N° d'ordre 2007-ISAL-0081 Année 2007

Thèse

# Outils symboliques pour l'écriture de modèles et l'étude de sensibilité des systèmes multicorps

Présentée devant
L'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

Pour obtenir
Le grade de docteur

Formation doctorale
Génie Mécanique

École doctorale
Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique (MEGA) de Lyon

Par
Arnaud SANDEL
(Ingénieur INSA – Professeur Agrégé de Mécanique)

Soutenue le 23 novembre 2007 devant la Commission d'examen

Jury MM.

| | |
|---|---|
| P. BOISSE | Professeur (INSA de Lyon), Co-Directeur de thèse |
| R. DUFOUR | Professeur (INSA de Lyon) |
| M. FAYET | Professeur émérite (INSA de Lyon), Directeur de thèse |
| P. FISETTE | Professeur (Université Catholique de Louvain, Belgique), Président |
| D. LE HOUEDEC | Professeur émérite (Ecole Centrale de Nantes), Rapporteur |
| L. MAIFFREDY | Maître de Conférences (INSA de Lyon), Co-Directeur de thèse |
| C. PROPPE | Professeur (Université de Karlsruhe, Allemagne) |
| W. SEEMANN | Professeur (Université de Karlsruhe, Allemagne), Rapporteur |

Laboratoire de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures (LaMCoS) – UMR 5259

# *INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales 2007*

| SIGLE | ECOLE DOCTORALE | NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE |
|---|---|---|
| **CHIMIE** | **CHIMIE DE LYON**<br>**http://sakura.cpe.fr/ED206**<br><br>M. Jean Marc LANCELIN<br><br>Insa : R. GOURDON | M. Jean Marc LANCELIN<br>Université Claude Bernard Lyon 1<br>Bât CPE<br>43 bd du 11 novembre 1918<br>69622 VILLEURBANNE Cedex<br>Tél : 04.72.43 13 95 Fax :<br>lancelin@hikari.cpe.fr |
| **E.E.A.** | **ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE**<br>**http://www.insa-lyon.fr/eea**<br>M. Alain NICOLAS<br>Insa : D. BARBIER<br>ede2a@insa-lyon.fr<br>Secrétariat : M. LABOUNE<br>AM. 64.43 – Fax : 64.54 | M. Alain NICOLAS<br>Ecole Centrale de Lyon<br>Bâtiment H9<br>36 avenue Guy de Collongue<br>69134 ECULLY<br>Tél : 04.72.18 60 97 Fax : 04 78 43 37 17<br>eea@ec-lyon.fr<br>Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN |
| **E2M2** | **EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION**<br>**http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2M2**<br><br>M. Jean-Pierre FLANDROIS<br>Insa : S. GRENIER | M. Jean-Pierre FLANDROIS<br>CNRS UMR 5558<br>Université Claude Bernard Lyon 1<br>Bât G. Mendel<br>43 bd du 11 novembre 1918<br>69622 VILLEURBANNE Cédex<br>Tél : 04.26 23 59 50 Fax 04 26 23 59 49<br>06 07 53 89 13<br>e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr |
| **EDIIS** | **INFORMATIQUE ET INFORMATION POUR LA SOCIETE**<br>http://ediis.univ-lyon1.fr<br><br>M. Alain MILLE<br><br>Secrétariat : I. BUISSON | M. Alain MILLE<br>Université Claude Bernard Lyon 1<br>LIRIS - EDIIS<br>Bâtiment Nautibus<br>43 bd du 11 novembre 1918<br>69622 VILLEURBANNE Cedex<br>Tél : 04.72. 44 82 94 Fax 04 72 44 80 53<br>ediis@liris.cnrs.fr - alain.mille@liris.cnrs.fr |
| **EDISS** | **INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE**<br><br>M. Didier REVEL<br>Insa : M. LAGARDE | M. Didier REVEL<br>Hôpital Cardiologique de Lyon<br>Bâtiment Central<br>28 Avenue Doyen Lépine<br>69500 BRON<br>Tél : 04.72.35 72 32 Fax :<br>Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr |
| | **MATERIAUX DE LYON**<br><br>M. Jean Marc PELLETIER<br><br>Secrétariat : C. BERNAVON<br>83.85 | M. Jean Marc PELLETIER<br>INSA de Lyon<br>MATEIS<br>Bâtiment Blaise Pascal<br>7 avenue Jean Capelle<br>69621 VILLEURBANNE Cédex<br>Tél : 04.72.43 83 18 Fax 04 72 43 85 28<br>Jean-marc.Pelletier@insa-lyon.fr |
| **Math IF** | **MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE FONDAMENTALE**<br><br>M. Pascal KOIRAN<br><br>Insa : G. BAYADA | M.Pascal KOIRAN<br>Ecole Normale Supérieure de Lyon<br>46 allée d'Italie<br>69364 LYON Cédex 07<br>Tél : 04.72.72 84 81 Fax : 04 72 72 89 69<br>Pascal.koiran@ens-lyon.fr<br>Secrétariat : Fatine Latif - latif@math.univ-lyon1.fr |
| **MEGA** | **MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE**<br><br>M. Jean Louis GUYADER<br><br>Secrétariat : M. LABOUNE<br>PM : 71.70 –Fax : 87.12 | M. Jean Louis GUYADER<br>INSA de Lyon<br>Laboratoire de Vibrations et Acoustique<br>Bâtiment Antoine de Saint Exupéry<br>25 bis avenue Jean Capelle<br>69621 VILLEURBANNE Cedex<br>Tél :04.72.18.71.70 Fax : 04 72 18 87 12<br>mega@lva.insa-lyon.fr |
| **SSED** | **SCIENCES DES SOCIETES, DE L'ENVIRONNEMENT ET DU DROIT**<br><br>Mme Claude-Isabelle BRELOT<br><br>Insa : J.Y. TOUSSAINT | Mme Claude-Isabelle BRELOT<br>Université Lyon 2<br>86 rue Pasteur<br>69365 LYON Cedex 07<br>Tél : 04.78.69.72.76 Fax : 04.37.28.04.48<br>Claude-isabelle.brelot@univ-lyon2.fr |

A Blandine
Eléna et Corentin

# Remerciements

Mes premiers remerciements vont naturellement au professeur Michel Fayet, directeur de cette thèse. Qu'il soit remercié pour sa compétence et la gentillesse avec laquelle il me suit depuis douze ans maintenant, y compris le soir à vingt-deux heures ou le dimanche après-midi. A présent, Michel, tu peux te consacrer à ta seconde carrière musicale l'esprit libre !

Le professeur Philippe Boisse, chercheur éminent en mise en forme des composites, et Lionel Maiffredy, spécialiste de dynamique du véhicule, ont co-dirigé ce travail : merci pour vos conseils efficaces.

Ce travail a été réalisé au sein du LaMCoS. Merci à son directeur, le professeur Alain Combescure, ainsi qu'au professeur Jean-Claude Boyer, directeur du département GMC, et au professeur Yves Jayet, directeur du Premier Cycle, pour leur confiance et leur soutien, notamment lors de mes demandes d'allègement de service… A travers les chefs, merci aux staffs, aux secrétaires et aux informaticiens, sans qui rien ne serait possible.

Je remercie sincèrement le professeur Donatien Le Houedec, référence dans le domaine des multicorps, et le professeur Wolfgang Seemann, directeur de l'Institut für Technische Mechanik (ITM) de l'Université de Karlsruhe (TH), pour avoir accepté la charge de rapporteurs ; nos discussions ont été pour moi très instructives. Mention spéciale à Monsieur Seemann pour la lecture des 190 pages en français… Les liens avec l'ITM de Karlsruhe remontent aux années 1990, lorsque le professeur Wittenburg était membre du jury de… Michel Fayet, et que le thésard de ce dernier, le brillant Felix Pfister, était mon premier professeur de mécanique… C'est donc un grand plaisir d'accueillir Carsten Proppe, autre jeune professeur de l'ITM de Karlsruhe, au sein du jury : danke schön ! Je ne peux conclure ce passage outre-Rhin sans remercier Isabelle Hornik, coordinatrice des double-diplômes de Maschinenbau, et le professeur Martin Gabi, doyen de la faculté, pour leur aide, leur amitié et leur fidélité.

C'est un honneur d'accueillir au sein du jury le professeur Paul Fisette, de Louvain-La-Neuve, spécialiste reconnu de l'étude symbolique et numérique des systèmes multicorps. De même, je remercie le professeur Régis Dufour, directeur adjoint du LaMCoS et responsable dynamique de notre équipe Dynamique et Contrôle des Structures, d'avoir accepté de participer au jury.

Hormis les directeurs de thèse, plusieurs personnes m'ont aidé dans ma recherche : Benjamin Porte, étudiant en master, m'a apporté sa connaissance de Matlab et de la dynamique du véhicule ; Pierre Bonnet, professeur de mathématiques à l'INSA, m'a initié au théorème du saut ; je remercie également tous les collègues de "mécanique générale", d'autres disciplines, du LaMCoS ou d'autres laboratoires - dont Philippe Lonjou, Wilfrid Marquis-Favre ou Emmanuelle Sallé, avec qui les discussions sont toujours très instructives ; merci aussi aux doctorants, Pierre, Nahiène, Manu…, pour les discussions politiques passionnantes !

Un mot ému pour Jean-Paul Long, dont le sens de l'écoute et du partage n'avait d'égal que l'humour… Merci, Paulo…

Cette thèse est dédiée à mon épouse Blandine, et aux petits trésors Eléna et Corentin. Qu'ils me pardonnent toutes les soirées et les week-ends travaillés au lieu de m'occuper d'eux. Je vais me rattraper !

Evidemment, merci à mes parents pour m'avoir donné le goût du travail bien fait, et la persévérance sans laquelle on n'arrive pas au bout d'une thèse. Merci à mes beaux-parents pour m'avoir souvent libéré du temps en gardant les p'tits. Et merci au frère, beau-frère (passés par là eux aussi…), parrain, à tous les membres de la famille qui, même de loin, m'ont encouragé, de même que les amis : Gaël, Freddy, JC et beaucoup de zikets ou zikettes, que je ne veux pas nommer pour ne pas faire de jaloux.

Enfin, merci à mon vélo et à la SNCF car nombre de problèmes ont été résolus, d'idées trouvées ou de publications lues pendant le "trajet domicile-travail".

Mille excuses à ceux que je ne peux citer nommément ou que j'oublie… L'erreur est humaine, peut-être en trouverez-vous l'une ou l'autre en parcourant les 190 pages qui suivent…

# Table des matières

Liste des figures 11

Liste des tableaux 13

Introduction générale 15

Partie 1
Ecriture automatique des équations du mouvement grâce aux Tenseurs d'Inertie Globaux (TIG). Cas des liaisons complexes et des pseudo-paramètres. 19

1.1 Introduction 22

1.2 Etat de l'art : évolution du formalisme et du champ d'application des TIG 24

1.3 Nouveaux champs d'application 26

**1.3.1 Liaisons complexes 26**

**1.3.2 Pseudo-paramètres (non holonomes) 27**

1.4 Méthode de mise en équations 28

**1.4.1 Justification de l'utilisation du principe de d'Alembert 28**

**1.4.2 Avertissement : dérivées partielles de vecteurs [PFI95] 28**

**1.4.3 Rappel : forme brute des équations de Lagrange 29**

1.5 Cas des paramétrages holonomes 31

**1.5.1 Expression de $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i}$ 31**

**1.5.2 Expressions de $\frac{\partial^2 \overrightarrow{OM}}{\partial q_i \partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i}$ 32**

**1.5.3 Expressions des éléments cinétiques et des quantités d'accélération généralisées 34**
1.5.3.1 Symétries et anti-symétries 34
1.5.3.2 Introduction du tenseur cinétique 35
1.5.3.3 Introduction des Tenseurs d'Inertie Globaux (TIG) ; signification physique 36
1.5.3.4 Détermination récursive des Tenseurs d'Inertie Globaux 37
1.5.3.5 Symboles de Christoffel de type 2 39

**1.5.4 Expression des forces généralisées de pesanteur 40**

**1.5.5 Validations-exemples 40**
1.5.5.1 Description de Denavit-Hartenberg 41
1.5.5.2 Double-pendule orthogonal 43
*1.5.5.2.1 Mise en équations grâce aux TIG, programmée sous Maple 43*
*1.5.5.2.2 Vérification : mise en équations par la méthode de Lagrange 45*
1.5.5.3 Joint de Cardan 45
*1.5.5.3.1 Description du mécanisme 47*
*1.5.5.3.2 Détermination du torseur géométrique de la liaison complexe 47*
*1.5.5.3.3 Mise en équations grâce aux TIG, programmée sous Maple 49*
*1.5.5.3.4 Modèle simplifié 50*

1.6 Cas des paramétrages non holonomes 54

**1.6.1 Exemple 1 : Paramétrage d'un corps libre 54**
1.6.1.1 Théorie 54
1.6.1.2 Expressions détaillées 56

**1.6.2 Exemple 2 : Paramètres utilisés en Dynamique du Véhicule 57**
1.6.2.1 Théorie 57
1.6.2.2 Expressions détaillées pour un modèle simplifié de véhicule 59

1.7 Synthèse 61

**1.7.1 Résumé 61**

**1.7.2 Méthode 61**

# Partie 2
# Etude de sensibilité pour les systèmes multicorps. Méthodes directe et adjointe. 63


## 2.1 Introduction 66

## 2.2 Etat de l'art 68

**2.2.1 Données du problème 68**
2.2.1.1 Terminologie – Définitions - Notations 68
*2.2.1.1.1 Coordonnées et vitesses généralisées – variables d'état 68*
*2.2.1.1.2 Paramètre de construction 69*
*2.2.1.1.3 Modèle dynamique 69*
*2.2.1.1.4 Critère 70*
*2.2.1.1.5 Contraintes et restrictions 70*
*2.2.1.1.6 Sensibilité 71*
2.2.1.2 Hypothèses fondamentales 72

**2.2.2 Utilité de l'étude de sensibilité aux paramètres 73**
2.2.2.1 Utilisation directe de la sensibilité 74
2.2.2.2 Optimisation 75
2.2.2.3 Simplifications 76
2.2.2.4 Divers 77
*2.2.2.4.1 Maillages par éléments finis 77*
*2.2.2.4.2 Automatique 77*
*2.2.2.4.3 Identification de paramètres 78*
*2.2.2.4.4 Mathématiques appliquées 78*
*2.2.2.4.5 Les problèmes de tir 78*

**2.2.3 Les différentes méthodes d'analyses de sensibilité existantes 79**
2.2.3.1 Les méthodes numériques 79
*2.2.3.1.1 Différences finies et plans d'expérience 79*
*2.2.3.1.2 Les méthodes de différentiation automatique 80*
2.2.3.2 Méthodes analytiques et semi-analytiques : directe et adjointe 81
*2.2.3.2.1 Forme du modèle dynamique de départ - formalisme d'état 82*
*2.2.3.2.2 Forme du critère 85*
*2.2.3.2.3 Conditions initiales sur la sensibilité des variables d'état 85*
*2.2.3.2.4 Description de la méthode directe 86*
*2.2.3.2.5 Description de la méthode de l'état-adjoint 88*
*2.2.3.2.6 Détermination des matrices et vecteurs dérivés 91*
*2.2.3.2.7 Pistes de résolution (intégration) des systèmes différentiels 92*
*2.2.3.2.8 Synthèse : critères de choix de la méthode semi-analytique 92*

## 2.3 Adaptation théorique des méthodes d'étude de sensibilité aux systèmes multicorps 96

**2.3.1 Motivations 96**

**2.3.2 Modifications concernant les deux méthodes analytiques 97**
2.3.2.1 Sensibilités fonctions du temps 97

2.3.2.2 Cas non linéaire 100
*2.3.2.2.1 Matrice de masse étendue dépendant des coordonnées généralisées 100*
*2.3.2.2.2 Traitement analytique de* $\frac{d\mathbf{A}}{dx}$ *101*

**2.3.3 Traitement du système adjoint 103**
2.3.3.1 Transformation du système adjoint en système homogène 104
*2.3.3.1.1 Fonctions et distributions 106*
*2.3.3.1.2 Point de départ : forme de l'équation (2.3.18) 106*
*2.3.3.1.3 Théorème du saut 106*
*2.3.3.1.4 Ajout de la condition (2.3.19) 107*
*2.3.3.1.5 Conclusion 107*
2.3.3.2 Solution combinaison linéaire des solutions pour une base de conditions finales 108
*2.3.3.2.1 Equation de départ, notations et objectifs 108*
*2.3.3.2.2 Différentes fonctions* $\boldsymbol{\lambda}(t)$ *108*
*2.3.3.2.3 Idée 109*
*2.3.3.2.4 Forme de la solution de (2.3.28) 109*
*2.3.3.2.5 Evaluation de* $\mathbf{Q}_f(t)$ *111*
*2.3.3.2.6 Relation entre* $\mathbf{Q}_i(t)$ *et* $\mathbf{Q}_f(t)$ *111*
*2.3.3.2.7 Solution du système adjoint et forme de l'intégrale finale 112*
*2.3.3.2.8 Conclusion : améliorations apportées 112*

**2.3.4 Synthèse-bilan 113**

2.4 Etudes de cas - comparaison des méthodes dans le cas des multicorps 116

**2.4.1 Exemples académiques : systèmes masse-ressort-amortisseur 117**
2.4.1.1 Préliminaires 117
*2.4.1.1.1 Avertissement : sensibilités étudiées 117*
*2.4.1.1.2 Premiers essais 117*
2.4.1.2 Système masse-ressort-amortisseur linéaire 118
*2.4.1.2.1 Présentation du système et des sensibilités recherchées 118*
*2.4.1.2.2 Conditions initiales de sensibilité 119*
*2.4.1.2.3 Exemple de résultats en "mode formel" 120*
*2.4.1.2.4 Modes numérique et paramétrique 122*
*2.4.1.2.5 Rapidité comparée des deux méthodes pour plusieurs sensibilités 124*
2.4.1.3 Systèmes masse-ressort-amortisseur complexes 125

**2.4.2 Comparaison de l'efficacité des deux méthodes : double-pendule orthogonal 126**
2.4.2.1 Motivations et objectifs de l'étude 126
2.4.2.2 Caractéristiques de l'étude 127
*2.4.2.2.1 Rappel du modèle 127*
*2.4.2.2.2 Critères et paramètres de construction 128*
*2.4.2.2.3 Procédure de comparaison 128*
2.4.2.3 Résultats et analyse 129
*2.4.2.3.1 Sensibilité de l'énergie cinétique 129*
*2.4.2.3.2 Sensibilité de l'intégrale de l'énergie cinétique 132*
2.4.2.4 Conclusion : comparaison des deux méthodes pour les multicorps (et la MMC) 133

**2.4.3 Exemple dynamique du véhicule : modèle roulis-lacet-dérive 134**
2.4.3.1 Description du modèle [BROS06] 134
2.4.3.2 Caractéristiques de l'étude 137
2.4.3.3 Forme et traitement des résultats obtenus 138
*2.4.3.3.1 Les différentes valeurs " mesurées" 138*
*2.4.3.3.2 Discussion : dérivée logarithmique 140*
2.4.3.4 Résultats et analyse pour la vitesse de lacet 140
2.4.3.5 Résultats et analyse pour l'accélération latérale (critère non intégral) 143
2.4.3.6 Résultats et analyse pour le cap (critère intégral) 145
2.4.3.7 Conclusion 146

2.5 Conclusion 147

Partie 3
Etude de sensibilité à l'aide des Tenseurs d'Inertie Globaux (TIG) : écriture automatique des systèmes de sensibilité et adjoint. 149

3.1 Introduction 152

3.2 Différentes formes du modèle dynamique 154

3.3 Expressions des "éléments de sensibilité" en fonction des TIG 156

**3.3.1 Expressions des "éléments de sensibilité" en fonction des seules dérivées de $a_{ij}$, $\Gamma_{i,jk}$ et $Q_i$ 156**
3.3.1.1 Calcul de $\mathbf{J}$ 156
3.3.1.2 Calcul de $\mathbf{B}$ 157
3.3.1.3 Calcul de $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}$ 157
3.3.1.4 Calcul de $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}$ 158
3.3.1.5 Calcul de $\dot{\mathbf{A}}$ (qui n'intervient que dans la méthode adjointe) 158
3.3.1.6 Bilan 159

**3.3.2 Dérivées de $a_{ij}$, $\Gamma_{i,jk}$ et $Q_i$ : apparition des dérivées des TIG et des torseurs géométriques 159**
3.3.2.1 Dérivées par rapport aux coordonnées généralisées 159
*3.3.2.1.1 Calcul de $\frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i}$ 159*

*3.3.2.1.2 Calcul de* $\frac{\partial \Gamma_{i,jk}}{\partial q_l}$ *160*

*3.3.2.1.3 Calcul de* $\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}$ *162*

3.3.2.2 Dérivées par rapport au paramètre de construction x 163

*3.3.2.2.1 Calcul de* $\frac{\partial a_{ij}}{\partial x}$ *163*

*3.3.2.2.2 Calcul de* $\frac{\partial \Gamma_{i,jk}}{\partial x}$ *164*

*3.3.2.2.3 Calcul de* $\frac{\partial Q_i^{pes}}{\partial x}$ *164*

3.3.2.3 Dérivées par rapport au temps 164

**3.3.3 Détermination des dérivées des TIG et des torseurs géométriques 165**

3.3.3.1 Dérivées par rapport aux coordonnées généralisées 165

*3.3.3.1.1 Dérivées des TIG : calcul de* $\frac{\partial \overline{\overline{G}}_{ij}}{\partial q_l}$ *165*

*3.3.3.1.2 Dérivées des torseurs géométriques : calculs de* $\frac{\partial \tilde{\$}_i(O_i)}{\partial q_l}$ *et* $\frac{\partial \tilde{\$}'_j(O_j)}{\partial q_l}$ *167*

3.3.3.2 Dérivées par rapport au paramètre de construction x 169

3.3.3.3 Dérivées par rapport au temps 169

**3.3.4 Synthèse : algorithme récapitulatif simplifié 170**

3.4 Validations - exemples 172

**3.4.1 Double-pendule orthogonal 172**

**3.4.2 Exemples de paramétrages non holonomes 175**

3.4.2.1 Corps libre 175

3.4.2.2 Véhicule simplifié 177

3.5 Conclusion 180

Conclusion générale 183

Références bibliographiques 189

Nomenclature 197

# Annexes 205

**Annexe 1 Ecriture de modèles dynamiques par les Tenseurs d'Inertie Globaux – programmes Maple et applications 207**

Annexe 1.1 Double-pendule orthogonal 208
Annexe 1.2 Système à joint de Cardan 213
Annexe 1.3 Système simplifié à joint de Cardan 228

**Annexe 2 Algorithme des méthodes directe et adjointe d'étude de sensibilité. Cas de la statique. 234**

**Annexe 3 Méthodes d'étude de sensibilité. Programmes Maple appliqués au système masse-ressort-amortisseur linéaire. 237**

Annexe 3.1 Méthode directe 238
Annexe 3.2 Méthode de l'état-adjoint 244

**Annexe 4 Programme Matlab d'étude de sensibilité. Notice d'utilisation du programme principal comparaison.m 251**

**Annexe 5 Sensibilité de l'énergie cinétique du double-pendule orthogonal et de son intégrale. Courbes-résultats. 255**

Annexe 5.1 Double-pendule orthogonal : tracé des sensibilités de l'énergie cinétique en fonction du temps [PORTE06]. 256
Annexe 5.2 Double-pendule orthogonal : tracé des sensibilités de l'intégrale de Ec en fonction du temps [PORTE06]. 257

**Annexe 6 Modèle roulis-lacet-dérive de véhicule automobile [BROS06]. Signification des constantes et valeurs usuelles. 259**

**Annexe 7 Ecriture de modèles de sensibilité par les Tenseurs d'Inertie Globaux – programmes Maple et application 263**

Annexe 7.1 Double-pendule orthogonal 264
Annexe 7.2 Corps libre 275
Annexe 7.3 Véhicule simplifié 288

# Liste des figures

## Partie 1

**Figure 1.3.1** Paramétrage d'une suspension de roue 26

**Figure 1.5.1** Définition du corps généralisé $\Sigma_i$ 31
**Figure 1.5.2** Définition du corps augmenté $S_{i-1}^{+}$ 38
**Figure 1.5.3** Paramétrage-repérage de Denavit-Hartenberg modifié 42
**Figure 1.5.4** Double-pendule orthogonal 43
**Figure 1.5.5** Modèle du mécanisme présentant un joint de Cardan 46
**Figure 1.5.6** Graphe des liaisons du mécanisme avec joint de Cardan 47
**Figure 1.5.7** Figures de changement de base du modèle à joint de Cardan 48
**Figure 1.5.8** Graphe des liaisons pour le système simplifié à joint de Cardan 51

**Figure 1.6.1** Paramétrage d'un corps libre (planète, satellite) 54
**Figure 1.6.2** Paramétrage d'un modèle de véhicule 57

**Figure 1.7.1** Algorithme récapitulatif d'obtention du modèle dynamique 62

## Partie 2

**Figure 2.2.1** Influence d'une variation de x sur $g(t)$ 71
**Figure 2.2.2** Algorithme récapitulatif de la méthode directe 93
**Figure 2.2.3** Algorithme récapitulatif de la méthode adjointe 94

**Figure 2.3.1** Définition du débattement $z_i$ dans [EVR03, DEB03a,b,c] 100
**Figure 2.3.2** Illustration des différentes variables $\boldsymbol{\lambda}(t)$ en une dimension 109
**Figure 2.3.3** Algorithme récapitulatif des méthodes directe et adjointe 115

**Figure 2.4.1** Système masse-ressort-amortisseur linéaire [BEH98] 118
**Figure 2.4.2** Système masse-ressort-amortisseur linéaire – tracé de $y_1(k,t)$ pour m=1kg, k=1N.m$^{-1}$ et c=1kg.s$^{-1}$ 121
**Figure 2.4.3** Système masse-ressort-amortisseur linéaire – tracé de $u_{1,k} = \frac{dy_1}{dk}(k,t)$ pour m=1kg, k=1N.m$^{-1}$ et c=1kg.s$^{-1}$ 121
**Figure 2.4.4** Système masse-ressort-amortisseur linéaire – Composantes de $\mathbf{Q_f}(t)$ 123
**Figure 2.4.5** Double-pendule orthogonal 127
**Figure 2.4.6** Syntaxe Matlab pour la résolution des systèmes différentiels 129

**Figure 2.4.7** Double-pendule orthogonal – comparaison de la sensibilité $\frac{dT^0}{dr_2}(t)$ obtenue par les deux méthodes 129
**Figure 2.4.8** Double-pendule orthogonal – comparaison de la sensibilité $\frac{d}{dr_2}\int_0^{t_i} T^0(t)dt$ en fonction de $t_i$ 132
**Figure 2.4.9** Repérage général du modèle roulis-lacet-dérive d'un véhicule [BROS06] 135
**Figure 2.4.10** Véhicule : sensibilité de la vitesse de lacet par rapport à la rigidité de carrossage arrière en fonction du temps 139
**Figure 2.4.11** Véhicule : sensibilité de la vitesse de lacet par rapport à la rigidité de carrossage arrière 141
**Figure 2.4.12** Véhicule : sensibilité de la vitesse de lacet par rapport à la rigidité de dérive arrière 141
**Figure 2.4.13** Véhicule : sensibilité de la vitesse de lacet par rapport à la rigidité de train arrière 141
**Figure 2.4.14** Véhicule : surtension de $dg/dC_2$ en fonction de la vitesse d'avance 142
**Figure 2.4.15** Véhicule : sensibilité de l'accélération latérale par rapport à la rigidité de carrossage arrière 143
**Figure 2.4.16** Véhicule : sensibilité de l'accélération latérale par rapport à la rigidité de dérive arrière 143
**Figure 2.4.17** Véhicule : sensibilité de l'accélération latérale par rapport à la rigidité de train arrière 143
**Figure 2.4.18** Véhicule : sensibilité de l'accélération latérale par rapport à la rigidité de carrossage pour différentes vitesses d'avance 144
**Figure 2.4.19** Véhicule : sensibilité du cap par rapport à la rigidité de carrossage arrière 145
**Figure 2.4.20** Véhicule : sensibilité du cap par rapport à la rigidité de dérive du pneu arrière 145
**Figure 2.4.21** Véhicule : sensibilité du cap par rapport à la rigidité de train arrière 146

# Partie 3

**Figure 3.3.1** Méthode d'obtention des systèmes d'étude de sensibilité à l'aide des TIG 170

**Figure 3.4.1** Double-pendule orthogonal 173
**Figure 3.4.2** Paramétrage d'un corps libre (planète, satellite) 175
**Figure 3.4.3** Paramétrage d'un modèle de véhicule 177

# Liste des tableaux

**Tableau 2.3.1** Bilan des améliorations théoriques 113

**Tableau 2.4.1** Double-pendule orthogonal – récapitulatif temps de calcul pour la sensibilité de l'énergie cinétique 130

**Tableau 2.4.2** Double-pendule orthogonal - Nombre de "réévaluations" de solutions de systèmes différentiels 131

**Tableau 2.4.3** Double-pendule orthogonal – récapitulatif temps de calcul pour la sensibilité de l'intégrale de $T^0$ 133

**Tableau 2.4.4** Véhicule : sensibilité de la vitesse de lacet 142

**Tableau 2.4.5** Véhicule : sensibilité de l'accélération latérale 144

**Tableau 2.4.6** Véhicule : sensibilité du cap 146

# Introduction générale

Ainsi que l'affirme John Masse, spécialiste de calcul scientifique, "le tout numérique cède peu à peu la place à des approches mixtes alliant la puissance du calcul numérique et l'efficacité du calcul formel. (…) Le calcul numérique est utilisé pour la résolution et le calcul formel comme préprocesseur algébrique : ce dernier permet de manipuler, de trier, de conditionner, de calculer les dérivées formelles, d'optimiser les équations pour générer un simulateur spécifique qui contiendra uniquement les équations nécessaires à la résolution du problème traité. L'utilisation du calcul formel optimise grandement la résolution numérique des problèmes algébriques et/ou différentiels en terme de temps de calcul et de robustesse numérique. (…) Enfin, il améliore la compréhension physique des phénomènes car il permet de visualiser les équations construites" [MAS06].

Indice de ce retour en force du calcul formel par rapport au numérique, une étude pour un grand groupe automobile français a été encadrée pendant deux ans par le groupe Dynamique des Véhicules Automobiles (DVA), de l'équipe Dynamique et Contrôle des Structures (DCS) du LaMCoS : l'objectif était d'écrire et d'interpréter les équations de la dynamique du véhicule (modèle à quatorze degrés de liberté) en tenant compte de l'élastocinématique du train. Le cahier des charges stipulait le souhait de poursuivre les développements analytiques le plus loin possible, pour des raisons de compréhension physique évoquées ci-dessus.

Après l'écriture des équations (extrêmement complexes !) émaillée de la résolution de certains problèmes théoriques (méthode de mise en équations, projection de torseurs…), les tâches suivantes ont été successivement menées à bien :

- Le comportement du véhicule a été simulé sous Matlab ;

- Dans certains cas de roulage bien définis (par exemple freinage en courbe, mise en virage), des simplifications intuitives ont été validées numériquement, en comparant les simulations à modèle simplifié avec les simulations à modèle complet ;

- A partir de ces équations simplifiées, et dans le but d'étudier les petits mouvements, les positions "stationnaires" ont été déterminées pour un freinage en ligne droite et pour une mise en virage (à freinage nul et accélération latérale constante). Dans le premier cas, les équations linéarisées autour de ce point de fonctionnement ont été obtenues.

La suite logique évoquée aurait été d'entreprendre l'analyse de sensibilité sous forme littérale (sur les équations simplifiées) pour quelques performances simples : roulis en virage établi, déphasage de roulis lors de la mise en virage, temps de freinage, taux de sur ou sous-virage. L'objectif était de bien comprendre le rôle de chaque élément.

Cette étude industrielle a soulevé de nombreuses questions et a donné naissance aux différentes problématiques du travail présenté ici :

***Première partie***

L'écriture des équations littérales ayant été particulièrement fastidieuse, la question s'est posée de les obtenir de façon automatique. Or le professeur FAYET et son équipe ont mis au point un outil (les Tenseurs d'Inertie Globaux) permettant d'écrire le modèle dynamique de façon systématique et efficace, puisque les dérivations sont remplacées par du calcul matriciel plus rapide.

Dans la première partie de cette thèse, on se propose d'adapter cette théorie des TIG aux spécificités de la dynamique du véhicule, c'est-à-dire au paramétrage non holonome et à la présence de liaisons complexes (exemple roue-châssis) ; la présentation des TIG est également améliorée.

***Seconde partie***

Dans l'étude industrielle évoquée précédemment, les simplifications ont été menées de façon numérique et ne sont donc pas valables dans tous les cas de fonctionnement. Pourraient-elles être réalisées de façon systématique sur des critères mathématiques généraux ? Certains termes ne pourraient-ils pas être considérés comme constants car leur variation n'influe pas sur le comportement du véhicule ?

Ces questions peuvent trouver leur réponse dans une analyse de sensibilité du comportement aux paramètres de construction (longueurs, masses et inerties, raideurs et coefficients d'amortissement, forces ou couples de commande…), d'ailleurs souhaitée par l'industriel (cf ci-dessus). De plus, l'analyse de sensibilité, qui permet de comprendre *a priori* (sans prototypes) l'influence d'un paramètre géométrique ou inertiel sur un critère de stabilité par exemple, peut présenter pour un metteur au point des intérêts bien plus larges que la simplification d'équations :

- sur quelle grandeur (et dans quel sens) sera-t-il le plus judicieux d'agir pour corriger le comportement ?
- quel paramètre doit être le mieux maîtrisé en termes de tolérances de fabrication pour éviter un écartement du comportement idéal ?
- en tant que calcul de dérivées, l'analyse de sensibilité est la partie centrale et la plus importante (en termes de temps de calcul) d'une stratégie d'optimisation, d'un grand intérêt actuel en contrôle actif et autres applications "temps réel". Elle peut également servir à sélectionner les paramètres les plus influents, par rapport auxquels on souhaite mener l'optimisation.

La seconde partie du manuscrit présente donc les principales méthodes *analytiques* (directe et adjointe) d'étude de sensibilité relevées dans la littérature, adaptées et testées aux systèmes multicorps afin d'identifier la plus adaptée à ces systèmes. En effet, on souhaite toujours réaliser le minimum de simulations afin de réduire le temps de

calcul des sensibilités, éléments qui vont nous guider dans notre choix – de lectures et d'applications ; et comme écrit plus haut par Masse [MAS06] et confirmé par Haftka [HAF92], Serban [SER98a] et Eberhard [EBE07], les méthodes analytiques se révèlent plus précises et moins gourmandes en temps CPU que des méthodes numériques comme les différences finies.

***Troisième partie***

Enfin, les différents systèmes différentiels nécessaires à l'analyse de sensibilité de la deuxième partie peuvent être engendrés sans dérivation (grâce au calcul matriciel) en utilisant justement les TIG présentés dans la première partie.

La troisième partie réalise cette synthèse des deux premières ; l'objectif est d'accélérer l'étude de sensibilité et donc l'optimisation, ce qui représente une importante demande de l'industrie d'aujourd'hui [PORTA07].

Enfin, le lecteur aura remarqué que cette mise en situation est orientée "dynamique du véhicule", en raison de la nature de l'étude industrielle ayant inspiré la problématique de ce travail. Mais les outils symboliques mis en place dans cette thèse s'appliquent à tout système multicorps - constitué de solides rigides articulés au niveau de liaisons -, et communément appelé "machine". Le corps humain ou les robots en sont des applications tout aussi répandues. D'autres exemples que des modèles de véhicules automobiles seront d'ailleurs étudiés dans cette thèse : double-pendule (fil conducteur), corps libre (planètes, satellites…), joint de Cardan.

A noter que seuls les systèmes multicorps en boucles ouvertes seront traités dans ce travail (voir les perspectives en conclusion), un des objectifs étant de nous ouvrir au domaine de l'analyse de sensibilité.

# Partie 1

# Ecriture automatique des équations du mouvement grâce aux Tenseurs d'Inertie Globaux (TIG). Cas des liaisons complexes et des pseudo-paramètres.

1.1 Introduction 22

1.2 Etat de l'art : évolution du formalisme et du champ d'application des TIG 24

1.3 Nouveaux champs d'application 26

**1.3.1 Liaisons complexes 26**

**1.3.2 Pseudo-paramètres (non holonomes) 27**

1.4 Méthode de mise en équations 28

**1.4.1 Justification de l'utilisation du principe de d'Alembert 28**

**1.4.2 Avertissement : dérivées partielles de vecteurs [PFI95] 28**

**1.4.3 Rappel : forme brute des équations de Lagrange 29**

1.5 Cas des paramétrages holonomes 31

**1.5.1 Expression de $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i}$ 31**

**1.5.2 Expressions de $\frac{\partial^2 \overrightarrow{OM}}{\partial q_i \partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i}$ 32**

**1.5.3 Expressions des éléments cinétiques et des quantités d'accélération généralisées 34**
1.5.3.1 Symétries et anti-symétries 34
1.5.3.2 Introduction du tenseur cinétique 35
1.5.3.3 Introduction des Tenseurs d'Inertie Globaux (TIG) ; signification physique 36
1.5.3.4 Détermination récursive des Tenseurs d'Inertie Globaux 37
1.5.3.5 Symboles de Christoffel de type 2 39

**1.5.4 Expression des forces généralisées de pesanteur 40**

**1.5.5 Validations-exemples 40**
1.5.5.1 Description de Denavit-Hartenberg 41
1.5.5.2 Double-pendule orthogonal 43
*1.5.5.2.1 Mise en équations grâce aux TIG, programmée sous Maple 43*
*1.5.5.2.2 Vérification : mise en équations par la méthode de Lagrange 45*
1.5.5.3 Joint de Cardan 45
*1.5.5.3.1 Description du mécanisme 47*
*1.5.5.3.2 Détermination du torseur géométrique de la liaison complexe 47*
*1.5.5.3.3 Mise en équations grâce aux TIG, programmée sous Maple 49*
*1.5.5.3.4 Modèle simplifié 50*

1.6 Cas des paramétrages non holonomes 54

**1.6.1 Exemple 1 : Paramétrage d'un corps libre 54**
1.6.1.1 Théorie 54
1.6.1.2 Expressions détaillées 56

**1.6.2 Exemple 2 : Paramètres utilisés en Dynamique du Véhicule 57**
1.6.2.1 Théorie 57
1.6.2.2 Expressions détaillées pour un modèle simplifié de véhicule 59

1.7 Synthèse 61

**1.7.1 Résumé 61**

**1.7.2 Méthode 61**

# 1.1 Introduction

La théorie des Tenseurs d'Inertie Globaux (TIG) permet d'obtenir les équations du mouvement (modèle dynamique) d'un système multicorps (de solides rigides) de façon automatique et sans aucune dérivation. Seules apparaissent des opérations matricielles, ce qui induit une plus grande efficacité (rapidité) de l'algorithme.

Ce premier chapitre propose d'une part une nouvelle présentation des TIG : grâce notamment à l'emploi des coordonnées homogènes, toutes les caractéristiques inertielles d'un corps généralisé sont rassemblées dans un seul et même tenseur d'ordre 2, représenté sous la forme d'une matrice 4x4. Cela conduit à une forme très condensée des coefficients d'inertie qui apparaissent dans les équations du mouvement : ces éléments cinétiques se nomment coefficients de la matrice d'énergie cinétique (ou matrice de masse) et symboles de Christoffel.

D'autre part, les développements mathématiques présentés ici traitent les cas des liaisons complexes et des pseudo-paramètres :

- Une liaison complexe est réalisée par un assemblage de solides sans masse en boucle fermée, permettant un mouvement relatif à un degré de liberté ; l'exemple-type est la liaison entre le châssis et le porte-fusée d'une suspension automobile.

- Les pseudo-paramètres sont utilisés pour décrire le mouvement d'un corps libre (sans lien avec l'extérieur, comme les planètes ou les satellites) ou d'un véhicule : le vecteur taux de rotation et le vecteur vitesse du centre de masse sont projetés dans le repère local (lié au corps libre ou au châssis respectivement). Les pseudo-paramètres (encore nommés "quasi-paramètres" par Pfister [PFI95]) sont obtenus par intégration de ces composantes (par rapport au temps) et ont par conséquent des propriétés non holonomes (relation de Schwarz non vérifiée). Typiquement, pour les corps libres, l'emploi d'un paramétrage non holonome conduit aux équations d'Euler (cf §1.6.1).

Pour valider la théorie, des applications ont été étudiées, pour lesquelles l'obtention des équations "à la main", grâce aux équations de Lagrange, a été comparée au résultat de l'algorithme TIG programmé sous Maple 9.5 :

- Pour des chaînes ouvertes (non ramifiées) à liaisons normalisées, la programmation est universelle : il suffit de modifier les paramètres de Denavit-Hartenberg qui décrivent l'architecture du mécanisme, pour obtenir en quelques secondes le modèle dynamique (équations du mouvement). Afin de valider la théorie des TIG, treize systèmes différents, comportant jusqu'à trois degrés de liberté, ont été étudiés. Ils sont brièvement décrits au début du paragraphe 1.5.5 ; mais seul l'exemple de double-pendule orthogonal que nous avons présenté dans [FAY07] sera détaillé ici.

- Pour des chaînes ouvertes (non ramifiées) comprenant une ou plusieurs liaisons complexes, la programmation est quasi-universelle. On n'utilise plus les paramètres de Denavit-Hartenberg pour cette liaison : il faut fournir à la feuille de calcul Maple le torseur géométrique et le torseur géométrique dérivé décrivant la liaison, puis le calcul des équations du mouvement se fait automatiquement. L'exemple de la liaison Cardan, intégrée ou non dans un système plus large, sera présenté.

- Pour des chaînes ouvertes (non ramifiées) à pseudo-paramètres (paramétrage non holonome), certaines formules théoriques dépendent du système étudié ; la programmation n'est donc plus universelle. Sera présentée l'obtention néanmoins automatique des équations du mouvement pour un corps libre et un véhicule automobile sans roulis ni tangage.

# 1.2 Etat de l'art : évolution du formalisme et du champ d'application des TIG

La notion de Tenseurs d'Inertie Globaux (TIG) est initialement proposée par Fayet et Renaud en 1989 [FAY89]. Trois types de TIG sont définis pour des systèmes multicorps de solides rigides en boucle ouverte ; les solides sont uniquement reliés par des liaisons de révolution (pivots) ou prismatiques (glissières). Un autre point important est l'emploi de la notion de corps augmenté, inventée par Fischer [FIS1906] et réintroduite par Wittenburg [WIT77].

En 1994, Fayet et Pfister élargissent le champ d'application en adaptant l'algorithme aux systèmes à structure ramifiée [FAY94]. Les nouveautés théoriques sont l'emploi des coordonnées relatives indirectes et l'introduction de la notion de tenseur cinétique. Ensuite, en 1995, Pfister ajoute quelques indications pour pouvoir traiter les systèmes à boucle fermée. Enfin, en 2002, Fayet exprime les équations de Hamel-Boltzmann en utilisant les TIG dans le cas du paramétrage non holonome de systèmes semi-libres [FAY02a].

Les Tenseurs d'Inertie Globaux permettent d'exprimer le modèle dynamique de façon très concise, car les différentes dérivées peuvent être calculées de façon très efficace en utilisant seulement des produits et des additions de matrices. De plus, les factorisations automatiquement engendrées par la méthode des TIG concernent simultanément plusieurs expressions et sont ainsi plus importantes que celles obtenues avec un logiciel traditionnel de calcul symbolique.

Ces propriétés ont été exploitées au cours des dix dernières années dans les trois domaines suivants :

- A l'aide des TIG, Pfister exprime le modèle linéarisé tangent le long d'une trajectoire, soit à partir de la forme ordonnée des équations de Lagrange dans [PFI97a], soit à partir de leur forme brute (principe de d'Alembert) [PFI95] : dans ce dernier cas, les calculs sont même moins nombreux que dans le précédent cas et l'on gagne du temps.

- Les TIG permettent de calculer toutes les dérivations (jusqu'au second ordre) qui sont nécessaires pour mener une analyse de sensibilité, en d'autres termes pour évaluer l'influence relative des paramètres de construction (longueur, masse, inertie) sur les coordonnées généralisées [PFI97b].

- Afin d'optimiser les chaînes cinématiques actionnées, Bessonnet *et al* [BES05a, BES05b] utilisent les TIG de Fayet pour déterminer les différentiations algébriques d'ordre élevé et ainsi implémenter le principe du maximum de Pontryagin (PMP).

Enfin, d'autres travaux se réfèrent simplement aux notions introduites par Fayet, Renaud et Pfister, sans directement utiliser les TIG :

- Dhanaraj [DHA95] compare la rapidité de sa propre méthode automatique d'écriture du modèle dynamique avec d'autres (en particulier les TIG) en implémentant l'exemple de l'hélicoptère Puma tiré de [FAY89] ;

- La notion de coordonnées relatives indirectes [FAY94] est maintenant incorporée dans le logiciel DYNAFLEX [SHI00,POS04].

La nouvelle présentation des TIG, détaillée au paragraphe 1.5.3.3, peut être résumée en quelques phrases : jusqu'à présent, afin de caractériser la géométrie des masses d'un corps généralisé (voir Figure 1.5.1), trois types de tenseurs étaient utilisés séparément, respectivement la masse (scalaire), le moment statique (vecteur à trois composantes) et le tenseur d'inertie brut (matrice 3x3). Désormais, la méthode systématique d'écriture du modèle dynamique n'implique plus qu'un seul type de Tenseur d'Inertie Global, exprimé comme matrice 4x4, qui contient les trois précédents types. Cette nouveauté explique la simplicité et la concision des relations (1.5.16), puis (1.5.13) et (1.5.14). Ceci engendre une amélioration remarquable par rapport aux précédentes présentations dans Fayet [FAY89,FAY94].

# 1.3 Nouveaux champs d'application

### 1.3.1 Liaisons complexes

Certains systèmes présentent des liaisons réalisées par des mécanismes à barres en boucle fermée, appelés liaisons complexes, qui ont les propriétés suivantes :

- La masse du mécanisme formant la liaison peut être négligée devant la masse du système entier ; par conséquent, les caractéristiques cinétiques dudit mécanisme n'apparaîtront pas dans les équations de la dynamique ;

- Ce mécanisme est employé pour autoriser un mouvement à un degré de liberté d'un des solides rigides du système par rapport à un autre ; ce mouvement relatif peut être décrit par un torseur cinématique dont toutes les composantes sont fonctions d'une seule.

En effet, considérons deux solides $S_{i-1}$ et $S_i$ (et les repères orthonormés $R_{i-1}$ et $R_i$ qui leur sont respectivement liés), reliés par une liaison complexe de paramètre $q_i$. Le mouvement instantané de $S_i$ par rapport à $S_{i-1}$ peut être décrit par le torseur cinématique

$$V_i^{i-1}(O_i) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_i^{i-1} \\ \vec{V}^{i-1}(O_i) \end{array} \right\} = \dot{q}_i \left\{ \begin{array}{c} \vec{\varphi}_i \\ \vec{t}_i \end{array} \right\} = \dot{q}_i \$_i(O_i) \qquad (1.3.1)$$

où $O_i$ est un point lié à $R_i$, $\vec{\varphi}_i$ et $\vec{t}_i$ définissent les directions, respectivement de la rotation instantanée et du déplacement instantané de $O_i$ dans le mouvement de $R_i$ par rapport à $R_{i-1}$ (notons que les deux vecteurs ne sont pas des vecteurs unitaires) ; $\$_i$ est le torseur géométrique associé à $\dot{q}_i$.

Par exemple, la suspension de roue d'une automobile (Figure 1.3.1) est constituée d'un mécanisme relativement léger, tel un McPherson ou un double triangle, situé entre le châssis et les moyeux de roue. Les constructeurs automobiles décrivent donc habituellement le mouvement complexe du moyeu par rapport au châssis C par des coordonnées généralisées qui sont toutes fonctions du seul déplacement "vertical" (débattement sur $\vec{z}_C$) du centre de roue $O_i$ (i=1,2,3,4) :

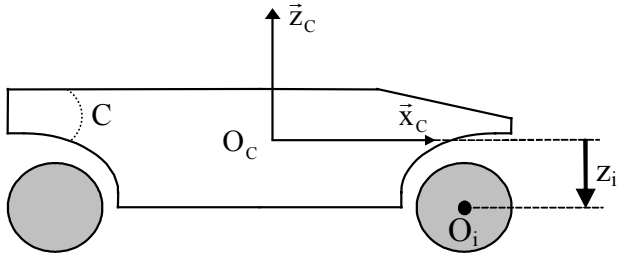



**Figure 1.3.1** Paramétrage d'une suspension de roue

Ainsi l'équation (1.3.1) devient

$$\mathbf{V}_i^C(O_i) = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_i^C \\ \vec{V}^C(O_i) \end{Bmatrix} = \dot{z}_i \begin{Bmatrix} \vec{\varphi}_i \\ \vec{t}_i \end{Bmatrix} = \dot{z}_i \$_i(O_i) \qquad (1.3.2)$$

La technologie précise de la suspension n'est pas importante ici : les fonctions discrètes $\vec{\varphi}_i(z_i)$ et $\vec{t}_i(z_i)$ sont déterminées expérimentalement.

Notons que les cas des liaisons simples de type R (de Révolution) et P (Prismatique) ne sont que des cas particuliers de liaisons complexes : c'est seulement lorsque l'on a affaire à des liaisons simples que les vecteurs $\vec{\varphi}_i$ et $\vec{t}_i$ sont invariants, à la fois dans $R_i$ et $R_{i-1}$. Les liaisons R et P peuvent ainsi être traitées à l'aide du formalisme de liaison complexe (1.3.1), de même que les liaisons normalisées qui présentent plus d'un degré de liberté (par exemple les liaisons cylindriques ou sphériques), qui peuvent toujours être considérées comme une combinaison de liaisons R et P.

### 1.3.2 Pseudo-paramètres (non holonomes)

Pour certains systèmes multicorps, comme les corps libres (sans lien avec l'extérieur, comme les planètes ou les satellites) ou les véhicules automobiles, les résultats des études dynamiques seront plus faciles à analyser si le mouvement est décrit par des paramètres spéciaux, appelés pseudo-paramètres ou quasi-paramètres [PFI95] :

- Dans le premier cas (corps libres, cf §1.6.1), les pseudo-paramètres sont définis en intégrant (par rapport au temps) les projections du vecteur vitesse de rotation galiléenne sur un repère de référence local (lié au solide) ou sur un repère galiléen : la seule condition est que les trois axes doivent être fixes les uns par rapport aux autres.

- Dans le second cas (véhicule, cf §1.6.2), c'est la vitesse galiléenne du centre de masse du châssis qui est projetée sur le repère local lié au châssis et ensuite intégrée.

Remarquons que les pseudo-paramètres, en général, n'ont pas de sens physique : ils sont homogènes à une longueur ou un angle, mais nous sommes souvent dans l'impossibilité de définir cette longueur ou cet angle. De plus, la relation de Schwarz entre les dérivées partielles secondes par rapport à une paire de paramètres, incluant au moins un pseudo-paramètre, n'est pas nécessairement vérifiée.

# 1.4 Méthode de mise en équations

Dans cette troisième partie, les développements mathématiques sont menés dans le cadre général des liaisons complexes et sont valables pour des paramétrages holonome et non holonome.

## 1.4.1 Justification de l'utilisation du principe de d'Alembert

Le formalisme de Newton-Euler n'est pas adapté aux liaisons complexes. En effet, le degré de liberté unique entraîne, en général, à la fois une rotation et une translation, auxquelles devraient correspondre les théorèmes du moment dynamique (Euler) et de la somme dynamique (Newton) ; ces derniers devraient ensuite être combinés pour obtenir l'équation unique correspondant à ce degré de liberté unique. Le principe de d'Alembert – ou de la puissance (ou travail) virtuelle -, dont les conséquences directes sont les équations de Lagrange, semble le plus naturel.

Mais l'emploi du formalisme de Lagrange n'est pas autorisé en raison de la nature non holonome des pseudo-paramètres. Les méthodes d'Appel [APP1899] et d'Hamel-Boltzmann [HAM49] seraient adaptées aux paramétrages non holonomes [FAY02a] mais elles sont connues pour être difficiles à utiliser.

Finalement, seuls le principe de d'Alembert et la forme brute des équations de Lagrange peuvent être utilisés pour satisfaire aux deux hypothèses (liaisons complexes et pseudo-paramètres).

## 1.4.2 Avertissement : dérivées partielles de vecteurs [PFI95]

Il est évident que la dérivée partielle d'un vecteur $\vec{a}$ par rapport à la coordonnée généralisée $q_i$ dépend du repère $R_k$ ou $R_m$ $(k \neq m)$ à partir duquel cette dérivation est observée :

$$\boxed{\frac{{}^{m}\partial \vec{a}}{\partial q_i} \neq \frac{{}^{k}\partial \vec{a}}{\partial q_i}} \tag{1.4.1}$$

Ces dérivées sont reliées à la "relation de Bour appliquée aux dérivées partielles" :

$$\frac{{}^{m}\partial \vec{a}}{\partial q_i} = \frac{{}^{k}\partial \vec{a}}{\partial q_i} + \vec{\delta}_k^{\,m}(q_i) \times \vec{a} \qquad \text{avec} \qquad \vec{\delta}_k^{\,m}(q_i) = \frac{\partial \vec{\Omega}_k^{\,m}}{\partial \dot{q}_i} \tag{1.4.2}$$

Remarquons que $\dfrac{\partial \vec{\Omega}_k^{\,m}}{\partial \dot{q}_i}$ ne dépend pas du repère d'observation : en effet, on peut montrer facilement que, quels que soient $\vec{a}$, k et i :

$$\frac{{}^{k}\partial \vec{a}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial \dot{q}_i} \qquad \text{et même} \qquad \frac{{}^{k}\partial \vec{a}}{\partial \ddot{q}_i} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial \ddot{q}_i} \tag{1.4.3}$$

Par conséquent, la relation bien connue de Helmholtz [HAM49, FAY02a] peut être écrite comme :

$$\boxed{\frac{{}^{g}\partial\overrightarrow{OM}}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{V}^{g}(M)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{J}^{g}(M)}{\partial \ddot{q}_i}} \tag{1.4.4}$$

avec $\vec{V}^{g}(M)$ et $\vec{J}^{g}(M)$ les vitesse et accélération galiléennes du point M.

Dans les développements suivants, puisque seules apparaissent des dérivées partielles par rapport au repère galiléen $R_0$, les termes $\frac{{}^{0}\partial\overrightarrow{OM}}{\partial q_i}$ et $\frac{{}^{0}\partial^2\overrightarrow{OM}}{\partial q_j \partial q_k}$ seront toujours écrits respectivement $\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial q_i}$ et $\frac{\partial^2\overrightarrow{OM}}{\partial q_j \partial q_k}$ afin de clarifier les expressions. Cette remarque ne concerne pas les dérivées partielles par rapport aux vitesses généralisées, en raison de (1.4.3).

### 1.4.3 Rappel : forme brute des équations de Lagrange

D'après le principe de d'Alembert, la puissance virtuelle des forces intérieures et extérieures est égale à la puissance virtuelle des quantités d'accélération :

$$\int_{\Sigma} \vec{f}(M).\vec{V}^{*}(M)dm = \int_{\Sigma} \vec{J}^{g}(M).\vec{V}^{*}(M)dm \tag{1.4.5}$$

où $\Sigma$ est un système multicorps, $\vec{f}(M)$ est la densité massique de force au point M, $\vec{V}^{*}(M)$ est la vitesse virtuelle arbitraire du point M, et $\vec{J}^{g}(M)$ est l'accélération galiléenne de M.

Si le mouvement virtuel est compatible avec les liaisons, alors

$$\vec{V}^{*}(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial q_i}\, \dot{q}_i^{*} \tag{1.4.6}$$

et si, de plus, <u>aucun paramètre n'est une fonction explicite du temps</u>, on a

$$\vec{J}^{g}(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial q_i}\, \ddot{q}_i + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2\overrightarrow{OM}}{\partial q_j \partial q_i}\, \dot{q}_i \dot{q}_j \tag{1.4.7}$$

Par conséquent, l'équation (1.4.5) prend la forme $\sum_{i=1}^{n} Q_i \dot{q}_i^{*} = \sum_{i=1}^{n} A_i \dot{q}_i^{*}$ (1.4.8)

où $Q_i$ sont les forces généralisées : $\boxed{Q_i = \int_{\Sigma} \vec{f}(M).\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial q_i}dm}$ (1.4.9)

et $A_i$ les quantités d'accélération généralisées : $\boxed{A_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ddot{q}_j + \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma_{i,jk}\dot{q}_j\dot{q}_k}$ (1.4.10)

avec $a_{ij}$ les coefficients de la matrice d'énergie cinétique (ou matrice de masse) :

$$\boxed{a_{ij} = \int_{\Sigma} \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} . \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_j} dm} \quad (1.4.11)$$

et $\Gamma_{i,jk}$ les symboles de Christoffel :

$$\boxed{\Gamma_{i,jk} = \int_{\Sigma} \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} . \frac{\partial^2 \overrightarrow{OM}}{\partial q_j \partial q_k} dm} \quad (1.4.12)$$

L'équation (1.4.8) est valable quels que soient les $\dot{q}_i^*$, donc

$$\boxed{Q_i = A_i} \quad \text{pour tout i} \quad (1.4.13)$$

Ceci est la forme brute des équations de Lagrange. Elle est adaptée aux cas de paramétrage holonome et non holonome. Il s'ensuit que pour déterminer les coefficients dynamiques $a_{ij}$ et $\Gamma_{i,jk}$, il est suffisant de connaître les vecteurs $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i}$ et $\frac{\partial^2 \overrightarrow{OM}}{\partial q_j \partial q_k}$.

Dans le paragraphe 1.5, le cas des paramétrages holonomes classiques sera traité. Dans le paragraphe 1.6, les modifications des symboles de Christoffel pour les paramétrages non holonomes d'un corps libre et d'une structure automobile seront proposés. Tous ces développements sont présentés dans le cadre général des liaisons complexes.

# 1.5 Cas des paramétrages holonomes

Imaginons le cas d'une chaîne ouverte. Pour le moment, le mouvement est supposé décrit par de vrais paramètres de position (et non pseudo). En d'autres termes, la position de tout repère $R_i$ par rapport à $R_{i-1}$ est une fonction de $q_i$ ; le torseur cinématique correspondant (1.3.1), défini dans le cadre général des liaisons complexes, est aussi capable de caractériser les liaisons simples (cf §1.5.5.2.1).

La numération des paramètres $q_i$ suit l'ordre naturel depuis la base jusqu'à l'extrémité de la chaîne. L'indice i du repère $R_i$ est égal à celui du solide $S_i$ auquel il est lié. Cependant, quand les liaisons présentent plus d'un degré de liberté, les repères intermédiaires ne sont pas liés à un solide réel de la chaîne.

## 1.5.1 Expression de $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i}$

Puisque dans la dérivée partielle ci-dessus, seul le paramètre $q_i$ varie, l'ensemble $\Sigma_i$, appelé corps généralisé associé à l'indice i (cf Figure 1.5.1), se comporte comme un seul solide rigide. On rappelle que $O_i$ est un point fixe dans le repère $R_i$ lié au solide $S_i$ (cf §1.3.1).

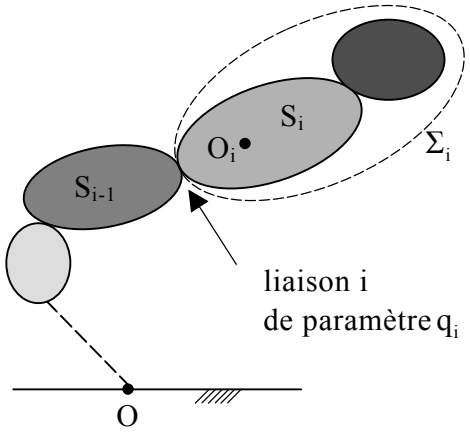



**Figure 1.5.1** Définition du corps généralisé $\Sigma_i$

Dans ces conditions, $q_i$ n'exerce une influence sur $\overrightarrow{OM}$ que si M est un point de $\Sigma_i$ et l'on a :

$$\vec{V}^g(M) = \vec{V}_i^g(M) = \vec{V}_{i-1}^g(M) + \vec{V}_i^{i-1}(O_i) + \vec{\Omega}_i^{i-1} \times \overrightarrow{O_iM}$$

Ainsi
$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{V}^g(M)}{\partial \dot{q}_i} = \vec{t}_i + \vec{\varphi}_i \times \overrightarrow{O_iM}$$

En conclusion, avec $P_{iM} = 1,0$ si $M \in \Sigma_i$, $M \notin \Sigma_i$ respectivement :

$$\boxed{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} = P_{iM}\left(\vec{t}_i + \vec{\varphi}_i \times \overrightarrow{O_iM}\right)} \qquad (1.5.1)$$

ou sous forme matricielle :

$$\boxed{\left[\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i}\right] = P_{iM}\left[\widehat{\varphi_i}, \vec{t}_i\right]\begin{bmatrix}\overrightarrow{O_iM} \\ 1\end{bmatrix} = P_{iM}\left(\left[\overrightarrow{O_iM}^T, 1\right]\begin{bmatrix}-\widehat{\varphi_i} \\ \vec{t}_i^T\end{bmatrix}\right)^T} \qquad (1.5.2)$$

si l'on définit comme d'habitude, quel que soit le vecteur $\vec{a}$ auquel est associé $[\vec{a}]$, la colonne de ses composantes dans une base orthonormée directe quelconque :

- $[\vec{a}]^T$ son transposé
- $\left[\hat{a}\right]$ la matrice anti-symétrique associée : dans le repère orthonormé direct R, si $[\vec{a}]_R = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$, alors $\left[\hat{a}\right]_R = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}$ ; ainsi, quel que soit $\vec{b}$ : $\vec{a} \times \vec{b} = \hat{a} \cdot \vec{b}$.

Notons que la formulation (1.5.2) utilise des coordonnées homogènes : $\left[\overrightarrow{O_iM}^T, 1\right]$.

### 1.5.2 Expressions de $\frac{\partial^2 \overrightarrow{OM}}{\partial q_i \partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i}$

Deux cas doivent être distingués :

**1. Cas i≠j**

Après dérivation relativement à $q_j$, l'équation (1.5.1) donne

- <u>si j>i</u> : $\frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} = P_{iM}\left(\frac{\partial \vec{t}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \vec{\varphi}_i}{\partial q_j} \times \overrightarrow{O_iM} + \vec{\varphi}_i \times \frac{\partial \overrightarrow{O_iM}}{\partial q_j}\right)$

  or $\frac{\partial \vec{t}_i}{\partial q_j} = \vec{0}$ et $\frac{\partial \vec{\varphi}_i}{\partial q_j} = \vec{0}$ car $\vec{t}_i$ et $\vec{\varphi}_i$ restent fixes dans $R_0$ quand $q_j$ varie ;

  ainsi $\boxed{\frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} = P_{iM}\vec{\varphi}_i \times \frac{\partial \overrightarrow{O_iM}}{\partial q_j}}$

- <u>si j<i :</u> $\dfrac{\partial}{\partial q_j}\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} = \dfrac{\partial}{\partial q_j}\dfrac{\partial \overrightarrow{OO_j}}{\partial q_i} + \dfrac{\partial}{\partial q_j}\dfrac{\partial \overrightarrow{O_jM}}{\partial q_i}$

  or $\dfrac{\partial \overrightarrow{OO_j}}{\partial q_i} = \vec{0}$ car $O_j$ reste fixe dans $R_0$ quand $q_i$ varie ; et comme $\dfrac{\partial \overrightarrow{O_jM}}{\partial q_i}$ est lié à $\Sigma_j$ se comportant comme un solide rigide lorsque seul $q_j$ varie :

  $$\boxed{\dfrac{\partial}{\partial q_j}\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} = P_{jM}\vec{\varphi}_j \times \dfrac{\partial \overrightarrow{O_jM}}{\partial q_i}}$$

  (Il est évident que $\dfrac{\partial \overrightarrow{O_jM}}{\partial q_i}$ ne dépend de $q_j$ que lorsque ce dernier décrit une rotation).

De cette façon, pour $i \neq j$ :

$$\dfrac{\partial}{\partial q_j}\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} = P_{]i,j[M}\vec{\varphi}_{]i,j[} \times \dfrac{\partial \overrightarrow{O_{]i,j[}M}}{\partial q_{[i,j]}} \text{ où } \boxed{]i,j[ = \mathrm{Min}(i,j)} \text{ et } \boxed{[i,j] = \mathrm{Max}(i,j)}$$

donc $$\dfrac{\partial}{\partial q_j}\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} = P_{]i,j[M}\vec{\varphi}_{]i,j[} \times \left( \dfrac{\partial \overrightarrow{O_{]i,j[}O}}{\partial q_{[i,j]}} + \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_{[i,j]}} \right)$$

Or $$\dfrac{\partial \overrightarrow{O_{]i,j[}O}}{\partial q_{[i,j]}} = \vec{0} \text{ car } \overrightarrow{O_{]i,j[}O} \text{ reste fixe dans } R_0 \text{ lorsque } q_{[i,j]} \text{ varie.}$$

Finalement, comme $\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_{[i,j]}}$ contient déjà $P_{[i,j]M}$ :

$$\boxed{\dfrac{\partial}{\partial q_j}\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} = \vec{\varphi}_{]i,j[} \times \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_{[i,j]}}} \qquad (1.5.3)$$

Notons que $$\dfrac{\partial^2 \overrightarrow{OM}}{\partial q_i \partial q_j} = \dfrac{\partial}{\partial q_j}\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} = \dfrac{\partial}{\partial q_i}\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_j} = \dfrac{\partial^2 \overrightarrow{OM}}{\partial q_j \partial q_i} = \vec{\varphi}_{]i,j[} \times \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_{[i,j]}}.$$

Ceci révèle le caractère holonome de ce paramétrage. Au contraire, la relation de Schwarz ne sera pas vérifiée dans un cas non holonome.

### 2. Cas j=i

$$\dfrac{\partial^2 \overrightarrow{OM}}{\partial {q_i}^2} = \dfrac{\partial}{\partial q_i}\left( P_{iM}\left( \vec{t}_i + \vec{\varphi}_i \times \overrightarrow{O_iM} \right) \right) = P_{iM}\left( \vec{t}_i' + \vec{\varphi}_i' \times \overrightarrow{O_iM} + \vec{\varphi}_i \times \dfrac{\partial \overrightarrow{O_iM}}{\partial q_i} \right) \qquad (1.5.4)$$

où $$\vec{t}_i' = \dfrac{\partial \vec{t}_i}{\partial q_i} \qquad \text{et} \qquad \vec{\varphi}_i' = \dfrac{\partial \vec{\varphi}_i}{\partial q_i} \qquad (1.5.5)$$

Ces deux éléments sont différents suivant le type de liaison considéré :

- Ils sont nuls pour des liaisons simples surfaciques ou couples inférieurs (liaisons de révolution, prismatique, cylindrique…) puisque la position de l'axe de liaison ne dépend pas de la valeur de la coordonnée généralisée de cette liaison ; signalons que dans ce cas, la relation (1.5.3) convient aussi pour j=i;

- Pour les liaisons complexes, $\vec{t}_i^{\,'}$ et $\vec{\varphi}_i^{\,'}$ peuvent être connus soit sous forme analytique dans les cas académiques (liaison à joint de Cardan, cf §1.5.5.3.1), soit de façon expérimentale (points de mesure dans le cas d'une suspension de voiture, cf étude industrielle [EVR03]).

Avec $\vec{\varphi}_i \times \dfrac{\partial \overrightarrow{O_iM}}{\partial q_i} = \vec{\varphi}_i \times \left(\vec{\varphi}_i \times \overrightarrow{O_iM}\right)$ (car $\overrightarrow{O_iM}$ ne dépend de $q_i$ que lorsque $q_i$ décrit une rotation), (1.5.4) devient

$$\boxed{\frac{\partial^2 \overrightarrow{OM}}{\partial {q_i}^2} = P_{iM}\left(\vec{t}_i^{\,'} + \vec{\varphi}_i^{\,'} \times \overrightarrow{O_iM} + \vec{\varphi}_i \times \left(\vec{\varphi}_i \times \overrightarrow{O_iM}\right)\right)} \qquad (1.5.6)$$

Notons que l'équation (1.5.4) pourrait être écrite sous une autre forme que (1.5.6) :

$$\vec{\varphi}_i \times \frac{\partial \overrightarrow{O_iM}}{\partial q_i} = -\vec{\varphi}_i \times \frac{\partial \overrightarrow{OO_i}}{\partial q_i} + \vec{\varphi}_i \times \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} = -\vec{\varphi}_i \times \vec{t}_i + \vec{\varphi}_i \times \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i}$$

par application directe de (1.5.1) ; mais (1.5.6) est préférée dans la programmation en raison de sa concision et aussi de la double apparition de $\overrightarrow{O_iM}$, qui est présent dans la définition des Tenseurs d'Inertie Globaux (cf §1.5.3.3).

## 1.5.3 Expressions des éléments cinétiques et des quantités d'accélération généralisées

### 1.5.3.1 Symétries et anti-symétries

- **Coefficients de la matrice d'énergie cinétique** $a_{ij}$

Grâce à la relation $a_{ij} = a_{ji}$, les coefficients $a_{ij}$ ne nécessitent d'être calculés que dans les cas où $i \le j$, d'après la modification suivante de (1.4.11) :

$$\boxed{a_{ij(i\le j)} = \int_{\Sigma_j} \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_j} dm} \qquad (1.5.7)$$

Les coefficients dans les cas i>j seront automatiquement déduits des précédents.

- **Symboles de Christoffel** $\Gamma_{i,jk}$

Premièrement, le symbole de Kronecker $\delta_{jk}$ nous permet d'écrire $\Gamma_{i,jk}$ sous la forme

$$\Gamma_{i,jk} = (1-\delta_{jk}) \int_{\Sigma_{[i,j,k]}} \left( \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i}, \vec{\varphi}_{]j,k[}, \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_{[j,k]}} \right) dm + \delta_{jk} \int_{\Sigma_{[i,j]}} \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} \cdot \left( \vec{t}_j' + \vec{\varphi}_j' \times \overrightarrow{O_jM} + \vec{\varphi}_j \times (\vec{\varphi}_j \times \overrightarrow{O_jM}) \right) dm$$

ou
$$\Gamma_{i,jk} = (1-\delta_{jk})\Gamma^1_{i,jk} + \delta_{jk}\Gamma^2_{i,jj} \tag{1.5.8}$$

Deuxièmement, la relation de Schwarz justifie que

$$\Gamma^1_{i,jk} = \Gamma^1_{i,kj} \tag{1.5.9}$$

Ainsi les coefficients $\Gamma^1_{i,jk}$ ne doivent être calculés que pour j<k (le cas j=k est reporté dans $\Gamma^2_{i,jj}$).

Troisièmement, la propriété d'anti-symétrie de $\Gamma^1_{i,jk}$ peut être présentée comme

$$\Gamma^1_{i,jk} = -\Gamma^1_{k,ji} \tag{1.5.10}$$

ainsi seuls les cas i<k sont calculés (notons qu'il est évident que $\Gamma^1_{i,ji} = 0$).

En conclusion, la définition du symbole calculé $\Gamma^1_{i,jk}$ est

$$\Gamma^1_{i,jk(i<k,j<k)} = -\vec{\varphi}_j \cdot \int_{\Sigma_k} \left( \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} \times \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_k} \right) dm \tag{1.5.11}$$

Les coefficients pour les cas i>k et j>k seront automatiquement déduits des coefficients calculés, grâce aux relations (1.5.9) et (1.5.10).

### 1.5.3.2 Introduction du tenseur cinétique

Les produits scalaire et vectoriel apparaissant dans (1.5.7), (1.5.8) et (1.5.11) peuvent être écrits (le symbole : représente l'opérateur "produit doublement contracté" usuel) :

- $$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_j} = \mathrm{tr}\left( \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} \otimes \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_j} \right) = \overline{\overline{1}} : \left( \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} \otimes \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_j} \right)$$

avec $\overline{\overline{1}}$ le tenseur identité du second ordre (matrice 3x3) ;

- $\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial q_i}\times\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial q_j}=\left(\widehat{\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial q_i}}\right)\cdot\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial q_j}=\overline{\overline{E}}:\left(\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial q_i}\otimes\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial q_j}\right)$ avec $\overline{\overline{E}}$ le tenseur de permutation du 3ème ordre (3x3x3) [BAS00], composé des symboles de Levi-Civita :

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}0 \text{ si deux des trois indices sont identiques}\\ +1 \text{ si (i, j, k) se déduit de (1, 2, 3) par un nombre de permutations pair}\\ -1 \text{ si (i, j, k) se déduit de (1, 2, 3) par un nombre de permutations impair}\end{cases}$$

Par conséquent, les coefficients dynamiques calculés $a_{ij}$ (1.5.7) et $\Gamma^1_{i,jk}$ (1.5.11) peuvent être exprimés au moyen du même **tenseur cinétique**

$$\boxed{\overline{\overline{K}}_{ij}=\int_{\Sigma_j}\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial q_i}\otimes\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial q_j}dm} \quad \text{(matrice 3x3)} \qquad (1.5.12)$$

qui sera employé uniquement dans le cas i≤j, d'après les relations suivantes :

$$\boxed{a_{ij(i\le j)}=\overline{\overline{1}}:\overline{\overline{K}}_{ij}=\mathrm{tr}\,\overline{\overline{K}}_{ij}} \qquad (1.5.13)$$

et

$$\boxed{\Gamma^1_{i,jk(i<k,j<k)}=-\vec{\varphi}_j.\left(\overline{\overline{E}}:\overline{\overline{K}}_{ik}\right)=\widehat{\varphi_j}:\overline{\overline{K}}_{ik}} \qquad (1.5.14)$$

Finalement, les calculs de $a_{ij}$ et $\Gamma^1_{i,jk}$ sont inclus directement dans ceux des tenseurs cinétiques $\overline{\overline{K}}_{ij}$.

A noter que les symboles de Christoffel de type 2 ($\Gamma^2_{i,jj}$) n'interviennent ni dans ce paragraphe, ni dans les paragraphes suivants (§1.5.3.3 et §1.5.3.4), consacrés à l'identification et à la détermination des TIG issus des tenseurs cinétiques. Le calcul spécifique de $\Gamma^2_{i,jj}$ à partir de TIG quelque peu différents est traité au paragraphe 1.5.3.5.

### 1.5.3.3 Introduction des Tenseurs d'Inertie Globaux (TIG) ; signification physique

D'après la définition (1.5.12) de $\overline{\overline{K}}_{ij}$ et les expressions (1.5.2) de $\left[\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial q_i}\right]$, le tenseur cinétique peut être écrit sous forme matricielle de la façon suivante :

$$\left[\overline{\overline{K}}_{ij}\right]=\left[\widehat{\varphi_i},\vec{t}_i\right]\left(\int_{\Sigma_j}\left[\begin{matrix}\overrightarrow{O_iM}\\ 1\end{matrix}\right]\left[\overrightarrow{O_jM}^T,1\right]dm\right)\left[\begin{matrix}-\widehat{\varphi_j}\\ \vec{t}_j^{\,T}\end{matrix}\right] \qquad (1.5.15)$$

Sous forme intrinsèque : $$\boxed{\overline{\overline{K}}_{ij}=\tilde{\$}_i(O_i).\overline{\overline{G}}_{ij}.\tilde{\$}_j(O_j)} \qquad (1.5.16)$$

avec

- $\tilde{\$}_i$ le torseur géométrique associé à $q_i$, exprimé comme une matrice 3x4 :

$$\boxed{\left[\tilde{\$}_i(O_i)\right] = \left[\widehat{\varphi_i}, \vec{t}_i\right]} \tag{1.5.17}$$

- $\overline{\overline{G}}_{ij}$ un tenseur, exprimé sous la forme d'une matrice 4x4, qui regroupe les Tenseurs d'Inertie Globaux (TIG) déjà présentés dans [FAY89] et [FAY94] :

$$\boxed{\left[\overline{\overline{G}}_{ij}\right] = \int_{\Sigma_j} \begin{bmatrix} \overrightarrow{O_iM} \\ 1 \end{bmatrix} \left[\overrightarrow{O_jM}^T, 1\right] dm = \begin{bmatrix} \int_{\Sigma_j} \overrightarrow{O_iM} \otimes \overrightarrow{O_jM} dm & \int_{\Sigma_j} \overrightarrow{O_iM} dm \\ \int_{\Sigma_j} \overrightarrow{O_jM}^T dm & M_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\overline{\Pi}}_{ij} & \vec{U}_{ij} \\ \vec{U}_{jj}^{\,T} & M_j \end{bmatrix}} \tag{1.5.18}$$

$M_j$, $\vec{U}_{ij}$ et $\overline{\overline{\Pi}}_{ij}$ sont les TIG du système $\Sigma_j$ aux points $O_i$ et $O_j$ :

- Le TIG d'ordre 0, $M_j$, est naturellement la masse du corps généralisé $\Sigma_j$.

- Le TIG d'ordre 1, $\vec{U}_{ij}$, est le moment statique du corps généralisé $\Sigma_j$ au point $O_i$, qui peut toujours être écrit

$$\vec{U}_{ij} = \int_{\Sigma_j} \overrightarrow{O_iM}\, dm = M_j \overrightarrow{O_iG_j} \qquad \text{avec } G_j \text{ le centre d'inertie de } \Sigma_j.$$

- Le TIG d'ordre 2, $\overline{\overline{\Pi}}_{ij}$, n'a pas de signification physique claire ; cependant, examinons le cas j=i : $\overline{\overline{\Pi}}_{ii}$ se réfère au **tenseur d'inertie brut** du corps généralisé $\Sigma_i$ au point $O_i$. Notons que $\mathrm{tr}\left(\overline{\overline{\Pi}}_{jj}\right)\bar{\bar{1}} - \overline{\overline{\Pi}}_{jj} = \bar{\bar{I}}_{jj}$ est le tenseur d'inertie usuel.

En conclusion, la matrice 4x4 $\left[\overline{\overline{G}}_{ij}\right]$ contient les trois types de TIG ($M_j$, $\vec{U}_{ij}$ et $\overline{\overline{\Pi}}_{ij}$), qui étaient utilisés séparément jusqu'à présent. Cette nouvelle présentation explique la simplicité et la concision des relations (1.5.16), puis (1.5.13) et (1.5.14), qui sont suffisantes pour écrire les équations du mouvement.

### 1.5.3.4 Détermination récursive des Tenseurs d'Inertie Globaux

- **Récursion sur i de $\overline{\overline{G}}_{ii}$**

En partant de la définition (1.5.18), $\left[\overline{\overline{G}}_{i-1,i-1}\right]$ peut être écrit :

$$\left[\overline{\overline{G}}_{i-1,i-1}\right] = \int_{\Sigma_{i-1}} \begin{bmatrix} \overrightarrow{O_{i-1}M} \\ 1 \end{bmatrix} \left[\overrightarrow{O_{i-1}M}^{T}, 1\right] dm$$

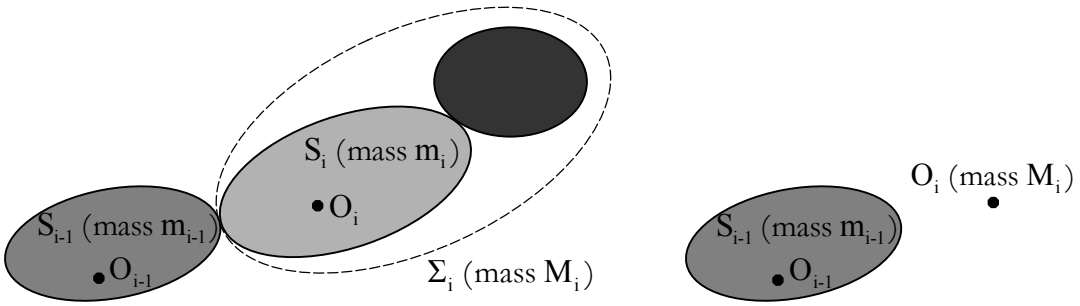
$$= \int_{S_{i-1}} \begin{bmatrix} \overrightarrow{O_{i-1}M} \\ 1 \end{bmatrix} \left[\overrightarrow{O_{i-1}M}^{T}, 1\right] dm + \int_{\Sigma_i} \left( \begin{bmatrix} \overrightarrow{O_{i-1}O_i} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overrightarrow{O_iM} \\ 1 \end{bmatrix} \right) \left( \left[\overrightarrow{O_{i-1}O_i}^{T}, 0\right] + \left[\overrightarrow{O_iM}^{T}, 1\right] \right) dm$$

$$= \left[\overline{\overline{g}}_{i-1}\right] + M_i \begin{bmatrix} \overrightarrow{O_{i-1}O_i} \otimes \overrightarrow{O_{i-1}O_i} & \overrightarrow{O_{i-1}O_i} \\ \overrightarrow{O_{i-1}O_i}^{T} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(\overrightarrow{O_{i-1}O_i} \otimes \vec{U}_{ii} + \vec{U}_{ii} \otimes \overrightarrow{O_{i-1}O_i}\right) & \vec{0} \\ \vec{0}^{T} & 0 \end{bmatrix} + \left[\overline{\overline{G}}_{ii}\right]$$

soit
$$\boxed{\left[\overline{\overline{G}}_{i-1,i-1}\right] = \left[\overline{\overline{G}}_{ii}\right] + \left[\overline{\overline{g}}^{+}_{i-1}\right] + \begin{bmatrix} \left(\overrightarrow{O_{i-1}O_i} \otimes \vec{U}_{ii} + \vec{U}_{ii} \otimes \overrightarrow{O_{i-1}O_i}\right) & \vec{0} \\ \vec{0}^{T} & 0 \end{bmatrix}} \quad (1.5.19)$$

où
$$\left[\overline{\overline{g}}^{+}_{i-1}\right] = \left[\overline{\overline{g}}_{i-1}\right] + M_i \begin{bmatrix} \overrightarrow{O_{i-1}O_i} \otimes \overrightarrow{O_{i-1}O_i} & \overrightarrow{O_{i-1}O_i} \\ \overrightarrow{O_{i-1}O_i}^{T} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\overline{\pi}}^{+}_{i-1} & \vec{u}^{+}_{i-1} \\ \vec{u}^{+\,T}_{i-1} & m_{i-1} \end{bmatrix} \text{ (matrice 4x4)}$$

est la représentation matricielle du TIG du corps augmenté $S^{+}_{i-1}$ [FIS1906,WIT77], constitué de $S_{i-1}$ et du point massique $(O_i, M_i)$ (cf **Figure 1.5.2**) ; $\overline{\overline{g}}_{i-1}$ (matrice 4x4) est le Tenseur d'Inertie Global et $m_{i-1}$ la masse du corps $S_{i-1}$ (pris seul) au point $O_{i-1}$ ; $\overline{\overline{\pi}}^{+}_{i-1}$ est le tenseur d'inertie brut et $\vec{u}^{+}_{i-1}$ le moment statique de $S^{+}_{i-1}$ (tous deux évalués au point $O_{i-1}$).




Initial system Augmented body $S^{+}_{i-1}$

**Figure 1.5.2** Définition du corps augmenté $S^{+}_{i-1}$

- **Récursion sur i de $\overline{\overline{G}}_{ij}$**

En partant à nouveau de la définition (1.5.18) :

$$\left[\overline{\overline{G}}_{i-1,j}\right] = \int_{\Sigma_j} \left( \begin{bmatrix} \overrightarrow{O_{i-1}O_i} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overrightarrow{O_iM} \\ 1 \end{bmatrix} \right) \left[\overrightarrow{O_jM}^{T}, 1\right] dm$$

$$\boxed{\left[\overline{\overline{G}}_{i-1,j}\right]=\left[\overline{\overline{G}}_{i,j}\right]+\begin{bmatrix}\overrightarrow{O_{i-1}O_i}\otimes\vec{U}_{jj} & M_j\overrightarrow{O_{i-1}O_i}\\ \vec{0}^T & 0\end{bmatrix}} \quad (1.5.20)$$

### 1.5.3.5 Symboles de Christoffel de type 2

Grâce à la relation $\vec{a}.\vec{b}=\mathrm{tr}\left(\vec{a}\otimes\vec{b}\right)$ qui est valable quels que soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$, la relation (1.5.8) donne les expressions suivantes de $\Gamma^2_{i,jj}$ :

$$\Gamma^2_{i,jj}=\int_{\Sigma_{[i,j]}}\mathrm{tr}\left[\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial q_i}\otimes\left(\vec{t}_j'+\vec{\varphi}_j'\times\overrightarrow{O_jM}+\vec{\varphi}_j\times\left(\vec{\varphi}_j\times\overrightarrow{O_jM}\right)\right)\right]dm=\int_{\Sigma_{[i,j]}}\mathrm{tr}\left(\left[\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial q_i}\right]\left[\vec{c}^T\right]\right)dm$$

Cependant, grâce à la relation $\hat{a}^T=-\hat{a}$ qui induit $\hat{a}^T.\hat{a}^T=\hat{a}.\hat{a}$ quel que soit $\hat{a}$, (1.5.21) $\vec{c}^T$ peut être exprimé comme suit :

$$\vec{c}^T=\vec{t}_j'^T+\left(\widehat{\varphi}_j'.\overrightarrow{O_jM}\right)^T+\left(\widehat{\varphi}_j.\left(\widehat{\varphi}_j.\overrightarrow{O_jM}\right)\right)^T$$

$$=\vec{t}_j'^T+\left(\overrightarrow{O_jM}^T.\widehat{\varphi}_j'^T\right)+\left(\overrightarrow{O_jM}^T.\widehat{\varphi}_j^T.\widehat{\varphi}_j^T\right)$$

$$=\vec{t}_j'^T+\left(\overrightarrow{O_jM}^T.\left(-\widehat{\varphi}_j'\right)\right)+\left(\overrightarrow{O_jM}^T.\widehat{\varphi}_j.\widehat{\varphi}_j\right)$$

Finalement, en utilisant aussi (1.5.1), on obtient :

$$\Gamma^2_{i,jj}=\mathrm{tr}\left(\left[\widehat{\varphi}_i\ ,\ \vec{t}_i\right]\left(\int_{\Sigma_{[i,j]}}\begin{bmatrix}\overrightarrow{O_iM}\\ 1\end{bmatrix}\left[\overrightarrow{O_jM}^T,\ 1\right]dm\right)\begin{bmatrix}-\widehat{\varphi}_j'+\widehat{\varphi}_j.\widehat{\varphi}_j\\ \vec{t}_j'^T\end{bmatrix}\right) \quad (1.5.22)$$

ou $$\boxed{\Gamma^2_{i,jj}=\mathrm{tr}\left(\tilde{\$}_i(O_i).\overline{\overline{G}}_{ijMax}.\tilde{\$}_j'(O_j)\right)} \quad (1.5.23)$$

en posant

- $$\boxed{\left[\overline{\overline{G}}_{ijMax}\right]=\int_{\Sigma_{[i,j]}}\begin{bmatrix}\overrightarrow{O_iM}\\ 1\end{bmatrix}\left[\overrightarrow{O_jM}^T,\ 1\right]dm} \quad (1.5.24)$$

  Contrairement à $a_{ij}$, qui ne devait être calculé que pour $i\le j$, ou $\Gamma^1_{i,jk}$, qui était uniquement déterminé pour i<k et j<k, le symbole de Christoffel de type 2 $\Gamma^2_{i,jj}$ et ainsi $\overline{\overline{G}}_{ijMax}$ doivent être calculés pour j>i, j<i et j=i. Néanmoins, tous les nouveaux $\overline{\overline{G}}_{ijMax}$ peuvent être obtenus sans nouveau calcul à partir de ceux qui ont déjà été calculés pour obtenir les $a_{ij}$ et $\Gamma^1_{i,jk}$ :

- pour j>i : $\overline{\overline{G}}_{ijMax} = \overline{\overline{G}}_{ij}$

- pour j<i : $\overline{\overline{G}}_{ijMax} = \overline{\overline{G}}_{jiMax}{}^{T} = \overline{\overline{G}}_{ji}{}^{T}$ car

$$\left[\overline{\overline{G}}_{ijMax}\right] = \int_{\Sigma_i} \begin{bmatrix} \overrightarrow{O_iM} \\ 1 \end{bmatrix} \left[\overrightarrow{O_jM}^{T}, 1\right] dm = \int_{\Sigma_i} \left( \left[\overrightarrow{O_jM}^{T}, 1\right]^{T} \begin{bmatrix} \overrightarrow{O_iM} \\ 1 \end{bmatrix}^{T} \right)^{T} dm = \int_{\Sigma_i} \left( \begin{bmatrix} \overrightarrow{O_jM} \\ 1 \end{bmatrix} \left[\overrightarrow{O_iM}, 1\right] \right)^{T} dm$$

- pour j=i : $\overline{\overline{G}}_{iiMax} = \overline{\overline{G}}_{ii} = \overline{\overline{G}}_{ii}{}^{T}$

- $\boxed{\left[\tilde{\$}_j'^{T}(O_j)\right] = \begin{bmatrix} -\widehat{\varphi_j'} + \widehat{\varphi_j}.\widehat{\varphi_j} \\ \vec{t}_j'^{T} \end{bmatrix}}$ c'est-à-dire $\boxed{\left[\tilde{\$}_j'(O_j)\right] = \left[\widehat{\varphi_j'} + \widehat{\varphi_j}.\widehat{\varphi_j}, \vec{t}_j'\right]}$ (1.5.25)

(voir (1.5.21))

En conclusion, ce paragraphe 1.5.3.5 confirme la remarque faite en fin de paragraphe 1.5.3.2 : à la différence de $a_{ij}$ et $\Gamma^1_{i,jk}$, la détermination du symbole de Christoffel de type 2 $\Gamma^2_{i,jj}$ ne nécessite pas l'utilisation du tenseur cinétique $\overline{\overline{K}}_{ij}$.

### 1.5.4 Expression des forces généralisées de pesanteur

Dans le cas des actions de pesanteur, il est possible d'obtenir une expression de $Q_i$ en fonction des Tenseurs d'Inertie Globaux et des composantes des torseurs géométriques. En effet, dans ce cas, le champ de vecteurs $\vec{f}(M)$, densité massique de force au point M, est uniforme et égal à $\vec{g}$. En dérivant la fonction de force d'expression $\vec{g} \cdot \int_{\Sigma} \overrightarrow{OM}\, dm$ par rapport à $q_i$, ou en utilisant directement l'équation (1.4.9), on obtient

$$Q_i^{pes} = \vec{g}.\int_{\Sigma} \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} dm = \vec{g}.\int_{\Sigma_i} \left( \vec{t}_i + \vec{\varphi}_i \times \overrightarrow{O_iM} \right) dm \qquad \text{d'après (1.5.1)}$$

d'où $Q_i^{pes} = \vec{g}.\left( M_i \vec{t}_i + \vec{\varphi}_i \times \int_{\Sigma_i} \overrightarrow{O_iM} dm \right)$ soit $\boxed{Q_i^{pes} = \vec{g}.\left( M_i \vec{t}_i + \vec{\varphi}_i \times \vec{U}_{ii} \right)}$ (1.5.26)

### 1.5.5 Validations-exemples

Comme brièvement annoncé en introduction du présent chapitre, la méthode de mise en équation résumée au paragraphe 1.7 est programmée sous Maple 9.5, logiciel de référence pour le calcul formel. L'objectif est d'obtenir un programme automatique universel, c'est-à-dire où l'on n'introduise que le minimum de données pour obtenir les équations du mouvement.

Cet objectif est atteint pour tout système de n solides en chaîne ouverte non ramifiée, reliés par des liaisons simples (de révolution, prismatique, cylindrique, sphérique en paramétrage holonome). Les seules données nécessaires à l'exécution de la feuille de calcul Maple sont :

- Le nombre de solides ;
- La description du paramétrage-repérage de Denavit-Hartenberg (cf §1.5.5.2.1) ;
- Les caractéristiques massiques et inertielles de chaque solide : masse, position du centre d'inertie dans le repère local (lié au solide considéré), matrice d'inertie usuelle ;
- Les forces généralisées autres que celles de pesanteur.

Pour différentes architectures de chaînes ouvertes non ramifiées, les équations obtenues grâce aux TIG, intégrés dans le programme automatisé sous Maple, ont été comparées à celles obtenues par la méthode de Lagrange (manuellement ou à l'aide de Maple). Les treize systèmes étudiés peuvent être regroupés de la façon suivante :

1. Systèmes à un degré de liberté : un seul solide est en liaison prismatique ou de révolution (pendule) avec le bâti ;
2. Systèmes à deux degrés de liberté : deux solides (hors bâti) sont articulés successivement par deux liaisons prismatiques, deux liaisons de révolution (double-pendule), ou une de chaque type (dans chaque cas, les axes des deux liaisons sont pris parallèles puis orthogonaux) ;
3. Système à trois degrés de liberté : un manège à deux solides massiques présente une liaison cylindrique et une liaison de révolution.

Ceci a permis de valider la théorie, d'optimiser et de corriger le programme, mais également de bien comprendre la méthode, ses avantages et ses limites.

Seul le cas académique du double-pendule orthogonal, présenté également dans [FAY07], est détaillé ici à titre d'exemple (cf §1.5.5.2.1).

Enfin, pour illustrer le formalisme de liaison complexe, le cas académique d'une liaison Cardan est étudié, puis cette liaison intégrée dans une chaîne cinématique en succession d'une liaison de révolution (cf §1.5.5.3.1). A part le calcul préalable du torseur géométrique de la liaison Cardan et de sa dérivée (réalisés sous Maple et vérifiés à la main), la mise en équations est exécutée sous Maple également de façon automatique. Cependant la vérification par les calculs manuels n'est faite que pour le Cardan simple ; en effet, les calculs sont trop complexes pour le second système à deux solides, ce qui démontre d'ailleurs l'utilité d'un programme automatisé de mise en équations par les TIG !

### 1.5.5.1 Description de Denavit-Hartenberg

L'objectif est de décrire la position et l'orientation du repère $R_i$ (lié au solide $S_i$) par rapport au repère $R_{i-1}$ (lié au solide $S_{i-1}$). Reprécisons que toute liaison normalisée présentant plus d'un degré de liberté (cylindrique, sphérique…) peut être considé-

rée comme une succession de liaisons R et P – à condition toutefois dans certains cas de définir un ordre pour les degrés de liberté afin de rester en paramétrage holonome, par exemple les angles d'Euler pour une liaison sphérique ; les solides intermédiaires (un solide par degré de liberté supplémentaire) seront alors sans masse.

Pour décrire une liaison élémentaire R ou P, on utilise le repérage-paramétrage de Denavit-Hartenberg modifié, présenté sur la Figure 1.5.3 suivante, tirée de [FAY89] :

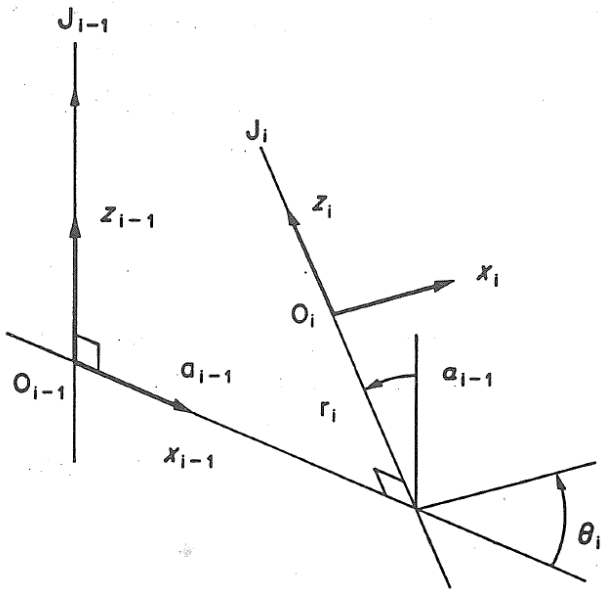



**Figure 1.5.3** Paramétrage-repérage de Denavit-Hartenberg modifié

Quatre nombres sont nécessaires et suffisants pour repérer de façon univoque l'axe de liaison $J_i$, de vecteur unitaire $\vec{z}_i$, par rapport à l'axe $J_{i-1}$, de vecteur unitaire $\vec{z}_{i-1}$. En effet, après avoir défini le vecteur $\vec{x}_{i-1}$ (fixe dans $S_{i-1}$) dans la direction de la perpendiculaire commune à $\vec{z}_{i-1}$ et $\vec{z}_i$ :

- La longueur $a_{i-1}$ et l'angle $\alpha_{i-1}$, caractérisant la géométrie de $S_{i-1}$, repèrent la position de $J_i$ par rapport à $J_{i-1}$ ;

- La longueur $r_i$ et l'angle $\theta_i$ définissent soit une caractéristique géométrique de $S_i$ lorsqu'ils sont constants, soit le (ou un) paramètre $q_i$ de la liaison d'axe $\vec{z}_i$ lorsqu'ils sont variables : $\theta_i$ et $r_i$ variables paramètrent un degré de liberté en rotation (liaison R) et en translation (liaison P) respectivement.

A noter [FAY89] que cette description, introduite par Khalil et Kleinfinger [KHA86], diffère légèrement de celle introduite par Denavit et Hartenberg : les paramètres $a_{i-1}$ et $\alpha_{i-1}$ avaient initialement l'indice i.

### 1.5.5.2 Double-pendule orthogonal

Il s'agit d'un système mécanique simple, mais dont la nature du mouvement est relativement complexe. Cet exemple "fil conducteur" de la présente thèse sera repris dans les seconde et troisième parties.

Les axes de rotation des solides $S_1$ et $S_2$ sont disposés perpendiculairement. Le repérage est défini en accord avec les conventions de Denavit-Hartenberg :

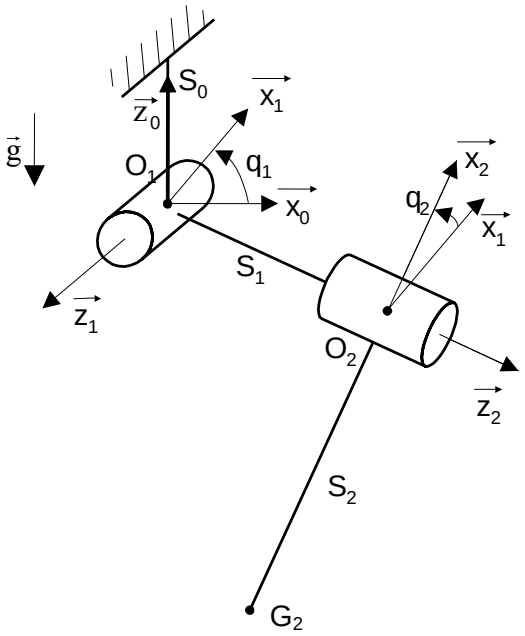



**Figure 1.5.4** Double-pendule orthogonal

Les données sont les suivantes :

- Donnée géométrique : $\overrightarrow{O_1O_2} = r_2\vec{z}_2$
- Données massiques : masse de $S_i = m_i$ ; $\overrightarrow{O_1G_1} = l_1\vec{z}_2$ ; $\overrightarrow{O_2G_2} = -l_2\vec{x}_2$
- Données inertielles : $\left[\overline{\overline{I}}_{O_1,S_1}\right]_{R_1} = \begin{bmatrix} A1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A1 \end{bmatrix}$ ; $\left[\overline{\overline{I}}_{O_2,S_2}\right]_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B2 & 0 \\ 0 & 0 & B2 \end{bmatrix}$

Les liaisons sont parfaites.

#### *1.5.5.2.1 Mise en équations grâce aux TIG, programmée sous Maple*

On ne donne ici que les résultats principaux, sous forme de sorties d'écran Maple (en bleu).

Paramètres de Denavit-Hartenberg :

$$\begin{bmatrix} i & \varepsilon_i & \alpha_{i-1} & a_{i-1} & \theta_i & r_i \\ 1 & 1 & \frac{1}{2}\pi & 0 & q_1 & 0 \\ 2 & 1 & \frac{1}{2}\pi & 0 & q_2 & r_2 \end{bmatrix}$$

Tenseurs d'inertie bruts : $\left[\overline{\overline{\Pi}}_{11}\right]_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ; $\left[\overline{\overline{\Pi}}_{22}\right]_{R_2} = \begin{bmatrix} B2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

TIG des corps généralisés :

$$\left[\overline{\overline{G}}_{11}\right]_{R_1} = \begin{bmatrix} B2\cos(q_2)^2 & r_2 m_2 l_2 \cos(q_2) & \cos(q_2) B2 \sin(q_2) & -\cos(q_2) m_2 l_2 \\ r_2 m_2 l_2 \cos(q_2) & A1 + m_2 r_2^2 & r_2 m_2 l_2 \sin(q_2) & -m_1 l_1 - m_2 r_2 \\ \cos(q_2) B2 \sin(q_2) & r_2 m_2 l_2 \sin(q_2) & B2 \sin(q_2)^2 & -\sin(q_2) m_2 l_2 \\ -\cos(q_2) m_2 l_2 & -m_1 l_1 - m_2 r_2 & -\sin(q_2) m_2 l_2 & m_2 + m_1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\overline{\overline{G}}_{22}\right]_{R_2} = \begin{bmatrix} B2 & 0 & 0 & -m_2 l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m_2 l_2 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

Tenseurs cinétiques :

$$\left[\overline{\overline{K}}_{11}\right]_{R_1} = \begin{bmatrix} A1 + m_2 r_2^2 & -r_2 m_2 l_2 \cos(q_2) & 0 \\ -r_2 m_2 l_2 \cos(q_2) & B2\cos(q_2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\overline{\overline{K}}_{12}\right]_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & -r_2 m_2 l_2 \cos(q_2) & 0 \\ 0 & r_2 m_2 l_2 \sin(q_2) & 0 \\ 0 & -B2\cos(q_2) & 0 \end{bmatrix} ; \left[\overline{\overline{K}}_{22}\right]_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Puis on obtient :

- les coefficients d'énergie cinétique grâce à l'équation (1.5.13) :

$$a11 = A1 + m_2 r_2^2 + B2\cos(q_2)^2,\ a12 = r_2 m_2 l_2 \sin(q_2),\ a22 = B2$$

- les symboles de Christoffel grâce à l'équation (1.5.14) :

$$\Gamma111 = 0,\ \Gamma112 = -\cos(q_2) B2 \sin(q_2),\ \Gamma121 = -\cos(q_2) B2 \sin(q_2),\ \Gamma122 = r_2 m_2 l_2 \cos(q_2)$$

$$\Gamma211 = \frac{1}{2} B2 \sin(2 q_2),\ \Gamma212 = 0,\ \Gamma221 = 0,\ \Gamma222 = 0$$

et les équations sous la forme la plus factorisée grâce à l'équation (1.4.10) :

*Equation_1_correspondant_au_paramètre_*, $q_1$

$$(A1 + m_2\, r_2^{\,2} + B2\cos(q_2)^2)\left(\frac{d^2}{dt^2}q_1(t)\right) + r_2\, m_2\, l_2 \sin(q_2)\left(\frac{d^2}{dt^2}q_2(t)\right) - 2\left(\frac{d}{dt}q_1(t)\right)\left(\frac{d}{dt}q_2(t)\right)\cos(q_2)\, B2\sin(q_2) + \left(\frac{d}{dt}q_2(t)\right)^2 r_2\, m_2\, l_2\cos(q_2) = -g\,(\sin(q_1)\, m_1\, l_1 + \sin(q_1)\, m_2\, r_2 - \cos(q_2)\, m_2\, l_2\cos(q_1)) \quad (1.5.27)$$

*Equation_2_correspondant_au_paramètre_*, $q_2$

$$r_2\, m_2\, l_2 \sin(q_2)\left(\frac{d^2}{dt^2}q_1(t)\right) + B2\left(\frac{d^2}{dt^2}q_2(t)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}q_1(t)\right)^2 B2\sin(2\,q_2) = -g\, m_2\, l_2 \sin(q_2)\sin(q_1)$$

L'ensemble des "sorties" de la feuille Maple est présenté en annexe 1.1, avec tous les titres des sections et sous-sections. En effet, l'architecture de ce programme permet de bien comprendre la méthode, et complète l'algorithme de synthèse du paragraphe 1.7.2 qui intègre aussi les cas non holonomes.

#### *1.5.5.2.2 Vérification : mise en équations par la méthode de Lagrange*

Cette méthode, mise en œuvre manuellement ou à l'aide de Maple, est autorisée ici puisqu'il s'agit d'un paramétrage holonome. La transformation virtuelle est choisie compatible avec les liaisons ; les équations de Lagrange sont écrites pour des paramètres indépendants (le système étant en boucle ouverte) et des actions mécaniques (pesanteur) qui dérivent de fonctions de force.

Energie cinétique : $2T^0 = \left(A_1 + B_2\cos^2 q_2 + m_2 r_2^{\,2}\right)\dot{q}_1^{\,2} + B_2\dot{q}_2^{\,2} + 2m_2 r_2 l_2 \dot{q}_1\dot{q}_2 \sin q_2$

Fonction de force (pesanteur) : $U = m_1 g l_1 \cos q_1 + m_2 g\left(r_2\cos q_1 + l_2\cos q_2 \sin q_1\right) + cste$

Par conséquent, les équations dynamiques $\frac{d}{dt}\frac{\partial T^0}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T^0}{\partial q_1} = \frac{\partial U}{\partial q_1}$ et $\frac{d}{dt}\frac{\partial T^0}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T^0}{\partial q_2} = \frac{\partial U}{\partial q_2}$ donnent respectivement les mêmes expressions que (1.5.27).

### 1.5.5.3 Joint de Cardan

La liaison Cardan (ou universal joint en anglais) a été choisie comme exemple de liaison complexe pour la raison suivante : c'est une des seules liaisons complexes dont la loi entrée-sortie est connue de façon formelle (analytique), et qu'on peut donc traiter de façon simple pour valider la méthode.

En effet, cette fonction de transfert n'est connue que de façon discrète pour les liaisons complexes usuelles telle la liaison porte-fusée / châssis d'un véhicule automobile : des mesures d'essais géométriques fournissent des points de la trajectoire du porte-fusée dans le repère châssis, à partir desquels on extrapole le torseur géométrique de la liaison (voir équation (1.3.2)). Cette procédure numérique plus longue ne convient pas à une simple vérification de la méthode, mais sera la voie à emprunter pour des cas industriels.

Par contre, la simplicité de la liaison Cardan est aussi son principal inconvénient ; le système multicorps présenté ci-après reste purement académique :

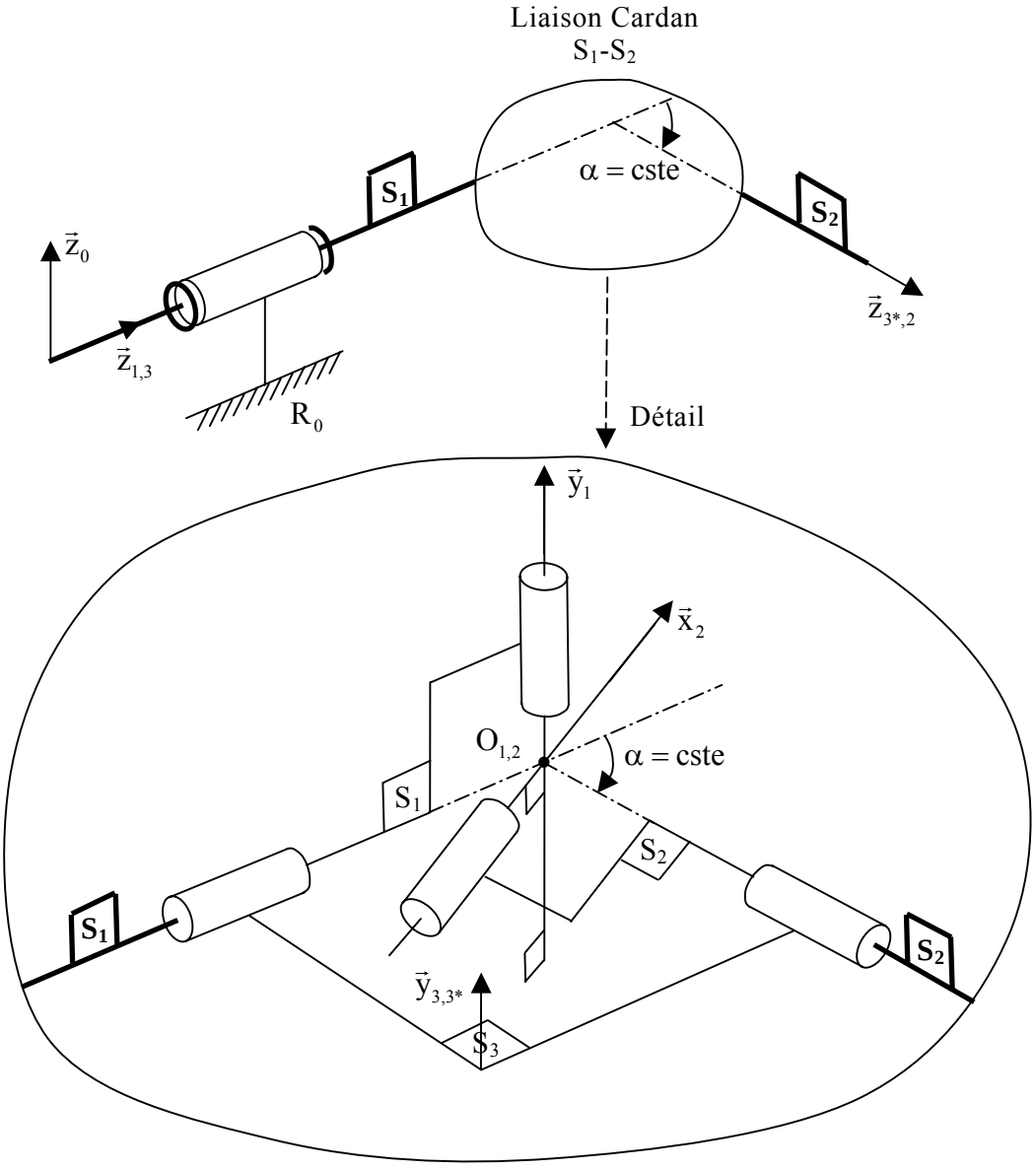



**Figure 1.5.5** Modèle du mécanisme présentant un joint de Cardan

*Avertissement : la Figure 1.5.5 ci-dessus ne présente que les éléments essentiels de repérage et de paramétrage que l'on cite dans les explications et les développements calculatoires ci-dessous, par souci d'allègement du dessin.*

#### *1.5.5.3.1 Description du mécanisme*

L'entrée de ce mécanisme en boucle ouverte est le mouvement de $S_1$ par rapport à $R_0$ (liaison rotoïde ou pivot ou de révolution), qui sera traité grâce au repérage-paramétrage de Denavit-Hartenberg. Le solide $S_3$ est un solide intermédiaire qui n'a d'autre utilité que de maintenir l'angle constant $\alpha$ entre $\vec{z}_1$ et $\vec{z}_2$. Le croisillon c, non repéré, est le cœur de la liaison "joint de Cardan" et assure l'angle droit entre les vecteurs unitaires $\vec{y}_1$ et $\vec{x}_2$. Enfin, la sortie est le mouvement "complexe" du solide inertiel $S_2$ par rapport à $R_0$. Les liaisons sont bien sûr parfaites.

Par conséquent le graphe des liaisons de cette chaîne ouverte est très simple (cf Figure 1.5.6) : les solides $S_3$ et c n'apparaissent pas, n'étant que des composants technologiques (bien qu'essentiels !) de la liaison complexe $S_1$-$S_2$. Cette dernière est donc une sorte de "boîte noire", dont seule la loi d'entrée-sortie est nécessaire pour écrire les équations du mouvement de l'ensemble ; le paramètre d'entrée ($q_i$ dans l'équation (1.3.1)) est l'angle $\psi_{3/1} = (\vec{x}_1, \vec{x}_3)$.

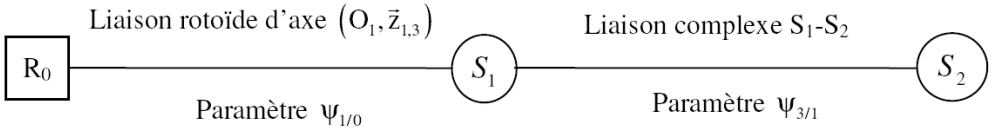



**Figure 1.5.6** Graphe des liaisons du mécanisme avec joint de Cardan

Notons que le mouvement "complexe" de $S_2$ par rapport à $R_0$ peut être vu comme la combinaison (superposition) des deux mouvements suivants :

- A $\dot{\psi}_{3/1} = 0$, le mouvement de $S_1$ par rapport à $R_0$ entraîne le solide généralisé ($S_3$ U c U $S_2$) dans une rotation d'ensemble autour de $(O_{1,2}, \vec{z}_1)$ ;
- Lorsque $\dot{\psi}_{3/1} \neq 0$, s'y superpose la rotation propre de $S_2$ par rapport à $S_3$ autour de l'axe $(O_{1,2}, \vec{z}_{2,3*})$, transmise par le mécanisme "joint de Cardan".

#### *1.5.5.3.2 Détermination du torseur géométrique de la liaison complexe*

La formule (1.3.1) devient ici

$$V_2^1(O_{1,2}) = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_2^1 \\ \vec{V}^1(O_{1,2}) \end{Bmatrix} = \dot{\psi}_{3/1} \begin{Bmatrix} \vec{\varphi}_2(\psi_{3/1}) \\ \vec{t}_2(\psi_{3/1}) \end{Bmatrix} = \dot{\psi}_{3/1} \$_2(O_{1,2}) \qquad (1.5.28)$$

Par construction, $\vec{t}_2 = \vec{0}$. Il reste à déterminer $\vec{\varphi}_2(\psi_{3/1})$ en exprimant $\vec{\Omega}_2^1$ uniquement en fonction du paramètre $\psi_{3/1}$ et de sa dérivée par rapport au temps.

$$\boxed{\vec{\Omega}_2^1 = \vec{\Omega}_3^1 + \vec{\Omega}_2^{3*} = \dot{\psi}_{3/1}\vec{z}_{1,3} + \dot{\psi}_{2/3}\vec{z}_{2,3*}} \qquad (1.5.29)$$

- ***Détermination de*** $\dot{\psi}_{2/3}$ ***en fonction de*** $\dot{\psi}_{3/1}$

La condition de liaison est $\boxed{\vec{y}_1 \cdot \vec{x}_2 = 0}$

En projetant ces deux vecteurs dans le même repère (par exemple $R_3$ lié à $S_3$) grâce aux figures de passage suivantes :

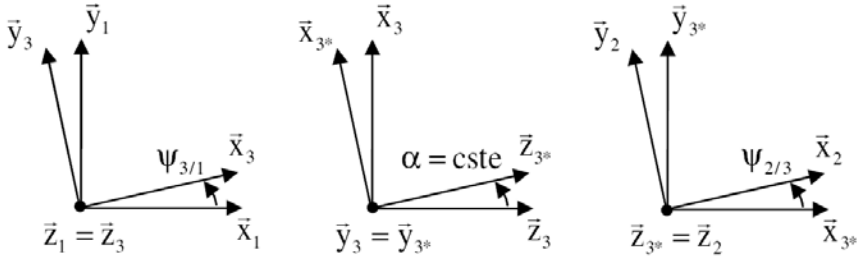



**Figure 1.5.7** Figures de changement de base du modèle à joint de Cardan

on obtient la loi entrée-sortie de la liaison complexe $S_1 - S_2$ :

$$\boxed{\tan\psi_{2/3} = -\cos\alpha \tan\psi_{3/1}} \qquad (1.5.30)$$

En dérivant la relation (1.5.30) par rapport au temps, puis en la reportant dans le résultat, on obtient $$\boxed{\dot{\psi}_{2/3} = -\cos\alpha\dot{\psi}_{3/1}\frac{1+\tan^2\psi_{3/1}}{1+\cos^2\alpha\tan^2\psi_{3/1}}} \qquad (1.5.31)$$

On peut vérifier que $\dot{\psi}_{2/3} = -\dot{\psi}_{3/1}$ lorsque les arbres sont alignés, soit $\alpha = 0$.

- ***Expression de*** $\vec{\varphi}_2$ ***en fonction du seul paramètre*** $\psi_{3/1}$ ***et de sa dérivée***

En exprimant $\vec{\Omega}_2^1$ déterminé en (1.5.29) dans la base liée à $S_2$ grâce aux changements de base de la Figure 1.5.7, et en reportant la relation (1.5.31), on obtient :

$$\left[\vec{\Omega}_2^1\right]_2 = \dot{\psi}_{3/1}\begin{bmatrix} -\sin\alpha\ w^{-1/2} \\ -\sin\alpha\cos\alpha\tan\psi_{3/1}w^{-1/2} \\ -\sin^2\alpha\cos\alpha\tan^2\psi_{3/1}w^{-1} \end{bmatrix} \text{ en posant } \boxed{w = 1+\cos^2\alpha\tan^2\psi_{3/1}} \quad (1.5.32)$$

d'où $$\boxed{\left[\vec{\varphi}_2\right]_2 = \begin{bmatrix} -\sin\alpha\ w^{-1/2} \\ -\sin\alpha\cos\alpha\tan\psi_{3/1}w^{-1/2} \\ -\sin^2\alpha\cos\alpha\tan^2\psi_{3/1}w^{-1} \end{bmatrix}} \qquad (1.5.33)$$

- ***Expression de*** $\vec{\varphi}'_2 = \dfrac{\partial \vec{\varphi}_2}{\partial \psi_{3/1}}$ ***en fonction du seul paramètre*** $\psi_{3/1}$ ***(et de*** $\dot{\psi}_{3/1}$***) :***

On rappelle que la dérivation $\dfrac{\partial \vec{\varphi}_2}{\partial \psi_{3/1}}$ est observée depuis le repère galiléen 0 (cf §1.4.2), donc $\dfrac{\partial \vec{\varphi}_2}{\partial \psi_{3/1}} = \dfrac{{}^0\partial \vec{\varphi}_2}{\partial \psi_{3/1}} = \dfrac{{}^2\partial \vec{\varphi}_2}{\partial \psi_{3/1}} + \dfrac{\partial \vec{\Omega}_2^0}{\partial \dot{\psi}_{3/1}} \times \vec{\varphi}_2$ (voir éq. (1.4.2))

or $\dfrac{\partial \vec{\Omega}_2^0}{\partial \dot{\psi}_{3/1}} = \dfrac{\partial \vec{\Omega}_1^0}{\partial \dot{\psi}_{3/1}} + \dfrac{\partial \vec{\Omega}_2^1}{\partial \dot{\psi}_{3/1}} = \vec{0} + \vec{\varphi}_2 = \vec{\varphi}_2$ donc $\boxed{\dfrac{\partial \vec{\varphi}_2}{\partial \psi_{3/1}} = \dfrac{{}^2\partial \vec{\varphi}_2}{\partial \psi_{3/1}}}$

et il suffit de dériver les composantes de $\vec{\varphi}_2$ dans le repère 2. On obtient finalement :

$$\boxed{\left[\frac{\partial \vec{\varphi}_2}{\partial \psi_{3/1}}\right]_2 = \begin{bmatrix} \sin\alpha \cos^2\alpha \tan\psi_{3/1}\left(1+\tan^2\psi_{3/1}\right) w^{-3/2} \\ -\sin\alpha\cos\alpha\left(1+\tan^2\psi_{3/1}\right) w^{-3/2} \\ -2\sin^2\alpha\cos\alpha\tan\psi_{3/1}\left(1+\tan^2\psi_{3/1}\right) w^{-2} \end{bmatrix}} \qquad (1.5.34)$$

avec $\boxed{w = 1+\cos^2\alpha\tan^2\psi_{3/1}}$ (1.5.32) comme précédemment.

- ***Remarques***
  - o $\vec{\varphi}_2$ n'est pas un vecteur unitaire ;
  - o Il aurait été possible d'exprimer les vecteurs $\vec{\varphi}_2$ et $\dfrac{\partial \vec{\varphi}_2}{\partial \psi_{3/1}}$ dans le repère 1, mais on a fait le choix du repère 2 par souci d'homogénéité avec les liaisons simples dans les programmes Maple : l'axe $\vec{z}_i$ est toujours exprimé dans $R_i$ (cf Figure 1.5.1 et Figure 1.5.3) ;
  - o C'est l'utilisation combinée de l'expertise humaine et du logiciel Maple (commande "*normal*") qui permet d'obtenir l'expression (1.5.34), relativement simple.

#### *1.5.5.3.3 Mise en équations grâce aux TIG, programmée sous Maple*

En raison de la complexité et de la longueur des expressions, l'ensemble des "sorties" de la feuille Maple est présenté en annexe 1.2. Trois niveaux de développement des équations du mouvement sont présentés :

- elles sont d'abord affichées contenant le paramètre supplémentaire $\psi_{2/3}$ ainsi que les variables intermédiaires {phix2, phiy2, phiz2}, {dphi2x, dphi2y, dphi2z}, qui sont les composantes dans $R_2$ respectivement de $\vec{\varphi}_2$ et $\frac{\partial \vec{\varphi}_2}{\partial \psi_{3/1}}$ ;
- puis la relation de liaison est introduite, permettant d'éliminer $\psi_{2/3}$ ;
- enfin les variables intermédiaires {phix2, phiy2, phiz2} et {dphi2x, dphi2y, dphi2z} sont remplacées par leur expression en fonction de $\psi_{3/1}$.

Plusieurs remarques peuvent toutefois être faites concernant le paramétrage :

| $i$ | $\varepsilon_i$ | $\alpha_{i-1}$ | $a_{i-1}$ | $\theta_i$ | $r_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $\frac{1}{2}\pi$ | 0 | $\psi 1$ | 0 |
| 2 | 2 | *pas_besoin* | *pas_besoin* | $\psi 3$ | 0 |

1. Par souci de lisibilité, $\psi_{1/0}$ devient $\psi 1$ sous Maple (annexe 1.2) ; de même, $\psi_{2/3} \equiv \psi 2$ et $\psi_{3/1} \equiv \psi 3$. Cette remarque est valable pour tous les programmes Maple de ce paragraphe 1.5.5.3.
2. $\varepsilon = 2$ traduit la nature de liaison complexe de la seconde liaison.
3. Seule la liaison rotoïde est décrite entièrement par les paramètres de Denavit-Hartenberg.

#### *1.5.5.3.4 Modèle simplifié*

Il est quasiment impossible d'écrire manuellement les équations du mouvement pour le système complet de la Figure 1.5.5 ; ceci montre *a contrario* l'utilité d'une mise en équations automatique (donc de la méthode des Tenseurs d'Inertie Globaux) associée à un logiciel de calcul formel.

Cependant, dans le cas présent, cette complexité empêche de vérifier les calculs faits sur le joint de Cardan, et donc de valider la méthode des TIG appliquée aux liaisons complexes. Par conséquent, on considère dans ce point le modèle de la Figure 1.5.5 pour $\psi_{1/0} = 0$, afin de pouvoir comparer :

- les équations obtenues grâce aux TIG programmés sous Maple,
- à celles obtenues à la main grâce à la méthode de Lagrange.

En effet, dans ce système simplifié que l'on peut décrire par le graphe des liaisons suivant :

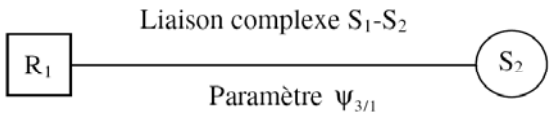



**Figure 1.5.8** Graphe des liaisons pour le système simplifié à joint de Cardan

il n'y a plus qu'un seul paramètre d'entrée ( $\psi_{3/1}$ ) qui est donc indépendant !

- ***Mise en équations grâce aux TIG, programmée sous Maple***

On ne donne ici que les résultats principaux, sous forme de sorties d'écran Maple (en bleu). On rappelle que

$$\psi_{3/1} \equiv \psi 3 \ ; \ \psi_{2/3} \equiv \psi 2 \ ; \ \left[\vec{\varphi}_2\right]_{R_2} = \begin{bmatrix} \text{phix2} \\ \text{phiy2} \\ \text{phiz2} \end{bmatrix} \ ; \ \left[\frac{\partial \vec{\varphi}_2}{\partial \psi_{3/1}}\right]_{R_2} = \begin{bmatrix} \text{dphi2x} \\ \text{dphi2y} \\ \text{dphi2z} \end{bmatrix}.$$

Paramètres :

| $i$ | $\varepsilon_i$ | $\alpha_{i-1}$ | $a_{i-1}$ | $\theta_i$ | $r_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | $\frac{1}{2}\pi$ | 0 | $\psi 3$ | 0 |

*Avertissement : i=1 dans le programme informatique, ce choix simplifiant quelque peu le code (cf annexe 1.3). Mais les résultats ci-après sont bien présentés avec i=2, correspondant à la numérotation des solides de la* ***Figure 1.5.5*** *et de la* ***Figure 1.5.8****.*

Tenseurs d'inertie :

$$\left[\bar{\bar{I}}_{S_2,O_2}\right]_{R_2} = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \quad \text{(usuel)}$$

$$\left[\bar{\bar{\Pi}}_{22}\right]_{R_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}C_2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}C_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 - \frac{1}{2}C_2 \end{bmatrix} \quad \text{(brut)}$$

TIG du corps généralisé : $\left[\bar{\bar{G}}_{22}\right]_{R_2} =$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}C_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 - \frac{1}{2}C_2 & m_2 l_2 \\ 0 & 0 & m_2 l_2 & m_2 \end{bmatrix}$$

Tenseur cinétique :

$$\left[\overline{\overline{K}}_{22}\right]_{R_2} = \left[\left[\left[\left[\frac{1}{2}\,phiz2^2\,C_2 + \left(A_2 - \frac{1}{2}\,C_2\right)\,phiy2^2,\ -phiy2\left(A_2 - \frac{1}{2}\,C_2\right)\,phix2,\ -\frac{1}{2}\,phiz2\,C_2\,phix2\right],\right.\right.\right.$$
$$\left[-phiy2\left(A_2 - \frac{1}{2}\,C_2\right)\,phix2,\ \frac{1}{2}\,phiz2^2\,C_2 + phix2^2\left(A_2 - \frac{1}{2}\,C_2\right),\ -\frac{1}{2}\,phiz2\,C_2\,phiy2\right],$$
$$\left.\left.\left.\left[-\frac{1}{2}\,phiz2\,C_2\,phix2,\ -\frac{1}{2}\,phiz2\,C_2\,phiy2,\ \frac{1}{2}\,phiy2^2\,C_2 + \frac{1}{2}\,phix2^2\,C_2\right]\right]\right]\right]$$

Puis, en utilisant les équations (1.5.13) et (1.5.14), on obtient :

- le coefficient d'énergie cinétique : $a_{21} = [phiz2^2\,C_2 + phiy2^2\,A_2 + phix2^2\,A_2]$
- le symbole de Christoffel $\Gamma_{2,11} = [[C_2\,phiz2\,dphi2z + phiy2\,A_2\,dphi2y + phix2\,A_2\,dphi2x]]$

et l'équation du mouvement en fonction du paramètre $\psi_{3/1} \equiv \psi 3$ (et de ses dérivées par rapport au temps), mais également des variables intermédiaires $\psi_{2/3} \equiv \psi 2$, {phix2, phiy2, phiz2} et {dphi2x, dphi2y, dphi2z} :

*Equation_1_correspondant_au_paramètre_, ψ3*

$$(phiz2^2\,C_2 + phiy2^2\,A_2 + phix2^2\,A_2)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\psi 3(t)\right)$$
$$+\left(\frac{d}{dt}\,\psi 3(t)\right)^2 (C_2\,phiz2\,dphi2z + phiy2\,A_2\,dphi2y + phix2\,A_2\,dphi2x) = Cm_2 - g\,m_2\,l_2\,(phiy2\cos$$
$$\psi 2)\cos(\alpha)\sin(\psi 3) + phiy2\sin(\psi 2)\cos(\psi 3) + phix2\sin(\psi 2)\cos(\alpha)\sin(\psi 3) - phix2\cos(\psi 2)\cos(\psi 3))$$

Finalement, en remplaçant les variables intermédiaires par leur expression en fonction du seul $\psi_{3/1} \equiv \psi 3$ et de ses dérivées en fonction du temps, on obtient :

*Equation_1_correspondant_au_paramètre_, ψ3*

$$\left(\frac{\sin(\alpha)^4\cos(\alpha)^2\tan(\psi 3)^4\,C_2}{(1+\cos(\alpha)^2\tan(\psi 3)^2)^2} + \frac{\sin(\alpha)^2\cos(\alpha)^2\tan(\psi 3)^2\,A_2}{1+\cos(\alpha)^2\tan(\psi 3)^2} + \frac{\sin(\alpha)^2\,A_2}{1+\cos(\alpha)^2\tan(\psi 3)^2}\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\psi 3(t)\right) \quad (1.5.35)$$
$$+\frac{2\left(\frac{d}{dt}\,\psi 3(t)\right)^2 C_2\sin(\alpha)^4\cos(\alpha)^2\tan(\psi 3)^3(1+\tan(\psi 3)^2)}{(1+\cos(\alpha)^2\tan(\psi 3)^2)^3} = Cm_2 - g\,m_2\,l_2\sin(\alpha)\cos(\psi 3)$$

Comme pour les exemples précédents (double-pendule orthogonal et système complet à Cardan), l'ensemble des "sorties" de la feuille Maple est présenté en annexe 1.3.

- ***Vérification : mise en équations par la méthode de Lagrange (manuelle ou à l'aide de Maple)***

La transformation virtuelle est choisie compatible avec la liaison ; l'équation de Lagrange est écrite pour un seul paramètre (indépendant !), le système étant en boucle ouverte. Les actions mécaniques (pesanteur) dérivent de fonctions de force.

Energie cinétique : $$2T^0 = \left[ A_2 + C_2 \frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha\tan^4\psi_{3/1}}{\left(1+\cos^2\alpha\tan^2\psi_{3/1}\right)^2} \right] \sin^2\alpha$$

Fonction de force (pesanteur) : $$U = -m_2 g l_2 \sin\alpha \sin\psi_{3/1} + cste$$

Par conséquent, l'équation dynamique $$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^0}{\partial \dot{\psi}_{3/1}} - \frac{\partial T^0}{\partial \psi_{3/1}} = \frac{\partial U}{\partial \psi_{3/1}}$$ donne

$$\left[ A_2 + C_2 \frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha\tan^4\psi_{3/1}}{\left(1+\cos^2\alpha\tan^2\psi_{3/1}\right)^2} \right] \sin^2\alpha\ddot{\psi}_{3/1} + 2C_2\cos^2\alpha\sin^4\alpha \frac{\tan^3\psi_{3/1}\left(1+\tan^2\psi_{3/1}\right)}{\left(1+\cos^2\alpha\tan^2\psi_{3/1}\right)}\dot{\psi}_{3/1}^2 = C_{m2} - m_2 g l_2 \sin\alpha\cos\psi_{3/1}$$

qui est la même équation que (1.5.35) (dans laquelle seul le facteur de $\ddot{\psi}_{3/1}$ est difficile à simplifier sous Maple).

# 1.6 Cas des paramétrages non holonomes

Pour certaines paires de paramètres, incluant au moins un pseudo-paramètre (cf §1.3.1) et généralement notés $\pi_i$ au lieu de $q_i$, l'inégalité j>i ne signifie plus que $\pi_j$ est un successeur de $\pi_i$. La notion de chaîne cinématique perd sa signification. Donc la relation de Schwarz par rapport à ces deux paramètres n'est plus vérifiée et la paire de paramètres est dite non holonome.

Les paragraphes 1.6.1 et 1.6.2 montrent de quelle façon les déterminations des coefficients dynamiques, qui dépendent dorénavant de la nature des exemples étudiés, sont affectées par un paramétrage non holonome.

## 1.6.1 Exemple 1 : Paramétrage d'un corps libre

### 1.6.1.1 Théorie

Considérons $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ les composantes de $\vec{\Omega}_S^0$ dans le repère orthonormé direct $R_S = \{O_S, \vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_S\}$ lié au corps libre S , avec $O_S \equiv G_S$ le centre de gravité de S et $m_S$ sa masse :

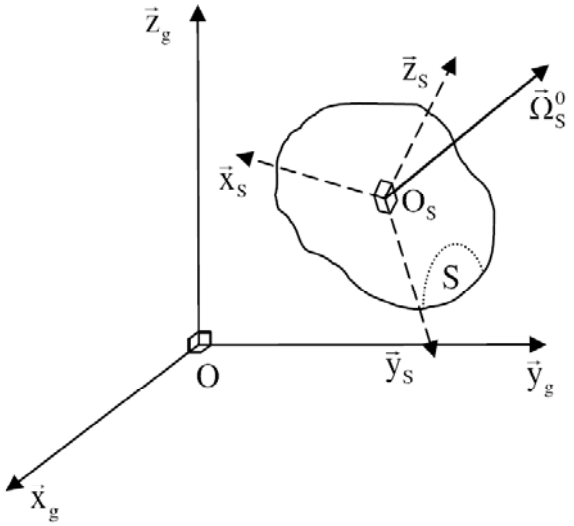



**Figure 1.6.1** Paramétrage d'un corps libre (planète, satellite)

Soient $\pi_i = \int_0^t \omega_i d\tau$ (i=1,2,3) les trois pseudo-paramètres associés. Notons que $\pi_i$ n'est pas un successeur de $\pi_j$ : $\pi_2$ n'est pas un successeur de $\pi_1$, par exemple ; en fait, la notion de successeur disparaît.

Alors, si $M_S$ est un point lié à S :

$$\vec{V}^0\left(M_S\right)=\vec{V}^0\left(O_S\right)+\left(\omega_1\vec{x}_S+\omega_2\vec{y}_S+\omega_3\vec{z}_S\right)\times\overrightarrow{O_SM_S}$$

Définissons $\vec{\varphi}_1=\vec{x}_S$, $\vec{\varphi}_2=\vec{y}_S$ et $\vec{\varphi}_3=\vec{z}_S$ ; puisque $\dfrac{\partial\vec{V}^0\left(O_S\right)}{\partial\omega_i}=\vec{0}$ et $\dfrac{\partial\vec{\varphi}_i}{\partial\omega_j}=\vec{0}$ quels que soient i et j (aucun pseudo-paramètre n'est un successeur d'un autre), on conclut que

$$\boxed{\frac{\partial\overrightarrow{O_SM_S}}{\partial\pi_i}=\frac{\partial\vec{V}^0\left(M_S\right)}{\partial\omega_i}=\vec{\varphi}_i\times\overrightarrow{O_SM_S}}\qquad\text{pour i=1,2,3}$$

Le vecteur $\vec{\varphi}_i\times\overrightarrow{O_SM_S}$ est constant dans $R_S$. Ainsi, quelle que soit la paire $\pi_i$ et $\pi_j$,

$$\frac{\partial}{\partial\pi_j}\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial\pi_i}=\vec{\varphi}_j\times\left(\vec{\varphi}_i\times\overrightarrow{O_SM_S}\right)\qquad\neq\qquad\frac{\partial}{\partial\pi_i}\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial\pi_j}=\vec{\varphi}_i\times\left(\vec{\varphi}_j\times\overrightarrow{O_SM_S}\right)$$

La relation de Schwarz n'est pas vérifiée. En réalité la non-commutativité des dérivées partielles secondes (par rapport à deux pseudo-paramètres) est inscrite dans la non-commutativité des grands déplacements correspondant à ces paramètres. En effet, dans ce cas, les vitesses de rotation $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ sont définies autour d'axes qui sont fixes les uns par rapport aux autres. Et donc, il est bien connu que les rotations ne sont pas commutatives. Notons que si les pseudo-vitesses étaient les projections du vecteur rotation sur le repère galiléen, nous aurions fait la même remarque.

Il s'ensuit que les symboles de Christoffel sont exprimés, d'après les équations (1.5.8), (1.5.11) et (1.5.14) :

$$\boxed{\Gamma_{i,kj}=\widehat{\varphi_j}:\overline{\overline{K}}_{ik\,Max}}\qquad\neq\qquad\boxed{\Gamma_{i,jk}=\widehat{\varphi_k}:\overline{\overline{K}}_{ij\,Max}}\qquad(1.6.1)$$

si $\pi_j$ et $\pi_k$ sont deux pseudo-paramètres

avec $$\boxed{\overline{\overline{K}}_{ik\,Max}=\tilde{\$}_i\left(O_i\right).\overline{\overline{G}}_{ik\,Max}.\tilde{\$}_k\left(O_k\right)}\qquad(1.6.2)$$

dans laquelle $\left[\tilde{\$}_k\left(O_k\right)\right]=\left[\widehat{\varphi_k}\ ,\ \vec{0}\right]^T$.

Concernant les éléments cinétiques $a_{ij}$, l'équation (1.5.13) reste valable pour leur détermination.

### 1.6.1.2 Expressions détaillées

Soit la forme matricielle du tenseur d'inertie usuel $\left[\bar{\bar{I}}_{S,O_S}\right]_{R_S} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}$

Donc le tenseur d'inertie brut est représenté par

$$\left[\bar{\bar{\Pi}}_{SS}\right]_{R_S} = \begin{bmatrix} (B+C-A)/2 & F & E \\ F & (C+A-B)/2 & D \\ E & D & (A+B-C)/2 \end{bmatrix}$$

et le TIG du solide S par :

$$\left[\bar{\bar{G}}_{SS}\right]_{R_S} = \begin{bmatrix} \left[\bar{\bar{\Pi}}_{SS}\right]_{R_S}(1,1) & F & E & 0 \\ F & \left[\bar{\bar{\Pi}}_{SS}\right]_{R_S}(2,2) & D & 0 \\ E & D & \left[\bar{\bar{\Pi}}_{SS}\right]_{R_S}(3,3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_S \end{bmatrix} = \left[\bar{\bar{G}}_{ik\,Max}\right]_{R_S} \text{ (quels que soient i,k)}$$

Exemples de tenseurs cinétiques (représentation matricielle) :

$$\left[\bar{\bar{K}}_{11Max}\right]_{R_S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left[\bar{\bar{\Pi}}_{SS}\right]_{R_S}(3,3) & -D \\ 0 & -D & \left[\bar{\bar{\Pi}}_{SS}\right]_{R_S}(2,2) \end{bmatrix}; \left[\bar{\bar{K}}_{12Max}\right]_{R_S} = \left[\bar{\bar{K}}_{21Max}\right]_{R_S}^{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\left[\bar{\bar{\Pi}}_{SS}\right]_{R_S}(3,3) & 0 & E \\ D & 0 & -F \end{bmatrix}$$

Puis, en utilisant les équations (1.5.13) et (1.6.1), on obtient

$$a_{11} = A \;;\; a_{12} = -F \;;\; a_{13} = -E \;;\; \Gamma_{1,11} = 0 \;;\; \Gamma_{1,12} = 0 \;;\; \Gamma_{1,13} = 0 \;;$$

$$\Gamma_{1,21} = -E \;;\; \Gamma_{1,22} = -D \;;\; \Gamma_{1,23} = -\bar{\bar{\Pi}}_{SS}[3,3] \;;\; \Gamma_{1,31} = F \;;\; \Gamma_{1,32} = \bar{\bar{\Pi}}_{SS}[2,2] \;;\; \Gamma_{1,33} = D\,.$$

et finalement la première des équations d'Euler

$$A_1 = Q_1 \quad \Leftrightarrow \quad A\dot{\omega}_1 - F\dot{\omega}_2 - E\dot{\omega}_3 - D\left(\omega_2{}^2 - \omega_3{}^2\right) - E\omega_1\omega_2 + (C-B)\omega_2\omega_3 + F\omega_3\omega_1 = 0$$

De la même manière, les deux autres équations sont

$$A_2 = Q_2 \quad \Leftrightarrow \quad -F\dot{\omega}_1 + B\dot{\omega}_2 - D\dot{\omega}_3 - E\left(\omega_3{}^2 - \omega_1{}^2\right) + D\omega_1\omega_2 - F\omega_2\omega_3 + (A-C)\omega_3\omega_1 = 0$$

$$A_3 = Q_3 \quad \Leftrightarrow \quad -E\dot{\omega}_1 - D\dot{\omega}_2 + C\dot{\omega}_3 - F\left(\omega_1{}^2 - \omega_2{}^2\right) + (B-A)\omega_1\omega_2 + E\omega_2\omega_3 - D\omega_3\omega_1 = 0$$

## 1.6.2 Exemple 2 : Paramètres utilisés en Dynamique du Véhicule

### 1.6.2.1 Théorie

Les paramètres habituellement choisis en Dynamique du Véhicule pour localiser le châssis sont (cf Figure 1.6.2) :

- les composantes $V_4=V_X$, $V_5=V_Y$, $V_6=V_Z$ de la vitesse galiléenne du centre d'inertie du châssis $G_C$, projetées sur le repère orthonormé direct lié au châssis $R_C=\{O_C,\vec{x}_C,\vec{y}_C,\vec{z}_C\}$ (repère de référence local) ;

- les angles d'Euler de type II $q_1,q_2,q_3$ (lacet, tangage et roulis) qui quantifient les rotations autour des axes $\vec{\varphi}_1=\vec{z}_g$ vertical, $\vec{\varphi}_2=\vec{y}_1$ orienté vers la gauche, et $\vec{\varphi}_3=\vec{x}_2=\vec{x}_C$ l'axe longitudinal.

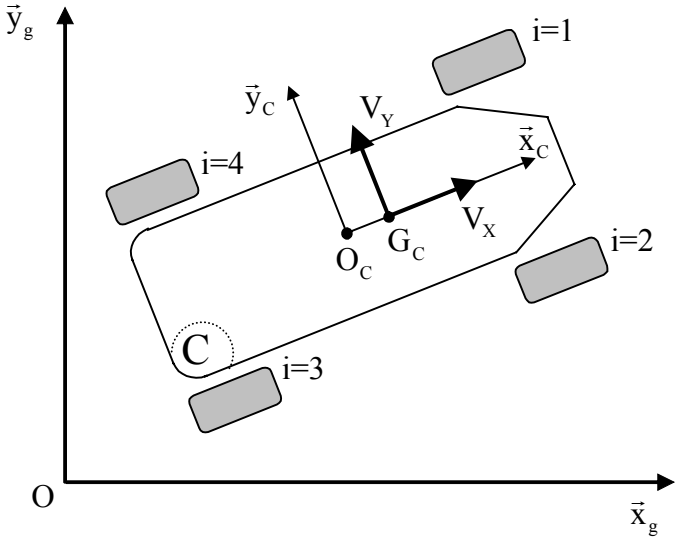



**Figure 1.6.2** Paramétrage d'un modèle de véhicule

Cette description est non holonome, comme on le verra plus loin. Notons qu'au contraire, un paramétrage utilisant les coordonnées $q_4=x_G$, $q_5=y_G$, $q_6=z_G$ dans le repère galiléen pour décrire la position de $G_C$ serait holonome.

Soient $\pi_i=q_i$ pour $i \in E_R=\{1,2,3\}$, et $\pi_i=\int_0^t V_i d\tau$ pour $i \in E_T=\{4,5,6\}$.

Alors si $i \in E_T$ et $j \in E_R$ :

- $\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \pi_i} = P_{iM}\vec{t}_i$ avec $\vec{t}_4 = \vec{x}_C$, $\vec{t}_5 = \vec{y}_C$, $\vec{t}_6 = \vec{z}_C$ (voir (1.5.1))

  et par conséquent, puisque le vecteur $\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \pi_i}$ est constant dans $R_C$ :

  $$\boxed{\frac{\partial}{\partial \pi_j}\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \pi_i} = P_{jM}\vec{\varphi}_j \times \vec{t}_i}$$ (notons que $P_{iM} = P_{jM}$)

- $\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \pi_j} = P_{jM}\vec{\varphi}_j \times \overrightarrow{O_jM}$ (voir (1.5.1)) et $\dfrac{\partial}{\partial \pi_i}\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \pi_j} = P_{jM}\left(\dfrac{\partial \vec{\varphi}_j}{\partial \pi_i} \times \overrightarrow{O_jM} + \vec{\varphi}_j \times \dfrac{\partial \overrightarrow{O_jM}}{\partial \pi_i}\right)$

  Premièrement, puisque $\pi_i$ engendre une translation, $\dfrac{\partial \vec{\varphi}_j}{\partial \pi_i} = \vec{0}$ ;

  deuxièmement, puisque $O_i \equiv O_j$, $\dfrac{\partial \overrightarrow{O_jM}}{\partial \pi_i} = \vec{0}$. Alors $\boxed{\dfrac{\partial}{\partial \pi_i}\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \pi_j} = \vec{0}}$

On peut remarquer que l'égalité de Schwarz n'est pas vérifiée. Ceci signifie que $\pi_i$ et $\pi_j$ constituent une paire non holonome de paramètres si $i \in E_T$ et $j \in E_R$. Comme précédemment, cette propriété est inscrite dans les grands déplacements ; en effet, supposons deux mouvements contraires :

- d'une part, une translation selon $\vec{x}_C$, définie par $x$, suivie par une rotation de lacet définie par un angle $\psi$
- d'autre part, la même rotation de lacet, suivie par la translation selon $\vec{x}_C$.

Il est clair que la position finale du véhicule sera différente dans les deux cas. Notons au passage que x et $\psi$, bien que non holonomes, ont ici un sens physique précis.

Dans toutes les autres situations, les paires de paramètres seraient holonomes :

- Le cas $i,j \in E_R$ correspond au paramétrage holonome habituel
- Le cas $i,j \in E_T$ est également évident : $\dfrac{\partial}{\partial \pi_j}\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \pi_i} = \dfrac{\partial}{\partial \pi_j}\left(P_{iM}\vec{t}_i\right) = P_{iM}\dfrac{\partial \vec{t}_i}{\partial \pi_j} = \vec{0}$ ;

  la relation de Schwarz est à nouveau vérifiée : le cas est holonome.
- Si la position de $G_C$ est décrite par des paramètres classiques $q_4$, $q_5$, $q_6$, alors $\dfrac{\partial}{\partial \pi_i}\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \pi_j} = \dfrac{\partial}{\partial \pi_j}\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \pi_i} = \vec{0}$ car $\vec{t}_i$ est toujours constant dans le repère galiléen.

Concernant les paires de paramètres initialement envisagées ( $j \in E_R$, $k \in E_T$), elles ne modifient pas l'expression (1.5.13) des coefficients $a_{ij}$, puisque (1.4.11) ne présente pas de dérivées partielles du second ordre. En revanche, comme $\Sigma_{[i,j,k]} = \Sigma_{[i,j]} = \Sigma_{[i,k]}$, les symboles de Christoffel (voir (1.4.12)) s'écriront :

- $$\Gamma_{i,kj} = \int_{\Sigma[i,j]} \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} . \left( \vec{\varphi}_j \times \vec{t}_k \right) dm \qquad \text{ou} \qquad \boxed{\Gamma_{i,kj} = \widehat{\varphi_j} : \overline{\overline{K}}_{ik\,Max}} \tag{1.6.3}$$

  avec $\boxed{K_{ik\,Max} = \tilde{\$}_i(O_i) . G_{ik\,Max} . \tilde{\$}_k(O_k)}$ et $\left[ \tilde{\$}_k(O_k) \right] = \begin{bmatrix} \hat{0}^T & \vec{t}_k \end{bmatrix}$

- tandis que $$\boxed{\Gamma_{i,jk} = 0} \tag{1.6.4}$$

### 1.6.2.2 Expressions détaillées pour un modèle simplifié de véhicule

Les déplacements parallèles à $\vec{z}_C$, et donc le tangage, le roulis et le pompage du véhicule, sont négligés : $\vec{z}_C = \vec{z}_g$. Afin d'étudier ce mouvement plan, on définit (cf Figure 1.6.2) :

$$\pi_1 = \int_0^t V_X d\tau , \qquad \pi_2 = \int_0^t V_Y d\tau \qquad \text{et} \qquad \pi_3 = \psi \text{ (lacet)}$$

Soit la forme matricielle du tenseur d'inertie usuel $\left[ \overline{\overline{I}}_{C,O_C} \right]_{R_C} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$

Donc le tenseur d'inertie brut est représenté par

$$\left[ \overline{\overline{\Pi}}_{CC} \right]_{R_C} = \begin{bmatrix} (B+C-A)/2 & 0 & 0 \\ 0 & (C+A-B)/2 & 0 \\ 0 & 0 & (A+B-C)/2 \end{bmatrix}$$

On définit $\overrightarrow{O_C G_C} = l_C \vec{x}_C$ et $m_C$ la masse du châssis. Le TIG du châssis est représenté par

$$\left[ \overline{\overline{G}}_{CC} \right]_{R_C} = \begin{bmatrix} \left[ \overline{\overline{\Pi}}_{CC} \right]_{R_C}(1,1) & 0 & 0 & m_C l_C \\ 0 & \left[ \overline{\overline{\Pi}}_{CC} \right]_{R_C}(2,2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left[ \overline{\overline{\Pi}}_{CC} \right]_{R_C}(3,3) & 0 \\ m_C l_C & 0 & 0 & m_C \end{bmatrix} = \left[ \overline{\overline{G}}_{ik\,Max} \right]_{R_C} \text{ (quels que soient i et k)}$$

Exemples de tenseurs cinétiques (représentation matricielle) :

$$\left[\overline{\overline{K}}_{12Max}\right]_{R_C} = \left[\overline{\overline{K}}_{21Max}\right]_{R_C}^{T} = \begin{bmatrix} 0 & m_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \left[\overline{\overline{K}}_{33Max}\right]_{R_C} = \begin{bmatrix} \left[\overline{\overline{\Pi}}_{CC}\right]_{R_C}(2,2) & 0 & 0 \\ 0 & \left[\overline{\overline{\Pi}}_{CC}\right]_{R_C}(1,1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Alors, en utilisant les équations (1.5.13), (1.6.3) et (1.6.4), on obtient les éléments pour déterminer $A_1$ par exemple :

$$a_{11} = m_C \ ; \ a_{12} = a_{13} = 0 \ ;$$
$$\Gamma_{1,11} = \Gamma_{1,12} = \Gamma_{1,13} = \Gamma_{1,21} = \Gamma_{1,22} = \Gamma_{1,31} = \Gamma_{1,32} = 0 \ ; \ \Gamma_{1,23} = -m_C \ ; \ \Gamma_{1,33} = -m_C l_C .$$

Soient $F_X$, $F_Y$ et $M_Z$ les forces généralisées agissant sur C respectivement le long de $\vec{x}_C$, $\vec{y}_C$ et autour de $(O_C, \vec{z}_C)$. Les équations du mouvement sont

$$A_1 = Q_1 \quad \Leftrightarrow \quad m_C \dot{V}_X - m_C l_C \dot{\psi}^2 - m_C V_Y \dot{\psi} = F_X$$

$$A_2 = Q_2 \quad \Leftrightarrow \quad m_C \dot{V}_Y + m_C l_C \ddot{\psi} + m_C V_X \dot{\psi} = F_Y$$

$$A_3 = Q_3 \quad \Leftrightarrow \quad C\ddot{\psi} + m_C l_C \dot{V}_Y + m_C l_C V_X \dot{\psi} = M_Z$$

Ces équations peuvent être retrouvées à l'aide des théorèmes généraux.

# 1.7 Synthèse

## 1.7.1 Résumé

Cette première partie introduit un nouveau Tenseur d'Inertie Global, exprimé sous la forme d'une matrice 4x4, qui rassemble toutes les caractéristiques inertielles : masse, moment statique (en d'autres mots : position du centre d'inertie) et tenseur d'inertie brut du second ordre. Son utilisation permet d'obtenir le modèle dynamique explicite pour une chaîne ouverte simple sous sa forme la plus factorisée, en donnant aux coefficients dynamiques $a_{ij}$ et $\Gamma_{i,jk}$ des expressions très condensées.

En outre, le cas général des liaisons complexes est envisagé au moyen des torseurs géométriques associés, écrits dans le cadre de la théorie des coordonnées homogènes.

Enfin, les expressions des symboles de Christoffel $\Gamma_{i,jk}$ sont données dans deux cas présentant des paramètres non holonomes spéciaux :

- le paramétrage des corps libres (planètes, satellites), également valable pour une toupie ou une liaison sphérique située n'importe où dans une chaîne,
- celui d'une automobile traditionnellement utilisée dans le domaine de la Dynamique du Véhicule.

## 1.7.2 Méthode

Les opérations successives sont résumées en Figure 1.7.1 : après avoir déterminé les Tenseurs d'Inertie Globaux $\overline{\overline{G}}_{ij}$ et $\overline{\overline{G}}_{ijMax}$ de façon récursive, les tenseurs cinétiques $\overline{\overline{K}}_{ij}$ et $\overline{\overline{K}}_{ijMax}$ sont calculés. Ensuite les éléments $a_{ij}$ de la matrice d'énergie cinétique (matrice de masse) et les symboles de Christoffel $\Gamma_{i,jk}$ sont déterminés, nous permettant d'écrire finalement les quantités d'accélération généralisées. Seuls les symboles de Christoffel dépendent de la nature des paires de paramètres : holonome ou non holonome.

Les TIG présentés ici peuvent à présent être utilisés pour établir une méthode de calcul sans dérivations pour engendrer les équations de sensibilité. Alors les méthodes d'optimisation seront plus rapides, ce qui est grandement demandé par l'industrie automobile de nos jours.

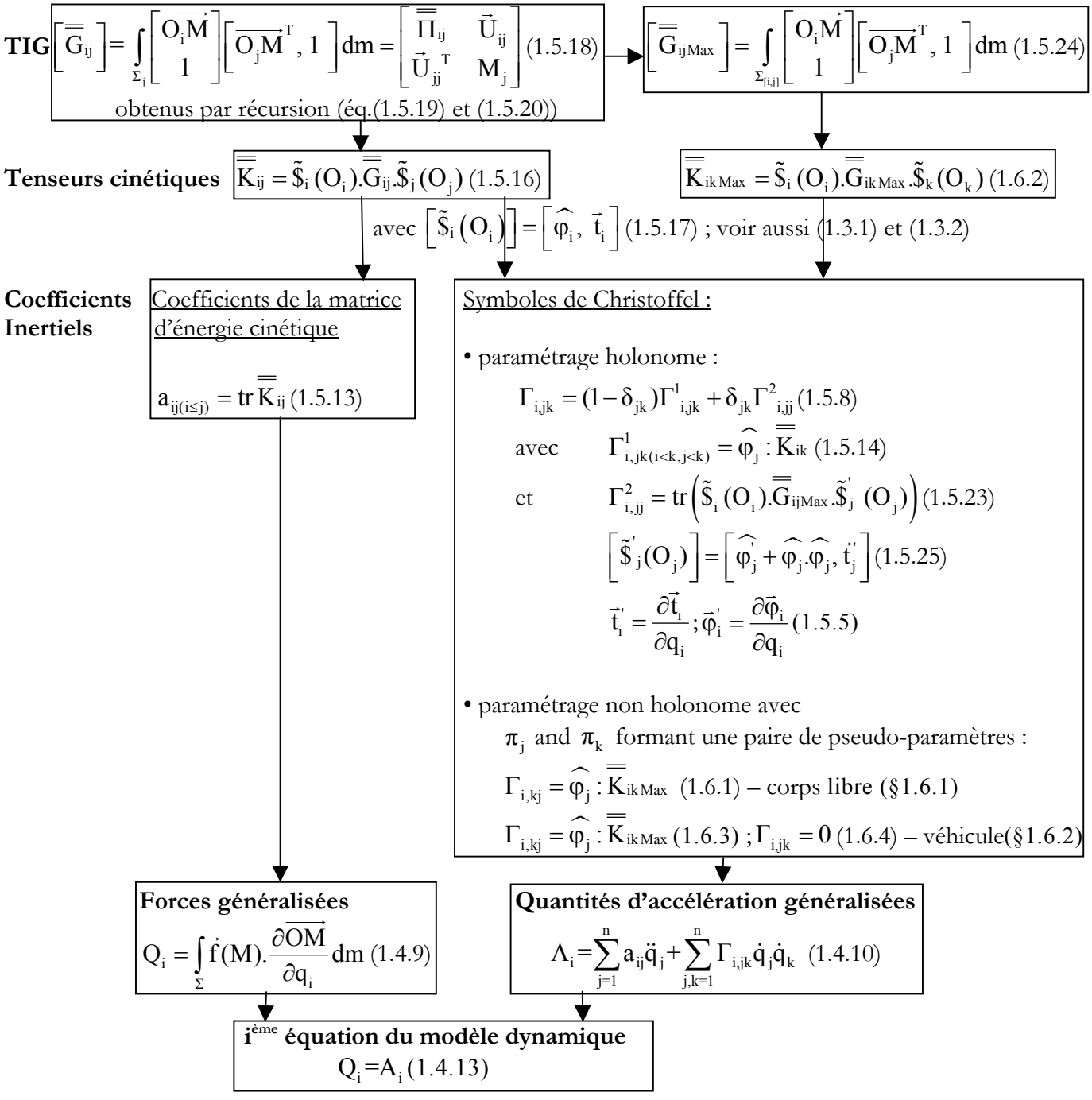



**Figure 1.7.1** Algorithme récapitulatif d'obtention du modèle dynamique

# Partie 2

# Etude de sensibilité pour les systèmes multicorps.

# Méthodes directe et adjointe.

2.1 Introduction 66

2.2 Etat de l'art 68

**2.2.1 Données du problème 68**
2.2.1.1 Terminologie – Définitions - Notations 68
*2.2.1.1.1 Coordonnées et vitesses généralisées – variables d'état 68*
*2.2.1.1.2 Paramètre de construction 69*
*2.2.1.1.3 Modèle dynamique 69*
*2.2.1.1.4 Critère 70*
*2.2.1.1.5 Contraintes et restrictions 70*
*2.2.1.1.6 Sensibilité 71*
2.2.1.2 Hypothèses fondamentales 72

**2.2.2 Utilité de l'étude de sensibilité aux paramètres 73**
2.2.2.1 Utilisation directe de la sensibilité 74
2.2.2.2 Optimisation 75
2.2.2.3 Simplifications 76
2.2.2.4 Divers 77
*2.2.2.4.1 Maillages par éléments finis 77*
*2.2.2.4.2 Automatique 77*
*2.2.2.4.3 Identification de paramètres 78*
*2.2.2.4.4 Mathématiques appliquées 78*
*2.2.2.4.5 Les problèmes de tir 78*

**2.2.3 Les différentes méthodes d'analyses de sensibilité existantes 79**
2.2.3.1 Les méthodes numériques 79
*2.2.3.1.1 Différences finies et plans d'expérience 79*
*2.2.3.1.2 Les méthodes de différentiation automatique 80*
2.2.3.2 Méthodes analytiques et semi-analytiques : directe et adjointe 81
*2.2.3.2.1 Forme du modèle dynamique de départ - formalisme d'état 82*
*2.2.3.2.2 Forme du critère 84*
*2.2.3.2.3 Conditions initiales sur la sensibilité des variables d'état 85*
*2.2.3.2.4 Description de la méthode directe 86*
*2.2.3.2.5 Description de la méthode de l'état-adjoint 88*
*2.2.3.2.6 Détermination des matrices et vecteurs dérivés 91*
*2.2.3.2.7 Pistes de résolution (intégration) des systèmes différentiels 91*
*2.2.3.2.8 Synthèse : critères de choix de la méthode semi-analytique 92*

2.3 Adaptation théorique des méthodes d'étude de sensibilité aux systèmes multicorps 96

**2.3.1 Motivations 96**

**2.3.2 Modifications concernant les deux méthodes analytiques 97**
2.3.2.1 Sensibilités fonctions du temps 97
2.3.2.2 Cas non linéaire 100
*2.3.2.2.1 Matrice de masse étendue dépendant des coordonnées généralisées 100*
*2.3.2.2.2 Traitement analytique de* $\frac{d\mathbf{A}}{dx}$ *101*

**2.3.3 Traitement du système adjoint 103**
2.3.3.1 Transformation du système adjoint en système homogène 104
*2.3.3.1.1 Fonctions et distributions 106*
*2.3.3.1.2 Point de départ : forme de l'équation (2.3.18) 106*
*2.3.3.1.3 Théorème du saut 106*

*2.3.3.1.4 Ajout de la condition (2.3.19)* *107*
*2.3.3.1.5 Conclusion* *107*
2.3.3.2 Solution combinaison linéaire des solutions pour une base de conditions finales 108
*2.3.3.2.1 Equation de départ, notations et objectifs* *108*
*2.3.3.2.2 Différentes fonctions* $\boldsymbol{\lambda}(t)$ *108*
*2.3.3.2.3 Idée* *109*
*2.3.3.2.4 Forme de la solution de (2.3.28)* *109*
*2.3.3.2.5 Evaluation de* $\mathbf{Q}_f(t)$ *111*
*2.3.3.2.6 Relation entre* $\mathbf{Q}_i(t)$ *et* $\mathbf{Q}_f(t)$ *111*
*2.3.3.2.7 Solution du système adjoint et forme de l'intégrale finale* *112*
*2.3.3.2.8 Conclusion : améliorations apportées* *112*

**2.3.4 Synthèse-bilan 113**

2.4 Etudes de cas - comparaison des méthodes dans le cas des multicorps 116

**2.4.1 Exemples académiques : systèmes masse-ressort-amortisseur 117**
2.4.1.1 Préliminaires 117
*2.4.1.1.1 Avertissement : sensibilités étudiées* *117*
*2.4.1.1.2 Premiers essais* *117*
2.4.1.2 Système masse-ressort-amortisseur linéaire 118
*2.4.1.2.1 Présentation du système et des sensibilités recherchées* *118*
*2.4.1.2.2 Conditions initiales de sensibilité* *119*
*2.4.1.2.3 Exemple de résultats en "mode formel"* *120*
*2.4.1.2.4 Modes numérique et paramétrique* *122*
*2.4.1.2.5 Rapidité comparée des deux méthodes pour plusieurs sensibilités* *124*
2.4.1.3 Systèmes masse-ressort-amortisseur complexes 125

**2.4.2 Comparaison de l'efficacité des deux méthodes : double-pendule orthogonal 126**
2.4.2.1 Motivations et objectifs de l'étude 126
2.4.2.2 Caractéristiques de l'étude 127
*2.4.2.2.1 Rappel du modèle* *127*
*2.4.2.2.2 Critères et paramètres de construction* *128*
*2.4.2.2.3 Procédure de comparaison* *128*
2.4.2.3 Résultats et analyse 129
*2.4.2.3.1 Sensibilité de l'énergie cinétique* *129*
*2.4.2.3.2 Sensibilité de l'intégrale de l'énergie cinétique* *132*
2.4.2.4 Conclusion : comparaison des deux méthodes pour les multicorps (et la MMC) 133

**2.4.3 Exemple dynamique du véhicule : modèle roulis-lacet-dérive 134**
2.4.3.1 Description du modèle [BROS06] 134
2.4.3.2 Caractéristiques de l'étude 137
2.4.3.3 Forme et traitement des résultats obtenus 138
*2.4.3.3.1 Les différentes valeurs " mesurées"* *138*
*2.4.3.3.2 Discussion : dérivée logarithmique* *140*
2.4.3.4 Résultats et analyse pour la vitesse de lacet 140
2.4.3.5 Résultats et analyse pour l'accélération latérale (critère non intégral) 143
2.4.3.6 Résultats et analyse pour le cap (critère intégral) 145
2.4.3.7 Conclusion 146

2.5 Conclusion 147

# 2.1 Introduction

L'étude de sensibilité d'un système quel qu'il soit vise à quantifier l'influence de la variation de paramètres relatifs au système sur l'évolution de celui-ci. Ce type d'étude peut être mené sur tout type de système représentable de manière mathématique. On peut aussi bien s'intéresser à l'influence de la pluviométrie sur le rendement d'un champ de maïs, qu'à celle du tabagisme sur l'espérance de vie ou bien dans les disciplines du génie mécanique à l'influence de la masse d'un piston sur le rendement d'un moteur, par exemple. En revanche, les méthodes de calcul seront très différentes d'un type de problème à l'autre.

Dans l'ingénierie moderne notamment, il est de première importance de prévoir dès la conception l'influence d'une variation d'un paramètre du système (longueur, masse, inertie, force, couple) sur son comportement (mouvement ou stabilité par exemple), afin d'économiser des prototypes, du temps et de l'argent.

***Objectif :***

L'objectif de cette partie est d'établir, en s'appuyant sur la littérature, une **méthode d'étude de la sensibilité aux paramètres de conception d'un système multicorps** (et d'un véhicule en particulier).

***Plan :***

Cette étude débute par une synthèse bibliographique thématique (cf §2.2), abordant successivement la terminologie et les hypothèses adoptées dans la littérature, l'intérêt pratique de la sensibilité et les méthodes utilisées.

Puis on se propose d'améliorer les deux méthodes analytiques (directe et adjointe) et de les adapter aux spécificités des systèmes multicorps (non linéarités et sensibilités en fonction du temps) (cf §2.3).

Enfin, au paragraphe 2.4, trois applications de complexité croissante, utilisant les logiciels programmés sous Maple et/ou Matlab sont présentées : les systèmes masse-ressort-amortisseur permettent de valider les différents programmes, l'étude du double-pendule orthogonal vise à comparer l'efficacité des deux méthodes, et enfin le modèle roulis-lacet-dérive d'un véhicule automobile montre l'utilisation pratique de la sensibilité (méthode directe) pour sélectionner les paramètres influents.

***Avertissement : notations***

Cette seconde partie fait apparaître des matrices (ou "tableaux"), non associées à des tenseurs (êtres intrinsèques) ou des applications linéaires ; à la différence des tenseurs du second ordre apparaissant dans la première partie, elles seront notées en gras, et sans les deux barres. Ce sera le cas par exemple de la matrice de masse étendue $\mathbf{A}$, de la matrice jacobienne $\mathbf{J}$, ou de $\mathbf{Q_f}$.

Cette remarque concerne également les matrices-colonne (ou "listes") : à la différence des vecteurs, tenseurs du premier ordre, les colonnes seront notées en gras et sans flèche. Toutefois, le vocable "vecteur" sera tout de même employé pour ces listes, car cet abus de langage est largement répandu et compris dans la communauté des mécaniciens. Citons l'exemple du vecteur des coordonnées généralisées $\mathbf{q}$ ou du vecteur d'état $\mathbf{y}$.

Enfin, matrices et "vecteurs" ne seront pas mis entre crochets lorsque l'on détaillera leurs composantes, sans indication de base.

# 2.2 Etat de l'art

Le tri des références obtenues lors de la recherche sur "l'étude de sensibilité" a fait apparaître la diversité des domaines scientifiques concernés : mécanique (des milieux continus, des vibrations, des systèmes multicorps), génie électrique, génie chimique, mathématiques appliquées (statistiques des mesures)…

Une synthèse thématique qui se veut aussi complète que possible a été faite, avec différents objectifs successifs :

- Tout d'abord, la terminologie et les hypothèses fondamentales adoptées par différents auteurs sont établies ;
- Puis les nombreuses utilités pratiques du calcul de sensibilités relevées dans la littérature sont détaillées en essayant de les classer par domaine ;
- Enfin, de façon transversale par rapport à ces domaines, les différentes méthodes employées sont décrites, notamment les deux méthodes analytiques sur lesquelles se base notre travail : la méthode directe et la méthode de l'état-adjoint.

## 2.2.1 Données du problème

### 2.2.1.1 Terminologie – Définitions - Notations

L'objectif de ce paragraphe est de définir proprement les termes et notations employés dans les parties 2 et 3 de cette thèse, afin d'éviter des malentendus entre spécialistes de domaines différents, n'utilisant pas le même vocabulaire.

Comme annoncé plus haut, on se propose de calculer la sensibilité d'un critère, fonction des coordonnées et vitesses généralisées, par rapport à un paramètre de construction ; les termes et expressions soulignés sont détaillés ci-après.

#### *2.2.1.1.1 Coordonnées et vitesses généralisées – variables d'état*

Notées $q_i$ pour i de 1 à n (n étant le nombre de degrés de liberté), les coordonnées généralisées sont les paramètres du mouvement ou "inconnues cinématiques", en paramétrage relatif direct : chaque solide est repéré par rapport au précédent dans la chaîne cinématique ouverte (cf hypothèses au §2.2.1.2), à la différence des paramétrages :

- absolu où ils sont tous repérés par rapport au repère galiléen [SER98a],
- relatif indirect où ils peuvent être repérés par rapport à un autre solide de la chaîne ramifiée [FAY94].

Les vitesses généralisées sont définies par : $\boxed{\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}}$.

Coordonnées et vitesses généralisées définissent ce qui est fondamental en mécanique [BROS97] ; en effet, leur connaissance à un instant quelconque permet de déterminer le mouvement du système à tout instant. Regroupées par conséquent sous l'expression "variables d'état" $y_i$ avec i de 1 à 2n, elles constituent le "vecteur d'état" $\mathbf{y}$ (dimension 2n), permettant de transformer le modèle dynamique de n équations différentielles du second ordre en 2n équations différentielles du 1er ordre (cf §2.2.3.2.1).

En mécanique des milieux continus (MMC), et en particulier dans les problèmes d'optimisation de la mise en forme, dans lesquels l'analyse de sensibilité revêt une grande importance (cf §2.2.2.2), les variables d'état sont les déplacements et vitesses nodaux du maillage par éléments finis [LAR03].

#### *2.2.1.1.2 Paramètre de construction*

Le paramètre de construction ou de conception x est le paramètre dont on étudie l'influence : il peut s'agir de toute grandeur physique constante apparaissant dans le modèle dynamique, autre que les coordonnées, vitesses et accélérations généralisées :

- grandeurs géométriques (longueurs), massiques (masses m), inertielles (moments d'inertie A,B,C et produits d'inertie -D,-E,-F), raideurs k et coefficients d'amortissements c, grandeurs qui sont les plus courantes dans les systèmes multicorps [EBE07] et qui seront étudiées dans ce travail ;

- grandeurs géométriques ou cinématiques imposées : angles ou vitesses constants ;

- couples et forces de commande.

Dans la simulation du forgeage, Laroussi utilise encore comme paramètres influents la vitesse de forgeage, le coefficient de frottement, la température des outils, les dimensions du lopin [LAR03]…

Le calcul de sensibilité ne traitant qu'un paramètre à la fois [HAF92, BROO87, SHA87], il n'est pas utile de définir un "vecteur" (ou plutôt "colonne", cf remarque ci-dessus au §2.1) pour "ranger" les différents $x_j$ étudiés successivement.

#### *2.2.1.1.3 Modèle dynamique*

Les systèmes multicorps étudiés sont en boucle ouverte (cf hypothèses au §2.2.1.2) et les inconnues dynamiques de liaison ne sont pas recherchées : le modèle dynamique est donc uniquement constitué des équations du mouvement (Ordinary Dif-

ferential Equations pour les variables d'état), non linéaires par rapport aux coordonnées, vitesses et accélérations généralisées dans de nombreux systèmes multicorps.

Le pendant en MMC est la formulation forte (locale) puis faible (intégrée) des équations de continuité et de "l'équilibre dynamique", qui traduisent les principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement respectivement [LAR03].

#### *2.2.1.1.4 Critère*

Ce terme désigne la fonction ou fonctionnelle des variables d'état dont on étudie la sensibilité. Le critère $g$, toujours présenté sous forme d'une intégrale $\overline{g}$ (cf §2.2.3.2.2), possède une signification physique relative aux performances du système étudié. Il est synonyme des expressions "critère d'optimisation", "fonction objectif" [BEH98], "fonction coût" [LAR03] ou encore "indice de performance" [BROO97], l'objectif étant souvent une utilisation de la sensibilité pour l'optimisation :

- Dans le domaine des systèmes articulés, g peut être issu d'un critère de stabilité ; sur un véhicule automobile, Eberhard étudie quant à lui l'accélération verticale du conducteur, le déplacement maximal du moteur, le débattement maximal des suspensions et la force minimale appliquée au pneumatique [EBE07] ;

- Dans le domaine des vibrations, g peut correspondre aux valeurs propres [BROO87, SHA87] ;

- En simulation et optimisation de la mise en forme, Laroussi utilise par exemple comme fonction coût l'énergie totale de mise en forme, permettant de calculer l'effort maximal de forgeage, pour optimiser un procédé et forger la pièce désirée sur une presse de faible capacité [LAR03].

#### *2.2.1.1.5 Contraintes et restrictions*

Ces termes ne seront pas utilisés dans ce travail mais il est utile de préciser leur sens afin de ne pas les confondre notamment avec la notion de critère définie ci-dessus.

Une contrainte désigne :

- toute équation vérifiée par les coordonnées généralisées et leurs dérivées par rapport au temps [BROS97] : équations du mouvement (cf §2.2.1.1.3), équations dynamiques [LAR03], équations de liaison dans le cas des systèmes à boucles fermées [AND02, AND04, ARN95, DAT96, EBE07, FAY02b, HAU97, HSU02, SER98a, SER98b] - non considérées ici (cf hypothèses au §2.2.1.2).

- une inéquation impliquant un critère, par exemple $g = c - \text{flèche} \geq 0$ lorsque l'objectif est de limiter la flèche à la valeur c en bout de poutre encastrée-libre [HAF92]. Dans ce cas, certains auteurs parlent plutôt de "restriction" [MAL92].

*2.2.1.1.6 Sensibilité*

Comme annoncé en introduction (cf §2.1), la sensibilité ou "coefficient de sensibilité dynamique" [TOM63, TOM72] définie par $\boxed{u = \frac{dg}{dx}}$ quantifie l'influence de petites variations dx du paramètre de conception (ou de commande) x sur le critère g (cf **Figure 2.2.1**) ; dx tend vers zéro mais pour un modèle linéaire, Brooks estime qu'une variation de 20% d'un paramètre x a encore du sens [BROO87]. Notre objectif est d'obtenir cette sensibilité en fonction du temps.

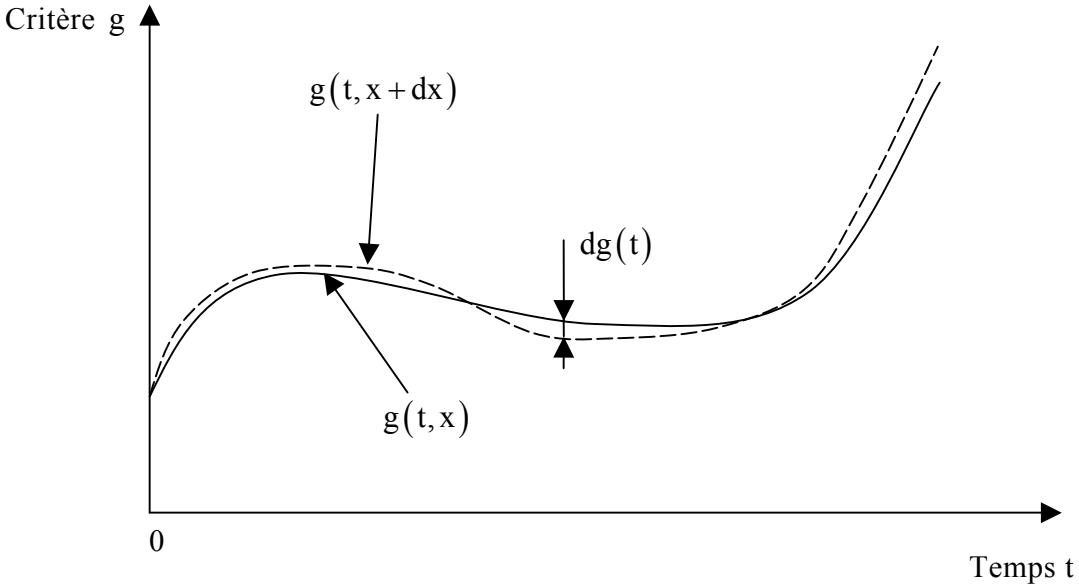



**Figure 2.2.1** Influence d'une variation de x sur g (t)

A noter que :

- g peut être simplement une variable d'état, "variable de sortie" sur laquelle on étudie directement l'influence de x ;

- certains auteurs parlent de sensibilité par rapport aux coordonnées généralisées et leurs dérivées [SER98a, SOH01] ; la détermination de ces quantités est en effet une étape lors de la mise en œuvre des méthodes analytiques développées dans ce travail, mais elle ne représente pas une fin en soi (cf algorithme Figure 2.3.3).

Enfin, Haftka [HAF92] et Eberhard [EBE07] définissent la dérivée logarithmique :

$$\boxed{\frac{d_l g}{dx} = \frac{d(\log g)}{d(\log x)} = \frac{dg/g}{dx/x}} \qquad (2.2.1)$$

qui permet de comparer l'influence de plusieurs x sur g en relativisant par rapport à leur valeur. Haftka souligne la difficulté de calculer précisément une dérivée logarithmique petite, mais aussi l'inutilité de ce calcul puisque l'influence sur le processus d'optimisation est de toute manière faible. La discussion sur ce mode de calcul est approfondie à la fin de l'exemple de dynamique du véhicule (cf §2.4.3.3).

#### 2.2.1.2 Hypothèses fondamentales

1. Le modèle dynamique est supposé connu de façon formelle, afin de pouvoir dériver [MAS06]. Cependant, en raison de sa complexité, sa résolution doit en général être menée de façon numérique, comme le confirme Eberhard [EBE07]. On ne connaîtra donc l'évolution des variables d'état en fonction du temps que de façon discrète (et non sous forme de fonctions analytiques).

2. Les systèmes multicorps étudiés dans ce travail sont des chaînes ouvertes.

3. A l'instar d'autres auteurs [EBE07], les paramètres de construction donnés sont supposés indépendants :

ainsi $$\boxed{\frac{dx_i}{dx_j} = 0} \qquad \forall i, j \qquad (2.2.2)$$

or $$\boxed{\frac{dg}{dx_j} = \frac{\partial g}{\partial x_j} + \sum_i \frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dx_j} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial g}{\partial y_k}\frac{dy_k}{dx_j}}$$

donc $$\boxed{\frac{dg}{dx_j} = \frac{\partial g}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial g}{\partial y_k}\frac{dy_k}{dx_j}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{dg}{dx_j} = \frac{\partial g}{\partial x_j} + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}} \cdot \frac{d\mathbf{y}}{dx_j}} \qquad (2.2.3)$$

La difficulté du calcul de sensibilité réside évidemment dans le fait que les variables d'état, ne pouvant être obtenues, en général, que numériquement, dépendent également des paramètres de construction [EBE07].

En pratique, il est évident que la masse d'un solide et un de ses moments d'inertie par exemple ne sont pas indépendants. Deux cas peuvent alors se présenter :

- si le moment d'inertie A est connu de façon formelle (cas académiques), il faut le remplacer par son expression (faisant intervenir la masse m) dans les équations ; la sensibilité à l'inertie sera alors directement déduite de la sensibilité à la masse par l'équation :

$$\boxed{\frac{dg}{dA} = \frac{dg}{dm}\frac{\partial m}{\partial A}} \qquad (2.2.4)$$

- si, comme dans la plupart des cas, le moment d'inertie n'est pas connu de façon formelle, le principe de superposition des effets s'applique à condition de rester en petites variations [BROO87, TOM63] :

$$\boxed{dg = \sum_i \frac{dg}{dx_i} dx_i} \qquad (2.2.5)$$

En conclusion de cette hypothèse d'indépendance des paramètres de construction lors du calcul de la sensibilité par rapport à l'un d'entre eux, soulignons que l'expression de la sensibilité par la "dérivée droite" $\frac{dg}{dx_j}$ met en évidence le fait qu'elle quantifie l'influence totale de $x_j$ sur le critère $\bar{g}$. Cependant, sans être une dérivée partielle - puisque qu'interviennent aussi dans le calcul les sensibilités des variables d'état contenues dans $\frac{dy}{dx_j}$ (cf équation (2.2.3))-, la sensibilité est le résultat d'une dérivation par rapport à un paramètre, les autres $x_i$ et les conditions initiales (cf aussi §2.2.3.2.3 et §2.4.1.2.2) étant considérées constantes. D'une certaine façon, la sensibilité peut donc être considérée sous deux angles : celui d'une dérivée totale ou celui d'une dérivée partielle.

### 2.2.2 Utilité de l'étude de sensibilité aux paramètres

Ce paragraphe expose les différentes utilisations de sensibilités observées dans la littérature :

- Les sensibilités calculées présentent souvent une utilité directe ; des exemples issus du domaine de la dynamique du véhicule, des vibrations ou de la biomécanique sont évoqués.

- Mais l'analyse de sensibilité représente surtout la part prépondérante d'une démarche d'optimisation, quel que soit le problème considéré (systèmes multicorps ou optimisation de la mise en forme en MMC).

- Déterminer les sensibilités aux paramètres peut également servir à simplifier le modèle dynamique.

- Enfin, certains aspects s'éloignent quelque peu du sujet de ce travail, soit par les hypothèses, soit par les outils mis en œuvre, mais font intervenir le terme de sensibilité ; il est important de cerner par exemple les problèmes de sensibilité au maillage éléments finis, les applications en automatique, en mathématiques appliquées (statistiques), l'identification de paramètres ou les problèmes de tir, afin de ne pas faire fausse route dans la recherche bibliographique concernant l'étude de sensibilité.

#### 2.2.2.1 Utilisation directe de la sensibilité

Dans certains cas, les valeurs de sensibilité servent directement à tirer des conclusions, sans nécessiter de traitement supplémentaire :

1. Elles permettent de définir une stratégie de correction ("optimisation" au sens "amélioration") du comportement *a priori* : elles mettent en évidence les paramètres les plus influents, c'est-à-dire ceux sur lesquels il est le plus efficace d'agir, le signe indiquant même dans quel sens agir [LAR03, SHA87] ; toutefois, une étude de coût peut alors se révéler nécessaire afin de faire les efforts de façon judicieuse : par exemple, il peut se révéler très cher de modifier légèrement le paramètre le plus influent, même si les bénéfices en seraient les plus grands.

2. Au contraire, si le comportement est jugé satisfaisant, les grandeurs les plus influentes devront être maîtrisées en terme de variance (dispersion) pour éviter des écarts préjudiciables de comportement : mais là encore, avant d'être porté, l'effort de maîtrise des tolérances de fabrication devra être mis en relation avec une étude de coût.

La littérature présente des exemples issus de divers domaines :

- En simulation des mécanismes, lors de l'intégration des systèmes différentiels issus de la méthode de Lagrange, Arnold calcule les sensibilités des coordonnées généralisées et des multiplicateurs de Lagrange par rapport à une perturbation numérique des entrées (par exemple, erreur d'arrondi) [ARN95].

- En dynamique du véhicule, Eberhard mène une étude de sensibilité afin de déterminer quels paramètres doivent être mesurés de la façon la plus fine ; en effet, dans les applications d'ingénierie, l'hétérogénéité des corps oblige à déterminer leurs caractéristiques par la mesure et non par le calcul [EBE07].

- Dans le cadre de l'étude des vibrations, les sensibilités des modes propres (pulsations et vecteurs propres) permettent notamment de savoir comment réduire les amplitudes aux sièges avant des véhicules, d'évaluer l'effet de l'introduction d'amortissement dans un système non amorti [HAF92] ou encore d'étudier l'évolution de la stabilité d'un hexapode en fonction de la longueur de ses six "jambes" constituées de rubans [ARI07]. Enfin, Sharp et Brooks évaluent les sensibilités des parties imaginaire (fréquence) et réelle (amortissement) des valeurs propres pour pouvoir les modifier à partir de petites perturbations des paramètres influents sélectionnés [BROO87, SHA87].

- Le corps humain, ensemble complexe, peut être considéré comme un système multicorps, sur lequel influent un grand nombre de paramètres de conception. Ciglaric emploie la méthode directe (cf §2.2.3.2.4) afin d'évaluer les diverses influences sur l'accélération de la tête [CIG00] ; Fregly a développé expérimentalement un modèle

d'articulation de genou, sur lequel il mène des études de sensibilité et d'optimisation de prothèses [FRE03].

#### 2.2.2.2 Optimisation

L'exemple précédent, comme d'ailleurs celui examiné par Sohl [SOH01], en biomécanique également, met en évidence la suite logique au calcul de dérivées de l'analyse de sensibilité : l'optimisation. Ce paragraphe s'intéresse aussi bien aux systèmes de solides indéformables que déformables.

Dans le domaine de la mécanique, la référence de l'analyse de sensibilité s'intitule "Elements of structural optimization" de Haftka et Gürdal [HAF92], ouvrage de mécanique des structures. En effet, l'étude de sensibilité est avant tout l'étape centrale d'une stratégie d'optimisation (entre celle de formulation et celle d'approximation) [HAF92, SER98a], et surtout la plus coûteuse en calculs [BASS99]. Haftka estime même que le traitement judicieux de la phase d'analyse de sensibilité est plus important que le choix de la méthode d'optimisation elle-même ! Par conséquent, les chapitres 7 et 8 de [HAF92] lui sont consacrés, traitant de l'analyse de sensibilité respectivement des systèmes discrets et du point de vue variationnel ; abordant les cas statique (sensibilité du déplacement), vibratoire (sensibilité des modes propres, cf §2.2.2.1 ci-dessus) et transitoire (intervention du temps), ces chapitres sont repris dans de nombreux travaux universitaires comme [BEH98] ou industriels comme [EYM96].

Concrètement, on peut distinguer deux utilités à l'analyse de sensibilité dans le cadre de l'optimisation :

***1. Sélection des paramètres influents***

Comme l'écrit Serban dans [SER98a], une analyse de sensibilité préliminaire permet de déterminer de façon indiscutable les paramètres les plus influents, qu'il sera donc intéressant de faire varier afin d'optimiser le critère d'optimisation. Actuellement, dans de nombreux travaux, ces paramètres sont choisis de façon intuitive, comme dans [MAS06] ou [PORTA07], thèse en cours dans l'équipe. A noter que cette utilisation directe des sensibilités n'entre pas *stricto sensu* dans l'optimisation, et pourrait aussi être évoquée au §2.2.2.1 précédent.

***2. Calcul du gradient***

Au sein de l'algorithme d'optimisation à présent, Eberhard estime qu'il n'est pas trivial de trouver une meilleure proposition des paramètres de construction pour la boucle d'optimisation suivante et obtenir un système amélioré. Une des stratégies possibles est de calculer le gradient du critère d'optimisation par rapport aux paramètres de construction, constitué des termes $\frac{d\overline{g}}{dx_j}$ donnés par (2.2.3) [EBE07, GHO97, LAR03].

Dans de nombreuses méthodes d'optimisation (Cauchy, BFGS…), le gradient permet en effet de définir une direction de recherche, nommée direction de "descente" [BEH98].

En dynamique du véhicule par exemple, Almeida et Kadmiri quantifient "l'efficacité" du comportement, c'est-à-dire "sa capacité à maintenir une réponse fidèle à la consigne donnée par le conducteur", par l'accélération transversale au premier coup de volant, qu'il est souhaitable de maximiser [ALM07, KAD07] ; Barbié et Pastorino cherchent, eux, à minimiser la distance d'arrêt et la déviation finale dans un freinage μ-split, c'est-à-dire en adhérence différentielle [BAR07, PAST07]. Dans ces travaux, les paramètres influents, choisis de façon empirique, sont les pressions de freinage différentielles (gauche-droite) - paramètres prépondérants -, les braquages avant-arrière et les raideurs de barres anti-roulis avant et arrière (dans [BAR07, PAST07] seulement). L'algorithme BFGS par exemple calcule de façon systématique les dérivées (matrice jacobienne) et même les dérivées secondes (hessien) pour déterminer les directions de recherche à chaque boucle [BAR07]. Cependant, ces méthodes à gradient restent beaucoup plus lentes que des méthodes sans gradient comme le simplex [ALM07] ou les essaims particulaires [BAR07], méthode en partie statistique particulièrement efficace. En conclusion, il y a bien un besoin d'amélioration du calcul systématique de dérivées que constitue l'analyse de sensibilité ([HAF92], cf ci-dessus).

#### 2.2.2.3 Simplifications

Dans l'étude industrielle évoquée en introduction [EVR03, DEB03a,b,c], un des objectifs était de justifier de manière indiscutable des simplifications usuellement pratiquées. Les simplifications qui ont été validées (numériquement) peuvent être regroupées en deux catégories :

1. dans certains cas, des termes peuvent être négligés devant d'autres (par exemple l'inertie des masses non suspendues par rapport à l'inertie du véhicule entier) ;

2. dans d'autres cas, des termes peuvent être considérés comme constants (par exemple la position des centres de roue par rapport à la caisse).

L'étude de sensibilité ne peut être utilisée dans le premier cas : une sensibilité quantifie l'influence d'une variation et non l'importance d'un terme dans un total ; or un paramètre ou un terme peut être relativement important dans un résultat, mais sa variation peut avoir des conséquences moindres que celle d'un autre terme.

En revanche, dans le second cas, il suffit de calculer la sensibilité par rapport au terme souhaité constant (en le considérant comme tel) : si elle est faible, une variation de ce terme n'aura pas d'influence sur le résultat final, il peut donc être considéré comme constant et la simplification est validée. Cette stratégie peut d'ailleurs être employée pour tout autre modèle, pas nécessairement de système multicorps.

#### 2.2.2.4 Divers

Il est utile de donner quelques éléments sur les problématiques scientifiques suivantes, dans lesquelles l'analyse de sensibilité est importante, en regard du nombre élevé de références trouvées dans la littérature. Cependant, même s'il est intéressant de constater que des méthodes et des termes se retrouvent dans notre étude, ces problématiques ne nous concernent pas directement ici : en effet, sont employés dans ces travaux des outils spécifiques (bloc-diagrammes par exemple, cf §2.2.2.4.2) ou des méthodes numériques ou statistiques qui ne nous semblent pas les plus intéressantes dans notre travail, dans lequel le modèle est entièrement connu (cf introduction §2.1 et hypothèses au §2.2.1.2).

A noter que finalités et méthodes sont souvent intimement liées : certaines remarques de ce paragraphe auraient également pu apparaître au paragraphe 2.2.3 consacré aux méthodes.

##### *2.2.2.4.1 Maillages par éléments finis*

Dans les méthodes d'approximation par éléments finis, on souhaite rendre les résultats indépendants du choix du maillage, ce qui motive des calculs de sensibilité au maillage : une des méthodes employées est notamment celle du gradient conjugué. Des techniques numériques existent ensuite pour rendre les résultats approchés insensibles au maillage.

En outre, dans le domaine industriel, des méthodes de recalage paramétrique permettent de corriger le modèle éléments finis en fonction des résultats de mesure en agissant sur les coefficients élastiques [FIC89]. Le recalage est abordé par une procédure itérative avec réactualisation de la matrice de sensibilité à chaque étape : cette réactualisation utilise des techniques de sensibilité au premier ordre et non une réanalyse complète du problème, plus coûteuse.

##### *2.2.2.4.2 Automatique*

Motivée par l'étude de la stabilité, l'idée de la méthode directe (cf §2.2.3.2.4) est issue de [TOM63], ouvrage-référence en automatique et dans les systèmes de contrôle plus précisément. Mais, comme ensuite dans [TOM72] et [LJU99], les outils employés sont spécifiques à l'automatique théorique (schémas-bloc) et expérimentale. A noter que l'analyse de sensibilité est aussi utilisée dans les systèmes discrets [CAS99].

Plus récemment, le logiciel Diffedge utilise le calcul formel pour calculer le gradient d'un modèle Simulink par rapport aux paramètres en une simulation : s'appuyant sur Maple, il différentie des schémas-blocs entiers [MAS06].

Citons deux exemples d'utilité du calcul de sensibilité dans ce domaine : lors de l'étude d'un filtre électronique, une grande sensibilité de la phase par rapport à une résistance pousse à diminuer l'intervalle de tolérance de cette dernière [TOM63] ; de la même façon, la sensibilité permet d'étudier les conséquences éventuelles de la dégradation de la précision d'un capteur [MAS06]. On constate que ces applications auraient aussi pu être insérées au §2.2.2.1, les valeurs de sensibilité calculées ou mesurées donnant directement des indications exploitables.

#### *2.2.2.4.3 Identification de paramètres*

Selon Haftka, il est impossible de connaître tous les paramètres d'une structure (propriétés des matériaux, charges, dimensions…) : la sensibilité à la réponse aux petites variations des paramètres est alors essentielle pour calculer la variation statistique de la réponse de la structure, mais aussi pour mettre au point le modèle et trouver des paramètres manquants [HAF92].

Des méthodes de sensibilité basées sur des essais et leur exploitation statistique permettent :

- d'obtenir des valeurs de forces actionnant les solides qui modélisent le corps humain [KRA05] ;
- d'identifier les caractéristiques non linéaires d'éléments d'absorption d'énergie par la méthode de recherche aléatoire du recuit simulé, puis de les intégrer dans des modèles multicorps [BON96].

#### *2.2.2.4.4 Mathématiques appliquées*

A la différence de notre cas (cf hypothèses au §2.2.1.2), certains processus ne peuvent être formalisés par une description mathématique classique, essentiellement dans le génie chimique ou l'étude des populations ; étudier l'influence d'une variation de paramètre passe alors par des méthodes statistiques (probabilistes) telles Monte-Carlo, traitant des séries de mesures expérimentales ; le chef de file de ce domaine de recherche important est Saltelli [SAL00, SAL04, SAL05].

#### *2.2.2.4.5 Les problèmes de tir*

Enfin, dans la littérature, la méthode de l'état-adjoint (cf §2.2.3.2.5) apparaît dans les "problèmes de tir" [GAY04], dénommés ainsi car issus des problèmes d'artillerie : il s'agit de déterminer les différentes conditions initiales (inclinaison du

canon…) pour atteindre l'objectif. Par conséquent, les théories mises en œuvre dans ces problèmes de tir sont inexploitables dans notre travail pour deux raisons :

- L'objectif est de déterminer les conditions initiales manquantes, en calculant les corrections à apporter aux valeurs d'essai prises comme conditions initiales ; bien que ce calcul soit un calcul de dérivée ou de variation, il ne s'agit pas de déterminer des sensibilités.

- Bien qu'appelée méthode adjointe car certains principes sont communs avec la méthode analytique du même nom développée ici (cf §2.2.3.2.5), des différences importantes surgissent : par exemple, le système de sensibilité, dérivé des équations du mouvement par rapport à x, est remplacé par des équations "variationnelles" qui sont les dérivées du modèle par rapport aux coordonnées généralisées (et non par rapport à des paramètres de conception).

### 2.2.3 Les différentes méthodes d'analyses de sensibilité existantes

Certaines méthodes ont déjà été brièvement évoquées au paragraphe précédent car méthodes et finalités sont très liées. Il est évident que la méthode choisie dépend aussi des spécificités du domaine de la mécanique concerné et du degré de connaissance du modèle initial. Il est rappelé que dans ce travail, le modèle dynamique du système multicorps (équations différentielles du mouvement) est connu (cf hypothèses au §2.2.1.2) ; par conséquent, les méthodes purement statistiques traitant des séries de mesures sans modèle connu (cf §2.2.2.4.4) ne seront pas détaillées ici. On remarquera simplement que la méthode de Monte-Carlo est parfois employée dans le génie mécanique comme référence de comparaison : Masse l'estime fastidieuse par rapport à son logiciel de différentiation automatique Diffedge (cf §2.2.2.4.2), qui différentie un modèle au cours d'une simulation de 5 secondes, alors que Monte-Carlo doit effectuer 600 tirages (30 minutes) pour le même résultat [MAS06].

Tout d'abord sont présentées les méthodes numériques, ainsi que leurs limites, relevées dans la littérature (cf aussi l'introduction §2.1). Ces dernières expliquent le choix de méthodes analytiques (et semi-analytiques) dans ce travail, nommées ainsi bien qu'elles comportent inévitablement une part de calcul numérique en raison de la complexité des modèles.

#### 2.2.3.1 Les méthodes numériques

##### *2.2.3.1.1 Différences finies et plans d'expérience*

A l'heure actuelle, dans l'industrie automobile notamment, mener une analyse de sensibilité consiste souvent à faire des simulations en nombre important, pour des

ensembles de paramètres légèrement différents à chaque fois [BROO87], puis de traiter les résultats par des méthodes purement numériques :

- La très populaire méthode des différences finies [HAF92, BEH98, SER98a] permet de calculer les dérivées approchées d'une fonction discrète : les différences finies centrées ont par exemple été utilisées pour valider le calcul de sensibilité du système masse-ressort-amortisseur (cf§2.4.1.2.3) :

$$\boxed{\frac{dg}{dx}(t,x) = \frac{g(t,x+\Delta x) - g(t,x-\Delta x)}{2\Delta x}} \text{ avec } \Delta x \text{ petit} \qquad (2.2.6)$$

  Cependant le choix de l'incrément de perturbation est primordial pour ne pas aboutir à des résultats totalement erronés [LAR03, SER98a] ; c'est le "dilemme de la taille du pas" [HAF92] :
  1) Un pas trop grand augmente l'erreur de troncature (termes négligés dans le développement de Taylor) [HAF92], problème accentué pour des systèmes non linéaires [EBE07] ;
  2) Un pas trop petit augmente l'erreur de conditionnement [HAF92] due aux arrondis [EBE07], qui peut même devenir discontinue et engendrer des oscillations [HAF92].

  Cette méthode place donc l'utilisateur non numéricien devant des problèmes numériques délicats.

- Les plans d'expérience permettent de réduire le nombre de séries de simulations systématiques, par une stratégie pouvant être déterminée de façon statistique. A noter que les plans d'expérience s'appliquent aussi lorsque le modèle n'est pas connu.

Ces études paramétriques sont donc à proscrire [BROO87, MAS06] : le nombre de simulations ou d'essais est conséquent, donc l'analyste est noyé par la surabondance d'informations [BROO87] ; mais surtout, ces méthodes d'approximation numérique fournissent par définition des résultats moins précis que les méthodes analytiques ou semi-analytiques suivantes, choisies pour la suite de cette thèse.

#### *2.2.3.1.2 Les méthodes de différentiation automatique*

Entièrement numériques car fournissant des codes Fortran à partir de codes Fortran, elles sont très précises, mais très coûteuses en temps de calcul (dix fois plus lentes que les méthodes semi-analytiques du paragraphe 2.2.3.2 suivant) ; Laroussi ne les estime adaptées qu'aux codes industriels, et seulement si le nombre de paramètres de construction est supérieur à sept. A souligner qu'on y retrouve une méthode directe et une méthode adjointe [LAR03]. Quant à Eberhard, il propose de combiner les méthodes adjointes (cf §2.2.3.2.5) et de différentiation automatique afin de gagner du temps [EBE07].

#### 2.2.3.2 Méthodes analytiques et semi-analytiques : directe et adjointe

On ne revient pas sur le logiciel récent Diffedge présenté au §2.2.2.4.2, qui utilise le calcul formel sous Maple mais s'appuie sur des schémas-blocs spécifiques au génie électrique [MAS06].

Devant les limites des méthodes numériques (cf §2.2.3.1 ci-dessus), deux méthodes analytiques, qui ne visent pas à obtenir la dérivée sous forme formelle (c'est impossible !) mais développent au maximum l'algorithme d'obtention analytique, sont très présentes dans la littérature et seront mises en œuvre dans cette thèse : la méthode directe (ou "méthode inverse" [LAR03]) et la méthode de l'état-adjoint. Elles sont appliquées aussi bien aux systèmes multicorps [BEH98, HAU87] que dans des problèmes de simulation de la mise en forme [LAR03]. A noter l'approche mathématique de Green, présentée par Haftka mais confidentielle semble-t-il : elle ne sera pas étudiée ici car elle n'est intéressante que dans les cas où le nombre de degrés de libertés du modèle est inférieur au nombre de paramètres de construction x et de critères g [HAF92], ce qui n'est bien sûr pas le cas de la présente étude.

Haftka distingue deux approches, dans lesquelles les deux méthodes (directe et adjointe) sont successivement appliquées à la quasi-statique (sensibilité du déplacement), aux vibrations (sensibilité des modes propres) et au régime transitoire (intervention du temps) qui nous intéresse ici (cf §2.2.2.2) :

- L'approche "discrète" (chap.7 de [HAF92]) ou "par différentiation implicite" [BEH98], consistant à discrétiser spatialement les équations de la dynamique, par éléments finis par exemple, puis à les différencier par rapport à x.

- L'approche "variationnelle" (chap.8 de [HAF92]) ou "continue" ou "méthode de la dérivée matérielle" [BEH98], consistant à inverser ces opérations ; le principal avantage est qu'il n'est pas nécessaire de connaître le code éléments finis pour dériver au préalable les équations des milieux continus [HAF92, LAR03], ce qui laisse aussi la porte ouverte à une discrétisation spatiale par une autre méthode (Ritz, colocation).

La mécanique des systèmes multicorps (et donc ce travail de thèse) se place dans le cadre de l'approche discrète, par ailleurs la plus aisée et la plus courante [LAR03, BEH98], car la discrétisation spatiale est déjà faite par définition. Pour preuve, les applications de référence de cette approche sont des mécanismes à barres rigides [HAF92, HAU87].

***Méthodes "analytiques" ou "semi-analytiques" ?***

Les méthodes directe et adjointe sont qualifiées d' "analytiques" dans la littérature car le développement analytique du gradient $\frac{dg}{dx}$ est réalisé en amont, bien qu'il ne puisse être déterminé ensuite que numériquement. En effet, les modèles étant com-

plexes, les systèmes différentiels initiaux ne peuvent être résolus de façon formelle [EBE07], pas même pour le double-pendule orthogonal qui ne comporte pourtant que deux solides et des liaisons simples ; et les résultats sont destinés à être encore reportés dans d'autres systèmes à résoudre eux aussi ! A noter que l'expression formelle des sensibilités en fonction du temps et des différents paramètres de construction x sera tout de même présentée dans ce travail au §2.4.1.2.3 pour le système très simple masse-ressort-amortisseur linéaire en guise d'illustration et de validation des méthodes.

Dans la pratique, lorsque les systèmes sont discrétisés (par exemple par éléments finis), la forme analytique des différentes matrices est inconnue ; ces dernières sont donc calculées et assemblées numériquement [BEH98]. Par conséquent, les différentes dérivées doivent alors être calculées simplement par la méthode des différences finies [BROO87, SHA87], et les méthodes sont qualifiées de "semi-analytiques". On observe une assez bonne précision pour un coût de calcul raisonnable [LAR03], mais on retrouve tout de même le "dilemme de la taille de pas" [HAF92]. (cf §2.2.3.1.1).

***Conclusion :***

Notre travail se situe dans l'approche discrète, avec des méthodes qui seront qualifiées d' "analytiques" : nous ne considérons pas les systèmes multicorps comme des milieux continus en grande rotation comme Behar [BEH98], ce qui rend la discrétisation par éléments finis inutile ; on effectuera un travail théorique afin de mener les calculs analytiques le plus loin possible, même lorsque la matrice de masse étendue dépend des variables d'état (cf §2.2.1.1.1 et §2.2.3.2.1). Les pages qui suivent présentent les méthodes directe et adjointe telles que décrites dans la littérature, dans le cas qu'Haftka qualifie de "transitoire" (intervention du temps)[HAF92]. Elles sont adaptées aux notations définies dans le §2.2.1.1 ; leurs avantages et inconvénients respectifs sont comparés.

#### *2.2.3.2.1 Forme du modèle dynamique de départ - formalisme d'état*

Les développements mathématiques des méthodes directe et adjointe sont dépendants de la forme du modèle dynamique initial adopté pour le système multicorps. Par conséquent, le point de départ est l'étude bibliographique de ces modèles, afin d'en choisir un et pouvoir ensuite exploiter plus précisément les méthodes appliquées à ce modèle dans la littérature. Néanmoins, bien que non exploitables "mathématiquement", des publications basées sur d'autres modèles, pour les multicorps (second ordre dans [BEH98], algèbre de Lie dans [SOH01]) ou non (MMC dans [LAR03]) ont également été étudiées afin de bien comprendre les principes des méthodes ; les avantages ou inconvénients que ces dernières peuvent présenter dans un autre domaine de la mécanique que celui des multicorps ont été relevés.

Pour un système à une seule coordonnée généralisée q et un seul paramètre de conception étudié x, Tomovic [TOM63, TOM72] présentait le modèle dynamique sous forme d'une équation différentielle scalaire du second ordre :

$$\boxed{F(\ddot{q}, \dot{q}, q, t, x) = 0} \tag{2.2.7}$$

De plus, dans le cas d'équations linéaires (à coefficients constants) uniquement, l'équation $\boxed{\frac{dF}{dt} = 0}$ devient $\boxed{\frac{\partial F}{\partial \ddot{q}}\ddot{q} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\dot{q} + \frac{\partial F}{\partial q}q = 0}$ (2.2.8)

Plusieurs auteurs ou équipes travaillant sur les systèmes multicorps ont étendu ce modèle du second ordre et l'utilisent comme point de départ de leur théorie de sensibilité [BEH98, DAT96, SER98a, SER98b]. Behar, après avoir discrétisé les équations par éléments finis, écrit les équations d'équilibre dynamique sous la forme

$$\boxed{\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{g}^{\mathbf{int}}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) = \mathbf{g}^{\mathbf{ext}}(t)} \tag{2.2.9}$$

avec

- $\mathbf{q}$ le vecteur des coordonnées généralisées $q_i$ (degrés de liberté en translation et en rotation des nœuds) et des multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes cinématiques ;
- $\mathbf{M}$ la matrice de masse ou "d'énergie cinétique" ;
- $\mathbf{g}^{\mathbf{int}}$ la somme des forces internes et de la contribution résultant des contraintes cinématiques ;
- $\mathbf{g}^{\mathbf{ext}}$ la somme des forces d'inertie extérieures.

Dans le cas particulier linéaire (rare en multicorps) mais tout de même utilisé pour exprimer les systèmes linéarisés [BROO87, EBE07], la forme matricielle des équations de la dynamique peut s'écrire :

$$\boxed{\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{g}^{\mathbf{ext}}(t)} \tag{2.2.10}$$

où $\mathbf{g}^{\mathbf{ext}}(t) = \mathbf{D}\mathbf{u}$ avec $\mathbf{u}$ "vecteur" de commande ou de contrôle, usuel dans le domaine du contrôle.

Cette formulation du problème est adaptée à une compréhension et à un travail analytique du problème, par exemple dans [DEB03b] : après développement en séries de Taylor [LAR03], la résolution de systèmes algébriques de Newton-Raphson est employée afin de trouver le point de fonctionnement à chaque instant ; puis les équations du mouvement sont linéarisées sous la forme d'un système différentiel du second ordre. Cependant, concernant la résolution, les méthodes classiques d'intégration numérique de type Runge-Kutta sont plutôt destinées à traiter des équations différentielles du premier ordre [FAY02b] : dans [DEB03a], Evrot et Debains simulent le comportement du système en résolvant un système de quatorze équations différentielles ordinaires du premier ordre à quatorze inconnues, par la méthode ODE113 de Matlab (Adams-Bashford-Moulton à pas multiple). En outre, les développements théoriques de la méthode adjointe sont plus simples lorsque celle-ci s'applique à un système du premier ordre [HAU87].

Les systèmes du premier ordre relèvent du "formalisme d'état" [BROS97]) (cf §2.2.1.1.1), employé également dans nombre de travaux sur les systèmes multi-

corps [DAT96] ou en automatique. Afin de réduire l'ordre du système de n équations à 1, on définit les n vitesses généralisées comme autant de variables supplémentaires ; le "vecteur" ou colonne $\mathbf{y}$ contient alors 2n composantes, qui peuvent être organisées de plusieurs façons différentes, dont les deux suivantes :

1. $y_{2j-1} = q_j$ et $y_{2j} = \dot{q}_j$ pour j de 1 à n ; l'avantage de cette solution est la lisibilité des équations : une équation du second ordre est remplacée par deux équations du premier ordre consécutives.

2. $y_i = q_i$ pour i de 1 à n, et $y_i = \dot{q}_i$ pour i de n+1 à 2n [DEB03a, FAY02b] ; cette correspondance permet de réutiliser plus directement les matrices de masse, amortissement et raideur des équations classiques de la dynamique [PORTE06].

A noter que la méthode d'Hamilton fournit directement un système d'équations du premier ordre, dont les variables sont les coordonnées généralisées et les moments conjugués [BROS97]. Cette voie évite la manipulation *a posteriori* des équations obtenues par exemple par la méthode de Lagrange.

Le modèle du premier ordre est de forme $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}^*\mathbf{y} + \mathbf{Du}$ [PORTE06] ou dans [HAF92] :

$$\boxed{\mathbf{A}(x)\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, x, t)} \tag{2.2.11}$$

Cette forme est nommée dans ce travail "quasi-linéaire" ; en effet,
- elle est linéaire par rapport aux vitesses et accélérations généralisées $\dot{q}_i$ et $\ddot{q}_i$ contenues dans le vecteur $\dot{\mathbf{y}}$ puisque la matrice de masse étendue $\mathbf{A}$ ne dépend pas de $\mathbf{y}$ ;
- mais elle est non linéaire par rapport aux coordonnées généralisées $q_i$ puisque $\mathbf{f}$ dépend de $\mathbf{y}$ de façon quelconque.

Cette forme "hybride" (ni linéaire, ni complètement non linéaire) est définie et employée par Haftka [HAF92], car en mécanique des structures, $\mathbf{A}$ n'est généralement pas connue de façon analytique mais numérique. La matrice $\frac{d\mathbf{A}}{dx}$, qui apparaîtra dans les algorithmes d'étude de sensibilité, n'a donc pas besoin d'être développée davantage de façon formelle, puisqu'elle sera de toute manière déterminée par différences finies à chaque instant [BEH98, HAU87] (cf §2.2.3.2.6).

C'est cette dernière forme (2.2.11), dans laquelle $\mathbf{y}$ est constitué de la façon 1., qui a été choisie dans la suite de ce travail. De plus, la nouvelle "matrice de masse étendue" $\mathbf{A}$ dépendra de x et du vecteur d'état $\mathbf{y}$ et le modèle sera donc complètement non linéaire, comme c'est le cas dans la plupart des systèmes multicorps.

#### *2.2.3.2.2 Forme du critère*

Les critères étudiés sont fonction des variables d'état, des paramètres de construction et du temps, et s'écrivent donc $g(\mathbf{y}, x, t)$ pour $0 \le t \le t_f$ avec $t_f$ l'instant final.

La première approche serait de discrétiser alors ce critère en de nombreux instants $n_t$ ($g_i = g(\mathbf{y}, x, t_i)$ pour $0 \le t_i \le t_f$ et $i = 1,...,n_t$) puis de résoudre le problème en chaque instant. Afin d'éviter cette approche très coûteuse en temps de calcul, tous les auteurs s'affranchissent de cette dépendance au temps en définissant un "critère équivalent" sous forme d'intégrale :

$$\boxed{\bar{g}(\mathbf{y}, x) = \int_0^{t_f} p(\mathbf{y}, x, t)\,dt} \qquad (2.2.12)$$

Ce critère agrégé conserve une signification claire et fournit des résultats utilisables dans deux cas :

1. Le critère dont on souhaite étudier les variations est physiquement une intégrale, telle l'énergie totale de mise en forme [LAR03](cf §2.2.1.1.4).

2. Une étude préliminaire permet de définir un (ou des) instant(s) "critique(s)" $t_{mi}$ où la contrainte présente par exemple un minimum local [HAF92] ; la sensibilité n'est alors étudiée qu'en cet instant. L'expression (2.2.12) reste identique mais

$$\boxed{p(\mathbf{y}, x, t) = g(\mathbf{y}, x, t)\,\delta(t - t_{mi})} \text{ avec } \delta \text{ le Dirac} \qquad (2.2.13)$$

et donc $$\boxed{\bar{g}(\mathbf{y}, x) = \int_0^{t_f} g(\mathbf{y}, x, t)\,\delta(t - t_{mi})\,dt = g(\mathbf{y}, x, t_{mi})} \text{ si } t_{mi} \le t_f \qquad (2.2.14)$$

L'expression de la sensibilité du critère est identique dans les deux cas :

$$\boxed{\frac{d\bar{g}}{dx} = \int_0^{t_f} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial \mathbf{y}} \cdot \frac{d\mathbf{y}}{dx} \right) dt} \qquad (2.2.15)$$

Le paragraphe 2.3 présente l'amélioration apportée pour étudier la sensibilité du critère sur tout l'intervalle de temps, pour un temps de calcul très raisonnable.

#### *2.2.3.2.3 Conditions initiales sur la sensibilité des variables d'état*

Au cours des démonstrations des méthodes directe et adjointe qui suivent, les sensibilités initiales sont prises nulles, à l'instar d'Haftka [HAF92] :

$$\boxed{\frac{dy_i}{dx}(0) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{d\dot{y}_i}{dx}(0) = 0} \qquad \text{quel que soit i} \qquad (2.2.16)$$

Le paragraphe 2.4.1.2.2 établira que ces conditions initiales sont effectivement toujours vraies quels que soient le système, la variable $y_i$ et le paramètre de construction x considérés. Ce résultat sera validé en prenant comme exemple le système masse-ressort-amortisseur linéaire tiré de [BEH98].

A propos de cette dernière référence, Behar semble utiliser également les conditions initiales (2.2.16), tout en estimant qu'elles constituent "une hypothèse forte dans le cadre des systèmes multicorps, où elles ne sont généralement pas vérifiées" [BEH98]. Au contraire, nous pensons qu'il n'y a pas d'autre condition initiale possible, et ceci sera démontré au paragraphe 2.4.1.2.2 .

#### *2.2.3.2.4 Description de la méthode directe*

***Principe* : Cet algorithme de résolution est simple, il consiste en la résolution du système différentiel obtenu par dérivation des équations de la dynamique par rapport à un paramètre de construction ou de commande du système.**

- ***Cas linéaire et quasi-linéaire* :**

Tomovic [TOM63, Tom72] présente l'idée de base en 1963, pour un système dynamique à une seule coordonnée généralisée : en dérivant (2.2.7) par rapport au paramètre de conception x, on obtient **l'équation de sensibilité** (dénomination que nous garderons par la suite) :

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial \ddot{q}}\ddot{u}+\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\dot{u}+\frac{\partial F}{\partial q}u=-\frac{\partial F}{\partial x}} \qquad (2.2.17)$$

Après l'adjonction de conditions initiales, l'équation (2.2.7) est résolue afin d'obtenir q, qui est reportée dans l'équation (2.2.17) (puisque les termes $\frac{\partial F}{\partial \ddot{q}}$, $\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}$ et $\frac{\partial F}{\partial q}$ dépendent de q), résolue à son tour. Dans ce livre certes ancien, Tomovic insiste sur l'identité de la partie homogène (membre de gauche) du modèle dynamique et de sensibilité dans le cas linéaire, ce qui engendre des gains de temps de calcul.

Haftka avance également cet avantage de la méthode dans le cadre de la statique linéaire : la dérivation par rapport à x de l'équation d'équilibre

$$\boxed{\mathbf{K}\mathbf{u}^{*}=\mathbf{f}} \qquad (2.2.18)$$

( $\mathbf{K}$ matrice de raideur, $\mathbf{u}^{*}$ vecteur déplacement et $\mathbf{f}$ vecteur de charge)

donne l'équation de sensibilité

$$\boxed{\mathbf{K}\frac{d\mathbf{u}^{*}}{dx}=\frac{d\mathbf{f}}{dx}-\frac{d\mathbf{K}}{dx}\mathbf{u}^{*}} \qquad (2.2.19)$$

Grâce à la présence de $\mathbf{K}$ à la même place, la résolution de (2.2.19) pour $\frac{d\mathbf{u}^{*}}{dx}$ est identique à celle de (2.2.18) pour $\mathbf{u}^{*}$, avec simplement la "pseudo-charge" $\frac{d\mathbf{f}}{dx}-\frac{d\mathbf{K}}{dx}\mathbf{u}^{*}$

[HAF92, BEH98] qui remplace la charge $\mathbf{f}$. Remarquons que la résolution préalable de (2.2.18) est obligatoire, pour pouvoir reporter $\mathbf{u}^*$ dans (2.2.19). De même, dans le cadre de la dynamique linéaire, dériver (2.2.10) par rapport à x donne l'équation suivante, de même membre de gauche que le modèle dynamique :

$$\boxed{\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Q}}(t)+\mathbf{C}\dot{\mathbf{Q}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{Q}(t)=\mathbf{G}^{ext}(t)}$$

avec $\mathbf{Q}=\frac{d\mathbf{q}}{dx}$ ; $\dot{\mathbf{Q}}=\frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dx}$ ; $\ddot{\mathbf{Q}}=\frac{d\ddot{\mathbf{q}}}{dx}$

et la pseudo-charge $\mathbf{G}^{ext}(t)=\frac{d\mathbf{g}^{ext}(t)}{dx}-\frac{d\mathbf{M}}{dx}\ddot{\mathbf{q}}-\frac{d\mathbf{C}}{dx}\dot{\mathbf{q}}-\frac{d\mathbf{K}}{dx}\mathbf{q}$

La même remarque de similitude des modèles dynamique et de sensibilité (également dans [SER98a]) est enfin valable pour le formalisme d'état qui est adopté dans ce travail : en dérivant l'équation de dynamique quasi-linéaire (2.2.11) par rapport à x, on obtient le **système de sensibilité** suivant :

$$\boxed{\mathbf{A}\frac{d\dot{\mathbf{y}}}{dx}=\mathbf{J}\frac{d\mathbf{y}}{dx}-\frac{d\mathbf{A}}{dx}\dot{\mathbf{y}}+\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x}} \qquad (2.2.20)$$

avec $\mathbf{J}$ la matrice jacobienne de $\mathbf{f}$ telle que $J_{ij}=\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$.

- ***Modifications pour le cas non linéaire***

Dans le cas des solides rigides en grandes rotations, objet de ce travail, les matrices $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{K}$ dans les modèles du second ordre, ou la matrice $\mathbf{A}$ et le vecteur $\mathbf{f}$ en premier ordre, dépendent à présent des coordonnées et/ou des vitesses généralisées. Cependant, dans la littérature, l'expression des différents systèmes de sensibilité (dépendant du formalisme choisi) reste la même, les différentes matrices étant simplement remplacées par des matrices tangentes à chaque instant.

- ***Conclusion et perspectives sur la méthode directe***

Rappelons d'abord que l'intégration du système de sensibilité est faite avec les sensibilités des coordonnées et vitesses généralisées nulles à l'instant initial ; cette hypothèse sera discutée au paragraphe 2.4.1.2.2. Puis, afin d'obtenir la sensibilité du critère $\frac{d\bar{g}}{dx}$, il suffit de reporter les sensibilités $\frac{d\mathbf{y}}{dx}$ obtenues dans (2.2.20), et d'effectuer l'intégration.

En linéaire, "quasi-linéaire" ou non linéaire, cette méthode, très attractive car très simple, permet, "pour le coût d'une seule intégration temporelle, d'obtenir simultanément la réponse dynamique et toutes les sensibilités de cette réponse" [BEH98]. De nombreux auteurs n'utilisent qu'elle, à l'instar de Behar pour les systèmes non linéaires [BEH98], de Kim [KIM01], de Wasfy [WAS98] qui, comme Behar, traite les multicorps d'un point de vue "mécanique des milieux continus discrétisés par éléments finis", ou encore de Ciglaric [CIG00] dans le domaine d'application biomécanique.

A noter l'utilisation de cette méthode décidément très populaire au sein du formalisme des groupes de Lie [SOH01] : en effet, leur avantage essentiel consiste à pouvoir dériver très facilement grâce à l'outil "exponentielle", l'obtention du système de sensibilité est donc aisé. Cependant, Sohl ne calcule que les sensibilités par rapport aux coordonnées généralisées elles-mêmes (dans un but d'optimiser par itérations), et la méthode est mathématiquement particulièrement complexe.

#### *2.2.3.2.5 Description de la méthode de l'état-adjoint*

***Principe* : cette méthode propose de calculer les sensibilités $\frac{d\bar{g}}{dx}$ du critère sans avoir à déterminer celles des variables d'état (coordonnées et vitesses généralisées) contenues dans $\frac{d\mathbf{y}}{dx}$ [DAT96], d'où un gain de temps de calcul, car le coût de calcul de ces sensibilités est lié au nombre de paramètres [LAR03] (cf §2.2.3.2.8).**

La méthode adjointe présentée ici et relevée dans [HAF92] est basée sur le formalisme d'état de la formule (2.2.11), appelé "quasi-linéaire" au §2.2.3.2.1 : il est valable en dynamique linéaire, ainsi qu'en non linéaire à condition d'actualiser la matrice $\frac{d\mathbf{A}}{dx}$ à chaque instant. La méthode est démontrée et adaptée aux notations du présent travail. Ses principes généraux, que l'on retrouve également dans des domaines différents de celui des multicorps, seront synthétisés en conclusion.

- ***Développements :***

Le point de départ est le système de sensibilité (2.2.20) obtenu par dérivation par rapport à x du système d'équations du mouvement (2.2.11), que l'on peut mettre sous la forme :

$$\boxed{\mathbf{A}\frac{d\dot{\mathbf{y}}}{dx} - \mathbf{J}\frac{d\mathbf{y}}{dx} + \frac{d\mathbf{A}}{dx}\dot{\mathbf{y}} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = \mathbf{0}} \qquad (2.2.21)$$

Cependant, à la différence de la méthode directe, ce système n'est ici pas résolu, son écriture ne constitue qu'une étape pour la démonstration.

A l'expression (2.2.15) de la sensibilité du critère est ajouté un terme de valeur nulle, constitué du produit d'un vecteur adjoint $\boldsymbol{\lambda}$, de dimension 2n, pour l'instant arbitraire, et du premier membre de l'équation de sensibilité (2.2.21) dont la valeur est nulle, quel que soit t :

$$\frac{d\bar{g}}{dx} = \int_0^{t_f}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial \mathbf{y}}\cdot\frac{d\mathbf{y}}{dx}\right)dt + \int_0^{t_f}\boldsymbol{\lambda}^T\left(\mathbf{A}\frac{d\dot{\mathbf{y}}}{dx} - \mathbf{J}\frac{d\mathbf{y}}{dx} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \frac{d\mathbf{A}}{dx}\dot{\mathbf{y}}\right)dt \qquad (2.2.22)$$

Peuvent alors être regroupées et factorisées les sensibilités non souhaitées $\frac{d\mathbf{y}}{dx}$ et leur dérivée $\frac{d\dot{\mathbf{y}}}{dx}$ :

$$\frac{d\bar{g}}{dx} = \int_0^{t_f} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \boldsymbol{\lambda}^T \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} - \frac{d\mathbf{A}}{dx}\dot{\mathbf{y}} \right) \right) dt + \int_0^{t_f} \left( \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A} \frac{d\dot{\mathbf{y}}}{dx} + \left( \frac{\partial p}{\partial \mathbf{y}} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{J} \right) \frac{d\mathbf{y}}{dx} \right) dt \qquad (2.2.23)$$

La partie $P_{gauche} = \int_0^{t_f} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \boldsymbol{\lambda}^T \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} - \frac{d\mathbf{A}}{dx}\dot{\mathbf{y}} \right) \right) dt$ ne contient pas de sensibilités des variables d'état, alors qu'elles apparaissent dans $P_{droite} = \int_0^{t_f} \left( \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A} \frac{d\dot{\mathbf{y}}}{dx} + \left( \frac{\partial p}{\partial \mathbf{y}} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{J} \right) \frac{d\mathbf{y}}{dx} \right) dt$. La méthode adjointe consiste donc à rendre $P_{droite}$ nulle, ce qui est possible puisque $\boldsymbol{\lambda}$ est *a priori* arbitraire. Le terme $P_{droite}$ semble pouvoir être traité à l'aide d'une intégration par parties ; en effet, la forme

$$P_{droite} = \int_a^b \mathbf{h}(t)\dot{\mathbf{g}}(t)dt + \int_a^b \dot{\mathbf{h}}(t)\mathbf{g}(t)dt \qquad (2.2.24)$$

peut être identifiée en posant $\frac{d\mathbf{y}}{dx} \equiv \mathbf{g}(t)$ et sa dérivée $\frac{d\dot{\mathbf{y}}}{dx} \equiv \dot{\mathbf{g}}(t)$, mais à condition que $\frac{\partial p}{\partial \mathbf{y}} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{J}$ soit la dérivée par rapport au temps de $\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A} \equiv \mathbf{h}(t)$ ; cette condition est satisfaite par l'équation

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A}\right) = \frac{\partial p}{\partial \mathbf{y}} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{J} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathbf{A} + \boldsymbol{\lambda}^T \dot{\mathbf{A}} = \frac{\partial p}{\partial \mathbf{y}} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{J}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \boxed{\mathbf{A}^T \dot{\boldsymbol{\lambda}} + \left( \dot{\mathbf{A}}^T + \mathbf{J}^T \right) \boldsymbol{\lambda} = \left( \frac{\partial p}{\partial \mathbf{y}} \right)^T} \qquad (2.2.25)$$

Et en conséquence

$$P_{droite} = \left[ \mathbf{h}(t)\mathbf{g}(t) \right]_a^b = \left[ \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A} \frac{d\mathbf{y}}{dx} \right]_0^{t_f} = \boldsymbol{\lambda}^T(t_f)\mathbf{A}\frac{d\mathbf{y}}{dx}(t_f) - \boldsymbol{\lambda}^T(0)\mathbf{A}\frac{d\mathbf{y}}{dx}(0)$$

Or $\frac{d\mathbf{y}}{dx}(0) = \mathbf{0}$ comme il a déjà été dit au 3. et que nous justifierons au paragraphe 2.4.1.2.2 ; en revanche, il n'y a aucune raison que $\frac{d\mathbf{y}}{dx}(t_f) = \mathbf{0}$ ; donc, pour que $P_{droite} = 0$, il suffit que

$$\boxed{\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \mathbf{0}} \qquad (2.2.26)$$

Par conséquent, si le vecteur adjoint satisfait l'équation (2.2.25) et la condition finale (2.2.26), nommées **système adjoint**, le terme $P_{droite}$ est nul et le calcul de la sensibilité $\frac{d\overline{g}}{dx}$ du critère s'affranchit de celui des coordonnées et vitesses généralisées contenues dans $\frac{d\mathbf{y}}{dx}$ :

$$\boxed{\frac{d\overline{g}}{dx} = \int_0^{t_f} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \boldsymbol{\lambda}^T \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} - \frac{d\mathbf{A}}{dx} \dot{\mathbf{y}} \right) \right) dt} \qquad (2.2.27)$$

Enfin, pour un critère non intégral en $t_{mi}$, Haftka annonce qu'en "intégrant le système adjoint" ((2.2.25) et (2.2.26)) "de $t_{mi} - \varepsilon$ à $t_{mi} + \varepsilon$ pour un $\varepsilon$ infinitésimal, on montre facilement qu'il est équivalent au système"

$$\boxed{\mathbf{A}^T \dot{\boldsymbol{\lambda}} + \left( \dot{\mathbf{A}}^T + \mathbf{J}^T \right) \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\boldsymbol{\lambda}\left(t_{mi}\right) = -\frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}}\left(t_{mi}\right) \mathbf{A}^{-1}}$$

sans préciser davantage la démonstration. Cette transformation du système, faisant passer des informations du second membre de l'équation à la condition finale, est très utile mais n'est cependant pas triviale à démontrer : le §2.3.3.1 s'y attache en invoquant la théorie des distributions et notamment le théorème du saut.

- ***Synthèse des principes généraux des méthodes adjointes***

Les principes du développement de la méthode adjointe sont résumés ci-dessous. Précisons que ces points caractéristiques se retrouvent lorsque la méthode présentée ci-dessus est appliquée dans la littérature à d'autres formes du modèle dynamique initial [HAU87, BEH98] ou d'autres domaines [LAR03] :

1. Le vecteur adjoint introduit en fait un "degré de liberté supplémentaire" dans le calcul des sensibilités : ce vecteur *a priori* arbitraire peut alors être choisi afin de satisfaire une certaine condition, sans pour autant changer le résultat final. Il s'agit ici par exemple d'éliminer du calcul les sensibilités non souhaitées.

2. La façon d'introduire le vecteur adjoint (équation (2.2.22)) l'assimile souvent aux multiplicateurs de Lagrange notés également $\lambda_j$ : le lagrangien augmenté est en effet défini dans [BROS97, BEH98] par $\boxed{Fa = F + \sum_{j=1}^{h} \lambda_j H_j}$
   avec $H_j$ ($=0$) le membre de gauche de la $j^{ème}$ équation de contrainte (équations de liaisons cinématiques ou géométriques dérivées dans le domaine des multicorps, cf §2.2.1.1.5). Marquis-Favre appelle encore $\lambda_j$ variable de co-état [MAR07].

3. Dans le cas de la statique ((2.2.18) et (2.2.19)), l'équation adjointe à laquelle on aboutit est

$$\boxed{\mathbf{K}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{z}} \qquad (2.2.28)$$

avec $\boxed{z_i = \dfrac{\partial g}{\partial u_i^*}}$ [HAF92]

On retrouve la même forme d'équation (2.2.28) pour $\boldsymbol{\lambda}$ que celle d'équilibre (2.2.18) pour $\mathbf{u}^*$, ou celle de sensibilité (2.2.19) pour $\dfrac{d\mathbf{u}^*}{dx}$. Seules les charges changent. En référence à la méthode directe, qualifiée de "méthode de la pseudo-charge" (cf §2.2.3.2.4), la méthode adjointe est alors parfois nommée "dummy-load method", littéralement méthode de la "charge factice" (qu'est $\mathbf{z}$).

4. Le système adjoint ((2.2.25) et (2.2.26)) est un "problème rétrograde bien posé, pour lequel les conditions finales correspondent à des conditions initiales" [BEH98]. Cette notion d'intégration rétrograde ("sens inverse du temps, en commençant par le dernier incrément et remontant le temps jusqu'au premier incrément" [LAR03], soit de l'instant final vers l'instant initial) est une constante des méthodes dites "adjointes", que l'on retrouve par exemple dans les problèmes d'optimisation de mise en forme [LAR03], ou encore les problèmes de tir [GAY04], bien que les différences avec ces dernières soient pourtant nombreuses (cf §2.2.2.4.5).

#### *2.2.3.2.6 Détermination des matrices et vecteurs dérivés*

Le système de sensibilité dans la méthode directe d'une part, le système adjoint et l'expression du critère dans la méthode adjointe d'autre part, font apparaître des matrices et vecteurs dérivés par rapport au paramètre de construction x. Dans la littérature,

- soit la forme des matrices et vecteurs initiaux est connue et les dérivées sont calculées analytiquement ;
- soit elle n'est connue que numériquement (après une discrétisation par éléments finis par exemple) et les dérivées sont déterminées par différences finies, "en régénérant les matrices pour chaque perturbation des variables de conception" [BEH98, EBE07, LAR03, BROO87] ; ces méthodes sont alors appelées "semi-analytiques" (cf début du §2.2.3.2).

Dans le §2.3, cette thèse s'attachera à éviter les calculs par différences finies, employés dans la littérature [BEH98] malgré leurs limites pour déterminer les éléments dérivés. Il sera proposé une évolution de la formulation des systèmes de sensibilité et adjoint permettant de déterminer analytiquement les matrices dérivées par rapport à x, même dans le cas non linéaire, d'où l'appellation "analytique" donnée à nos méthodes.

#### *2.2.3.2.7 Pistes de résolution (intégration) des systèmes différentiels*

La méthode directe nécessite de résoudre le modèle dynamique initial puis le système de sensibilité ; la méthode adjointe débute également par la résolution des équations du mouvement, mais se poursuit par la résolution du système adjoint.

Dans le cas non linéaire qui nous occupe dans ce travail, les différentes matrices sont en fait des matrices tangentes, réactualisées numériquement à chaque instant (par exemple par la méthode de Newton dans [HAF92]). Les résolutions des systèmes dynamique et de sensibilité suivent dans la littérature le même schéma, par exemple celui de Newmark dans [DAT96] et [BEH98] : dans cette dernière référence, la résolution au sein du logiciel MECANO par ce schéma implicite d'ordre 2 débute par le développement en série de Taylor des vitesses et déplacement limité au second ordre, puis se poursuit par une méthode itérative de Newton-Raphson à chaque instant, comme dans [LAR03]. Une variante également employée est l'algorithme HHT (Hilber-Hughes-Taylor) dans lequel l'introduction d'un poids dans l'expression de l'équilibre dynamique et d'une matrice d'amplification permet d'augmenter "l'amortissement numérique des hautes fréquences qui viennent parfois perturber la réponse temporelle".

Pour la méthode directe enfin, la similitude entre modèle dynamique et de sensibilité est exploitée au sein de la résolution : par exemple dans [BEH98], la matrice d'itération du système linéarisé est exactement identique à celle du problème dynamique, et "le problème linéaire de sensibilité est donc identique à chaque instant au problème incrémental des équations d'équilibre dynamique, au vecteur résidu près".

#### *2.2.3.2.8 Synthèse : critères de choix de la méthode semi-analytique*

La méthode directe permet de calculer la sensibilité de g par rapport à x en passant par la sensibilité des réponses $\mathbf{y}$ et $\dot{\mathbf{y}}$ par rapport à x. Après la résolution du modèle dynamique initial, elle impose l'établissement et la résolution d'un système de sensibilité par paramètre x :

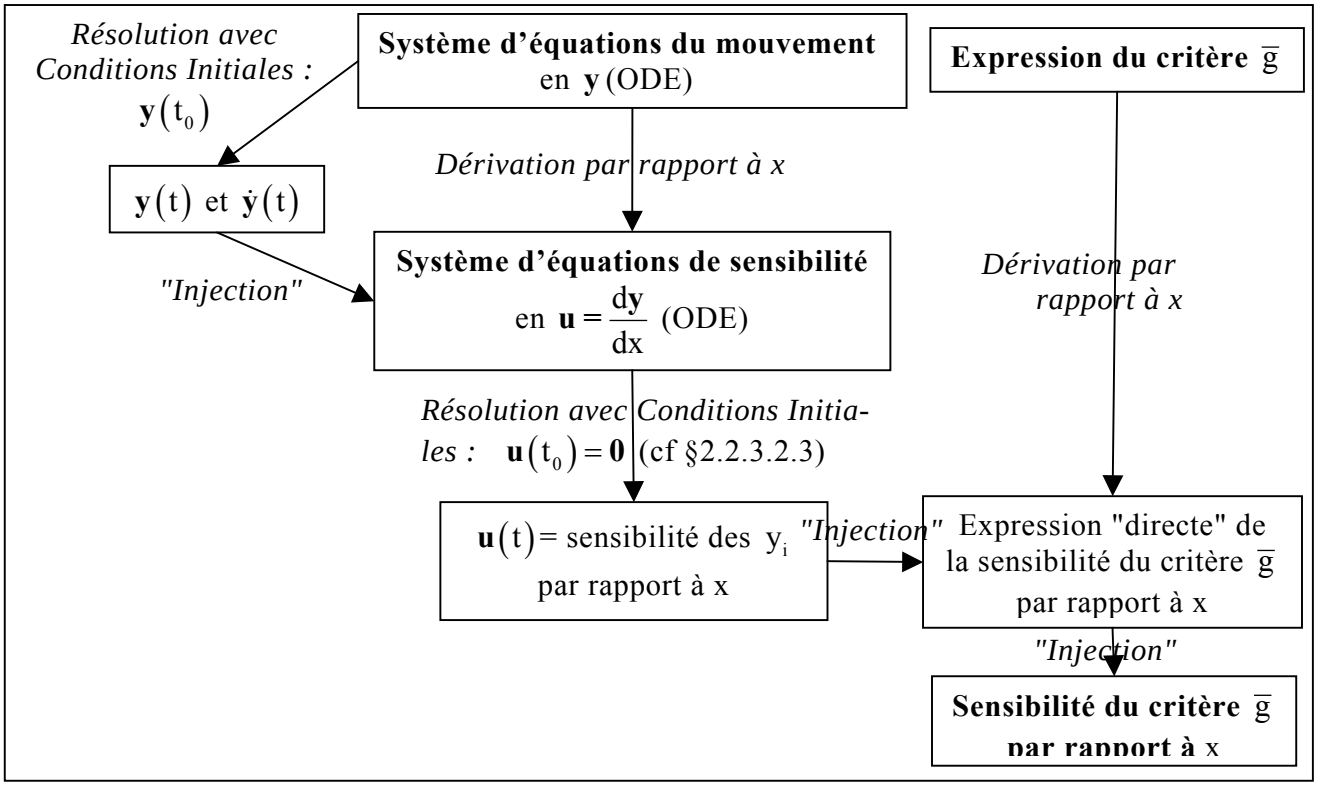



**Figure 2.2.2** Algorithme récapitulatif de la méthode directe

La méthode directe semble donc adaptée aux études présentant un nombre réduit de paramètres de construction x, mais plusieurs critères $\overline{g}$ [HAF92], puisque les sensibilités $\mathbf{u}(t)$ ne dépendent pas du critère étudié. On rappelle (cf §2.2.3.2.4) que ses autres avantages sont sa simplicité de mise en œuvre et le gain de temps de résolution dans les cas linéaires, pour lesquels le membre de gauche du système initial et du système de sensibilité sont identiques.

La méthode de l'état-adjoint permet de calculer la sensibilité de g par rapport à x sans passer par la sensibilité des réponses $\mathbf{y}$ et $\dot{\mathbf{y}}$ par rapport à x. Après la résolution du modèle dynamique initial et celle du système adjoint, la détermination des sensibilités du critère $\overline{g}$ par rapport à un paramètre de construction x quelconque ne nécessite que le calcul d'une intégrale :

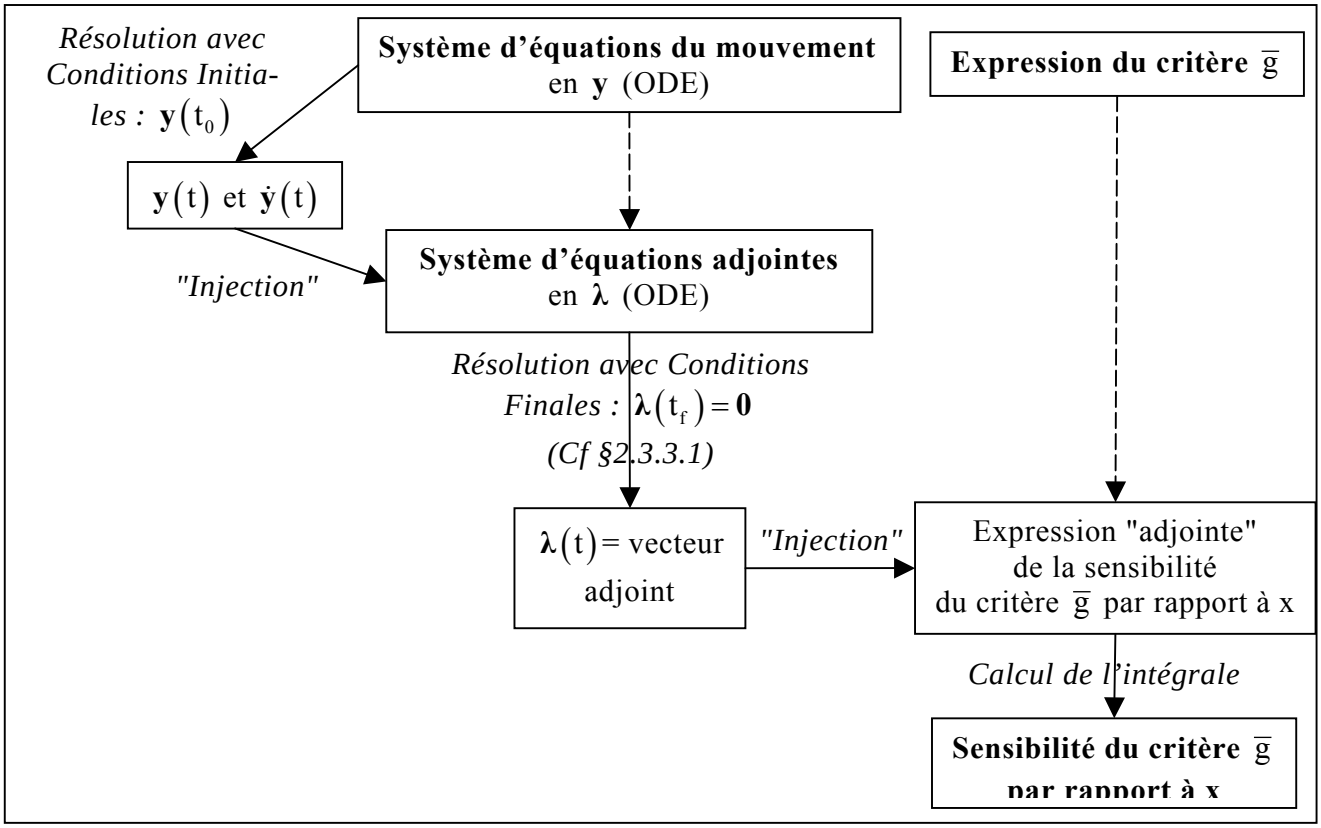



**Figure 2.2.3** Algorithme récapitulatif de la méthode adjointe

*Les déterminations du système adjoint et de l'expression de la sensibilité du critère (en pointillés), s'appuyant sur le système d'équations de sensibilité, sont démontrées au §2.2.3.2.5)*

A l'inverse de la méthode directe, cette méthode est donc adaptée aux études à grand nombre de paramètres x par rapport au nombre de critères $\bar{g}$ [HAF92], puisque le système adjoint et le vecteur adjoint qui en résulte ne dépendent que de $\bar{g}$ et non de x. Bien qu'elle soit plus complexe à implémenter que la méthode directe, ceci explique sa popularité en dynamique des structures (optimisation de forme, simulation de la mise en forme) (cf §2.2.2.2) : en simulation du forgeage, Laroussi par exemple ne s'intéresse qu'à quelques fonctions coût à optimiser, telle l'énergie de déformation totale alors que les paramètres influents sont nombreux : vitesse de forgeage, coefficient de frottement, température des outils, dimensions du lopin… [LAR03]. Néanmoins, l'intégration finale dépend de x.

A noter que dans ce cas à grand nombre de paramètres x, la méthode directe peut quelquefois être tout de même préférée à l'adjointe "si elle est couplée à une technique de résolution directe des systèmes linéaires" [LAR03] (ou plutôt *linéarisés*, les problèmes étant non linéaires) ; mais la résolution est le plus souvent itérative [BEH98,LAR03].

Dans la littérature, à notre connaissance, la méthode adjointe n'a été utilisée que pour la détermination de la sensibilité de critères, et non pour celle des variables d'état, puisque sa nature est de s'affranchir de ces termes. Une des originalités de ce travail est de tester ce cas en posant $g = y_i$ .

A noter enfin que l'organigramme synthétisant les deux méthodes (formules comprises) et montrant leur imbrication n'est présenté qu'au §2.3.4, car il intègre les modifications proposées afin de les adapter aux spécificités des systèmes multicorps. L'organigramme du cas statique, sortant quelque peu du cadre de cette étude mais ayant servi à bien comprendre les méthodes sur un cas simple, n'est présenté qu'en annexe 2.

# 2.3 Adaptation théorique des méthodes d'étude de sensibilité aux systèmes multicorps

Les deux méthodes sont améliorées afin de répondre aux spécificités des systèmes multicorps : les modèles sont fortement non linéaires et on recherche les sensibilités en fonction du temps.

Reprécisons d'emblée que le modèle dynamique initial ne sera pas exprimé sous la forme d'un système de n équations différentielles du second ordre à n coordonnées généralisées [BEH98,SER98a], mais sous la forme d'un système de 2n équations différentielles du premier ordre à 2n inconnues [HAF92], car la résolution est plus aisée et les développements de la méthode adjointe plus simples. Les équations sont donc de la forme $\boxed{\mathbf{A}\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}}$ (cf §2.2.3.2.1).

## 2.3.1 Motivations

Plusieurs équipes étudient la sensibilité aux paramètres de construction des systèmes multicorps et emploient les méthodes "analytiques" (directe et adjointe) pour l'expression des dérivées premières ; mais à notre connaissance, tous ([AND02, BEH98, DAT96, HAU87, HSU02, SER98a] utilisent des modèles du second ordre qui n'ont pas été choisis dans ce travail (voir ci-dessus) ; les développements mathématiques très spécifiques ne sont donc pas réutilisables ici : des développements originaux adaptés aux modèles du premier ordre sont donc nécessaires.

De plus, Haftka [HAF92] et Behar [BEH98] sont des mécaniciens des structures, domaine dans lequel la méthode adjointe est très utilisée [LAR03] pour les raisons évoquées au §2.2.3.2.8 ci-dessus. Mais le système multicorps est considéré comme une structure particulière subissant des grandes rotations, et toujours discrétisée au préalable par éléments finis. Il est donc fait appel très tôt dans le processus aux outils numériques :

- la matrice de masse étendue $\mathbf{A}$ n'étant pas connue analytiquement, $\frac{d\mathbf{A}}{dx}$ est donc logiquement calculée par différences finies, outil numérique par excellence, nécessitant de connaître $\mathbf{A}$ à x et x+dx ; notre hypothèse de départ étant de nous passer de ces méthodes numériques, non précises et lentes (cf [HAF92] et §2.2.3.1.1), nous avons recherché une autre solution.

- *a fortiori* en non linéaire ($\mathbf{A}$ dépendant des coordonnées généralisées donc du temps), l'algorithme prend en compte la matrice tangente à $\mathbf{A}$ encore une fois de façon numérique, en la réactualisant à chaque instant dans le schéma de résolution.

Par conséquent, l'originalité de ce travail est de proposer des améliorations aux méthodes directe et adjointe, dont les points essentiels sont :

- mener les développements analytiques (et non numériques) le plus loin possible, en non linéaire également ; cette évolution théorique est originale (à notre connaissance).

- accélérer les résolutions de la méthode adjointe ; la méthode adjointe fait en effet l'objet d'un intérêt particulier car les systèmes multicorps semblent être dans le cas où son utilisation est intéressante (cf §2.2.3.2.8) : les équations du mouvement contiennent davantage de grandeurs potentiellement influentes (toutes les grandeurs hormis les coordonnées, vitesses généralisées ou accélérations !) que l'ingénieur n'a de critères à étudier (stabilité, accélération latérale ou cap en dynamique du véhicule par exemple).

- tenter d'obtenir les sensibilités fonction du temps dans tous les cas (critères intégraux ou non, méthode directe ou adjointe)

Les algorithmes complets modifiés sont ensuite présentés. Les modifications proposées ici sont évaluées lors de la comparaison de l'efficacité des deux méthodes appliquées à des exemples multicorps (cf §2.4).

## 2.3.2 Modifications concernant les deux méthodes analytiques

### 2.3.2.1 Sensibilités fonctions du temps

Rappelons que dans la littérature, deux "types" de critères différents peuvent être étudiés, à partir de la même "forme" intégrale (cf §2.2.1.1.4 et §2.2.3.2.2) :

- Si $\boxed{\bar{g}(\mathbf{y},x)=\int_0^{t_f} p(\mathbf{y},x,t)\,dt}$ (forme générale) (2.3.1)

  $\frac{d\bar{g}(\mathbf{y},x)}{dx}$ correspond à la sensibilité d'un vrai critère intégral, utile par excellence dans l'étude de la mise en forme (sensibilité de l'énergie de déformation, cf §2.2.1.1.4)

- Si dans (2.3.1), $p(\mathbf{y},x,t)=g(\mathbf{y},x,t)\delta(t-t_{mi})$, alors, avec $t_{mi}$ un instant "critique" [HAF92] :

$$\boxed{\bar{g}(\mathbf{y},x)=\int_0^{t_f} g(\mathbf{y},x,t)\delta(t-t_{mi})\,dt=g(\mathbf{y},x,t_{mi})} \quad (2.3.2)$$

si $0 \le t_{mi} \le t_f$ et pour g quelconque, d'après les propriétés du Dirac. Et la sensibilité $\frac{d\bar{g}(\mathbf{y},x)}{dx}$ du critère non intégral correspond à l'influence de x sur g en cet instant $t_{mi}$.

Une première amélioration consiste à rechercher dans les deux cas la sensibilité en fonction du temps, que nous nommerons $t_i$ :

1. ***Dans le premier cas (critère intégral),*** $t_f \equiv t_i$ et la sensibilité sera obtenue en fonction de la borne supérieure de l'intégrale ;

   - dans le cas de la ***méthode directe***, l'intégrale

   $$\frac{d\bar{g}}{dx}(t_i) = \int_0^{t_i} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial \mathbf{y}} \cdot \frac{d\mathbf{y}}{dx} \right) dt \qquad (2.3.3)$$

   (cf §2.2.3.2.2) peut être traitée comme la résolution d'un système différentiel ; en effet, l'équivalence suivante est évidente quels que soient les fonctions $h(t)$ et $f(t)$ :

   $$h(t_i) = \int_{t_0}^{t_i} f(t)\,dt \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dh(t)}{dt} = f(t) \quad \text{avec} \quad h(t_0) = 0 \qquad (2.3.4)$$

   A noter que ce traitement des intégrales (numériques en raison de la présence de $\frac{d\mathbf{y}}{dx}$) n'est pas nécessaire dans les cas très simples (et rares dans le domaine des multicorps !) où le calcul en modes formel et "paramétrique" en fonction de $t_i$ peut être mené, sous Maple par exemple (cf §2.4.1.2.3 et §2.4.1.2.4).
   Par ailleurs, la condition initiale de (2.3.4) confirme que la sensibilité est toujours nulle à l'instant initial (cf §2.2.3.2.3 et §2.4.1.2.2).

   - mais ceci ne fonctionne pas dans la ***méthode adjointe*** : $\lambda(t)$ est la solution du système adjoint à résoudre numériquement pour chaque $t_f \equiv t_i$, ce qui rend le remplacement de l'intégrale impossible et en tout cas sans intérêt ; la seule solution est donc de résoudre l'ensemble de l'algorithme (système adjoint et intégrale finale) un grand nombre de fois, d'où un coût de temps de calcul extrêmement élevé.

2. ***Dans le second cas (critère non intégral),*** si on pose $t_{mi} \equiv t_i$, on obtient la sensibilité de toute fonction des coordonnées généralisées en fonction du temps, alors que Behar affirme que seuls les critères intégraux peuvent être étudiés [BEH98] : "Cette méthode n'est envisageable que pour des systèmes soumis à des restrictions dont la formulation intégrale a du sens". De plus, $t_f \equiv t_i$ également, en vertu de (2.3.2), valable pour $0 \le t_{mi} \le t_f$ en raison des propriétés du Dirac. Par conséquent,

   - dans la ***méthode directe***, la formule (2.3.3) devient

$$\boxed{\frac{d\overline{g}}{dx}(t_i) = \int_0^{t_i} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial \mathbf{y}} \cdot \frac{d\mathbf{y}}{dx} \right) dt = \frac{\partial g}{\partial x}(t_i) + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}}(t_i) \cdot \frac{d\mathbf{y}}{dx}(t_i)} \qquad (2.3.5)$$

     Une fois $\frac{d\mathbf{y}}{dx}(t_i)$ obtenu par la résolution du système de sensibilité, il reste donc à "construire" la sensibilité à partir de $\frac{\partial g}{\partial x}(t_i)$ et $\frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}}(t_i)$ déterminés analytiquement.

   - dans la ***méthode adjointe***, la formule (2.2.27) devient :

$$\boxed{\frac{d\overline{g}}{dx}(t_i) = \frac{\partial g}{\partial x}(t_i) - \int_0^{t_i} \left( \boldsymbol{\lambda}^T \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} - \frac{d\mathbf{A}}{dx}\dot{\mathbf{y}} \right) \right) dt} \qquad (2.3.6)$$

     Comme pour le critère intégral en méthode directe, on est tenté d'utiliser le système différentiel équivalent afin d'obtenir le terme $\int_0^{t_i} \left( \boldsymbol{\lambda}^T \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} - \frac{d\mathbf{A}}{dx}\dot{\mathbf{y}} \right) \right) dt$ en fonction de $t_i$ (voir ci-dessus). Cependant, comme pour le critère intégral en méthode adjointe, $\boldsymbol{\lambda}(t)$ est la solution du système adjoint à résoudre numériquement pour chaque $t_f \equiv t_i$, ce qui rend la manipulation impossible et sans intérêt. Mais à la différence du critère intégral, le calcul du critère non intégral est grandement accéléré grâce à un traitement supplémentaire détaillé au §2.3.3.2.

Enfin, si $g = q_i$ ou $g = \dot{q}_i$ dans le critère non intégral, la sensibilité des coordonnées et vitesses généralisées peut facilement être étudiée et ne semble être qu'un cas particulier du cas "critère non intégral" ; de plus, ceci présente un intérêt dans certains problèmes d'optimisation : Eberhard étudie simplement l'accélération verticale du conducteur d'un véhicule automobile [EBE07]. Ceci semble être une nouveauté pour la méthode adjointe, les références de la littérature utilisant systématiquement la méthode directe dans ce cas ; d'après Behar par exemple, la méthode adjointe "permet d'obtenir non pas les sensibilités des déplacements, vitesses et accélérations, mais celles des restrictions du problème de conception" [BEH98]. Ce cas sera donc testé au §2.4 pour voir si la méthode adjointe peut être compétitive dans ce cas.

### 2.3.2.2 Cas non linéaire

#### *2.3.2.2.1 Matrice de masse étendue dépendant des coordonnées généralisées*

***1. Les modèles à matrice de masse constante et leurs limites***

Dans le domaine des systèmes multicorps, seuls quelques cas peuvent être étudiés en considérant la matrice $\mathbf{A}$ constante (cf éq. (2.2.11)), et ceci au prix de simplifications intuitives, valables uniquement pour certains modes de fonctionnement du système. En dynamique du véhicule par exemple, citons le modèle roulis-lacet-dérive (cf §2.4.3), ou le modèle de l'étude industrielle [EVR03, DEB03a,b,c] (cf introduction générale et Figure 2.3.1). Dans cette dernière, on considère l'influence de la variation de position des roues comme négligeable pour les équations relatives au véhicule complet; par conséquent, quand les roues débattent, la position des centres de roues $O_i$ et l'orientation des plans de jante des roues sont fixes par rapport à la caisse, et les inerties des masses non-suspendues (pivots, roues) restent constantes.

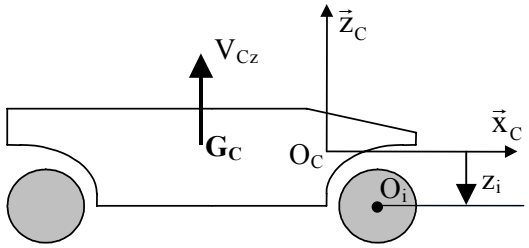



**Figure 2.3.1** Définition du débattement $z_i$ dans [EVR03, DEB03a,b,c]

Si les variables d'état sont $\{V_{Cx},\ V_{Cy},\ V_{Cz}\}$ et $\{p_C,\ q_C,\ r_C\}$, composantes respectives de $\vec{V}^0(G_C)$ et $\vec{\Omega}_C^0$ dans le repère $R_C$ lié à la caisse (pseudo-paramètres), ainsi que $\omega_{Ri}$, vitesse de rotation propre de la roue par rapport au pivot, les équations relatives au véhicule complet s'écrivent alors [DEB03a] :

$$m_{VEH}\begin{pmatrix}\dot{V}_{Cx}\\ \dot{V}_{Cy}\\ \dot{V}_{Cz}\end{pmatrix} - m_{VEH}\,\hat{a}_{G_{VEH}/G_C 0}\begin{pmatrix}\dot{p}_C\\ \dot{q}_C\\ \dot{r}_C\end{pmatrix} = F_{VEH} - m_{VEH}\,\hat{\Omega}_C\begin{pmatrix}V_{Cx}\\ V_{Cy}\\ V_{Cz}\end{pmatrix} + m_{VEH}\,\hat{\Omega}_C\,\hat{a}_{G_{VEH}/G_C 0}\begin{pmatrix}p_C\\ q_C\\ r_C\end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{4} m_{NSi}\,\hat{a}_{G_i/G_C 0}\begin{pmatrix}\dot{V}_{Cx}\\ \dot{V}_{Cy}\\ \dot{V}_{Cz}\end{pmatrix} + I_{VEH/G_C 0}\begin{pmatrix}\dot{p}_C\\ \dot{q}_C\\ \dot{r}_C\end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{4}(I_{Ri})_{C0}\,H_{Ri0}\begin{pmatrix}0\\ \dot{\omega}_{Ri}\\ 0\end{pmatrix} = M_{VEH/G_C} - \sum_{i=1}^{4} m_{NSi}\,\hat{a}_{G_i/G_C 0}\,\hat{\Omega}_C\begin{pmatrix}V_{Cx}\\ V_{Cy}\\ V_{Cz}\end{pmatrix} - \hat{\Omega}_C\,I_{VEH/G_C 0}\begin{pmatrix}p_C\\ q_C\\ r_C\end{pmatrix} - \sum_{i=1}^{4}\hat{\Omega}_C\,(I_{Ri})_{C0}\,H_{Ri0}\begin{pmatrix}0\\ \omega_{Ri}\\ 0\end{pmatrix}$$

Sans entrer dans l'explication des autres symboles, on constate effectivement que tous les facteurs des "vecteurs" $\mathbf{y}$ et $\dot{\mathbf{y}}$, et donc la matrice $\mathbf{A}$, deviennent constants (indices 0).

***2. Passage au modèle non linéaire***

Dans une étude générale des systèmes multicorps, on ne peut se limiter à ce cas de matrice de masse étendue constante (cf modèle de double-pendule orthogonal au §2.4.2). La matrice de masse $\mathbf{M}$ (ou matrice d'énergie cinétique) et donc la matrice de masse étendue $\mathbf{A}$ du modèle du 1er ordre dépendent des coordonnées généralisées et donc du temps ; en revanche, elles ne dépendent pas des vitesses généralisées, reportées dans le second membre $\mathbf{f}$.

Par conséquent, le modèle quasi-linéaire de l'équation (2.2.11) devient non linéaire :

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{q},x,t)\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y},x,t)} \qquad (2.3.7)$$

***3. Traitement du terme*** $\frac{d\mathbf{A}}{dx}$

Par conséquent, le terme $\frac{d\mathbf{A}}{dx}$ apparaissant dans le système de sensibilité (méthodes directe et adjointe) et dans l'expression de la sensibilité en méthode adjointe n'est plus constant ; dans la littérature, il est en général traité numériquement par différences finies. Développer son expression de façon analytique permettra d'éviter les limites de cette méthode (cf §2.2.3.1.1) et de gagner justement en généralité.

Enfin, plus précisément, ce terme $\frac{d\mathbf{A}}{dx}$ dépend à présent des sensibilités des coordonnées généralisées $\frac{d\mathbf{q}}{dx}$. Lorsque $g = q_i$, le calcul de l'intégrale finale par la résolution du système différentiel équivalent (cf (2.3.4)) est donc la seule solution (présence dans l'intégrande du résultat recherché !), mais est lent ; en revanche, lorsque $g \neq q_i$, le problème est plus grave puisqu'il faudrait connaître les sensibilités $\frac{d\mathbf{q}}{dx}$ pour le calcul de $\frac{d\overline{g}}{dx}$ alors que l'objectif-même de la méthode adjointe est de s'en passer !

---

*2.3.2.2.2 Traitement analytique de* $\frac{d\mathbf{A}}{dx}$

Deux dérivées de la matrice de masse étendue apparaissent dans les méthodes tirées de la littérature (cf §2.2.3.2) : $\frac{d\mathbf{A}}{dx}$ et $\dot{\mathbf{A}} = \frac{d\mathbf{A}}{dt}$. Cette dernière est calculée de la façon suivante :

$$\boxed{\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+\sum_j\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt}=\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\mathbf{q}}\right)^T\dot{\mathbf{q}}} \qquad (2.3.8)$$

avec :

- les dérivées partielles calculées sous forme analytique, $\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\mathbf{q}}$ étant un vecteur (n) dont la i[ème] composante est la matrice (2n x 2n) $\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial q_i}$ :

$$\boxed{\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\mathbf{q}}\right)^T=\left[\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial q_1}\quad\ldots\quad\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial q_i}\quad\ldots\quad\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial q_n}\right]} \qquad (2.3.9)$$

- $\dot{\mathbf{q}}$ le vecteur des vitesses généralisées, solution de la résolution du modèle dynamique, préalable à l'étude de sensibilité par l'une ou l'autre des deux méthodes.

A noter cependant que l'expression (2.3.9) ne joue aucun rôle dans la problématique énoncée au §2.3.2.2.1.

De même, soit

$$\boxed{\frac{d\mathbf{A}}{dx}=\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}+\sum_j\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dx}=\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}+\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\mathbf{q}}\right)^T\frac{d\mathbf{q}}{dx}} \qquad (2.3.10)$$

Le système de sensibilité (2.2.20), à résoudre dans la méthode directe et pièce maîtresse dans la démonstration de la méthode adjointe, devient :

$$\boxed{\mathbf{A}\frac{d\dot{\mathbf{y}}}{dx}-\left(\mathbf{J}\frac{d\mathbf{y}}{dx}-\left(\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\mathbf{q}}\right)^T\frac{d\mathbf{q}}{dx}\right)\dot{\mathbf{y}}\right)+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}\dot{\mathbf{y}}-\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x}=\mathbf{0}} \qquad (2.3.11)$$

Or $\left(\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\mathbf{q}}\right)^T\frac{d\mathbf{q}}{dx}\right)\dot{\mathbf{y}}=\mathbf{B}\frac{d\mathbf{y}}{dx}$ avec $\mathbf{B}$ une matrice carrée de dimension 2n, homogène à $\mathbf{J}$, formée de colonnes juxtaposées, dont la i[ème] est définie par :

$$\boxed{\mathbf{B}(1..2n,i)=\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y_i}\dot{\mathbf{y}}=\frac{\partial(\mathbf{A}\dot{\mathbf{y}})}{\partial y_i}} \qquad (2.3.12)$$

A noter que cette i[ème] colonne est nulle si $y_i$ est une vitesse généralisée.

Par conséquent, le nouveau système de sensibilité est :

$$\boxed{\mathbf{A}\frac{d\dot{\mathbf{y}}}{dx}-(\mathbf{J}-\mathbf{B})\frac{d\mathbf{y}}{dx}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}\dot{\mathbf{y}}-\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x}=\mathbf{0}} \qquad (2.3.13)$$

Par rapport à l'expression (2.2.20), la matrice jacobienne $\mathbf{J}$ est remplacée par $(\mathbf{J}-\mathbf{B})$ et la dérivée totale $\frac{d\mathbf{A}}{dx}$ par la dérivée partielle $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}$.

Concernant la méthode adjointe, le raisonnement reste le même qu'au paragraphe 2.2.3.2.5 et l'on remplace simplement $\mathbf{J}$ et $\frac{d\mathbf{A}}{dx}$ comme ci-dessus : le système adjoint de l'équation (2.2.25) devient :

$$\boxed{\mathbf{A}^T\dot{\boldsymbol{\lambda}}+\left(\dot{\mathbf{A}}^T+\mathbf{J}^T-\mathbf{B}^T\right)\boldsymbol{\lambda}=\left(\frac{\partial p}{\partial \mathbf{y}}\right)^T} \qquad (2.3.14)$$

(pour la même condition finale $\boldsymbol{\lambda}(t_f)=\mathbf{0}$)
tandis que l'intégrale finale est maintenant :

$$\boxed{\frac{d\overline{g}}{dx}=\int_0^{t_f}\left(\frac{\partial p}{\partial x}-\boldsymbol{\lambda}^T\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\dot{\mathbf{y}}\right)\right)dt} \qquad (2.3.15)$$

Le problème évoqué en fin du point 3 précédent est résolu puisque cette intégrale ne fait plus apparaître que des dérivées partielles, $\dot{\mathbf{y}}$ et $\boldsymbol{\lambda}$ étant connus en tant que solutions respectives des systèmes dynamique et adjoint.

A noter que pour la méthode directe, le système de sensibilité à résoudre reste le même que précédemment, bien qu'adoptant une nouvelle forme : ceci garantit que les sensibilités des coordonnées et vitesses généralisées sont les mêmes qu'auparavant. En revanche, dans la méthode adjointe, le système adjoint est différent (ajout de $-\mathbf{B}^T$) ; par conséquent le vecteur adjoint qui en résulte est aussi modifié, mais le résultat final de sensibilité reste le même car l'expression de l'intégrale finale est également modifiée (transformation de la dérivée totale en dérivée partielle). On retrouve une caractéristique de principe de la méthode de l'état-adjoint : le vecteur adjoint est arbitraire et ce "degré de liberté" permet d'arriver au résultat désiré en remplissant une certaine condition (ici, éviter le calcul des sensibilités des coordonnées et vitesses généralisées).

### 2.3.3 Traitement du système adjoint

C'est sur cette partie de l'algorithme que les évolutions ont été les plus importantes, afin d'accélérer la méthode adjointe, qui se révèle de prime abord plus lente que la méthode directe (cf §2.4.1). En effet, le paragraphe 2.3.2.1 a montré que dans la méthode adjointe, malgré le traitement de la dernière intégrale par le système différentiel équivalent, l'obtention de la sensibilité du critère non intégral en fonction du temps était encore handicapée par la présence du vecteur adjoint dans son expression : ceci nécessite en théorie la résolution du système adjoint pour chaque valeur discrète de $t_i$, ce qui discréditerait d'emblée la méthode adjointe pour les systèmes multicorps avant même de l'avoir testée…

Pour tout critère non intégral, ce paragraphe propose donc une évolution originale, consistant à rendre la résolution du système adjoint plus efficace :

- Le premier point est la démonstration d'une indication apportée par Haftka [HAF92], portant sur la forme-même du système différentiel adjoint ;

- A partir de cette nouvelle forme, et sachant que les solutions de toute équation différentielle sont combinaisons linéaires de celles issues d'une base de conditions finales, l'intégrale finale est simplifiée et rendue traitable par un système différentiel équivalent (cf §2.3.2.1), ce qui permet d'obtenir les sensibilités en fonction du temps.

En outre, cette méthode permet de limiter à 2n le nombre de résolutions du système adjoint et de rendre le calcul de l'intégrale finale indépendant du critère (non intégral), donc réutilisable pour tout autre critère $\overline{g}$.

Les deux évolutions ci-dessous ne sont pas valables si le critère est intégral ; en effet, la fonction Dirac disparaît alors de l'équation (2.3.18) qui suit, et les démonstrations sont caduques.

### 2.3.3.1 Transformation du système adjoint en système homogène

Haftka [HAF92] présente le système adjoint sous la forme (2.2.25) et (2.2.26) puis annonce : "en intégrant [ce système] de $t_{mi}-\varepsilon$ à $t_{mi}+\varepsilon$ pour un $\varepsilon$ infinitésimal, on montre facilement qu'[il] est équivalent au système"

$$\boxed{\mathbf{A}^T\dot{\boldsymbol{\lambda}}+\left(\mathbf{J}^T+\dot{\mathbf{A}}^T\right)\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{0}} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{\boldsymbol{\lambda}^T\left(t_{mi}\right)=-\frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}}\left(t_{mi}\right)\mathbf{A}^{-1}} \qquad (2.3.16)$$

sans préciser davantage la démonstration. A noter que $\dfrac{\partial g}{\partial \mathbf{y}}$ est un vecteur-ligne de dimension 2n dont la j$^{ème}$ composante est $\dfrac{\partial g}{\partial y_j}\left(t_{mi}\right)$ :

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}}\left(t_{mi}\right)=\left[\frac{\partial g}{\partial y_1}\left(t_{mi}\right) \quad \ldots \quad \frac{\partial g}{\partial y_j}\left(t_{mi}\right) \quad \ldots \quad \frac{\partial g}{\partial y_{2n}}\left(t_{mi}\right)\right]$$

Tout d'abord, il est effectivement intéressant de "transférer" les informations du second membre à la condition finale avant résolution, et ce pour plusieurs raisons :

- Le système différentiel devient homogène, sa résolution est donc plus simple (il est inutile de chercher des solutions particulières à l'équation avec second membre) ;
- Cette solution générale ne dépend plus du critère g : seules les constantes changent lorsque des critères différents sont étudiés ;

- Cette forme permet de limiter les calculs en exprimant la solution comme combinaison linéaire des solutions pour une base de conditions finales (cf §2.3.3.2 suivant).

Ensuite, les précédentes extensions du champ d'application entraînent les modifications suivantes :

- La matrice de masse étendue $\mathbf{A}$ dépend à présent des coordonnées généralisées donc du temps, ce qui engendre l'apparition de $\mathbf{B}$ dans le système différentiel et le remplacement de $\mathbf{A}$ par $\mathbf{A}\left(t_{mi}\right)$
- L'instant "critique" $t_{mi}$ devient l'instant "courant" $t_i$.

Le système (2.3.16) devient alors :

$$\boxed{\mathbf{A}^T\dot{\boldsymbol{\lambda}}+\left(\mathbf{J}^T-\mathbf{B}^T+\dot{\mathbf{A}}^T\right)\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{0}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\boldsymbol{\lambda}^T\left(t_i\right)=-\frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}}\left(t_i\right)\mathbf{A}\left(t_i\right)^{-1}} \qquad (2.3.17)$$

Enfin, nous avons voulu vérifier et démontrer le passage des équations (2.2.25) et (2.2.26) à ce dernier système (2.3.17), problème qui peut être formulé et généralisé en une dimension de la façon suivante : soit a(t) une fonction ne présentant pas de singularité, b(t) et g(t) des fonctions quelconques, $t_f$ l'instant final et $t_i \le t_f$. Il s'agit de démontrer que l'équation différentielle (2.3.18) associée à la condition finale (2.3.19) :

$$\boxed{a(t)\dot{\lambda}(t)+b(t)\lambda(t)=g(t)\delta(t-t_i) \quad \text{dans } ]0,t_f[} \ (2.3.18) \text{ avec } \boxed{\lambda(t_f)=0} \qquad (2.3.19)$$

est équivalente à (2.3.20) et (2.3.21) :

$$\boxed{a(t)\dot{\lambda}(t)+b(t)\lambda(t)=0 \quad \text{dans } ]0,t_i[\cup]t_i,t_f[} \ (2.3.20) \text{ avec } \boxed{\lambda(t_i)=-\frac{g(t_i)}{a(t_i)}} \ (2.3.21)$$

Dans un premier temps, cette équivalence a été vérifiée sous Maple pour plusieurs ensembles de fonctions a(t), b(t) et g(t) prises au hasard : quelles que soient ces fonctions, les courbes représentant $\lambda(t)$, obtenues en résolvant numériquement ((2.3.18)+(2.3.19)) ou ((2.3.20)+(2.3.21)) :

- sont confondues sur l'intervalle $]0,t_i[$ qui nous intéressera ultérieurement ;
- ne sont pas confondues sur $]t_i,t_f[$ : $\lambda(t)$ est nulle sur cet intervalle pour le premier système, alors qu'elle ne l'est pas pour le second ; on expliquera cette différence au cours de la démonstration.

Dans un second temps, la théorie des distributions et notamment le théorème du saut sont employés afin de démontrer l'équivalence entre les deux formulations. Précisons qu'il faut par hypothèse que les équations (2.3.18) et (2.3.20) ne présentent pas de singularité, *i.e.* $a(t)\neq 0$ sur $[0,t_f]$ ; ceci est toujours vérifié ici puisque $a(t)$ représente la matrice de masse étendue $\mathbf{A}$.

#### *2.3.3.1.1 Fonctions et distributions*

Soit la distribution $\left[\lambda(t)\right]$ dite "régulière", *i.e.* associée à la fonction $\lambda(t)$ continue par morceaux. La notation dérivée par rapport au temps $\dot{x}$ est remplacée ici par la notation $x'$ afin de faire apparaître clairement la différence entre dérivée de fonction $x'(t)$ (éventuellement considérée ensuite comme distribution $\left[x'(t)\right]$) et dérivée de distribution $\left[x(t)\right]'$.

#### *2.3.3.1.2 Point de départ : forme de l'équation (2.3.18)*

L'écriture de l'équation (2.3.18) est distributionnelle en raison de la présence du Dirac ; elle peut donc être écrite : $\left[a(t)\dot{\lambda}(t)\right]+\left[b(t)\lambda(t)\right]=g(t)\delta(t-t_i)$

ou encore $$\boxed{a(t)\left[\dot{\lambda}(t)\right]+b(t)\left[\lambda(t)\right]=g(t)\delta(t-t_i)} \quad (2.3.22)$$

car $\left[f(t)g(t)\right]=f(t)\left[g(t)\right]$ pour $f(t)$ fonction suffisamment régulière, ce qui est le cas ici pour $a(t)$ et $b(t)$ : en d'autres termes, le produit d'une fonction par une distribution régulière est égal à la distribution régulière associée au produit des fonctions.

#### *2.3.3.1.3 Théorème du saut*

Dans le cas où l'intervalle (ici : $]0,t_f[$) ne présente qu'un seul point de discontinuité (ici : $t_i$), le théorème du saut s'écrit :

$$\boxed{\left[\lambda(t)\right]'=\left[\lambda'(t)\right]+s(\lambda,t_i)\delta(t-t_i)} \text{ avec s le saut} \quad (2.3.23)$$

Ce théorème généralise le calcul de la dérivée de l'échelon $u(t)$ ; en effet, si $\lambda(t)=u(t-t_i)$,

$$\left[u(t-t_i)\right]'=\left[u'(t-t_i)\right]+s(u,t_i)\delta(t-t_i)=[0]+1.\delta(t-t_i)=\delta(t-t_i)$$

En reportant l'expression (2.3.23) dans (2.3.18), on obtient :

$$a(t)\left(\left[\lambda'(t)\right]+s(\lambda,t_i)\delta(t-t_i)\right)+b(t)\left[\lambda(t)\right]=g(t)\delta(t-t_i)$$

ou $$\boxed{a(t)\left[\lambda'(t)\right]+b(t)\left[\lambda(t)\right]=\left(g(t)-a(t)s(\lambda,t_i)\right)\delta(t-t_i)} \quad (2.3.24)$$

#### *2.3.3.1.4 Ajout de la condition (2.3.19)*

La condition (2.3.19) en $t_f$ implique en fait $\lambda(t)=0$ sur l'intervalle $]t_i,t_f[$ ; en effet, pour chaque condition "finale" (de même que pour chaque condition "initiale"), la solution à l'équation (2.3.18) est unique sur $]t_i,t_f[$ car cette équation ne présente pas de singularité ($a(t)\neq 0$ *a fortiori* sur $]t_i,t_f]$, cf hypothèses). La fonction nulle est solution évidente et donc unique pour le système ((2.3.18)+(2.3.19)).

Par conséquent, l'ajout de la condition (2.3.19) engendre

$$\lambda\left(t_i^+\right)=0 \qquad \text{et} \qquad s(\lambda,t_i)=\lambda\left(t_i^+\right)-\lambda\left(t_i^-\right)=-\lambda\left(t_i^-\right)$$

(2.3.24) devient $a(t)\left[\lambda'(t)\right]+b(t)\left[\lambda(t)\right]=\left(g(t)+a(t)\lambda\left(t_i^-\right)\right)\delta(t-t_i)$

ou encore
$$\boxed{a(t)\left[\lambda'(t)\right]+b(t)\left[\lambda(t)\right]-\left(g(t)+a(t)\lambda\left(t_i^-\right)\right)\delta(t-t_i)=0} \qquad (2.3.25)$$

#### *2.3.3.1.5 Conclusion*

La partie $P_{gauche}=a(t)\left[\lambda'(t)\right]+b(t)\left[\lambda(t)\right]$ est régulière (associée à des fonctions continues par morceaux) et est assimilable par exemple à une densité de masses. Par opposition, la partie $P_{droite}=\left(g(t)+a(t)\lambda\left(t_i^-\right)\right)\delta(t-t_i)$ est en Dirac (ou en combinaisons de Dirac), portée par un seul point (ou une combinaison de points), et est assimilable par exemple à une répartition de masses ponctuelles. Par conséquent, les deux termes étant "de nature étrangère", ils sont valables sur des domaines différents ; la relation (2.3.25), valable dans $]0,t_f[$ est donc <u>équivalente</u> aux deux relations suivantes :

- Terme $P_{droite}$ :

$$g(t)+a(t)\lambda\left(t_i^-\right)=0 \quad \text{pour} \quad t=t_i \quad \text{ou} \quad \boxed{\lambda\left(t_i\right)=\frac{g(t_i)}{a(t_i)}} \qquad (2.3.26)$$

- Terme $P_{gauche}$ :

$$a(t)\left[\lambda'(t)\right]+b(t)\left[\lambda(t)\right]=0 \text{ ou } \left[a(t)\lambda'(t)+b(t)\lambda(t)\right]=0 \text{ sur le reste de } ]0,t_f[$$

soit $\boxed{a(t)\lambda'(t)+b(t)\lambda(t)=0}$ dans $\boxed{]0,t_i[\cup]t_i,t_f[}$ (2.3.27)

Remarquons qu'à la différence de ((2.3.18)+(2.3.19)), $\lambda(t)\neq 0$ sur $]t_i,t_f[$ (cf début du paragraphe 2.3.3.1).

#### 2.3.3.2 Solution combinaison linéaire des solutions pour une base de conditions finales

Pour un critère non intégral en $t_i$, la résolution du système adjoint fournit le vecteur adjoint fonction du temps entre 0 et $t_i$. L'objectif étant d'obtenir la sensibilité en fonction de $t_i$ sur l'intervalle $[0, t_f]$, il faudrait donc recommencer l'intégration du système adjoint pour chaque $t_i$ (discrétisé) !

Ce paragraphe montre qu'il est possible de limiter le nombre de résolutions du système à 2n (nombre d'équations dynamiques et dimension du vecteur adjoint), en démontrant le fait que les solutions sont combinaisons linéaires des conditions finales. Ensuite, seules des opérations matricielles élémentaires (produits, additions) permettront d'obtenir les fonctions $\lambda(t)$ quel que soit l'instant intermédiaire $t_i$.

Cette possibilité est engendrée par la forme du système adjoint obtenue au point précédent, dans laquelle $t_i$ se retrouve dans les conditions finales, et non dans le système adjoint proprement dit. De plus, le critère g apparaissant également dans les conditions finales, les résultats des 2n résolutions seront valables et utilisables quel que soit g !

##### *2.3.3.2.1 Equation de départ, notations et objectifs*

Au regard de l'équation (2.3.17), le système suivant est considéré :

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{\lambda}} + \mathbf{M}_{\boldsymbol{\lambda}}(t)\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}} \tag{2.3.28}$$

En imposant le "vecteur" (2n) de conditions finales $\boldsymbol{\lambda_i}$ à l'instant $t_i$, la résolution de ce système fournira la sensibilité à $t_i$ ; il est donc légitime, à présent, de vouloir obtenir la sensibilité fonction de $t_i$, c'est-à-dire à tout instant $t_i \in ]t_0, t_f]$. Mais sans réflexion supplémentaire, ceci impliquerait de résoudre le système adjoint pour chaque instant $t_i$ auquel on recherche la sensibilité du critère.

##### *2.3.3.2.2 Différentes fonctions $\boldsymbol{\lambda}(t)$*

- $\boxed{\boldsymbol{\lambda_i}^*(t)}$ : ce vecteur contient les 2n fonctions du temps recherchées, solutions du système adjoint lorsque les conditions finales $\boxed{\boldsymbol{\lambda_i}}$ sont appliquées en $t_i$. Rappelons que ces 2n fonctions sont différentes pour chaque valeur de $t_i \in ]0, t_f]$ ;

- $\boxed{\boldsymbol{\lambda_f}^*(t)}$ contient les solutions uniques de l'équation (2.3.28) lorsque les conditions finales, notées $\boxed{\boldsymbol{\lambda_f}}$, sont imposées en $t_f$, instant final.

Afin de fixer les idées, la Figure 2.3.2 donne des exemples arbitraires des différentes variables dans le cas d'une seule dimension : les vecteurs deviennent des scalaires.

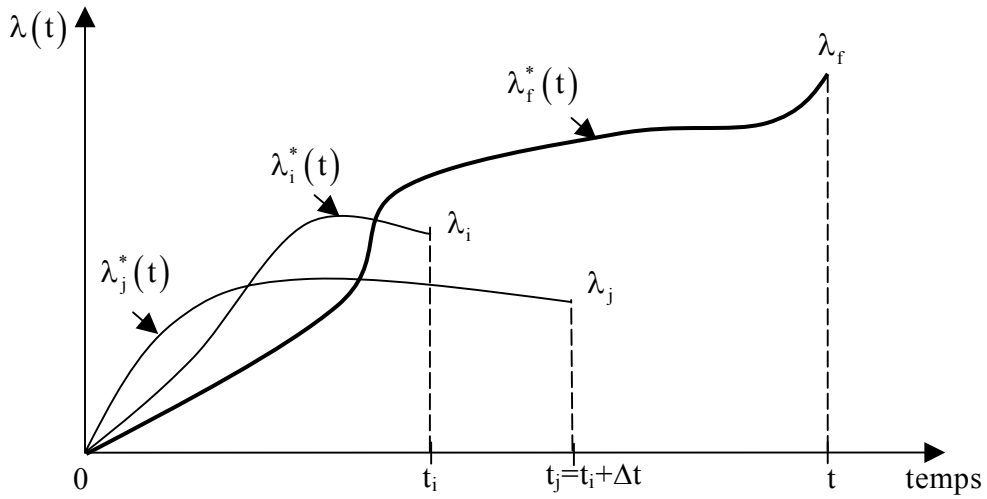



**Figure 2.3.2** Illustration des différentes variables $\lambda(t)$ en une dimension

*2.3.3.2.3 Idée*

**Démontrons qu'il suffit de connaître $\lambda_f^*(t)$ afin d'en déduire toutes les solutions $\lambda_i^*(t)$ au moyen de calculs matriciels simples ($\lambda_i$ et $\lambda_f$ étant connus).**

*2.3.3.2.4 Forme de la solution de (2.3.28)*

- *Avertissement :* Les écritures suivantes ne sont que des outils momentanés, qui ne serviront pas en définitive dans les calculs qui seront réellement faits. Elles permettent simplement de trouver la forme de la solution.

- Par analogie avec le cas d'une seule fonction inconnue, les solutions recherchées $\boldsymbol{\lambda_i}^*(t)$ peuvent s'écrire :

$$\boxed{\boldsymbol{\lambda_i}^*(t) = \mathbf{e}^{\int_t^{t_i} \mathbf{M}_\lambda(\tau)d\tau} \boldsymbol{\lambda_i} = \mathbf{Q_i}(t)\boldsymbol{\lambda_i}} \qquad (2.3.29)$$

Et si $t_i = t_f$ (cas particulier) :

$$\boxed{\boldsymbol{\lambda_f}^*(t) = \mathbf{e}^{\int_t^{t_f} \mathbf{M}_\lambda(\tau)d\tau} \boldsymbol{\lambda_f} = \mathbf{Q_f}(t)\boldsymbol{\lambda_f}} \qquad (2.3.30)$$

Remarquons que par définition, $\mathbf{Q_i}(t_i) = \left[\overset{=}{1}\right]$ et $\mathbf{Q_f}(t_f) = \left[\overset{=}{1}\right]$.

- En effet, $\dot{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathbf{i}}^{*}(t)=\left(\frac{d}{dt}\left(\int_{t}^{t_i}\mathbf{M}_{\lambda}(\tau)d\tau\right)\right)\mathbf{e}^{\int_{t}^{t_i}\mathbf{M}_{\lambda}(\tau)d\tau}\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{i}}$

  Soit $$\boxed{\dot{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathbf{i}}^{*}(t)=-\mathbf{M}_{\lambda}(t)\,\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{i}}^{*}(t)} \qquad (2.3.31)$$

  A noter le signe moins, dû à l'intégration rétrograde (l'intégrale "remonte" le temps), caractéristique de la méthode adjointe (cf §2.2.3.2.5).

- Il est cependant nécessaire de justifier le sens de l'exponentielle d'une matrice qui apparaît dans la forme choisie pour $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{i}}^{*}(t)$ : par analogie avec les scalaires, on peut poser la définition suivante :

  $$\boxed{\int_{t}^{t_i}\mathbf{M}_{\lambda}(\tau)d\tau=\mathbf{N}(t_i)-\mathbf{N}(t)} \text{ (notion de primitive)} \qquad (2.3.32)$$

  et l'exponentielle peut alors faire l'objet d'un développement en série, dont le calcul relève d'opérations matricielles classiques et bien définies :

  $$\mathbf{e}^{\mathbf{N}(t_i)-\mathbf{N}(t)}=\left[\overline{\overline{1}}\right]+\left(\mathbf{N}(t_i)-\mathbf{N}(t)\right)+\frac{1}{2!}\left(\mathbf{N}(t_i)-\mathbf{N}(t)\right)^{2}+\ldots$$

  En prenant l'exponentielle sous cette forme – qui est une matrice –, on vérifie toujours la relation initiale (2.3.28) ; en effet, en reportant ce développement en série dans (2.3.32) puis (2.3.29), on obtient

  $$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathbf{i}}^{*}(t)=\left(-\dot{\mathbf{N}}(t)-\dot{\mathbf{N}}(t)\left(\mathbf{N}(t_i)-\mathbf{N}(t)\right)-\dot{\mathbf{N}}(t)\frac{1}{2!}\left(\mathbf{N}(t_i)-\mathbf{N}(t)\right)^{2}+\ldots\right)\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{i}}$$

  où $$\dot{\mathbf{N}}(t)=-\frac{d}{dt}\int_{t}^{t_i}\mathbf{M}_{\lambda}(\tau)d\tau=\mathbf{M}_{\lambda}(t)$$

  donc $$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathbf{i}}^{*}(t)=-\mathbf{M}_{\lambda}(t)\left(\left[\overline{\overline{1}}\right]+\left(\mathbf{N}(t_i)-\mathbf{N}(t)\right)+\frac{1}{2!}\left(\mathbf{N}(t_i)-\mathbf{N}(t)\right)^{2}+\ldots\right)\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{i}}$$

  et $$\boxed{\dot{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathbf{i}}^{*}(t)=-\mathbf{M}_{\lambda}(t)\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{i}}^{*}} \qquad (2.3.33)$$

  On vérifie bien que l'expression de $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{i}}^{*}$ donnée en (2.3.29) est solution de l'équation de départ (2.3.28).

- Rappelons que les développements précédents sont bien entendu valables dans le cas particulier i=f.

#### *2.3.3.2.5 Evaluation de* $\mathbf{Q_f}(t)$

On rappelle que d'après (2.3.30) et (2.3.32) :

$$\boxed{\mathbf{Q_f}(t) = \mathbf{e}^{\int_t^{t_f} \mathbf{M}(\tau)d\tau} = \mathbf{e}^{\mathbf{N}(t_f)-\mathbf{N}(t)}} \tag{2.3.34}$$

$\mathbf{Q_f}(t)$ est une fonction matricielle du temps totalement indépendante des conditions finales sur $\boldsymbol{\lambda}$. Si l'on s'impose des conditions finales successives $\boldsymbol{\lambda_f}$ formant une base pour $\boldsymbol{\lambda}_\mathbf{f}^*(t)$, les solutions numériques permettront de déterminer $\mathbf{Q_f}(t)$.

Par exemple, soit $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{f_1}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, ..., \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{f_j}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, ..., \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{f_{2n}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

La j$^{ème}$ intégration numérique entre $t_f$ et $t_0$ (rétrograde) fournit $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{f_j}}^*(t)$ qui est la j$^{ème}$ colonne de $\mathbf{Q_f}(t)$ d'après (2.3.30) :

$$\boxed{\mathbf{Q_f}(t) = \left[\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{f_1}}^*(t), ..., \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{f_j}}^*(t), ..., \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{f_{2n}}}^*(t)\right]}$$

Seules 2n intégrations numériques sont donc nécessaires pour déterminer entièrement $\mathbf{Q_f}(t)$.

#### *2.3.3.2.6 Relation entre* $\mathbf{Q_i}(t)$ *et* $\mathbf{Q_f}(t)$

D'après (2.3.34), $\mathbf{Q_f}(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{N}(t)}\mathbf{e}^{-\mathbf{N}(t_f)}$ et $\mathbf{Q_i}(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{N}(t)}\mathbf{e}^{-\mathbf{N}(t_i)}$.

Par conséquent : $\mathbf{e}^{\mathbf{N}(t)} = \mathbf{Q_f}(t)\mathbf{e}^{\mathbf{N}(t_f)} = \mathbf{Q_i}(t)\mathbf{e}^{\mathbf{N}(t_i)}$

et $\mathbf{Q_i}(t) = \mathbf{Q_f}(t)\mathbf{e}^{\mathbf{N}(t_f)}\mathbf{e}^{-\mathbf{N}(t_i)} = \mathbf{Q_f}(t)\mathbf{e}^{\mathbf{N}(t_f)-\mathbf{N}(t_i)}$

d'où finalement $\boxed{\mathbf{Q_i}(t) = \mathbf{Q_f}(t)\mathbf{Q_f}(t_i)^{-1}}$

Comme annoncé, la matrice solution pour une borne supérieure en $t_i$ (instant intermédiaire) quelconque peut être obtenue à partir de la matrice-solution unique pour une borne supérieure en $t_f$ (instant final).

*2.3.3.2.7 Solution du système adjoint et forme de l'intégrale finale*

- La solution <u>générale</u> du problème est donc

$$\boxed{\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{i}}^{*}(t)=\mathbf{Q}_{\mathbf{f}}(t)\mathbf{Q}_{\mathbf{f}}(t_i)^{-1}\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{i}}}$$

  On constate qu'elle s'affranchit de la résolution du système adjoint pour les temps intermédiaires $t_i$ et ne nécessite que 2n résolutions permettant de déterminer la matrice $\mathbf{Q}_{\mathbf{f}}(t)$.

- L'intégrale finale de la méthode adjointe (équation (2.3.15)), devient

$$\frac{d\bar{g}}{dx}(t_i)=\int_0^{t_i}\left(\frac{\partial p}{\partial x}-\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{i}}^{*T}\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\dot{\mathbf{y}}\right)\right)dt$$

  dans laquelle on remplace $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{i}}^{*T}$ par son expression

$$\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{i}}^{*T}=\left(\mathbf{Q}_{\mathbf{f}}(t)\mathbf{Q}_{\mathbf{f}}^{-1}(t_i)\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{i}}\right)^{T}=\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{i}}^{T}\left(\mathbf{Q}_{\mathbf{f}}^{-1}(t_i)\right)^{T}\mathbf{Q}_{\mathbf{f}}^{T}(t)$$

  Finalement $$\boxed{\frac{d\bar{g}}{dx}(t_i)=\frac{\partial g}{\partial x}(t_i)-\boldsymbol{\lambda}^{T}(t_i)\left(\mathbf{Q}_{\mathbf{f}}^{-1}(t_i)\right)^{T}\int_0^{t_i}\left(\mathbf{Q}_{\mathbf{f}}^{T}(t)\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\dot{\mathbf{y}}\right)\right)dt}\quad(2.3.35)$$

*2.3.3.2.8 Conclusion : améliorations apportées*

Dans cette dernière forme, certains termes sont calculés d'après leur expression formelle (dont $\boldsymbol{\lambda}(t_i)=-\frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}}(t_i)\mathbf{A}^{-1}(t_i)$), et d'autres sont le résultat de résolutions numériques (dont $\dot{\mathbf{y}}$, issu de la résolution du système dynamique initial) :

$$\frac{d\bar{g}}{dx}(t_i)=\frac{\partial g}{\partial x}(t_i)-\boldsymbol{\lambda}^{T}(t_i)\left(\mathbf{Q}_{\mathbf{f}}^{-1}(t_i)\right)\int_0^{t_i}\left(\mathbf{Q}_{\mathbf{f}}^{T}(t)\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\dot{\mathbf{y}}\right)\right)dt\qquad(2.3.35)$$

avec →Expressions formelles, →Expressions numériques.

Cette expression (2.3.35) présente trois avantages :

- Au lieu de résoudre le système adjoint à chaque instant intermédiaire $t_i$, il est à présent résolu numériquement seulement 2n fois (nombre réduit et constant) afin de constituer la matrice $\mathbf{Q}_{\mathbf{f}}(t)$ puis la matrice $\mathbf{Q}_{\mathbf{f}}^{-1}(t_i)$ par simple affectation $t=t_i$ après inversion de la précédente.

- Cette matrice et donc l'intégrande ne dépendent plus de la borne supérieure $t_i$, ce qui va faciliter l'obtention du résultat en fonction de cette borne (cf §2.3.2.1).

- Cette matrice est la même quel que soit le critère g. Par ce point, on apporte une amélioration au principal inconvénient de la méthode adjointe, réputée non adaptée aux études à grand nombre de critères g (cf §2.2.3.2.8).

### 2.3.4 Synthèse-bilan

Dans ce paragraphe 2.3, on a tenté d'obtenir la sensibilité fonction du temps, dans le cas général non linéaire en menant les calculs formels (analytiques) le plus loin possible.

Certains développements mathématiques détaillés ne s'appliquent que pour une seule des deux méthodes et/ou pour un certain type de critère ; le Tableau 2.3.1 résume ces différents cas :

| | ***Critère intégral*** | ***Critère non intégral*** |
|---|---|---|
| ***Méthode directe*** | Système différentiel équivalent pour le calcul de l'intégrale (cf §2.3.2.1) | Immédiat grâce au Dirac |
| ***Méthode adjointe*** | | - Travail sur le système adjoint (transformation en système homogène §2.3.3.1) et l'intégrale finale, aboutissant à 2n résolutions au §2.3.3.2 (et résultats réutilisables pour un autre critère)<br>- Système différentiel équivalent pour le calcul de l'intégrale (cf §2.3.2.1) |

**Tableau 2.3.1** Bilan des améliorations théoriques

On constate que le calcul de la sensibilité du critère intégral en fonction de la borne supérieure en méthode adjointe n'a pu faire l'objet d'améliorations : son évolution au cours du temps ne sera donc accessible qu'au prix de multiples itérations de la résolution de l'algorithme complet (système adjoint et intégrale finale) d'où un coût élevé en terme de temps de calcul. La méthode directe semble donc meilleure dans le cas du critère intégral, à moins que :

- la méthode adjointe soit significativement plus rapide que sa concurrente lorsqu'il s'agira de calculer les sensibilités à de nombreux paramètres de construction [HAF92] (voir les études de cas au paragraphe suivant 2.4) ;

- l'on ne recherche la sensibilité qu'à la borne supérieure de l'intervalle.

Dans ces deux cas, la simplicité de l'algorithme de la méthode adjointe non modifiée (résolution du système adjoint puis intégration) peut être un avantage.

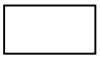
L'algorithme de la Figure 2.3.3 présente les deux méthodes, adaptées aux systèmes multicorps ; par rapport à la littérature [HAF92, BEH98], il intègre le fait que la matrice de masse étendue $\mathbf{A}$ peut à présent dépendre de $\mathbf{q}$ (donc de $\mathbf{y}$) et de x : $\frac{d\mathbf{A}}{dx}$ devient $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}$, et une nouvelle matrice $\mathbf{B}$ apparaît. On constate les imbrications des méthodes directe et adjointe finales.

***Légende de la** Figure 2.3.3**:***

Données (avec expression complète des fonctions de variables)

Etapes opérationnelles de la méthode directe

Etapes opérationnelles de la méthode de l'état-adjoint



Etapes ne servant qu'à la démonstration des "étapes opérationnelles"

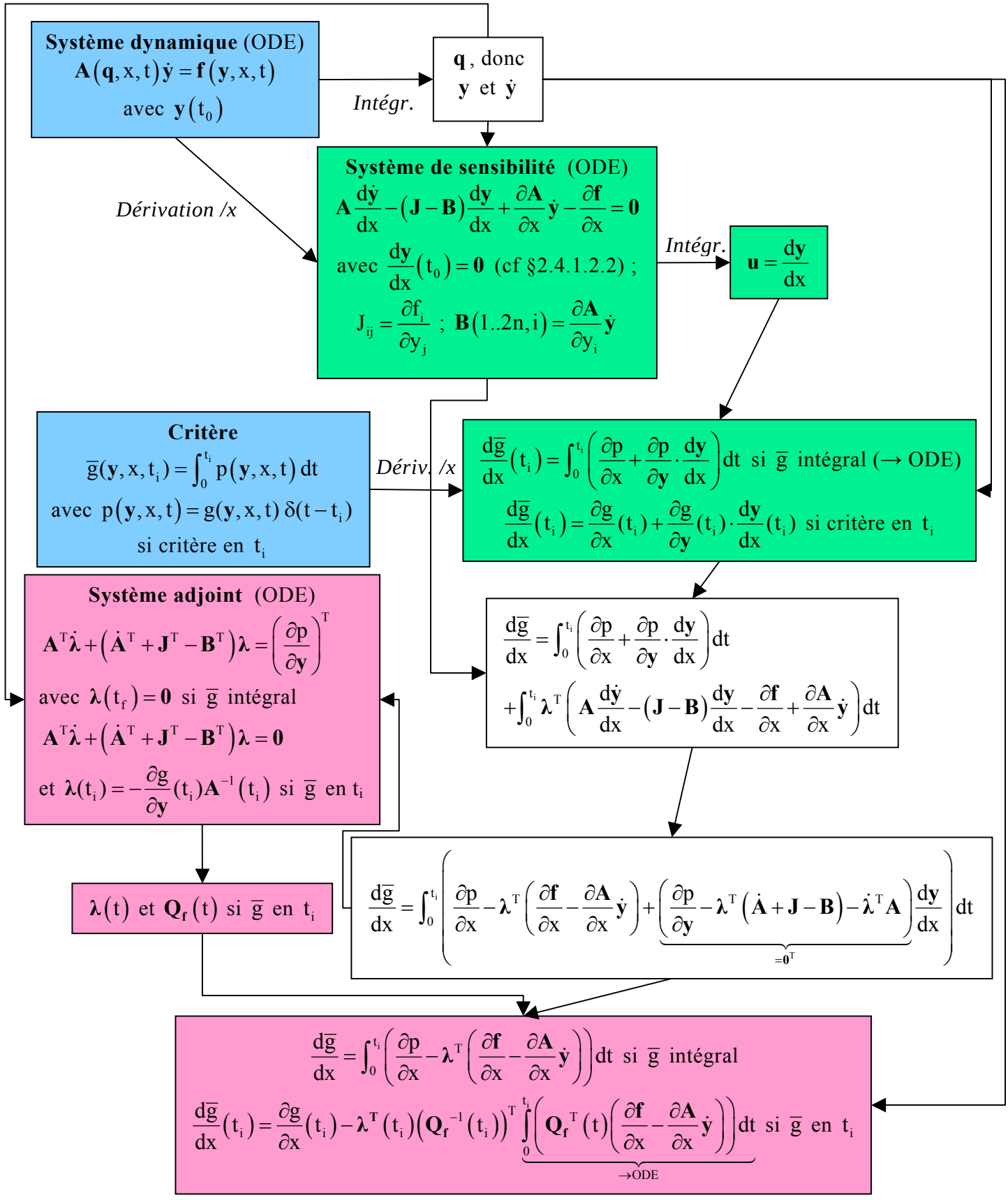



**Figure 2.3.3** Algorithme récapitulatif des méthodes directe et adjointe

# 2.4 Etudes de cas - comparaison des méthodes dans le cas des multicorps

Des études de sensibilité aux paramètres de conception ont été menées en programmant sous Maple et Matlab les deux méthodes analytiques (directe et de l'état-adjoint) et en les appliquant à des systèmes à modèles dynamiques de plus en plus complexes :

- Système masse-ressort-amortisseur linéaire (à une puis deux masses) puis non linéaire (cf §2.4.1)

- Double-pendule orthogonal (cf §2.4.2)

- Modèle de véhicule roulis-lacet-dérive (cf §2.4.3)

En plus de bien comprendre ce qu'est l'évolution de la sensibilité en fonction du temps, la programmation des logiciels, qui n'est pas une fin en soi, a permis d'atteindre un certain nombre d'objectifs. Il s'agissait de :

- valider les modifications apportées aux deux méthodes pour les appliquer aux systèmes multicorps (modèles non linéaires) en vérifiant notamment que les deux méthodes mènent aux mêmes résultats ;

- déterminer quelle méthode est la mieux adaptée aux systèmes multicorps, et notamment vérifier si la méthode adjointe est plus performante quand le nombre de paramètres de construction x est élevé [HAF92, BEH98], cas typique de ces systèmes ; et pour quel type de critère ?

- appliquer les méthodes à la dynamique du véhicule et étudier l'utilité du calcul des sensibilités.

Il est à remarquer que ces applications ont été menées en parallèle des améliorations théoriques présentées au paragraphe 2.3 précédent, qu'elles ont souvent motivées.

Enfin, concernant les logiciels employés, la programmation sous Maple, logiciel de développement formel utilisé dans la littérature [EBE07], appliquée au système simple masse-ressort-amortisseur, a permis de tirer les premiers éléments de comparaison ; Puis seul le logiciel Matlab a été employé dès l'étude du double-pendule, forcément numérique, notamment dans le cadre du master de recherche de Porte [PORTE06].

## 2.4.1 Exemples académiques : systèmes masse-ressort-amortisseur

### 2.4.1.1 Préliminaires

#### *2.4.1.1.1 Avertissement : sensibilités étudiées*

Ce paragraphe n'étudie que la sensibilité des variables d'état (coordonnées et vitesses généralisées) par rapport aux paramètres de conception :

- dans la méthode directe, la résolution du système de sensibilité fournit directement les sensibilités de toutes les coordonnées et vitesses généralisées ;
- pour la méthode adjointe, on pose $g = q_i$ ou $g = \dot{q}_i$

Comme écrit au paragraphe 2.3.3.2.2, ce cas est un cas particulier de critère "composé" (de coordonnées et vitesses généralisées) non intégral, qui sera étudié de façon générale au paragraphe 2.4.2 concernant le double-pendule orthogonal, de même que le critère intégral. Rappelons que l'étude de la sensibilité des variables d'état par la méthode adjointe est une originalité de ce travail de thèse.

#### *2.4.1.1.2 Premiers essais*

Le logiciel Maple 10 est utilisé dans un premier temps pour programmer la méthode directe uniquement sur des systèmes différentiels simples, à une ou deux équations, du premier ordre ou second ordre, telle l'équation $\boxed{\ddot{q} - x^2\dot{q} + q = 0}$.

Outre la prise en main du logiciel (résolution de systèmes d'équations différentielles, graphiques 3D à partir de matrices par exemple), cette étape de programmation formelle a permis de comparer les sensibilités $\frac{dq}{dx}(x,t)$ obtenues par résolution du système de sensibilité à celles déterminées par simple dérivation analytique de la solution du modèle dynamique ou par application des différences finies centrées à un instant t (voir équation (2.2.6) du paragraphe 2.2.3.1.1) : les trois fonctions sont bien les mêmes.

Les nappes obtenues ($\frac{dq}{dx}$ étant fonction de x et t) sont de même type que celles présentées en Figure 2.4.2 et Figure 2.4.3 concernant le système masse-ressort-amortisseur ; on se référera également au paragraphe 2.4.1.2.2 concernant le choix des conditions initiales de sensibilité, problème que ces essais préliminaires ont contribué à résoudre.

A noter que tous les systèmes suivants seront désormais étudiés à partir de leur modèle dynamique du premier ordre (formalisme d'état)

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{q},x,t)\dot{\mathbf{y}}=\mathbf{f}(\mathbf{y},x,t)} \qquad (2.4.1)$$

comme annoncé au §2.2.3.2.1.

### 2.4.1.2 Système masse-ressort-amortisseur linéaire

#### *2.4.1.2.1 Présentation du système et des sensibilités recherchées*

Ce système simple à modèle linéaire, avec $\mathbf{A}$ constante (ne dépendant pas des coordonnées généralisées) et $\mathbf{f}$ fonction linéaire des coordonnées et vitesses généralisées, est étudié par les deux méthodes. Il est choisi car servant souvent de premier test dans la littérature [BEH98, SER98a, HAU87].

La masse m décrit un mouvement de translation suivant $\vec{z}$, sans frottement.

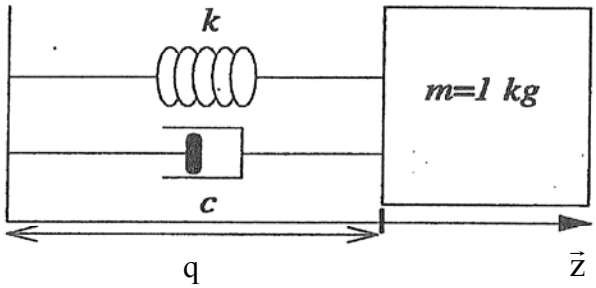



**Figure 2.4.1** Système masse-ressort-amortisseur linéaire [BEH98]

Le modèle dynamique est

$$\boxed{m\ddot{q}+c\dot{q}+kq=0} \qquad \text{(second ordre)}$$

ou

$$\boxed{\begin{cases} m\dot{y}_2+cy_2+ky_1=0 \\ \dot{y}_1-y_2=0 \end{cases}} \qquad \text{(premier ordre)}$$

En adoptant le formalisme d'état (cf §2.2.3.2.1 et équation (2.4.1)), on obtient

$$\boxed{\begin{bmatrix} 0 & m \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -ky_1-cy_2 \\ y_2 \end{Bmatrix}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\mathbf{A}\dot{\mathbf{y}}=\mathbf{f}}$$

Pour m=1kg, on choisit de calculer la sensibilité $\boxed{u_{1,k}(k,t)=\dfrac{dy_1}{dk}(k,t)}$ pour c=1kg.s$^{-1}$. Pour la méthode adjointe, on pose donc : $\boxed{g=y_1}$.

*2.4.1.2.2 Conditions initiales de sensibilité*

Dans la méthode directe, les conditions initiales du problème de sensibilité $\frac{dy_1}{dx}(t=0)$ et $\frac{dy_2}{dx}(t=0)$ sont prises nulles, à l'instar d'Haftka [HAF92]. Behar semble utiliser également ces conditions initiales nulles, tout en estimant que ceci constitue "une hypothèse forte dans le cadre des systèmes multicorps, où ce n'est généralement pas vérifié" [BEH98]. Au contraire, nous pensons qu'il n'y a pas d'autre condition initiale possible : ce paragraphe tente de le démontrer, quels que soient le système, les coordonnées et vitesses généralisées $y_i$ (variables d'état) et le paramètre de construction x considérés.

Parmi tous les paramètres qui influencent le comportement du système, on peut compter les paramètres de construction, mais aussi les conditions initiales. Or, lorsqu'on s'intéresse à la sensibilité par rapport à un paramètre, on suppose que tous les autres sont constants, comme dans une dérivée partielle, bien que cette sensibilité s'écrive $\frac{dy_i}{dx}$ (comme écrit au §2.2.1.2). Dans ces conditions, si l'on s'intéresse à la sensibilité par rapport à un paramètre de construction, comme c'est le cas dans notre étude, les conditions initiales doivent être envisagées comme fixes :

$$\boxed{\frac{dy_i}{dx}(t=0)=0} \qquad (2.4.2)$$

avec $y_i$ une coordonnée généralisée ($q_i$) ou une vitesse généralisée ($\dot{q}_i$) - d'ailleurs, la première entraîne la seconde puisque $\frac{d\dot{q}_i}{dx}=\frac{d}{dt}\frac{dq_i}{dx}$.

Plus concrètement, $y_i$ ne peut dépendre de x à l'instant initial, sinon le système étudié pour $x_1$ n'est plus le même que celui étudié pour $x_2$ ($x_1 \neq x_2$). Par exemple, dans le cas d'un pendule simple, l'angle et la vitesse initiales ($y_i$) ne peuvent dépendre de la longueur du pendule (x) ! L'objectif est de comparer $y_i(t)$ avant et après un changement de x : or si $y_i$ n'est pas le même au départ, aucune conclusion ne peut être tirée. En d'autres termes, on ne peut faire varier à la fois $y_i$ et x. A noter que la position ou la vitesse ne sont pas forcément nuls.

Afin de vérifier la relation (2.4.2), des conditions initiales non nulles ont été appliquées au système (ainsi qu'aux équations théoriques du §2.4.1.1.2) : une solution est trouvée au système de sensibilité, mais qui ne correspond pas à la sensibilité de référence, obtenue en dérivant la solution du modèle dynamique, ou calculée par différences finies (cf §2.2.3.1.1).

En conclusion, les sensibilités initiales sont toujours nulles, comme déjà considéré plusieurs fois au paragraphe 2.3.

*2.4.1.2.3 Exemple de résultats en "mode formel"*

Le logiciel Maple permet de résoudre cette étude de sensibilité très simple de façon formelle. Les expressions, que l'on peut vérifier à la main à partir des expressions du paragraphe 2.2.3.2, sont directement des sorties Maple.

- La résolution du modèle dynamique, commun aux deux méthodes, fournit les expressions suivantes, pour $y_1(0) = 0$ et $y_2(0) = 5$ m.s$^{-1}$ :

$$y_1(t) = \frac{10\, e^{-\frac{1}{2} c\sim t} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c\sim^2 + 4\,k\sim}\; t\right)}{\sqrt{-c\sim^2 + 4\,k\sim}} \quad \text{et} \quad y_2(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2} c\sim t}\left(-\frac{10\, c\sim \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c\sim^2 + 4\,k\sim}\; t\right)}{\sqrt{-c\sim^2 + 4\,k\sim}} + 10\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c\sim^2 + 4\,k\sim}\; t\right)\right)$$

Le symbole ~ sur k et c indique que ces derniers font l'objet d'une hypothèse, posée au préalable dans le programme (commande "*assume*") : en effet, la condition classique $\omega = -c^2 + 4k > 0$ doit être vérifiée (cf dénominateurs). Sans cette indication, Maple refuse de résoudre les équations différentielles.

- Dans la méthode directe, le système de sensibilité est :

$$\frac{d}{dt} u_{y_2}(t) + k\, u_{y_1}(t) + c\, u_{y_2}(t) = -y_1(t),\ \frac{d}{dt} u_{y_1}(t) - u_{y_2}(t) = 0$$

et sa résolution pour les conditions initiales nulles (cf §2.4.1.2.2) donne notamment, en posant $\omega = -c^2 + 4k > 0$ :

$$u_{y1}(t) = \boxed{\frac{5}{2}\,\frac{e^{-\frac{1}{2} c\sim t}\left(-\sin(\omega\, t) + \cos(\omega\, t)\, t\, \omega\right)}{\omega^3}} \qquad (2.4.3)$$

A noter qu'on obtient également $u_{y2}(t)$ au cours de cette résolution par la méthode directe.

- Dans la méthode adjointe, le système adjoint est

$$\frac{d}{dt}\lambda_2(t) - k\sim\,\lambda_1(t) = 0,\ \frac{d}{dt}\lambda_1(t) - c\sim\,\lambda_1(t) + \lambda_2(t) = 0$$

avec les conditions finales $\lambda_1(t_i) = 0$ et $\lambda_2(t_i) = -1$ d'après la formule 2.3.17 du paragraphe 2.3. On ne présente ici que la solution $\lambda_1(t)$, l'expression de $\lambda_2(t)$ étant encore plus complexe :

$$\lambda_1(t) = \frac{1}{\sqrt{-c\sim^2 + 4\,k\sim}\left(\cosh\left(\frac{1}{2}\,c\sim\,ti\right) + \sinh\left(\frac{1}{2}\,c\sim\,ti\right)\right)}\left(2\right.$$
$$e^{\frac{1}{2}\,c\sim\,t}\left(-\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c\sim^2 + 4\,k\sim}\;t\right)\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c\sim^2 + 4\,k\sim}\;ti\right)\right.$$
$$\left.\left.+\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c\sim^2 + 4\,k\sim}\;t\right)\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c\sim^2 + 4\,k\sim}\;ti\right)\right)\right),$$

La sensibilité $u_{y1}(t)$ obtenue est la même que (2.4.3). A la différence de la méthode directe, une seule sensibilité est obtenue pour une résolution de la méthode adjointe.

- Graphiquement :

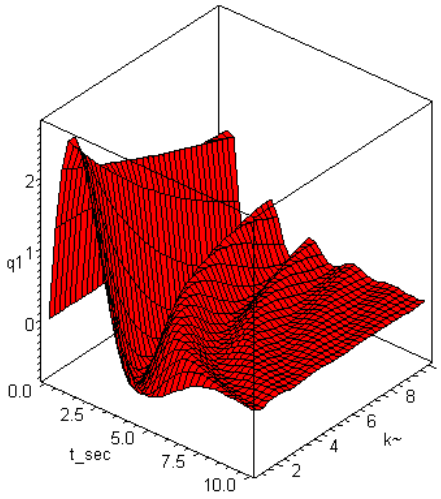



**Figure 2.4.2** Système masse-ressort-amortisseur linéaire – tracé de $y_1(k,t)$ pour m=1kg et c=1kg.s$^{-1}$

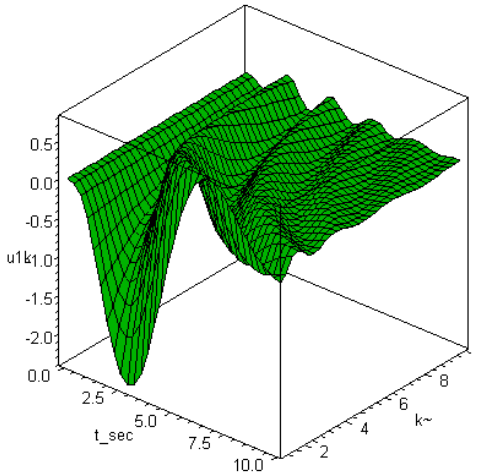



**Figure 2.4.3** Système masse-ressort-amortisseur linéaire – tracé de $u_{1,k} = \frac{dy_1}{dk}(k,t)$ pour m=1kg et c=1kg.s$^{-1}$

On peut observer la sensibilité au paramètre de construction k en fonction de ce même paramètre de construction par exemple. On constate que les sensibilités initiales sont nulles. Enfin, les valeurs numériques des sensibilités sont évidemment faciles à extraire.

- Conclusion :

Les résultats formels des deux méthodes sont identiques entre eux et à ceux de la littérature [BEH98], la méthode directe étant environ deux fois plus rapide que sa concurrente. Mais la complexité de ces résultats confirme que l'utilisation de résolutions numériques est inévitable pour des systèmes plus complexes, mais tout de même encore simples ! (double-pendule)

D'autre part, la résolution en formel a permis d'obtenir le vecteur adjoint en fonction de t et de $t_i$, puis la sensibilité (après intégration de 0 à $t_i$) en fonction du temps $t_i$ : la discrétisation temporelle a été inutile. Mais sur la plupart des systèmes pour lesquels la résolution analytique est impossible, l'utilisation des développements du paragraphe 2.3.3.2 et le calcul de $\mathbf{Q_f}$, non employés ici, sont nécessaires.

*2.4.1.2.4 Modes numérique et paramétrique*

Pour la plupart des systèmes multicorps, une résolution numérique s'impose : le modèle dynamique puis les systèmes de sensibilité et adjoint doivent être résolus en affectant dès le départ des valeurs aux paramètres de construction, par exemple k et c dans le cas du système présent, et les résultats sont discrets. La portée générale de la résolution formelle est considérablement réduite : les fonctions du temps et des paramètres de construction sont inconnues, donc il faut recommencer la résolution pour obtenir les sensibilités pour un autre doublon de valeurs de ces paramètres, et à terme "boucler" sur les paramètres - c'est ce qui a été fait dans les programmes Matlab (cf §2.4.2 et §2.4.3).

Il existe sous Maple 10 une troisième voie, intermédiaire, que l'on nommera résolution paramétrique : si l'on n'affecte pas les paramètres de construction au départ lors d'une résolution numérique, la résolution des systèmes différentiels formels renvoie des procédures "boîtes noires", fonctions du temps et des paramètres de construction. Ces dernières sont ensuite réutilisables dans le système différentiel suivant, ce qui se produit dans les deux méthodes d'étude de sensibilité (cf algorithme, Figure 2.3.3). Dans notre exemple, la résolution du système différentiel initial renvoie des procédures $y_i(t,k,c)$. En fin de programme, il suffit d'affecter les valeurs des paramètres donnés pour que les sensibilités souhaitées soit calculées dans ce cas-là. Bien que les fonctions formelles soient inconnues, ceci permet d'obtenir les sensibilités non seulement comme fonctions (discrètes) du temps, mais aussi des paramètres donnés.

L'étude du système de la Figure 2.4.1 est reprise en "mode paramétrique" afin de tester le traitement original du système adjoint à l'aide d'une combinaison linéaire de solutions pour une base des conditions finales sur $\boldsymbol{\lambda}$ (cf §2.3.3). La sensibilité du déplacement de la masse est calculée (critère non intégral $g = q$). La Figure 2.4.4 ci-dessous présente par exemple les quatre composantes de la matrice $\mathbf{Q_f}(t)$, issues des 2n résolutions du système adjoint (avec ici n le nombre d'équations et de coordonnées généralisées égal à 1) : la première colonne de cette matrice correspond au vecteur adjoint issu de la résolution pour $\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, la seconde de celle pour $\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, pour $t_f = 10s$.

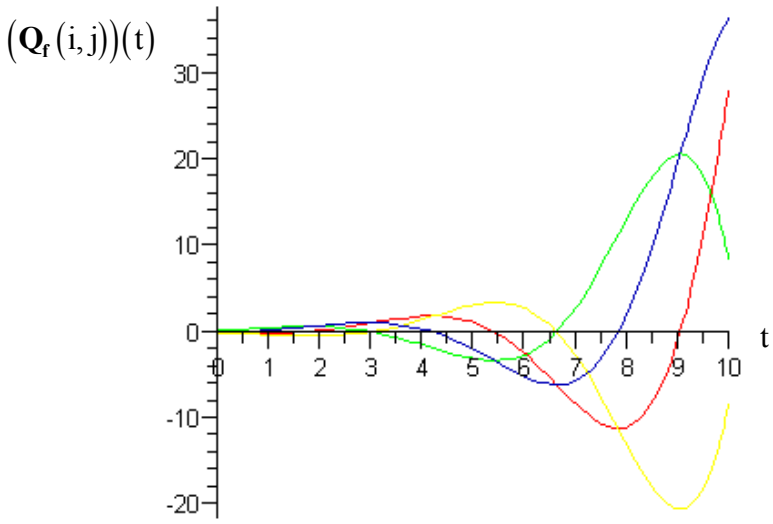



**Figure 2.4.4** Système masse-ressort-amortisseur linéaire – Composantes de $\mathbf{Q_f}(t)$

*Légende :*

$\mathbf{Q_f}(1,1)(t) = \lambda_{f1}^*(t)$ pour $\boldsymbol{\lambda_f}^T = [1,0]$ en rouge ;
$\mathbf{Q_f}(2,1)(t) = \lambda_{f2}^*(t)$ pour $\boldsymbol{\lambda_f}^T = [1,0]$ en jaune ;
$\mathbf{Q_f}(1,2)(t) = \lambda_{f1}^*(t)$ pour $\boldsymbol{\lambda_f}^T = [0,1]$ en vert ;
$\mathbf{Q_f}(2,2)(t) = \lambda_{f2}^*(t)$ pour $\boldsymbol{\lambda_f}^T = [0,1]$ en bleu.

Cependant, les "affectations finales" des paramètres de construction, réalisées après exécution de l'ensemble de l'algorithme direct ou adjoint, prennent environ 85% du temps total de calcul (cf §2.4.2.4) – la méthode adjointe restant environ deux fois plus lente (ordre de grandeur des calculs : respectivement 6 et 12 secondes sur processeur Pentium 1,7 GHz pour les méthodes directe et adjointe). En fait, en mode paramétrique, il semble que le logiciel ne fasse que "préparer" des procédures de résolution tout au long de l'exécution, puis effectue les calculs à la fin, lors de l'affectation des paramètres de construction, et pour des valeurs discrètes de ceux-ci. Ce mode est donc pratique pour l'utilisateur car il évite d'avoir à programmer des "boucles" numériques, mais au final, il n'y a pas de gain de temps par rapport à une résolution numérique pure… Et les problèmes de programmation (types et affectations des variables que l'on réutilise d'une procédure à l'autre) se multiplient lorsque le modèle devient légèrement non linéaire (cf §2.4.2.4).

### *2.4.1.2.5 Rapidité comparée des deux méthodes pour plusieurs sensibilités*

- ***Objectif***

Le logiciel sous Maple en "mode paramétrique" est à présent développé afin qu'il soit capable de calculer la sensibilité de q à un nombre quelconque de paramètres de construction x (ici m, k et c autant de fois que l'on souhaite) : dans la méthode directe, le système de sensibilité doit être réécrit et résolu pour chaque sensibilité, tandis que dans la méthode adjointe, le vecteur adjoint reste le même et seule la dernière intégrale doit être redéterminée. La méthode adjointe doit donc être d'autant plus rapide que sa concurrente que le nombre de paramètres dont on étudie l'influence augmente.

- ***Résultats***

Les annexes 3.1 et 3.2 présentent les résultats des programmes sous Maple 10 les plus aboutis, capables de déterminer un nombre quelconque de sensibilités au cours de la même exécution, en fonction (discrète) de ces paramètres ; de plus, ils sont "universels", c'est-à-dire qu'il suffit de remplacer le système différentiel dynamique pour qu'ils déterminent automatiquement tous les éléments constitutifs des systèmes suivants et qu'ils effectuent les calculs.

Sont présentées par exemple les valeurs de $u_k = \frac{dq}{dk}$ et $u_c = \frac{dq}{dc}$ sur le système masse-ressort-amortisseur linéaire pour $q(0) = 0$ et $\dot{q}(0) = 5\,m.s^{-1}$, issues de la méthode directe (les résultats de la méthode adjointe sont identiques jusqu'au quatrième chiffre significatif) : les valeurs de u et v sont données à 4 instants de 0 à 3s et 3 valeurs discrètes de chaque paramètre.

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k(0,1,1) & u_c(0,1,1) \\ u_k(1,1,1) & u_c(1,1,1) \\ u_k(2,1,1) & u_c(2,1,1) \\ u_k(3,1,1) & u_c(3,1,1) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} u_k(0,1,2) & u_c(0,1,2) \\ u_k(1,1,2) & u_c(1,1,2) \\ u_k(2,1,2) & u_c(2,1,2) \\ u_k(3,1,2) & u_c(3,1,2) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} u_k(0,1,3) & u_c(0,1,3) \\ u_k(1,1,3) & u_c(1,1,3) \\ u_k(2,1,3) & u_c(2,1,3) \\ u_k(3,1,3) & u_c(3,1,3) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} u_k(0,2,1) & u_c(0,2,1) \\ u_k(1,2,1) & u_c(1,2,1) \\ u_k(2,2,1) & u_c(2,2,1) \\ u_k(3,2,1) & u_c(3,2,1) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} u_k(0,2,2) & u_c(0,2,2) \\ u_k(1,2,2) & u_c(1,2,2) \\ u_k(2,2,2) & u_c(2,2,2) \\ u_k(3,2,2) & u_c(3,2,2) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} u_k(0,2,3) & u_c(0,2,3 \\ u_k(1,2,3) & u_c(1,2,3 \\ u_k(2,2,3) & u_c(2,2,3 \\ u_k(3,2,3) & u_c(3,2,3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} u_k(0,3,1) & u_c(0,3,1) \\ u_k(1,3,1) & u_c(1,3,1) \\ u_k(2,3,1) & u_c(2,3,1) \\ u_k(3,3,1) & u_c(3,3,1) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} u_k(0,3,2) & u_c(0,3,2) \\ u_k(1,3,2) & u_c(1,3,2) \\ u_k(2,3,2) & u_c(2,3,2) \\ u_k(3,3,2) & u_c(3,3,2) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} u_k(0,3,3) & u_c(0,3,3 \\ u_k(1,3,3) & u_c(1,3,3 \\ u_k(2,3,3) & u_c(2,3,3 \\ u_k(3,3,3) & u_c(3,3,3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ -.46854 & -1.0995 \\ -1.7914 & -1.2007 \\ -2.3539 & 0.17763 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ -.30657 & -.61313 \\ -.90224 & -.45112 \\ -1.1202 & 6.4405\,10^{-8} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ -.21025 & -.36615 \\ -.53041 & -.23411 \\ -.67095 & -0.058665 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ -.42234 & -.90002 \\ -1.1135 & -.10478 \\ -.47013 & 1.1660 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ -.27698 & -.49692 \\ -.58925 & -0.026053 \\ -.38723 & 0.33454 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ -.19063 & -.29541 \\ -.36631 & -0.035629 \\ -.31090 & 0.11154 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ -.37942 & -.72117 \\ -.62353 & 0.50492 \\ 0.27607 & 0.83653 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ -.24947 & -.39290 \\ -.35873 & 0.21133 \\ -0.045273 & 0.28071 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ -.17236 & -.23212 \\ -.24244 & 0.079936 \\ -.11719 & 0.12604 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

- ***Comparaison de la rapidité***

Dans ce cas précis, avec la même précision demandée, la méthode directe reste environ deux fois plus rapide (processeur Pentium 1,7 GHz) :

- méthode directe : 9,6 sec dont 7,8 sec pour les affectations finales
- méthode adjointe : 16,3 sec dont 13,8 sec pour les affectations finales

Ceci est dû au fait que la méthode adjointe résoud ici (1+2n+2) systèmes différentiels successifs (dynamique initial, 2n systèmes adjoints, 2 intégrations finales), alors que la méthode directe n'en résout que 1+2 (dynamique initial, 2 sensibilités) ; l'écart devrait se réduire puis s'inverser pour un nombre de sensibilités supérieur, mais on constate par exemple pour cinq sensibilités différentes (successivement k,k,c,k,c dans le même programme) qu'au contraire, il s'accentue. En fait, outre le nombre de résolutions, la méthode adjointe comporte trois niveaux de réutilisation des résultats (au lieu de deux dans la directe), donc les "affectations finales" dans les procédures sont plus complexes.

- ***Conclusion***

Dans ce cas où $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x) = \text{cste}$ et $g = y_i$, la méthode directe ne semble présenter que des avantages par rapport à la méthode adjointe : elle est plus rapide, plus simple et plus puissante, puisqu'elle calcule et met en mémoire simultanément la sensibilité de toutes les coordonnées et vitesses généralisées (tous les $y_i$) ! C'est probablement l'explication de l'absence du cas $g = y_i$ par la méthode adjointe dans la littérature.

Et le calcul de sensibilités par rapport à de nombreux paramètres de construction, ne change pas cette tendance, contrairement à ce que dit Haftka [HAF92]. Le mode de programmation "paramétrique" impliquant des procédures imbriquées (et peut-être notre inaptitude à coder efficacement… quoique les mêmes erreurs ont dû être reproduites dans les deux méthodes !) peut être une explication ; de toute manière, les exemples plus complexes seront programmés numériquement.

Cependant, la méthode adjointe pourrait devenir intéressante pour la sensibilité d'un critère $\overline{g}$ **fonction des variables d'état** (non intégral ou intégral : de stabilité par exemple) : par rapport à la sensibilité d'une seule variable d'état, il faudra rajouter une intégration dans la méthode directe, alors qu'elle est en fait déjà contenue dans les programmes initiaux pour la méthode adjointe – et la pénalise d'ailleurs pour les cas où $g = y_i$ (cf ci-dessus). On a bon espoir que cette dernière se révèle alors plus rapide, avec un gain d'autant plus important que le nombre de paramètres donnés x sera élevé : c'est la raison qui justifie l'emploi de la méthode adjointe en optimisation de la mise en forme et en mécanique des structures en général [LAR03].

#### 2.4.1.3 Systèmes masse-ressort-amortisseur complexes

Sans entrer dans le détail, les méthodes de sensibilité ont été appliquées à deux systèmes dérivés du système linéaire précédent, et programmées sous Maple10 (mode "paramétrique" pour le développement) et Matlab (mode numérique utilisé pour les systèmes ultérieurs plus complexes) :

- les systèmes linéaires à deux [HAU87] et trois masses testent la robustesse des programmes par leur capacité à traiter des systèmes différentiels à nombre d'équations plus élevé ;
- le système masse-ressort-amortisseur non linéaire se caractérise par la non-colinéarité de l'axe de translation du ressort et de l'amortisseur et de celui de la trajectoire de la masse ; le vecteur de charge $\mathbf{f}$ du modèle dépendant des $y_i$ de façon non linéaire, cette étude permet de valider certaines évolutions de la théorie.

### 2.4.2 Comparaison de l'efficacité des deux méthodes : double-pendule orthogonal

#### 2.4.2.1 Motivations et objectifs de l'étude

- ***Modèle***

Ce système est le fil conducteur de cette thèse (cf §1.5.5.2 et §3.4.1). Bien qu'académique, il est le modèle de départ de plusieurs auteurs ([SER98a, AND02]) ; Sohl présente quant à lui un double-pendule à liaisons parallèles dans [SOH01], alors que Serban présente même un pendule simple dans [SER01].

Le mouvement du double-pendule orthogonal est régi par un modèle dynamique dont la matrice $\mathbf{A}$ n'est plus constante, mais de plus est fortement non linéaire par rapport aux coordonnées généralisées, donc aux variables d'état (cf §2.2.1.1.1 et §2.2.3.2.1) : les innovations de l'algorithme (cf Figure 2.3.3) peuvent être testées.

- ***Critère***

Les premiers essais sur le système très simple précédent (cf §2.4.1) ont mis en évidence la lenteur relative de la méthode adjointe par rapport à la méthode directe pour le calcul des sensibilités des variables d'état ; mais la tendance pourrait s'inverser pour des critères plus évolués. Ainsi, la sensibilité de l'énergie cinétique du double-pendule, composée des vitesses généralisées, et celle de son intégrale par rapport au temps, sont étudiées en fonction du temps.

- ***Logiciel***

Enfin, le paragraphe précédent a également mis au jour les limites du calcul "paramétrique" sous Maple, qui est en fait numérique. Or Matlab offre davantage de possibilités dans ce domaine (clarté de Simulink, possibilité de créer des interfaces pour l'entrée des données). Après le développement et les corrections sous Maple, Matlab est donc à présent utilisé afin de comparer la rapidité des deux méthodes pour l'étude de sensibilité des critères précités.

### 2.4.2.2 Caractéristiques de l'étude

#### *2.4.2.2.1 Rappel du modèle*

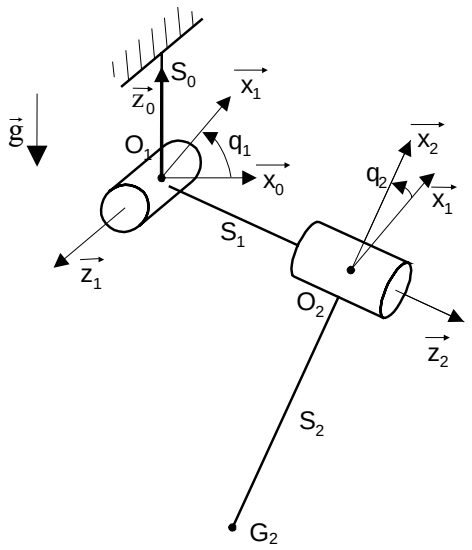



**Figure 2.4.5** Double-pendule orthogonal

Les axes de rotation des solides $S_1$ et $S_2$ sont disposés perpendiculairement. Les liaisons sont considérées parfaites. Le lecteur se référera au §1.5.5.2 pour les caractéristiques géométriques et inertielles.

Les équations de la dynamique déterminées par les TIG et vérifiées à la main par la méthode de Lagrange sont mises sous le formalisme d'état suivant (on rappelle que $y_1 \equiv q_1$ et $y_3 \equiv q_2$) :

$$\begin{bmatrix} 0 & A_1 + m_2 r_2^2 + B_2 \cos(y_3)^2 & 0 & r_2 m_2 l_2 \sin(y_3) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 m_2 l_2 \sin(y_3) & 0 & B_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_2 m_2 l_2 \cos(y_3) y_4^2 + 2B_2 \cos(y_3)\sin(y_3) y_2 y_4 - g\left[m_1 l_1 \sin(y_1) + m_2 r_2 \sin(y_1) - m_2 l_2 \cos(y_1)\cos(y_3)\right] \\ y_2 \\ -1/2 B_2 \sin(2y_3) y_2^2 - g m_2 l_2 \sin(y_3)\sin(y_1) \\ y_4 \end{bmatrix}$$

qu'on écrira $\boxed{\mathbf{A}\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}}$.

Pour simplifier, $G_1 \equiv O_2$, c'est-à-dire $l_1 = r_2$ ; par conséquent, les moments d'inertie peuvent être remplacés par $A_1 = m_1 l_1^2$ et $B_2 = m_2 l_2^2$ et tous les paramètres de construction apparaissent de façon explicite : pour cette première étude, on a donc effectivement $\frac{dx_i}{dx_j} = 0$ quels que soient i et j. Mais laisser apparents les moments d'inertie ne

poserait pas de problème en vertu notamment du principe de superposition (voir la discussion au §2.2.1.2).

On constate que la matrice $\mathbf{A}$ n'est plus constante et dépend à présent des variables d'état, de plus de façon fortement non linéaire. Le vecteur $\mathbf{f}$ est également dans ce cas depuis l'étude du système masse-ressort-amortisseur non linéaire.

#### *2.4.2.2.2 Critères et paramètres de construction*

Dans un premier temps, le critère choisi, sur lequel on veut étudier l'influence des paramètres à l'instant t, est l'énergie cinétique galiléenne $T^0$, qui dépend des variables d'état de façon non linéaire :

$$\boxed{2T^0 = \left(A_1 + B_2 \cos^2 y_3 + m_2 r_2^{\,2}\right) y_2^{\,2} + B_2 y_4^{\,2} + 2 m_2 r_2 l_2 y_2 y_4 \sin y_3} \qquad (2.4.4)$$

avec là aussi : $A_1 = m_1 l_1^{\,2}$ et $B_2 = m_2 l_2^{\,2}$.

Le second critère étudié est l'intégrale de $T^0$ par rapport au temps, ou énergie cinétique moyenne multipliée par $t_f$, que l'on souhaite obtenir en fonction de la valeur de cette borne supérieure. En fait, la signification physique du critère présente moins d'intérêt que la possibilité d'étudier la sensibilité d'une intégrale, qui revêt une signification importante en optimisation des systèmes multicorps, ou en simulation et optimisation de la mise en forme (cf §2.2.1.1.4, §2.2.2.2 et §2.4.2.4) : Laroussi intègre également une énergie (de déformation) [LAR03]. Il aurait aussi été possible ici d'étudier le trajet parcouru par $G_2$.

L'influence des quatre paramètres de construction $m_1$, $m_2$, $l_2$ et $r_2 = l_1$ est testée, car :

- Le rapport des temps de calcul des deux méthodes est variable suivant le paramètre étudié ;
- L'objectif est de voir si la méthode adjointe est plus compétitive à partir d'un certain nombre de paramètres étudié au sein de la même exécution.

#### *2.4.2.2.3 Procédure de comparaison*

Les calculs sont effectués au sein du même programme, avec la même précision numérique de $10^{-8}$ imposée tant en relatif qu'en absolu, et le même solveur d'équation ODE113. Le programme principal est nommé comparaison.m ; l'annexe 4 détaille l'architecture et la composition du programme [PORTE06].

A noter que la syntaxe relative aux systèmes différentiels est la suivante :

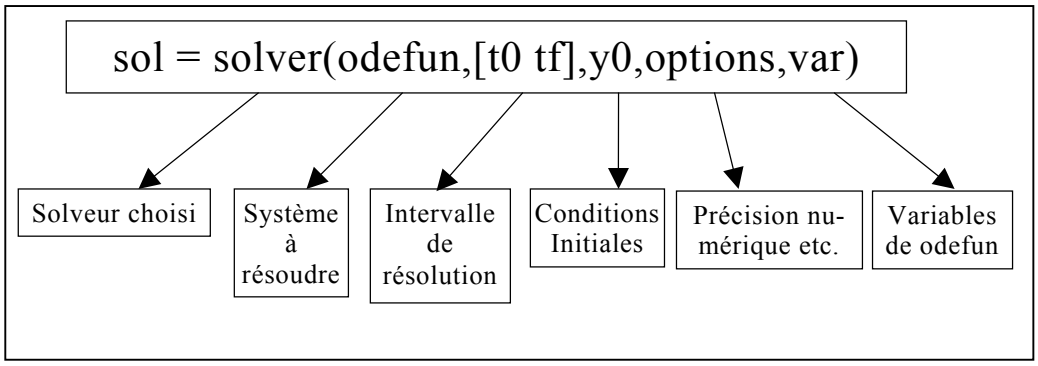



**Figure 2.4.6** Syntaxe Matlab pour la résolution des systèmes différentiels

### 2.4.2.3 Résultats et analyse

La programmation sous Matlab a été réalisée par Benjamin Porte au cours de son stage de Master. Les figures et tableaux suivants sont issus de [PORTE06].

#### *2.4.2.3.1 Sensibilité de l'énergie cinétique*

- ***Résultats bruts***

Pour la sensibilité de l'énergie cinétique, les résultats obtenus avec les deux méthodes de calcul sont extrêmement proches (écart relatif de 2% maximum) : on présente à la Figure 2.4.7 la sensibilité de $T^0$ par rapport à $r_2$ pour

- $m_1 = 4kg$ ; $m_2 = 2kg$ ; $r_2 = 5m$ ; $l_2 = 2m$
- les conditions initiales : $q_1(t=0) = q_2(t=0) = \frac{\pi}{4}$ et $\dot{q}_1(t=0) = \dot{q}_2(t=0) = 0$

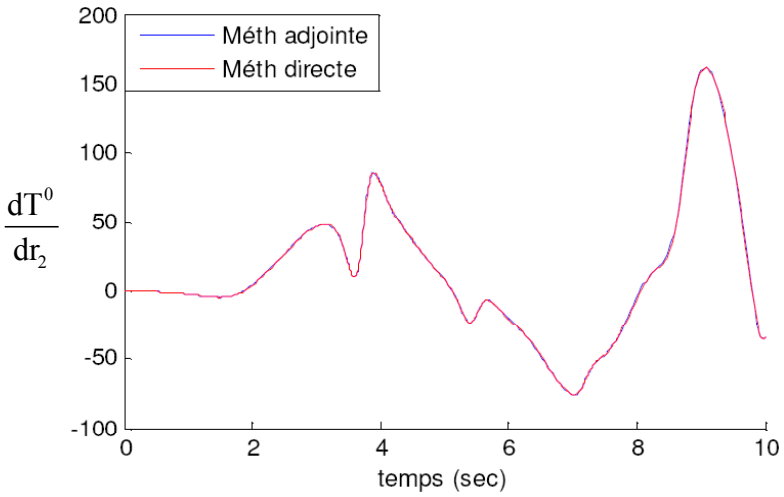



**Figure 2.4.7** Double-pendule orthogonal – comparaison de la sensibilité $\frac{dT^0}{dr_2}(t)$ obtenue par les deux méthodes

L'ensemble des quatre courbes-résultats ne présentant pas d'intérêt en tant que tel, il est reporté en annexe 5.1.

- ***Comparaison de la rapidité des deux méthodes***

| **Récapitulatif temps de calcul** (en secondes) | | Syst. Adjoint | sensib m1 | sensib m2 | sensib l2 | sensib r2 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Méthode directe | Coord. Généralisées | | 0,86 | 0,83 | 0,71 | 0,91 | 3,31 |
| | Critère | | 0,2 | 0,2 | 0,19 | 0,25 | 0,84 |
| | Total | | 1,06 | 1,03 | 0,9 | 1,16 | 4,15 |
| Méthode adjointe | | 2,89 | 3,23 | 3,13 | 3,46 | 3,2 | 15,91 |
| Rapport temps adjointe/directe | | | | | | | 3,83 |

**Tableau 2.4.1** Double-pendule orthogonal – récapitulatif temps de calcul pour la sensibilité de l'énergie cinétique

Dans ce cas d'étude (critère composé non intégral), le Tableau 2.4.1 montre que la méthode adjointe est beaucoup plus lente (4 fois) que la méthode directe ; une fois réalisé "l'investissement de la résolution du système adjoint", commun aux quatre sensibilités recherchées, l'idée est de gagner du temps par la suite lors du calcul des sensibilités : le rapport pour chaque sensibilité devrait donc être inférieur à 1 pour que, comme prévu initialement dans la littérature, la méthode adjointe se révèle plus rapide pour un nombre de x élevé. On constate que ce n'est pas le cas.

- ***Discussion – analyse des causes***

Tout d'abord, il faut souligner qu'en tant que mécaniciens, nos connaissances en informatique et plus particulièrement en optimisation de code ne sont que très parcellaires. Le fait que nous ayons codé nous-mêmes les deux méthodes devrait cependant assurer une certaine égalité dans la comparaison des temps de calculs.

La cause la plus évidente de perte de temps dans la méthode adjointe tient à la manière dont les systèmes différentiels sont résolus par Matlab. Les solveurs choisis sont des solveurs à pas variable qui s'adaptent de manière autonome au cas à traiter afin de garantir la précision demandée, et offrent le meilleur rapport temps de calcul/précision, mais ils rendent nécessaires des interpolations aux instants intermédiaires : en effet, les systèmes différentiels à résoudre successivement font appel aux solutions temporelles de systèmes différentiels précédemment résolus (les "réutilisations" évoquées au §2.4.1.2.4, Figure 2.3.3), mais dont les valeurs numériques discrétisées n'ont en général pas été déterminées aux mêmes pas de temps. Dès lors, il faut recourir à une "réévaluation" des solutions du premier système aux pas de temps du nouveau système différentiel, d'où accroissement du temps de calcul. Or ces interpolations, relevées en étudiant le code Matlab du programme "comparaison.m", sont plus nombreuses dans le cas adjoint :

| Récapitulatif: nombre de réévaluations nécessaires au cours des calculs | | |
|---|---|---|
| | **Méthode directe** | **Méthode adjointe** |
| Réutilisations des variables d'état (8 termes) | 8 fois | 12 fois |
| Réutilisations des sensibilités (8 termes) | 4 fois | X |
| Réutilisations de la matrice adjointe $\mathbf{Q}_f$ (16 termes) | X | 8 fois |
| **Total** | **96 évaluations** | **224 évaluations** |

**Tableau 2.4.2** Double-pendule orthogonal – Nombre de "réévaluations" de solutions de systèmes différentiels

Le temps de calcul consacré à l'interpolation des variables d'état, des sensibilités et de la matrice $\mathbf{Q}_f$ représente 80% pour la méthode adjointe et 60% pour la méthode directe ! Pour réduire cette part, il faudrait être capable de définir une discrétisation du temps compatible avec les différentes résolutions de systèmes différentiels et s'assurer que cette nouvelle discrétisation n'affecte pas la précision des résultats tout en entraînant une diminution du temps de calcul.

Ceci dit, si l'on calcule le rapport de temps de calcul adjointe/directe en ne tenant pas compte des temps d'évaluations intermédiaires, on obtient pour le cas exposé un rapport d'environ 1,8, beaucoup moins pénalisant pour la méthode adjointe, mais toujours défavorable à cette dernière. Le problème des réévaluations successives ne suffit donc pas à expliquer la totalité de l'écart entre les deux méthodes : on peut donc conclure que **la méthode directe, plus simple, est meilleure pour un critère composé non intégral.**

A noter que la détermination du vecteur adjoint par l'utilisation de la théorie utilisant la matrice $\mathbf{Q}_f$ peut conduire à des erreurs numériques trop importantes pour permettre la résolution numérique du problème. Ce problème apparaît lorsque la matrice $\mathbf{Q}_f$, qui doit être inversée au cours des calculs, est trop mal conditionnée.

*2.4.2.3.2 Sensibilité de l'intégrale de l'énergie cinétique*

- ***Résultats bruts***

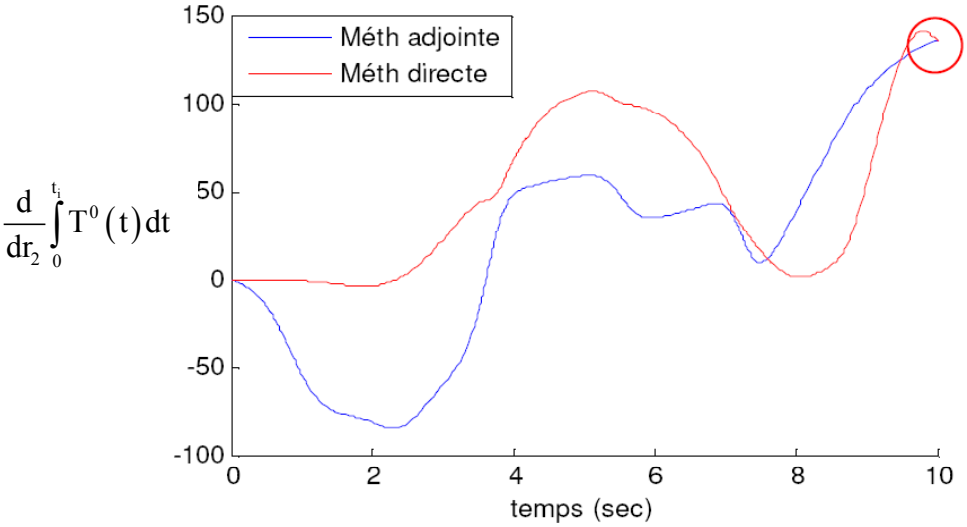



**Figure 2.4.8** Double-pendule orthogonal – comparaison de la sensibilité $\frac{d}{dr_2}\int_0^{t_i} T^0(t)dt$ en fonction de $t_i$

L'ensemble des quatre courbes-résultats ne présentant pas d'intérêt en tant que tel, il est présenté en annexe 5.2.

On constate que la solution obtenue par la méthode adjointe ne rejoint la solution obtenue par la méthode directe que pour $t_i = t_f$, borne supérieure du domaine d'étude. En effet, comme vu au paragraphe 2.3.2.1, la méthode adjointe ne fournit que la sensibilité de l'intégrale entre les instants initial et final $t_f$, alors que la directe la donne à l'instant t pour toute intégrale de l'instant initial à t.

En fait, les points de la courbe dans la méthode adjointe sont les valeurs de l'intégrale à ce moment du calcul, mais ne correspondent pas physiquement à une sensibilité : dans la formule (2.3.15), $\boldsymbol{\lambda}(t)$ doit être redéterminé par une nouvelle résolution du système adjoint (avec condition finale en $t_i$) pour que le résultat de l'intégrale corresponde à la sensibilité de l'intégrale entre 0 et $t_i$. Sur la courbe de la Figure 2.4.8, le résultat à t=4s par exemple correspond bien à l'intégrale de 0 à 4s, mais impliquant le vecteur adjoint déterminé avec la condition finale en t = 10s ! Ce point n'a donc pas de signification physique.

La manière dont nous déterminons le vecteur adjoint ne permet pas d'obtenir l'évolution temporelle du critère intégral en une résolution unique. La méthode directe permet par contre d'obtenir l'évolution temporelle de la sensibilité du critère intégral de $t_0$=0 à $t_f$. Les quantités d'informations utiles retournées par ces deux méthodes ne sont donc aucunement comparables.

- ***Comparaison de la rapidité des 2 méthodes***

| **Récapitulatif temps de calcul** (en secondes) | | Syst. Adjoint | sensib m1 | sensib m2 | sensib l2 | sensib r2 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Méthode directe | Coord. Généralisées | | 0,91 | 0,75 | 0,62 | 0,89 | 3,17 |
| | Critère | | 0,73 | 0,77 | 0,8 | 0,92 | 3,22 |
| | Total | | 1,64 | 1,52 | 1,42 | 1,81 | 6,39 |
| Méthode adjointe | | 0,94 | 0,86 | 0,75 | 0,95 | 0,89 | 4,39 |
| Rapport temps adjointe/directe | | | | | | | 0,69 |

**Tableau 2.4.3** Double-pendule orthogonal – récapitulatif temps de calcul pour la sensibilité de l'intégrale de $T^0$

Dans ce cas d'étude, la méthode adjointe devient plus rapide que la méthode directe et le rapport diminue encore avec le nombre de x, puisque le rapport des temps de calcul de chaque sensibilité (une fois le système adjoint résolu), est de 0,6 environ.

- ***Discussion – analyse des causes***

Ici, le but de l'édification de la méthode adjointe, qui est avant tout de s'affranchir du calcul de quantités intermédiaires lors de la résolution du calcul des sensibilités, porte ses fruits. Le nombre d'étapes dans l'algorithme adjoint n'a pas évolué, ce qui n'est pas vrai dans le cas de la méthode directe. Pour la méthode adjointe, seule l'expression du critère est modifiée, alors que l'intégration du critère se rajoute dans la directe, et son traitement sous forme d'ODE (cf §2.3.2.1) n'y change rien.

Cependant, il faut nuancer la supériorité de la méthode adjointe dans le cas présent car les deux algorithmes ne mènent pas au même résultat : la méthode adjointe ne fournit la sensibilité qu'à la borne supérieure.

### 2.4.2.4 Conclusion : comparaison des deux méthodes pour les multicorps (et la MMC)

1. Pour des critères non intégraux dont on souhaite obtenir la sensibilité fonction du temps, la méthode adjointe adaptée à l'étude des systèmes mécaniques multicorps souffre d'une lenteur de calcul excessive vis à vis de la méthode directe classiquement utilisée. La principale raison à nos yeux est le nombre excessif de réévaluations des solutions intermédiaires. Or les critères non intégraux sont fréquents dans l'étude des systèmes multicorps, objets de cette thèse : on se reportera à la sensibilité de la vitesse de lacet (cf §2.4.3.4) ou de l'accélération latérale (cf §2.4.3.5) en dynamique du véhicule. Notons que lorsqu'on cherche simplement les sensibilités des variables d'état, la méthode directe est plus puissante puisqu'elle fournit les sensibilités de toutes les variables d'état en un seul calcul, alors que la méthode adjointe n'en fournit qu'une seule (pour $g = y_i$).

2. En revanche, pour des critères intégraux, le choix entre les deux méthodes est moins évident ; deux cas peuvent se présenter :

   - si l'on souhaite obtenir les sensibilités au cours du temps, c'est-à-dire en fonction de la borne supérieure (en multicorps, voir l'exemple de la sensibilité du cap du véhicule, §2.4.3.6), la méthode directe est préférable ;

   - si l'on recherche simplement la sensibilité pour une valeur de borne supérieure donnée, c'est-à-dire généralement sur tout l'intervalle d'étude (en multicorps, citons les critères du moindre travail ou de la moindre distance pour atteindre une vitesse donnée…), la méthode adjointe est préférable à la méthode directe ; le gain de temps par rapport à la méthode directe est d'autant plus important que les paramètres de construction sont nombreux et que l'intervalle temporel d'étude est étendu.

3. Enfin, en ce qui concerne la mécanique des systèmes déformables, le choix est plus évident ; cette étude permet de comprendre pourquoi la méthode adjointe est tant utilisée en mécanique des systèmes déformables, par exemple en simulation de la mise en forme : Laroussi [LAR03] utilise comme critère (nommé fonction coût) l'énergie dépensée pour déformer la matière de la configuration à l'instant initial à celle de l'instant final uniquement (cf §2.2.1.1.4). C'est une intégrale qui permet en effet de calculer l'effort maximal de forgeage, dans le but par exemple d'optimiser un procédé de manière à forger la pièce désirée sur une presse de faible capacité. Les sensibilités aux instants intermédiaires ne présentant pas d'intérêt, la méthode adjointe est donc préférable, d'autant plus que le nombre de paramètres de construction x est élevé (vitesse de forgeage, coefficients frottement, température des outils, dimensions du lopin…).

## 2.4.3 Exemple dynamique du véhicule : modèle roulis-lacet-dérive

Dans cette dernière étude de cas – la première sur un système industriel, non académique –, on se propose d'appliquer à la dynamique du véhicule la méthode analytique d'étude de sensibilité qui a été jugée globalement la plus efficace pour les systèmes multicorps, soit la méthode directe. L'objectif est de déterminer quel paramètre de construction est le plus influent (parmi trois présélectionnés) ; un critère de chaque type (variable d'état, critère composé non intégral puis intégral) sera étudié.

### 2.4.3.1 Description du modèle [BROS06]

Le modèle de comportement de véhicule choisi est un modèle roulis-lacet-dérive :

- Le roulis est le mouvement de rotation d'un mobile autour de son axe longitudinal (l'axe de roulis).
- Le lacet désigne la rotation d'un mobile autour d'un axe vertical (l'axe de lacet).

- Enfin, si le braquage est l'angle entre le plan de symétrie de la jante d'une roue et le plan vertical, la dérive peut être vue comme un "braquage dynamique" d'une roue, se superposant au braquage géométrique ; en effet, le phénomène de dérive est dû à l'effort latéral appliqué à un pneumatique ayant des propriétés élastiques [BROS06]. La dérive peut aussi être définie comme l'angle entre le plan (de rotation) de la roue et la tangente à la trajectoire de la roue, définie par la direction de la vitesse du point géométrique.

Le modèle étudié est développé dans le livre "Dynamique du véhicule - modélisation des systèmes complexes" de Brossard [BROS06], plus précisément au chapitre 16, intitulé "Réponse transitoire roulis-lacet-dérive". Ce chapitre est le chapitre final dont les éléments sont progressivement mis en place dans :

- Le chapitre 2 pour la "dynamique générale du véhicule" ;

- Le chapitre 12, qui établit le modèle de réponse transitoire pour le mouvement "lacet-dérive" uniquement ;

- Les chapitres 14 et 15 pour le début de l'étude du mouvement roulis-lacet-dérive (respectivement "état stationnaire" et "stabilité-mouvements voisins").

Par conséquent, le processus d'obtention des équations, relativement long, ne sera pas développé dans ce travail : on donnera ici uniquement le système différentiel dynamique qui en résulte, et on ne détaillera que la signification des seuls paramètres cinématiques. L'annexe 6 explique les nombreuses constantes ainsi que leur valeur pour une voiture de tourisme classique, permettant de simuler un comportement plausible.

Les équations sont :

$$\begin{bmatrix} MV & 0 & -Mh & 0 \\ 0 & I_{zz} & I_{xz} & 0 \\ -MhV & I_{xz} & I_{xx}+Mh^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha' \\ r' \\ x' \\ \varphi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(2D_1^*+2D_2^*\right) & -\left(MV+\dfrac{2D_1^*a_1-2D_2^*a_2}{V}\right) & 0 & -a_r \\ -\left(2D_1^*a_1-2D_2^*a_2\right) & -\dfrac{2D_1^*a_1^2+2D_2^*a_2^2}{V} & 0 & -b_r \\ 0 & MhV & -b_\varphi & -K_\varphi^* \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ r \\ x \\ \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2D_1^*\beta \\ 2D_1^*a_1\beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.4.5)$$

qu'on écrira $\boxed{\mathbf{A}\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}}$

avec les composantes du vecteur d'état suivantes (cf Figure 2.4.9) :

- $\alpha(t)$ est l'angle au vent, repérant la direction de la vitesse du centre d'inertie par rapport à l'axe longitudinal du véhicule ;

- $\varphi(t)$ et $x(t)$ sont respectivement l'angle et la vitesse de roulis :

$$x(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} \qquad (4^{\text{ème}} \text{ équation du système}) \qquad (2.4.6)$$

- $r(t)$ est la vitesse de lacet : $r(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$, mais cette dernière, contrairement à l'équation (2.4.6), ne constitue pas une des équations du système (2.4.5) car l'angle de lacet $\theta(t)$ n'apparaît pas dans les autres équations, à la différence de l'angle de roulis $\varphi(t)$.

Quant à $\beta(t)$ apparaissant dans **f**, il définit l'angle de braquage de la roue moyenne avant, repérée par le numéro 8 sur la **Figure 2.4.9** ci-dessous ; encore nommé "angle d'Ackermann", il est égal, au troisième ordre près, à la moyenne des braquages des roues avant gauche et droite : $\beta(t) = \frac{\beta_2(t) + \beta_3(t)}{2}$.

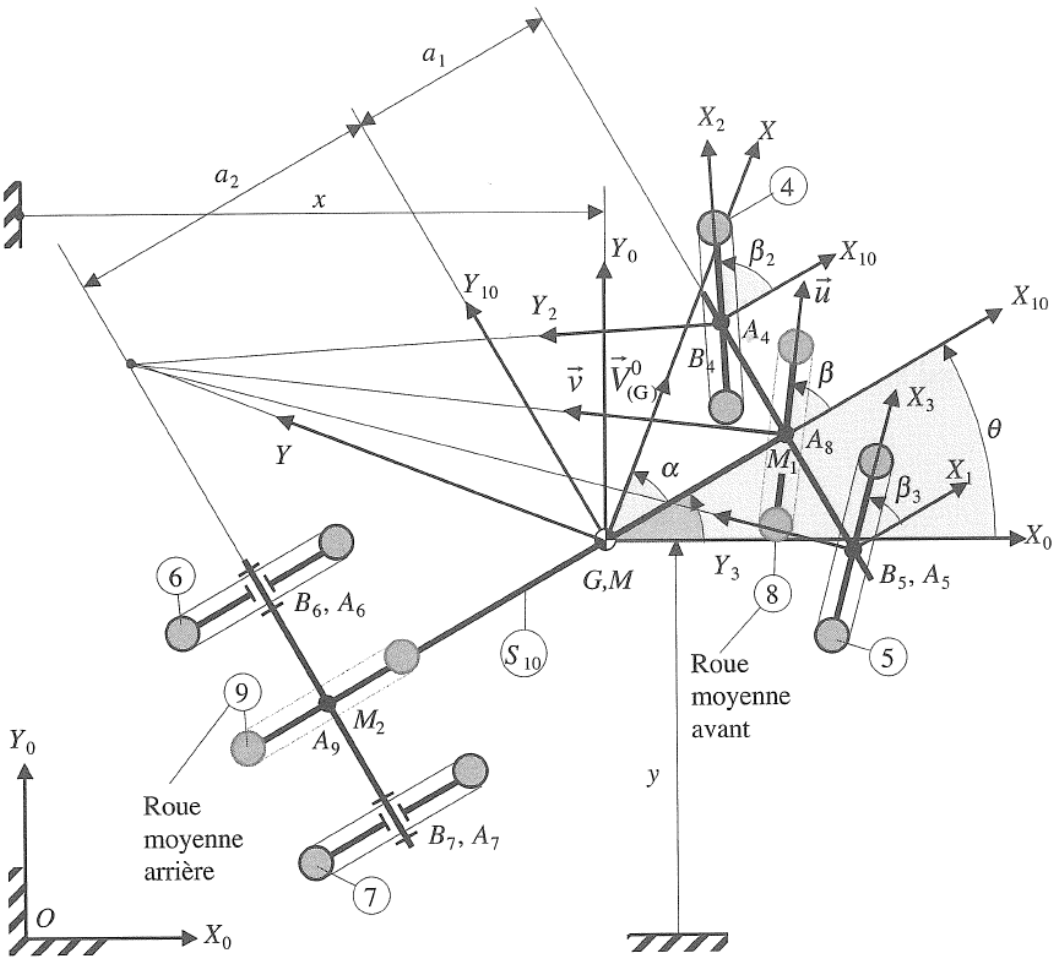



**Figure 2.4.9** Repérage général du modèle roulis-lacet-dérive d'un véhicule [BROS06]

Les trois premières équations différentielles constitutives du modèle (2.4.5) sont des théorèmes généraux appliqués au véhicule entier :

1. Equation de dérive (théorème de la résultante dynamique en projection sur l'axe $\vec{Y}_{10}$)

2. Equation de lacet (théorème du moment dynamique en G, en projection sur l'axe $\vec{Z}_{10}$)

3. Equation de roulis (théorème du moment dynamique en G, en projection sur l'axe $\vec{X}_{10}$)

Remarquons que ce modèle, complexe à coder, est toutefois linéaire par rapport aux coordonnées, vitesses et accélérations généralisées, avec la matrice de masse étendue **A** (ou "matrice inertielle" dans [BROS06]) constante. En effet, les angles sont supposés petits, la vitesse longitudinale V constante et les accélérations latérales faibles, *i.e* inférieures à 3 $m.s^{-2}$.

### 2.4.3.2 Caractéristiques de l'étude

On rappelle qu'en raison des résultats de la comparaison des deux méthodes sur l'exemple académique du système masse-ressort-amortisseur, seule la méthode directe est employée ici.

- ***Critères***

Trois critères différents sont étudiés, correspondant aux trois formes mathématiques pouvant être étudiées à partir de la définition du critère sous forme intégrale (cf §2.2.3.2.2) :

1) la vitesse de lacet $\boxed{r(t)}$ est directement une des variables d'état ;

2) l'accélération latérale est une fonction (non intégrée) des deux premières variables d'état : $\boxed{J_{lat}(t) \simeq V\left[r(t)+\dot{\alpha}(t)\right]}$

3) le cap est l'intégrale par rapport au temps de la vitesse de lacet :

$$\boxed{cap(t_i) = \int_{t_0}^{t_i} r(t)\,dt}$$

La réponse transitoire de lacet et l'accélération instantanée d'un véhicule sont des données primordiales du comportement, tant au niveau de sa dynamique propre que des sensations de conduite que celle-ci procure. Il est donc important, tant d'un point de vue de la sécurité que de l'agrément de conduite, que la variance de qualité des organes mécaniques ou leur vieillissement ne transforme pas de ma-

nière excessive leur dynamique. Le cap a davantage été choisi en raison de sa forme intégrale mais très simple.

- ***Paramètres de construction***

Trois paramètres de conception du train arrière sont présélectionnés (voir unités et valeurs courantes en annexe 6) :

- la rigidité de carrossage $C_2$, couramment appelée "poussée de carrossage" par abus de langage ; l'angle de carossage désigne l'angle entre le plan de symétrie de la jante et le plan vertical ;
- la rigidité de dérive du pneumatique $D_2$, couramment appelée "raideur de pneumatique" ;
- la rigidité de train $D_2'$, couramment appelée "déformation du train" par abus de langage.

La modification d'un paramètre dont la sensibilité est grande aura davantage de conséquences sur le comportement dynamique du véhicule. Il devra donc être mieux maîtrisé en terme de variance de ses caractéristiques.

- ***Sollicitation dynamique***

Les études de sensibilité sont menées sur un cas unique de dynamique : l'application d'un échelon de braquage à un véhicule initialement en déplacement rectiligne à vitesse constante ; le mouvement stationnaire atteint après quelques secondes est donc un virage à angle de braquage et vitesse longitudinale constante. Cette dernière hypothèse, usuelle dans les modèles de dynamique du véhicule, pourrait être discutée car dans la réalité, la vitesse d'avance diminue dès le début du braquage.

Les vitesses longitudinales V et les angles de braquage $\beta$ appliqués sont multiples afin de pouvoir obtenir une image globale de la sensibilité du véhicule sur l'ensemble de son domaine de fonctionnement. Cent points de fonctionnement sont testés, correspondant à des échelons de braquage de valeurs (en degrés) [1.5, 3, 4.5, 6, 7.5, 9, 10.5, 12, 13.5, 15], combinés à des vitesses longitudinales de valeurs (en m/s) [3 6 9 12 15 18 21 24 27 30].

### 2.4.3.3 Forme et traitement des résultats obtenus

#### *2.4.3.3.1 Les différentes valeurs " mesurées"*

Afin de pouvoir comparer de manière plus aisée l'influence de chaque paramètre, la sensibilité est exprimée pour une variation de 1% de la valeur du paramètre. Les valeurs étudiées - dont l'unité ne dépend plus de la nature de x -, sont donc de la forme:

$$u = \frac{dg}{dx} \cdot \frac{x}{100} \tag{2.4.7}$$

Pour un critère, un paramètre de construction, une vitesse longitudinale et un angle de braquage donnés, on obtient alors une courbe présentant la sensibilité instantanée en fonction du temps, dont un exemple-type est représenté ici :

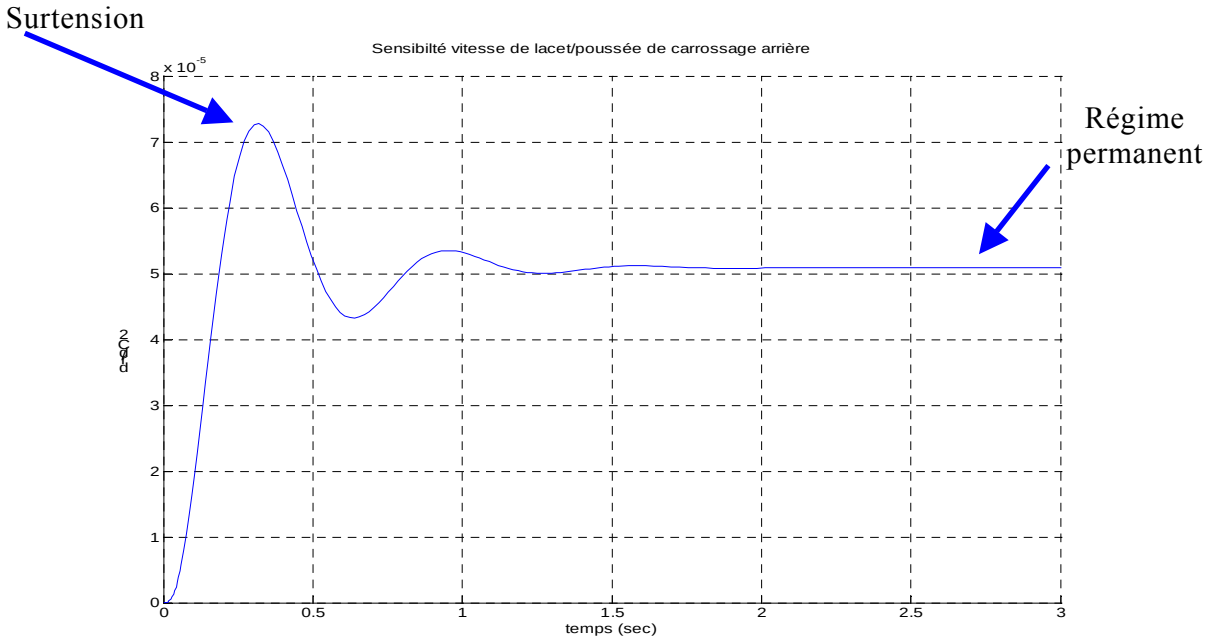



**Figure 2.4.10** Véhicule : sensibilité de la vitesse de lacet par rapport à la rigidité de carrossage arrière en fonction du temps

Peuvent être distinguées dans cette réponse transitoire :

- La sensibilité en régime permanent qui correspond à la valeur de la sensibilité lorsque le système a atteint son nouvel état stationnaire : en d'autres termes, concernant l'exemple de la Figure 2.4.10, plus la sensibilité "en régime permanent" est grande, plus le critère "vitesse de lacet", constant en régime permanent, sera affecté par une (petite) variation de la rigidité de carrossage (constante pendant l'essai) par rapport à sa valeur nominale (cf Figure 2.2.1).

- La surtension, correspondant au maximum de la réponse, et que l'on exprimera en pourcentage de la valeur du régime permanent, afin de la rendre indépendante de cette valeur :

$$\text{Surtension} = \frac{\text{sensibilité max} - \text{sensibilité en régime permanent}}{\text{sensibilité en régime permanent}} * 100 \tag{2.4.8}$$

#### *2.4.3.3.2 Discussion : dérivée logarithmique*

Au lieu d'analyser la sensibilité instantanée avec la formule (2.4.7) utilisée dans ce travail, Hafkta [HAF92] et Eberhard [EBE06] recommandent de diviser u à chaque instant par la valeur du critère g, ce qui donne la dérivée logarithmique définie par la formule (2.2.1) :

$$\boxed{\frac{dg}{dx}\cdot\frac{x}{g}=\frac{dg/g}{dx/x}=\frac{d(\log g)}{d(\log x)}=\frac{d_l g}{dx}} \qquad (2.4.9)$$

Cette adimensionnalisation permet de rendre la sensibilité indépendante du niveau du critère, en plus de celui du paramètre x ; la courbe de la Figure 2.4.10 serait alors différente, puisque la vitesse de lacet évolue avec le temps.

La dérivée logarithmique n'a pas été employée ici :

- Pour chaque critère, les trois sensibilités en régime permanent par rapport aux trois paramètres de construction ont été relevées pour chaque simulation (couple vitesse longitudinale – échelon de braquage). En tout point du domaine d'étude, les valeurs absolues des trois sensibilités respectaient la même hiérarchie, quel que soit le critère envisagé. Diviser en chaque point les trois sensibilités par la même valeur du critère selon (2.4.9) ne modifie évidemment pas cette hiérarchie. On a donc préféré utiliser la formule (2.4.7), plus simple, pour identifier le paramètre le plus influent, ce qui était le but recherché.

- Les trois surtensions en "valeur absolue du critère", calculées avec (2.4.7), sont de même niveau pour une simulation donnée et ne permettent pas de classer les paramètres selon leur influence. Il en serait probablement de même pour un calcul en "valeur relative du critère", avec (2.4.9), donc l'investissement n'a pas été réalisé.

De plus, la dérivée logarithmique n'a pas été employée car le but ici était simplement de montrer les possibilités du calcul analytique des sensibilités. Mais la mise en œuvre de (2.4.9) est une des perspectives pour d'autres études de cas plus approfondies. Le choix du traitement des données reste de toute manière délicat [EBE07].

### 2.4.3.4 Résultats et analyse pour la vitesse de lacet

La programmation sous Matlab a été réalisée par Benjamin Porte au cours de son stage de Master. Les figures et tableaux suivants sont donc issus de [PORTE06].

- ***Résultats bruts***

  Comme dit ci-dessus, les valeurs absolues des trois sensibilités en régime permanent et les surtensions ont des évolutions parallèles sur tout le domaine d'étude :

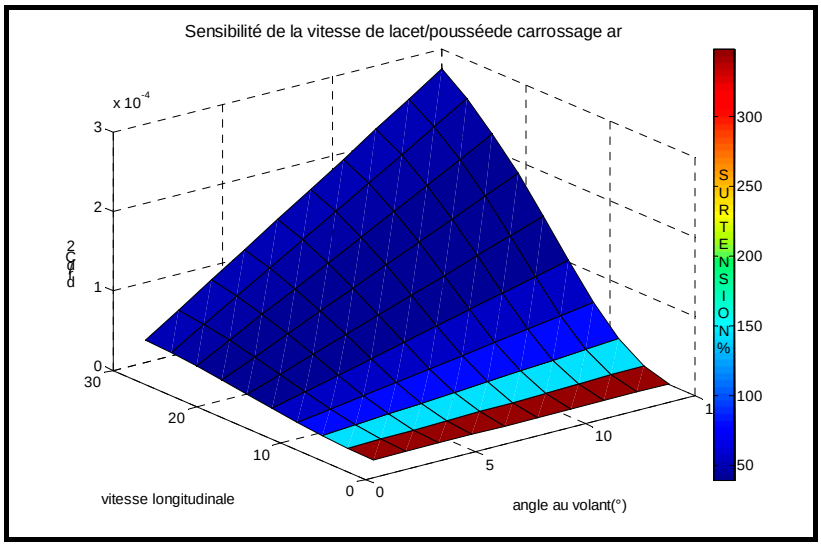



**Figure 2.4.11** Véhicule : sensibilité de la vitesse de lacet / rigidité de carrossage arrière

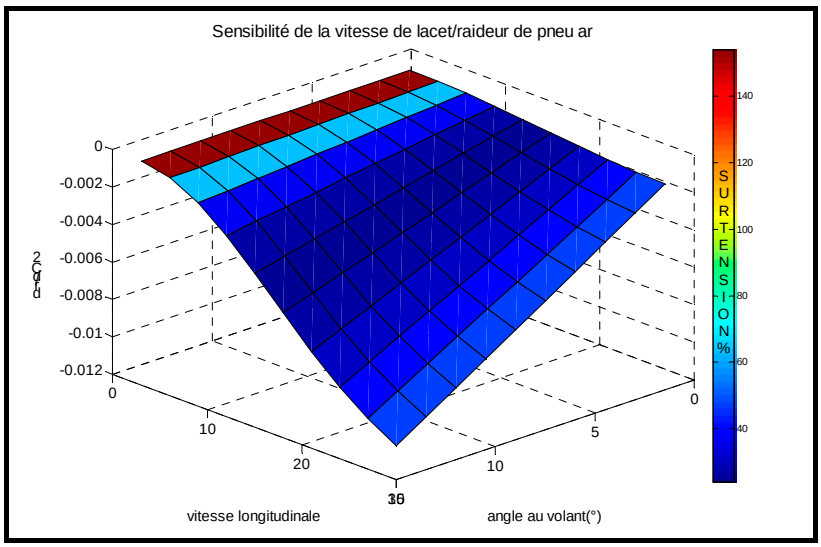



**Figure 2.4.12** Véhicule : sensibilité de la vitesse de lacet / rigidité de dérive arrière

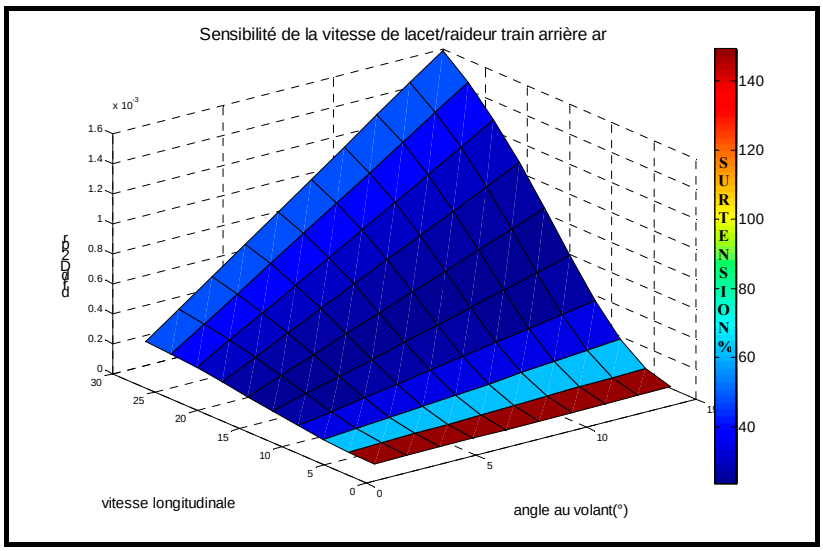



**Figure 2.4.13** Véhicule : sensibilité de la vitesse de lacet / rigidité de train arrière

- ***Paramètre le plus influent***

Les nappes respectant la même hiérarchie sur tout le domaine, on constate que c'est la rigidité de dérive du pneumatique qui est de loin le paramètre le plus influent, devant la rigidité du train ; on peut par exemple relever les valeurs maximales de sensibilité en régime permanent (cf Tableau 2.4.4), obtenues pour la vitesse longitudinale et l'angle de braquage maximaux.

| Paramètre x | Rigidité de carrossage | Rigidité de dérive du pneumatique | Rigidité de train |
|---|---|---|---|
| Régime permanent, valeur max | $2.8\ 10^{-4}$ | -0.011 | $1.6\ 10^{-3}$ |
| Surtension | 30⇔60% | 30⇔60% | 30⇔60% |

**Tableau 2.4.4** Véhicule : sensibilité de la vitesse de lacet

La raideur du pneu est donc un critère important pour le choix du pneu. Elle est fortement fonction de la pression de gonflage, qui doit donc être contrôlée avec soin en utilisation.

- ***Surtension***

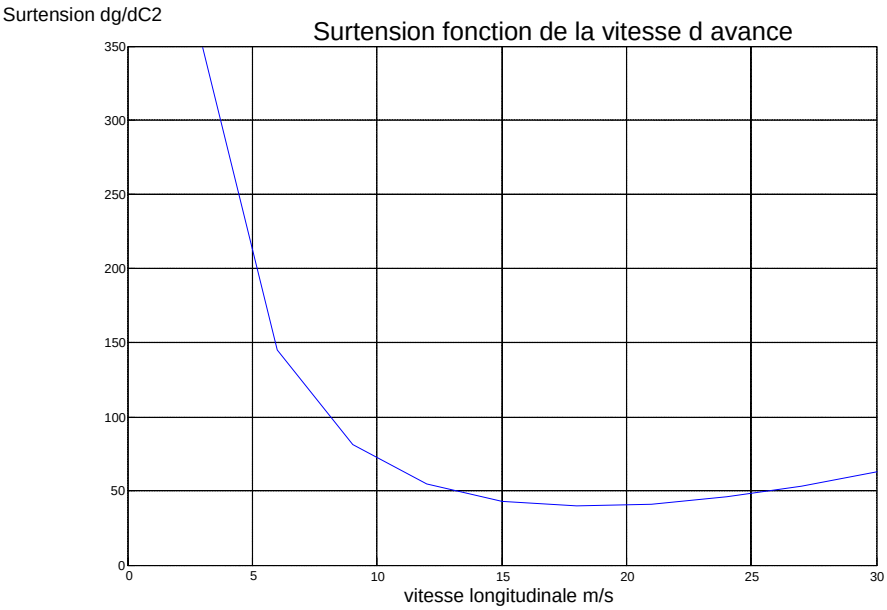



**Figure 2.4.14** Véhicule : surtension de $dg/dC_2$ en fonction de la vitesse d'avance

On note que, comme annoncé plus haut, la surtension suit la même évolution pour les trois paramètres. On peut par exemple constater que dans les trois cas, elle est fonction de la vitesse uniquement et plus importante pour les basses vitesses. Dans ce cas par exemple, l'étude par la dérivée logarithmique serait intéressante.

### 2.4.3.5 Résultats et analyse pour l'accélération latérale (critère non intégral)

- ***Résultats bruts***

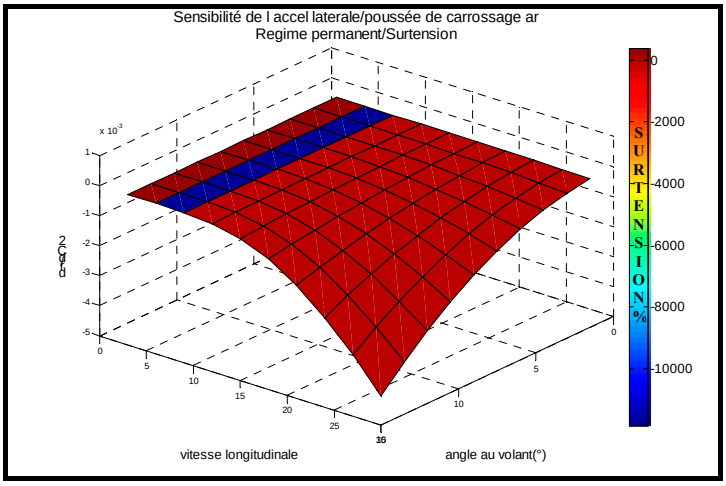



**Figure 2.4.15** Véhicule : sensibilité de l'accélération latérale / rigidité de carrossage arrière

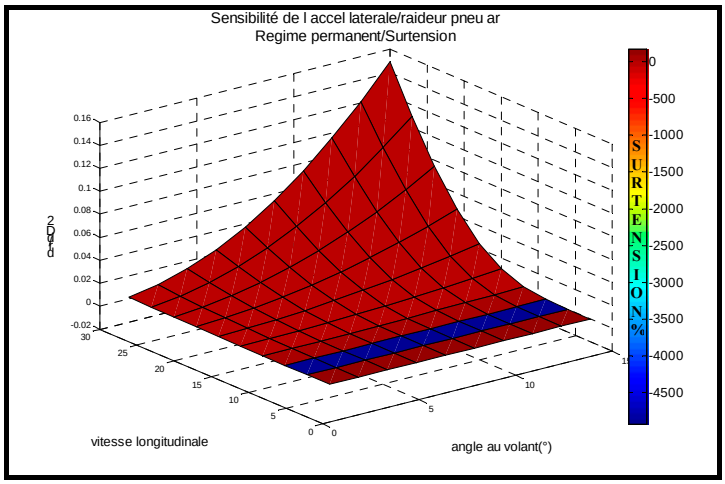



**Figure 2.4.16** Véhicule : sensibilité de l'accélération latérale / rigidité de dérive arrière

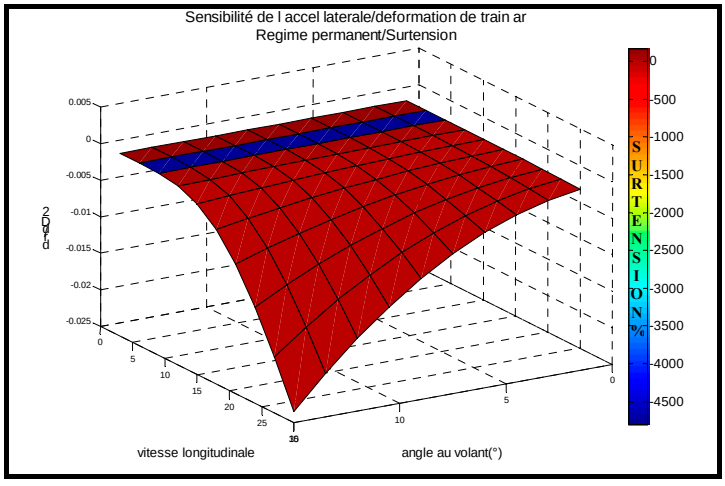



**Figure 2.4.17** Véhicule : sensibilité de l'accélération latérale / rigidité de train arrière

- ***Paramètre le plus influent***

La même analyse que précédemment peut être faite : le paramètre déterminant est encore la "raideur de pneumatique", devant la "déformation du train" et la "poussée de carrossage".

| | dg/dC2 | dg/dD2 | dg/dD2' |
|---|---|---|---|
| Régime permanent, valeur max | $-4\ 10^{-3}$ | 0.15 | -0.024 |

**Tableau 2.4.5** Véhicule : sensibilité de l'accélération latérale

- ***Surtension***

La surtension, hormis la même évolution en fonction uniquement de la vitesse longitudinale dans les trois cas, présente dans les trois cas des valeurs relativement très importantes pour une vitesse d'avance d'environ 6 m/s.

La sensibilité en régime permanent change en effet de signe pour $V \simeq 6 m.s^{-1}$, donc est nulle aux alentours de ce point de fonctionnement, comme l'attestent par exemple les courbes de la sensibilité de l'accélération latérale par rapport à la rigidité de carrossage :

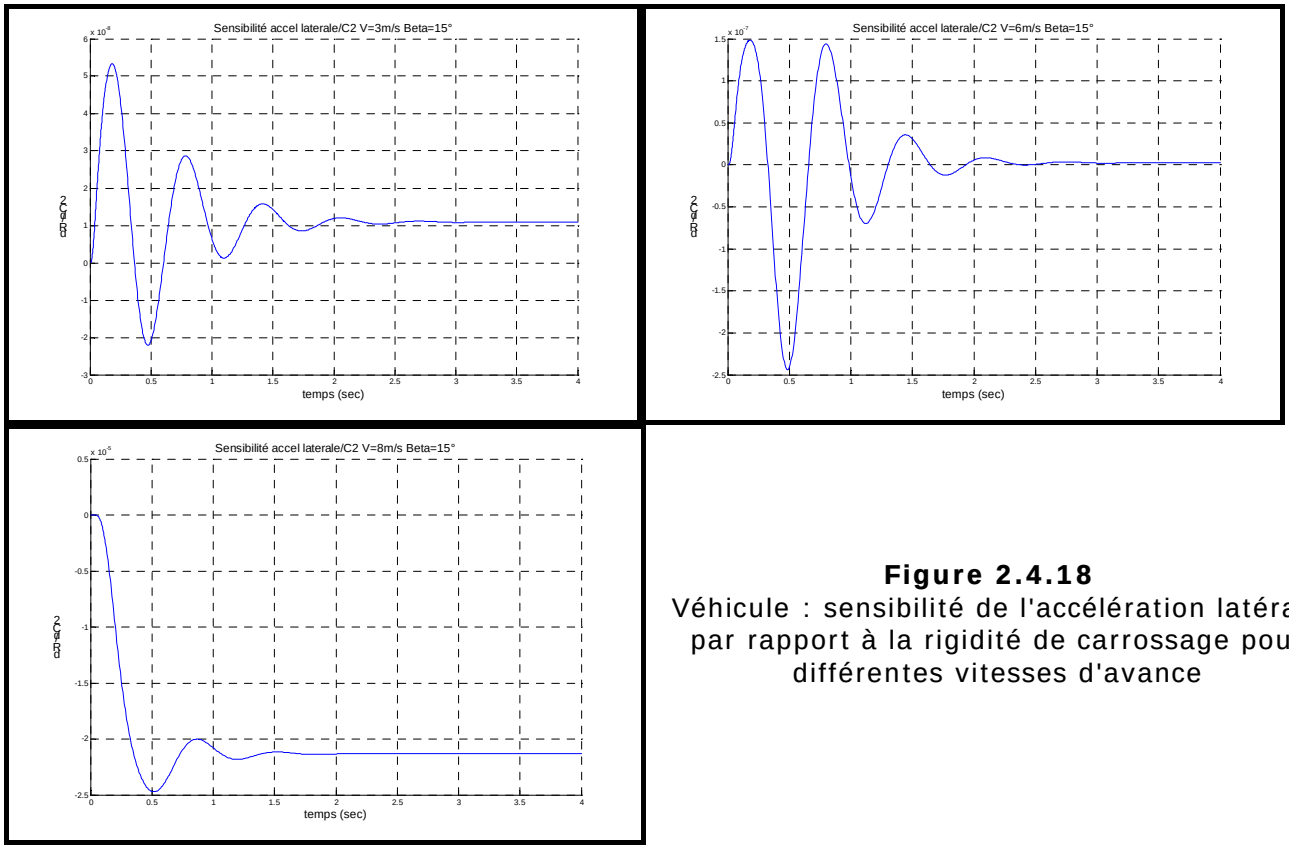



**Figure 2.4.18**
Véhicule : sensibilité de l'accélération latérale par rapport à la rigidité de carrossage pour différentes vitesses d'avance

La surtension tend donc vers l'infini en ce point. Par ailleurs, il est également intéressant de noter que l'effet d'une variation d'un des trois paramètres x a un sens différent suivant la vitesse d'avance, inférieure ou supérieure à 6 m/s, comme déjà constaté par Sharp [SHA87].

### 2.4.3.6 Résultats et analyse pour le cap (critère intégral)

- ***Résultats bruts***

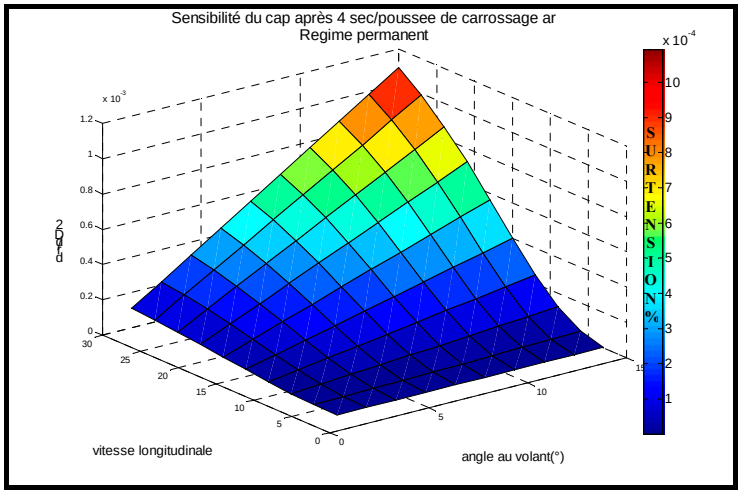



**Figure 2.4.19** Véhicule : sensibilité du cap / rigidité de carrossage arrière

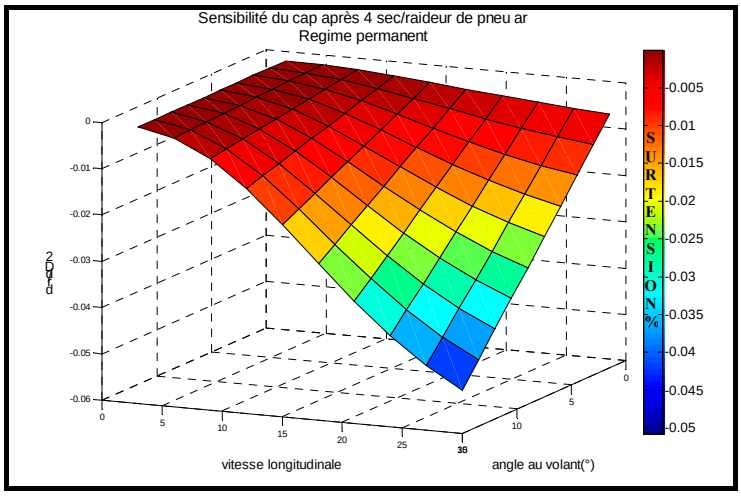



**Figure 2.4.20** Véhicule : sensibilité du cap / rigidité de dérive du pneu arrière

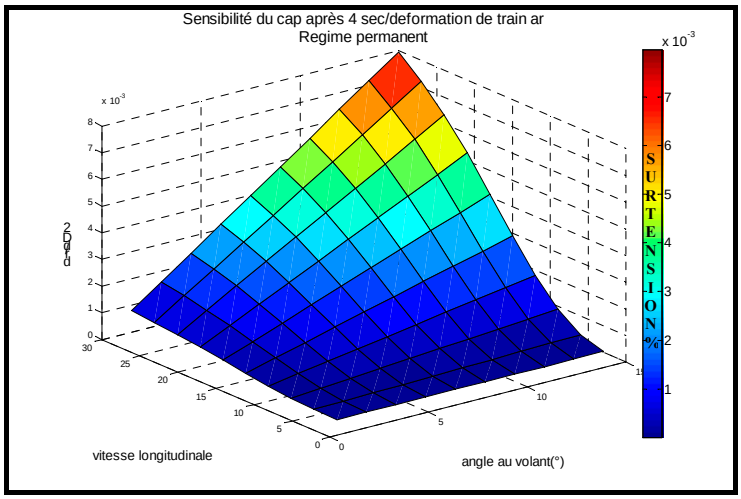



**Figure 2.4.21** Véhicule : sensibilité du cap / rigidité de train arrière

- ***Paramètre le plus influent***

A l'instar des deux cas précédents, les trois tracés ayant globalement le même aspect, nous pourrons donc comparer les résultats par les valeurs maximales des sensibilités pour chaque critère : le classement des trois paramètres suivant leur influence reste le même.

| | dg/dC2 | dg/dD2 | dg/dD2pr |
|---|---|---|---|
| Régime permanent, valeur max | $1.1\ 10^{-3}$ | -0.05 | $8\ 10^{-3}$ |

**Tableau 2.4.6** Véhicule : sensibilité du cap

- ***Surtensions***

A noter que là encore, celles-ci suivent des évolutions parallèles pour les trois paramètres étudiés, mais qu'elles ne sont plus indépendantes de la sollicitation.

### 2.4.3.7 Conclusion

Dans le cas étudié, il ressort que le paramètre le plus influent sur les trois critères sélectionnés (vitesse de lacet, accélération latérale et cap à un temps donné) est la raideur de dérive (transversale) du pneumatique et ce de manière très significative. La pression de gonflage dont elle dépend fortement est donc un paramètre de contrôle des performances très intéressant puisque facilement accessible.

Le but de cette étude de cas était d'apporter un éclairage "pratique" sur l'utilisation possible des études de sensibilité, appliquées à un système industriel complexe. Des améliorations sont possibles, notamment concernant les méthodes de traitement des résultats de sensibilités et l'utilisation de la dérivée logarithmique.

# 2.5 Conclusion

Dans cette partie sur l'étude de sensibilité, deux méthodes analytiques ont été appliquées aux systèmes multicorps ; on évite ainsi les méthodes "boîtes noires" numériques, sans pour autant aboutir à des résultats formels (sensibilités fonctions du temps et des paramètres de construction), ceci étant illusoire compte-tenu de la complexité des modèles.

Le travail a débuté par une **recherche bibliographique**, aboutissant notamment à la compréhension de la méthode adjointe. Celle-ci suit toujours le principe suivant, quel que soit le domaine considéré : les premiers membres des équations de sensibilité issues de la dérivation du modèle dynamique (et égaux chacun à zéro !) sont multipliés par un vecteur adjoint arbitraire $\boldsymbol{\lambda}$ et ajoutés à l'expression de la sensibilité $\frac{d\overline{g}}{dx}$ du critère. Ceci revient en fait à ajouter un degré de liberté supplémentaire, afin de pouvoir choisir le vecteur et le système adjoints dans un certain but : ici, il s'agit d'éliminer les sensibilités des variables d'état contenues dans $\frac{d\mathbf{y}}{dx}$ car seules nous intéressent les sensibilités du critère. Par ailleurs, l'intégration du système adjoint est toujours rétrograde (*backward in time*).

Un **travail théorique** a ensuite dû être mené sur l'algorithme afin de pouvoir poursuivre la détermination analytique de la sensibilité sur des systèmes multicorps dont le modèle dynamique est la plupart du temps fortement non linéaire par rapport aux variables d'état : la matrice de masse étendue $\mathbf{A}$ est dépendante du vecteur des coordonnées généralisées $\mathbf{q}$ (et des paramètres de construction x). La méthode permet également à présent de déterminer les sensibilités en fonction du temps, en une résolution unique de l'algorithme de la méthode adjointe lorsque le critère est non intégral, et même lorsque le critère se résume à une variable d'état.

La **mise en œuvre de ce travail théorique prend la forme de logiciels de calcul de sensibilité**, appliqués à divers exemples de complexité croissante en fonction du but recherché :

1. Afin de valider la théorie, les deux méthodes d'étude de sensibilité sont programmées sous **Maple** de plusieurs façons (analytique (formel), numérique et "paramétrique"); la programmation est "universelle", c'est-à-dire qu'elle fournit les sensibilités en fonction du temps par les deux méthodes, à partir de la seule donnée du modèle dynamique initial et du critère voulu, et est adaptée à des systèmes à nombre quelconque (2n pair) d'équations du premier ordre et de paramètres de conception (calculs simultanés). L'exemple étudié est le système masse-ressort-amortisseur [BEH98] et plusieurs variantes.

2. Afin de mener une comparaison de l'efficacité des méthodes pour les multicorps, et des études à résolutions numériques plus approfondies, les deux méthodes sont programmées sous **Matlab :**

   - L'application au **double-pendule orthogonal** met en évidence que chacune des deux méthodes sera plus rapide que sa concurrente pour un type de critère donné. En effet, la méthode directe est meilleure lorsqu'on recherche les sensibilités en fonction du temps, pour un critère intégral ou non [BEH98, SER98a]. A noter que dans le cas simple de la sensibilité d'une variable d'état – critère non intégral $g = y_i$ –, la méthode directe est plus puissante puisqu'elle fournit en un calcul les sensibilités de toutes les variables d'état ; la méthode adjointe, dont le principe est de se passer justement de la détermination des sensibilités des variables d'état pour aboutir à celles du critère, n'en fournit qu'une, celle de $y_i$.

     A l'inverse, la méthode adjointe est très performante lorsque la sensibilité calculée est celle d'une intégrale sur un intervalle de temps unique ; et elle est d'autant plus intéressante que le nombre de paramètres x est élevé [HAF92] ou que l'intervalle de temps est grand ; ceci explique l'emploi important de la méthode de l'état-adjoint dans la simulation des procédés de mise en forme [SER98a], où le critère peut être par exemple l'intégrale de l'énergie de déformation sur toute la durée de la mise en forme [LAR03].

   - Enfin, compte-tenu des résultats précédents, seule la méthode directe est employée pour sélectionner les paramètres influents du comportement d'un **véhicule en modèle lacet-dérive-roulis** : la rigidité de dérive du pneumatique est confirmée comme étant un paramètre prépondérant. Le critère ici est évalué à chaque instant ; on peut en analyser d'autres sur un seul intervalle de temps. Enfin, on reviendra sur la discussion concernant le traitement des données dans la conclusion générale.

# Partie 3

# Etude de sensibilité à l'aide des Tenseurs d'Inertie Globaux (TIG) : écriture automatique des systèmes de sensibilité et adjoint.

3.1 Introduction 152

3.2 Différentes formes du modèle dynamique 154

3.3 Expressions des "éléments de sensibilité" en fonction des TIG 156

**3.3.1 Expressions des "éléments de sensibilité" en fonction des seules dérivées de $a_{ij}$, $\Gamma_{i,jk}$ et $Q_i$ 156**

3.3.1.1 Calcul de $\mathbf{J}$ 156
3.3.1.2 Calcul de $\mathbf{B}$ 157
3.3.1.3 Calcul de $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}$ 157
3.3.1.4 Calcul de $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}$ 158
3.3.1.5 Calcul de $\dot{\mathbf{A}}$ (qui n'intervient que dans la méthode adjointe) 158
3.3.1.6 Bilan 159

**3.3.2 Dérivées de $a_{ij}$, $\Gamma_{i,jk}$ et $Q_i$ : apparition des dérivées des TIG et des torseurs géométriques 159**

3.3.2.1 Dérivées par rapport aux coordonnées généralisées 159

*3.3.2.1.1 Calcul de $\frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i}$ 159*

*3.3.2.1.2 Calcul de $\frac{\partial \Gamma_{i,jk}}{\partial q_l}$ 160*

*3.3.2.1.3 Calcul de $\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}$ 162*

3.3.2.2 Dérivées par rapport au paramètre de construction x 163

*3.3.2.2.1 Calcul de $\frac{\partial a_{ij}}{\partial x}$ 163*

*3.3.2.2.2 Calcul de $\frac{\partial \Gamma_{i,jk}}{\partial x}$ 164*

*3.3.2.2.3 Calcul de $\frac{\partial Q_i^{pes}}{\partial x}$ 164*

3.3.2.3 Dérivées par rapport au temps 164

**3.3.3 Détermination des dérivées des TIG et des torseurs géométriques 165**
3.3.3.1 Dérivées par rapport aux coordonnées généralisées 165
*3.3.3.1.1 Dérivées des TIG : calcul de* $\frac{\partial \overline{\overline{G}}_{ij}}{\partial q_l}$ *165*
*3.3.3.1.2 Dérivées des torseurs géométriques : calculs de* $\frac{\partial \tilde{\$}_i(O_i)}{\partial q_l}$ *et* $\frac{\partial \tilde{\$}'_j(O_j)}{\partial q_l}$ *167*
3.3.3.2 Dérivées par rapport au paramètre de construction x 169
3.3.3.3 Dérivées par rapport au temps 169

**3.3.4 Synthèse : algorithme récapitulatif simplifié 170**

3.4 Validations - exemples 172

**3.4.1 Double-pendule orthogonal 172**

**3.4.2 Exemples de paramétrages non holonomes 175**
3.4.2.1 Corps libre 175
3.4.2.2 Véhicule simplifié 177

3.5 Conclusion 180

# 3.1 Introduction

Le second chapitre a mis en jeu plusieurs systèmes d'équations différentielles ordinaires :

- Le modèle dynamique initial (qui est la donnée nécessaire pour pouvoir démarrer une étude de sensibilité) ;

- Le système de sensibilité, élément principal de la méthode dite "directe" et qui est la dérivée du modèle dynamique par rapport au paramètre de construction considéré ;

- Le système adjoint, élément principal de la méthode de l'état-adjoint.

Dans le but d'utiliser les sensibilités obtenues pour l'optimisation, on souhaite les calculer le plus rapidement possible, notamment au sein d'algorithmes de contrôle actif "temps réel" (voir la thèse de Portaz, en cours dans l'équipe, intitulée : "Contrôle global châssis – Optimisation en dynamique du véhicule" [PORTA07]). Une des pistes en amont consiste à remplacer les dérivations permettant de calculer les systèmes de sensibilité et de l'état-adjoint par du calcul matriciel, beaucoup plus rapide. Le premier chapitre a montré que l'outil des "Tenseurs d'Inertie Globaux" était adapté à cette problématique.

En conclusion, ce troisième chapitre réalise la synthèse des deux premiers.

Notons toutefois que :

- L'intérêt d'utiliser cette méthode ne sera réel que si les équations du mouvement ont déjà été écrites grâce aux TIG (par exemple pour un véhicule présentant un paramétrage non holonome et/ou des liaisons complexes) : il suffira alors de réutiliser les TIG déjà calculés, là où ils peuvent l'être.

- On ne parlera pas de résolution des différents systèmes, les TIG ne servant qu'à obtenir des équations.

Pfister [PFI97b] exprime en fonction des TIG toutes les dérivées partielles du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ ($\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial p_i}, \frac{\partial^2 \overrightarrow{OM}}{\partial p_i \partial p_j}, \frac{\partial^3 \overrightarrow{OM}}{\partial p_i \partial p_j \partial p_k}$ avec $p_i$, $p_j$ et $p_k$ des coordonnées généralisées ou des paramètres de construction) qui apparaissent lorsqu'on dérive

$$a_{ij} = \int_{\Sigma} \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} . \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_j} dm \qquad \text{(équation 1.4.11)}$$

et

$$\Gamma_{i,jk} = \int_{\Sigma} \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} . \frac{\partial^2 \overrightarrow{OM}}{\partial q_j \partial q_k} dm \qquad \text{(équation 1.4.12).}$$

Puis il réutilise ses résultats pour déterminer les équations de perturbation linéarisées. Cependant, cette voie présente des limites :

- sur le fond, les résultats de Pfister ne sont valables qu'en paramétrage holonome (égalité de Schwarz sur les dérivées secondes vérifiée), alors que l'originalité de notre travail est de traiter les paramétrages non holonomes ;

- sur la forme, les TIG employés relèvent de l'ancien formalisme (trois types de TIG différents non intégrés dans une même matrice 4x4) ; nous allons chercher à dériver la nouvelle forme de TIG, regroupant les trois anciens types ;

- Pfister ne va pas jusqu'à employer ces dérivées pour exprimer le système de sensibilité (méthode directe) ; remarquons d'ailleurs que l'on ne peut aboutir au système adjoint puisqu'on ne fait que dériver les équations du mouvement ; or la méthode de l'état-adjoint représente une autre originalité de la présente thèse.

Par conséquent, bien que l'on retrouve ensuite certains résultats de ces travaux, une autre voie a été explorée ici :

1. Dans un premier temps, on fera le lien entre les formes (différentes) des équations de la dynamique de départ utilisées pour la mise en équation par les TIG (chapitre 1) et en étude de sensibilité (chapitre 2).

2. Le paragraphe 3.3 déterminera de façon théorique l'expression de tous les éléments matriciels intervenant dans les systèmes différentiels de sensibilité et adjoint, en fonction des TIG déjà calculés.

3. Enfin, le dernier paragraphe présentera trois exemples, en paramétrage holonome et non holonome.

# 3.2 Différentes formes du modèle dynamique

Au chapitre 1, le point de départ des développements aboutissant à la théorie de mise en équations automatique est l'équation du mouvement (1.4.13) :

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ddot{q}_j + \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma_{i,jk}\dot{q}_j\dot{q}_k = Q_i} \text{ (système différentiel ordinaire du second ordre)} \qquad (3.2.1)$$

Le calcul des TIG permet d'exprimer les coefficients d'énergie cinétique $a_{ij}$ et les symboles de Christoffel $\Gamma_{i,jk}$, apparaissant dans cette équation.

Au chapitre 2, l'algorithme d'étude de sensibilité (Figure 2.3.3) est basé sur la forme suivante des équations du mouvement :

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{q}, x, t)\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, x, t)} \text{ (système différentiel ordinaire du premier ordre)} \qquad (3.2.2)$$

Les systèmes de sensibilité et adjoint font apparaître les dérivées de la matrice de masse $\mathbf{A}$ et du vecteur $\mathbf{f}$ par rapport aux variables d'état regroupées dans le vecteur $\mathbf{y}$, et au paramètre de construction x.

Par conséquent, exprimer les éléments $\mathbf{A}$ et $\mathbf{f}$ (équation (3.2.2)) en fonction de $a_{ij}$ et $\Gamma_{i,jk}$ (équation (3.2.1)) permettra dans le paragraphe suivant d'écrire leurs dérivées et donc les modèles de sensibilité et adjoint en fonction des TIG.

Avec $\mathbf{y}$ le vecteur-colonne de dimension 2n (n étant le nombre de degrés de liberté du système) déjà retenu au paragraphe 2.2.3.2.1 :

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \dot{q}_1 = V_1 \\ \vdots \\ q_n \\ \dot{q}_n = V_n \end{bmatrix} \qquad (3.2.3)$$

on obtient

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & a_{11} & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & 0 & a_{nn} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.2.4)$$

et
$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -\sum_{j,k=1}^{n} \Gamma_{1,jk} V_j V_k + Q_1 \\ V_1 \\ \vdots \\ -\sum_{j,k=1}^{n} \Gamma_{n,jk} V_j V_k + Q_n \\ V_n \end{bmatrix} \qquad (3.2.5)$$

A titre d'exemple, si n=2 (exemple du double-pendule orthogonal au paragraphe 3.4.1) :

- La définition (3.2.3) donne $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \dot{q}_1 = V_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_2 = V_2 \end{bmatrix}$
- La définition (3.2.4) donne $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & a_{11} & 0 & a_{12} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
- La définition (3.2.5) donne $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -\sum_{j,k=1}^{2} \Gamma_{1,jk} V_j V_k + Q_1 \\ V_1 \\ -\sum_{j,k=1}^{2} \Gamma_{2,jk} V_j V_k + Q_2 \\ V_2 \end{bmatrix}$

On rappelle que les variables d'état auraient pu être organisées différemment au sein du "vecteur" d'état $\mathbf{y}$ (cf §2.2.3.2.1) : par exemple, si les coordonnées généralisées sont regroupées dans une moitié, et les vitesses généralisées dans l'autre, $\mathbf{A}$ présente un bloc unité qui pourrait simplifier le traitement numérique. De plus, dans la programmation, $\mathbf{A}$ et $\mathbf{f}$ peuvent être réutilisés plus aisément [PORTE06].

Notre choix s'est malgré tout porté sur l'autre solution, présentée ci-dessus, par souci de lisibilité (une équation du second ordre est remplacée par deux équations du premier ordre consécutives). De plus, si le traitement numérique est probablement allongé par rapport à l'autre solution, il l'est de la même façon pour les deux méthodes analytiques exposées dans ce travail ; les conclusions de la partie 2 concernant la comparaison des deux méthodes ne sont en rien modifiées.

# 3.3 Expressions des "éléments de sensibilité" en fonction des TIG

Sont ainsi nommés tous les éléments mathématiques intervenant dans les algorithmes d'étude de sensibilité par la méthode directe et la méthode adjointe. Il s'agit donc de $\mathbf{A}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{B}$, $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}$ ; la matrice $\dot{\mathbf{A}}$ intervient en plus dans la méthode adjointe.

Le parti-pris de présentation des résultats suit le modèle du chapitre 1 (paragraphe 1.5 par exemple) : on développe progressivement les éléments jusqu'à aboutir aux dérivées des TIG et des torseurs géométriques (par rapport aux variables d'état et aux paramètres de construction), qui sont finalement exprimées en fonction des TIG et des torseurs géométriques eux-mêmes.

## 3.3.1 Expressions des "éléments de sensibilité" en fonction des seules dérivées de $a_{ij}$, $\Gamma_{i,jk}$ et $Q_i$

### 3.3.1.1 Calcul de $\mathbf{J}$

D'après (3.2.5), quatre cas peuvent se présenter pour calculer les composantes de cette matrice carrée de dimension 2n. Les entiers i et *l* sont compris entre 1 et 2n :

1. Si i et *l* sont impairs :

$$J_{il} = \frac{\partial f_i}{\partial y_l} = \frac{\partial f_i}{\partial q_{\frac{l+1}{2}}} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{J_{il} = -\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial \Gamma_{\frac{i+1}{2},jk}}{\partial q_{\frac{l+1}{2}}} V_j V_k + \frac{\partial Q_{\frac{i+1}{2}}}{\partial q_{\frac{l+1}{2}}}} \qquad (3.3.1)$$

2. Si i est pair et *l* impair :

$$J_{il} = \frac{\partial f_i}{\partial y_l} = \frac{\partial V_{\frac{i}{2}}}{\partial q_{\frac{l+1}{2}}} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{J_{il} = 0}$$

3. Si i est impair et *l* pair :

$$J_{il} = \frac{\partial f_i}{\partial y_l} = \frac{\partial f_i}{\partial V_{\frac{l}{2}}} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{J_{il} = -\sum_{j=1}^{n} \left[ \Gamma_{\frac{i+1}{2},j\frac{l}{2}} + \Gamma_{\frac{i+1}{2},\frac{l}{2}j} \right] V_j}$$

Cette formule est valable en paramétrage holonome et non holonome. Elle se simplifie cependant pour un paramétrage holonome car $\Gamma_{m,no} = \Gamma_{m,on}$ :

$$\boxed{J_{il} = -2\sum_{j=1}^{n}\left[\Gamma_{\frac{i+1}{2},j\frac{l}{2}}V_j\right]}$$

4. Si i et *l* sont pairs :

$$J_{il} = \frac{\partial f_i}{\partial y_l} = \frac{\partial V_{\frac{i}{2}}}{\partial V_{\frac{l}{2}}} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{J_{il} = 1 \text{ si i=}l\text{, et 0 sinon}}$$

### 3.3.1.2 Calcul de $\mathbf{B}$

Comme démontré au chapitre 2 (§2.3.2.2.2), la matrice $\mathbf{B}$ est construite par la juxtaposition de colonnes définies chacune par $\mathbf{B}(1..2n,i) = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y_i}\dot{\mathbf{y}}$.

Or, d'après (3.2.2), $\mathbf{A}$ ne dépend pas des vitesses généralisées, donc $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y_i}$ est une matrice nulle pour i pair, si on adopte la forme de vecteur d'état de l'équation (3.2.3). Au lieu de calculer les matrices $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y_i}$ (pour i de 1 à 2n), il suffit donc de calculer les matrices $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q_i}$ (pour i de 1 à n), qui contiennent les termes $\boxed{\frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i}}$ :

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q_i} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial a_{11}}{\partial q_i} & \cdots & 0 & \frac{\partial a_{1n}}{\partial q_i} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{\partial a_{n1}}{\partial q_i} & \cdots & 0 & \frac{\partial a_{nn}}{\partial q_i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \dot{q}_i} = \mathbf{0} \qquad (3.3.2)$$

### 3.3.1.3 Calcul de $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}$

De la même façon, d'après (3.2.4), $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}$ contient des zéros et les termes $\boxed{\frac{\partial a_{jk}}{\partial x}}$ :

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial a_{11}}{\partial x} & \cdots & 0 & \frac{\partial a_{1n}}{\partial x} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{\partial a_{n1}}{\partial x} & \cdots & 0 & \frac{\partial a_{nn}}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.3.3}$$

### 3.3.1.4 Calcul de $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}$

D'après (3.2.5), deux cas doivent être distingués pour i de 1 à 2n :

1. Si i est impair, $\boxed{\frac{\partial f_i}{\partial x}=-\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial \Gamma_{\frac{i+1}{2},jk}}{\partial x}V_j V_k+\frac{\partial Q_{\frac{i+1}{2}}}{\partial x}}$ (3.3.4)

2. Si i est pair, $\frac{\partial f_i}{\partial x}=\frac{\partial V_{\frac{i}{2}}}{\partial x}$ donc $\boxed{\frac{\partial f_i}{\partial x}=0}$

### 3.3.1.5 Calcul de $\dot{\mathbf{A}}$ (qui n'intervient que dans la méthode adjointe)

Comme ci-dessus, d'après (3.2.4),

$\dot{\mathbf{A}}=\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ contient des zéros et les termes $\boxed{\dot{a}_{ij}=\frac{da_{ij}}{dt}}$ :

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\begin{bmatrix} 0 & \dot{a}_{11} & \cdots & 0 & \dot{a}_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dot{a}_{n1} & \cdots & 0 & \dot{a}_{nn} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.3.5}$$

#### 3.3.1.6 Bilan

Par conséquent, les formules (3.3.1), (3.3.2), (3.3.3) et (3.3.4) font apparaître les dérivées partielles

- des éléments cinétiques $a_{ij}$ et $\Gamma_{i,jk}$ et des forces généralisées $Q_i$,
- par rapport aux coordonnées généralisées $q_i$ (et non plus à toutes les variables d'état $y_i$), et au paramètre de construction x.

Par conséquent, notre problème revient à calculer ces six types de grandeurs. A cela s'ajoute la détermination de la dérivée par rapport au temps de l'équation (3.3.5).

### 3.3.2 Dérivées de $a_{ij}$, $\Gamma_{i,jk}$ et $Q_i$ : apparition des dérivées des TIG et des torseurs géométriques

On distingue :

- les calculs des dérivées par rapport aux $q_i$ qui réutilisent des résultats connus ou permettent d'identifier des TIG et donc d'éliminer toute nouvelle dérivation ;
- et les calculs des dérivées par rapport à x, qu'il serait sans doute beaucoup plus pénible d'automatiser : les dérivées par rapport à x seront effectuées manuellement ou à l'aide d'un logiciel de calcul symbolique ; c'est ce que nous entendrons dorénavant par "dériver de manière classique".

On conclura ce paragraphe par la dérivée de $a_{ij}$ par rapport au temps.

#### 3.3.2.1 Dérivées par rapport aux coordonnées généralisées

##### *3.3.2.1.1 Calcul de* $\dfrac{\partial a_{jk}}{\partial q_i}$

$$\frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\int_{\Sigma}\left(\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_j}.\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_k}\right)dm = \int_{\Sigma}\left(\frac{\partial^2 \overrightarrow{OM}}{\partial q_j \partial q_i}.\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_k}\right)dm + \int_{\Sigma}\left(\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_j}.\frac{\partial^2 \overrightarrow{OM}}{\partial q_k \partial q_i}\right)dm$$

avec $\dfrac{\partial^2 \overrightarrow{OM}}{\partial q_j \partial q_i} = \dfrac{\partial}{\partial q_i}\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_j}$ que le paramétrage soit holonome ou non.

donc $$\boxed{\frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i} = \Gamma_{k,ji} + \Gamma_{j,ki}} \qquad (3.3.6)$$

Cette formule peut également être vérifiée à partir de la définition la plus connue des symboles de Christoffel (cf [PFI97b]) :

$$\boxed{\Gamma_{i,jk} = \frac{1}{2}\left( \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i} \right)}$$

En effet, sachant que $a_{ij} = a_{ji}$ ,

$$\Gamma_{k,ji} + \Gamma_{j,ki} = \frac{1}{2}\left( \frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} + \cancel{\frac{\partial a_{ik}}{\partial q_j}} - \cancel{\frac{\partial a_{ji}}{\partial q_k}} \right) + \frac{1}{2}\left( \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i} + \cancel{\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k}} - \cancel{\frac{\partial a_{ki}}{\partial q_j}} \right) = \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i}$$

Le terme $\dfrac{\partial a_{jk}}{\partial q_i}$ se calcule donc directement d'après la formule (3.3.6), à partir des symboles de Christoffel déjà calculés lors de la mise en équations du mouvement.

---

*3.3.2.1.2 Calcul de* $\dfrac{\partial \Gamma_{i,jk}}{\partial q_l}$

La dérivée des coefficients d'énergie cinétique $a_{ij}$ (deux dérivations) permettait d'identifier les éléments de niveau inférieur, c'est-à-dire les symboles de Christoffel (trois dérivations) (cf éq.(3.3.6)). Le calcul de $\dfrac{\partial \Gamma_{i,jk}}{\partial q_l}$ peut à son tour faire apparaître des termes à quatre dérivations sur lesquels a travaillé Pfister [PFI97b].

En définissant $< ij,kl >= \int_{\Sigma} \frac{\partial^2 \overrightarrow{OM}}{\partial q_i \partial q_j} . \frac{\partial^2 \overrightarrow{OM}}{\partial q_k \partial q_l} dm$ et $< i,jkl >= \int_{\Sigma} \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} . \frac{\partial^3 \overrightarrow{OM}}{\partial q_j \partial q_k \partial q_l} dm$

on obtient $$\boxed{\frac{\partial \Gamma_{i,jk}}{\partial q_l} = < il, jk > + < i, jkl >} \qquad (3.3.7)$$

De plus, mais en paramétrage *holonome* uniquement,

$$\boxed{< i, jkl >= \left( \hat{\varphi}_j \cdot \hat{\varphi}_k \right) : \overline{\overline{K}}_{il}} \qquad (3.3.8)$$

et la propriété suivante est vérifiée pour i<j<k<*l* :

$$\boxed{< ij,kl > + < j,ikl >= 0} \qquad (3.3.9)$$

Dans [PFI97b], Pfister calcule alors (3.3.7) directement à partir des tenseurs cinétiques $\overline{\overline{K}}_{il}$ déjà déterminés lors de la mise en équation. Mais cette piste est abandonnée ici car les formules (3.3.8) et (3.3.9) ne sont valables qu'en paramétrage holonome et pour i<j<k<*l*.

Une autre piste qui a été explorée consiste, à l'inverse de Pfister, à essayer d'exprimer <ij,k*l*> en fonction des TIG (et non <j,ik*l*>), car dans ce terme n'apparaissent que les dérivées secondes $\frac{\partial^2 \overrightarrow{OM}}{\partial q_i \partial q_j}$ déjà exprimées dans la première partie (§1.5.2). Ensuite il suffirait d'employer (3.3.9) pour obtenir également <j,ik*l*> puis calculer $\frac{\partial \Gamma_{i,jk}}{\partial q_l}$ grâce à (3.3.7). Mais cette voie est également abandonnée car elle n'est pas adaptée pour le cas des liaisons complexes que l'on souhaite traiter ici : les expressions de $\frac{\partial^2 \overrightarrow{OM}}{\partial q_i \partial q_j}$ sont très compliquées pour i=j notamment.

A noter enfin que l'intérêt d'éviter les dérivations des TIG et des torseurs géométriques est limité, puisqu'elles seront de toute manière à déterminer dans le calcul de $\frac{\partial \Gamma^2_{i,jk}}{\partial q_l}$ pour un paramétrage holonome, de $\frac{\partial \Gamma_{i,jk}}{\partial q_l}$ pour un paramétrage non holonome ou encore de $\frac{da_{ij}}{dt}$ dans la méthode adjointe.

En conséquence, la voie choisie ici est la suivante :

- *Pour une paire holonome de paramètres j et k :*

$$\boxed{\frac{\partial \Gamma_{i,jk}}{\partial q_l} = (1-\delta_{jk})\frac{\partial \Gamma^1_{i,jk}}{\partial q_l} + \delta_{jk}\frac{\partial \Gamma^2_{i,jj}}{\partial q_l}} \qquad \text{avec}$$

  - o $\Gamma^1_{i,jk(j<k,i\le k)} = \widehat{\varphi_j} : \overline{\overline{K}}_{ik}$ (éq. (1.5.14)) donc

$$\boxed{\frac{\partial \Gamma^1_{i,jk(j<k,i\le k)}}{\partial q_l} = \frac{\partial \widehat{\varphi_j}}{\partial q_l} : \overline{\overline{K}}_{ik} + \widehat{\varphi_j} : \frac{\partial \overline{\overline{K}}_{ik}}{\partial q_l}} \qquad (3.3.10)$$

    où $\overline{\overline{K}}_{ik(i\le k)} = \tilde{\$}_i(O_i).\overline{\overline{G}}_{ik}.\tilde{\$}_k(O_k)$ (éq. (1.5.16)) donc aussi

$$\boxed{\frac{\partial \overline{\overline{K}}_{ik(i\le k)}}{\partial q_l} = \frac{\partial \tilde{\$}_i(O_i)}{\partial q_l}.\overline{\overline{G}}_{ik}.\tilde{\$}_k(O_k) + \tilde{\$}_i(O_i).\frac{\partial \overline{\overline{G}}_{ik}}{\partial q_l}.\tilde{\$}_k(O_k) + \tilde{\$}_i(O_i).\overline{\overline{G}}_{ik}.\frac{\partial \tilde{\$}_k(O_k)}{\partial q_l}} \qquad (3.3.11)$$

En effet, de la même façon qu'au chapitre 1 (écriture des équations du mouvement), les calculs sont effectués uniquement pour j<k et i≤k, *l* étant quelconque (environ vingt cas différents) ; puis on applique

$\frac{\partial \Gamma^1_{i,jk}}{\partial q_l} = \frac{\partial \Gamma^1_{i,kj}}{\partial q_l}$ (cf éq. (1.5.9)) et $\frac{\partial \Gamma^1_{i,jk}}{\partial q_l} = -\frac{\partial \Gamma^1_{k,ji}}{\partial q_l}$ (cf éq. (1.5.10))

- $\Gamma^2_{i,jj} = \mathrm{tr}\left(\tilde{\$}_i(O_i).\overline{\overline{G}}_{ijMax}.\tilde{\$}'_j(O_j)\right)$ donc on a directement

$$\frac{\partial \Gamma^2_{i,jj}}{\partial q_l} = \mathrm{tr}\left(\frac{\partial \tilde{\$}_i(O_i)}{\partial q_l}.\overline{\overline{G}}_{ijMax}.\tilde{\$}'_j(O_j) + \tilde{\$}_i(O_i).\frac{\partial \overline{\overline{G}}_{ijMax}}{\partial q_l}.\tilde{\$}'_j(O_j) + \tilde{\$}_i(O_i).\overline{\overline{G}}_{ijMax}.\frac{\partial \tilde{\$}'_j(O_j)}{\partial q_l}\right) \quad (3.3.12)$$

- *Pour une paire non holonome de paramètres j et k*, les expressions dépendent du cas étudié :

  - Exemple du corps libre (cf §1.6.1 et Figure 3.4.2) :

    $\Gamma_{i,jk} = \widehat{\varphi}_j : \overline{\overline{K}}_{ikMax}$ donc on revient à (3.3.10) et (3.3.11) en remplaçant les tenseurs $\overline{\overline{K}}_{ik}$ et $\overline{\overline{G}}_{ik}$, respectivement par $\overline{\overline{K}}_{ikMax}$ et $\overline{\overline{G}}_{ikMax}$ ;

  - Exemple du véhicule simplifié (cf §1.6.2 et Figure 3.4.3**)** avec k et j correspondant respectivement à une translation et à une rotation :

    $\Gamma_{i,jk} = \widehat{\varphi}_j : \overline{\overline{K}}_{ikMax}$ (donc même remarque que ci-dessus)

    alors que $\Gamma_{i,kj} = 0$ d'où $\frac{\partial \Gamma_{i,kj}}{\partial q_l} = 0$.

En conclusion, le système d'équations (3.3.10), (3.3.11) et (3.3.12) fait intervenir des éléments déjà calculés (tenseurs cinétiques $\overline{\overline{K}}_{ik}$ et $\overline{\overline{K}}_{ikMax}$, torseurs géométriques $\tilde{\$}_i(O_i)$ et géométriques dérivés $\tilde{\$}'_i(O_i)$, TIG $\overline{\overline{G}}_{ik}$ et $\overline{\overline{G}}_{ikMax}$) mais également les dérivées $\frac{\partial \overline{\overline{G}}_{ik}}{\partial q_l}$ (et $\frac{\partial \overline{\overline{G}}_{ijMax}}{\partial q_l}$), $\frac{\partial \tilde{\$}_i(O_i)}{\partial q_l}$ et $\frac{\partial \tilde{\$}'_i(O_i)}{\partial q_l}$, qui seront calculées au paragraphe 3.3.3. Notre problème se résume donc à présent à déterminer les dérivées des TIG et des différents torseurs géométriques.

#### *3.3.2.1.3 Calcul de* $\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}$

Seules les forces généralisées de pesanteur, nommées désormais $Q_i^{pes}$, peuvent s'exprimer de façon automatique en fonction des TIG ; pour les autres actions, la dérivation "classique" (manuelle ou à l'aide d'un logiciel de calcul symbolique) est inévitable.

Dans le chapitre 1 de mise en équations par les TIG, la relation (1.5.26) donne les forces généralisées de pesanteur en fonction des Tenseurs d'Inertie Globaux :

$$Q_i^{pes} = \vec{g}.\left(M_i \vec{t}_i + \vec{\varphi}_i \times \vec{U}_{ii}\right) \tag{3.3.13}$$

Le calcul de $\frac{\partial Q_i^{pes}}{\partial q_l}$ doit distinguer les deux cas suivants :

1. Cas $i \neq l$ :
   - si $l$<i, on démontre que $\frac{\partial Q_i^{pes}}{\partial q_l} = \vec{g} \cdot \left(\vec{\varphi}_l \times \left(M_i \vec{t}_i + \vec{\varphi}_i \wedge \vec{U}_{ii}\right)\right)$
   - si $l$>i, on démontre que $\frac{\partial Q_i^{pes}}{\partial q_l} = \vec{g} \cdot \left(\overrightarrow{\varphi_i} \times \left(M_l \vec{t}_l + \overrightarrow{\varphi_l} \times \overrightarrow{U_{ll}}\right)\right)$

   donc si $i \neq l$ : $$\boxed{\frac{\partial Q_i^{pes}}{\partial q_l} = \vec{g} \cdot \left(\vec{\varphi}_{]i,l[} \times \left(M_{[i,l]} \vec{t}_{[i,l]} + \vec{\varphi}_{[i,l]} \wedge \vec{U}_{[i,l][i,l]}\right)\right)} \tag{3.3.14}$$

   On rappelle que $]i,j[ = \mathrm{Min}(i,j)$ et $[i,j] = \mathrm{Max}(i,j)$, comme introduit au paragraphe 1.5.2.

2. Cas $i = l$ :

$$\boxed{\frac{\partial Q_i^{pes}}{\partial q_i} = \vec{g} \cdot \left(M_i \vec{t}_i \,' + \vec{\varphi}\,'_i \times \vec{U}_{ii} + \vec{\varphi}_i \times \left(\vec{\varphi}_i \times \vec{U}_{ii}\right)\right)} \tag{3.3.15}$$

   Remarquons que si la liaison i est une liaison simple : $\frac{\partial Q_i^{pes}}{\partial q_i} = \vec{g} \cdot \left(\vec{\varphi}_i \times \left(\vec{\varphi}_i \times \vec{U}_{ii}\right)\right)$

### 3.3.2.2 Dérivées par rapport au paramètre de construction x

Les dérivées par rapport aux coordonnées généralisées $q_i$ sont remplacées par du calcul matriciel grâce à la relation (1.5.1). En revanche, les dérivées par rapport à x ne peuvent pas faire apparaître des éléments cinétiques ou des TIG déjà calculés. Il faudra effectuer les différentes dérivées par rapport à x de la façon suivante (*cf §3.3.3.2 pour les dérivées des TIG et des torseurs géométriques par rapport à x*) :

#### *3.3.2.2.1 Calcul de* $\frac{\partial a_{ij}}{\partial x}$

$a_{ij(i\leq j)} = \mathrm{tr}\overline{\overline{K}}_{ij}$ donc $\frac{\partial a_{ij(i\leq j)}}{\partial x} = \mathrm{tr}\frac{\partial \overline{\overline{K}}_{ij}}{\partial x} = \mathrm{tr}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{\$}_i(O_i).\overline{\overline{G}}_{ij}.\tilde{\$}_j(O_j)\right)\right)$ et

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x} = \mathrm{tr}\left( \frac{\partial \tilde{\$}_i(O_i)}{\partial x}.\overline{\overline{G}}_{ij}.\tilde{\$}_j(O_j) + \tilde{\$}_i(O_i).\frac{\partial \overline{\overline{G}}_{ij}}{\partial x}.\tilde{\$}_j(O_j) + \tilde{\$}_i(O_i).\overline{\overline{G}}_{ij}.\frac{\partial \tilde{\$}_j(O_j)}{\partial x} \right) \qquad (3.3.16)$$

#### *3.3.2.2.2 Calcul de* $\frac{\partial \Gamma_{i,jk}}{\partial x}$

Comme ci-dessus pour le calcul de $\frac{\partial a_{ij}}{\partial x}$, et dans un souci de concision, on remplace $q_l$ par x dans les équations (3.3.10), (3.3.11) et (3.3.12) afin d'obtenir les expressions de $\frac{\partial \Gamma_{i,jk}}{\partial x}$ en paramétrage holonome et en paramétrage non holonome.

#### *3.3.2.2.3 Calcul de* $\frac{\partial Q_i^{pes}}{\partial x}$

A l'instar du calcul de $\frac{\partial Q_i^{pes}}{\partial q_l}$, on part de l'équation (3.3.13) et on aboutit à :

$$\frac{\partial Q_i^{pes}}{\partial x} = \vec{g}.\left( M_i \frac{\partial \vec{t}_i}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\varphi}_i}{\partial x} \times \vec{U}_{ii} + \vec{\varphi}_i \times \frac{\partial \vec{U}_{ii}}{\partial x} \right) \qquad (3.3.17)$$

mais il est en fait plus rapide de programmer la dérivation de $Q_i^{pes}$ directement !

En conclusion, comme pour le calcul des dérivées par rapport à $q_l$, notre problème se résume à présent à déterminer les dérivées des TIG et des différents torseurs géométriques par rapport à x.

### 3.3.2.3 Dérivées par rapport au temps

Seuls les coefficients d'énergie cinétique $a_{ij}$ sont à dériver par rapport au temps, et dans la méthode adjointe uniquement. Comme précédemment, on ne calcule la dérivation que pour $i \le j$ car $\dot{a}_{ij} = \dot{a}_{ji}$.

Sachant $a_{ij(i\le j)} = \mathrm{tr}\overline{\overline{K}}_{ij}$

on a $\dot{a}_{ij(i\le j)} = \mathrm{tr}\dot{\overline{\overline{K}}}_{ij} = \mathrm{tr}\left( \frac{d}{dt}\left( \tilde{\$}_i(O_i).\overline{\overline{G}}_{ij}.\tilde{\$}_j(O_j) \right) \right)$

$$\text{d'où } \dot{a}_{ij(i\le j)} = \mathrm{tr}\left( \frac{d\tilde{\$}_i(O_i)}{dt}.\overline{\overline{G}}_{ij}.\tilde{\$}_j(O_j) + \tilde{\$}_i(O_i).\frac{d\overline{\overline{G}}_{ij}}{dt}.\tilde{\$}_j(O_j) + \tilde{\$}_i(O_i).\overline{\overline{G}}_{ij}.\frac{d\tilde{\$}_j(O_j)}{dt} \right) \quad (3.3.18)$$

qui est valable en paramétrage holonome et en paramétrage non holonome.

Remarquons que, la trace étant un invariant du tenseur, le résultat sera identique quel que soit le repère d'observation quand on dérive les TIG et les torseurs géométriques par rapport au temps.

## 3.3.3 Détermination des dérivées des TIG et des torseurs géométriques

Dans cette ultime étape, l'objectif est d'arriver à exprimer les dérivées des TIG et des torseurs géométriques, par rapport aux coordonnées généralisées, en fonction des TIG et des torseurs géométriques eux-mêmes ; le calcul matriciel remplace ainsi le calcul de dérivées, ce qui accélère l'algorithme. Au contraire, les dérivées par rapport à x, dont on a également besoin, seront rapidement traitées puisqu'on sait a priori qu'elles devront être effectuées "de manière classique".

### 3.3.3.1 Dérivées par rapport aux coordonnées généralisées

#### *3.3.3.1.1 Dérivées des TIG : calcul de* $\frac{\partial \overline{\overline{G}}_{ij}}{\partial q_l}$

En dérivant par rapport à $q_l$ l'expression (1.5.18) des Tenseurs d'Inertie Globaux, valable pour $i \le j$, on obtient :

$$\left[ \frac{\partial \overline{\overline{G}}_{ij}}{\partial q_l} \right] = \begin{bmatrix} \int_{\Sigma_j} \frac{\partial \overrightarrow{O_iM}}{\partial q_l} \otimes \overrightarrow{O_jM} dm + \int_{\Sigma_j} \overrightarrow{O_iM} \otimes \frac{\partial \overrightarrow{O_jM}}{\partial q_l} dm & \int_{\Sigma_j} \frac{\partial \overrightarrow{O_iM}}{\partial q_l} dm \\ \int_{\Sigma_j} \frac{\partial \overrightarrow{O_jM}^T}{\partial q_l} dm & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.19)$$

- *Cas des paramétrages holonomes :*

  On remplace $\frac{\partial \overrightarrow{O_iM}}{\partial q_l}$ par son expression, donnée par la relation (1.5.1). Sachant que $i \le j$, plusieurs valeurs relatives sont à envisager pour *l*, que l'on peut regrouper dans les trois cas suivants ; par souci de concision, on ne présentera que les résultats :

1) $l$>i et $l$>j : l'ordre croissant des paramètres est donc : i,j,$l$ ou i=j,$l$

$$\left[\frac{\partial \overline{\overline{G}}_{ij}}{\partial q_l}\right] = \begin{bmatrix} \vec{t}_l \otimes \vec{U}_{jl} + \widehat{\varphi_l} \cdot \overline{\overline{\Pi}}^{T}_{jl} + \vec{U}_{il} \otimes \vec{t}_l - \overline{\overline{\Pi}}_{il} \cdot \widehat{\varphi_l} & M_l \vec{t}_l + \vec{\varphi}_l \times \vec{U}_{ll} \\ M_l \vec{t}_l^{\,T} - \vec{U}_{ll}^{\,T} \cdot \widehat{\varphi_l} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.3.20}$$

2) $l$>i et $l$≤j : l'ordre croissant des paramètres est donc : i,$l$=j ou i,$l$,j

$$\left[\frac{\partial \overline{\overline{G}}_{ij}}{\partial q_l}\right] = \begin{bmatrix} \vec{t}_l \otimes \vec{U}_{jj} + \widehat{\varphi_l} \cdot \overline{\overline{\Pi}}_{lj} - \overline{\overline{\Pi}}_{ij} \cdot \widehat{\varphi_l} & M_j \vec{t}_l + \vec{\varphi}_l \times \vec{U}_{lj} \\ -\vec{U}_{jj}^{\,T} \cdot \widehat{\varphi_l} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.3.21}$$

3) $l$≤i et $l$≤j : l'ordre croissant des paramètres est donc : $l$,i,j ou $l$,i=j ou $l$=i,j ou $l$=i=j

$$\left[\frac{\partial \overline{\overline{G}}_{ij}}{\partial q_l}\right] = \begin{bmatrix} \widehat{\varphi_l}.\overline{\overline{\Pi}}_{ij} - \overline{\overline{\Pi}}_{ij} \cdot \widehat{\varphi_l} & \vec{\varphi}_l \times \vec{U}_{ij} \\ -\vec{U}_{jj}^{\,T} \cdot \widehat{\varphi_l} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.3.22}$$

Toutes les dérivées sont donc déterminées à partir des TIG déjà calculés. On rappelle que $M_j$, $\vec{U}_{lj}$ et $\overline{\overline{\Pi}}_{lj}$ sont respectivement les Tenseurs d'Inertie Globaux d'ordre 0, 1 et 2 composant $\overline{\overline{G}}_{lj}$ (cf équation (1.5.18)) ; l'obtention des relations ci-dessus fait également appel aux relations entre $\overline{\overline{G}}_{ijMax}$ et $\overline{\overline{G}}_{lj}$, détaillées au paragraphe 1.5.3.3.

- *Cas des paramétrages non holonomes :*

  Comme lors de la mise en équation, chaque cas doit être traité individuellement.

  - Corps libre ou toupie (cf Figure 3.4.2 et §1.6.1) :

  Le système étudié ne comporte qu'un seul solide S, dont la dérivée du TIG par rapport à l'un des trois pseudo-paramètres de rotation est (on ne détaille pas les calculs de la démonstration ici) :

$$\left[\frac{\partial \overline{\overline{G}}_{SS}}{\partial q_l}\right] = \begin{bmatrix} \widehat{\varphi_l}.\overline{\overline{\Pi}}_{SS} - \overline{\overline{\Pi}}_{SS} \cdot \widehat{\varphi_l} & \vec{\varphi}_l \times \vec{U}_{SS} \\ -\vec{U}_{SS}^{\,T} \cdot \widehat{\varphi_l} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.3.23}$$

  Cette expression est identique à la (3.3.22) (cas holonome où $l \le i$ et $l \le j$), ce qui est logique : dans cette chaîne cinématique, $l$ (=1, 2 ou 3 sans hiérarchie) précède toujours i=j, indice correspondant maintenant au corps libre.

- Véhicule en paramétrage complet (cf Figure 3.4.3 et §1.6.2) :

Deux cas sont à distinguer :

1. Si $q_l$ est l'un des trois paramètres de rotation, on aboutit à nouveau à (3.3.23) et la remarque sur la similitude avec (3.3.22) est toujours valable.

2. Si $q_l$ est l'un des trois pseudo-paramètres de translation, alors $\frac{\partial \overrightarrow{O_S M}}{\partial q_l} = \vec{0}$ puisqu'un vecteur en général n'est pas modifié dans 0 par une variation d'un paramètre de translation ; d'où $\boxed{\left[\frac{\partial \overline{\overline{G}}_{SS}}{\partial q_l}\right] = \mathbf{0}}$ (matrice 4x4)

---

*3.3.3.1.2 Dérivées des torseurs géométriques : calculs de* $\frac{\partial \tilde{\$}_i(O_i)}{\partial q_l}$ *et* $\frac{\partial \tilde{\$}'_j(O_j)}{\partial q_l}$

Rappelons que $\left[\tilde{\$}_i(O_i)\right] = \left[\widehat{\varphi_i}, \vec{t}_i\right]$ (matrice 3x4) est issue du torseur géométrique $\begin{Bmatrix}\vec{\varphi}_i \\ \vec{t}_i\end{Bmatrix}$. La dérivée de cette matrice est donc

$$\boxed{\left[\frac{\partial \tilde{\$}_i(O_i)}{\partial q_l}\right] = \left[\frac{\partial \widehat{\varphi_i}}{\partial q_l}, \frac{\partial \vec{t}_i}{\partial q_l}\right] = \left[\widehat{\left(\frac{\partial \vec{\varphi}_i}{\partial q_l}\right)}, \frac{\partial \vec{t}_i}{\partial q_l}\right]}$$

- *Cas du paramétrage holonome :*

Trois cas sont à distinguer :

1) Si $l<i$, $\Sigma_l$ se comporte comme un corps rigide lors de la dérivation partielle :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{\varphi}_i}{\partial q_l} = \vec{\varphi}_l \times \vec{\varphi}_i \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \vec{t}_i}{\partial q_l} = \vec{\varphi}_l \times \vec{t}_i} \tag{3.3.24}$$

2) Si $l>i$, la coordonnée généralisée $q_l$ n'a pas d'influence sur les éléments vectoriels qui la précèdent dans la chaîne cinématique :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{\varphi}_i}{\partial q_l} = \vec{0} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \vec{t}_i}{\partial q_l} = \vec{0}}$$

3) Si *l*=i : $\boxed{\dfrac{\partial\widehat{\varphi_i}}{\partial q_i}=\widehat{\varphi_i'} \qquad \text{et} \qquad \dfrac{\partial\vec{t}_i}{\partial q_i}=\vec{t}_i'}$

par définition (cf éq. (1.5.5)) ; ces éléments sont nuls pour toute liaison simple.

- *Cas des paramétrages non holonomes (cf §1.6.1 et §1.6.2) :*

  On rappelle que le paramétrage du corps libre ou de la toupie ne présente que des paires de paramètres (pseudo-rotations) non holonomes, tandis que le modèle de véhicule complet comporte des paires non holonomes (deux pseudo-translations, ou une pseudo-translation et une rotation) mais aussi des paires holonomes (deux angles d'Euler). Pour ces dernières, on se réfèrera au point ci-dessus "cas du paramétrage holonome".

  Pour toutes les paires non holonomes des deux modèles, les paramètres concernés ont perdu la notion de successeurs. Donc on se trouve systématiquement dans le cas aboutissant à la formule (3.3.24). Par exemple, dans le cas du corps libre, les axes de rotation étant fixes dans le repère lié au corps libre, chaque rotation a une influence sur la position des deux autres axes.

Il est rappelé que la matrice 3x4 issue du "torseur géométrique dérivé" est définie directement par $\left[\tilde{\$}_j'(O_j)\right]=\left[\hat{\varphi}_j'+\widehat{\varphi_j}.\widehat{\varphi_j},\vec{t}_j'\right]$ (cf éq. (1.5.25)). La dérivée de cette matrice est donc :

$$\boxed{\left[\frac{\partial\tilde{\$}_j'(O_j)}{\partial q_l}\right]=\left[\frac{\partial\hat{\varphi}_j'}{\partial q_l}+\frac{\partial\widehat{\varphi_j}}{\partial q_l}.\widehat{\varphi_j}+\widehat{\varphi_j}.\frac{\partial\widehat{\varphi_j}}{\partial q_l},\frac{\partial\vec{t}_j'}{\partial q_l}\right]} \qquad (3.3.25)$$

L'expression (3.3.25) fait intervenir les termes $\dfrac{\partial\widehat{\varphi_j}}{\partial q_l}$ qui ont été calculés quelques lignes plus haut et sur lesquels on ne reviendra pas. Les éléments nouveaux sont $\dfrac{\partial\hat{\varphi}_j'}{\partial q_l}$ et $\dfrac{\partial\vec{t}_j'}{\partial q_l}$, qui sont en fait des dérivées secondes du torseur géométrique. Leur expression dépend de la nature de la liaison d'indice j (et non de celle d'indice *l*) :

- si la liaison de paramètre $q_j$ est simple, il est évident que ces deux grandeurs sont nulles puisque $\vec{\varphi}_j'$ et $\vec{t}_j'$ le sont ;

- si la liaison de paramètre $q_j$ est complexe, les cas *l*<j et *l*>j donnent des résultats similaires à ceux obtenus lors de la dérivation du torseur géométrique ci-dessus : il convient simplement de rajouter des ' le cas échéant. Mais dans le cas *l*=j :

$$\boxed{\frac{\partial \widehat{\varphi}_j'}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 \widehat{\varphi}_j}{\partial q_j^{\,2}} \quad \text{ou} \quad \widehat{\vec{\varphi}_j \times \vec{\varphi}_j'}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\frac{\partial \vec{t}_j'}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 \vec{t}_j}{\partial q_j^{\,2}} \quad \text{ou} \quad \vec{\varphi}_j \times \vec{t}_j'}$$

que l'on détermine soit par le calcul, soit en exploitant les données expérimentales (points discrets).

### 3.3.3.2 Dérivées par rapport au paramètre de construction x

Les TIG sont dérivés de façon classique par le logiciel de calcul formel. En effet, comme l'identification d'autres TIG (contenant des dérivées par rapport aux $q_i$) dans le résultat de la dérivation (par rapport à x) est impossible, les dérivations ne pourront être remplacées par des opérations matricielles.

Concernant les matrices $\left[\tilde{\$}_i(O_i)\right]$ et $\left[\tilde{\$}'_i(O_i)\right]$ issues des torseurs géométriques, leur dérivée par rapport à x donne une matrice nulle dans le cas général. Cependant, dans le cas des liaisons complexes, ces dérivées peuvent être différentes de 0. Dans le cas du joint de Cardan, on souhaite par exemple étudier l'influence de l'angle $\alpha$ entre l'arbre d'entrée $S_1$ et l'arbre de sortie $S_2$, angle imposé par le solide intermédiaire $S_3$ (cf Figure 1.5.5). Cet angle apparaît dans l'expression du torseur géométrique :

$$\left[\vec{\varphi}_2\right]_2 = \begin{bmatrix} -\sin\alpha\, w^{-1/2} \\ -\sin\alpha\cos\alpha\tan\psi_{3/1} w^{-1/2} \\ -\sin^2\alpha\cos\alpha\tan^2\psi_{3/1} w^{-1} \end{bmatrix}$$

Il est évident que $\frac{\partial \vec{\varphi}_2}{\partial \alpha}$ ne sera pas un vecteur nul. Là encore on calculera les dérivées de manière classique.

### 3.3.3.3 Dérivées par rapport au temps

Les dérivées $\frac{d\overline{\overline{G}}_{ij}}{dt}$ et $\frac{d\tilde{\$}_i(O_i)}{dt}$ sont calculées de manière classique.

### 3.3.4 Synthèse : algorithme récapitulatif simplifié

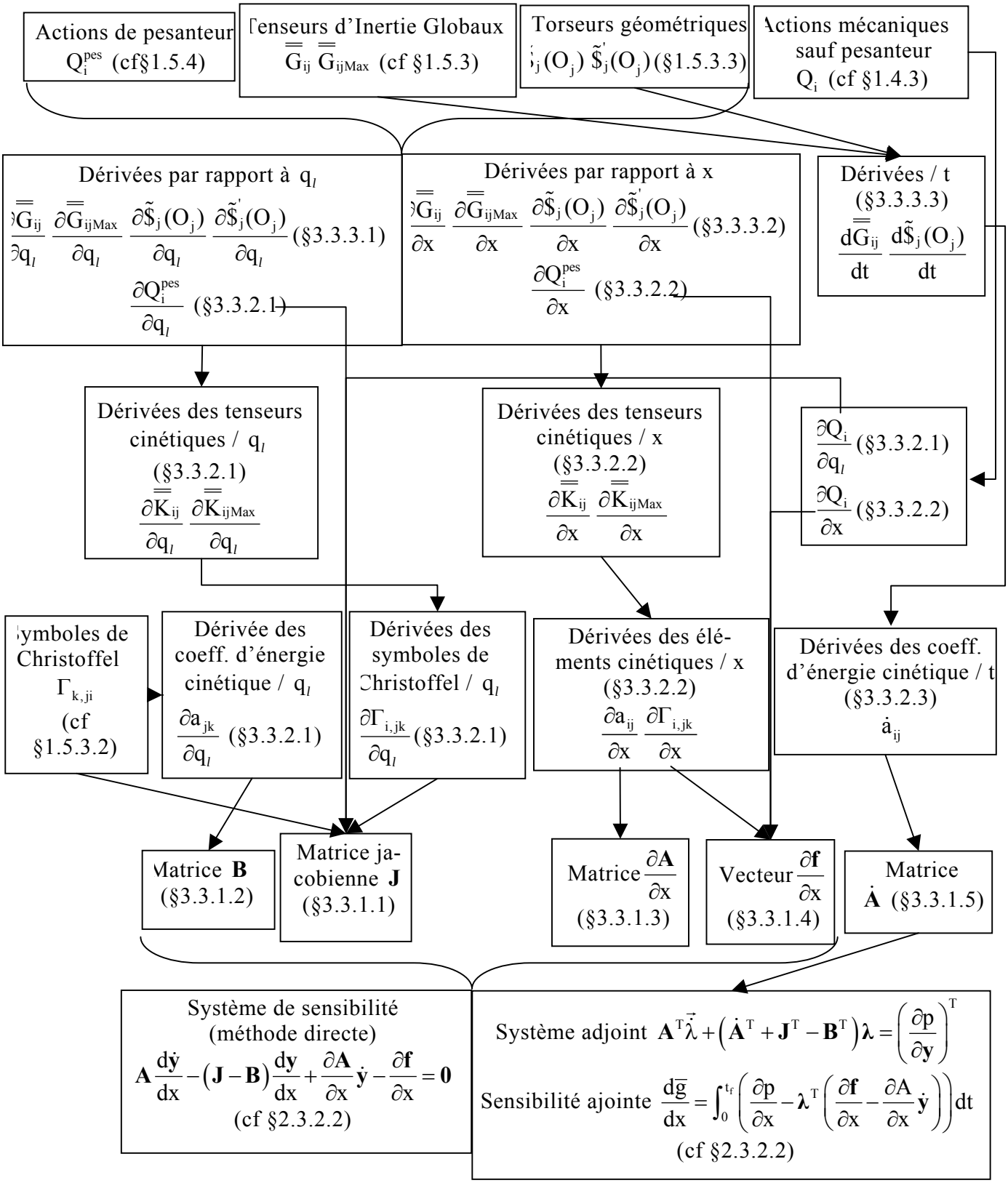



**Figure 3.3.1** Méthode d'obtention des systèmes d'étude de sensibilité à l'aide des TIG

Dans un souci de concision et de clarté, l'algorithme présenté sur la Figure 3.3.1 a été simplifié de plusieurs façons :

- La construction des équations du mouvement, ayant les mêmes TIG et torseurs géométriques comme points de départ, n'est pas représentée ici (cf Figure 1.7.1) ; en conséquence, par exemple, même si les symboles de Christoffel sont utilisés ici, leur obtention n'est pas détaillée.

- Les tenseurs cinétiques $\overline{\overline{K}}_{ij}$ et $\overline{\overline{K}}_{ijMax}$ ne sont pas représentés, alors que $\overline{\overline{K}}_{ij}$ par exemple intervient dans l'équation (3.3.10) qui donne $\frac{\partial \Gamma^{1}_{i,jk}}{\partial q_l}$ (§3.3.2.1) ; le parti-pris ici est en effet de ne montrer les implications que des nouveaux éléments (dérivées) et d'économiser celles des éléments issus de la mise en équations du mouvement.

- Alors que les différents cas sont bien sûr traités dans le texte précédent, la Figure 3.3.1 ne distingue pas :
  - les symboles de Christoffel de type 1 et de type 2 ;
  - les cas de paramétrages holonome et non holonome.

  C'est notamment pour cette raison que la Figure 3.3.1 renvoie aux paragraphes et non aux numéros des équations, d'autant plus que toutes les équations ne sont pas détaillées dans le texte précédent du chapitre 3.

Malgré toutes ces simplifications, la Figure 3.3.1 conserve une grande utilité :

- elle permet de comprendre la philosophie de la méthode ;

- elle met en évidence les différents *niveaux* de calcul, point très utile lors de la programmation sous Maple (voir les exemples au paragraphe suivant).

# 3.4 Validations - exemples

Le logiciel sous Maple 9.5 est complété par les calculs matriciels et de dérivation aboutissant aux systèmes de sensibilité (méthode directe) et adjoint.

La plupart des systèmes présentés au chapitre 1 sont testés en analyse de sensibilité : le double-pendule orthogonal pour le cas holonome, le corps libre et le véhicule simplifié illustrant tous deux des paramétrages non holonomes. Dans le premier cas, on étudie la sensibilité par rapport à une longueur, dans le deuxième celle par rapport à un moment d'inertie, dans le troisième celle par rapport à une masse ; on teste donc les sensibilités par rapport aux trois types de paramètres de construction possibles.

Seul le système à joint de Cardan, présentant une liaison complexe véritable, n'est pas traité, en raison de la trop grande complexité analytique. Cependant, rappelons que le *formalisme général des liaisons complexes* reste utilisé dans les trois autres exemples et donne les bons résultats ; par conséquent, nous sommes parfaitement confiants dans la méthode de sensibilité pour les vraies liaisons complexes industrielles telle qu'une suspension de voiture (cf §1.3.1).

Les expressions des différentes matrices (dérivées des TIG, des tenseurs cinétiques, ou encore des matrices issues des torseurs géométriques), sont d'abord obtenues par calcul matriciel, objet de ce chapitre. Puis elles sont vérifiées en les comparant à leur expression obtenue par simple dérivation dans le repère galiléen ; dans le cas des dérivées par rapport à une coordonnée généralisée, plusieurs changements de base sont alors nécessaires (avant et après dérivation) – notons que les dérivations par rapport à x peuvent être effectuées sur les tenseurs exprimés dans n'importe quelle base, x n'intervenant pas dans les changements de base. Cependant ces validations ne sont pas possibles dans l'exemple du corps libre puisque les changements de base ne sont pas accessibles, en raison de la présence de trois pseudo-paramètres de rotation, sans hiérarchie – à l'inverse du véhicule par exemple, certes en paramétrage non holonome lui aussi, mais où l'orientation du châssis est repérée par des angles d'Euler classiques. En revanche, les dérivées des scalaires $a_{ij}$ et $\Gamma_{i,jk}$, plus simples car sans changement de base, peuvent toujours être effectuées en guise de vérification.

### 3.4.1 Double-pendule orthogonal

Le paragraphe 1.5.5.2 présente en détail le système de la Figure 3.4.1 et les principaux résultats de la mise en équations du mouvement. Le logiciel est à présent complété par le calcul des différents éléments de la Figure 3.3.1 et donc la détermination des systèmes d'équations à résoudre dans la méthode directe et la méthode adjointe.

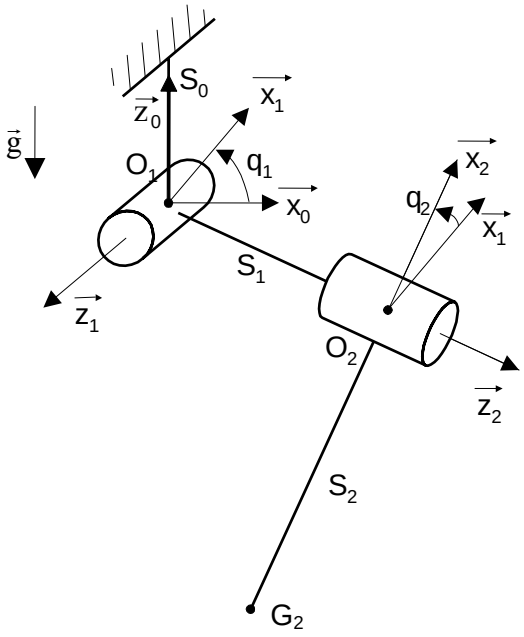



**Figure 3.4.1** Double-pendule orthogonal

Trois études de sensibilité ont été menées, successivement par rapport

1) à la longueur $l_2$, distance du centre d'inertie $G_2$ par rapport à l'articulation $S_1 - S_2$ ;
2) au moment d'inertie $B_2$, inertie principale du solide $S_2$, cylindrique de révolution ;
3) à la masse $m_2$ du solide $S_2$.

On ne présentera dans ce manuscrit que les résultats de la première étude. Le programme étant universel et automatique, il suffit en effet de modifier le paramètre d'étude en début de logiciel pour obtenir les équations de sensibilité.

De la même façon que lors de l'élaboration du modèle dynamique, nous donnons ici les résultats importants de l'étude de sensibilité, alors que le détail est contenu dans l'annexe 7.1. De plus, dans le but de vérifier les résultats, les équations du mouvement obtenues en 1.5.5.2 sont dérivées sous Maple par rapport au paramètre de construction dont on étudie l'influence (ici $l_2$) ; on constatera en fin d'annexe 7.1 que les équations de sensibilité obtenues sont les mêmes que celles obtenues par les TIG. Enfin, le système adjoint ne pouvant être vérifié par simple dérivation, nous ne le présenterons pas ici ; néanmoins, il utilise tous les vecteurs et matrices qui interviennent dans la méthode directe (plus la matrice $\dot{\mathbf{A}}$) et que l'on aura vérifiés.

Voici quelques résultats clés (significatifs) :

Matrice **A** :
$$\begin{bmatrix} 0 & A1 + m_2\, r_2^{\,2} + B2\, \cos(q_2)^2 & 0 & r_2\, m_2\, l_2\, \sin(q_2) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2\, m_2\, l_2\, \sin(q_2) & 0 & B2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vecteur **f** :
$$\left[ [2\, \cos(q_2)\, B2\, \sin(q_2)\, V_1\, V_2 - r_2\, m_2\, l_2\, \cos(q_2)\, V_2^{\,2} - g\, (-\sin(q_1)\, m_1\, l_1 + \sin(q_1)\, m_2\, r_2 - \cos(q_2)\, m_2\, l_2\, \cos(q_1))], \right.$$
$$\left. [V_1], \left[ -\frac{1}{2}\, B2\, \sin(2\, q_2)\, V_1^{\,2} - g\, m_2\, l_2\, \sin(q_2)\, \sin(q_1) \right], [V_2] \right]$$

Matrice $\left[ \frac{\partial \overline{\overline{G}}_{12}}{\partial q_1} \right]$ exprimée dans la base 2 :
$$\begin{bmatrix} -r_2\, m_2\, l_2\, \cos(q_2) & 0 & -\cos(q_2)\, B2 & \cos(q_2)\, m_2\, r_2 \\ r_2\, m_2\, l_2\, \sin(q_2) & 0 & 0 & -\sin(q_2)\, m_2\, r_2 \\ -\cos(q_2)\, B2 & 0 & r_2\, m_2\, l_2\, \cos(q_2) & \cos(q_2)\, m_2\, l_2 \\ 0 & 0 & \cos(q_2)\, m_2\, l_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice $\left[ \frac{\partial \tilde{\$}_2(O_2)}{\partial q_1} \right]$ exprimée dans la base 2 :
$$\begin{bmatrix} 0 & -B2\, \cos(q_2)^2 & -r_2\, m_2\, l_2\, \cos(q_2)\, \sin(q_2) \\ 0 & \cos(q_2)\, B2\, \sin(q_2) & r_2\, m_2\, l_2\, \sin(q_2)^2 \\ 0 & r_2\, m_2\, l_2 & -\cos(q_2)\, B2\, \sin(q_2) \end{bmatrix}$$

Matrice $\left[ \frac{\partial \overline{\overline{K}}_{12}}{\partial q_1} \right]$ exprimée dans la base 2 :
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin(q_2) & 0 \\ 0 & 0 & -\cos(q_2) & 0 \\ \sin(q_2) & \cos(q_2) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice **J** :
$$[[-g\, (-\cos(q_1)\, m_1\, l_1 + \cos(q_1)\, m_2\, r_2 + \cos(q_2)\, m_2\, l_2\, \sin(q_1)),\ 2\, \cos(q_2)\, B2\, \sin(q_2)\, V_2,$$
$$2\, \cos(2\, q_2)\, B2\, V_1\, V_2 + r_2\, m_2\, l_2\, \sin(q_2)\, V_2^{\,2} - \sin(q_2)\, m_2\, l_2\, \cos(q_1)\, g,$$
$$-2\, \cos(q_2)\, (-B2\, \sin(q_2)\, V_1 + r_2\, m_2\, l_2\, V_2)], [0, 1, 0, 0],$$
$$[-\sin(q_2)\, m_2\, l_2\, \cos(q_1)\, g,\ -B2\, \sin(2\, q_2)\, V_1,\ -\cos(2\, q_2)\, B2\, V_1^{\,2} - \cos(q_2)\, m_2\, l_2\, \sin(q_1)\, g,\ 0], [0, 0, 0, 1]]$$

Matrice **B** :
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2\, \cos(q_2)\, B2\, \sin(q_2)\, Ac_1 + r_2\, m_2\, l_2\, \cos(q_2)\, Ac_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_2\, m_2\, l_2\, \cos(q_2)\, Ac_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D'où les équations de sensibilité, avec $\ddot{q}_i \equiv Ac_i$, $\frac{dq_i}{dx} = u_i$, $\dot{u}_i \equiv Vu_{q_i}$ et $\ddot{u}_i \equiv Acu_{q_i}$ pour i=1,2 :

*Equation_de_sensibilite1_correspondant_au_paramètre_ $q_1$*

$$(A1 + m_2 r_2^2 + B2 \cos(q_2)^2)\, Acu_{q_1} + r_2 m_2 l_2 \sin(q_2)\, Acu_{q_2} + g\,(-\cos(q_1)\, m_1 l_1 + \cos(q_1)\, m_2 r_2 + \cos(q_2)\, m_2 l_2 \sin(q_1))\, u_{q_1} - 2\cos(q_2)\, B2 \sin(q_2)\, V_2\, Vu_{q_1} - (2\cos(q_2)\, B2\, V_1\, V_2 + r_2 m_2 l_2 \sin(q_2)\, V_2^2 - \sin(q_2)\, m_2 l_2 \cos(q_1)\, g + 2\cos(q_2)\, B2 \sin(q_2)\, Ac_1 - r_2 m_2 l_2 \cos(q_2)\, Ac_2)\, u_{q_2} + 2\cos(q_2)\,(-B2 \sin(q_2)\, V_1 + r_2 m_2 l_2 V_2)\, Vu_{q_2} + \sin(q_2)\, m_2 r_2\, Ac_2 + \cos(q_2)\, m_2\,(r_2 V_2^2 - \cos(q_1)\, g) = 0$$

*Equation_de_sensibilite3_correspondant_au_paramètre_ $q_2$*

$$r_2 m_2 l_2 \sin(q_2)\, Acu_{q_1} + B2\, Acu_{q_2} + \sin(q_2)\, m_2 l_2 \cos(q_1)\, g\, u_{q_1} + B2 \sin(2 q_2)\, V_1\, Vu_{q_1} - (-\cos(2 q_2)\, B2\, V_1^2 - \cos(q_2)\, m_2 l_2 \sin(q_1)\, g - r_2 m_2 l_2 \cos(q_2)\, Ac_1)\, u_{q_2} + \sin(q_2)\, m_2 r_2\, Ac_1 + g\, m_2 \sin(q_2) \sin(q_1) = 0$$

## 3.4.2 Exemples de paramétrages non holonomes

Dans chacun des deux cas suivants, de la même façon que pour le double-pendule orthogonal (cf §3.4.1),

- les équations de sensibilité (méthode directe) obtenues sont vérifiées en les comparant aux dérivations des équations de mouvement.
- le système adjoint n'est pas présenté.

### 3.4.2.1 Corps libre

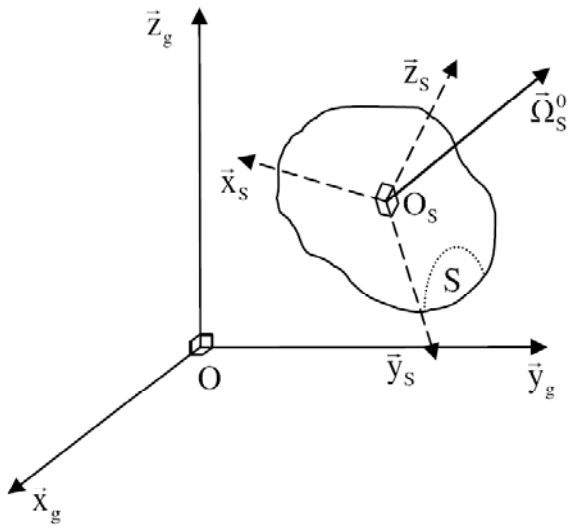



**Figure 3.4.2** Paramétrage d'un corps libre (planète, satellite)

Le paragraphe 1.6.1 présente en détail le système de la Figure 3.4.2 et les principaux résultats de la mise en équations du mouvement. L'influence du moment d'inertie A1 est quantifiée dans l'étude de sensibilité dont les résultats sont présentés en annexe 7.2.

Voici quelques résultats clés (significatifs) :

Matrice **A** :

$$\begin{bmatrix} 0 & A1 & 0 & -F1 & 0 & -E1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -F1 & 0 & B1 & 0 & -D1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E1 & 0 & -D1 & 0 & C1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vecteur **y** :

$$\begin{bmatrix} Pix \\ wx \\ Piy \\ wy \\ Piz \\ wz \end{bmatrix}$$

Vecteur **f** :

$$\left[ \left[ E1\, wx\, wy + D1\, wy^2 - \left( -\frac{1}{2}A1 - \frac{1}{2}B1 + \frac{1}{2}C1 \right) wy\, wz - F1\, wx\, wz - \left( \frac{1}{2}C1 + \frac{1}{2}A1 - \frac{1}{2}B1 \right) wy\, wz - D1\, wz^2 \right], [wx], \left[ -E1\, wx^2 - D1\, wx\, wy - \left( \frac{1}{2}A1 + \frac{1}{2}B1 - \frac{1}{2}C1 \right) wx\, wz - \left( -\frac{1}{2}B1 - \frac{1}{2}C1 + \frac{1}{2}A1 \right) wx\, wz + F1\, wy\, wz + E1\, wz^2 \right], [wy], \left[ F1\, wx^2 - \left( -\frac{1}{2}C1 - \frac{1}{2}A1 + \frac{1}{2}B1 \right) wx\, wy + D1\, wx\, wz - \left( \frac{1}{2}B1 + \frac{1}{2}C1 - \frac{1}{2}A1 \right) wx\, wy - F1\, wy^2 - E1\, wy\, wz \right], [wz] \right]$$

Matrice $\left[ \frac{\partial \overline{\overline{G}}_{SS}}{\partial Pix} \right]$ dans la base liée à S :

$$\begin{bmatrix} 0 & -E1 & F1 & 0 \\ -E1 & -2\,D1 & -B1 + C1 & 0 \\ F1 & -B1 + C1 & 2\,D1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice $\left[ \frac{\partial \tilde{\$}_1(O_1)}{\partial Piy} \right]$ dans la base liée à S :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice $\left[ \frac{\partial \overline{\overline{K}}_{12}}{\partial Piy} \right]$ exprimée dans la base S :

$$\begin{bmatrix} D1 & 0 & -F1 \\ E1 & 0 & \frac{1}{2}A1 + \frac{1}{2}B1 - \frac{1}{2}C1 \\ -F1 & 0 & -D1 \end{bmatrix}$$

Matrice **J** :

[[0, *E1 wy - F1 wz*, 0, *E1 wx + 2 D1 wy + wz B1 - wz C1*, 0, *-F1 wx + wy B1 - wy C1 - 2 D1 wz*],
[0, 1, 0, 0, 0, 0],
[0, *-2 E1 wx - D1 wy - wz A1 + wz C1*, 0, *-D1 wx + F1 wz*, 0, *-wx A1 + wx C1 + F1 wy + 2 E1 wz*],
[0, 0, 0, 1, 0, 0],
[0, *2 F1 wx + wy A1 - wy B1 + D1 wz*, 0, *wx A1 - wx B1 - 2 F1 wy - E1 wz*, 0, *D1 wx - E1 wy*],
[0, 0, 0, 0, 0, 1]]

La matrice $\mathbf{B}$ est quant à elle une matrice nulle 6x6.

D'où les équations de sensibilité, avec $\ddot{q}_i \equiv Ac_i$, $\frac{dq_i}{dx} = u_i$, $\dot{u}_i \equiv Vu_{q_i}$ et $\ddot{u}_i \equiv Acu_{q_i}$ pour i=1,2,3 :

*Equation_de_sensibilite1_correspondant_au_paramètre_ Pix*

$$A1\,Acu_{Pix} - F1\,Acu_{Piy} - E1\,Acu_{Piz} - (E1\,wy - F1\,wz)\,Vu_{Pix} - (E1\,wx + 2\,D1\,wy + wz\,B1 - wz\,C1)\,Vu_{Piy} - (-F1\,wx + wy\,B1 - wy\,C1 - 2\,D1\,wz)\,Vu_{Piz} + Ac_1 = 0$$

*Equation_de_sensibilite3_correspondant_au_paramètre_ Piy*

$$-F1\,Acu_{Pix} + B1\,Acu_{Piy} - D1\,Acu_{Piz} - (-2\,E1\,wx - D1\,wy - wz\,A1 + wz\,C1)\,Vu_{Pix} - (-D1\,wx + F1\,wz)\,Vu_{Piy} - (-wx\,A1 + wx\,C1 + F1\,wy + 2\,E1\,wz)\,Vu_{Piz} + wx\,wz = 0$$

*Equation_de_sensibilite5_correspondant_au_paramètre_ Piz*

$$-E1\,Acu_{Pix} - D1\,Acu_{Piy} + C1\,Acu_{Piz} - (2\,F1\,wx + wy\,A1 - wy\,B1 + D1\,wz)\,Vu_{Pix} - (wx\,A1 - wx\,B1 - 2\,F1\,wy - E1\,wz)\,Vu_{Piy} - (D1\,wx - E1\,wy)\,Vu_{Piz} - wx\,wy = 0$$

### 3.4.2.2 Véhicule simplifié

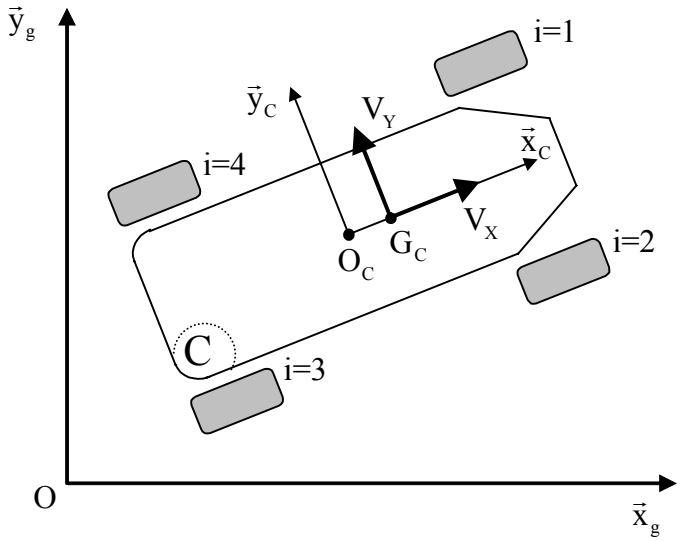



**Figure 3.4.3** Paramétrage d'un modèle de véhicule

Le paragraphe 1.6.2 présente le système de la Figure 3.4.3 et les principaux résultats de la mise en équations du mouvement. L'influence de la masse $m_C$ du châssis est quantifiée dans l'étude de sensibilité dont les résultats sont présentés en annexe 7.3.

Voici quelques résultats clés (significatifs) :

Matrice **A** :
$$\begin{bmatrix} 0 & m_C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_C & 0 & m_C\, l_C \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_C\, l_C & 0 & C1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
Vecteur **y** :
$$\begin{bmatrix} Pix \\ Vx \\ Piy \\ Vy \\ Ps \\ wz \end{bmatrix}$$

Vecteur **f** :
$$\begin{bmatrix} m_C\, Vy\, wz + m_C\, l_C\, wz^2 + Fmotrice \\ Vx \\ -m_C\, Vx\, wz + Fderive \\ Vy \\ -m_C\, l_C\, Vx\, wz \\ wz \end{bmatrix}$$

Matrice $\left[\frac{\partial \overline{\overline{G}}_{CC}}{\partial Ps}\right]$ dans la base liée à C :
$$\begin{bmatrix} 0 & -A1 + B1 & 0 & 0 \\ -A1 + B1 & 0 & 0 & m_C\, l_C \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_C\, l_C & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice $\left[\frac{\partial \tilde{\$}_2(O_2)}{\partial Ps}\right]$ dans la base liée à C :
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice $\left[\frac{\partial \overline{\overline{K}}_{13}}{\partial Ps}\right]$ exprimée dans la base C
$$\begin{bmatrix} -m_C\, l_C & 0 & 0 \\ 0 & m_C\, l_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice **J** :
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & m_C\, wz & 0 & m_C\, Vy + 2\, m_C\, l_C\, wz \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_C\, wz & 0 & 0 & 0 & -m_C\, Vx \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -m_C\, l_C\, wz & 0 & 0 & 0 & -m_C\, l_C\, Vx \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{B}$ est quant à elle une matrice nulle 6x6.

D'où les équations de sensibilité, avec $\ddot{q}_i \equiv Ac_i$, $\frac{dq_i}{dx} = u_i$, $\dot{u}_i \equiv Vu_{q_i}$ et $\ddot{u}_i \equiv Acu_{q_i}$ pour i=1,2,3 :

*Equation_de_sensibilite1_correspondant_au_paramètre_ Pix*

$$m_C\, Acu_{Pix} - m_C\, wz\, Vu_{Piy} - (m_C\, Vy + 2\, m_C\, l_C\, wz)\, Vu_{Ps} + Ac_1 - Vy\, wz - l_C\, wz^2 = 0$$

*Equation_de_sensibilite3_correspondant_au_paramètre_ Piy*

$$m_C\, Acu_{Piy} + m_C\, l_C\, Acu_{Ps} + m_C\, wz\, Vu_{Pix} + m_C\, Vx\, Vu_{Ps} + Ac_2 + l_C\, Ac_3 + Vx\, wz = 0$$

*Equation_de_sensibilite5_correspondant_au_paramètre_ Ps*

$$m_C\, l_C\, Acu_{Piy} + C1\, Acu_{Ps} + m_C\, l_C\, wz\, Vu_{Pix} + m_C\, l_C\, Vx\, Vu_{Ps} + l_C\, Ac_2 + l_C\, Vx\, wz = 0$$

# 3.5 Conclusion

Tout d'abord, concernant le calcul effectif (à la main ou sous Maple), on retrouve sur plusieurs points la différence essentielle entre paramétrage holonome et paramétrage non holonome : par exemple, les dérivées des torseurs géométriques nécessitent d'être calculées par rapport à toutes les coordonnées généralisées dans le cas non holonome – *car il n'y a plus de hiérarchie ou d'ordre dans la chaîne cinématique, donc tous les paramètres ont une influence potentielle* –, alors qu'il suffit de les calculer par rapport aux paramètres précédant la liaison considérée dans le cas holonome (les autres dérivées étant bien entendu nulles).

Outre le calcul d'un minimum de dérivations, les autres étant remplacées par de simples opérations matricielles - avantage déjà discuté dans la première partie -, employer la théorie des Tenseurs d'Inertie Globaux pour une étude de sensibilité présente les avantages suivants :

- Pour les trois systèmes étudiés (double-pendule orthogonal, corps libre et véhicule simplifié), on constate dans les annexes 7.1, 7.2 et 7.3 que les équations de sensibilité sont davantage factorisées - c'est-à-dire ordonnées en $u = \frac{dq_i}{dx}$, $\dot{u}_i = Vu_{q_i}$ et $\ddot{u}_i = Acu_{q_i}$ - lorsqu'elles sont obtenues par les TIG que par simple dérivation des équations du mouvement. Cet avantage peut devenir décisif pour des systèmes plus complexes que ceux utilisés ici dans le but de valider la méthode. En effet, c'est justement la phase de simplification, de factorisation ou d'ordonnancement qui est le point faible des logiciels de calcul formel ; la méthode des TIG permet d'éviter cette étape hasardeuse en fournissant des équations déjà ordonnées.

- Les étapes définies dans ce troisième chapitre et résumées à la Figure 3.3.1 permettent de connaître l'influence des paramètres sur les TIG, sur les tenseurs cinétiques ou encore sur les symboles de Christoffel, ce qui peut être utile dans la correction des performances ou l'optimisation du système en général. Cependant ces sensibilités pourraient également être obtenues en dérivant dans $R_0$ (après projection dans le cas des tenseurs). Mais dans le cas du corps libre, les projections dans le repère galiléen sont impossibles ; par conséquent, on ne peut quantifier l'influence d'un paramètre de construction sur un TIG qu'en utilisant les TIG eux-mêmes, et donc la méthode de ce chapitre.

Néanmoins, ces avantages doivent être mis en balance avec des inconvénients, au nombre de deux également :

- En l'absence de la mise au point d'une interface, la méthode présentée dans ce chapitre reste longue et complexe à mettre en œuvre par rapport à la simple dérivation du modèle dynamique.

- Les opérations matricielles doivent être réalisées avec tous les éléments exprimés dans la même base. Dans quelle(s) base(s) exprimer alors chaque vecteur ou matrice ? Devant l'impossibilité de traiter les éléments de façon automatique (algorithme trop compliqué), ou au contraire au cas par cas (trop long), tous les éléments impliqués dans le double-pendule par exemple ont été systématiquement projetés dans la base 2 afin de pouvoir tout de même réaliser les opérations matricielles de façon automatique. Deux inconvénients apparaissent alors :

    - il faut faire le choix d'une certaine base de projection (en général dans le repère du solide à l'extrémité de la chaîne) ; ceci réduit le caractère automatique de la programmation des TIG de la partie 1, où les projections étaient systématiquement faites dans le repère du solide concerné.

    - surtout, ces projections demandent du temps et rendent le traitement des systèmes à plus grand nombre de solides relativement lourd.

En conclusion, plus le système présente de solides, plus l'avantage de la factorisation automatique des équations devient intéressant, mais plus l'inconvénient des projections à effectuer devient rédhibitoire.

# Conclusion générale

# Bilan

Sans entrer dans les explications "techniques", détaillées en conclusion de chaque partie, on souligne les résultats essentiels de ce travail de thèse :

- L'efficacité de l'outil "Tenseurs d'Inertie Globaux" a été démontrée pour l'écriture automatique d'équations : que ce soit dans la première partie pour écrire le système dynamique (équations du mouvement) ou dans la troisième partie pour obtenir les systèmes de sensibilité (méthode directe) et adjoint (méthode adjointe), les TIG offrent la garantie d'équations concises et ordonnées, et mettent en exergue dans des cas relativement simples le sens physique des différents termes.

- L'adaptation aux multicorps des méthodes directe et adjointe d'étude de sensibilité analytique a montré que la méthode directe était globalement plus efficace pour étudier la sensibilité temporelle des systèmes multicorps et confirme les thèses de Serban [SER98a] et Behar [BEH98]. Cependant, ces auteurs utilisaient tous deux un point de vue MMC, des éléments finis et des différences finies pour l'évaluation des dérivées des matrices. Nous avons amélioré les deux méthodes pour poursuivre aussi loin que possible les développements analytiques (cf introduction générale) : une méthode d'intégration du système adjoint à partir d'une base de solutions a notamment été proposée. La méthode adjointe peut devenir très intéressante lorsque le critère est de type intégral sur un intervalle de temps unique et que les paramètres de construction sont nombreux.

Outre le travail théorique, on peut souligner que plusieurs exemples transversaux ont été traités : le double-pendule orthogonal, fil conducteur quelque peu académique, a été traité dans les trois parties. Le corps libre (planètes, satellites etc…) et le premier exemple de véhicule simplifié (3 coordonnées) ont été considérés dans les parties utilisant les TIG ; au paragraphe 2.4.3, l'analyse de sensibilité a été menée sur un véhicule beaucoup plus complexe, à savoir le dernier exemple (roulis-lacet-dérive) de [BROS06], livre-référence de dynamique du véhicule. Enfin, le joint de Cardan, exemple de liaison complexe dans la première partie, est révélateur des limites du calcul entièrement formel, sur un système qui reste pourtant relativement simple.

# Logiciels

L'objectif de la programmation des logiciels n'était ici que de valider les progrès théoriques.

Cependant, on dispose à présent de plusieurs logiciels "universels" sous Maple, où il suffit de "rentrer" les caractéristiques du système et de l'étude avant de lancer l'exécution automatique :

- Aux chapitres 1 et 3, ils permettent d'obtenir les modèles dynamique, de sensibilité et adjoint de façon automatique pour tout système, comportant même des liaisons complexes, et paramétré avec des pseudo-paramètres ; le côté "universel" est moins prononcé dans ces derniers cas, puisqu'il faut introduire les descriptions mathématiques des liaisons complexes et certaines formules spécifiques à chaque cas de pseudo-paramètres.

- Au chapitre 2, le logiciel permet de réaliser rapidement de petites études académiques en calcul "paramétrique", afin d'obtenir les sensibilités en fonction du temps et des paramètres de construction eux-mêmes.

Sous Matlab, le logiciel d'étude de sensibilité respecte l'algorithme analytique mais emploie un mode de résolution numérique. Il autorise des études plus détaillées sur des systèmes plus complexes. La création d'une interface conviviale est possible, et Simulink a commencé à être utilisé afin d'accroître encore la compréhension physique des phénomènes.

Destinés à un usage de validations théoriques, ces logiciels pourraient être "optimisés", mais ceci nous semble être davantage du ressort de numériciens que nous ne sommes pas.

Enfin, la société Maplesoft a développé des modules d'écriture des équations formelles du mouvement (DynaFlexPro et BlockBuilder), qui sont intéressants mais dont les équations nous semblent encore difficiles à exploiter. Des logiciels d'analyse de sensibilité paramétrique (Diffedge, société Appedge, cf §2.2.2.4.2) s'appuient également sur Maple. Il est évident que l'avenir est à la collaboration avec les développeurs de ces logiciels.

# Sur la recherche bibliographique

Comme écrit en introduction, le groupe Dynamique des Véhicules Automobiles (DVA) souhaitait également s'ouvrir à l'analyse de sensibilité au travers de cette thèse.

Par conséquent, la recherche bibliographique a été "multi-horizons", donc un peu "imprécise" parfois, mais particulièrement intéressante lorsqu'il s'agissait de dresser des passerelles entre différents domaines. Par exemple, de nombreux spécialistes utilisent la méthode dite "adjointe", sans qu'elle soit exactement la même : comprendre les similitudes, les différences et les points utilisables a été un travail très enrichissant (cf §2.5).

De même, beaucoup de travaux n'avaient pas les mêmes équations comme point de départ, seuls les principes généraux étaient exploitables ; ceci explique également l'ancienneté de certaines publications de référence.

# Perspectives

Outre l'utilisation des logiciels spécialisés et la collaboration avec leurs concepteurs (cf Maple 11 évoqué plus haut), plusieurs pistes de travail sont ouvertes. Certains points nécessitent d'être approfondis dans le cadre des hypothèses actuelles, puis les champs d'application de l'étude de sensibilité pourront être élargis dans plusieurs directions.

### Approfondissements

Le traitement des résultats par un calcul de sensibilité simple ou par la sensibilité logarithmique a donné lieu à une discussion au §2.4.3 qui mérite d'être poursuivie. Au cours de ce même exemple, le besoin d'une analyse de coût, qui permet de déterminer *où* l'investissement en termes d'amélioration de la qualité est le plus rentable, a été soulevé : en effet, il peut être plus difficile de contrôler un paramètre de 10% plutôt qu'un autre de 1% !

Enfin, il serait intéressant d'utiliser concrètement les sensibilités calculées dans un algorithme d'optimisation complet, qui relève des compétences de l'équipe DVA [PORTA07, ALM07, BAR07, KAD07, PAST07].

### Chaînes fermées

Plusieurs auteurs s'intéressent déjà à l'analyse de sensibilité de systèmes comportant des chaînes fermées : [AND02, AND04, ARN95, DAT96, EBE07, HAU97, HSU02, SER98a, SER98b]. Bien qu'une fois encore, leurs méthodes, paramétrages ou équations de départ ne soient pas forcément exploitables directement dans notre point de vue, cela démontre qu'il faut logiquement à présent étudier ces systèmes à boucles fermées.

On s'intéressera notamment à la différence de traitement des systèmes algébro-différentiels [FAY02b] par rapport aux systèmes différentiels (ODE) dont il était question ici, et notamment aux stratégies d'élimination des multiplicateurs de Lagrange pour pouvoir appliquer ensuite directement nos méthodes.

### Dérivées secondes

En 1963, Tomovic étudiait déjà "la sensibilité de la sensibilité" par la méthode directe pour des systèmes à un degré de liberté [TOM63]. Haug [HAU87] et Haftka [HAF92] ont également établi leur méthode.

Laroussi se pose la question : "comment les paramètres interagissent entre eux ?" [LAR03]. C'est en effet un point fondamental, comme le montre cet exemple donné par Sharp et Brooks [BROO87, SHA87] : un pneu va accroître sa raideur avec la charge. Donc une grande sensibilité à cette raideur n'est pas une bonne chose parce que

le comportement ne sera pas le même dans les cas chargé et déchargé. La sensibilité de cette sensibilité par rapport à un second paramètre permettra de répondre à la question suivante : quel paramètre sera-t-il le plus judicieux de modifier pour réduire la sensibilité à la raideur des pneus ?

Dans les publications citées ci-dessus, on se rend compte que seuls quelques termes sont modifiés par rapport à la sensibilité "simple", *a fortiori* dans la méthode directe.

### Sensibilité aux conditions initiales

Là encore, Tomovic [TOM63, TOM72] et Haftka [HAF92] ont abordé le sujet, qui se rapproche quelque peu des méthodes de tir (cf §2.2.2.4.5 et [GAY04]) et nécessite d'être approfondi.

En effet, comment varie le comportement en fonction des conditions initiales (C.I.) ? La sensibilité seconde présente de même un grand intérêt : dans les études menées dans ce travail et celles à venir, quelle est l'influence (l'importance) du choix des C.I. ? En d'autres termes, comment varie une sensibilité en fonction des C.I. ?

Cependant, les conditions initiales agissent sur les solutions des équations différentielles mais n'apparaissent pas directement dans celles-ci : une étude théorique en amont s'impose puisque ce cas n'entre pas dans le cadre défini jusque-là.

### Systèmes multicorps (à solides) déformables (*flexible multibody systems)*

La recherche bibliographique approfondie a permis de constater que les théories des mécanismes à solides rigides et des milieux continus (solides déformables) se rapprochent : ainsi Behar traite-t-elle les multicorps d'un point de vue "éléments finis" et "Mécanique des Milieux Continus" [BEH98]. La jonction des deux domaines est depuis quinze ans environ un domaine de recherche prometteur, dont des initiateurs sont par exemple Ambrosio ou M. Pascal [PASC99].

La séparation arbitraire des deux domaines n'a donc plus beaucoup de sens ; Dias analyse déjà la sensibilité des mécanismes flexibles mais uniquement par la méthode directe (ce qui est relativement logique au vu de la complexité accrue des problèmes générés par la considération des déformations) [DIA97] ; nous avons préféré ne pas exploiter pour le moment ces travaux complexes dans cette thèse destinée à ouvrir une thématique.

### Biomécanique (ou "conclusion de la conclusion"…)

A l'interface des systèmes à solides déformables et indéformables se situe justement la mécanique du vivant. L'étude de sensibilité a son utilité dans ce domaine d'application : citons l'étude des paramètres influents du mouvement du corps humain, [CIG00], l'influence des différents paramètres sur les stratégies de rattrapage des pas-

sagers debout de transports en commun [ROB06] ou encore l'optimisation des endoprothèses, thème de recherche du LaMCoS : une étude de sensibilité pourrait intervenir à la fois pour la sélection des paramètres et l'optimisation elle-même.

Enfin, les méthodes développées dans ce travail pourraient également être appliquées à d'autres domaines (physique, thermodynamique…) à partir du moment où le modèle est un système d'équations différentielles (ODE). Le choix de la méthode la plus efficace dépendrait là encore des spécificités de chaque domaine.

# Références bibliographiques

*[ALM07]* **ALMEIDA E.** Optimisation du comportement du véhicule : prestation sinus Ford. Mémoire de Master LaMCoS. Lyon : INSA de Lyon, 2007, 72 p.

*[AND02]* **ANDERSON K.S., HSU Y.** Analytically fully-recursive sensitivity analysis for multibody dynamic chain systems. Multibody System Dynamics, 2002, vol. 8, pp. 1-27.

*[AND04]* **ANDERSON K.S., HSU Y.** Order-($n$+$m$) direct differentiation determination of design sensitivity for constrained multibody dynamic systems. Struct. Multidisc. Optim., 2004, vol. 26, pp. 171-182.

*[APP1899]* **APPEL P.** Sur une forme générale des équations de la dynamique. Compte-rendu de l'Académie des Sciences, 1899, vol. 129, pp. 317-320, 423-427, 459-460.

*[ARI07]* **ARIDON G.** Dynamique du déploiement autonome d'un hexapode à rubans pour applications spatiales. Thèse LaMCoS. Lyon : INSA de Lyon, 2007, à paraître.

*[ARN95]* **ARNOLD M.** A perturbation analysis for the dynamical simulation of mechanical multibody systems. Applied numerical mathematics, 1995, vol. 18, pp. 37-56.

*[BAR07]* **BARBIE J.P.** Optimisation du comportement du véhicule : prestation µ-split. Mémoire de Master LaMCoS. Lyon : INSA de Lyon, 2007, 100 p.

*[BASA00]* **BASAR Y., WEICHERT D.** Nonlinear Continuum Mechanics of Solids. Berlin, Allemagne : Springer, 2000. 193 p.

*[BASS99]* **BASSIR H.** Analyse des sensibilités et optimisation en mécanique des structures. Thèse de Doctorat. Besançon, 1999, 166 p.

*[BEH98]* **BEHAR-CANY L.** Méthodes d'aide à la conception optimale des systèmes multicorps. Thèse de Doctorat. Cachan : Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1998, 185 p.

*[BES05a]* **BESSONNET G., SARDAIN P.** Optimal dynamics of actuated kinematic chains. Part 1 : dynamic modelling and symbolic differentiations. European Journal of Mechanics A/Solids, 2005, vol. 24, pp. 452-471.

*[BES05b]* **BESSONNET G., CHESSE S.** Optimal dynamics of actuated kinematic chains. Part 2 : problem statements and computational aspects. European Journal of Mechanics A/Solids, 2005, vol. 24, pp. 472-490.

*[BON96]* **BONEILL C.** Identification non-lineaire d' elements d' absorpion d' energie. Thèse de Doctorat. Ecully : Ecole-centrale-de-Lyon, 1996, 200 p.

*[BROO87]* **BROOKS P.C., SHARP R.S.** A computational procedure based on eigenvalue sensitivity theory applicable to linear system design. Journal of Sound and Vibration, 1987, vol. 114, n°1, pp. 13-18.

*[BROS97]* **BROSSARD J.P.** Mécanique générale. Dynamique : optimisation. Techniques de l'Ingénieur, 1997, A 1 669, 26p.

*[BROS06]* **BROSSARD J.P.** Dynamique du véhicule. Modélisation des systèmes complexes. Lausanne, Suisse : Presses polytechniques et universitaires romandes, 2006. 714 p.

*[BRU98]* **BRUYERE-GARNIER K., SANDEL A., RUMELHART C.** Détermination sur calcanéums humains du module d'élasticité de l'os spongieux et du tissu trabéculaire par une méthode ultrasonore. **In** Actes des secondes journées d'études sur l'interaction des ultrasons avec les milieux biologiques. Apport des techniques ultrasonores à la caractérisation des tissus osseux. 1998, Valenciennes.

*[CAS99]* **CASSANDRAS C.G., LAFORTUNE S.** Introduction to discrete event systems. Paris : Lavoisier, 1999. 820 p.

*[CIG00]* **CIGLARIC I., PREBIL I.** Sensitivity analysis of the human body mechanical model. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 2000, vol. 80, sup 2, pp. S343-S344.

*[DAT96]* **DATOUSSAID S., VERLINDEN O., DEHOMBREUX P., CONTI C.** Optimal design of multibody systems. In Proceedings of the 3rd International Conference Dynamics and control of structures in space, 27-31 mai 1996, Londres, Royaume-Uni. pp. 507-522.

*[DEB03a]* **DEBAINS 0.** Equations de la dynamique du véhicule. Simulations numériques et simplifications. Villeurbanne : INSA de Lyon – PSA Peugeot Citroën, 2003. 134 p.

*[DEB03b]* **DEBAINS O.** Equations de la dynamique du véhicule. Linéarisation autour d'un état de fonctionnement en freinage ligne droite. Villeurbanne : INSA de Lyon – PSA Peugeot Citroën, 2003. 57 p.

*[DEB03c]* **DEBAINS O.** Equations de la dynamique du véhicule. Détermination d'un état de fonctionnement pour une mise en virage (à freinage nul). Villeurbanne : INSA de Lyon – PSA Peugeot Citroën, 2003. 14 p.

*[DHA95]* **DHANARAJ C., SHARAN A.M.** Efficient modelling of rigid link root dynamic problems with friction. Mechanism and Machine Theory, 1995, vol. 30, pp. 749-764.

*[DIA97]* **DIAS J.M.P., PEREIRA M.S.** Sensitivity analysis of rigid-flexible multibody systems. Multibody System Dynamics, 1997, vol. 1, pp. 303-322.

*[EBE96]* **EBERHARD P.** The adjoint variable method for the sensitivity analysis of multibody systems interpreted as continuous, hybrid form of automatic differentiation. **In** Berz M., Bischof C., Corliss G., Griewank A. Computational Differentiation : Techniques, Applications and Tools. Philadelphia, Penn., USA : SIAM editor, 1996, pp. 319-328.

*[EBE07]* **EBERHARD P., SCHIEHLEN W., SIERTS J.** Sensitivity analysis of inertia parameters in multibody dynamics simulations. In Proceedings of the 12th IFToMM World Congress, 18-21 juin 2007, Besançon, France.

*[EVR03]* **EVROT F., DEBAINS O.** Equations de la dynamique du véhicule. Travaux de fond pour la compétence Dynamique route. Villeurbanne : INSA de Lyon – PSA Peugeot Citroën, 2003, Version 2. 190 p.

*[EYM96]* **EYMARD I.** Analyse de sensibilite aux donnees pour les calculs de structures dans le cadre lineaire. Collection de notes internes de la DER-EDF, Clamart, France. 1996, 30 p.

*[FAV05]* **FAVIER D., LIU Y., ORGEAS L., SANDEL A., DEBOVE L., MISSILIER P.** Influence of thermomechanical treatment on the superelastic properties of a Ti-50.8%atNi shape memory alloy. Proc. of Euromat, 2005, Prague, Czech Republic.

*[FAV06]* **FAVIER D., LIU Y., ORGEAS L., SANDEL A., DEBOVE L., COMTE-GAZ P.** Influence of thermomechanical processing on the superelastic properties of a Ni-rich nitinol shape memory alloy. Mater. Sci. Eng A 429, 2006, p 130-136.

*[FAY89]* **FAYET M., RENAUD M.** Quasi-minimal computation under an explicit form of the inverse dynamic model of a robot manipulator. Mechanism and Machine Theory, 1989, vol. 24, pp.165-174.

*[FAY94]* **FAYET M., PFISTER F.** Analysis of multibody systems with indirect coordinates and global inertia tensor. European Journal of Mechanics A/Solids, 1994, vol. 13, pp. 431-457.

*[FAY02a]* **FAYET M.** Dynamics of semi-free systems. Multibody System Dynamics, 2002, vol. 8, pp. 185-196.

*[FAY02b]* **FAYET M., PFISTER F., MARQUIS-FAVRE W., LONJOU P.** Théorie et pratique des logiciels de simulation des mécanismes – cours du DEA de mécanique de Lyon, école doctorale MEGA. Villeurbanne : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2002, 184 p.

*[FAY04]* **FAYET M., SANDEL A., MAIFFREDY L.** Global Inertia Tensors Used With Pseudo Parameter And Complex Joints. Application In Vehicle Dynamics. **In** Proceedings of the 11th IFToMM World Congress in Mechanism and Machine Science, Tianjin, China, april 1-4 2004. China Machinery Press, edited by Tian Huang, 2004.

*[FAY05]* **FAYET M., SANDEL A., MAIFFREDY L.** Utilisation des Tenseurs d'Inertie Globaux dans le cas de systèmes à liaisons complexes et pseudo-paramètres. **In** Actes du 17ème Congrès Français de Mécanique, Troyes, août 2005.

*[FAY07]* **FAYET M., LONJOU P., SANDEL A.** Simulation des mécanismes. Equations de la dynamique – exemples. Techniques de l'Ingénieur, 2007, AF 5 053, 48 p. A paraître.

*[FIC89]* **FICHOT D.** Mise en oeuvre industrielle d'une procédure de recalage appliquée à une structure support d'essais. Ecully : Société Metravib, 1989. 193 p.

*[FIS1906]* **FISCHER O.** Theoretische Grundlagen für eine Mechanik lebender Körper. Leipzig, Allemagne : Teubner, 1906.

*[FRE03]* **FREGLY B.J., BEI Y., SYLVESTER M.E.** Experimental evaluation of an elastic foundation model to predict contact pressures in knee replacements. Journal of Biomechanics, 2003, vol. 36, pp. 1659-1668.

*[GAY04]* **GAY B.** Méthodes numériques II. Cours du Master systèmes industriels 2ème année. Villeurbanne : ISTIL, 2004.

*[GHO97]* **GHOUALI M.A.** Analyse de sensibilité analytique locale. Principes, validations et applications. Thèse de Doctorat. Cachan : Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1997, 243 p.

*[HAF92]* **HAFTKA R.T., GÜRDAL Z.** Elements of Structural Optimization. Dordrecht, Pays-Bas : Kluwer Academic Publishers, 1992, 480 p. (Solids mechanics and its applications, Volume 11)

*[HAM49]* **HAMEL G.** Theoretische Mechanik. Berlin, Allemagne : Springer, 1949.

*[HAU87]* **HAUG E.J.** Design sensitivity analysis of dynamic systems. Computer Aided Optimal Design : Structural and Mechanical Systems, NATO ASI Series F, 1987, vol. 27, pp. 705-755.

*[HAU97]* **HAUG E.J., COROIAN D.I., SERBAN R.** Variable fidelity differential-algebraic equation model correlation. Mechanics of structures and machines, 1997, vol. 25, n°1, pp. 61-85.

*[HSU02]* **HSU Y., ANDERSON K.S.** Recursive sensitivity analysis for constrained multi-rigid-body dynamic systems design optimization. Struct Multidisc Optim, 2002, vol. 24, pp. 312-324.

*[KAD07]* **KADMIRI Y.** Optimisation du comportement du véhicule : prestation sinus Ford. Mémoire de Master LaMCoS. Lyon : INSA de Lyon, 2007, 80 p.

*[KHA86]* **KHALIL W., KLEINFINGER J.F.** IEEE International Conference on Robotics and Automation. 1986, San Francisco, USA.

*[KIM01]* **KIM H.W., BAE D.S., CHOI K.K.** Configuration design sensitivity analysis of dynamics for constrained mechanical systems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001, vol. 190, n°40-41, pp.5271-5282.

*[KRA05]* **KRAUS C., BOCK H.-G., MUTSCHLER H.** Parameter estimation for biomechanical models based on a special form of natural coordinates. Multibody System Dynamics, 2005, vol. 13, pp. 101-111.

*[LAR03]* **LAROUSSI M.** Analyse de sensibilité 3D par la méthode de l'état adjoint – application au forgeage. Thèse de Doctorat. Paris : Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2003, 113 p.

*[LJU99]* **LJUNG L.** System identification. Theory for the user. New Jersey, USA : Prentice-Hall, Inc., 1999. 607 p.

*[MAL92]* **MALANDA H.** Optimisation structurale des systèmes discrets analysés par la méthode des éléments finis. Thèse CNAM. Paris : CNAM, 1992.

*[MAR07]* **MARQUIS-FAVRE W.** Contribution à la conception et la modélisation des systèmes mécatroniques (et de leurs sous-systèmes mécaniques). Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, laboratoire Ampère. Lyon : INSA de Lyon, 2007, 155 p.

*[MAS06]* **MASSE J.** L'apport du calcul formel dans une démarche système. Journée Nationale "Logiciels pour la Modélisation et le Calcul Scientifique" (LMCS). 30 novembre 2006, Paris La Défense, France.

*[PASC99]* **PASCAL M., GAGARINA T.A.** A pseudo-rigid model for the dynamical simulation of flexible mechanisms. Multibody System Dynamics, 1999, vol. 4, pp. 303-331.

*[PAST07]* **PASTORINO R.** Optimisation du comportement du véhicule : prestation μ-split. Mémoire de Master LaMCoS. Lyon : INSA de Lyon, 2007, 111 p.

*[PFI95]* **PFISTER F.** Contribution à la Mécanique Analytique des Systèmes Multi-Corps. Thèse LAI. Lyon : INSA de Lyon, 1995, 266 p.

*[PFI97a]* **PFISTER F.** Linearized dynamics – a tensorial treatment based on the raw form of Lagrange's equations. European Journal of Mechanics A/Solids, 1997, vol. 16, pp. 529-555.

*[PFI97b]* **PFISTER F., FAYET M., JUTARD A.** Sensitivity Analysis of Multibody Systems. Theory and Practice of Robots and Manipulators, 1995, pp. 79-84.

*[PORTA07]* **PORTAZ C.** Contrôle global châssis. Optimisation en dynamique du véhicule. Thèse LaMCoS. Lyon : INSA de Lyon, 2007, à paraître.

*[PORTE06]* **PORTE B.** Etude de sensibilité par la méthode de l'état-adjoint appliquée aux systèmes multicorps. Mémoire de Master LaMCoS. Lyon : INSA de Lyon, 2006, 71 p., à paraître.

*[POS04]* **POSTIAU T.** Génération et parallélisation des équations du mouvement de systèmes multicorps par l'approche symbolique. PhD Thesis. Louvain : Université catholique de Louvain, 2004, 305 p.

*[ROB06]* **ROBERT T.** Analyse biomécanique du maintien de l'équilibre debout suite à une accélération transitoire de la surface d'appui. Thèse LBMH / LaMCoS. Lyon : INRETS de Bron / INSA de Lyon, 2006, 344 p.

*[SAL00]* **SALTELLI A., CHAN K., SCOTT E.M.** Sensitivity analysis : gauging the worth of scientific models. Chichester, Angleterre : John Wiley and Sons, 2000. 504 p.

*[SAL04]* **SALTELLI A., RATTO M., TARANTOLA S., CAMPOLONGO F.** Sensitivity analysis in practice : a guide to assessing scientific models. Chichester, Angleterre : John Wiley and Sons, 2004. 217 p.

*[SAL05]* **SALTELLI A., RATTO M., TARANTOLA S., CAMPOLONGO F.** Sensitivity analysis for chemical models. **[en ligne]** Chemical reviews, 2005. American Chemical Society. Disponible sur : <webfarm.jrc.cec.eu.int>. (consulté le 12.09.2007)

*[SAN07]* **SANDEL A., FAYET M.** Global inertia tensors expressed by 4x4 matrices : case of complex joints and pseudo-parameters. IMechE Part K : Journal of Multibody Dynamics, 2007, vol. 221, pp. 527-539.

*[SER98a]* **SERBAN R.** Dynamic and sensitivity analysis of multibody systems. PhD Thesis. University of Iowa, USA, 1998, 400 p.

*[SER98b]* **SERBAN R., HAUG E.J.** Analytical derivatives for multibody system analyses. **[en ligne]** University of Pennsylvania, USA. Disponible sur : http://citeseer.ist.psu.edu/361523.html. (consulté le 12.09.2007)

*[SER01]* **SERBAN R., FREEMAN J.S.** Identification and identifiability of unknown parameters in multibody dynamic systems. Multibody System Dynamics, 2001, vol. 5, pp. 335-350.

*[SHA87]* **SHARP R.S., BROOKS P.C.** Application of eigenvalue sensitivity theory to the improvement of the design of a linear dynamic system. Journal of Sound and Vibration, 1987, vol. 114, n°1, pp. 19-32.

*[SHI00]* **SHI P., McPHEE J.** Dynamics of flexible multibody systems using virtual work and linear graph theory. Multibody System Dynamics, 2000, vol. 4, pp. 355-381.

*[SOH01]* **SOHL G.S., BOBROW J.E.** A recursive multibody dynamics and sensitivity algorithm for branched kinematic chains. Journal of Dynamics Systems, Measurement, and Control, 2001, vol. 123, n°3, pp. 391-399.

*[TOM63]* **TOMOVIC R.** Sensitivity analysis of dynamic systems. New York, USA : McGraw-Hill Book Company, Inc., 1963. 142 p.

*[TOM72]* **TOMOVIC R., VUKOBRATOVIC M.** General sensitivity theory. New York, USA : American Elsevier Publishing Company, Inc., 1972. 258 p.

*[WAS98]* **WASFY T.M., NOOR A.K.** Finite element analysis of flexible multibody systems with fuzzy parameters. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering., 1998, vol. 160, n°3-4, pp. 223-243.

*[WIT77]* **WITTENBURG J.** Dynamics of Systems of Rigid Bodies. Stuttgart, Allemagne : Teubner, 1977.

# Nomenclature

***Avertissement***

*Le modèle roulis-lacet-dérive [BROS06] développé au §2.4.3 présente un grand nombre de constantes spécifiques qui ne sont utilisées que dans ce paragraphe. Par conséquent, seuls les symboles principaux de ce modèle sont repris ici, les autres symboles étant détaillés en annexe 6 (noms, définitions, unités, valeurs usuelles).*

***Lettres latines***

| | |
|---|---|
| $\hat{a}$ | tenseur anti-symétrique associé au vecteur $\vec{a}$ |
| $a_{ij}$ | coefficients de la matrice d'énergie cinétique (ou matrice de masse) |
| $a_{i-1}$ | distance entre les axes $J_{i-1}$ et $J_i$ de liaisons successives (paramétrage de Denavit-Hartenberg) |
| $a(t)$ | fonction du temps |
| $A_i$ | quantité d'accélération généralisée relative à $q_i$ |
| $Ac_i$ | $\equiv \ddot{q}_i$ |
| $Acu_{q_i}$ | $\equiv \ddot{u}_i$ (dérivée seconde par rapport au temps de la sensibilité) |
| $A, B, C$ | moments d'inertie (éventuellement notés $A_i, B_i, C_i$ ou $Ai, Bi, Ci$ pour le solide $S_i$) |
| $\mathbf{A}$ | matrice de masse étendue |
| $\mathbf{A}^*$ | matrice de masse étendue modifiée (cf §2.2.3.2.1 uniquement) |
| $b(t)$ | fonction quelconque du temps |
| $\mathbf{B}$ | matrice de dépendance *explicite* de $\mathbf{A}$ aux variables d'état |
| c | croisillon / coefficient d'amortissement |
| C | châssis du véhicule automobile |
| $\mathbf{C}$ | matrice d'amortissement |
| $C_2$ | rigidité de carrossage, appelée "poussée de carrossage" par abus de langage |
| $cap(t)$ | cap du véhicule (intégrale de la vitesse de lacet) |
| dm | masse élémentaire du point M |
| {dphi2x, dphi2y, dphi2z} | composantes de $\frac{\partial \vec{\varphi}_2}{\partial \psi_{3/1}}$ dans $R_2$ (joint de Cardan) |
| -D, -E, -F | produits d'inertie (éventuellement notés $-D_i, -E_i, -F_i$ ou $-Di, -Ei, -Fi$ pour le solide $S_i$) |
| $D_2$ | rigidité de dérive du pneumatique, ou "raideur de pneumatique" |
| $D_2'$ ou D2pr | rigidité de train, appelée "déformation du train" par abus de langage |
| $\mathbf{D}$ | "matrice de commande" |
| $\overline{\overline{E}}$ | tenseur de permutation du troisième ordre (3x3x3), composé des symboles de Levi-Civita (cf §1.5.3.2) |
| $E_R$ | ={1,2,3} ; ensemble des indices des pseudo-paramètres de rotation |
| $E_T$ | ={4,5,6} ; ensemble des indices des pseudo-paramètres de translation |
| $f(t)$ | fonction du temps |

| | |
|---|---|
| $\vec{f}(M)$ | densité massique de force au point M |
| $\mathbf{f}$ , $f_i$ | vecteur de charge et sa composante d'indice i, respectivement |
| F(=0) | modèle dynamique |
| Fa | lagrangien augmenté |
| $F_X$,$F_Y$ | forces généralisées agissant sur C respectivement sur $\vec{x}_C$ et $\vec{y}_C$ |
| g (ou 0) | indice du solide de référence galiléen |
| g, $\overline{g}$ | critère et critère équivalent, respectivement |
| g(t) | fonction du temps |
| $\vec{g}$ | accélération de la pesanteur |
| $\overline{=}$ $\overline{=}^{+}$ $\overline{g}_i$ , $\overline{g}_i$ | TIG au point $O_i$ , respectivement du solide $S_i$ et du corps augmenté $S_i^+$ |
| $\mathbf{g}^{ext}$ | somme des forces d'inertie extérieures |
| $\mathbf{g}^{int}$ | somme des forces internes et de la contribution résultant des contraintes cinématiques |
| $G_i$ | centre d'inertie du solide $S_i$ |
| $\mathbf{G}^{ext}$ | pseudo-charge |
| $\overline{\overline{G}}_{ij}$ ou $\overline{\overline{G}}_{i,j}$ | TIG (matrice 4x4) du solide $S_j$ aux points $O_i$ et $O_j$ |
| $\overline{\overline{G}}_{ijMax}$ | TIG (matrice 4x4) du solide $S_{[i,j]}$ aux points $O_i$ et $O_j$ |
| $H_j$ | membre de gauche de la $j^{ème}$ équation de contrainte |
| $\left[\overline{\overline{I}}_{O_j,S_j}\right]_{R_j}$ | tenseur d'inertie usuel du solide $S_j$, au point $O_j$, projeté dans le repère $R_j$ |
| $J_i$ | axe de la liaison d'indice i (paramétrage de Denavit-Hartenberg) |
| $J_{lat}(t)$ | accélération latérale du véhicule |
| $\vec{J}^i(M)$ | accélération du point M par rapport au repère i |
| $\mathbf{J}$ | matrice jacobienne de $\mathbf{f}$ (composante $J_{ij}=\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$) |
| k | raideur |
| $\overline{\overline{K}}_{ij}$ | tenseur cinétique (matrice 3x3) du solide $S_j$ aux points $O_i$ et $O_j$ |
| $\overline{\overline{K}}_{ijMax}$ | tenseur cinétique (matrice 3x3) du solide $S_{[i,j]}$ aux points $O_i$ et $O_j$ |
| $\mathbf{K}$ | matrice de raideur |
| $l_i$ | longueur caractéristique du solide i, en général $\left\|\overrightarrow{O_iG_i}\right\| = l_i$ |
| m ou $m_j$ | masse du solide $S_j$ |
| M ou $M_i$ | point (fixe dans $R_i$) |
| $M_j$ | masse du corps généralisé $\Sigma_j$ |
| $M_Z$ | force généralisée agissant sur C autour de l'axe $(O_C,\vec{z}_C)$ |
| $\mathbf{M}$ | matrice de masse ou d'énergie cinétique |
| $\mathbf{M}_\lambda(t)$ | matrice équivalente du système adjoint |
| n | nombre de degrés de liberté de $\Sigma$ |

| | |
|---|---|
| $\mathbf{N}(t)$ | matrice "primitive" de la matrice $\mathbf{M}_\lambda(t)$ |
| O | origine du repère galiléen |
| $O_i$ | point de référence du solide $S_i$ / centre de la roue d'indice i |
| p | intégrande du critère équivalent |
| $\{p_C, q_C, r_C\}$ | composantes de $\vec{\Omega}_C^0$ dans le repère lié à la caisse C |
| {phix2, phiy2, phiz2} | composantes de $\vec{\varphi}_2$ dans $R_2$ (joint de Cardan) |
| $p_i$ | coordonnées généralisées ou paramètre de construction |
| P (liaison) | liaison prismatique (glissière) |
| $P_{iM}$ | $=1,0$ si $M \in \Sigma_i$, $M \notin \Sigma_i$ respectivement |
| $P_{gauche}$, $P_{droite}$ | termes provisoires dans une démonstration (§2.2.3.2.5 et §2.3.3.1.5) |
| $\{Pix, Piy, Piz = Ps\}$ | composantes de $\vec{\Omega}_{solide}^0$ dans la base liée au solide |
| $\mathbf{q}$, $q_i$ (ou q) | "vecteur" des coordonnées généralisées, et coordonnée généralisée d'indice i |
| $\dot{\mathbf{q}}$, $\dot{q}_i$ (ou $\dot{q}$) | "vecteur" des vitesses généralisées, et vitesse généralisée d'indice i |
| $\ddot{\mathbf{q}}$, $\ddot{q}_i$ (ou $\ddot{q}$) | "vecteur" des accélérations généralisées, et accélération généralisée d'indice i |
| $\dot{q}_i^*$ | vitesse virtuelle généralisée d'indice i |
| $Q_i$, $Q_i^{pes}$ | force généralisée relative à $q_i$, et force généralisée de pesanteur relative à $q_i$ |
| $\mathbf{Q}$ | $=\frac{d\mathbf{q}}{dx}$ ; "vecteur" des sensibilités des coordonnées généralisées |
| $\mathbf{Q_i}(t)$, $\mathbf{Q_f}(t)$ | matrices carrées (2n) constituées des solutions du système adjoint pour une base de conditions finales en $t_i$ et $t_f$ respectivement |
| $r_i$ | cf Figure 1.5.3 (paramétrage de Denavit-Hartenberg) |
| $r(t)$ | vitesse de lacet |
| R (liaison) | liaison de révolution (pivot) |
| $R_i$ | repère lié au solide i |
| $s(\lambda, t_i)$ | saut de la fonction $\lambda(t)$ en $t_i$ |
| S | corps libre |
| $S_i$ | solide indéformable d'indice i |
| $S_i^+$ | corps augmenté d'indice i |
| $\$_i$ | torseur géométrique du mouvement complexe (général) décrit par $q_i$ |
| $\left[\tilde{\$}_i\right]$ | forme matricielle (3x4) de $\$_i$ |
| $\left[\tilde{\$}'_i\right]$ | cf équation (1.5.25) |
| t | temps |
| $t_0$, $t_f$, $t_i$ | respectivement instants initial, final et intermédiaire |
| $t_{mi}$ | instant critique intermédiaire (où le critère présente un minimum local) |
| $\vec{t}_i$ | moment (vecteur "translation") de $\$_i$ (cf équation (1.3.1)) |
| $\vec{t}'_i$ | $=\frac{\partial \vec{t}_i}{\partial q_i}$ |

| | |
|---|---|
| $T^0$ | énergie cinétique galiléenne |
| TIG | Tenseur d'Inertie Global |
| u | sensibilité ou coefficient de sensibilité dynamique |
| $u_{i,k}(k,t)$ ou $u_{yi}(t)$ ou $u_k$ | sensibilité de $y_i$ par rapport à k, en fonction de k et du temps |
| $u_i$ | $=\frac{dq_i}{dx}$ (partie 3) |
| $u(t-t_i)$ | échelon en $t_i$ |
| $\mathbf{u}$ | $=\frac{d\mathbf{y}}{dx}$ ; vecteur des sensibilités des variables d'état |
| $\mathbf{u}^*$ | vecteur déplacement |
| $\vec{u}_i^+$ | moment statique de $S_i^+$ au point $O_i$ |
| U | fonction de force |
| $\vec{U}_{ij}$ | moment statique de $S_j$ au point $O_i$ |
| $V_i$ | composante de la vitesse sur l'axe d'indice i |
| $V_{Cx}$, $V_{Cy}$, $V_{Cz}$ | composantes de la vitesse galiléenne du centre d'inertie de la caisse C, projetée dans $R_C$ |
| V | vitesse d'avance (longitudinale) du véhicule |
| $Vu_{q_i}$ | $\equiv \dot{u}_i$ (dérivée de la sensibilité par rapport au temps) |
| $\vec{V}^i(M)$ | vitesse du point M par rapport au repère i (point géométrique) |
| $\vec{V}_j^i(M)$ | vitesse du point M dans le mouvement du solide $S_j$ par rapport au repère i |
| $\vec{V}^*(M)$ | vitesse virtuelle du point M |
| $V_j^i$ | torseur cinématique du mouvement du solide $S_j$ par rapport au repère i |
| w | cf équation (1.5.32) |
| x ou $x_j$ | paramètre de construction ou de commande (masse, inertie, raideur, amortissement, force, moment) d'indice j |
| $x(t)$ | vitesse de roulis |
| $\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i$ | base orthonormée directe liée au solide $S_i$ |
| $\mathbf{y}$, $y_i$ | "vecteur" d'état et variable d'état d'indice i (coordonnée ou vitesse généralisée) |
| $z_i$ | débattement "vertical" (sur $\vec{z}_C$) du centre de roue $O_i$ |
| $\mathbf{z}$ | charge factice (dans le problème statique résolu par la méthode adjointe) |

### *Lettres grecques*

| | |
|---|---|
| $\alpha$ | angle imposé par le solide intermédiaire $S_3$, dans le joint de Cardan |
| $\alpha_{i-1}$ | angle entre les axes $J_{i-1}$ et $J_i$ de liaisons successives (paramétrage de Denavit-Hartenberg) |
| $\alpha(t)$ | angle au vent |
| $\beta(t)$, $\beta_2(t)$, $\beta_3(t)$ | angles de braquage respectivement des roues moyenne, gauche et droite |
| $\Gamma_{i,jk}$ | symboles de Christoffel |
| $\Gamma^1_{i,jk}$, $\Gamma^2_{i,jj}$ | symboles de Christoffel respectivement de type 1 et 2 |
| $\delta$ | Dirac |
| $\vec{\delta}^m_k(q_i)$ | vecteur rotation produit par une variation infinitésimale de $q_i$ |
| $\varepsilon$ | grandeur infinitésimale |
| $\theta_i$ | cf Figure 1.5.3 (paramétrage de Denavit-Hartenberg) |
| $\theta(t)$ | angle de lacet |
| $\lambda_j$ | multiplicateur de Lagrange d'indice j |
| $\lambda(t)$, $\boldsymbol{\lambda}(t)$ | variable adjointe et "vecteur" adjoint fonctions du temps |
| $\boldsymbol{\lambda_i}, \boldsymbol{\lambda_f}$ | vecteurs (2n) des conditions finales adjointes aux instants $t_i$, $t_f$ respectivement |
| $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{f}_j}$ | $j^{ème}$ vecteur $\boldsymbol{\lambda_f}$ |
| $\boldsymbol{\lambda}^*_{\mathbf{i}}(t)$, $\boldsymbol{\lambda}^*_{\mathbf{f}}(t)$ | vecteurs (2n) des solutions de l'équation adjointe (2.3.28) pour des conditions finales $\boldsymbol{\lambda_i}, \boldsymbol{\lambda_f}$ respectivement |
| $\boldsymbol{\lambda}^*_{\mathbf{f}_j}(t)$ | $j^{ème}$ vecteur $\boldsymbol{\lambda}^*_{\mathbf{f}}(t)$ |
| $\lambda^*_{f\,j}(t)$ | $j^{ème}$ composante du vecteur $\boldsymbol{\lambda}^*_{\mathbf{f}}(t)$ |
| $\pi_i$ | pseudo-paramètre d'indice i |
| $\overset{=+}{\pi}_i$ | tenseur d'inertie brut du corps augmenté $S_i^+$ au point $O_i$ |
| $\overset{==}{\Pi}_{ij}$ | tenseur d'inertie brut du solide $S_j$ aux points $O_i$ et $O_j$ |
| $\Sigma$ | système multicorps (mécanisme articulé de solides rigides) |
| $\Sigma_j$ | corps généralisé d'indice j |
| $\vec{\varphi}_i$, $\vec{\varphi}'_i$ | résultante (vecteur "rotation") de $\$_i$ (cf équation (1.3.1)), et $\vec{\varphi}'_i = \dfrac{\partial \vec{\varphi}_i}{\partial q_i}$ |
| $\varphi(t)$ | angle de roulis |
| $\psi$ | angle de lacet (cf définition au paragraphe 2.4.3.1) |
| $\psi_{i/j}$ ou $\psi i$ | angle paramétrant le mouvement de $S_i$ par rapport à $R_j$ |
| $\omega$ | pulsation |
| $\omega_i$ | composante d'indice i de $\vec{\Omega}^0_S$, projeté sur le repère $R_S$ |
| $\omega_{Ri}$ | vitesse de rotation propre de la roue par rapport au pivot |
| $\vec{\Omega}^i_j$ | vecteur taux de rotation du mouvement du solide $S_j$ par rapport au repère $R_i$ |

### *Opérateurs et autres notations*

| | |
|---|---|
| $\overline{\overline{1}}$ | tenseurs d'identité |
| $\frac{{}^{i}\partial}{\partial}$ | dérivation partielle par rapport au repère i |
| $\frac{d_l}{d}$ | dérivée logarithmique |
| $\dot{x}$ ou x' (§2.3.3.1) | $=\frac{dx}{dt} \quad \forall x$ |
| $\frac{\partial^2\overrightarrow{OM}}{\partial q_j \partial q_i}=\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial q_j}$ | par définition (paramétrage holonome ou non) |
| $]i,j[$ | Min(i,j) |
| $[i,j]$ | Max(i,j) |
| $\mathbf{Matrice}(i,j)$ | terme en $i^{ème}$ ligne et $j^{ème}$ colonne de la matrice |
| $\left[\overline{\overline{Tenseur}}\right]_{R_k}(i,j)$ | terme en $i^{ème}$ ligne et $j^{ème}$ colonne du tenseur projeté dans $R_k$ |
| $\left[\lambda(t)\right]$ | distribution dite "régulière", *i.e.* associée à la fonction $\lambda(t)$ continue par morceaux |
| $\lambda(t_i^-)$ et $\lambda(t_i^+)$ | valeurs de $\lambda$ respectivement à gauche et à droite de la discontinuité en $t_i$ |
| **e** | matrice exponentielle d'une matrice (cf §2.3.3.2.4) |
| $<ij,kl>$ | $=\int_\Sigma \frac{\partial^2\overrightarrow{OM}}{\partial q_i \partial q_j}.\frac{\partial^2\overrightarrow{OM}}{\partial q_k \partial q_l}dm$ (cf §3.3.2.1.2) |
| $<i,jkl>$ | $=\int_\Sigma \frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial q_i}.\frac{\partial^3\overrightarrow{OM}}{\partial q_j \partial q_k \partial q_l}dm$ (cf §3.3.2.1.2) |

# Annexes

# Annexes : table des matières

**Annexe 1** **Ecriture de modèles dynamiques par les Tenseurs d'Inertie Globaux – programmes Maple et applications 207**
Annexe 1.1 Double-pendule orthogonal 208
Annexe 1.2 Système à joint de Cardan 213
Annexe 1.3 Système simplifié à joint de Cardan 228

**Annexe 2** **Algorithme des méthodes directe et adjointe d'étude de sensibilité. Cas de la statique. 234**

**Annexe 3** **Méthodes d'étude de sensibilité. Programmes Maple appliqués au système masse-ressort-amortisseur linéaire. 237**
Annexe 3.1 Méthode directe 238
Annexe 3.2 Méthode de l'état-adjoint 244

**Annexe 4** **Programme Matlab d'étude de sensibilité. Notice d'utilisation du programme principal comparaison.m 251**

**Annexe 5** **Sensibilité de l'énergie cinétique du double-pendule orthogonal et de son intégrale. Courbes-résultats. 255**
Annexe 5.1 Double-pendule orthogonal : tracé des sensibilités de l'énergie cinétique en fonction du temps [PORTE06]. 256
Annexe 5.2 Double-pendule orthogonal : tracé des sensibilités de l'intégrale de Ec en fonction du temps [PORTE06]. 257

**Annexe 6** **Modèle roulis-lacet-dérive de véhicule automobile [BROS06]. Signification des constantes et valeurs usuelles. 259**

**Annexe 7** **Ecriture de modèles de sensibilité par les Tenseurs d'Inertie Globaux – programmes Maple et application 263**
Annexe 7.1 Double-pendule orthogonal 264
Annexe 7.2 Corps libre 275
Annexe 7.3 Véhicule simplifié 288

# Annexe 1

# Ecriture de modèles dynamiques par les Tenseurs d'Inertie Globaux – programmes Maple et applications.

**Annexe 1.1** Double-pendule orthogonal 208

**Annexe 1.2** Système à joint de Cardan 213

**Annexe 1.3** Système simplifié à joint de Cardan 228

# Annexe 1.1 Double-pendule orthogonal

Voir partie 1, paragraphe 1.5.5.2.

## > Saisie des données :

### > Nombre de degrés de liberté :

$$n := 2$$

### > Description du repérage-paramétrage de Denavit-Hartenberg "modifié":

$$\begin{bmatrix} i & \varepsilon_i & \alpha_{i-1} & a_{i-1} & \theta_i & r_i \\ 1 & 1 & \frac{1}{2}\pi & 0 & q_1 & 0 \\ 2 & 1 & \frac{1}{2}\pi & 0 & q_2 & r_2 \end{bmatrix}$$

### > Coordonnées généralisées :

$$q_1, q_2$$

### > Masses :

#### > Masses des solides :

$$m_1, m_2$$

#### > Masses des corps généralisés :

$$m_2 + m_1, m_2$$

### > Positions des centres d'inertie :

$$O1G1_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -l_1 \\ 0 \end{bmatrix}, O2G2_2 = \begin{bmatrix} -l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### > Tenseurs d'inertie usuels :

$$IO1S1_1 = \begin{bmatrix} A1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A1 \end{bmatrix}, IO2S2_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B2 & 0 \\ 0 & 0 & B2 \end{bmatrix}$$

### > Forces généralisées (sauf pesanteur) :

$$Q1 = 0, Q2 = 0$$

## > Détermination des TIG 4x4 des corps généralisés :

### > Détermination des TIG 4x4 des corps augmentés : gi+

#### > Détermination des TIG 4x4 des solides : gi

##### > *Moments d'ordre 1 (moments statiques) des solides :*

$$U1_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_1 l_1 \\ 0 \end{bmatrix}, U2_2 = \begin{bmatrix} -m_2 l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

> *Moments d'ordre 2 (tenseurs d'inertie bruts) des solides :*

$$\Pi 11_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Pi 22_2 = \begin{bmatrix} B2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> *Construction des TIG des solides :*

$$g1_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A1 & 0 & -m_1 l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_1 l_1 & 0 & m_1 \end{bmatrix}, g2_2 = \begin{bmatrix} B2 & 0 & 0 & -m_2 l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m_2 l_2 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

> **Détermination du terme introduit par le point massique (Oi,Mi) :**

> *Calcul de OiOi+1 :*

$$O1O2_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

> *Terme introduit par le point massique (Oi,Mi) :*

$$gPointMassique02_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 r_2^2 & 0 & -m_2 r_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_2 r_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> **Construction des TIG des corps augmentés :**

$$g1Plus_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A1 + m_2 r_2^2 & 0 & -m_1 l_1 - m_2 r_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_1 l_1 - m_2 r_2 & 0 & m_1 \end{bmatrix}, g2Plus_2 = \begin{bmatrix} B2 & 0 & 0 & -m_2 l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m_2 l_2 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

> **Détermination des TIG 4x4 des corps généralisés : Gii**

> **Moments d'ordre 1 des corps généralisés en leur propre point de référence : Uii**

$$U11_1 = \begin{bmatrix} -\cos(q_2)\, m_2 l_2 \\ -m_1 l_1 - m_2 r_2 \\ -\sin(q_2)\, m_2 l_2 \end{bmatrix}, U22_2 = \begin{bmatrix} -m_2 l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

> **Construction des TIG 4x4 des corps généralisés : Gii**

$$G11_1 = \begin{bmatrix} B2\cos(q_2)^2 & r_2 m_2 l_2 \cos(q_2) & \cos(q_2) B2 \sin(q_2) & -\cos(q_2) m_2 l_2 \\ r_2 m_2 l_2 \cos(q_2) & A1 + m_2 r_2^2 & r_2 m_2 l_2 \sin(q_2) & -m_1 l_1 - m_2 r_2 \\ \cos(q_2) B2 \sin(q_2) & r_2 m_2 l_2 \sin(q_2) & B2 \sin(q_2)^2 & -\sin(q_2) m_2 l_2 \\ -\cos(q_2) m_2 l_2 & -m_1 l_1 - m_2 r_2 & -\sin(q_2) m_2 l_2 & m_2 + m_1 \end{bmatrix},$$

$$G22_2 = \begin{bmatrix} B2 & 0 & 0 & -m_2 l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m_2 l_2 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

> **Construction des TIG 4x4 des corps généralisés : Gij**

$$G12_2 = \begin{bmatrix} B2 & 0 & 0 & -m_2 l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_2 m_2 l_2 & 0 & 0 & m_2 r_2 \\ -m_2 l_2 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

> **Détermination des tenseurs cinétiques Kij :**

> **Matrices issues des torseurs géométriques :**

$$Dollar1O1_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Dollar1O1_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos(q_2) & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(q_2) & 0 \\ -\cos(q_2) & \sin(q_2) & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Dollar2O2_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> **Tenseurs cinétiques Kij :**

$$K11_1 = \begin{bmatrix} A1 + m_2 r_2^2 & -r_2 m_2 l_2 \cos(q_2) & 0 \\ -r_2 m_2 l_2 \cos(q_2) & B2\cos(q_2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, K12_2 = \begin{bmatrix} 0 & -r_2 m_2 l_2 \cos(q_2) & 0 \\ 0 & r_2 m_2 l_2 \sin(q_2) & 0 \\ 0 & -B2\cos(q_2) & 0 \end{bmatrix},$$

$$K22_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## > Détermination des éléments cinétiques :

### > Coefficients d'énergie cinétique aij :

$$a11 = A1 + m_2 r_2^2 + B2 \cos(q_2)^2,\ a12 = r_2 m_2 l_2 \sin(q_2),\ a22 = B2$$

### > Symboles de Christoffel :

$$\Gamma111 = 0,\ \Gamma112 = -\cos(q_2)\ B2 \sin(q_2),\ \Gamma121 = -\cos(q_2)\ B2 \sin(q_2),\ \Gamma122 = r_2 m_2 l_2 \cos(q_2)$$

$$\Gamma211 = \frac{1}{2} B2 \sin(2 q_2),\ \Gamma212 = 0,\ \Gamma221 = 0,\ \Gamma222 = 0$$

## > Détermination des quantités d'accélération généralisées Ai :

### > Termes correspondant aux coefficients d'énergie cinétique aij :

$$A1Cinetique = \left(A1 + m_2 r_2^2 + B2 \cos(q_2)^2\right) \left(\frac{d^2}{dt^2} q_1(t)\right) + r_2 m_2 l_2 \sin(q_2) \left(\frac{d^2}{dt^2} q_2(t)\right),$$

$$A2Cinetique = r_2 m_2 l_2 \sin(q_2) \left(\frac{d^2}{dt^2} q_1(t)\right) + B2 \left(\frac{d^2}{dt^2} q_2(t)\right)$$

### > Termes correspondant aux symboles de Christoffel Gammaijk :

$$A1Christoffel = -2 \left(\frac{d}{dt} q_1(t)\right) \left(\frac{d}{dt} q_2(t)\right) \cos(q_2)\ B2 \sin(q_2)$$

$$+ \left(\frac{d}{dt} q_2(t)\right)^2 r_2 m_2 l_2 \cos(q_2),\ A2Christoffel = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} q_1(t)\right)^2 B2 \sin(2 q_2)$$

### > Quantités d'accélération généralisées Ai :

$$A1 = \left(A1 + m_2 r_2^2 + B2 \cos(q_2)^2\right) \left(\frac{d^2}{dt^2} q_1(t)\right)$$

$$+ r_2 m_2 l_2 \sin(q_2) \left(\frac{d^2}{dt^2} q_2(t)\right) - 2 \left(\frac{d}{dt} q_1(t)\right) \left(\frac{d}{dt} q_2(t)\right) \cos(q_2)\ B2 \sin(q_2)$$

$$+ \left(\frac{d}{dt} q_2(t)\right)^2 r_2 m_2 l_2 \cos(q_2)$$

$$A2 = r_2 m_2 l_2 \sin(q_2) \left(\frac{d^2}{dt^2} q_1(t)\right) + B2 \left(\frac{d^2}{dt^2} q_2(t)\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} q_1(t)\right)^2 B2 \sin(2 q_2)$$

## > Détermination des efforts généralisés Qi :

### > Forces de gravité généralisées Qpesi :

$$Qpes1 = -g \left(\sin(q_1)\ m_1 l_1 + \sin(q_1)\ m_2 r_2 - \cos(q_2)\ m_2 l_2 \cos(q_1)\right),$$

$$Qpes2 = -g\ m_2 l_2 \sin(q_2)\ \sin(q_1)$$

### > Forces généralisées totales Qi :

$$Q1 = -g \left(\sin(q_1)\ m_1 l_1 + \sin(q_1)\ m_2 r_2 - \cos(q_2)\ m_2 l_2 \cos(q_1)\right),$$

$$Q2 = -g\ m_2 l_2 \sin(q_2)\ \sin(q_1)$$

## > Ecriture des équations de la dynamique :

*Equation_1_correspondant_au_paramètre_*, $q_1$

$$\left(A1+m_2 r_2^2+B2\cos(q_2)^2\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}q_1(t)\right)$$
$$+r_2 m_2 l_2 \sin(q_2)\left(\frac{d^2}{dt^2}q_2(t)\right)-2\left(\frac{d}{dt}q_1(t)\right)\left(\frac{d}{dt}q_2(t)\right)\cos(q_2)\,B2\sin(q_2)$$
$$+\left(\frac{d}{dt}q_2(t)\right)^2 r_2 m_2 l_2\cos(q_2)$$
$$=-g\left(\sin(q_1)\,m_1 l_1+\sin(q_1)\,m_2 r_2-\cos(q_2)\,m_2 l_2\cos(q_1)\right)$$

*Equation_2_correspondant_au_paramètre_*, $q_2$

$$r_2 m_2 l_2\sin(q_2)\left(\frac{d^2}{dt^2}q_1(t)\right)+B2\left(\frac{d^2}{dt^2}q_2(t)\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}q_1(t)\right)^2 B2\sin(2\,q_2)=-g\,m_2 l_2\sin(q_2)\sin(q_1)$$

# Annexe 1.2 Système à joint de Cardan

Voir partie 1, paragraphe 1.5.5.3.3.

## Saisie des données

Nombre de degrés de liberté :

$$n := 2$$

### Description du repérage-paramétrage de Denavit-Hartenberg "modifié"

$$\begin{bmatrix} i & \varepsilon_i & \alpha_{i-1} & a_{i-1} & \theta_i & r_i \\ 1 & 1 & \frac{1}{2}\pi & 0 & \psi 1 & 0 \\ 2 & 2 & pas_besoin & pas_besoin & \psi 3 & 0 \end{bmatrix}$$

### Coordonnées généralisées

$$\psi 1, \psi 3$$

### Masses

#### *Masses des solides*

$$m_1, m_2$$

#### *Masses des corps généralisés*

$$m_2 + m_1, m_2$$

### Positions des centres d'inertie

$$O1G1_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{bmatrix}, O2G2_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{bmatrix}$$

### Tenseurs d'inertie usuels

$$IO1S1_1 = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}, IO2S2_2 = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}$$

### Forces généralisées (sauf pesanteur)

$$Q1 = Cm_1, Q2 = Cm_2$$

## Matrices de passage

$$MPass(Unà0) = \begin{bmatrix} \cos(\psi 1) & 0 & \sin(\psi 1) \\ -\sin(\psi 1) & 0 & \cos(\psi 1) \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$MPass(2\,à1) = [\cos(\psi 2)\cos(\alpha)\cos(\psi 3) - \sin(\psi 2)\sin(\psi 3), \quad (2.1)$$
$$\cos(\psi 2)\cos(\alpha)\sin(\psi 3) + \sin(\psi 2)\cos(\psi 3), -\cos(\psi 2)\sin(\alpha)], [$$
$$-\sin(\psi 2)\cos(\alpha)\cos(\psi 3) - \cos(\psi 2)\sin(\psi 3),$$
$$-\sin(\psi 2)\cos(\alpha)\sin(\psi 3) + \cos(\psi 2)\cos(\psi 3), \sin(\psi 2)\sin(\alpha)], [$$
$$\sin(\alpha)\cos(\psi 3), \sin(\alpha)\sin(\psi 3), \cos(\alpha)]$$

# Détermination des TIG 4x4 des corps généralisés

## Détermination des TIG 4x4 des corps augmentés : gi+

### *Détermination des TIG 4x4 des solides : gi*

#### *Moments d'ordre 1 (moments statiques) des solides*

$$UI_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 l_1 \end{bmatrix}, U2_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 l_2 \end{bmatrix}$$

#### *Moments d'ordre 2 (tenseurs d'inertie bruts) des solides*

$$\Pi I1_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}C_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}C_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 - \frac{1}{2}C_1 \end{bmatrix}, \Pi 22_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}C_2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}C_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 - \frac{1}{2}C_2 \end{bmatrix}$$

#### *Construction des TIG des solides*

$$gI_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 - \frac{1}{2}C_1 & m_1 l_1 \\ 0 & 0 & m_1 l_1 & m_1 \end{bmatrix}$$

$$g2_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} C_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 - \frac{1}{2} C_2 & m_2 l_2 \\ 0 & 0 & m_2 l_2 & m_2 \end{bmatrix}$$

## *Détermination du terme introduit par le point massique (Oi,Mi)*

### *Calcul de OiOi+1*

$$O1O2_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### *Terme introduit par le point massique (Oi,Mi)*

$$gPointMassique02_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## *Construction des TIG des corps augmentés*

$$g1Plus_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 - \frac{1}{2} C_1 & m_1 l_1 \\ 0 & 0 & m_1 l_1 & m_1 \end{bmatrix}$$

$$g2Plus_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} C_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 - \frac{1}{2} C_2 & m_2 l_2 \\ 0 & 0 & m_2 l_2 & m_2 \end{bmatrix}$$

## Détermination des TIG 4x4 des corps généralisés : Gii

### *Moments d'ordre 1 des corps généralisés en leur propre point de référence : Uii*

$$U11_1 = \begin{bmatrix} \sin(\alpha)\cos(\psi 3)\, m_2 l_2 \\ \sin(\alpha)\sin(\psi 3)\, m_2 l_2 \\ m_1 l_1 + \cos(\alpha)\, m_2 l_2 \end{bmatrix}, \quad U22_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 l_2 \end{bmatrix}$$

### *Construction des TIG 4x4 des corps généralisés : Gii*

$$G11_1 = [$$

$$\frac{1}{2} C_2 - C_2 \cos(\psi 3)^2 + C_2 \cos(\alpha)^2 \cos(\psi 3)^2$$

$$+ \cos(\psi 3)^2 A_2 - \cos(\psi 3)^2 A_2 \cos(\alpha)^2 + \frac{1}{2} C_1,$$

$$-\cos(\psi 3)\sin(\psi 3)\left(C_2 - C_2\cos(\alpha)^2 - A_2 + A_2\cos(\alpha)^2\right),$$

$$\sin(\alpha)\cos(\psi 3)\cos(\alpha)\left(-C_2 + A_2\right), \sin(\alpha)\cos(\psi 3)\, m_2 l_2],$$

$$[$$

$$-\cos(\psi 3)\sin(\psi 3)\left(C_2 - C_2\cos(\alpha)^2 - A_2 + A_2\cos(\alpha)^2\right),$$

$$C_2\cos(\psi 3)^2 + C_2\cos(\alpha)^2 - C_2\cos(\alpha)^2\cos(\psi 3)^2$$

$$+ A_2 - \cos(\psi 3)^2 A_2 - A_2\cos(\alpha)^2 + \cos(\psi 3)^2 A_2\cos(\alpha)^2 - \frac{1}{2} C_2 + \frac{1}{2} C_1,$$

$$\sin(\alpha)\sin(\psi 3)\cos(\alpha)\left(-C_2 + A_2\right), \sin(\alpha)\sin(\psi 3)\, m_2 l_2],$$

$$[$$

$$\sin(\alpha)\cos(\psi 3)\cos(\alpha)\left(-C_2 + A_2\right), \sin(\alpha)\sin(\psi 3)\cos(\alpha)\left(-C_2 + A_2\right),$$

$$\frac{1}{2} C_2 - C_2\cos(\alpha)^2 + A_2\cos(\alpha)^2 + A_1 - \frac{1}{2} C_1, m_1 l_1 + \cos(\alpha)\, m_2 l_2],$$

$$[$$

$$\sin(\alpha)\cos(\psi 3)\, m_2 l_2, \sin(\alpha)\sin(\psi 3)\, m_2 l_2, m_1 l_1 + \cos(\alpha)\, m_2 l_2, m_2 + m_1]$$

$$G22_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} C_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 - \frac{1}{2} C_2 & m_2 l_2 \\ 0 & 0 & m_2 l_2 & m_2 \end{bmatrix}$$

### Construction des TIG 4x4 des corps généralisés : Gij

$$G12_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} C_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 - \frac{1}{2} C_2 & m_2 l_2 \\ 0 & 0 & m_2 l_2 & m_2 \end{bmatrix}$$

# Détermination des tenseurs cinétiques Kij

## Matrices issues des torseurs géométriques

$$Dollar1O1_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Dollar1O1_2 = [0, -\cos(\alpha), \frac{1}{2}\cos(-\psi 2 + \alpha) - \frac{1}{2}\cos(\psi 2 + \alpha), 0], [\cos(\alpha), 0, \frac{1}{2}\sin(\psi 2 + \alpha) + \frac{1}{2}\sin(-\psi 2 + \alpha), 0], [ -\frac{1}{2}\cos(-\psi 2 + \alpha) + \frac{1}{2}\cos(\psi 2 + \alpha), -\frac{1}{2}\sin(\psi 2 + \alpha) - \frac{1}{2}\sin(-\psi 2 + \alpha), 0, 0]$$

$$Dollar2O2_2 = \begin{bmatrix} 0 & -phiz2 & phiy2 & 0 \\ phiz2 & 0 & -phix2 & 0 \\ -phiy2 & phix2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## Tenseurs cinétiques Kij

$$K11_1 = [ C_2\cos(\psi 3)^2 + C_2\cos(\alpha)^2 - C_2\cos(\alpha)^2\cos(\psi 3)^2 + A_2 - \cos(\psi 3)^2 A_2 - A_2\cos(\alpha)^2 + \cos(\psi 3)^2 A_2\cos(\alpha)^2 - \frac{1}{2}C_2 + \frac{1}{2}C_1, \cos(\psi 3)\sin(\psi 3)\left(C_2 - C_2\cos(\alpha)^2 - A_2 + A_2\cos(\alpha)^2\right), 0], [ \cos(\psi 3)\sin(\psi 3)\left(C_2 - C_2\cos(\alpha)^2 - A_2 + A_2\cos(\alpha)^2\right), \frac{1}{2}C_2 - C_2\cos(\psi 3)^2 + C_2\cos(\alpha)^2\cos(\psi 3)^2$$

$$+\cos(\psi 3)^2 A_2 - \cos(\psi 3)^2 A_2 \cos(\alpha)^2 + \frac{1}{2} C_1, 0], [0, 0, 0]$$

$$K12_2 = [$$

$$\frac{1}{2}\cos(\alpha)\, C_2\, phiz2 + \left(\frac{1}{2}\cos(-\psi 2+\alpha) - \frac{1}{2}\cos(\psi 2+\alpha)\right)\left(A_2 - \frac{1}{2} C_2\right) phiy2,$$

$$-\left(\frac{1}{2}\cos(-\psi 2+\alpha) - \frac{1}{2}\cos(\psi 2+\alpha)\right)\left(A_2 - \frac{1}{2} C_2\right) phix2,$$

$$-\frac{1}{2}\cos(\alpha)\, C_2\, phix2], [$$

$$\left(\frac{1}{2}\sin(\psi 2+\alpha) + \frac{1}{2}\sin(-\psi 2+\alpha)\right)\left(A_2 - \frac{1}{2} C_2\right) phiy2,$$

$$\frac{1}{2}\cos(\alpha)\, C_2\, phiz2 - \left(\frac{1}{2}\sin(\psi 2+\alpha) + \frac{1}{2}\sin(-\psi 2+\alpha)\right)\left(A_2 - \frac{1}{2} C_2\right) phix2,$$

$$-\frac{1}{2}\cos(\alpha)\, C_2\, phiy2], [-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\sin(\psi 2+\alpha) - \frac{1}{2}\sin(-\psi 2+\alpha)\right) C_2\, phiz2,$$

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos(-\psi 2+\alpha) + \frac{1}{2}\cos(\psi 2+\alpha)\right) C_2\, phiz2,$$

$$-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos(-\psi 2+\alpha) + \frac{1}{2}\cos(\psi 2+\alpha)\right) C_2\, phiy2$$

$$+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\sin(\psi 2+\alpha) - \frac{1}{2}\sin(-\psi 2+\alpha)\right) C_2\, phix2]$$

$$K22_2 = [\frac{1}{2}\, phiz2^2\, C_2 + \left(A_2 - \frac{1}{2} C_2\right) phiy2^2, -phiy2\left(A_2 - \frac{1}{2} C_2\right) phix2, \qquad (4.2.1)$$

$$-\frac{1}{2}\, phiz2\, C_2\, phix2], [-phiy2\left(A_2 - \frac{1}{2} C_2\right) phix2,$$

$$\frac{1}{2}\, phiz2^2\, C_2 + phix2^2\left(A_2 - \frac{1}{2} C_2\right), -\frac{1}{2}\, phiz2\, C_2\, phiy2], [-\frac{1}{2}\, phiz2\, C_2\, phix2,$$

$$-\frac{1}{2}\, phiz2\, C_2\, phiy2, \frac{1}{2}\, phiy2^2\, C_2 + \frac{1}{2}\, phix2^2\, C_2]$$

# Expression des éléments cinétiques

## Coefficients d'énergie cinétique aij

$$a11 = C_2\cos(\alpha)^2 + A_2 - A_2\cos(\alpha)^2 + C_1,$$

$$a12 = \cos(\alpha)\, C_2\, phiz2$$

$$+\frac{1}{2}\, phiy2\cos(-\psi 2+\alpha)\, A_2 - \frac{1}{2}\, phiy2\cos(\psi 2+\alpha)\, A_2$$

$$-\frac{1}{2}\, phix2\sin(\psi 2+\alpha)\, A_2 - \frac{1}{2}\, phix2\sin(-\psi 2+\alpha)\, A_2,$$

$$a22 = phiz2^2\, C_2 + phiy2^2\, A_2 + phix2^2\, A_2$$

## Symboles de Christoffel

### *Torseurs géométriques dérivés*

$$\varphi 1Prime_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, t1Prime_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \varphi 2Prime_2 = \begin{bmatrix} dphi2x \\ dphi2y \\ dphi2z \end{bmatrix}, t2Prime_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (5.2.1.1)$$

$$\Gamma 111 = 0$$

$$\Gamma 112 = \frac{1}{2}\cos(\alpha)\,\left(-phiy2\sin(\psi 2+\alpha)\,C_2 - phiy2\sin(-\psi 2+\alpha)\,C_2\right.$$
$$- phix2\cos(-\psi 2+\alpha)\,C_2 + phix2\cos(\psi 2+\alpha)\,C_2 + phiy2\sin(\psi 2+\alpha)\,A_2$$
$$\left. + phiy2\sin(-\psi 2+\alpha)\,A_2 + phix2\cos(-\psi 2+\alpha)\,A_2 - phix2\cos(\psi 2+\alpha)\,A_2\right)$$

$$\Gamma 121 = \frac{1}{2}\cos(\alpha)\,\left(-phiy2\sin(\psi 2+\alpha)\,C_2 - phiy2\sin(-\psi 2+\alpha)\,C_2\right.$$
$$- phix2\cos(-\psi 2+\alpha)\,C_2 + phix2\cos(\psi 2+\alpha)\,C_2 + phiy2\sin(\psi 2+\alpha)\,A_2$$
$$\left. + phiy2\sin(-\psi 2+\alpha)\,A_2 + phix2\cos(-\psi 2+\alpha)\,A_2 - phix2\cos(\psi 2+\alpha)\,A_2\right)$$

$$\Gamma 122 = \cos(\alpha)\,C_2\,dphi2z - \frac{1}{2}\cos(\psi 2+\alpha)\,A_2\,dphi2y - \frac{1}{2}\sin(\psi 2+\alpha)\,A_2\,dphi2x$$
$$- \frac{1}{2}\sin(-\psi 2+\alpha)\,A_2\,dphi2x + \frac{1}{2}\cos(-\psi 2+\alpha)\,A_2\,dphi2y$$
$$+ \frac{1}{2}\cos(-\psi 2+\alpha)\,A_2\,phiz2\,phix2 - \frac{1}{2}\cos(-\psi 2+\alpha)\,C_2\,phiz2\,phix2$$
$$- \frac{1}{2}\cos(\psi 2+\alpha)\,A_2\,phiz2\,phix2 + \frac{1}{2}\cos(\psi 2+\alpha)\,C_2\,phiz2\,phix2$$
$$+ \frac{1}{2}\sin(\psi 2+\alpha)\,A_2\,phiz2\,phiy2 - \frac{1}{2}\sin(\psi 2+\alpha)\,C_2\,phiz2\,phiy2$$
$$+ \frac{1}{2}\sin(-\psi 2+\alpha)\,A_2\,phiz2\,phiy2 - \frac{1}{2}\sin(-\psi 2+\alpha)\,C_2\,phiz2\,phiy2$$

$$\Gamma 211 = -\frac{1}{4}\,phiy2\,A_2\sin(-\psi 2+2\alpha) - \frac{1}{4}\,phiy2\,A_2\sin(\psi 2+2\alpha)$$
$$+ \frac{1}{4}\,phiy2\,C_2\sin(-\psi 2+2\alpha) + \frac{1}{4}\,phiy2\,C_2\sin(\psi 2+2\alpha)$$
$$+ \frac{1}{4}\,phix2\,A_2\cos(\psi 2+2\alpha) - \frac{1}{4}\,phix2\,A_2\cos(-\psi 2+2\alpha)$$
$$- \frac{1}{4}\,phix2\,C_2\cos(\psi 2+2\alpha) + \frac{1}{4}\,phix2\,C_2\cos(-\psi 2+2\alpha)$$

$$\Gamma 212 = 0$$

$$\Gamma 221 = 0$$

$$\Gamma 222 = phiz2\, C_2\, dphi2z + phiy2\, A_2\, dphi2y + phix2\, A_2\, dphi2x \qquad (5.2.1)$$

# Calcul des quantités d'accélération généralisées Ai

## Termes correspondant aux coefficients d'énergie cinétique aij

$$A1Cinetique = \left(C_2 \cos(\alpha)^2 + A_2 - A_2 \cos(\alpha)^2 + C_1\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\psi 1(t)\right)$$
$$+\left(\cos(\alpha)\, C_2\, phiz2 + \frac{1}{2}\, phiy2 \cos(-\psi 2 + \alpha)\, A_2 - \frac{1}{2}\, phiy2 \cos(\psi 2 + \alpha)\, A_2\right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}\, phix2 \sin(\psi 2 + \alpha)\, A_2 - \frac{1}{2}\, phix2 \sin(-\psi 2 + \alpha)\, A_2\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\psi 3(t)\right)$$

$$A2Cinetique = \left(\cos(\alpha)\, C_2\, phiz2 + \frac{1}{2}\, phiy2 \cos(-\psi 2 + \alpha)\, A_2\right.$$
$$-\frac{1}{2}\, phiy2 \cos(\psi 2 + \alpha)\, A_2 - \frac{1}{2}\, phix2 \sin(\psi 2 + \alpha)\, A_2$$
$$\left. -\frac{1}{2}\, phix2 \sin(-\psi 2 + \alpha)\, A_2\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\psi 1(t)\right)$$
$$+\left(phiz2^2\, C_2 + phiy2^2\, A_2 + phix2^2\, A_2\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\psi 3(t)\right)$$

## Termes correspondant aux symboles de Christoffel Gammaijk

$$A1Christoffel = \left(\frac{d}{dt}\,\psi 1(t)\right)\left(\frac{d}{dt}\,\psi 3(t)\right)$$
$$\cos(\alpha)\left(-phiy2 \sin(\psi 2 + \alpha)\, C_2 - phiy2 \sin(-\psi 2 + \alpha)\, C_2\right.$$
$$-phix2 \cos(-\psi 2 + \alpha)\, C_2 + phix2 \cos(\psi 2 + \alpha)\, C_2 + phiy2 \sin(\psi 2 + \alpha)\, A_2$$
$$\left. + phiy2 \sin(-\psi 2 + \alpha)\, A_2 + phix2 \cos(-\psi 2 + \alpha)\, A_2 - phix2 \cos(\psi 2 + \alpha)\, A_2\right) +$$
$$\left(\frac{d}{dt}\,\psi 3(t)\right)^2\left(\cos(\alpha)\, C_2\, dphi2z - \frac{1}{2}\cos(\psi 2 + \alpha)\, A_2\, dphi2y\right.$$
$$-\frac{1}{2}\sin(\psi 2 + \alpha)\, A_2\, dphi2x - \frac{1}{2}\sin(-\psi 2 + \alpha)\, A_2\, dphi2x$$
$$+\frac{1}{2}\cos(-\psi 2 + \alpha)\, A_2\, dphi2y$$
$$\left. +\frac{1}{2}\cos(-\psi 2 + \alpha)\, A_2\, phiz2\, phix2 - \frac{1}{2}\cos(-\psi 2 + \alpha)\, C_2\, phiz2\, phix2\right.$$

$$-\frac{1}{2}\cos(\psi 2+\alpha)\,A_2\,phiz2\,phix2+\frac{1}{2}\cos(\psi 2+\alpha)\,C_2\,phiz2\,phix2$$
$$+\frac{1}{2}\sin(\psi 2+\alpha)\,A_2\,phiz2\,phiy2-\frac{1}{2}\sin(\psi 2+\alpha)\,C_2\,phiz2\,phiy2$$
$$+\frac{1}{2}\sin(-\psi 2+\alpha)\,A_2\,phiz2\,phiy2-\frac{1}{2}\sin(-\psi 2+\alpha)\,C_2\,phiz2\,phiy2\Big)$$

$A2Christoffel =$ (6.2.1)

$$\left(\frac{d}{dt}\,\psi 1(t)\right)^2\left(-\frac{1}{4}\,phiy2\,A_2\sin(-\psi 2+2\alpha)-\frac{1}{4}\,phiy2\,A_2\sin(\psi 2+2\alpha)\right.$$
$$+\frac{1}{4}\,phiy2\,C_2\sin(-\psi 2+2\alpha)+\frac{1}{4}\,phiy2\,C_2\sin(\psi 2+2\alpha)$$
$$+\frac{1}{4}\,phix2\,A_2\cos(\psi 2+2\alpha)-\frac{1}{4}\,phix2\,A_2\cos(-\psi 2+2\alpha)$$
$$\left.-\frac{1}{4}\,phix2\,C_2\cos(\psi 2+2\alpha)+\frac{1}{4}\,phix2\,C_2\cos(-\psi 2+2\alpha)\right)+$$
$$\left(\frac{d}{dt}\,\psi 3(t)\right)^2(phiz2\,C_2\,dphi2z+phiy2\,A_2\,dphi2y+phix2\,A_2\,dphi2x)$$

## Quantités d'accélération généralisées

$$A1=\left(C_2\cos(\alpha)^2+A_2-A_2\cos(\alpha)^2+C_1\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\psi 1(t)\right)$$
$$+\left(\cos(\alpha)\,C_2\,phiz2+\frac{1}{2}\,phiy2\cos(-\psi 2+\alpha)\,A_2-\frac{1}{2}\,phiy2\cos(\psi 2+\alpha)\,A_2\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\,phix2\sin(\psi 2+\alpha)\,A_2-\frac{1}{2}\,phix2\sin(-\psi 2+\alpha)\,A_2\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\psi 3(t)\right)$$
$$+\left(\frac{d}{dt}\,\psi 1(t)\right)\left(\frac{d}{dt}\,\psi 3(t)\right)$$
$$\cos(\alpha)\left(-phiy2\sin(\psi 2+\alpha)\,C_2-phiy2\sin(-\psi 2+\alpha)\,C_2\right.$$
$$-phix2\cos(-\psi 2+\alpha)\,C_2+phix2\cos(\psi 2+\alpha)\,C_2+phiy2\sin(\psi 2+\alpha)\,A_2$$
$$\left.+phiy2\sin(-\psi 2+\alpha)\,A_2+phix2\cos(-\psi 2+\alpha)\,A_2-phix2\cos(\psi 2+\alpha)\,A_2\right)+$$
$$\left(\frac{d}{dt}\,\psi 3(t)\right)^2\left(\cos(\alpha)\,C_2\,dphi2z-\frac{1}{2}\cos(\psi 2+\alpha)\,A_2\,dphi2y\right.$$
$$-\frac{1}{2}\sin(\psi 2+\alpha)\,A_2\,dphi2x-\frac{1}{2}\sin(-\psi 2+\alpha)\,A_2\,dphi2x$$
$$\left.+\frac{1}{2}\cos(-\psi 2+\alpha)\,A_2\,dphi2y\right.$$

$$+\frac{1}{2}\cos(-\psi 2+\alpha)\,A_2\,phiz2\,phix2-\frac{1}{2}\cos(-\psi 2+\alpha)\,C_2\,phiz2\,phix2$$

$$-\frac{1}{2}\cos(\psi 2+\alpha)\,A_2\,phiz2\,phix2+\frac{1}{2}\cos(\psi 2+\alpha)\,C_2\,phiz2\,phix2$$

$$+\frac{1}{2}\sin(\psi 2+\alpha)\,A_2\,phiz2\,phiy2-\frac{1}{2}\sin(\psi 2+\alpha)\,C_2\,phiz2\,phiy2$$

$$+\frac{1}{2}\sin(-\psi 2+\alpha)\,A_2\,phiz2\,phiy2-\frac{1}{2}\sin(-\psi 2+\alpha)\,C_2\,phiz2\,phiy2\Big)$$

$$A2=\Big(\cos(\alpha)\,C_2\,phiz2+\frac{1}{2}\,phiy2\cos(-\psi 2+\alpha)\,A_2-\frac{1}{2}\,phiy2\cos(\psi 2+\alpha)\,A_2 \qquad (6.3.1)$$

$$-\frac{1}{2}\,phix2\sin(\psi 2+\alpha)\,A_2-\frac{1}{2}\,phix2\sin(-\psi 2+\alpha)\,A_2\Big)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\psi 1(t)\right)$$

$$+\left(phiz2^2\,C_2+phiy2^2\,A_2+phix2^2\,A_2\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\psi 3(t)\right)$$

$$+\left(\frac{d}{dt}\,\psi 1(t)\right)^2\left(-\frac{1}{4}\,phiy2\,A_2\sin(-\psi 2+2\alpha)-\frac{1}{4}\,phiy2\,A_2\sin(\psi 2+2\alpha)\right.$$

$$+\frac{1}{4}\,phiy2\,C_2\sin(-\psi 2+2\alpha)+\frac{1}{4}\,phiy2\,C_2\sin(\psi 2+2\alpha)$$

$$+\frac{1}{4}\,phix2\,A_2\cos(\psi 2+2\alpha)-\frac{1}{4}\,phix2\,A_2\cos(-\psi 2+2\alpha)$$

$$\left.-\frac{1}{4}\,phix2\,C_2\cos(\psi 2+2\alpha)+\frac{1}{4}\,phix2\,C_2\cos(-\psi 2+2\alpha)\right)+$$

$$\left(\frac{d}{dt}\,\psi 3(t)\right)^2\left(phiz2\,C_2\,dphi2z+phiy2\,A_2\,dphi2y+phix2\,A_2\,dphi2x\right)$$

# Détermination des efforts généralisés Qi

## Forces de gravité généralisées Qpesi

$$Qpes1=g\sin(\alpha)\,m_2\,l_2\,(\sin(\psi 3)\sin(\psi 1)-\cos(\psi 3)\cos(\psi 1)),$$

$$Qpes2=-g\,m_2\,l_2\,(phiy2\sin(\psi 1)\cos(\psi 2)\cos(\alpha)\cos(\psi 3)$$

$$-phiy2\sin(\psi 1)\sin(\psi 2)\sin(\psi 3)+phiy2\cos(\psi 1)\cos(\psi 2)\cos(\alpha)\sin(\psi 3)$$

$$+phiy2\cos(\psi 1)\sin(\psi 2)\cos(\psi 3)+phix2\sin(\psi 1)\sin(\psi 2)\cos(\alpha)\cos(\psi 3)$$

$$+phix2\sin(\psi 1)\cos(\psi 2)\sin(\psi 3)$$

$$+phix2\cos(\psi 1)\sin(\psi 2)\cos(\alpha)\sin(\psi 3)-phix2\cos(\psi 1)\cos(\psi 2)\cos(\psi 3))$$

## Forces généralisées totales Qi

$$Q1 = Cm_1 + g\sin(\alpha)\, m_2\, l_2\, (\sin(\psi 3)\sin(\psi 1) - \cos(\psi 3)\cos(\psi 1)),$$

$$Q2 = Cm_2 - g\, m_2\, l_2\, (phiy2\sin(\psi 1)\cos(\psi 2)\cos(\alpha)\cos(\psi 3) - phiy2\sin(\psi 1)\sin(\psi 2)\sin(\psi 3) + phiy2\cos(\psi 1)\cos(\psi 2)\cos(\alpha)\sin(\psi 3) + phiy2\cos(\psi 1)\sin(\psi 2)\cos(\psi 3) + phix2\sin(\psi 1)\sin(\psi 2)\cos(\alpha)\cos(\psi 3) + phix2\sin(\psi 1)\cos(\psi 2)\sin(\psi 3) + phix2\cos(\psi 1)\sin(\psi 2)\cos(\alpha)\sin(\psi 3) - phix2\cos(\psi 1)\cos(\psi 2)\cos(\psi 3))$$

# Ecriture des équations de la dynamique

## En conservant ψ2

*Equation_1_correspondant_au_paramètre_, ψ1*

$$\left(C_2\cos(\alpha)^2 + A_2 - A_2\cos(\alpha)^2 + C_1\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\psi 1(t)\right) + \left(\cos(\alpha)\, C_2\, phiz2 + \frac{1}{2}\, phiy2\cos(-\psi 2 + \alpha)\, A_2 - \frac{1}{2}\, phiy2\cos(\psi 2 + \alpha)\, A_2 - \frac{1}{2}\, phix2\sin(\psi 2 + \alpha)\, A_2 - \frac{1}{2}\, phix2\sin(-\psi 2 + \alpha)\, A_2\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\psi 3(t)\right) + \left(\frac{d}{dt}\,\psi 1(t)\right)\left(\frac{d}{dt}\,\psi 3(t)\right)$$

$$\cos(\alpha)\,(-phiy2\sin(\psi 2 + \alpha)\, C_2 - phiy2\sin(-\psi 2 + \alpha)\, C_2 - phix2\cos(-\psi 2 + \alpha)\, C_2 + phix2\cos(\psi 2 + \alpha)\, C_2 + phiy2\sin(\psi 2 + \alpha)\, A_2 + phiy2\sin(-\psi 2 + \alpha)\, A_2 + phix2\cos(-\psi 2 + \alpha)\, A_2 - phix2\cos(\psi 2 + \alpha)\, A_2) + \left(\frac{d}{dt}\,\psi 3(t)\right)^2\left(\cos(\alpha)\, C_2\, dphi2z - \frac{1}{2}\cos(\psi 2 + \alpha)\, A_2\, dphi2y - \frac{1}{2}\sin(\psi 2 + \alpha)\, A_2\, dphi2x - \frac{1}{2}\sin(-\psi 2 + \alpha)\, A_2\, dphi2x + \frac{1}{2}\cos(-\psi 2 + \alpha)\, A_2\, dphi2y + \frac{1}{2}\cos(-\psi 2 + \alpha)\, A_2\, phiz2\, phix2 - \frac{1}{2}\cos(-\psi 2 + \alpha)\, C_2\, phiz2\, phix2 - \frac{1}{2}\cos(\psi 2 + \alpha)\, A_2\, phiz2\, phix2 + \frac{1}{2}\cos(\psi 2 + \alpha)\, C_2\, phiz2\, phix2 + \frac{1}{2}\sin(\psi 2 + \alpha)\, A_2\, phiz2\, phiy2 - \frac{1}{2}\sin(\psi 2 + \alpha)\, C_2\, phiz2\, phiy2$$

$$+\frac{1}{2}\sin(-\psi 2+\alpha)\,A_2\,phiz2\,phiy2-\frac{1}{2}\sin(-\psi 2+\alpha)\,C_2\,phiz2\,phiy2\Big)=Cm_1+g$$

$$\sin(\alpha)\,m_2\,l_2\,(\sin(\psi 3)\sin(\psi 1)-\cos(\psi 3)\cos(\psi 1))$$

*Equation_2_correspondant_au_paramètre_, ψ3*

$$\Big(\cos(\alpha)\,C_2\,phiz2+\frac{1}{2}\,phiy2\cos(-\psi 2+\alpha)\,A_2-\frac{1}{2}\,phiy2\cos(\psi 2+\alpha)\,A_2 \qquad (8.1.1)$$

$$-\frac{1}{2}\,phix2\sin(\psi 2+\alpha)\,A_2-\frac{1}{2}\,phix2\sin(-\psi 2+\alpha)\,A_2\Big)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\psi 1(t)\right)$$

$$+\left(phiz2^2\,C_2+phiy2^2\,A_2+phix2^2\,A_2\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\psi 3(t)\right)$$

$$+\left(\frac{d}{dt}\,\psi 1(t)\right)^2\left(-\frac{1}{4}\,phiy2\,A_2\sin(-\psi 2+2\alpha)-\frac{1}{4}\,phiy2\,A_2\sin(\psi 2+2\alpha)\right.$$

$$+\frac{1}{4}\,phiy2\,C_2\sin(-\psi 2+2\alpha)+\frac{1}{4}\,phiy2\,C_2\sin(\psi 2+2\alpha)$$

$$+\frac{1}{4}\,phix2\,A_2\cos(\psi 2+2\alpha)-\frac{1}{4}\,phix2\,A_2\cos(-\psi 2+2\alpha)$$

$$\left.-\frac{1}{4}\,phix2\,C_2\cos(\psi 2+2\alpha)+\frac{1}{4}\,phix2\,C_2\cos(-\psi 2+2\alpha)\right)+$$

$$\left(\frac{d}{dt}\,\psi 3(t)\right)^2(phiz2\,C_2\,dphi2z+phiy2\,A_2\,dphi2y+phix2\,A_2\,dphi2x)$$

$$=Cm_2-g\,m_2\,l_2\,(phiy2\sin(\psi 1)\cos(\psi 2)\cos(\alpha)\cos(\psi 3)$$

$$-phiy2\sin(\psi 1)\sin(\psi 2)\sin(\psi 3)+phiy2\cos(\psi 1)\cos(\psi 2)\cos(\alpha)\sin(\psi 3)$$

$$+phiy2\cos(\psi 1)\sin(\psi 2)\cos(\psi 3)+phix2\sin(\psi 1)\sin(\psi 2)\cos(\alpha)\cos(\psi 3)$$

$$+phix2\sin(\psi 1)\cos(\psi 2)\sin(\psi 3)$$

$$+phix2\cos(\psi 1)\sin(\psi 2)\cos(\alpha)\sin(\psi 3)-phix2\cos(\psi 1)\cos(\psi 2)\cos(\psi 3))$$

## En reportant la relation de liaison suivante

$$\psi 2:=-\arctan(\cos(\alpha)\tan(\psi 3)) \qquad (8.2.1)$$

*Equation_1_correspondant_au_paramètre_, ψ1*

$$\left(C_2\cos(\alpha)^2+A_2-A_2\cos(\alpha)^2+C_1\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\psi 1(t)\right)$$

$$+\left(\cos(\alpha)\,C_2\,phiz2+\frac{1}{2}\,phiy2\cos(\arctan(\cos(\alpha)\tan(\psi 3)))+\alpha\right)A_2$$

$$-\frac{1}{2}\,phiy2\cos(-\arctan(\cos(\alpha)\tan(\psi 3)))+\alpha)\,A_2$$

$$-\frac{1}{2}\,phix2\sin(-\arctan(\cos(\alpha)\tan(\psi 3)))+\alpha)\,A_2$$

$$-\frac{1}{2}\,phix2\sin(\arctan(\cos(\alpha)\tan(\psi 3)))+\alpha)\,A_2\Big)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\psi 3(t)\right)+\left(\frac{d}{dt}\,\psi 1(t)\right)\left(\frac{d}{dt}\,\psi 3(t)\right)$$

$$\cos(\alpha)\,(-phiy2\sin(-\arctan(\cos(\alpha)\tan(\psi 3)))+\alpha)\,C_2$$

$$-phiy2\sin(\arctan(\cos(\alpha)\tan(\psi 3)))+\alpha)\,C_2$$

$$-phix2\cos(\arctan(\cos(\alpha)\tan(\psi 3)))+\alpha)\,C_2$$

$$+phix2\cos(-\arctan(\cos(\alpha)\tan(\psi 3)))+\alpha)\,C_2$$

$$+phiy2\sin(-\arctan(\cos(\alpha)\tan(\psi 3)))+\alpha)\,A_2$$

$$+phiy2\sin(\arctan(\cos(\alpha)\tan(\psi 3)))+\alpha)\,A_2$$

$$+phix2\cos(\arctan(\cos(\alpha)\tan(\psi 3)))+\alpha)\,A_2$$

$$-phix2\cos(-\arctan(\cos(\alpha)\tan(\psi 3)))+\alpha)\,A_2\Big)+\left(\frac{d}{dt}\,\psi 3(t)\right)^2\Big(\cos(\alpha)\,C_2$$

$$dphi2z-\frac{1}{2}\cos(-\arctan(\cos(\alpha)\tan(\psi 3)))+\alpha)\,A_2\,dphi2y$$

$$-\frac{1}{2}\sin(-\arctan(\cos(\alpha)\tan(\psi 3)))+\alpha)\,A_2\,dphi2x$$

$$-\frac{1}{2}\sin(\arctan(\cos(\alpha)\tan(\psi 3)))+\alpha)\,A_2\,dphi2x$$

$$+\frac{1}{2}\cos(\arctan(\cos(\alpha)\tan(\psi 3)))+\alpha)\,A_2\,dphi2y$$

$$+\frac{1}{2}\cos(\arctan(\cos(\alpha)\tan(\psi 3)))+\alpha)\,A_2\,phiz2\,phix2$$

$$-\frac{1}{2}\cos(\arctan(\cos(\alpha)\tan(\psi 3)))+\alpha)\,C_2\,phiz2\,phix2$$

$$-\frac{1}{2}\cos(-\arctan(\cos(\alpha)\tan(\psi 3)))+\alpha)\,A_2\,phiz2\,phix2$$

$$+\frac{1}{2}\cos(-\arctan(\cos(\alpha)\tan(\psi 3)))+\alpha)\,C_2\,phiz2\,phix2$$

$$+\frac{1}{2}\sin(-\arctan(\cos(\alpha)\tan(\psi 3)))+\alpha)\,A_2\,phiz2\,phiy2$$

$$-\frac{1}{2}\sin(-\arctan(\cos(\alpha)\tan(\psi 3)))+\alpha)\,C_2\,phiz2\,phiy2$$

$$+\frac{1}{2}\sin(\arctan(\cos(\alpha)\tan(\psi 3)))+\alpha)\,A_2\,phiz2\,phiy2$$

$$-\frac{1}{2}\sin(\arctan(\cos(\alpha)\tan(\psi 3)))+\alpha)\,C_2\,phiz2\,phiy2\Big)=Cm_1+g\sin(\alpha)$$

$$m_2\,l_2\,(\sin(\psi 3)\sin(\psi 1)-\cos(\psi 3)\cos(\psi 1))$$

*Equation_2_correspondant_au_paramètre_, ψ3*

$$\Big(\cos(\alpha)\,C_2\,phiz2+\frac{1}{2}\,phiy2\cos(\arctan(\cos(\alpha)\tan(\psi 3)))+\alpha)\,A_2 \qquad (8.2.2)$$

$$-\frac{1}{2}\,phiy2\cos(-\arctan(\cos(\alpha)\tan(\psi 3)))+\alpha)\,A_2$$

$$-\frac{1}{2}\,phix2\sin(-\arctan(\cos(\alpha)\tan(\psi 3)))+\alpha)\,A_2$$

$$-\frac{1}{2}\,phix2\sin(\arctan(\cos(\alpha)\tan(\psi 3)))+\alpha)\,A_2\Big)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\psi 1(t)\right)$$

$$+\left(phiz2^2\,C_2+phiy2^2\,A_2+phix2^2\,A_2\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\psi 3(t)\right)$$

$$+\left(\frac{d}{dt}\,\psi 1(t)\right)^2\left(-\frac{1}{4}\,phiy2\,A_2\sin(\arctan(\cos(\alpha)\tan(\psi 3)))+2\alpha\right)$$

$$-\frac{1}{4}\,phiy2\,A_2\sin(-\arctan(\cos(\alpha)\tan(\psi 3)))+2\alpha)$$

$$+\frac{1}{4}\,phiy2\,C_2\sin(\arctan(\cos(\alpha)\tan(\psi 3)))+2\alpha)$$

$$+\frac{1}{4}\,phiy2\,C_2\sin(-\arctan(\cos(\alpha)\tan(\psi 3)))+2\alpha)$$

$$+\frac{1}{4}\,phix2\,A_2\cos(-\arctan(\cos(\alpha)\tan(\psi 3)))+2\alpha)$$

$$-\frac{1}{4}\,phix2\,A_2\cos(\arctan(\cos(\alpha)\tan(\psi 3)))+2\alpha)$$

$$-\frac{1}{4}\,phix2\,C_2\cos(-\arctan(\cos(\alpha)\tan(\psi 3)))+2\alpha)$$

$$+\frac{1}{4}\,phix2\,C_2\cos(\arctan(\cos(\alpha)\tan(\psi 3)))+2\alpha)\Big)+$$

$$\left(\frac{d}{dt}\,\psi 3(t)\right)^2\left(phiz2\,C_2\,dphi2z+phiy2\,A_2\,dphi2y+phix2\,A_2\,dphi2x\right)$$

$$=Cm_2-g\,m_2\,l_2\left(\frac{phiy2\sin(\psi 1)\cos(\alpha)\cos(\psi 3)}{\sqrt{1+\cos(\alpha)^2\tan(\psi 3)^2}}\right.$$

$$+\frac{phiy2\sin(\psi 1)\cos(\alpha)\tan(\psi 3)\sin(\psi 3)}{\sqrt{1+\cos(\alpha)^2\tan(\psi 3)^2}}$$

$$+\frac{phiy2\cos(\psi 1)\cos(\alpha)\sin(\psi 3)}{\sqrt{1+\cos(\alpha)^2\tan(\psi 3)^2}}-$$

$$\frac{phiy2\cos(\psi 1)\cos(\alpha)\tan(\psi 3)\cos(\psi 3)}{\sqrt{1+\cos(\alpha)^2\tan(\psi 3)^2}}-$$

$$\frac{phix2\sin(\psi 1)\cos(\alpha)^2\tan(\psi 3)\cos(\psi 3)}{\sqrt{1+\cos(\alpha)^2\tan(\psi 3)^2}}$$

$$+\frac{phix2\sin(\psi 1)\sin(\psi 3)}{\sqrt{1+\cos(\alpha)^2\tan(\psi 3)^2}}-\frac{phix2\cos(\psi 1)\cos(\alpha)^2\tan(\psi 3)\sin(\psi 3)}{\sqrt{1+\cos(\alpha)^2\tan(\psi 3)^2}}-$$

$$\frac{phix2\cos(\psi 1)\cos(\psi 3)}{\sqrt{1+\cos(\alpha)^2\tan(\psi 3)^2}}\Bigg)$$

**Puis introduction des expressions des composantes de φ2 et φ2Prime : les équations se compliquent encore...**

# Annexe 1.3
# Système simplifié à joint de Cardan

Voir partie 1, paragraphe 1.5.5.3.4.

## Saisie des données

$$n := 1$$

### Description du repérage-paramétrage de Denavit-Hartenberg "modifié"

$$\begin{bmatrix} i & \varepsilon_i & \alpha_{i-1} & a_{i-1} & \theta_i & r_i \\ 1 & 2 & \frac{1}{2}\pi & 0 & \psi 3 & 0 \end{bmatrix}$$

### Coordonnée généralisée

$$\psi 3$$

### Masse du solide (et du corps généralisé)

$$m_2 \qquad (1.3.1)$$

### Position du centre d'inertie

$$O2G2_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{bmatrix}$$

### Tenseur d'inertie usuel

$$IO2S2_2 = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}$$

### Force généralisée (sauf pesanteur)

$$Q2 = Cm_2$$

## Matrice de passage

$$MPass(2\,à\,1) = [\cos(\psi 2)\cos(\alpha)\cos(\psi 3) - \sin(\psi 2)\sin(\psi 3), \qquad (2.1)$$
$$\cos(\psi 2)\cos(\alpha)\sin(\psi 3) + \sin(\psi 2)\cos(\psi 3), -\cos(\psi 2)\sin(\alpha)], [$$
$$-\sin(\psi 2)\cos(\alpha)\cos(\psi 3) - \cos(\psi 2)\sin(\psi 3),$$
$$-\sin(\psi 2)\cos(\alpha)\sin(\psi 3) + \cos(\psi 2)\cos(\psi 3), \sin(\psi 2)\sin(\alpha)], [$$
$$\sin(\alpha)\cos(\psi 3), \sin(\alpha)\sin(\psi 3), \cos(\alpha)]$$

# Détermination des TIG 4x4 du corps généralisé

## Détermination du TIG 4x4 du corps augmenté : gi+

### *Détermination du TIG 4x4 du solide : gi*

*Moment d'ordre 1 (moment statique) du solide*

$$U2_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 l_2 \end{bmatrix}$$

*Moment d'ordre 2 (tenseur d'inertie brut) du solide*

$$II22_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} C_2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} C_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 - \frac{1}{2} C_2 \end{bmatrix}$$

*Construction du TIG du solide*

$$g2_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} C_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 - \frac{1}{2} C_2 & m_2 l_2 \\ 0 & 0 & m_2 l_2 & m_2 \end{bmatrix}$$

### *Détermination du terme introduit par le point massique (Oi,Mi)*

Inutile.

### *Construction du TIG du corps augmenté*

$$g2Plus_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} C_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 - \frac{1}{2} C_2 & m_2 l_2 \\ 0 & 0 & m_2 l_2 & m_2 \end{bmatrix}$$

### Détermination du TIG 4x4 du corps généralisé : Gii

#### *Moment d'ordre 1 (moment statique) du corps généralisé en son propre point de référence : Uii*

$$U22_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 l_2 \end{bmatrix}$$

#### *Construction du TIG 4x4 du corps généralisé : Gii*

$$G22_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} C_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 - \frac{1}{2} C_2 & m_2 l_2 \\ 0 & 0 & m_2 l_2 & m_2 \end{bmatrix}$$

### Construction du TIG 4x4 du corps généralisé : Gij

Inutile : il n'y a qu'un TIG ici, c'est G22.

## Détermination du tenseur cinétique Kij

### Matrice issue du torseur géométrique

$$Dollar2O2_2 = \begin{bmatrix} 0 & -phiz2 & phiy2 & 0 \\ phiz2 & 0 & -phix2 & 0 \\ -phiy2 & phix2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### Tenseur cinétique Kij

$$K22_2 = [\frac{1}{2} phiz2^2 C_2 + \left(A_2 - \frac{1}{2} C_2\right) phiy2^2, -phiy2 \left(A_2 - \frac{1}{2} C_2\right) phix2,$$
$$-\frac{1}{2} phiz2 C_2 phix2], [-phiy2 \left(A_2 - \frac{1}{2} C_2\right) phix2,$$
$$\frac{1}{2} phiz2^2 C_2 + phix2^2 \left(A_2 - \frac{1}{2} C_2\right), -\frac{1}{2} phiz2 C_2 phiy2], [-\frac{1}{2} phiz2 C_2 phix2,$$
$$-\frac{1}{2} phiz2 C_2 phiy2, \frac{1}{2} phiy2^2 C_2 + \frac{1}{2} phix2^2 C_2]$$

## Expression des éléments cinétiques

### Coefficient d'énergie cinétique aij

$$a21 = phiz2^2\, C_2 + phiy2^2\, A_2 + phix2^2\, A_2$$

### Symbole de Christoffel

#### *Torseur géométrique dérivé*

>

$$\varphi 2Prime_2 = \begin{bmatrix} dphi2x \\ dphi2y \\ dphi2z \end{bmatrix},\ t2Prime_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (5.2.1.1)$$

$$\Gamma 211 = C_2\, phiz2\, dphi2z + phiy2\, A_2\, dphi2y + phix2\, A_2\, dphi2x \qquad (5.2.1)$$

## Calcul de la quantité d'accélération généralisée Ai

### Terme correspondant au coefficient d'énergie cinétique aij

$$A2Cinetique = \left(phiz2^2\, C_2 + phiy2^2\, A_2 + phix2^2\, A_2\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\psi 3(t)\right)$$

### Terme correspondant aux coefficients de Cristoffel Sigmaijk : AiCristoffel

$$A2Christoffel = \left(\frac{d}{dt}\,\psi 3(t)\right)^2 \left(C_2\, phiz2\, dphi2z + phiy2\, A_2\, dphi2y + phix2\, A_2\, dphi2x\right) \qquad (6.2.1)$$

### Quantité d'acélération généralisée

$$A2 = \left(phiz2^2\, C_2 + phiy2^2\, A_2 + phix2^2\, A_2\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\psi 3(t)\right) \qquad (6.3.1)$$
$$+ \left(\frac{d}{dt}\,\psi 3(t)\right)^2 \left(C_2\, phiz2\, dphi2z + phiy2\, A_2\, dphi2y + phix2\, A_2\, dphi2x\right)$$

## Détermination de l'effort généralisé Qi

### Force de gravité généralisée Qpesi

$$Qpes2 = -g\, m_2\, l_2\, (phiy2 \cos(\psi 2)\cos(\alpha)\sin(\psi 3) + phiy2 \sin(\psi 2)\cos(\psi 3)$$
$$+ phix2 \sin(\psi 2)\cos(\alpha)\sin(\psi 3) - phix2 \cos(\psi 2)\cos(\psi 3))$$

### Force généralisée totale Qi

$$Q2 = Cm_2 - g\, m_2\, l_2\, (phiy2 \cos(\psi 2)\cos(\alpha)\sin(\psi 3) + phiy2 \sin(\psi 2)\cos(\psi 3))$$

$$+ phix2 \sin(\psi 2) \cos(\alpha) \sin(\psi 3) - phix2 \cos(\psi 2) \cos(\psi 3))$$

# Ecriture de l'équation de la dynamique

## En conservant ψ2

$$Equation_1_correspondant_au_paramètre_, \psi 3$$

$$\left(phiz2^2 C_2 + phiy2^2 A_2 + phix2^2 A_2\right) \left(\frac{d^2}{dt^2} \psi 3(t)\right) \tag{8.1.1}$$

$$+ \left(\frac{d}{dt} \psi 3(t)\right)^2 \left(C_2 phiz2\, dphi2z + phiy2\, A_2\, dphi2y + phix2\, A_2\, dphi2x\right)$$

$$= Cm_2 - g\, m_2\, l_2 \left(phiy2 \cos(\psi 2) \cos(\alpha) \sin(\psi 3) + phiy2 \sin(\psi 2) \cos(\psi 3)\right.$$

$$\left. + phix2 \sin(\psi 2) \cos(\alpha) \sin(\psi 3) - phix2 \cos(\psi 2) \cos(\psi 3)\right)$$

## En reportant la relation de liaison suivante

$$\psi 2 := -\arctan(\cos(\alpha) \tan(\psi 3)) \tag{8.2.1}$$

$$Equation_1_correspondant_au_paramètre_, \psi 3$$

$$\left(phiz2^2 C_2 + phiy2^2 A_2 + phix2^2 A_2\right) \left(\frac{d^2}{dt^2} \psi 3(t)\right) \tag{8.2.2}$$

$$+ \left(\frac{d}{dt} \psi 3(t)\right)^2 \left(C_2 phiz2\, dphi2z + phiy2\, A_2\, dphi2y + phix2\, A_2\, dphi2x\right)$$

$$= Cm_2 - g\, m_2\, l_2 \left(\frac{phiy2 \cos(\alpha) \sin(\psi 3)}{\sqrt{1 + \cos(\alpha)^2 \tan(\psi 3)^2}} - \frac{phiy2 \cos(\alpha) \tan(\psi 3) \cos(\psi 3)}{\sqrt{1 + \cos(\alpha)^2 \tan(\psi 3)^2}} - \right.$$

$$\left. \frac{phix2 \cos(\alpha)^2 \tan(\psi 3) \sin(\psi 3)}{\sqrt{1 + \cos(\alpha)^2 \tan(\psi 3)^2}} - \frac{phix2 \cos(\psi 3)}{\sqrt{1 + \cos(\alpha)^2 \tan(\psi 3)^2}}\right)$$

## Puis introduction des expressions des composantes de φ2 et φ2Prime

$$phix2 := -\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{1 + \cos(\alpha)^2 \tan(\psi 3)^2}}$$

$$phiy2 := -\frac{\sin(\alpha) \cos(\alpha) \tan(\psi 3)}{\sqrt{1 + \cos(\alpha)^2 \tan(\psi 3)^2}}$$

$$phiz2 := -\frac{\sin(\alpha)^2 \cos(\alpha) \tan(\psi 3)^2}{1 + \cos(\alpha)^2 \tan(\psi 3)^2} \tag{8.3.1}$$

$$dphi2x := \frac{\cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) \tan(\psi 3) \left(1+\tan(\psi 3)^2\right)}{\left(1+\cos(\alpha)^2 \tan(\psi 3)^2\right)^{3/2}}$$

$$dphi2y := -\frac{\cos(\alpha) \sin(\alpha) \left(1+\tan(\psi 3)^2\right)}{\left(1+\cos(\alpha)^2 \tan(\psi 3)^2\right)^{3/2}}$$

$$dphi2z := -\frac{2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2 \tan(\psi 3) \left(1+\tan(\psi 3)^2\right)}{\left(1+\cos(\alpha)^2 \tan(\psi 3)^2\right)^2} \tag{8.3.2}$$

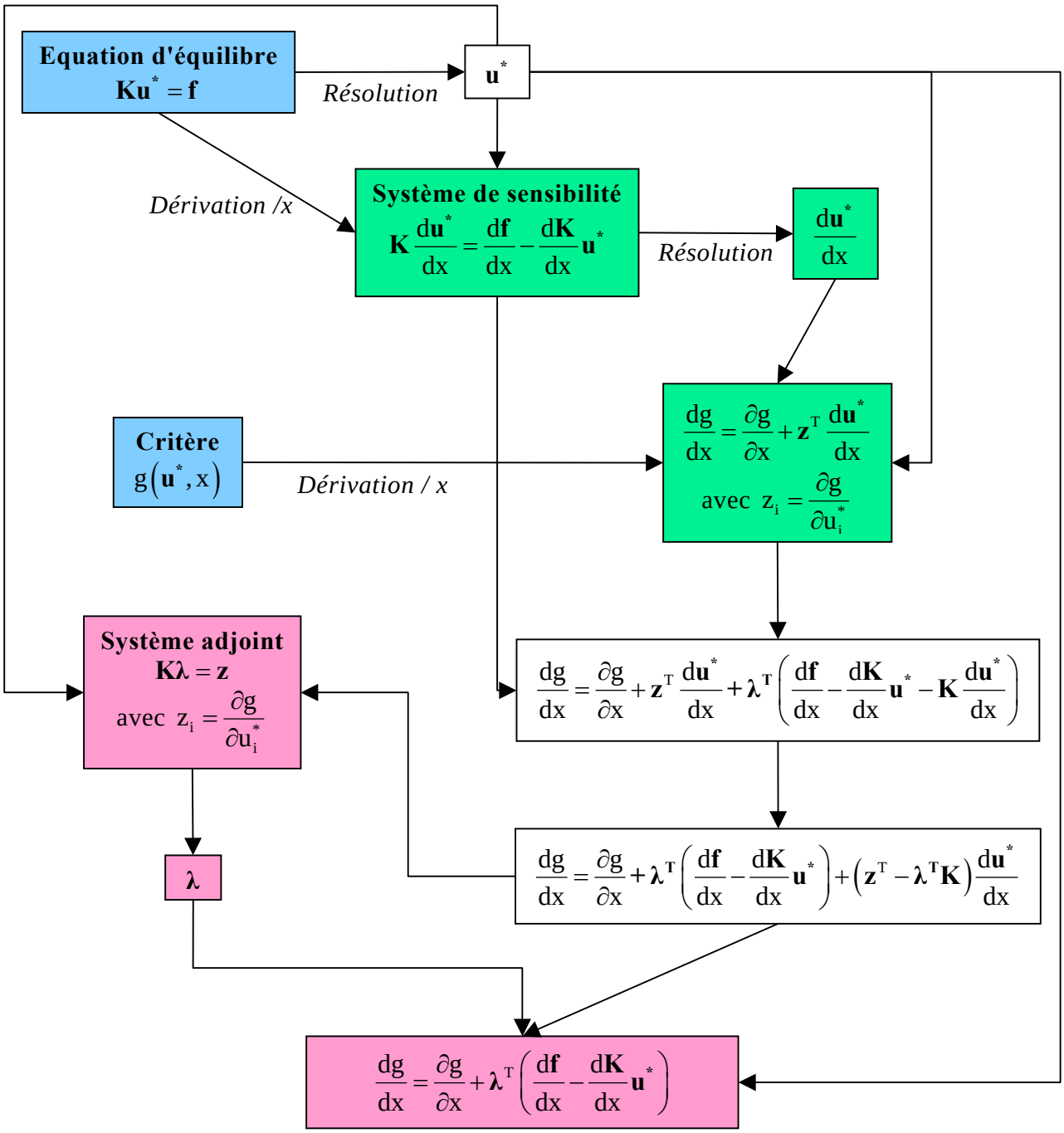
*Equation_1_correspondant_au_paramètre_, ψ3*

$$\left( \frac{\sin(\alpha)^4 \cos(\alpha)^2 \tan(\psi 3)^4 C_2}{\left(1+\cos(\alpha)^2 \tan(\psi 3)^2\right)^2} + \frac{\sin(\alpha)^2 \cos(\alpha)^2 \tan(\psi 3)^2 A_2}{1+\cos(\alpha)^2 \tan(\psi 3)^2} + \frac{\sin(\alpha)^2 A_2}{1+\cos(\alpha)^2 \tan(\psi 3)^2} \right) \left( \frac{d^2}{dt^2} \psi 3(t) \right) + \frac{2 \left( \frac{d}{dt} \psi 3(t) \right)^2 C_2 \sin(\alpha)^4 \cos(\alpha)^2 \tan(\psi 3)^3 \left(1+\tan(\psi 3)^2\right)}{\left(1+\cos(\alpha)^2 \tan(\psi 3)^2\right)^3} = Cm_2 - g\, m_2\, l_2 \sin(\alpha) \cos(\psi 3) \tag{8.3.3}$$

# Annexe 2

# Algorithme des méthodes directe et adjointe d'étude de sensibilité. Cas de la statique.

Voir Partie 2, paragraphe 2.3.3.2.8.




***Légende :***

- Données
- Etapes opérationnelles de la méthode directe
- Etapes opérationnelles de la méthode de l'état-adjoint
- Etapes ne servant qu'à la démonstration des "étapes opérationnelles"

# Annexe 3

# Méthodes d'étude de sensibilité. Programmes Maple appliqués au système masse-ressort-amortisseur linéaire.

Au cours d'une même exécution de chaque programme sont calculées simultanément les sensibilités du déplacement de la masse par rapport à deux paramètres de construction : la raideur k et l'amortissement c.

(Voir Partie 2, paragraphe 2.4.1.2.5.)

**Annexe 3.1** Méthode directe 228

**Annexe 3.2** Méthode de l'état-adjoint 244

# Annexe 3.1 Méthode directe

## Nomenclature spécifique à ce fichier (changements par rapport à la nomenclature générale)

* variables d'état :
$qi_1$ *et* $qi_2 = qi_{pr_1}$ (*pr signifie prime ou point*),

*puis respectivement* $q_1(t)$ *et* $q_2(t)$ *à partir de la* "résolution du système dynamique"

(au lieu de $y_i(t)$ dans le texte..)

* par conséquent, le "vecteur" dérivé par rapport au temps du vecteur d'état est nommé dqdt au lieu de dy/dt.
* dérivée partielle de f par rapport à x : d(rond)dx
* sensibilité de la jème variable d'état en fonction du temps : $u_j(t)$

## Entrée des données

### Nombre de degrés de liberté

$$n := 1 \tag{1.1.1}$$

### Entrée des équations (sous forme F=0)

$$F_1 := qi_{pr_2} + k\,qi_1 + c\,qi_2$$

$$F_2 := qi_{pr_1} - qi_2 \tag{1.2.1}$$

### Affichage du modèle dynamique

$$Eq_{dyn} := \left[qi_{pr_2} + k\,qi_1 + c\,qi_2 = 0,\ qi_{pr_1} - qi_2 = 0\right] \tag{1.3.1}$$

### Conditions initiales (a priori) et données temporelles

$$t_0 := 0 \tag{1.4.1}$$

Valeurs des variables d'état en t_0 :

$$Valeur_q := \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{1.4.2}$$

Borne supérieure pour le temps :

$$tsup := 3 \tag{1.4.3}$$

### Choix des paramètres de construction

Ce sont les paramètres de construction par rapport auxquels on veut la sensibilité des variables d'état

$$Param := [k, c] \tag{1.5.1}$$

# Identification de A et f, et calcul de toutes les dérivées *partielles*

## Travail sur le membre de gauche de l'équation de sensibilité

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.1.1}$$

La jème composante du vecteur-ligne suivant correspond à la matrice issue de la dérivée partielle de A par rapport au jème paramètre de construction x (cf "Param") :

$$d(rond)\ Adx = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \tag{2.1.2}$$

$$Membre\ de\ gauche = \begin{bmatrix} qi_{pr_2} \\ qi_{pr_1} \end{bmatrix} \tag{2.1.3}$$

$$B := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.1.4}$$

## Travail sur le membre de droite de l'équation de sensibilité

$$f := \begin{bmatrix} -k\,qi_1 - c\,qi_2 \\ qi_2 \end{bmatrix} \tag{2.2.1}$$

$$J := \begin{bmatrix} -k & -c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.2.2}$$

La jème colonne de la "matrice" (tableau) suivante correspond au vecteur-colonne issu de la dérivée partielle du vecteur-colonne f par rapport au jème paramètre de construction x (cf "Param") :

$$d(rond)\ fdx = \begin{bmatrix} -qi_1 & -qi_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.2.3}$$

# Résolution du système dynamique

## Expression finale du système dynamique (fonction du temps)

$$\left[\frac{d}{dt}q_2(t) + k\,q_1(t) + c\,q_2(t) = 0,\ \frac{d}{dt}q_1(t) - q_2(t) = 0\right] \tag{3.1.1}$$

### Résolution avec conditions initiales

$sol_{dyn} := [t = \mathbf{proc}(t)$ (3.2.1)

...

**end proc**, $q_1(t) = \mathbf{proc}(t)$

...

**end proc**, $q_2(t) = \mathbf{proc}(t)$

...

**end proc**]

### Tracé des solutions

Possible et testé, mais supprimé lors de la comparaison des temps de calcul des 2 méthodes.

## Détermination des systèmes de sensibilité

### Ecriture du "vecteur" des sensibilités

La jème composante du vecteur-colonne suivant correspond à une sensibilité de la jème variable d'état :

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.1.1)$$

### Calcul de dy/dt, nommé ici dqdt

La jème composante du vecteur-colonne suivant est la dérivée de la jème variable d'état par rapport au temps.

$$dqdt := \begin{bmatrix} q_2(t) \\ -k\,q_1(t) - c\,q_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.2.1)$$

### Ecriture des systèmes de sensibilité

La jème colonne du tableau suivant correspond au système d'équations de sensibilité par rapport au jème paramètre de construction x (cf "Param") :

$Eq_{sensib} := [\frac{d}{dt} u_2(t) + k\,u_1(t) + c\,u_2(t) = -q_1(t),$ (4.3.1)

$\frac{d}{dt} u_2(t) + k\,u_1(t) + c\,u_2(t) = -q_2(t)], [\frac{d}{dt} u_1(t) - u_2(t) = 0, \frac{d}{dt} u_1(t) - u_2(t) = 0]$

# Résolution des systèmes de sensibilité

## Résolution avec conditions initiales

$$\left[\left[t = \mathbf{proc}(t) \ldots \mathbf{end\ proc},\ u_1(t) = \mathbf{proc}(t) \ldots \mathbf{end\ proc},\ u_2(t) = \mathbf{proc}(t) \ldots \mathbf{end\ proc}\right],\ \left[t = \mathbf{proc}(t) \ldots \mathbf{end\ proc},\ u_1(t) = \mathbf{proc}(t) \ldots \mathbf{end\ proc},\ u_2(t) = \mathbf{proc}(t) \ldots \mathbf{end\ proc}\right]\right] \quad (5.1.1)$$

Remarque : Toutes les conditions initiales de sensibilité sont nulles.
La jème colonne du tableau suivant contient alors les 2n sensibilités des variables d'état (dans l'ordre) par rapport au jème paramètre de construction x (cf "Param") :

$$MatVaru := \begin{bmatrix} \mathbf{proc}(t) \ldots \mathbf{end\ proc} & \mathbf{proc}(t) \ldots \mathbf{end\ proc} \\ \mathbf{proc}(t) \ldots \mathbf{end\ proc} & \mathbf{proc}(t) \ldots \mathbf{end\ proc} \end{bmatrix} \quad (5.1.2)$$

## Tracé des solutions : sensibilités continues en fonction du temps

Possible et testé, mais supprimé lors de la comparaison des temps de calcul des 2 méthodes.

# Présentation des résultats discrétisés

## Qu'étudie-t-on ?

* la sensibilité d'une seule variable d'état à la fois (pour pouvoir comparer avec la méthode adjointe) donc choix demandé
* par rapport à tous les paramètres de la liste Param
* calculée en fonction des paramètres de construction contenus dans la liste ParamVar (choix demandé ci-dessous).

Remarque : les paramètres de construction des listes Param et ParamVar sont indépendants ; les éventuels paramètres de Param non choisis dans ParamVar doivent être fixes et affectés d'une valeur.

## Choix de la variable d'état étudiée

On demande son indice :

$$IndCoord := 1 \quad (6.2.1)$$

## Paramètres de construction

### *Variables*

$$ParamVar := [k, c] \quad (6.3.1.1)$$

Pour chaque paramètre de construction variable choisi (cf ParamVar), l'utilisateur renseigne les valeurs minimale et maximale, ainsi que le nombre de valeurs discrètes souhaitées. En conséquence, chaque case du tableau suivant contient les ensembles (ici : doublets) successifs

$$Valeurs\ discrètes\ des\ x = \begin{bmatrix} [1.,1.] & [1.,2.] & [1.,3.] \\ [2.,1.] & [2.,2.] & [2.,3.] \\ [3.,1.] & [3.,2.] & [3.,3.] \end{bmatrix} \quad (6.3.1.2)$$

### *Fixes*

Aucun dans le cas d'étude présent.

## Données numériques sur le temps

Instants auxquels on calcule la sensibilité :

$$instants := \begin{bmatrix} 0. \\ 1. \\ 2. \\ 3. \end{bmatrix} \quad (6.4.1)$$

## Résultats de sensibilité

### *Nombre de chiffres significatifs demandés*

$$nbchiffres := 5 \quad (6.5.1.1)$$

### *Présentation des résultats*

Légende du tableau suivant :
* lignes globales : isovaleurs du 1er paramètre variable (cf "ParamVar" et "Valeurs discrètes des x")
* colonnes globales : isovaleurs du 2nd paramètre variable (cf "ParamVar" et "Valeurs discrètes des x")
* jème colonne locale (de chaque sous-matrice) : évolution de la sensibilité de la variable d'état par rapport au jème x (cf Param), en fonction du temps (cf "instants")

$$\left[\begin{bmatrix} 0. & 0. \\ -.46854 & -1.0995 \\ -1.7914 & -1.2007 \\ -2.3539 & 0.17763 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ -.30657 & -.61313 \\ -.90224 & -.45112 \\ -1.1202 & 6.4405\,10^{-8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ -.21025 & -.36615 \\ -.53041 & -.23411 \\ -.67095 & -0.058665 \end{bmatrix}\right.$$
$$\begin{bmatrix} 0. & 0. \\ -.42234 & -.90002 \\ -1.1135 & -.10478 \\ -.47013 & 1.1660 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ -.27698 & -.49692 \\ -.58925 & -0.026053 \\ -.38723 & 0.33454 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ -.19063 & -.29541 \\ -.36631 & -0.035629 \\ -.31090 & 0.11154 \end{bmatrix}$$
$$\left.\begin{bmatrix} 0. & 0. \\ -.37942 & -.72117 \\ -.62353 & 0.50492 \\ 0.27607 & 0.83653 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ -.24947 & -.39290 \\ -.35873 & 0.21133 \\ -0.045273 & 0.28071 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ -.17236 & -.23212 \\ -.24244 & 0.079936 \\ -.11719 & 0.12604 \end{bmatrix}\right] \quad (6.5.2.1)$$

**Durée de la résolution en mode "paramétrique" (en secondes, sur Pentium 1,7GHz) :**

9.635 (1)

**Dont affectation finale des valeurs numériques (idem) :**

7.852 (2)

# Annexe 3.2 Méthode de l'état-adjoint

## Nomenclature spécifique à ce fichier (changements par rapport à la nomenclature générale)

* variables d'état :
$qi_1$ *et* $qi_2 = qi_{pr_1}$ (*pr signifie prime ou point*),

*puis respectivement* $q_1(t)$ *et* $q_2(t)$ *à partir de la* "résolution du système dynamique"

(au lieu de $y_i(t)$ dans le texte..)

* par conséquent, le "vecteur" dérivé par rapport au temps du vecteur d'état est nommé dqdt au lieu de dy/dt.
* dérivée partielle de f par rapport à x : d(rond)dx
* sensibilité de la jème variable d'état en fonction du temps : $u_j(t)$

## Entrée des données

### Nombre de degrés de liberté

$$n := 1 \tag{1.1.1}$$

### Entrée des équations (sous forme F=0)

$$F_1 := qi_{pr_2} + k\,qi_1 + c\,qi_2$$

$$F_2 := qi_{pr_1} - qi_2 \tag{1.2.1}$$

### Affichage du modèle dynamique

$$Eq_{dyn} := \left[qi_{pr_2} + k\,qi_1 + c\,qi_2 = 0,\ qi_{pr_1} - qi_2 = 0\right] \tag{1.3.1}$$

### Conditions initiales (a priori) et données temporelles

$$t_0 := 0 \tag{1.4.1}$$

Valeurs des variables d'état en t_0 :

$$Valeur_q := \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{1.4.2}$$

Borne supérieure pour le temps

$$tsup := 3 \tag{1.4.3}$$

### Choix des paramètres de construction

Ce sont les paramètres de construction par rapport auxquels on veut la sensibilité d'une variable d'état

$$Param := [k, c] \tag{1.5.1}$$

## Variable d'état étudiée

Remarque importante : pour pouvoir effectuer les dérivées partielles du paragraphe suivant, on a besoin de donner la fonction g beaucoup plus tôt que dans la méthode directe. Au contraire, cette dernière calcule les sensibilités de toutes les variables d'état.

$$g := qi_1 \tag{1.6.1}$$

# Identification de A et f, et calcul de toutes les dérivées *partielles*

## Travail sur le membre de gauche de l'équation de sensibilité

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.1.1}$$

La jème composante du vecteur-ligne suivant correspond à la matrice issue de la dérivée partielle de A par rapport au jème paramètre de construction x (cf "Param") :

$$d(rond)\ Adx = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \tag{2.1.2}$$

$$Membre\ de\ gauche = \begin{bmatrix} qi_{pr_2} \\ qi_{pr_1} \end{bmatrix} \tag{2.1.3}$$

$$B := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.1.4}$$

## Travail sur le membre de droite de l'équation de sensibilité

$$f := \begin{bmatrix} -k\,qi_1 - c\,qi_2 \\ qi_2 \end{bmatrix} \tag{2.2.1}$$

$$J := \begin{bmatrix} -k & -c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.2.2}$$

La jème colonne de la "matrice" (tableau) suivante correspond au vecteur-colonne issu de la dérivée partielle du vecteur-colonne f par rapport au jème paramètre de construction x (cf "Param") :

$$d(rond)\ fdx = \begin{bmatrix} -qi_1 & -qi_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.2.3}$$

## Travail sur g (peut être placé ailleurs)

La jème composante du vecteur-colonne ci-dessous est la dérivée partielle du critère g par rapport à la jème variable d'état :

$$d(rond)\ gdq = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.3.1}$$

# Résolution du système dynamique

## Expression finale du système dynamique (fonction du temps)

$$\left[\frac{d}{dt}\,q_2(t) + k\,q_1(t) + c\,q_2(t) = 0,\ \frac{d}{dt}\,q_1(t) - q_2(t) = 0\right] \tag{3.1.1}$$

## Résolution avec conditions initiales

$$sol_{dyn} := \left[t = \mathbf{proc}(t)\right] \tag{3.2.1}$$

...

**end proc**, $q_1(t) = \mathbf{proc}(t)$

...

**end proc**, $q_2(t) = \mathbf{proc}(t)$

...

**end proc**]

## Tracé des solutions

Possible et testé, mais supprimé lors de la comparaison des temps de calcul des 2 méthodes.

# Calcul de la dérivée *totale* de A par rapport au temps

$$dAdt := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

# Détermination du système adjoint

## Ecriture du "vecteur" adjoint

$$\begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} \tag{5.1.1}$$

### Ecriture du système adjoint

$$Eq_{adj} := \left[ \frac{d}{dt}\lambda_2(t) - k\,\lambda_1(t) = 0,\ \frac{d}{dt}\lambda_1(t) - c\,\lambda_1(t) + \lambda_2(t) = 0 \right] \quad (5.2.1)$$

### Calcul de dy/dt, nommé ici dqdt

La jème composante du vecteur-colonne suivant est la dérivée de la jème variable d'état par rapport au temps.

$$dqdt := \begin{bmatrix} q_2(t) \\ -k\,q_1(t) - c\,q_2(t) \end{bmatrix} \quad (5.3.1)$$

## Résolution du système adjoint (détermination de Qf(t))

La jème colonne de la matrice (tableau) Qf(t) ci-dessous est le vecteur adjoint solution du système adjoint, pour la condition finale en t_sup suivante : seule la jème composante du "vecteur" des conditions finales vaut 1 , toutes les autres valant 0.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc} & \mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc} \\ \mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc} & \mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

## Détermination des sensibilités

### Calcul de l'intégrale finale

La jème composante du vecteur-ligne "VecVaru" est la sensibilité de g par rapport au jème paramètre de construction x (cf "Param") : ce sont des procédures "boîtes noires" pour l'instant.

$$VecVaru := \begin{bmatrix} \dfrac{-localV1_1\,M_{1,2} + localV1_2\,M_{1,1}}{M_{1,1}\,M_{2,2} - M_{1,2}\,M_{2,1}} & \dfrac{-localV1_1\,M_{1,2} + localV1_2\,M_{1,1}}{M_{1,1}\,M_{2,2} - M_{1,2}\,M_{2,1}} \end{bmatrix} \quad (7.1.1)$$

### Tracé des solutions : sensibilités continues en fonction du temps

Possible et testé, mais supprimé lors de la comparaison des temps de calcul des 2 méthodes.

## Présentation des résultats discrétisés

### Qu'étudie-t-on ?

* la sensibilité d'une seule variable d'état à la fois, celle définie dans g.
* par rapport à tous les paramètres de la liste Param
* calculée en fonction des paramètres de construction contenus dans la liste ParamVar (choix demandé ci-dessous).

Remarque : les paramètres de construction des listes Param et ParamVar sont indépendants ; les éventuels paramètres de Param non choisis dans ParamVar doivent être fixes et affectés

d'une valeur.

# Paramètres de construction

## *Variables*

$$ParamVar := [k, c] \tag{8.2.1.1}$$

Pour chaque paramètre de construction variable choisi (cf ParamVar), l'utilisateur renseigne les valeurs minimale et maximale, ainsi que le nombre de valeurs discrètes souhaitées. En conséquence, chaque case du tableau suivant contient les ensembles (ici : doublets) successifs de valeurs.

$$Valeurs\ discrètes\ des\ x = \begin{bmatrix} [1., 1.] & [1., 2.] & [1., 3.] \\ [2., 1.] & [2., 2.] & [2., 3.] \\ [3., 1.] & [3., 2.] & [3., 3.] \end{bmatrix} \tag{8.2.1.2}$$

## *Fixes*

Aucun dans le cas d'étude présent.

# Données numériques sur le temps

Instants auxquels on calcule la sensibilité :

$$instants := \begin{bmatrix} 0. \\ 1. \\ 2. \\ 3. \end{bmatrix} \tag{8.3.1}$$

# Résultats de sensibilité

## *Nombre de chiffres significatifs demandés*

$$nbchiffres := 5 \tag{8.4.1.1}$$

## *Présentation des résultats*

Légende du tableau suivant :
* lignes globales : isovaleurs du 1er paramètre variable (cf "ParamVar" et "Valeurs discrètes des x")
* colonnes globales : isovaleurs du 2nd paramètre variable (cf "ParamVar" et "Valeurs discrètes des x")
* jème colonne locale (de chaque sous-matrice) : évolution de la sensibilité de la variable d'état par rapport au jème x (cf Param), en fonction du temps (cf "instants")

$$\left[\begin{bmatrix} -0. & -0. \\ -.46852 & -1.0995 \\ -1.7914 & -1.2007 \\ -2.3539 & 0.17763 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0. & -0. \\ -.30661 & -.61317 \\ -.90217 & -.45111 \\ -1.1202 & 3.1473\,10^{-8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0. & -0. \\ -.21008 & -.36613 \\ -.53040 & -.23412 \\ -.67095 & -0.058665 \end{bmatrix}\right.$$
$$\begin{bmatrix} 0. & 0. \\ -.42236 & -.90002 \\ -1.1135 & -.10478 \\ -.47013 & 1.1660 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0. & -0. \\ -.27703 & -.49688 \\ -.58932 & -0.026047 \\ -.38723 & 0.33454 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0. & -0. \\ -.19056 & -.29536 \\ -.36630 & -0.035634 \\ -.31090 & 0.11154 \end{bmatrix} \quad (8.4.2.1)$$
$$\left.\begin{bmatrix} 0. & 0. \\ -.37941 & -.72113 \\ -.62353 & 0.50491 \\ 0.27607 & 0.83653 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ -.24948 & -.39290 \\ -.35872 & 0.21133 \\ -0.045273 & 0.28071 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0. & -0. \\ -.17239 & -.23213 \\ -.24246 & 0.079942 \\ -.11719 & 0.12604 \end{bmatrix}\right]$$

**Durée de la résolution en mode "paramétrique" (en secondes, sur Pentium 1,7GHz) :**

16.275 (1)

**Dont affectation finale des valeurs numériques (idem) :**

13.760 (2)

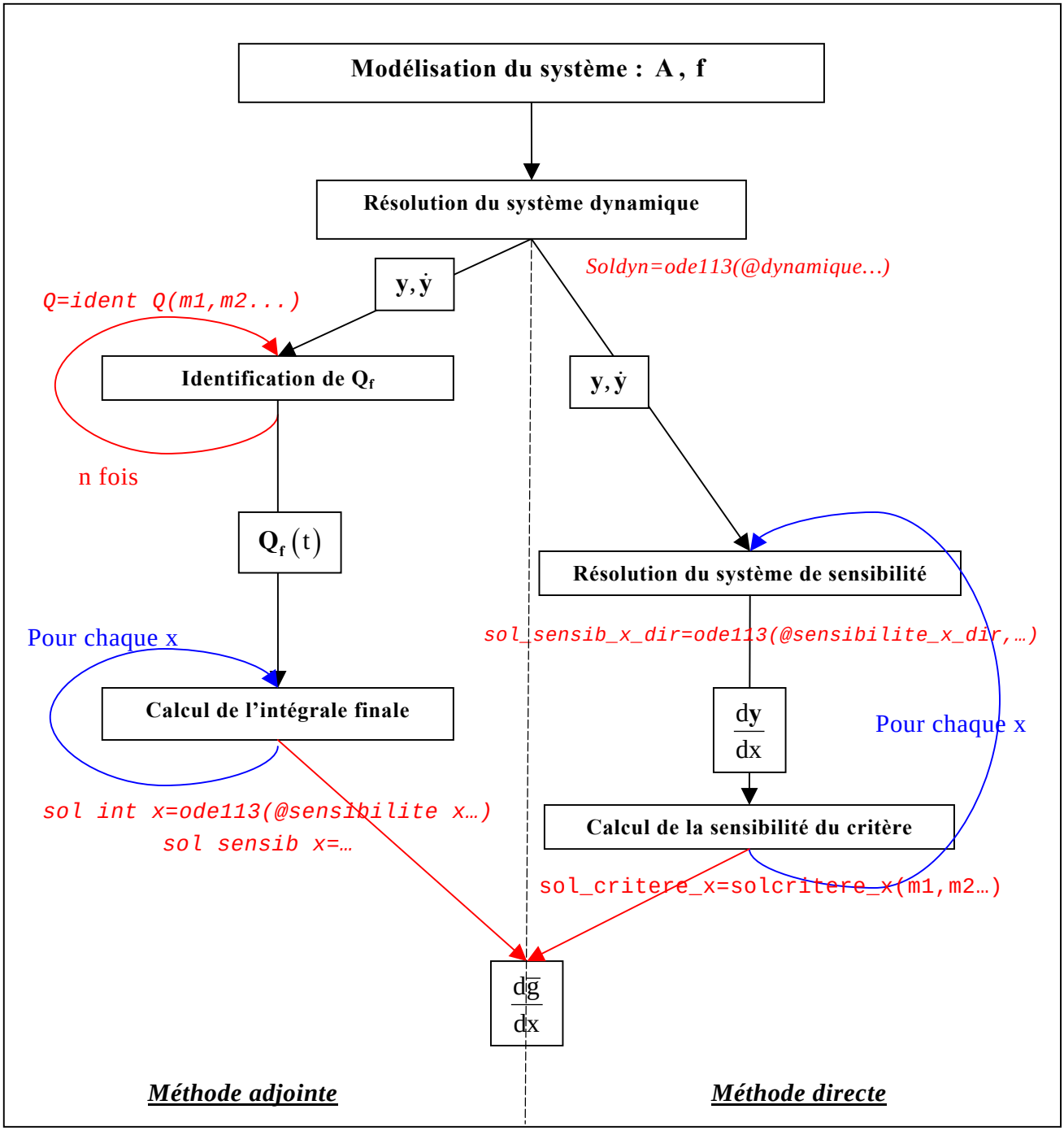
# Annexe 4

# Programme Matlab d'étude de sensibilité. Notice d'utilisation du programme principal comparaison.m

Ce programme est destiné à la comparaison des méthodes directe et adjointe et est issu de [PORTE06].

Voir Partie 2, paragraphe 2.4.2.2.3.

# Architecture du programme comparaison.m



## Composition du programme

Le programme comparaison, codé dans la M-file comparaison.m, a besoin des sous- programmes suivants pour pouvoir fonctionner correctement :

Système dynamique :

- dynamique.m → construction du système dynamique

Méthode adjointe :

- ident_Q.m → identification de $\mathbf{Q_f}(t)$
- adjoint.m → construction du système adjoint
- lambda_ti.m → calcul de $\boldsymbol{\lambda}(t_i)$
- gauche.m → terme $\boldsymbol{\lambda}^T(t_i)\left(\mathbf{Q_f}^{-1}(t_i)\right)^T$
- sensibilite_m1.m → terme $\mathbf{Q_f}^T(t)\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\dot{\mathbf{y}}\right)$
- sensibilite_r2.m idem
- sensibilite_m2.m idem
- sensibilite_l2.m idem
- dgdm1_ti.m → dérivée partielle de g en ti
- dgdr2_ti.m idem
- dgdm2_ti.m idem
- dgdl2_ti.m idem

Méthode directe :

- sensibilite_m1_dir.m → construction du système de sensibilité
- sensibilite_r2_dir.m idem
- sensibilite_m2_dir.m idem
- sensibilite_l2_dir.m idem
- solcritère_m1.m → calcul de la valeur du critère
- solcritère_r2.m idem
- solcritère_m2.m idem
- solcritère_l2.m idem

Afin de faciliter le codage de ces sous-programmes, le programme préparation permet d'obtenir les expressions des différentes parties de chaque système de résolution, de manière automatique.

Les données du problème sont contenues dans le fichier 'double_pendule.mat' qui contient la structure 'memoire'. Cette dernière contient les informations suivantes :

- x → le paramètre de construction étudié ;
- g → la constante de gravité ;
- vec_etat → le vecteur d'état $\mathbf{y}$ ;
- A → la matrice de masse $\mathbf{A}$;
- f → le vecteur de charge $\mathbf{f}$ ;
- param_constr → les paramètres de construction du système ;
- critère → le critère étudié $\overline{g}$.

En allant puiser dans les informations contenues dans 'memoire', le programme 'preparation.m' met en forme les quantités utiles pour la résolution des systèmes de sensibilité, par la méthode directe et la méthode adjointe.

Le programme renvoie :

x → paramètre d'étude ;

A → matrice de masse **A** ;

f → vecteur de charge **f** ;

sys_dyn → expression du système dynamique ;

sys_sensib → système de sensibilité par la méthode directe ;

sensib_critere → expression de la sensibilité du critère ($\frac{d\bar{g}}{dx}$ totale);

sys_adjoint → expression du système adjoint ;

dfdx-dAdxqpr → $= \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\dot{\mathbf{y}}$ expression à intégrer dans la méthode adjointe ;

lambda_ti → expression de $\boldsymbol{\lambda}(t_i) = -\frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}}(t_i)\mathbf{A}^{-1}(t_i)$ ;

dgdx → $= \frac{\partial g}{\partial x}$ (dérivée partielle).

Pour modifier le système étudié, il suffit donc de remplacer les expressions suivantes dans les sous-programmes correspondants :

| | | | |
|---|---|---|---|
| dynamique.m | → | sys_dyn | remplacer q1 par y(1) etc. |
| adjoint.m | → | sys_adjoint | remplacer q1 par q(1), qpr1 par qpr(1) etc. |
| lambda_ti.m | → | lambda_ti | remplacer q1 par q(1) etc. |
| gauche.m | → | rien à changer | |
| sensibilite_x.m | → | dfdx-dAdxqpr | remplacer q1 par q(1), qpr1 par qpr(1) etc. |
| dgdx_ti.m | → | dgdx | remplacer q1 par q(1), qpr1 par qpr(1) etc. |
| sensibilite_x_dir.m | → | sys_sensib | remplacer q1 par q(1), qpr1 par qpr(1) dq1dx par y(1) etc. |
| solcritere_x.m | → | sensib_critere | remplacer q1 par q(1), qpr1 par qpr(1), dq1dx par dqdx(1) etc. |

# Annexe 5

# Sensibilité de l'énergie cinétique du double-pendule orthogonal et de son intégrale. Courbes-résultats.

Rappel des paramètres de construction étudiés :

- Masse du solide 1 : m1 = 4kg
- Masse du solide 2 : m2 = 2kg
- Longueur du solide 1 : r2 = 5m
- Longueur du solide 2 : l2 = 2m.

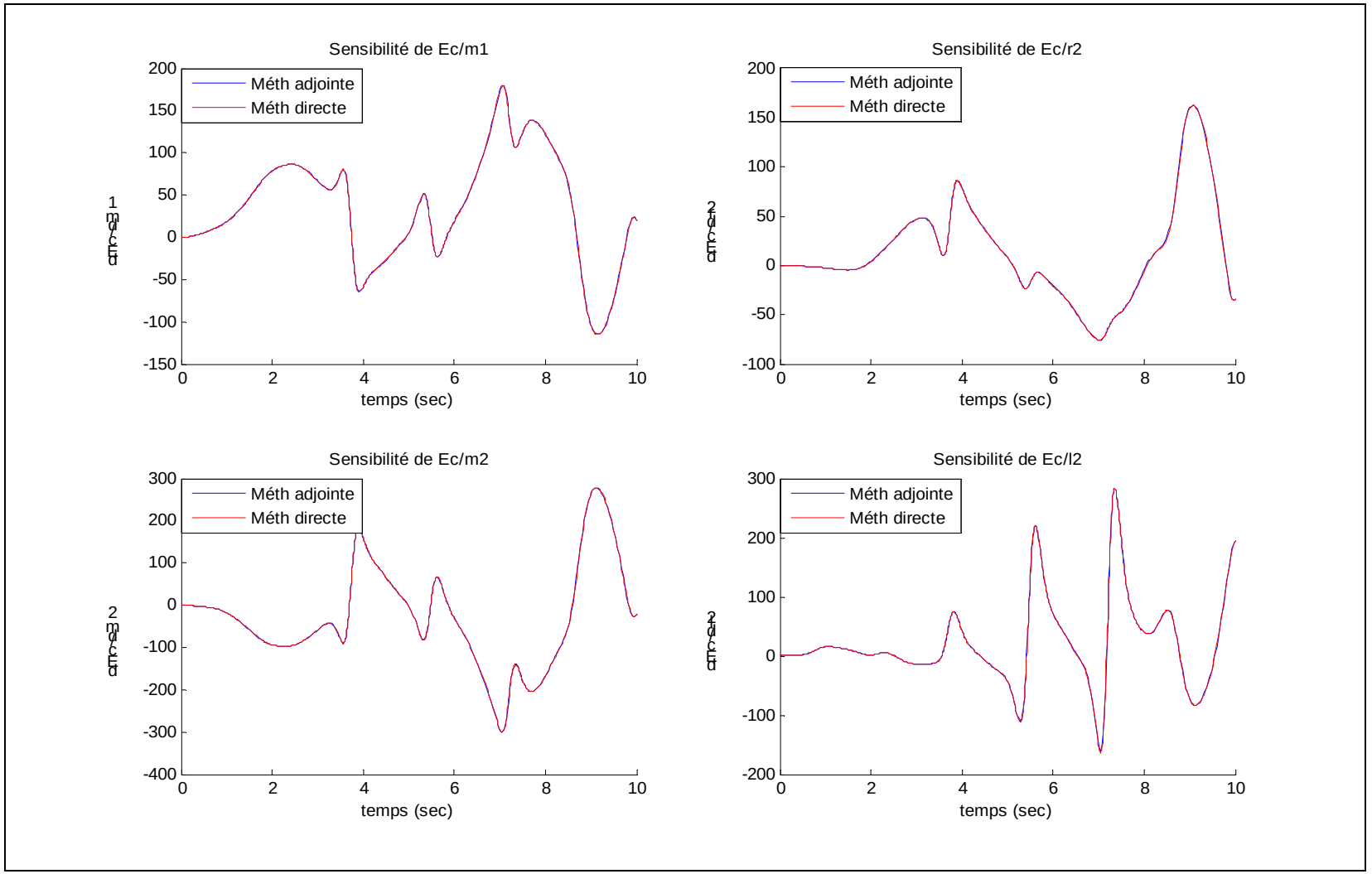
Avertissement : $T^0 \equiv Ec$ ici.

Voir Partie 2, paragraphes 2.4.2.3.1 et 2.4.2.3.2.

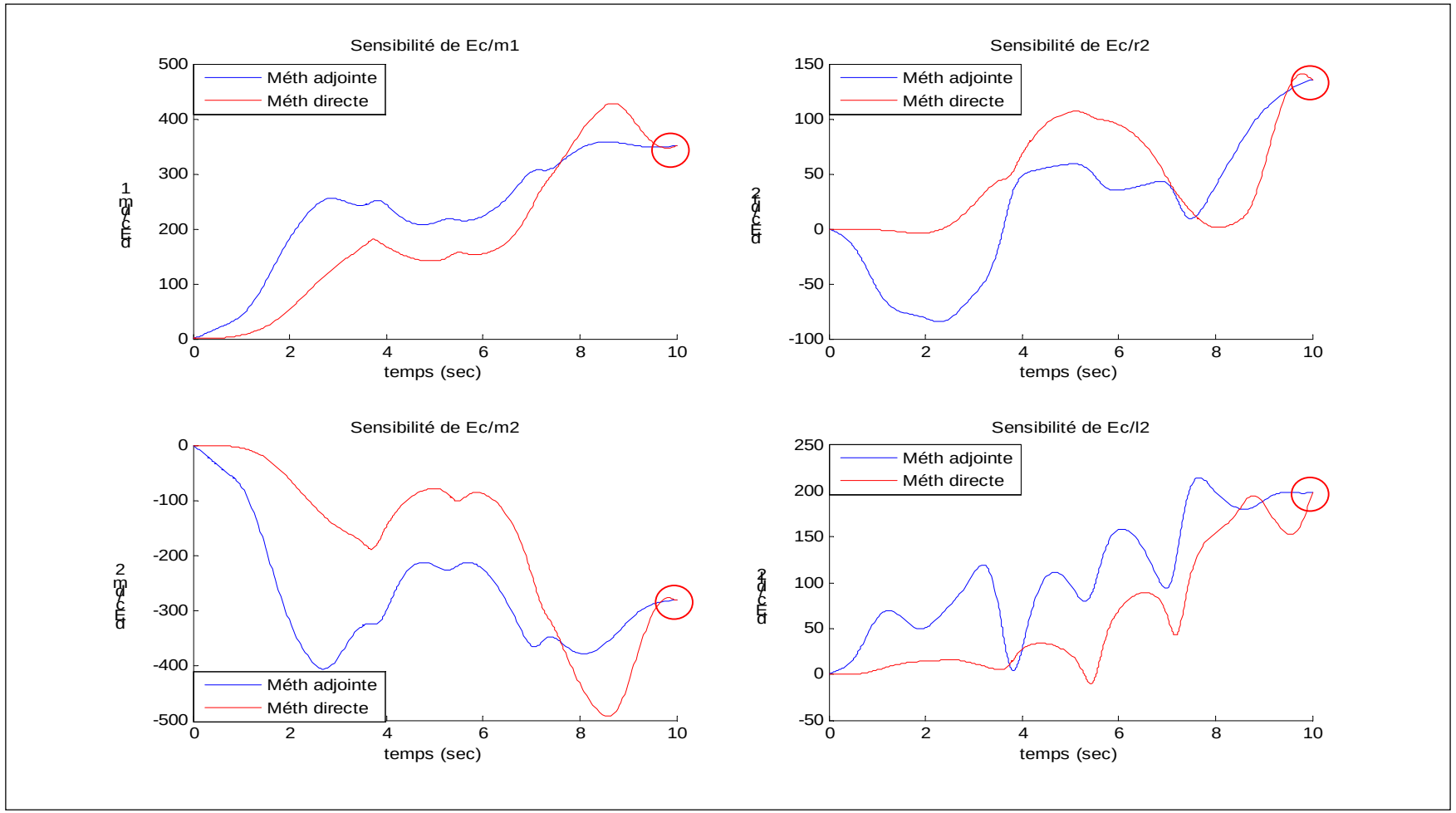
**Annexe 5.1** Double-pendule orthogonal : tracé des sensibilités de l'énergie cinétique en fonction du temps [PORTE06]. 256

**Annexe 5.2** Double-pendule orthogonal : tracé des sensibilités de l'intégrale de Ec en fonction du temps [PORTE06]. 257

# Annexe 5.1 Double-pendule orthogonal : tracé des sensibilités de l'énergie cinétique en fonction du temps [PORTE06].



# Annexe 5.2 Double-pendule orthogonal : tracé des sensibilités de l'intégrale de Ec en fonction du temps [PORTE06].



# Annexe 6

# Modèle roulis-lacet-dérive de véhicule automobile [BROS06]. Signification des constantes et valeurs usuelles.

Voir Partie 2, paragraphe 2.4.3.1.

**Rappel du modèle :**

$$\begin{bmatrix} MV & 0 & -Mh & 0 \\ 0 & I_{zz} & I_{xz} & 0 \\ -MhV & I_{xz} & I_{xx}+Mh^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha' \\ r' \\ x' \\ \varphi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(2D_1^*+2D_2^*\right) & -\left(MV+\frac{2D_1^*a_1-2D_2^*a_2}{V}\right) & 0 & -a_r \\ -\left(2D_1^*a_1-2D_2^*a_2\right) & -\frac{2D_1^*a_1^2+2D_2^*a_2^2}{V} & 0 & -b_r \\ 0 & MhV & -b_\varphi & -K_\varphi^* \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ r \\ x \\ \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2D_1^*\beta \\ 2D_1^*a_1\beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Rappel des variables :**

- $\alpha(t)$ : angle au vent (direction de la vitesse du centre d'inertie par rapport à l'axe longitudinal du véhicule)
- $r(t)$ : vitesse de lacet
- $x(t)$ : vitesse de roulis
- $\varphi(t)$ : angle de roulis
- $\beta(t)$ : angle de braquage de la roue moyenne avant

**Constantes :**

- M = 1590 kg — masse du véhicule
  V en m/s — vitesse d'avance (longitudinale) du véhicule par rapport au repère galiléen, constante pour chaque essai
  h = 0,4760 m — hauteur du centre d'inertie du véhicule au-dessus de l'axe de roulis

- Ixx = 569 kg.m$^2$ — moment d'inertie par rapport à l'axe de roulis
  Izz = 1866 kg.m$^2$ — moment d'inertie en lacet
  Ixz = 0 (hypothèse) — produit d'inertie

- a1 = 1,1410 m — distance du centre d'inertie du véhicule à l'essieu avant
  a2 = 1,6390 m — distance du centre d'inertie du véhicule à l'essieu arrière

- $b_\varphi$ = 4313 N.m.s (/rad) — coefficient d'amortissement en roulis

- $K_\varphi^* = K_\varphi - Mgh$ (en N.m) — raideur apparente antiroulis
  avec $K_\varphi$ = 104313 N.m — raideur totale antiroulis
  g (en m.s$^{-2}$) — accélération de la pesanteur

- $D_1^*$ et $D_2^*$ : rigidités de dérive équivalentes en N ou N/rad, respectivement avant et arrière : $\frac{1}{2D_1^*}=\frac{1}{2D_1}+\frac{1}{2D_1^{'}}$ et $\frac{1}{2D_2^*}=\frac{1}{2D_2}+\frac{1}{2D_2^{'}}$, avec

  - $D_1$ = 65763 N (ou N/rad) et $D_2$ = 58588 N (ou N/rad)
    les rigidités de dérive d'un pneu, respectivement à l'avant et à l'arrière

  - $D_1^{'}$=384615 N (ou N/rad) et $D_2^{'}$ = 363636 N (ou N/rad)
    les rigidités de dérive du train, respectivement avant et arrière

- $a_r$ et $b_r$ : coefficients de couplage entre roulis et, respectivement, dérive et lacet :

$$a_r=\frac{K_\varphi^*}{h}\left[\frac{a_2}{a_1+a_2}2D_1^*\left(\frac{1}{2D_1^{'''}}+\frac{1}{2D_1^{''}}\right)+\frac{a_1}{a_1+a_2}2D_2^*\left(\frac{1}{2D_2^{'''}}+\frac{1}{2D_2^{''}}\right)\right] \quad \text{(en N)}$$

$$b_r=\frac{K_\varphi^*}{h}\left[\frac{a_1\cdot a_2}{a_1+a_2}\left[2D_1^*\left(\frac{1}{2D_1^{'''}}+\frac{1}{2D_1^{''}}\right)-2D_2^*\left(\frac{1}{2D_2^{'''}}+\frac{1}{2D_2^{''}}\right)\right]\right] \quad \text{(en N)}$$

avec, en plus des grandeurs déjà définies :

  - $D_1^{''}$ et $D_2^{''}$ les rigidités équivalentes de braquage induit par le roulis :

$$2D_1^{''}=-\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{K_\varphi^*}{h}\frac{a_2}{a_1+a_2} \quad \text{et} \quad 2D_2^{''}=-\frac{1}{\varepsilon_2}\frac{K_\varphi^*}{h}\frac{a_1}{a_1+a_2} \quad \text{(en N ou N/rad)}$$

    avec $\varepsilon_1$ = -0,0300 et $\varepsilon_2$ = -0,0065
    les coefficients de proportionnalité entre le roulis et le micro-braquage induit par le roulis

  - $D_1^{'''}$ et $D_2^{'''}$ les rigidités équivalentes de carrossage :

$$2D_1^{'''}=\frac{2D_1}{2C_1}\frac{1}{\lambda_1}\frac{K_\varphi^*}{h}\frac{a_2}{a_1+a_2} \quad \text{et} \quad 2D_2^{'''}=\frac{2D_2}{2C_2}\frac{1}{\lambda_2}\frac{K_\varphi^*}{h}\frac{a_1}{a_1+a_2} \quad \text{(en N ou N/rad)}$$

    avec
    - $C_1$ = 1750 N(/rad) et $C_2$ = 1320 N(/rad) les rigidités de carrossage d'un pneu, respectivement à l'avant et à l'arrière
    - $\lambda_1$ = 1,0420 et $\lambda_2$ = 0,8780 les coefficients de proportionnalité entre le roulis et le carrossage, respectivement à l'avant et à l'arrière

# Annexe 7

# Ecriture de modèles de sensibilité par les Tenseurs d'Inertie Globaux – programmes Maple et applications

**Annexe 7.1** Double-pendule orthogonal (sensibilité par rapport à une longueur) 264

**Annexe 7.2** Corps libre (sensibilité par rapport à une inertie) 275

**Annexe 7.3** Véhicule simplifié (sensibilité par rapport à une masse) 288

# Annexe 7.1 Double-pendule orthogonal

Voir Partie 3, paragraphe 3.4.1.

**Nomenclature spécifique à ce fichier (ajouts par rapport à la nomenclature générale et remarques) :**

* "d(rond)Tenseur,Symbole,Numéro" correspond à la dérivée partielle du Tenseur par rapport au Symbole, exprimée dans la base Numéro
* "dTenseur[Numéro en indice],t" correspond à la dérivée totale par rapport au temps, du Tenseur exprimé dans la base Numéro

Le repère d'observation est toujours le repère galiléen R0 (cf §1.4.2 du Tome 1 de la thèse) ; mais dans le cas de la dérivée totale d'un tenseur par rapport au temps, les dérivations de tenseurs seront effectuées dans le repère "Numéro" pour simplifier : en effet, on n'a besoin que de la trace du tenseur dérivé, qui est un invariant.

## Rappel : Equations de la dynamique

*Equation_1_correspondant_au_paramètre_*, $q_1$

$$\left(A1 + m_2 r_2^2 + B2 \cos(q_2)^2\right) Ac_1 + r_2 m_2 l_2 \sin(q_2)\, Ac_2 - 2 \cos(q_2)\, B2 \sin(q_2)\, V_1 V_2 + r_2 m_2 l_2 \cos(q_2)\, V_2^2 = -g\left(-\sin(q_1)\, m_1 l_1 + \sin(q_1)\, m_2 r_2 - \cos(q_2)\, m_2 l_2 \cos(q_1)\right)$$

*Equation_2_correspondant_au_paramètre_*, $q_2$

$$r_2 m_2 l_2 \sin(q_2)\, Ac_1 + B2\, Ac_2 + \frac{1}{2} B2 \sin(2 q_2)\, V_1^2 = -g\, m_2 l_2 \sin(q_2) \sin(q_1)$$

## Choix de x

$$x := l_2$$

## Constitution du système Ay'=f

### Matrice A

$$\begin{bmatrix} 0 & A1 + m_2 r_2^2 + B2 \cos(q_2)^2 & 0 & r_2 m_2 l_2 \sin(q_2) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 m_2 l_2 \sin(q_2) & 0 & B2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

### Vecteur y

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ V_1 \\ q_2 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

### Vecteur f

$$\left[\begin{array}{l} 2\cos(q_2)\,B2\sin(q_2)\,V_1\,V_2 - r_2\,m_2\,l_2\cos(q_2)\,V_2^2 \\ -g\,(-\sin(q_1)\,m_1\,l_1 + \sin(q_1)\,m_2\,r_2 - \cos(q_2)\,m_2\,l_2\cos(q_1))\end{array}\right],\ [V_1],\ \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2}\,B2\sin(2\,q_2)\,V_1^2 - g\,m_2\,l_2\sin(q_2)\sin(q_1)\end{array}\right],\ [V_2]$$

## Dérivation des TIG

### Par rapport aux coordonnées généralisées

$$d(rond)\ G_{11}, q_1, 1 = [-2\,r_2\,m_2\,l_2\cos(q_2), -A1 - m_2\,r_2^2 + B2\cos(q_2)^2, -r_2\,m_2\,l_2\sin(q_2), -m_1\,l_1 + m_2\,r_2],\ [-A1 - m_2\,r_2^2 + B2\cos(q_2)^2, 2\,r_2\,m_2\,l_2\cos(q_2), \cos(q_2)\,B2\sin(q_2), -\cos(q_2)\,m_2\,l_2],\ [-r_2\,m_2\,l_2\sin(q_2), \cos(q_2)\,B2\sin(q_2), 0, 0],\ [-m_1\,l_1 + m_2\,r_2, -\cos(q_2)\,m_2\,l_2, 0, 0]$$

$$d(rond)\ G_{11}, q_2, 2 = \begin{bmatrix} 0 & B2 & 0 & 0 \\ B2 & 0 & -r_2\,m_2\,l_2 & -m_2\,l_2 \\ 0 & -r_2\,m_2\,l_2 & 0 & 0 \\ 0 & -m_2\,l_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d(rond)\ G_{12}, q_1, 2 = \begin{bmatrix} -r_2\,m_2\,l_2\cos(q_2) & 0 & -B2\cos(q_2) & \cos(q_2)\,m_2\,r_2 \\ r_2\,m_2\,l_2\sin(q_2) & 0 & 0 & -\sin(q_2)\,m_2\,r_2 \\ -B2\cos(q_2) & 0 & r_2\,m_2\,l_2\cos(q_2) & \cos(q_2)\,m_2\,l_2 \\ 0 & 0 & \cos(q_2)\,m_2\,l_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d(rond)\ G_{12}, q_2, 2 = \begin{bmatrix} 0 & B2 & 0 & 0 \\ B2 & 0 & 0 & -m_2\,l_2 \\ 0 & -r_2\,m_2\,l_2 & 0 & 0 \\ 0 & -m_2\,l_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d(rond)\ G_{22}, q_1, 2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -B2\cos(q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -B2\cos(q_2) & 0 & 0 & \cos(q_2)\,m_2\,l_2 \\ 0 & 0 & \cos(q_2)\,m_2\,l_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d(rond)\ G_{22}, q_2, 2 = \begin{bmatrix} 0 & B2 & 0 & 0 \\ B2 & 0 & 0 & -m_2 l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_2 l_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.1.1)$$

Ensuite, par projection dans 0, dérivation directe dans 0, puis projection dans 2, on vérifie que tous les termes obtenus sont bien les dérivées dans 0 exprimées dans 2 (sauf d(rond)G11,q1 exprimé dans 1).

## Par rapport à x

$$d(rond)\ G_{11}, l_2, 1 = \begin{bmatrix} 0 & \cos(q_2)\, m_2 r_2 & 0 & -\cos(q_2)\, m_2 \\ \cos(q_2)\, m_2 r_2 & 0 & \sin(q_2)\, m_2 r_2 & 0 \\ 0 & \sin(q_2)\, m_2 r_2 & 0 & -\sin(q_2)\, m_2 \\ -\cos(q_2)\, m_2 & 0 & -\sin(q_2)\, m_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d(rond)\ G_{12}, l_2, 2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -m_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m_2 r_2 & 0 & 0 & 0 \\ -m_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, d(rond)\ G_{22}, l_2, 2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -m_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.1)$$

Remarque : à la différence des dérivations par rapport aux qi, la dérivation directe par rapport à x (pour vérification) peut être effectuée dans n'importe quel repère de projection puisque x n'intervient pas dans les changements de base.

## Par rapport au temps

$$d(rond)\ G_{11}, t, 1 = [-2\, B2 \cos(q_2(t)) \sin(q_2(t)) \left(\frac{d}{dt} q_2(t)\right),$$
$$-r_2 m_2 l_2 \sin(q_2(t)) \left(\frac{d}{dt} q_2(t)\right), \left(\frac{d}{dt} q_2(t)\right) B2 \left(-1 + 2\cos(q_2(t))^2\right),$$
$$\sin(q_2(t)) \left(\frac{d}{dt} q_2(t)\right) m_2 l_2], [-r_2 m_2 l_2 \sin(q_2(t)) \left(\frac{d}{dt} q_2(t)\right), 0,$$
$$r_2 m_2 l_2 \cos(q_2(t)) \left(\frac{d}{dt} q_2(t)\right), 0], [\left(\frac{d}{dt} q_2(t)\right) B2 \left(-1 + 2\cos(q_2(t))^2\right),$$
$$r_2 m_2 l_2 \cos(q_2(t)) \left(\frac{d}{dt} q_2(t)\right), 2\, B2 \cos(q_2(t)) \sin(q_2(t)) \left(\frac{d}{dt} q_2(t)\right),$$
$$-\cos(q_2(t)) \left(\frac{d}{dt} q_2(t)\right) m_2 l_2], [\sin(q_2(t)) \left(\frac{d}{dt} q_2(t)\right) m_2 l_2, 0,$$

$$-\cos(q_2(t))\left(\frac{d}{dt}q_2(t)\right)m_2 l_2, 0]$$

$$d(rond)\,G_{12}, t, 2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, d(rond)\,G_{22}, t, 2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.1)$$

# Dérivation du torseur géométrique

## Par rapport aux coordonnées généralisées

Un seul tenseur est différent du tenseur nul (puisque les liaisons complexes ne sont pas envisagées dans ce programme) :

$$d(rond)\,Dollar1O1, q_1, 1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, d(rond)\,Dollar2O2, q_2, 2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d(rond)\,Dollar2O2, q_1, 2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin(q_2) & 0 \\ 0 & 0 & -\cos(q_2) & 0 \\ \sin(q_2) & \cos(q_2) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.1.1)$$

## Par rapport à x

Tous les tenseurs sont nuls ici, car les liaisons complexes ne sont pas envisagées.

## Par rapport au temps (dérivée totale)

Seule la matrice suivante est différente de la matrice nulle :

$$dDollar1O1_2, t = [0, 0, -\sin(q_2(t))\left(\frac{d}{dt}q_2(t)\right), 0], [0, 0, -\cos(q_2(t))\left(\frac{d}{dt}q_2(t)\right), 0], \quad (5.3.1)$$

$$[\sin(q_2(t))\left(\frac{d}{dt}q_2(t)\right), \cos(q_2(t))\left(\frac{d}{dt}q_2(t)\right), 0, 0]$$

# Dérivation du torseur géométrique dérivé

## Par rapport aux coordonnées généralisées

Un seul tenseur est différent du tenseur nul (puisque les liaisons complexes ne sont pas envisagées dans ce programme) :

$$d(rond)\,DollarPr1O1, q_1, 1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d(rond)\ DollarPr2O2, q_2, 2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d(rond)\ DollarPr2O2, q_1, 2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos(q_2) & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(q_2) & 0 \\ \cos(q_2) & -\sin(q_2) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.1.1)$$

### Par rapport à x

Tous les tenseurs sont nuls ici, car les liaisons complexes ne sont pas envisagées.

## Dérivation des actions mécaniques

### Par rapport aux coordonnées généralisées

$$d(rond)\ Q_1, q_1 = -\cos(q_2)\ m_2\ l_2 \sin(q_1)\ g - (-m_1\ l_1 + m_2\ r_2) \cos(q_1)\ g$$

$$d(rond)\ Q_1, q_2 = -\sin(q_2)\ m_2\ l_2 \cos(q_1)\ g$$

$$d(rond)\ Q_2, q_1 = -\sin(q_2)\ m_2\ l_2 \cos(q_1)\ g$$

$$d(rond)\ Q_2, q_2 = -\cos(q_2)\ m_2\ l_2 \sin(q_1)\ g \quad (7.1.1)$$

### Par rapport à x

$$d(rond)\ Q_1, l_2 = g \cos(q_2)\ m_2 \cos(q_1)$$

$$d(rond)\ Q_2, l_2 = -g\ m_2 \sin(q_2) \sin(q_1) \quad (7.2.1)$$

## Construction des vecteurs et matrices présents dans les équations

### Matrice J

#### *Dérivée du tenseur cinétique*

Tous les tenseurs sont à présent exprimés dans 2 :

$$d(rond)\ K_{11}, q_1, 2 = [2 \cos(q_2)^3\ r_2\ m_2\ l_2, -2 \cos(q_2)^2\ r_2\ m_2\ l_2 \sin(q_2),$$
$$-\left(-B2 \cos(q_2)^2 + A1 + m_2\ r_2^2\right) \cos(q_2)], [-2 \cos(q_2)^2\ r_2\ m_2\ l_2 \sin(q_2),$$
$$2 \sin(q_2)^2\ r_2\ m_2\ l_2 \cos(q_2), \left(-B2 \cos(q_2)^2 + A1 + m_2\ r_2^2\right) \sin(q_2)], [$$
$$-\left(-B2 \cos(q_2)^2 + A1 + m_2\ r_2^2\right) \cos(q_2), \left(-B2 \cos(q_2)^2 + A1 + m_2\ r_2^2\right) \sin(q_2),$$
$$-2\ r_2\ m_2\ l_2 \cos(q_2)]$$

$$d(rond)\,K_{11}, q_2, 2 = [0, 0, -r_2 m_2 l_2 \cos(q_2) \sin(q_2)], [0, 0, r_2 m_2 l_2 \sin(q_2)^2], [$$
$$-r_2 m_2 l_2 \cos(q_2) \sin(q_2), r_2 m_2 l_2 \sin(q_2)^2, -2 \cos(q_2)\, B2 \sin(q_2)]$$

$$d(rond)\,K_{12}, q_1, 2 = \begin{bmatrix} 0 & -B2 \cos(q_2)^2 & -r_2 m_2 l_2 \cos(q_2) \sin(q_2) \\ 0 & \cos(q_2)\, B2 \sin(q_2) & r_2 m_2 l_2 \sin(q_2)^2 \\ 0 & r_2 m_2 l_2 & -\cos(q_2)\, B2 \sin(q_2) \end{bmatrix}$$

$$d(rond)\,K_{12}, q_2, 2 = \begin{bmatrix} r_2 m_2 l_2 \cos(q_2) & 0 & 0 \\ -r_2 m_2 l_2 \sin(q_2) & 0 & 0 \\ B2 \cos(q_2) & B2 \sin(q_2) & 0 \end{bmatrix}$$

$$d(rond)\,K_{22}, q_1, 2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B2 \sin(q_2) \\ 0 & B2 \sin(q_2) & 0 \end{bmatrix}$$

$$d(rond)\,K_{22}, q_2, 2 = \begin{bmatrix} 0 & -B2 & 0 \\ -B2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (8.1.1.1)$$

## *Dérivées des symboles de Christoffel*

Les dérivées non nulles sont les suivantes :

$$d(rond)\,\Gamma 112, q_2 = d(rond)\,\Gamma 121, q_2 = -\cos(2 q_2)\, B2$$

$$d(rond)\,\Gamma 122, q_2 = -r_2 m_2 l_2 \sin(q_2)$$

$$d(rond)\,\Gamma 211, q_2 = \cos(2 q_2)\, B2 \qquad (8.1.2.1)$$

## *Calcul de J*

$$[-g\,(-\cos(q_1)\, m_1 l_1 + \cos(q_1)\, m_2 r_2 + \cos(q_2)\, m_2 l_2 \sin(q_1)),$$
$$2 \cos(q_2)\, B2 \sin(q_2)\, V_2,$$
$$2 \cos(2 q_2)\, B2\, V_1 V_2 + r_2 m_2 l_2 \sin(q_2)\, V_2^2 - \sin(q_2)\, m_2 l_2 \cos(q_1)\, g,$$
$$-2 \cos(q_2)\, (-B2 \sin(q_2)\, V_1 + r_2 m_2 l_2 V_2)], [0, 1, 0, 0], [$$
$$-\sin(q_2)\, m_2 l_2 \cos(q_1)\, g, -B2 \sin(2 q_2)\, V_1,$$
$$-\cos(2 q_2)\, B2\, V_1^2 - \cos(q_2)\, m_2 l_2 \sin(q_1)\, g, 0], [0, 0, 0, 1]$$

## Matrice B

### *Matrice dérivée de A par rapport aux coordonnées généralisées*

$$d(rond)\ MatriceA, q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d(rond)\ MatriceA, q_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2\cos(q_2)\ B2\sin(q_2) & 0 & r_2 m_2 l_2 \cos(q_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 m_2 l_2 \cos(q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (8.2.1.1)$$

### *Remplissage de B*

$$MatriceB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2\cos(q_2)\ B2\sin(q_2)\ Ac_1 + r_2 m_2 l_2 \cos(q_2)\ Ac_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_2 m_2 l_2 \cos(q_2)\ Ac_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (8.2.2.1)$$

## Matrice dérivée de A par rapport à x

### *Dérivée de Kij par rapport à x*

$$d(rond)\ K_{11}, l_2, 1 = \begin{bmatrix} 0 & -\cos(q_2)\ m_2 r_2 & 0 \\ -\cos(q_2)\ m_2 r_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d(rond)\ K_{12}, l_2, 2 = \begin{bmatrix} 0 & -\cos(q_2)\ m_2 r_2 & 0 \\ 0 & \sin(q_2)\ m_2 r_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d(rond)\ K_{22}, l_2, 2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (8.3.1.1)$$

### *Calcul de d(rond)A,x*

$$d(rond)\ MatriceA, l_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \sin(q_2)\, m_2\, r_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(q_2)\, m_2\, r_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.3.2.1)$$

## Vecteur dérivé de f par rapport à x

### *Dérivée des symboles de Christoffel*

La seule dérivée non nulle est la suivante :

$$d(rond)\ \Gamma 122, l_2 = \cos(q_2)\, m_2\, r_2 \quad (8.4.1.1)$$

### *Calcul de d(rond)f,x*

$$d(rond)\ f, l_2 = \begin{bmatrix} \cos(q_2)\, m_2 \left(-r_2 V_2^2 + \cos(q_1)\, g\right) \\ 0 \\ -g\, m_2 \sin(q_2) \sin(q_1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.4.2.1)$$

## Matrice dAdt (uniquement pour méthode adjointe)(dérivée totale)

### *Dérivée de Kij par rapport à t (dérivée totale)*

$$dK11_1, t = [0, r_2\, m_2\, l_2 \sin(q_2(t)) \left(\frac{d}{dt} q_2(t)\right), 0], [r_2\, m_2\, l_2 \sin(q_2(t)) \left(\frac{d}{dt} q_2(t)\right),$$

$$-2\, B2 \cos(q_2(t)) \sin(q_2(t)) \left(\frac{d}{dt} q_2(t)\right), 0], [0, 0, 0]$$

$$dK12_2, t = \begin{bmatrix} 0 & r_2\, m_2\, l_2 \sin(q_2(t)) \left(\frac{d}{dt} q_2(t)\right) & 0 \\ 0 & r_2\, m_2\, l_2 \cos(q_2(t)) \left(\frac{d}{dt} q_2(t)\right) & 0 \\ 0 & \sin(q_2(t)) \left(\frac{d}{dt} q_2(t)\right) B2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$dK22_2, t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.5.1.1)$$

### *Calcul de dA/dt*

$$dMatriceA, t = [0, -2\, B2 \cos(q_2(t)) \sin(q_2(t)) \left(\frac{d}{dt} q_2(t)\right), 0, \quad (8.5.2.1)$$

$$r_2 m_2 l_2 \cos(q_2(t)) \left(\frac{d}{dt} q_2(t)\right)], [0, 0, 0, 0], [0, r_2 m_2 l_2 \cos(q_2(t)) \left(\frac{d}{dt} q_2(t)\right),$$

$$0, 0], [0, 0, 0, 0]$$

# Ecriture du système de sensibilité

## Définition des différents vecteurs de variables

$$Vecteur\ d\ etat\ y = \begin{bmatrix} q_1 \\ V_1 \\ q_2 \\ V_2 \end{bmatrix}, Vecteur\ detat\ derive\ yprime = \begin{bmatrix} V_1 \\ Ac_1 \\ V_2 \\ Ac_2 \end{bmatrix}$$

$$Vecteur\ sensibilites\ u = \begin{bmatrix} u_{q_1} \\ Vu_{q_1} \\ u_{q_2} \\ Vu_{q_2} \end{bmatrix}, Vecteur\ sensibilites\ derive\ uprime = \begin{bmatrix} Vu_{q_1} \\ Acu_{q_1} \\ Vu_{q_2} \\ Acu_{q_2} \end{bmatrix} \quad (9.1.1)$$

## Ecriture des équations de sensibilité

$$Terme1 := \begin{bmatrix} \left(A1 + m_2 r_2^2 + B2 \cos(q_2)^2\right) Acu_{q_1} + r_2 m_2 l_2 \sin(q_2) Acu_{q_2} \\ Vu_{q_1} \\ r_2 m_2 l_2 \sin(q_2) Acu_{q_1} + B2\, Acu_{q_2} \\ Vu_{q_2} \end{bmatrix}$$

$$Terme2$$

$$:= [$$

$$-g \left(-\cos(q_1) m_1 l_1 + \cos(q_1) m_2 r_2 + \cos(q_2) m_2 l_2 \sin(q_1)\right) u_{q_1}$$

$$+ 2 \cos(q_2) B2 \sin(q_2) V_2 Vu_{q_1}$$

$$+ \left(2 \cos(2 q_2) B2 V_1 V_2 + r_2 m_2 l_2 \sin(q_2) V_2^2 - \sin(q_2) m_2 l_2 \cos(q_1) g\right.$$

$$\left. + 2 \cos(q_2) B2 \sin(q_2) Ac_1 - r_2 m_2 l_2 \cos(q_2) Ac_2\right) u_{q_2} - 2 \cos(q_2) \left(-B2 \sin(q_2)\right.$$

$$V_1 + r_2\, m_2\, l_2\, V_2)\; Vu_{q_2}], [Vu_{q_1}], [$$

$$-\sin(q_2)\, m_2\, l_2 \cos(q_1)\, g\, u_{q_1} - B2 \sin(2\, q_2)\, V_1\, Vu_{q_1}$$

$$+ \left(-\cos(2\, q_2)\, B2\, V_1^2 - \cos(q_2)\, m_2\, l_2 \sin(q_1)\, g - r_2\, m_2\, l_2 \cos(q_2)\, Ac_1\right) u_{q_2}], [Vu_{q_2}]$$

$$Terme3 := \begin{bmatrix} \sin(q_2)\, m_2\, r_2\, Ac_2 \\ 0 \\ \sin(q_2)\, m_2\, r_2\, Ac_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Terme4 := \begin{bmatrix} \cos(q_2)\, m_2 \left(-r_2\, V_2^2 + \cos(q_1)\, g\right) \\ 0 \\ -g\, m_2 \sin(q_2) \sin(q_1) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Par conséquent :

$$Equation_de_sensibilite1_correspondant_au_paramètre_, q_1$$

$$\left(A1 + m_2\, r_2^2 + B2 \cos(q_2)^2\right) Acu_{q_1} + r_2\, m_2\, l_2 \sin(q_2)\, Acu_{q_2}$$

$$+ g \left(-\cos(q_1)\, m_1\, l_1 + \cos(q_1)\, m_2\, r_2 + \cos(q_2)\, m_2\, l_2 \sin(q_1)\right) u_{q_1}$$

$$-2 \cos(q_2)\, B2 \sin(q_2)\, V_2\, Vu_{q_1}$$

$$-\left(2 \cos(2\, q_2)\, B2\, V_1\, V_2 + r_2\, m_2\, l_2 \sin(q_2)\, V_2^2 - \sin(q_2)\, m_2\, l_2 \cos(q_1)\, g\right.$$

$$\left. + 2 \cos(q_2)\, B2 \sin(q_2)\, Ac_1 - r_2\, m_2\, l_2 \cos(q_2)\, Ac_2\right) u_{q_2} + 2 \cos(q_2) \left(-B2 \sin(q_2)\right.$$

$$\left. V_1 + r_2\, m_2\, l_2\, V_2\right) Vu_{q_2} + \sin(q_2)\, m_2\, r_2\, Ac_2 - \cos(q_2)\, m_2 \left(-r_2\, V_2^2 + \cos(q_1)\, g\right) = 0$$

$$Equation_de_sensibilite3_correspondant_au_paramètre_, q_2$$

$$r_2\, m_2\, l_2 \sin(q_2)\, Acu_{q_1} + B2\, Acu_{q_2} + \sin(q_2)\, m_2\, l_2 \cos(q_1)\, g\, u_{q_1}$$

$$+ B2 \sin(2\, q_2)\, V_1\, Vu_{q_1}$$

$$-\left(-\cos(2\, q_2)\, B2\, V_1^2 - \cos(q_2)\, m_2\, l_2 \sin(q_1)\, g - r_2\, m_2\, l_2 \cos(q_2)\, Ac_1\right) u_{q_2}$$

$$+ \sin(q_2)\, m_2\, r_2\, Ac_1 + g\, m_2 \sin(q_2) \sin(q_1) = 0$$

## Vérification en dérivant directement le modèle dynamique obtenu

**précédemment**

*Equation_de_sensibilite1_correspondant_au_paramètre_*, $q_1$

$$-2\,B2\cos(q_2)\sin(q_2)\,u_{q_2}\,Ac_1+\left(A1+m_2\,r_2^2+B2\cos(q_2)^2\right)Acu_{q_1}$$
$$+\sin(q_2)\,m_2\,r_2\,Ac_2+r_2\,m_2\,l_2\cos(q_2)\,u_{q_2}\,Ac_2+r_2\,m_2\,l_2\sin(q_2)\,Acu_{q_2}$$
$$+2\sin(q_2)^2\,u_{q_2}\,B2\,V_1\,V_2-2\cos(q_2)^2\,B2\,u_{q_2}\,V_1\,V_2-2\cos(q_2)\,B2\sin(q_2)\,V_2\,Vu_{q_1}$$
$$-2\cos(q_2)\,B2\sin(q_2)\,V_1\,Vu_{q_2}+r_2\,m_2\cos(q_2)\,V_2^2-r_2\,m_2\,l_2\sin(q_2)\,u_{q_2}\,V_2^2$$
$$+2\,r_2\,m_2\,l_2\cos(q_2)\,V_2\,Vu_{q_2}$$
$$+g\left(-\cos(q_1)\,u_{q_1}\,m_1\,l_1+\cos(q_1)\,u_{q_1}\,m_2\,r_2\right.$$
$$\left.+\sin(q_2)\,u_{q_2}\,m_2\,l_2\cos(q_1)-\cos(q_2)\,m_2\cos(q_1)+\cos(q_2)\,m_2\,l_2\sin(q_1)\,u_{q_1}\right)=$$
$$0$$

*Equation_de_sensibilite2_correspondant_au_paramètre_*, $V_1$

$$\sin(q_2)\,m_2\,r_2\,Ac_1+r_2\,m_2\,l_2\cos(q_2)\,u_{q_2}\,Ac_1+r_2\,m_2\,l_2\sin(q_2)\,Acu_{q_1}+B2\,Acu_{q_2} \qquad (9.3.1)$$
$$+B2\cos(2\,q_2)\,u_{q_2}\,V_1^2+B2\sin(2\,q_2)\,V_1\,Vu_{q_1}+g\,m_2\sin(q_2)\sin(q_1)$$
$$+g\,m_2\,l_2\cos(q_2)\,u_{q_2}\sin(q_1)+\sin(q_2)\,m_2\,l_2\cos(q_1)\,g\,u_{q_1}=0$$

**Conclusion : les équations de sensibilité obtenues sont idéntiques par les deux méthodes, mais elles sont mieux factorisées et ordonnées lorsqu'elles obtenues grâce aux TIG.**

# Annexe 7.2 Corps libre

Voir Partie 3, paragraphe 3.4.2.1.

**Nomenclature spécifique à ce fichier (ajouts par rapport à la nomenclature générale et remarques) :**

* "d(rond)Tenseur,Symbole" correspond à la dérivée partielle du Tenseur par rapport au Symbole ; on sous-entend donc :
* "dTenseur,t" ou "dTableau,t" correspondent à la dérivée totale par rapport au temps :

On sous-entend donc :

- la base d'expression (s'il y en a une !) qui est toujours ici la base S liée au corps libre
- le repère d'observation des dérivées qui est toujours le repère galiléen R0 (cf §1.4.2 du Tome1 de la thèse) ; cependant, dans le cas de la dérivée totale d'un tenseur par rapport au temps, les dérivations seront effectuées dans le repère S pour simplifier : en effet, on n'a besoin que de la trace du tenseur dérivé, qui est un invariant.

## Rappel : Equations de la dynamique

*Equation_1_correspondant_au_paramètre_, Pix*

$$A1\,Ac_1 - F1\,Ac_2 - E1\,Ac_3 - E1\,wx\,wy - D1\,wy^2 + \left(-\frac{1}{2}A1 - \frac{1}{2}B1 + \frac{1}{2}C1\right) wy\,wz + F1\,wx\,wz + \left(\frac{1}{2}C1 + \frac{1}{2}A1 - \frac{1}{2}B1\right) wy\,wz + D1\,wz^2 = 0$$

*Equation_2_correspondant_au_paramètre_, Piy*

$$-F1\,Ac_1 + B1\,Ac_2 - D1\,Ac_3 + E1\,wx^2 + D1\,wx\,wy + \left(\frac{1}{2}A1 + \frac{1}{2}B1 - \frac{1}{2}C1\right) wx\,wz + \left(-\frac{1}{2}B1 - \frac{1}{2}C1 + \frac{1}{2}A1\right) wx\,wz - F1\,wy\,wz - E1\,wz^2 = 0$$

*Equation_3_correspondant_au_paramètre_, Piz*

$$-E1\,Ac_1 - D1\,Ac_2 + C1\,Ac_3 - F1\,wx^2 + \left(-\frac{1}{2}C1 - \frac{1}{2}A1 + \frac{1}{2}B1\right) wx\,wy - D1\,wx\,wz + \left(\frac{1}{2}B1 + \frac{1}{2}C1 - \frac{1}{2}A1\right) wx\,wy + F1\,wy^2 + E1\,wy\,wz = 0$$

## Choix de x

$$x := A1$$

## Constitution du système Ay'=f

### Matrice A

$$\begin{bmatrix} 0 & A1 & 0 & -F1 & 0 & -E1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -F1 & 0 & B1 & 0 & -D1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E1 & 0 & -D1 & 0 & C1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

### Vecteur y

$$\begin{bmatrix} Pix \\ wx \\ Piy \\ wy \\ Piz \\ wz \end{bmatrix}$$

### Vecteur f

$$\left[ E1\,wx\,wy + D1\,wy^2 - \left(-\frac{1}{2}A1 - \frac{1}{2}B1 + \frac{1}{2}C1\right) wy\,wz - F1\,wx\,wz - \left(\frac{1}{2}C1 + \frac{1}{2}A1 - \frac{1}{2}B1\right) wy\,wz - D1\,wz^2 \right], [wx], \left[ -E1\,wx^2 - D1\,wx\,wy - \left(\frac{1}{2}A1 + \frac{1}{2}B1 - \frac{1}{2}C1\right) wx\,wz - \left(-\frac{1}{2}B1 - \frac{1}{2}C1 + \frac{1}{2}A1\right) wx\,wz + F1\,wy\,wz + E1\,wz^2 \right], [wy], \left[ F1\,wx^2 - \left(-\frac{1}{2}C1 - \frac{1}{2}A1 + \frac{1}{2}B1\right) wx\,wy + D1\,wx\,wz - \left(\frac{1}{2}B1 + \frac{1}{2}C1 - \frac{1}{2}A1\right) wx\,wy - F1\,wy^2 - E1\,wy\,wz \right], [wz]$$

# Dérivation des TIG

## Par rapport aux coordonnées généralisées

$$d(rond)\ G_{SS}, Pix = \begin{bmatrix} 0 & -E1 & F1 & 0 \\ -E1 & -2\,D1 & -B1+C1 & 0 \\ F1 & -B1+C1 & 2\,D1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d(rond)\ G_{SS}, Piy = \begin{bmatrix} 2\,E1 & D1 & A1-C1 & 0 \\ D1 & 0 & -F1 & 0 \\ A1-C1 & -F1 & -2\,E1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d(rond)\ G_{SS}, Piz = \begin{bmatrix} -2\,F1 & -A1+B1 & -D1 & 0 \\ -A1+B1 & 2\,F1 & E1 & 0 \\ -D1 & E1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.1.1)$$

Dans le cas où Pix et Piy sont nuls, on vérifie que la 3ème matrice présentée est bien la dérivée du TIG dans 0, exprimée dans S : on projette dans 0, on dérive, on re-projette dans S. Si Pix et Piy ne sont pas nuls, les figures planes ne peuvent être tracées et les changements de base sont donc pénibles.

### Par rapport à x

$$d(rond)\ G_{SS}, A1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.1)$$

Remarque : à la différence des dérivations par rapport aux πi, la dérivation directe par rapport à x (pour vérification) peut être effectuée dans n'importe quel repère de projection puisque x n'intervient pas dans les changements de base.

### Par rapport au temps

$$d(rond)\ G_{SS}, t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.1)$$

## Dérivation du torseur géométrique

### Par rapport aux coordonnées généralisées

Comme les liaisons complexes ne sont pas traitées ici, on a :

$$d(rond)\ Dollar1, Pix = d(rond)\ Dollar2, Piy = d(rond)\ Dollar3, Piz = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.1.1)$$

Puis les autres matrices sont antisymétriques, et opposées 2 à 2 :

$$d(rond)\ Dollar1, Piy = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, d(rond)\ Dollar2, Pix = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d(rond)\ Dollar1, Piz = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, d(rond)\ Dollar3, Pix = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d(rond)\ Dollar2, Piz = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, d(rond)\ Dollar3, Piy = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.1.2)$$

### Par rapport à x

Tous les tenseurs sont nuls ici, car les liaisons complexes ne sont pas envisagées.

### Par rapport au temps (dérivée totale)

Toutes les matrices dérivées dans S sont nulles.

## Dérivation du torseur géométrique dérivé

Inutile ici : la matrice issue du torseur géométrique dérivé n'intervient pas dans la méthode pour le corps libre.

## Dérivation des actions mécaniques

Le résultat est toujours nul puisque les actions mécaniques imposées sont nulles dans le cas du corps libre.

## Construction des vecteurs et matrices présents dans les équations

### Matrice J

#### *Dérivée du tenseur cinétique*

$$d(rond)\,K_{11},Pix=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2\,D1 & B1-C1\\ 0 & B1-C1 & -2\,D1\end{bmatrix}$$

$$d(rond)\,K_{11},Piy=\begin{bmatrix}0 & -D1 & \frac{1}{2}\,C1+\frac{1}{2}\,A1-\frac{1}{2}\,B1\\ -D1 & 0 & 0\\ \frac{1}{2}\,C1+\frac{1}{2}\,A1-\frac{1}{2}\,B1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$d(rond)\,K_{11},Piz=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{2}\,A1-\frac{1}{2}\,B1+\frac{1}{2}\,C1 & D1\\ -\frac{1}{2}\,A1-\frac{1}{2}\,B1+\frac{1}{2}\,C1 & 0 & 0\\ D1 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad (8.1.1.1)$$

$$d(rond)\,K_{12},Pix=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ -D1 & -E1 & F1\\ -\frac{1}{2}\,A1-\frac{1}{2}\,B1+\frac{1}{2}\,C1 & F1 & E1\end{bmatrix}$$

$$d(rond)\,K_{12},Piy=\begin{bmatrix}D1 & 0 & -F1\\ E1 & 0 & \frac{1}{2}\,A1+\frac{1}{2}\,B1-\frac{1}{2}\,C1\\ -F1 & 0 & -D1\end{bmatrix}$$

$$d(rond)\,K_{12},Piz=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\,A1+\frac{1}{2}\,B1-\frac{1}{2}\,C1 & 0 & -E1\\ 0 & -\frac{1}{2}\,A1-\frac{1}{2}\,B1+\frac{1}{2}\,C1 & 0\\ 0 & D1 & 0\end{bmatrix} \qquad (8.1.1.2)$$

$$d(rond)\,K_{13},Pix=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ \frac{1}{2}\,C1+\frac{1}{2}\,A1-\frac{1}{2}\,B1 & -F1 & -E1\\ D1 & -E1 & F1\end{bmatrix}$$

$$d(rond)\,K_{13},Piy=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\,C1-\frac{1}{2}\,A1+\frac{1}{2}\,B1 & F1 & 0 \\ 0 & 0 & -D1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\,C1+\frac{1}{2}\,A1-\frac{1}{2}\,B1 \end{bmatrix}$$

$$d(rond)\,K_{13},Piz=\begin{bmatrix} -D1 & E1 & 0 \\ E1 & D1 & 0 \\ -F1 & -\frac{1}{2}\,C1-\frac{1}{2}\,A1+\frac{1}{2}\,B1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (8.1.1.3)$$

$$d(rond)\,K_{21},Pix=\begin{bmatrix} 0 & -D1 & -\frac{1}{2}\,A1-\frac{1}{2}\,B1+\frac{1}{2}\,C1 \\ 0 & -E1 & F1 \\ 0 & F1 & E1 \end{bmatrix}$$

$$d(rond)\,K_{21},Piy=\begin{bmatrix} D1 & E1 & -F1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -F1 & \frac{1}{2}\,A1+\frac{1}{2}\,B1-\frac{1}{2}\,C1 & -D1 \end{bmatrix}$$

$$d(rond)\,K_{21},Piz=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\,A1+\frac{1}{2}\,B1-\frac{1}{2}\,C1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\,A1-\frac{1}{2}\,B1+\frac{1}{2}\,C1 & D1 \\ -E1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (8.1.1.4)$$

$$d(rond)\,K_{22},Pix=\begin{bmatrix} 0 & E1 & 0 \\ E1 & 0 & -\frac{1}{2}\,B1-\frac{1}{2}\,C1+\frac{1}{2}\,A1 \\ 0 & -\frac{1}{2}\,B1-\frac{1}{2}\,C1+\frac{1}{2}\,A1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d(rond)\,K_{22},Piy=\begin{bmatrix} -2\,E1 & 0 & -A1+C1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -A1+C1 & 0 & 2\,E1 \end{bmatrix}$$

(8.1.1.5)

$$d(rond)\ K_{22}, Piz = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} A1 + \frac{1}{2} B1 - \frac{1}{2} C1 & 0 \\ \frac{1}{2} A1 + \frac{1}{2} B1 - \frac{1}{2} C1 & 0 & -E1 \\ 0 & -E1 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.1.1.5)$$

$$d(rond)\ K_{23}, Pix = \begin{bmatrix} 0 & 0 & E1 \\ -F1 & \frac{1}{2} B1 + \frac{1}{2} C1 - \frac{1}{2} A1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} B1 - \frac{1}{2} C1 + \frac{1}{2} A1 \end{bmatrix}$$

$$d(rond)\ K_{23}, Piy = \begin{bmatrix} F1 & -\frac{1}{2} B1 - \frac{1}{2} C1 + \frac{1}{2} A1 & D1 \\ 0 & 0 & 0 \\ D1 & -E1 & -F1 \end{bmatrix}$$

$$d(rond)\ K_{23}, Piz = \begin{bmatrix} -E1 & -D1 & 0 \\ -D1 & E1 & 0 \\ \frac{1}{2} B1 + \frac{1}{2} C1 - \frac{1}{2} A1 & F1 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.1.1.6)$$

$$d(rond)\ K_{31}, Pix = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} C1 + \frac{1}{2} A1 - \frac{1}{2} B1 & D1 \\ 0 & -F1 & -E1 \\ 0 & -E1 & F1 \end{bmatrix}$$

$$d(rond)\ K_{31}, Piy = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} C1 - \frac{1}{2} A1 + \frac{1}{2} B1 & 0 & 0 \\ F1 & 0 & 0 \\ 0 & -D1 & \frac{1}{2} C1 + \frac{1}{2} A1 - \frac{1}{2} B1 \end{bmatrix}$$

$$d(rond)\ K_{31}, Piz = \begin{bmatrix} -D1 & E1 & -F1 \\ E1 & D1 & -\frac{1}{2} C1 - \frac{1}{2} A1 + \frac{1}{2} B1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.1.1.7)$$

$$d(rond)\,K_{32},Pix=\begin{bmatrix}0 & -F1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}B1+\frac{1}{2}C1-\frac{1}{2}A1 & 0\\ E1 & 0 & -\frac{1}{2}B1-\frac{1}{2}C1+\frac{1}{2}A1\end{bmatrix}$$

$$d(rond)\,K_{32},Piy=\begin{bmatrix}F1 & 0 & D1\\ -\frac{1}{2}B1-\frac{1}{2}C1+\frac{1}{2}A1 & 0 & -E1\\ D1 & 0 & -F1\end{bmatrix}$$

$$d(rond)\,K_{32},Piz=\begin{bmatrix}-E1 & -D1 & \frac{1}{2}B1+\frac{1}{2}C1-\frac{1}{2}A1\\ -D1 & E1 & F1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad (8.1.1.8)$$

$$d(rond)\,K_{33},Pix=\begin{bmatrix}0 & 0 & -F1\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}B1+\frac{1}{2}C1-\frac{1}{2}A1\\ -F1 & \frac{1}{2}B1+\frac{1}{2}C1-\frac{1}{2}A1 & 0\end{bmatrix}$$

$$d(rond)\,K_{33},Piy=\begin{bmatrix}0 & 0 & -\frac{1}{2}C1-\frac{1}{2}A1+\frac{1}{2}B1\\ 0 & 0 & F1\\ -\frac{1}{2}C1-\frac{1}{2}A1+\frac{1}{2}B1 & F1 & 0\end{bmatrix}$$

$$d(rond)\,K_{33},Piz=\begin{bmatrix}2F1 & A1-B1 & 0\\ A1-B1 & -2F1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad (8.1.1.9)$$

## *Dérivées des symboles de Christoffel*

Toutes les dérivées sont nulles.

## *Calcul de J*

$$[0, E1\,wy-F1\,wz, 0, E1\,wx+2\,D1\,wy+wz\,B1-wz\,C1, 0, -F1\,wx+wy\,B1-wy\,C1-2\,D1\,wz], [0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, -2\,E1\,wx-D1\,wy-wz\,A1+wz\,C1, 0, -D1\,wx+F1\,wz, 0, -wx\,A1+wx\,C1+F1\,wy+2\,E1\,wz], [0, 0, 0, 1, 0, 0], [0,$$

$$2\,F1\,wx + wy\,A1 - wy\,B1 + D1\,wz,\ 0,\ wx\,A1 - wx\,B1 - 2\,F1\,wy - E1\,wz,\ 0,$$
$$D1\,wx - E1\,wy],\ [0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1]$$

## Matrice B

### *Matrice dérivée de A par rapport aux coordonnées généralisées*

Elle est toujours nulle quelle que soit le pseudo-paramètre envisagé.

>

### *Remplissage de B*

$$MatriceB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (8.2.2.1)$$

## Matrice dérivée de A par rapport à x

### *Dérivée de Kij par rapport à x*

$$d(rond)\,K_{11}, A1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad d(rond)\,K_{22}, A1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$d(rond)\,K_{33}, A1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d(rond)\,K_{12}, A1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad d(rond)\,K_{21}, A1 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d(rond)\,K_{13}, A1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad d(rond)\,K_{31}, A1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d(rond)\,K_{23}, A1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, d(rond)\,K_{32}, A1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.3.1.1)$$

### *Calcul de d(rond)A,x*

$$d(rond)\,MatriceA, A1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.3.2.1)$$

## Vecteur dérivé de f par rapport à x

### *Dérivée des symboles de Christoffel*

Les dérivées non nulles sont les suivantes :

$$d(rond)\,\Gamma 123, A1 = -\frac{1}{2}, d(rond)\,\Gamma 132, A1 = \frac{1}{2}$$

$$d(rond)\,\Gamma 213, A1 = \frac{1}{2}, d(rond)\,\Gamma 231, A1 = \frac{1}{2}$$

$$d(rond)\,\Gamma 312, A1 = -\frac{1}{2}, d(rond)\,\Gamma 321, A1 = -\frac{1}{2} \quad (8.4.1.1)$$

### *Calcul de d(rond)f,x*

$$d(rond)\,f, A1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -wx\,wz \\ 0 \\ wx\,wy \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.4.2.1)$$

## Matrice dAdt (uniquement pour méthode adjointe) (dérivée totale)

### *Dérivée de Kij par rapport à t (dérivée totale)*

Toutes les matrices dérivées sont nulles.

### *Calcul de dA/dt*

$$dMatriceA, t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.5.2.1)$$

# Ecriture du système de sensibilité

## Définition des différents vecteurs de variables

$$Vecteur\ d\ etat\ y = \begin{bmatrix} Pix \\ wx \\ Piy \\ wy \\ Piz \\ wz \end{bmatrix}, Vecteur\ detat\ derive\ yprime = \begin{bmatrix} wx \\ Ac_1 \\ wy \\ Ac_2 \\ wz \\ Ac_3 \end{bmatrix}$$

$$Vecteur\ sensibilites\ u = \begin{bmatrix} u_{Pix} \\ Vu_{Pix} \\ u_{Piy} \\ Vu_{Piy} \\ u_{Piz} \\ Vu_{Piz} \end{bmatrix}, Vecteur\ sensibilites\ derive\ uprime = \begin{bmatrix} Vu_{Pix} \\ Acu_{Pix} \\ Vu_{Piy} \\ Acu_{Piy} \\ Vu_{Piz} \\ Acu_{Piz} \end{bmatrix} \quad (9.1.1)$$

## Ecriture des équations de sensibilité

$$Terme1 := \begin{bmatrix} A1\ Acu_{Pix} - F1\ Acu_{Piy} - E1\ Acu_{Piz} \\ Vu_{Pix} \\ -F1\ Acu_{Pix} + B1\ Acu_{Piy} - D1\ Acu_{Piz} \\ Vu_{Piy} \\ -E1\ Acu_{Pix} - D1\ Acu_{Piy} + C1\ Acu_{Piz} \\ Vu_{Piz} \end{bmatrix}$$

$$Terme2 := [$$
$$(E1\,wy - F1\,wz)\,Vu_{Pix} + (E1\,wx + 2\,D1\,wy + wz\,B1 - wz\,C1)\,Vu_{Piy}$$
$$+ (-F1\,wx + wy\,B1 - wy\,C1 - 2\,D1\,wz)\,Vu_{Piz}], [Vu_{Pix}], [$$
$$(-2\,E1\,wx - D1\,wy - wz\,A1 + wz\,C1)\,Vu_{Pix} + (-D1\,wx + F1\,wz)\,Vu_{Piy}$$
$$+ (-wx\,A1 + wx\,C1 + F1\,wy + 2\,E1\,wz)\,Vu_{Piz}], [Vu_{Piy}], [$$
$$(2\,F1\,wx + wy\,A1 - wy\,B1 + D1\,wz)\,Vu_{Pix}$$
$$+ (wx\,A1 - wx\,B1 - 2\,F1\,wy - E1\,wz)\,Vu_{Piy} + (D1\,wx - E1\,wy)\,Vu_{Piz}], [Vu_{Piz}]$$

$$Terme3 := \begin{bmatrix} Ac_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Terme4 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -wx\,wz \\ 0 \\ wx\,wy \\ 0 \end{bmatrix}$$

Par conséquent :

$$Equation_de_sensibilite1_correspondant_au_paramètre_, Pix$$
$$A1\,Acu_{Pix} - F1\,Acu_{Piy} - E1\,Acu_{Piz} - (E1\,wy - F1\,wz)\,Vu_{Pix}$$
$$- (E1\,wx + 2\,D1\,wy + wz\,B1 - wz\,C1)\,Vu_{Piy}$$
$$- (-F1\,wx + wy\,B1 - wy\,C1 - 2\,D1\,wz)\,Vu_{Piz} + Ac_1 = 0$$

$$Equation_de_sensibilite3_correspondant_au_paramètre_, Piy$$
$$-F1\,Acu_{Pix} + B1\,Acu_{Piy} - D1\,Acu_{Piz} - (-2\,E1\,wx - D1\,wy - wz\,A1 + wz\,C1)\,Vu_{Pix}$$
$$- (-D1\,wx + F1\,wz)\,Vu_{Piy} - (-wx\,A1 + wx\,C1 + F1\,wy + 2\,E1\,wz)\,Vu_{Piz}$$
$$+ wx\,wz = 0$$

$$Equation_de_sensibilite5_correspondant_au_paramètre_, Piz$$
$$-E1\,Acu_{Pix} - D1\,Acu_{Piy} + C1\,Acu_{Piz} - (2\,F1\,wx + wy\,A1 - wy\,B1 + D1\,wz)\,Vu_{Pix}$$
$$- (wx\,A1 - wx\,B1 - 2\,F1\,wy - E1\,wz)\,Vu_{Piy} - (D1\,wx - E1\,wy)\,Vu_{Piz} - wx\,wy = 0$$

## Vérification en dérivant directement le modèle dynamique obtenu précédemment

$$EqSensib1 := Ac_1 + A1\,Acu_{Pix} - F1\,Acu_{Piy} - E1\,Acu_{Piz} - E1\,Vu_{Pix}\,wy - E1\,wx\,Vu_{Piy} - 2\,D1\,wy\,Vu_{Piy} - Vu_{Piy}\,wz\,B1 + Vu_{Piy}\,wz\,C1 - wy\,Vu_{Piz}\,B1 + wy\,Vu_{Piz}\,C1 + F1\,Vu_{Pix}\,wz + F1\,wx\,Vu_{Piz} + 2\,D1\,wz\,Vu_{Piz}$$

$$EqSensib2 := -F1\,Acu_{Pix} + B1\,Acu_{Piy} - D1\,Acu_{Piz} + 2\,E1\,wx\,Vu_{Pix} + D1\,Vu_{Pix}\,wy + D1\,wx\,Vu_{Piy} + wx\,wz + Vu_{Pix}\,wz\,A1 - Vu_{Pix}\,wz\,C1 + wx\,Vu_{Piz}\,A1 - wx\,Vu_{Piz}\,C1 - F1\,Vu_{Piy}\,wz - F1\,wy\,Vu_{Piz} - 2\,E1\,wz\,Vu_{Piz}$$

$$EqSensib3 := -E1\,Acu_{Pix} - D1\,Acu_{Piy} + C1\,Acu_{Piz} - 2\,F1\,wx\,Vu_{Pix} - wx\,wy - Vu_{Pix}\,wy\,A1 + Vu_{Pix}\,wy\,B1 - wx\,Vu_{Piy}\,A1 + wx\,Vu_{Piy}\,B1 - D1\,Vu_{Pix}\,wz - D1\,wx\,Vu_{Piz} + 2\,F1\,wy\,Vu_{Piy} + E1\,Vu_{Piy}\,wz + E1\,wy\,Vu_{Piz}$$

**Conclusion : les équations de sensibilité obtenues sont idéntiques par les deux méthodes, mais elles sont mieux factorisées et ordonnées lorsqu'elles obtenues grâce aux TIG.**

# Annexe 7.3 Véhicule simplifié

Voir Partie 3, paragraphe 3.4.2.2.

**Nomenclature spécifique à ce fichier (ajouts par rapport à la nomenclature générale et remarques) :**

* "d(rond)Tenseur,Symbole" correspond à la dérivée partielle du Tenseur par rapport au Symbole ; on sous-entend donc :
* "dTenseur,t" ou "dTableau,t" correspondent à la dérivée totale par rapport au temps :

On sous-entend donc :

- la base d'expression (s'il y en a une !) qui est toujours ici la base C liée au véhicule (châssis)
- le repère d'observation des dérivées qui est toujours le repère galiléen R0 (cf §1.4.2 du Tome1 de la thèse) ; cependant, dans le cas de la dérivée totale d'un tenseur par rapport au temps, les dérivations seront effectuées dans le repère C pour simplifier : en effet, on n'a besoin que de la trace du tenseur dérivé, qui est un invariant.

## Rappel : Ecriture des équations de la dynamique

*Equation_1_correspondant_au_paramètre_, Pix*

$$m_C\,Ac_1 - m_C\,Vy\,wz - m_C\,l_C\,wz^2 = Fmotrice$$

*Equation_2_correspondant_au_paramètre_, Piy*

$$m_C\,Ac_2 + m_C\,l_C\,Ac_3 + m_C\,Vx\,wz = Fderive$$

*Equation_3_correspondant_au_paramètre_, Ps*

$$m_C\,l_C\,Ac_2 + C1\,Ac_3 + m_C\,l_C\,Vx\,wz = 0$$

## Choix de x

$$x := m_C$$

## Constitution du système Ay'=f

### Matrice A

$$\begin{bmatrix} 0 & m_C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_C & 0 & m_C\,l_C \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_C\,l_C & 0 & C1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

### Vecteur y

$$\begin{bmatrix} Pix \\ Vx \\ Piy \\ Vy \\ Ps \\ wz \end{bmatrix}$$

### Vecteur f

$$\begin{bmatrix} m_C\, Vy\, wz + m_C\, l_C\, wz^2 + Fmotrice \\ Vx \\ -m_C\, Vx\, wz + Fderive \\ Vy \\ -m_C\, l_C\, Vx\, wz \\ wz \end{bmatrix}$$

## Dérivation des TIG

### Par rapport aux coordonnées généralisées

$$d(rond)\ G_{CC}, Pix = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, d(rond)\ G_{CC}, Piy = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d(rond)\ G_{CC}, Ps = \begin{bmatrix} 0 & -A1 + B1 & 0 & 0 \\ -A1 + B1 & 0 & 0 & m_C\, l_C \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_C\, l_C & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4.1.1)$$

On vérifie que la 3ème matrice présentée est bien la dérivée du TIG dans 0, exprimée dans C : on projette dans 0, puis on dérive, puis on re-projette dans C.

### Par rapport à x

$$d(rond)\ G_{CC}, m_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & l_C \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_C & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2.1)$$

Remarque : à la différence des dérivations par rapport aux πi, la dérivation directe par rapport à x (pour vérification) peut être effectuée dans n'importe quel repère de projection puisque x n'intervient pas dans les changements de base.

### Par rapport au temps

$$d(rond)\ G_{CC}, t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.1)$$

## Dérivation du torseur géométrique

### Par rapport aux coordonnées généralisées

Comme les liaisons complexes ne sont pas traitées ici, on a :

$$d(rond)\ Dollar1, Pix = d(rond)\ Dollar2, Piy = d(rond)\ Dollar3, Ps = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.1.1)$$

Puis les autres matrices sont également nulles :

$$d(rond)\ Dollar1, Piy = d(rond)\ Dollar2, Pix = d(rond)\ Dollar3, \quad (5.1.2)$$

$$Pix = d(rond)\ Dollar3, Piy = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sauf :

$$d(rond)\ Dollar1, Ps = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, d(rond)\ Dollar2, Ps = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.1.3)$$

### Par rapport à x

Tous les tenseurs sont nuls ici, car les liaisons complexes ne sont pas envisagées.

### Par rapport au temps (dérivée totale)

Toutes les matrices dérivées dans S sont nulles.

# Dérivation du torseur géométrique dérivé

Seul le tenseur géométrique dérivé correspondant à Ps (PSI) n'est pas nul, en raison de la présence d'une paire de paramètres holonomes dans cet exemple ; on ne considérera que celui-ci dans ce paragraphe.

## Par rapport aux coordonnées généralisées

Tous les tenseurs sont nuls.

## Par rapport à x

La matrice est nulle également.

# Dérivation des actions mécaniques

## Par rapport aux coordonnées généralisées

Ces termes sont tous nuls, puisqu'il n'y a pas de forces généralisées de pesanteur, et que les autres actions ne dépendent pas des variables.

## Par rapport à x

Idem. Remarque : il faut tout de même prévoir ce calcul, au cas où le paramètre x étudié serait un des efforts.

# Construction des vecteurs et matrices présents dans les équations

## Matrice A

## Matrice J

### *Dérivée du tenseur cinétique*

$$d(rond)\,K_{11}, Pix = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, d(rond)\,K_{11}, Piy = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d(rond)\,K_{11}, Ps = \begin{bmatrix} 0 & m_C & 0 \\ m_C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (8.2.1.1)$$

$$d(rond)\,K_{12}, Pix = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, d(rond)\,K_{12}, Piy = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d(rond)\ K_{12}, Ps = \begin{bmatrix} -m_C & 0 & 0 \\ 0 & m_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8.2.1.2}$$

$$d(rond)\ K_{13}, Pix = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, d(rond)\ K_{13}, Piy = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d(rond)\ K_{13}, Ps = \begin{bmatrix} -m_C l_C & 0 & 0 \\ 0 & m_C l_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8.2.1.3}$$

$$d(rond)\ K_{21}, Pix = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, d(rond)\ K_{21}, Piy = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d(rond)\ K_{21}, Ps = \begin{bmatrix} -m_C & 0 & 0 \\ 0 & m_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8.2.1.4}$$

$$d(rond)\ K_{22}, Pix = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, d(rond)\ K_{22}, Piy = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d(rond)\ K_{22}, Ps = \begin{bmatrix} 0 & -m_C & 0 \\ -m_C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8.2.1.5}$$

$$d(rond)\ K_{23}, Pix = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, d(rond)\ K_{23}, Piy = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d(rond)\ K_{23}, Ps = \begin{bmatrix} 0 & -m_C l_C & 0 \\ -m_C l_C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8.2.1.6}$$

$$d(rond)\,K_{31},Pix=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ d(rond)\,K_{31},Piy=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$d(rond)\,K_{31},Ps=\begin{bmatrix}-m_C\,l_C&0&0\\0&m_C\,l_C&0\\0&0&0\end{bmatrix} \qquad (8.2.1.7)$$

$$d(rond)\,K_{32},Pix=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ d(rond)\,K_{32},Piy=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$d(rond)\,K_{32},Ps=\begin{bmatrix}0&-m_C\,l_C&0\\-m_C\,l_C&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \qquad (8.2.1.8)$$

$$d(rond)\,K_{33},Pix=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ d(rond)\,K_{33},Piy=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$d(rond)\,K_{33},Ps=\begin{bmatrix}0&A1-B1&0\\A1-B1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \qquad (8.2.1.9)$$

### *Dérivées des symboles de Christoffel*

Toutes les dérivées sont nulles.

### *Calcul de J*

$$\begin{bmatrix}0&0&0&m_C\,wz&0&m_C\,Vy+2\,m_C\,l_C\,wz\\0&1&0&0&0&0\\0&-m_C\,wz&0&0&0&-m_C\,Vx\\0&0&0&1&0&0\\0&-m_C\,l_C\,wz&0&0&0&-m_C\,l_C\,Vx\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

## Matrice B

### *Matrice dérivée de A par rapport aux coordonnées généralisées*

Elle est toujours nulle quel que soit le pseudo-paramètre envisagé.

### *Remplissage de B*

$$MatriceB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.3.2.1)$$

## Matrice dérivée de A par rapport à x

### *Dérivée de Kij par rapport à x*

$$d(rond)\,K_{11}, m_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, d(rond)\,K_{22}, m_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d(rond)\,K_{33}, m_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d(rond)\,K_{12}, m_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, d(rond)\,K_{21}, m_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d(rond)\,K_{13}, m_C = \begin{bmatrix} 0 & l_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, d(rond)\,K_{31}, m_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ l_C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d(rond)\,K_{23}, m_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, d(rond)\,K_{32}, m_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.4.1.1)$$

### *Calcul de d(rond)A,x*

$$d(rond)\ MatriceA, m_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & l_C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.4.2.1)$$

## Vecteur dérivé de f par rapport à x

### *Dérivée des symboles de Christoffel*

Les dérivées non nulles sont les suivantes :

$$d(rond)\ \Gamma 123, m_C = -1,\ d(rond)\ \Gamma 213, m_C = 1$$

$$d(rond)\ \Gamma 133, m_C = -l_C,\ d(rond)\ \Gamma 313, m_C = l_C \quad (8.5.1.1)$$

### *Calcul de d(rond)f,x*

$$d(rond)\ f, m_C = \begin{bmatrix} Vy\ wz + l_C\ wz^2 \\ 0 \\ -Vx\ wz \\ 0 \\ -l_C\ Vx\ wz \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.5.2.1)$$

## Matrice dAdt (uniquement pour méthode adjointe) (dérivée totale)

### *Dérivée de Kij par rapport à t (dérivée totale)*

Toutes les matrices dérivées sont nulles.

### *Calcul de dA/dt*

$$dMatriceA, t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.6.2.1)$$

# Ecriture du système de sensibilité

## Définition des différents vecteurs de variables

$$Vecteur\ d\ etat\ y = \begin{bmatrix} Pix \\ Vx \\ Piy \\ Vy \\ Ps \\ wz \end{bmatrix}, Vecteur\ detat\ derive\ yprime = \begin{bmatrix} Vx \\ Ac_1 \\ Vy \\ Ac_2 \\ wz \\ Ac_3 \end{bmatrix}$$

$$Vecteur\ sensibilites\ u = \begin{bmatrix} u_{Pix} \\ Vu_{Pix} \\ u_{Piy} \\ Vu_{Piy} \\ u_{Ps} \\ Vu_{Ps} \end{bmatrix}, Vecteur\ sensibilites\ derive\ uprime = \begin{bmatrix} Vu_{Pix} \\ Acu_{Pix} \\ Vu_{Piy} \\ Acu_{Piy} \\ Vu_{Ps} \\ Acu_{Ps} \end{bmatrix} \quad (9.1.1)$$

## Ecriture des équations de sensibilité

$$Terme1 := \begin{bmatrix} m_C\, Acu_{Pix} \\ Vu_{Pix} \\ m_C\, Acu_{Piy} + m_C\, l_C\, Acu_{Ps} \\ Vu_{Piy} \\ m_C\, l_C\, Acu_{Piy} + C1\, Acu_{Ps} \\ Vu_{Ps} \end{bmatrix}$$

$$Terme2 := \begin{bmatrix} m_C\, wz\, Vu_{Piy} + \left(m_C\, Vy + 2\, m_C\, l_C\, wz\right) Vu_{Ps} \\ Vu_{Pix} \\ -m_C\, wz\, Vu_{Pix} - m_C\, Vx\, Vu_{Ps} \\ Vu_{Piy} \\ -m_C\, l_C\, wz\, Vu_{Pix} - m_C\, l_C\, Vx\, Vu_{Ps} \\ Vu_{Ps} \end{bmatrix}$$

$$Terme3 := \begin{bmatrix} Ac_1 \\ 0 \\ Ac_2 + l_C Ac_3 \\ 0 \\ l_C Ac_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Terme4 := \begin{bmatrix} Vy\, wz + l_C wz^2 \\ 0 \\ -Vx\, wz \\ 0 \\ -l_C Vx\, wz \\ 0 \end{bmatrix}$$

Par conséquent :

*Equation_de_sensibilite1_correspondant_au_paramètre_, Pix*

$$m_C Acu_{Pix} - m_C wz Vu_{Piy} - (m_C Vy + 2 m_C l_C wz) Vu_{Ps} + Ac_1 - Vy wz - l_C wz^2 = 0$$

*Equation_de_sensibilite3_correspondant_au_paramètre_, Piy*

$$m_C Acu_{Piy} + m_C l_C Acu_{Ps} + m_C wz Vu_{Pix} + m_C Vx Vu_{Ps} + Ac_2 + l_C Ac_3 + Vx wz = 0$$

*Equation_de_sensibilite5_correspondant_au_paramètre_, Ps*

$$m_C l_C Acu_{Piy} + C1 Acu_{Ps} + m_C l_C wz Vu_{Pix} + m_C l_C Vx Vu_{Ps} + l_C Ac_2 + l_C Vx wz = 0$$

## Vérification en dérivant directement le modèle dynamique obtenu précédemment

$$EqSensib1 := Ac_1 + m_C Acu_{Pix} - Vy wz - m_C wz Vu_{Piy} - m_C Vy Vu_{Ps} - l_C wz^2 - 2 m_C l_C wz Vu_{Ps}$$

$$EqSensib2 := m_C Acu_{Piy} + m_C l_C Acu_{Ps} + m_C wz Vu_{Pix} + m_C Vx Vu_{Ps} + Ac_2 + l_C Ac_3 + Vx wz$$

$$EqSensib3 := m_C l_C Acu_{Piy} + C1 Acu_{Ps} + m_C l_C wz Vu_{Pix} + m_C l_C Vx Vu_{Ps} + l_C Ac_2 + l_C Vx wz$$

**Conclusion : les équations de sensibilité obtenues sont idéntiques par les deux méthodes, mais elles sont mieux factorisées et ordonnées lorsqu'elles obtenues grâce aux TIG.**

# FOLIO ADMINISTRATIF

## THESE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

NOM : SANDEL DATE de SOUTENANCE : 23/11/2007
(avec précision du nom de jeune fille, le cas échéant)

Prénoms : Arnaud Jean-Daniel

TITRE : Outils symboliques pour l'écriture de modèles et l'étude de sensibilité des systèmes multicorps.

NATURE : Doctorat Numéro d'ordre : 2007-ISAL-0081

Ecole doctorale : Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique (MEGA) de Lyon

Spécialité : Génie Mécanique

Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 / et bis CLASSE :

RESUME :
Tout d'abord, la théorie des Tenseurs d'Inertie Globaux (TIG), qui permet d'écrire le modèle dynamique sous forme algébrique (sans dérivation), est reformulée et étendue aux systèmes multicorps à liaisons complexes et pseudo-paramètres. Puis deux méthodes analytiques d'étude de sensibilité, quantifiant l'influence de paramètres de construction sur les performances, sont adaptées aux systèmes de solides rigides ; la méthode de l'état-adjoint, en général moins rapide que la méthode directe, devient intéressante lorsque le critère est une intégrale sur un intervalle de temps unique et que les paramètres de construction sont nombreux. Enfin, les outils formels des TIG sont utilisés pour obtenir le système de sensibilité et le système adjoint sans dérivation, et ainsi des équations mieux ordonnées. Les méthodes proposées sont validées sur des exemples (double-pendule orthogonal, véhicule) utilisant Maple ou Matlab. Les perspectives concernent les chaînes fermées et les sensibilités secondes.

MOTS-CLES :
Système multicorps, Tenseurs d'Inertie Globaux (TIG), liaison complexe, pseudo-paramètres, étude de sensibilité, méthode directe, méthode de l'état-adjoint, modèle dynamique, véhicule.

Laboratoire de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures (LaMCoS) – UMR 5259

Directeur de thèse: Professeur Michel FAYET
Co-directeurs : Professeur Philippe BOISSE, Lionel MAIFFREDY

Président de jury : Professeur Paul FISETTE (Université Catholique de Louvain – Belgique)

Composition du jury :

| | | |
|---|---|---|
| P. BOISSE | Professeur (INSA de Lyon) | Co-directeur de thèse |
| R. DUFOUR | Professeur (INSA de Lyon) | Examinateur |
| M. FAYET | Professeur émérite (INSA de Lyon) | Directeur de thèse |
| P. FISETTE | Professeur (Université Catholique de Louvain – Belgique) | Président |
| D. LE HOUEDEC | Professeur émérite (Ecole Centrale de Nantes) | Rapporteur |
| L. MAIFFREDY | Maître de Conférences (INSA de Lyon) | Co-directeur de thèse |
| C. PROPPE | Professeur (Université de Karlsruhe – Allemagne) | Examinateur |
| W. SEEMANN | Professeur (Université de Karlsruhe – Allemagne) | Rapporteur |

## Outils symboliques pour l'écriture de modèles et l'étude de sensibilité des systèmes multicorps


Résumé

Tout d'abord, la théorie des Tenseurs d'Inertie Globaux (TIG), qui permet d'écrire le modèle dynamique sous forme algébrique (sans dérivation), est reformulée et étendue aux systèmes multicorps à liaisons complexes et pseudo-paramètres. Puis deux méthodes analytiques d'étude de sensibilité, quantifiant l'influence de paramètres de construction sur les performances, sont adaptées aux systèmes de solides rigides ; la méthode de l'état-adjoint, en général moins rapide que la méthode directe, devient intéressante lorsque le critère est une intégrale sur un intervalle de temps unique et que les paramètres de construction sont nombreux. Enfin, les outils formels des TIG sont utilisés pour obtenir le système de sensibilité et le système adjoint sans dérivation, et ainsi des équations mieux ordonnées. Les méthodes proposées sont validées sur des exemples (double-pendule orthogonal, véhicule) utilisant Maple ou Matlab. Les perspectives concernent les chaînes fermées et les sensibilités secondes.



Mots-Clés

Système multicorps, Tenseurs d'Inertie Globaux (TIG), liaison complexe, pseudo-paramètres, étude de sensibilité, méthode directe, méthode de l'état-adjoint, modèle dynamique, véhicule.


## Symbolic tools for model generation and sensitivity analysis of multibody systems.


Abstract

Analytical tools for systems of rigid bodies are proposed. First of all, the Global Inertia Tensors (GITs) theory, which allows the dynamic model to be written in an algebraic form (without any derivation), is extended under a new presentation to complex joints and pseudo-parameters systems. Secondly, two sensitivity analysis methods, which quantify the influence of constructive parameters on the system performances, are adapted to multibody systems ; the adjoint-state method, generally slower than the direct method, becomes interesting in the case of an integrated constraint on a single time interval and a great number of constructive parameters. Thirdly, the GITs formal tools are used to obtain the sensitivity system and the adjoint system without any derivation, and thus better organized equations. The proposed methods are validated on examples (orthogonal double pendulum, vehicles) using Maple or Matlab. The perspectives concern closed loops and second-order sensitivities.



Keywords

Multibody system, Global Inertia Tensors (GITs), complex joint, pseudo-parameters, sensitivity analysis, direct method, adjoint-state method, dynamic model, derivation-free method, vehicle.