit en ne gardant que la solution convenable à l'équation précédente :

$$\sigma_y^{n+1} = \sigma_{VM} - 3\mu\Delta\psi \quad (4.23)$$

En utilisant de plus la définition de la nouvelle limite élastique σ_y^{n+1} on peut écrire :

$$\sigma_y^{n+1} = \sigma_y^n + \frac{\partial \sigma_y}{\partial \psi} \cdot \Delta \psi = \sigma_{VM} - 3\mu \Delta \psi \quad (4.24)$$

On déduit alors de cette dernière équation l'expression de $\Delta \psi$:

$$\Delta \psi = \frac{\sigma_{VM} - \sigma_y^n}{3\mu + \frac{\partial \sigma_y}{\partial \psi}} \quad (4.25)$$

Bibliographie

- [BEL 91] BELYTSCHKO T., NEAL M. O.
Contact-Impact by the Pinball method with penalty and Lagrangian Methods. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 31, 1991, p. 547-572.
- [BEL 94] BELYTSCHKO T., GUO Y., LIU W. K., XIAO S. P.
Element free galerkin methods. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 37, 1994, p. 229-256.
- [BEL 96] BELYTSCHKO T., RABCZUK T., ORGAN D., FLEMING M., KRYSL P.
Meshless methods : an overview and recent developments. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 139, 1996, p. 3-47.
- [BEL 00] BELYTSCHKO T., GUO Y., LIU W. K., XIAO S. P.
A unified stability analysis of meshless particle methods. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 40, 2000, p. 1359-1400.
- [BEL 05] BELYTSCHKO T., RABCZUK T., XIAO S. P.
Stable particle methods based on lagrangian kernels. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 193, 2005, p. 1035-1063.
- [BET 98] BETSCH P., MENZEL A., STEIN E.
On the parametrization of finite rotations in computational mechanics. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 155, 1998, p. 273-305.
- [CAS 03] CASADEI F.
A General Impact-Contact Algorithm based on hierarchic pinballs for the EUROPLEXUS software system. Technical note n° 265, septembre2003, CCR ISPRA.
- [CAS 05] CASADEI F.
Validation of the europlexus Pinball Impact-Contact Model on an indentation Problem. Technical note n° 5, juillet2005, JR ISPRA.
- [CHE 00] CHEN J. S., WU C. T., YOON S., YOU Y.
A stabilized conforming nodal integration for galerkin meshfree methods. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 50, 2000, p. 435-466.
- [cou02] Atlas of Stress-Strain Curves. *ASM International*, , 2002, page 318.
- [DAL 65] DALY B. J., HARLOW H., WELSH J.
Numerical fluid dynamics using the particle and force method : part I - The method and its applications. Report n° LA-3144, 1965, Los Alamos Scientific Laboratory, 1965.

- [DIL 99] DILTS G. A.
Moving least squares particle hydrodynamics - I : consistency and stability. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 44, 1999, p. 1115-1155.
- [DIL 00] DILTS G. A.
Moving least squares particle hydrodynamics - II : conservation and boundaries. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 48, 2000, p. 1503-1524.
- [DUA 95] DUARTE C., ODEN J. D.
A meshless method to solve boundary value problems. Report n° 95-05, 1995, Texas Institute for Computational and Applied Mechanics, University of Texas.
- [DYK 97] DYKA, RANDLES P. W., INGEL R. P.
Stress points for tension instability. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 40, 1997, p. 2325-2341.
- [FUL 96] FULK D. A., MONAGHAN J. J.
An analysis of 1-D smoothed particle hydrodynamics kernels. *Journal of computational physics*, vol. 126, 1996, p. 165-180.
- [GIN 77] GINGOLD R. A., MONAGHAN J. J.
Smoothed particle hydrodynamics : theory and application to non-spherical stars. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, vol. 181, 1977, page 375.
- [GIN 83] GINGOLD R. A., MONAGHAN J. J.
Shock simulation by the particle method SPH. *Journal of computational physics*, vol. 52, 1983, p. 374-389.
- [GRA 01] GRAY J. P., MONAGHAN J. J.
SPH elastic dynamics. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 190, 2001, p. 6641-6662.
- [IDE 03] IDELSOHN S. R., ONATE E., CALVO N., PIN F. D.
The meshless finite element method. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 58, 2003, p. 2316-2343.
- [ILY 56] ILYUSHIN A. A.
Plasticité. *Eyrolles*, , 1956.
- [JIA 94] JIANG L., CHERNUKA M. W.
A simple four noded corotational shell element for arbitrarily large rotations. *Computer and structures*, vol. 55, 1994, p. 453-462.
- [JOH 86] JOHNSON G. R., STRYK R. A., DODD J. G.
Dynamic lagrangian computations for solids with variable nodal connectivity for severe distortions. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 23, 1986, p. 509-522.
- [JOH 87] JOHNSON G. R., STRYK R. A.
Eroding interface and improved tetrahedral element algorithms for high velocity impacts in three dimensions. *International journal for impact engineering*, vol. 5, 1987, p. 414-427.

- [JOH 89] JOHNSON G. R., STRYK R. A.
Dynamic three dimensional computations for solids with variable nodal connectivity for severe distortions. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 28, 1989, p. 817-832.
- [JOH 96a] JOHNSON G. R.
Artificial viscosity effects for SPH impact computations. *International journal of impact engineering*, vol. 18, 1996, p. 477-488.
- [JOH 96b] JOHNSON G. R., STRYCK R. A., BEISSEL S. R.
SPH for high velocity impact. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 139, 1996, p. 347-373.
- [JOH 02] JOHNSON G. R., BEISSEL S. R., STRYK R. A.
An improved generalized particle algorithm that includes boundaries and interfaces. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 53, 2002, p. 875-904.
- [KAN 01] KANOK-NUKULSHAI W., BARRY W., SARAN-YASOONTORN K.
On elimination of shear locking in the element-free galerkin method. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 52, 2001, p. 705-725.
- [KRY 96] KRYSL P., BELYTSCHKO T.
Analysis of thin shells by the element free galerkin method. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 33, 1996, p. 3057-3078.
- [LET 96] LETELLIER A.
Contribution à la modélisation d'impacts d'oiseaux sur les aubes des réacteurs d'avions. Thèse de doctorat, Université d'Evry, 1996.
- [LI 00] LI S., HAO W.
Numerical simulations of large deformation of thin shell structure using meshfree methods. *Computational mechanics*, vol. 25, 2000, p. 102-116.
- [LI 02] LI S., LIU W. K.
Meshfree and particle methods and their applications. *Applied mechanics reviews*, vol. 55, 2002.
- [LIB 91] LIBERSKY L. D., PETSCHKE A. G.
Smoothed Particle hydrodynamics with strength of material. *Proceedings, The next free lagrange conference*, vol. 395, 1991, p. 248-257.
- [LIS 84] LISKA T.
An interpolation method for an irregular net of nodes. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 20, 1984, p. 1599-1612.
- [LIU 95] LIU W. K., LI J. S., BELYTSCHKO T.
Reproducing Kernel Particle methods for structural dynamics. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 38, 1995, p. 1655-1679.
- [MAS 00] MASUD A., THAM C. L., LIU W. K.
A stabilized 3D co-rotational formulation for geometrically nonlinear analysis of multi-layered composite shells. *Computational mechanics*, vol. 26, 2000, p. 1-12.

- [MEH 06] MEHRA V., CHATURVEDI S.
High velocity impact of metal sphere on thin metallic plates : A comparative smooth particle hydrodynamics study. *Journal of computational physics*, vol. 212 issue 1, 2006, p. 318-337.
- [NAY 92] NAYROLES B., TOUZOT G., VILLON P.
Generalizing the FEM : Diffuse approximation and diffuse elements. *Computational mechanics*, vol. 10, 1992, p. 307-318.
- [NEA 85] NEAL R. M. M., HARDER R. L.
A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. *Finite Element analysis design*, vol. 1, 1985, p. 3-20.
- [NEU 50] NEUMAN J. V., RICHTMYER R. D.
A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks. *Journal of applied physics*, vol. 21, 1950, p. 232-237.
- [NOG 00] NOGUCHI H., KAWASHIMA T., MIYAMURA T.
Element free analysis of shell and spatial structures. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 47 issue 6, 2000, p. 1215-1240.
- [PAR 02] PARSHIKOV A. N., MEDIN S. A.
Smoothed particle hydrodynamics using interparticle contact algorithms. *Journal of computational physics*, vol. 180, 2002, p. 358-382.
- [RAB ss] RABCZUK T., AREIAS P. M. A., BELYTSCHKO T.
A meshfree method for non-linear dynamic fracture. *International journal for numerical methods in engineering*, , in press.
- [RAN 96] RANGLES P. W., LIBERSKY L. D.
Smoothed Particle Hydrodynamics : Some recent improvements and applications. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 139, 1996, p. 375-408.
- [RAN 00] RANGLES P. W., LIBERSKY L. D.
Normalized SPH with stress points. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 48, 2000, p. 1445-1462.
- [SWE 94] SWEGLE J. W., HICKS D. L., CHEN Y.
Stabilizing SPH with conservative smoothing. Report n° SAND94-1932, 1994, SANDIA.
- [VID] VIDAL Y., BONET J., HUERTA A.
Stabilized updated Lagrangian corrected SPH for explicit dynamic problems. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. in press.
- [VIG 00] VIGNEVIC R., CAMPBELL J., LIBERSKY L.
A treatment of zero modes in the SPH method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 184, 2000, p. 67-85.
- [WAN 04] WANG D. D., CHEN J. S.
Locking free stabilized conforming nodal integration for meshfree Mindlin-Reissner

plate formulation. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 193, 2004, p. 1065-1083.

[ZEN 01] ZENG Q., COMBESURE A., ARNAUDEAU F.

An efficient plasticity algorithm for shell elements application to metal forming simulations. *Computers and Structures*, vol. 79, 2001, p. 1525-1540.

FOLIO ADMINISTRATIF

THÈSE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

NOM : MAUREL

DATE de SOUTENANCE : 23 janvier 2008

Prénoms : Bertrand, Pierre

TITRE : Modélisation par la méthode SPH de l'impact d'un réservoir rempli de fluide

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2008-ISAL-005

École doctorale : MEGA

Spécialité : Mécanique - Génie Mécanique - Génie Civil

Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 / et bis

CLASSE :

RÉSUMÉ :

Afin de garantir la sûreté de certaines installations, leur résistance à la chute d'un avion doit être prise en compte. La difficulté et le coût d'essais réels rendent la simulation indispensable pour ce type d'études. Cependant les phénomènes à représenter sont particulièrement complexes. Ainsi par exemple l'éventration des réservoirs de carburant et la fuite de celui-ci au travers des déchirures se révèlent particulièrement difficiles à modéliser à l'aide d'outils classiques comme la méthode des éléments finis. En effet, les grandes déformations du fluide, les effets de sloshing dans le réservoir, les impacts multiples et la fracturation du réservoir sont autant de phénomènes complexes et coûteux à traiter lorsque l'on utilise une méthode de calcul requérant un maillage en particulier à cause des problèmes de remaillage.

Le travail de thèse a donc consisté à développer un outil de simulation numérique utilisant une approche meshless (ou sans maillage) capable de simuler la déformation et la rupture de structures minces sous l'impact d'un fluide. Un modèle de coque épaisse meshless (Mindlin-Reissner) basé sur la méthode SPH a ainsi été réalisé. Un algorithme de contact a de plus été mis au point pour la gestion des interactions entre la structure et le fluide également modélisé par la méthode SPH. Ces travaux ont été réalisés et inclus dans le logiciel de dynamique rapide Europlexus du CEA.

Dans un but de validation expérimentale des essais d'éventration de réservoirs par impacts ont également été réalisés en coopération avec l'ONERA (Organisme National d'Etudes et de Recherches Aéronautiques).

MOTS-CLÉS : meshless, méthode SPH, coque, interactions fluide-structure

Laboratoire(s) de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Solides
UMR CNRS 5514 - INSA de Lyon
20, avenue Albert Einstein
69621 Villeurbanne Cedex FRANCE

Directeur de thèse : Monsieur le Professeur Alain COMBESURE

Président du jury : HUERTA Antonio

Composition du jury : CHINESTA Francesco
POTAPOV Serguei
COMBESURE Alain

DELANGRE Emmanuel
FABIS Jacky