N°d'ordre 2007-ISAL-0048

Année 2007

THÈSE

DYNAMIQUE EXPLICITE POUR LA SIMULATION NUMÉRIQUE DE PROPAGATION DE FISSURE PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS ÉTENDUS

Présentée devant l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

> pour obtenir le GRADE DE DOCTEUR

École doctorale : Mécanique, énergétique, Génie Civil, Acoustique

Spécialité : MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

par

Thomas MENOUILLARD Agrégé de Mécanique

Thèse soutenue le 20 septembre 2007 devant la Commission d'examen

Jury

LABORDE PATRICK MOËS NICOLAS RIXEN DANIEL SUFFIS ARNAUD BUNG HARIDDH COMBESCURE ALAIN PANDOLFI ANNA ProfesseurProfesseurProfesseurDocteurIngénieurProfesseurIngénieurIngénieur

Président du jury Rapporteur Rapporteur Examinateur Examinateur Directeur de thèse Invité

LaMCoS - INSA de Lyon - CNRS UMR5259 20, avenue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex (FRANCE)

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
	CHIMIE DE LYON	M. Jean Marc I ANCELIN
CHIMIE	http://sakura.cpe.fr/ED206	Université Claude Bernard Lyon 1
		Bât CPE
	M. Jean Marc LANCELIN	69622 VILLEURBANNE Cedex
		Tél : 04.72.43 13 95 Fax :
	Insa : R. GOURDON	lancelin@hikari.cpe.fr
E E A	ELECTRONIQUE,	M. Alain NICOLAS
E.E.A.	ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE	Bâtiment H9
	M. Alain NICOLAS	36 avenue Guy de Collongue
	Insa : D. BARBIER	69134 ECULLY
	ede2a@insa-lyon.fr	eea@ec-lyon.fr
	AM. 64.43 - Fax : 64.54	Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN
	EVOLUTION, ECOSYSTEME,	M. Jean-Pierre FLANDROIS
E2M2	MICROBIOLOGIE, MODELISATION	CNRS UMR 5558 Université Claude Bernard Iven 1
	Ivon1.fr/E2M2	Bât G. Mendel
		43 bd du 11 novembre 1918
	M. Jean-Pierre FLANDROIS	69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04 26 23 59 50 Fax 04 26 23 59 49
		06 07 53 89 13
		e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr
FDIIS	POUR LA SOCIETE	M. Alain MILLE Université Claude Bernard Lyon 1
	http://ediis.univ-lyon1.fr	LIRIS - EDIIS
		Bâtiment Nautibus
		69622 VILLEURBANNE Cedex
	Secrétariat : I. BUISSON	Tél : 04.72.42 44 82 94 Fax 04 72 44 80 53
	INTEDDISCIDI INIAIDE SCIENCES	ediis@liris.cnrs.tr - alain.mille@liris.cnrs.tr
EDISS	SANTE	Hôpital Cardiologique de Lyon
		Bâtiment Central
		28 Avenue Doyen Lépine
	M. Didier REVEL	Tél : 04.72.35 72 32 Fax :
	Insa : M. LAGARDE	Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr
	MATERIAUX DE LYON	INSA de Lyon
		MATEIS
	M. Jean Marc PELLETIER	Bâtiment Blaise Pascal
	Secrétariat : C. BERNAVON	69621 VILLEURBANNE Cédex
	83.85	Tél : 04.72.43 83 18 Fax 04 72 43 85 28
	MATHEMATIOUES ET INFORMATIOUE	Jean-marc.Pelletler@insa-iyon.tr M Pascal KOIRAN
Math IF	FONDAMENTALE	Ecole Normale Supérieure de Lyon
		46 allée d'Italie 69364 LYON Cédox 07
	M. Pascal KOIRAN	Tél : 04.72.72 84 81 Fax : 04 72 72 89 69
		Pascal.koiran@ens-lyon.fr
	Insa : G. BAYADA	Secretanat : Fature Latif - latif@math.univ-lyon1.fr
MEGA	MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE	INSA de Lvon
		Laboratoire de Vibrations et Acoustique
	M. Jean Louis GUYADER	Bätiment Antoine de Saint Exupéry
	Secrétariat : M LABOUNE	69621 VILLEURBANNE Cedex
	PM : 71.80 -Fax : 87.12	Tél :04.72.18.62.71.70 Fax : 04 72 18 87 12
		mega@lva.insa-lyon.tr
SCED	SCIENCES DES SOCIETES, DE	Mme Claude-Isabelle BRELOT
3320	L'ENVIKUNNEMENT ET DU DROIT	86 rue Pasteur
	Mme Claude-Isabelle BRELOT	69365 LYON Cedex 07
		Iel : 04.78.69.72.76
	Insa : J.Y. TOUSSAINT	
L		1

INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales 2007

Résumé

La simulation numérique fait maintenant partie intégrante du processus de conception et validation de structures mécaniques. Les outils de simulations sont de plus en plus performants permettant une description très fine des phénomènes. De plus ces outils ne se limitent plus à la mécanique linéaire, mais sont développés pour décrire des comportements plus compliqués allant jusqu'à la ruine des structures, ce qui intéresse le domaine de la sécurité. Un chargement dynamique ou statique peut ainsi engendrer un endommagement, une fissuration puis une rupture de la structure. La dynamique rapide permet de simuler des phénomènes "rapides" tels que des explosions, des chocs et impacts sur structure. Le domaine d'application est très varié. Il concerne par exemple l'étude de la durée de vie et les scénarios d'accidents de la cuve du réacteur nucléaire. Mais aussi en aéronautique, l'intégrité d'une aube de soufflante soumise à un impact d'oiseau. Il est alors très intéressant pour les codes de dynamique rapide de pouvoir prédire de façon robuste et stable de tels phénomènes : l'évaluation de l'endommagement dans la structure et la simulation de propagation de fissure constituent un enjeu essentiel. Pour ce faire la méthode des éléments finis étendus a l'avantage de s'affranchir de remaillage et de projection de champs lors de la propagation de fissure. Effectivement la fissure est décrite cinématiquement via une stratégie appropriée d'enrichissement sur des degrés de liberté supplémentaires. On met en évidence ensuite les difficultés liant la discrétisation spatiale de cette méthode avec la discrétisation temporelle d'un schéma de calcul explicite : l'écriture diagonale de la matrice de masse et le pas de temps de stabilité associé. On présente donc deux méthodes de diagonalisation de matrice de masse basées sur la conservation de l'énergie cinétique, et des études de pas de temps critiques pour divers éléments finis enrichis. L'intérêt mis en évidence ici est que le pas de temps n'est pas plus pénalisant que celui du problème éléments finis standard. Des comparaisons avec des simulations numériques sur un autre code permettent de valider les travaux théoriques. Un essai de propagation de fissure en mode mixte a été exploité afin de vérifier la prédiction de la simulation.

MOTS CLÉS: dynamique, explicite, éléments finis étendus, fissuration, pas de temps de stabilité, endommagement de composites

Table des matières

Та	l'able des matières 7				7
Та	ble de	es figure	es		11
Li	ste de	s tablea	ux		15
In	trodu	ction			17
1	Mod	lélisatio	n d'endor	nmagement de composites	21
	1.1	Introdu	iction		23
	1.2	État de	l'art		23
		1.2.1	Mécanis	me d'endommagement	23
		1.2.2	Concepts	s généraux de la mécanique continue de l'endommagement	24
		1.2.3	Modèles	d'endommagement	26
		1.2.4	Endomm	agement : phénomène de localisation	26
			1.2.4.1	Mise en évidence	26
			1.2.4.2	Correction : modèle à effet retard	26
	1.3	Dévelo	oppement of	d'un premier modèle d'endommagement orthotrope	28
	1.4	Dévelo	ppement of	du modèle d'endommagement de l'ONERA	29
		1.4.1	Introduct	tion générale du modèle	29
			1.4.1.1	Définition de l'endommagement	29
			1.4.1.2	Mise en évidence des différents endommagements	30
			1.4.1.3	Loi de comportement d'un matériau orthotrope	31
		1.4.2	Endomm	lagement de la matrice	31
			1.4.2.1	Description de l'endommagement matriciel	31
			1.4.2.2	Forces thermodynamiques	32
			1.4.2.3	Loi d'endommagement matriciel	32
			1.4.2.4	Paramétres de désactivation du dommage	33
		1 4 2	1.4.2.5		34
		1.4.3	Endomm		35
			1.4.3.1		33
			1.4.3.2	Forces thermodynamiques	55 25
			1.4.5.5		55

		1.4.4 Loi de comportement endommagée générale	36
		1.4.5 Validation du calcul de l'endommagement matriciel	37
		1.4.5.1 Introduction à la validation	37
		1.4.5.2 Traction dans le sens "chaine"	37
		1.4.5.3 Traction pour un composite $\pm -45 \text{ deg}$	41
		1.4.5.4 Traction dans le sens 3	45
		1.4.5.5 Conclusion	48
		1.4.6 Validation du calcul de l'endommagement des fibres 4	48
	1.5	Applications numériques	49
		1.5.1 Éprouvette en traction	49
		1.5.2 Impact sur panneau 4	49
		1.5.2.1 Premier modèle d'endommagement orthotrope 4	49
		1.5.2.2 Modèle d'endommagement ODM	51
	1.6	Conclusion et perspectives	53
2	Méc	nique de la rupture	55
	2.1	Introduction	56
	2.2	Problème de référence	56
		2.2.1 Problème général de structure fissurée	56
	2.3	Approche énergétique	58
		2.3.1 Taux de restitution d'énergie G	58
		2.3.2 Facteurs d'intensité des contraintes	60
		2.3.2.1 Analyse asymptotique en pointe de fissure	60
		2.3.2.2 Facteurs d'intensité des contraintes statiques	62
		2.3.2.3 Facteurs d'intensité des contraintes dynamiques 6	62
		2.3.3 Relation entre les facteurs d'intensité des contraintes et G 6	63
		2.3.4 Évaluation numérique des facteurs d'intensité des contraintes	64
		2.3.5 Critère de propagation de fissure associé	65
	2.4	Approche locale	66
		2.4.1 Zones cohésives	66
		2.4.2 Évaluer des contraintes en pointe de fissure	68
		2.4.2.1 Movement le tenseur des contraintes	69
		2.4.2.2 Movementa direction	70
	2.5	Conclusion	71
2	État	de l'art des méthodes numériques neur la propagation de fissure	73
5	2 1	Introduction	75 75
	2.1	Méthodos de simulation numérique : état de l'art	75 75
	5.2	3.2.1 Máthodas das áláments de frontière	13 75
		3.2.1 Micholaes des elements de nontiere	13 76
		3.2.2 Méthodos dos éléments fuis	10 76
		5.2.5 Michodes des éléments linis	10 77
	2.2	5.2.4 Miemodes basees sur la partition de l'unite	
	3.3	Representation et evolution de l'interface de discontinuité dans le temps .	11

		3.3.1	Fonction de niveau ou level-set	•	77
		3.3.2	Application à la propagation de fissure	•	78
		3.3.3	Maillages level-set/structure indépendants		78
	3.4	Discrét	tisation spatiale et temporelle	•	78
		3.4.1	Discrétisation spatiale		79
			3.4.1.1 Discrétisation spatiale : FEM		79
			3.4.1.2 Discrétisation spatiale : X-FEM		79
		3.4.2	Discrétisation temporelle		81
			3.4.2.1 Méthode de Newmark		81
			3.4.2.2 Stabilité		81
			3.4.2.3 Remarque sur Newmark explicite		83
			3.4.2.4 Avancée de la fissure		84
	3.5	Conclu	usion		84
4	Thé	orie : X-	-FEM en dynamique explicite		85
	4.1	Introdu		• •	87
	4.2	Diagor	nalisation de la matrice de masse	••	87
		4.2.1		•	87
		4.2.2	Diagonalisation 1 : masse diagonale	•	89
			4.2.2.1 Méthode de diagonalisation	••	89
			4.2.2.2 Démonstration sur un élément monodimensionnel .	••	89
			4.2.2.3 Application à un élément monodimensionnel	•	91
		4.2.3	Diagonalisation 2 : masse diagonale par bloc	•	92
			4.2.3.1 Elément poutre	•	92
			4.2.3.2 Élément triangle	•	93
		4.2.4	Conservation de l'énergie cinétique	••	95
			4.2.4.1 Élément monodimensionnel	•	95
			4.2.4.2 Structure de trois éléments monodimensionnels	•	96
	4.3	Étude	de pas de temps critique X-FEM	•	98
		4.3.1	Élément monodimensionnel	•	98
			4.3.1.1 Élément barre FEM	•	98
			4.3.1.2 Élément barre X-FEM	•	98
		4.3.2	Éléments bidimensionnels	•••	105
			4.3.2.1 Élément triangle	••	105
			4.3.2.2 Élément quadrangle	••	105
			4.3.2.3 Avec quel élément est-il préférable de mailler ?	•	106
		4.3.3	Éléments tridimensionnels	••	108
			4.3.3.1 Élément tétraèdre	••	108
			4.3.3.2 Élément cubique	•	111
		4.3.4	Bilan		111
	4.4	Propag	gation d'onde à travers la discontinuité		112
		4.4.1	Introduction		112
		4.4.2	Cas simple monodimensionnel	•	113

			4.4.2.1 Démonstration	113
			4.4.2.2 Validation	115
		4.4.3	Cas bidimensionnel	115
	4.5	Conclu	sion	116
5	Simu	ulations	numériques de propagation dynamique de fissure	119
	5.1	Introdu	ection	120
	5.2	Implén	nentation dans EUROPLEXUS	120
		5.2.1	Description de la fissure	120
			5.2.1.1 Utilisation de fonctions de niveau	120
			5.2.1.2 Maillage spécifique aux fonctions de niveau	121
		5.2.2	Calcul mécanique tenant compte de la fissure	122
			5.2.2.1 Les forces internes	122
			5.2.2.2 La propagation de fissure	123
		5.2.3	Algorithme général	123
	5.3	Simula	tions numériques	124
		5.3.1	Mode 1 pur	125
		5.3.2	Expérience de Kalthoff	126
			5.3.2.1 Avec les facteurs d'intensité des contraintes	127
			5.3.2.2 Avec les contraintes non locales en pointe de fissure	130
		5.3.3	Expérience sur Compact Compression Specimen	130
			5.3.3.1 Avec les facteurs d'intensité des contraintes	131
			5.3.3.2 Avec les contraintes non locales en pointe de fissure	132
		5.3.4	Éprouvette trouée et fissurée	136
			5.3.4.1 Protocole expérimental	138
			5.3.4.2 Résultats expérimentaux et numériques	139
	5.4	Conclu	sion	141
Co	onclus	ion et p	erspectives	145
Δ	Disc	ontinuit	é faible	147
11	Disc	ommun		11/
B	Jeu	de donn	ées EUROPLEXUS X-FEM	149
С	Prog	gramme	endommagement CAST3M	151
D	Jeu	de donn	ées EUROPLEXUS ODM	159
Ri	hlingr	anhie		161
	onogr	apine		TOT

Table des figures

1.1	Courbe type contrainte déformation jusqu'à rupture	24		
1.2	Coupe d'une structure endommagée	24		
1.3	Schéma d'un volume élémentaire fissuré			
1.4	Évolution de l'endommagement en fonction de la déformation	28		
1.5	Coupe d'une structure endommagée	30		
1.6	Endommagement matriciel et de rupture des fibres dans un composite	30		
1.7	Évolution de la contrainte en fonction de la déformation	31		
1.8	L'endommagement matriciel vu sur la courbe contrainte-déformation	32		
1.9	Endommagement matriciel en fonction de la déformation (ODM)	33		
1.10	Paramètre de désactivation en fonction de la déformation principale (ODM)	34		
1.11	Contact unilatéral et déformation résiduelle correspondante	34		
1.12	Essai de traction à 0 degré sur le composite	38		
1.13	Dommage en fonction de la déformation pour le modèle ODM	38		
1.14	Composite 0 degré : Contrainte 11 en fonction du temps	39		
1.15	Composite 0 degré : Contrainte 11 en fonction de la déformation 11	39		
1.16	Composite 0 degré : Endommagement 1 en fonction du temps	40		
1.17	Composite 0 degré : Endommagement 1 en fonction de la déformation 1.	40		
1.18	Composite 0 degré : index d'activation 1 en fonction du temps	41		
1.19	Composite 0 degré : déformation résiduelle globale 1 en fonction du temps.	42		
1.20	Essai de traction à 45 degré sur le composite.	42		
1.21	Composite +/-45 : Etats non déformé et déformé de l'élement	43		
1.22	Composite +/-45 : Contrainte 11 en fonction de la deformation 11	43		
1.23	Composite +/-45 : Contrainte 12 en fonction de la deformation 12	44		
1.24	Composite +/-45 : Endommagement 1 en fonction de la deformation 11 .	44		
1.25	Déformation 1 en fonction du temps pour 2 pas d'incrément différents	45		
1.26	Essai de traction hors plan sur le composite.	46		
1.27	Contrainte 33 en fonction de la déformation 33	46		
1.28	Déformation 33 en fonction du temps.	47		
1.29	Contrainte 33 en fonction du temps.	47		
1.30	Contrainte en fonction de la déformation dans la direction 1	48		
1.31	Dommage en fonction de la déformation dans la direction 1	49		
1.32	Relation contrainte déformation en fonction du paramètre d_c^f	50		
1.33	Éprouvette de traction utilisée pour l'identification	50		

1.34	Dommage 13 sur maillage déformé à trois instants après l'impact	51
1.35	Dommage 3 sur maillage déformé à 4 instants après l'impact	51
1.36	Panneaux post mortem : simulation et expérience	52
2.1	Relation contrainte-déformation : élasticité, endommagement puis rupture	56
2.2	Domaine considéré Ω contenant une fissure	57
2.3	Les différents modes de rupture : modes I, II et III	60
2.4	Repères et coordonnées cylindriques en pointe de fissure	61
2.5	Champ d'extension virtuelle d'une fissure courbe	64
2.6	Représentation d'une zone cohésive et loi contrainte-déplacement	67
2.7	Contrainte le long de la zone cohésive dans le prolongement de la fissure.	67
2.8	Schéma de la représentation de la zone cohésive dans le maillage	68
2.9	Contraintes non locales en pointe de fissure	69
2.10	Critère de propagation de fissure avec la contrainte moyennée	70
3.1	Stratégies d'enrichissement du maillage contenant une fissure	80
4.1	Équivalence entre un élément enrichi et 2 éléments finis.	88
4.2	Fonctions de forme classiques et enrichies en 1D	91
4.3	Base de fonctions de forme tronquées en 1D	92
4.4	Élément triangle coupé par une fissure.	94
4.5	Structure de 3 éléments dont le central est enrichi	96
4.6	Fonctions de formes standard et enrichies pour une structure de 3 éléments	96
4.7	Fonctions de forme d'Hansbo pour une structure de 3 éléments	97
4.8	Élément monodimensionnel contenant une discontinuité en déplacement .	99
4.9	Pas de temps critique d'un élément monodimensionnel enrichi	103
4.10	Influence de l'intégration approchée sur le pas de temps critique	104
4.11	Élément triangle coupé par une fissure.	105
4.12	Pas de temps critique de l'élément triangle coupé par une fissure	106
4.13	Pas de temps critique d'un élément triangle coupé par une fissure inclinée	107
4.14	Élément quadrangle coupé par une fissure.	107
4.15	Pas de temps critique de l'élément quadrangle coupé par une fissure	108
4.16	Structures de 4 noeuds maillées par 2 triangles ou 1 quadrangle	108
4.17	Pas de temps critique d'une structure de 4 noeuds	109
4.18	Élément tétraèdre coupé par une fissure.	109
4.19	Pas de temps critique de l'élément tétraèdre coupé	110
4.20	Élément cube coupé par une fissure.	111
4.21	Pas de temps critique de l'élément cube coupé par une fissure	112
4.22	Structure de 6 éléments coupée par une fissure.	113
4.23	Propagation de l'onde dans une structure de 6 éléments	116
4.24	Géométrie et chargement.	117
4.25	Contrainte σ_{vv} dans l'épaisseur aux temps 1.5s et 2s	117
4.26	Contrainte σ_{yy} dans l'épaisseur à $t = 3s$ et différence entre les méthodes .	117
4.20 4.21 4.22 4.23 4.24 4.25 4.26	Pas de temps critique de l'élément cube coupé par une fissure	111 112 113 116 117 117 117

5.1	Les deux fonctions de niveau localisant la fissure dans l'espace 1	121
5.2	Maillage régulier spécifique aux fonctions de niveau.	121
5.3	Schéma du choix du sous-découpage choisi pour les éléments enrichis	123
5.4	Mode 1 pur : géométrie et conditions limites	125
5.5	Mode 1 pur : solutions numériques et analytique de \bar{K}_1	126
5.6	Kalthoff : géométrie de l'expérience	127
5.7	Kalthoff : trajet de fissure	128
5.8	Kalthoff : évolution de la longueur de fissure en fonction du temps	128
5.9	Kalthoff : norme du champ de déplacement sur le maillage déformé	129
5.10	Kalthoff : trajets de fissure avec les critères en contraintes moyennées	131
5.11	Kalthoff : longueurs de fissure avec les critères en contraintes moyennées	131
5.12	CCS : Expérience sur Compact Compression Specimen	132
5.13	CCS : Maillage déformé de l'éprouvette.	133
5.14	CCS : trajet de la fissure dans l'éprouvette maillée en 39x60	133
5.15	CCS : évolution de la longueur de fissure dans le temps	134
5.16	CCS : trajet de la fissure dans le maillage de l'éprouvette.	134
5.17	CCS : maillages initial et déformé au temps final.	136
5.18	CCS : évolution de la contrainte moyennée en fonction du temps	136
5.19	CCS : évolution de la vitesse de propagation en fonction du temps 1	137
5.20	CCS : vitesse de propagation en fonction de la contrainte moyennée	137
5.21	CCS : évolution de la direction de la pointe de fissure en fonction du temps	138
5.22	CCS : évolution de la longueur de fissure en fonction du temps 1	138
5.23	CCS : Trajet de la fissure avec les 2 calculs	139
5.24	PMMA : protocole expérimental avec barres de Hopkinson	139
5.25	PMMA : dimensions de l'éprouvette utilisée pour les essais 1	140
5.26	PMMA : éprouvette post mortem.	140
5.27	PMMA : éprouvette avant et après simulation numérique	141
5.28	PMMA : Contrainte moyennée en pointe de fissure	141
5.29	PMMA : trajets expérimental et numérique de la fissure dans l'éprouvette.	142
5.30	PMMA : longueur de la fissure en fonction du temps	142
5.31	PMMA : direction de la fissure en fonction du temps	143
A.1	Fonction d'enrichissement Ψ utilisée pour décrire la discontinuité faible .	147
A.2	Pas de temps critique avec discontinuité faible	148

Table des figures

Liste des tableaux

1.1	Valeurs des coefficients dans la loi d'endommagement plastique linéaire . 29
3.1	Résumé des propriétés des schémas numériques de Newmark 82
4.1	Tableau des pas de temps critiques de l'élément fini monodimensionnel . 99
4.2	Tableau des pas de temps critiques de l'élément enrichi monodimensionnel 100
4.3	Valeur minimale du pas de temps critique normalisé en 1D
4.4	Tableau des pas de temps critiques pour différents éléments
4.5	Démonstration de la prise en compte de la discontinuité
5.1	Tableau des caractéristiques des trois calculs pour le mode 1 pur 126
5.2	Paramètres utilisés pour Kalthoff avec le critère en contrainte non locale . 130
5.3	CCS : Pas de temps et maillage utilisés pour les trois calculs
5.4	CCS : Temps CPU des différentes simulations 2D
5.5	PMMA : caractéristiques mécanique de l'éprouvette

Liste des tableaux

Introduction

La simulation numérique est aujourd'hui un outil très utilisé lors des différentes phases de conception et de validation des pièces et structures industrielles. Elle permet d'évaluer avec plus de précisions les comportements des structures et des matériaux permettant ainsi aux industriels un gain de coût. Les coûts de calcul restent cependant une limitation à l'utilisation industrielle systématique de codes. Aussi les techniques numériques sont elles continûment améliorées.

La mécanique de l'endommagement et de la rupture est une science plutôt récente (début du XXème siècle). Les motivations provenaient des problèmes de dimensionnement dans un premier temps, puis du comportement des structures. La théorie de l'endommagement décrit l'évolution des phénomènes entre l'état initial vierge et l'apparition d'une macro fissure. Quant à la mécanique de la rupture, elle prévoit l'évolution de macro fissures dans le milieu.

La rupture au niveau macroscopique était étudiée depuis longtemps. En fait vers 1500, Léonard de Vinci se préoccupait de décrire la rupture en utilisant des variables mécaniques. Et de nombreux critères ont été proposés à l'aide de ces variables (telles que la déformation, la contrainte...) par Tresca, Von Mises, Rankine [RAN 70] et Mohr. En 1920, Griffith [GRI 21] relie la rupture d'un milieu élastique à une variable appelée plus tard taux de restitution d'énergie. La mécanique de l'endommagement est réellement apparue en 1958 avec son premier mémoire publié par Kachanov. Mais c'est un peu plus tard, vers 1970, que cette notion est réutilisée en Europe (Lemaître, Chaboche [LEM 90], Hult [HUL 74], Leckie [PES 63] et Murakami [MUR 82] au Japon). Au cours des années 70, l'approche thermodynamique a permis de relier la fissuration à des grandeurs énergétiques et des variables d'état. La période 1960-1980 présente une grande avancée dans la progression de la mécanique de la rupture. De nombreux ouvrages de référence ont été publiés durant cette période [IRW 57, BAR 59, DUG 60, BAR 62, RIC 68, RIC 68, SHA 71, HUS 74, JAN 77, FRE 78, BUI 78, BAZ 78, RIC 80]. L'apparition d'ordinateurs toujours plus puissants a permis d'inscrire cette théorie dans des simulations et d'améliorer les identifications et l'analyse des phénomènes physiques de fissuration. L'approche numérique de la mécanique de la rupture et de l'endommagement se développe alors jusqu'à nos jours avec des méthodes toujours plus modernes et novatrices, et des modèles plus fins.

Ces dernières années ont vu se développer les méthodes numériques de calcul s'attachant à prévoir l'évolution de l'endommagement et la propagation de fissure. La motivation de ces développements provient d'un réel besoin industriel : la prédiction de la tenue mécanique des structures. Ainsi pour l'industrie nucléaire, la tenue mécanique des cuves de réacteur de centrale nucléaire est un enjeu très important pour définir plus précisément la durée de vie : l'âge des centrales nucléaires nécessite de nouvelles expertises et prédictions de durée de vie. Le groupe SAFRAN, fabricant de réacteurs d'avion, souhaite également prédire la tenue de ses aubes à l'ingestion d'oiseau. Ce cas de figure est primordial pour un turboréacteur, et il est même un cas très précis de validation expérimentale de la part des autorités.

Un des objectifs de cette thèse est d'implémenter de manière robuste la méthode des éléments finis étendus (X-FEM) dans le code de calcul EUROPLEXUS du CEA Saclay pour la simulation numérique de propagation dynamique de fissure. Cette méthode [BEL 99] permet au maillage de s'affranchir de la description explicite de la fissure ; la présence de la fissure est prise en compte à l'aide de fonctions de forme supplémentaires dites d'enrichissement, qui décrivent cinématiquement la discontinuité.

Le deuxième travail est basé sur un partenariat avec le groupe SAFRAN et l'ONERA Châtillon pour la modélisation du comportement endommageable des aubes de soufflante en composite tissé. L'objectif ici est de développer un modèle d'endommagement de composites qui permette de prédire le comportement des aubes lors d'ingestion d'oiseau ou de perte d'aube. L'endommagement est la principale grandeur à prévoir.

Comme dans tout développement de méthodes numériques, il paraît essentiel de confronter les résultats de simulations avec les expériences. Ainsi les résultats des expériences proviennent du groupe SAFRAN en ce qui concerne la modélisation de l'endommagement, et du LaMCoS concernant la fissuration. Les expériences de propagations explicitées dans ce mémoire sont tirées de référence récentes (Maigre [RIT 96]) ou ont été effectuées au Laboratoire de Mécanique des Solides de l'École Polytechnique par Grégoire [GRÉ 07].

Le plan de ce mémoire suit donc la chronologie du phénomène de rupture : la caractérisation de la croissance de l'endommagement décrivant les évolutions des microfissures, puis la macro-fissuration définissant la rupture. Le premier chapitre montre le développement de deux modèles d'endommagement anisotrope appliqué aux composites : un premier basé sur le découplage des différents endommagements, et un second plus riche dans la description. Ce second modèle dit "ONERA Damage Model" ou ODM, est né de la description des composites CMC. Il est ici étendu à la caractérisation d'un composite tissé développé par le groupe SAFRAN. Il décrit statiquement et dynamiquement le comportement du matériau dans les directions principales. L'identification des caractéristiques a été effectuée par l'ONERA Châtillon et SAFRAN. Le caractère confidentiel du matériau fait qu'aucune caractéristique mécanique n'a pu être explicitée dans ce mémoire. Néanmoins les développements et les simulations restent très pertinents vis à vis de la réalité.

Le premier chapitre traite de la modélisation de l'endommagement, appliqué en particulier pour un matériau composite, qui apportera le caractère anisotrope aux développements. L'application visée est la simulation de l'ingestion d'oiseau dans un moteur d'avion SNECMA. Un modèle présentera aussi un certain critère de rupture permettant à la simulation de décrire un comportement de rupture, et les zones critiques où apparaissent les macro-fissures. Le deuxième chapitre explicite la théorie de la mécanique de la rupture qui pilote la propagation de fissure. Un nouveau critère de propagation sera alors développé. Le troisième chapitre présente l'état de l'art des méthodes numériques utilisées pour la simulation numérique de propagation de fissure, et de mouvements d'interface mobile; la méthodologie correspondant à l'utilisation de fonctions de niveau est aussi développée. Ensuite le quatrième chapitre insiste sur la théorie de l'implémentation de la méthode des éléments finis étendus (X-FEM) dans un code de dynamique explicite en développant longuement les travaux effectués sur les pas de temps critiques et la matrice des masses. La stratégie développée vérifie aussi la non propagation d'onde à travers la discontinuité. Enfin, le cinquième chapitre présente dans un premier temps la stratégie d'implémentation de X-FEM dans le code EUROPLEXUS du CEA, et dans un second temps, quatre applications numériques qui valident les théories développées.

Introduction

Chapitre 1

Modélisation d'endommagement de composites

Ce premier chapitre présente les travaux de recherche effectués en collaboration avec le Groupe SAFRAN de Villaroche, et l'ONERA de Châtillon. Ces travaux portent sur le développement de modèles d'endommagement pour les composites utilisés dans la conception d'aubes de soufflante de turbomoteurs SNECMA.

Sommaire

1.1	Introd	luction	23
1.2	État d	le l'art	23
	1.2.1	Mécanisme d'endommagement	23
	1.2.2	Concepts généraux de la mécanique continue de l'endommagement	24
	1.2.3	Modèles d'endommagement	26
	1.2.4	Endommagement : phénomène de localisation	26
1.3	Dévelo	oppement d'un premier modèle d'endommagement orthotrope	28
1.4	Dévelo	oppement du modèle d'endommagement de l'ONERA	29
	1.4.1	Introduction générale du modèle	29
	1.4.2	Endommagement de la matrice	31
	1.4.3	Endommagement des fibres	35

	1.4.4	Loi de comportement endommagée générale	36
	1.4.5	Validation du calcul de l'endommagement matriciel	37
	1.4.6	Validation du calcul de l'endommagement des fibres	48
1.5	Applic	ations numériques	49
	1.5.1	Éprouvette en traction	49
	1.5.2	Impact sur panneau	49
1.6	Conclu	usion et perspectives	53

1.1 Introduction

Ces travaux ont été effectués en collaboration avec les personnes du bureau des méthodes de SAFRAN (A. Menjot de Champfleur, A. Suffis, L. Idoux), du département Composites (D. Marsal, B. Dambrine) et avec l'ONERA Châtillon (J.F. Maire, N. Carrere et L. Marcin). Le but est de développer un outil de calcul prédictif pour la simulation d'ingestion d'oiseau basé sur le comportement du matériau composite utilisé. Dans un premier temps, un modèle d'endommagement orthotrope assez simple avec des lois d'endommagement linéaires en déformation a été développé. Ensuite, le travail s'est concentré sur un modèle d'endommagement de composites CMC développé à l'ONERA depuis une dizaine d'années, afin de caractériser les phénomènes d'endommagement matriciel. Ensuite, ce modèle a été enrichi afin de prévoir un comportement jusqu'à rupture : pour ce faire, la modélisation de la rupture des fibres a été nécessaire. Le modèle développé ciaprès a donc la particularité de décrire la mécanique de l'endommagement jusqu'au début de la rupture par macro fissuration. Le modèle ne permet pas de détailler la mécanique de la rupture, mais prédit le comportement et les variables d'endommagement jusqu'à l'initiation de macro fissures. Enfin, une première simulation numérique a permis d'identifier les paramètres du modèle, et la seconde permet de comparer les résultats d'un panneau, représentant une aube, impacté par un projectile.

1.2 État de l'art

1.2.1 Mécanisme d'endommagement

La référence [LEM 90] présente dans un premier temps la notion d'endommagement. Cette notion d'endommagement est une spécificité générale des matériaux et existe dans des matériaux homogènes (isotropes ou anisotropes) et hétérogènes (isotropes ou anisotropes). Les composites font partie des classes de matériaux endommageables. Ce terme d'endommagement décrit une dégradation des caractéristiques mécaniques du matériau : diminution du module d'Young par exemple. Ainsi, si l'on considère une structure, de section initiale A^0 , soumise à un essai de traction, on pourra arriver à la rupture de la structure. Mais bien avant cela, on peut observer que le module d'Young a diminué. On peut imaginer faire cet essai sur plusieurs éprouvettes, et à des instants différents, stopper l'essai pour mesurer le module d'Young. Ce module, qui était de E_0 initialement, diminuera. En fait, pendant le chargement, se forment des micro-fissures dans la section rendant le matériau moins raide. La figure 1.1 présente l'évolution de la contrainte en fonction de la déformation pour cet essai de traction jusqu'à rupture. C'est à dire que la section utile dans l'essai n'est pas constante à A^0 , mais diminue un peu : on note cette section utile courante A. On définit la section endommagée A^D comme étant $A^0 - A$, qui représente la quantité de cavités dans la matière. On peut alors définir l'endommagement comme étant le rapport de la section endommagée sur la section initiale.

$$d = \frac{A^D}{A^0} \tag{1.1}$$



FIG. 1.1: Courbe type contrainte déformation jusqu'à rupture.

La figure 1.2 illustre cette relation en présentant la section initiale composée des cavités et de la section utile. En considérant que le module d'Young est proportionnel à la surface



FIG. 1.2: Coupe d'une structure endommagée.

utile, alors on peut en déduire que :

$$\frac{E_0}{A^0} = \frac{E}{A} \tag{1.2}$$

On en déduit les relations suivantes entre l'endommagement, les modules d'Young (notés E et E_0 pour le module initial) et les modules de souplesse (notés S et S_0 pour le module initial).

$$d = \frac{E_0 - E}{E_0} \Leftrightarrow E = E_0(1 - d) \Leftrightarrow S(1 - d) = S_0$$
(1.3)

Cette équation montre les liens entre les modules de raideur et de souplesse endommagés. Donc les modèles peuvent aussi bien utiliser l'une ou l'autre des notations pour l'écriture.

1.2.2 Concepts généraux de la mécanique continue de l'endommagement

L'objet de cette partie est de définir le cadre thermodynamique [LEM 90] nécessaire à la description des phénomènes physiques au sein des matériaux. Il faut noter que toutes les formulations et les développements des modèles sont à l'échelle macroscopique. Elles font partie de la mécanique des milieux continus, qui constitue la bas des techniques modernes de calcul de structure. Ainsi, bien que le matériau puisse faire apparaître des discontinuités physiques aux différentes échelles de la structure (des micro-fissures par exemple), elles sont pas traduites mais simplement décrites de façon globale au niveau homogénéisé d'un élément de volume. Grâce à cette vision globale, les modèles pourront être intégré dans des codes de calcul éléments finis (comme EUROPLEXUS du CEA Saclay).

On va considérer une théorie basée sur l'existence de deux potentiels :

 dans le cas d'une écriture en déformation, le potentiel choisi est appelé énergie libre d'Helmholtz :

$$\Psi = \Psi(\varepsilon, d_i) \tag{1.4}$$

- et pour une formulation en contrainte, le potentiel est l'énergie de Gibbs, telle que $\Psi + \Phi = \sigma$: ϵ , soit :

$$\Phi = \Phi(\sigma, d_i) \tag{1.5}$$

Le modèle du matériau endommagé est entièrement déterminé à partir de la connaissance de ces deux potentiels. Le potentiel thermodynamique est une fonction des variables d'état séparées en variables observables, comme la température, et en variables internes, comme l'endommagement.

L'inégalité de Clausius-Duhem, qui exprime le second principe de la thermodynamique, fait le bilan énergétique du travail et de la chaleur dépensés dans un élément de volume. On peut écrire cette relation :

$$\boldsymbol{\varepsilon} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\rho} \left(s \dot{T} - \dot{\boldsymbol{\Phi}} \right) + \mathbf{q} \cdot \frac{\mathbf{grad}(T)}{T} \le 0 \tag{1.6}$$

On peut ainsi obtenir les différentes lois d'état. Par exemple une transformation élastique à température constante et uniforme qui ne modifie ni la déformation plastique ni les variables internes, conduit à la définition de la loi de comportement élastique :

$$\varepsilon = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \tag{1.7}$$

Par analogie avec les relations précédentes, on définit les variables forces thermodynamiques Y_i associées aux variables internes d_i par :

$$Y_i = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial d_i} \tag{1.8}$$

Pour compléter le modèle il faut décrire la cinétique d'endommagement, c'est à dire la loi d'évolution. En d'autres termes, la cinétique d'endommagement est donnée par la relation liant les forces thermodynamiques et sa variable d'état associée. Cette relation ne dépend que de la variable Y_i . Pour donner un caractère irréversible et vérifier aussi le second principe, le potentiel des dissipations est identifié à la surface limitant le domaine de non endommagement. Le seuil d'endommagement s'écrit :

$$F(T_i, d_i) \le 0 \tag{1.9}$$

Donc on décrit ainsi les trois scénarios suivants :

- si F < 0, alors comportement iso-endommagé ($\dot{d} = 0$),
- si F = 0 et $\dot{F} = 0$, alors évolution de l'endommagement ($\dot{d} > 0$),
- si F = 0 et $\dot{F} < 0$, alors décharge iso-endommageante ($\dot{d} = 0$).

Tout le problème de modélisation réside dans la détermination des expressions analytiques du potentiel thermodynamique et critère d'endommagement, ainsi que leur identification d'après des expériences.

1.2.3 Modèles d'endommagement

On constate que dans les modèles d'endommagement, la localisation impose que le modèle possède une longueur caractéristique. Ainsi on peut dire qu'il existe quatre grandes familles de modèles :

- Modèles non locaux : il y a une longueur interne, car les grandeurs sont moyennées sur l'espace par une sorte de Gaussienne nécessitant cette longueur caractéristique du matériau,
- Modèles à gradient d'ordre supérieur (Lasry et Belytschko [LAS 88, BEL 89]) phase post-pic de l'endommagement,
- Modèles de comportement à effet de vitesse (de Borst [PEE 96, PEE 98, GEE 98]) : très appliqués en dynamique,
- Modèle d'endommagement retardé (Ladevèze [LAD 95], Suffis [SUF 04, SUF 03]) ou à effet retard, qui présente un taux de croissance d'endommagement d majoré.

1.2.4 Endommagement : phénomène de localisation

1.2.4.1 Mise en évidence

Le problème ici est la localisation artificielle des zones d'endommagement lors du calcul. C'est à dire que le champ d'endommagement dépend du maillage utilisé : orientation et finesse. On remarque que ce problème intervient aussi bien en statique qu'en dynamique. Par exemple, deux calculs dynamiques d'endommagement sur deux maillages différents (orientation et/ou finesse) d'une même structure donneront deux résultats différents en terme de dommage : les deux zones critiques endommagées ne seront pas localisées au même endroit. Suffis [SUF 04] illustre ce problème et propose une solution, qui est retenue et détaillée dans la partie suivante.

1.2.4.2 Correction : modèle à effet retard

Le modèle L'idée d'une limitation du taux d'endommagement est la base du modèle à effet retard [ALL 95] proposé par le LMT Cachan à partir des travaux de recherche de rup-

ture de composites [ALL 97, ALL 03]. Dans ce modèle, deux paramètres sont introduits : le premier est un temps caractéristique τ_c représentant l'inverse du taux d'endommagement maximum. Ce temps caractéristique peut être relié à une longueur l_0 caractéristique via la célérité des ondes de Rayleigh c_R par exemple : ainsi $l_0 = c_R \tau_c$. L'équation du taux de dommage s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{d} = \frac{1}{\tau_c} \left(1 - e^{-a \langle f(Y) - d \rangle_+} \right) & \text{si } d < d_c, \\ d = d_c & \text{sinon.} \end{cases}$$
(1.10)

où *a* est le second paramètre du modèle, f(Y) le dommage défini par la loi classique sans effet retard et *d* le dommage courant. En limitant ainsi le taux d'endommagement, les calculs sur maillages différents localisent les mêmes zones endommagées.

Les paramètres La détermination de ces deux paramètres est développée dans [SUF 04, SUF 03]. Nous allons proposer une théorie qui relie la formulation du taux de croissance de l'endommagement \dot{d} et celle de la vitesse de propagation de fissure \dot{a} . En admettant qu'une fissure a une vitesse d'avancée limite (environ $c_R/3$), alors on peut montrer que le taux d'endommagement est limité, et on peut aussi estimer sa valeur. On trouve ainsi que la vitesse de propagation limite d'une fissure est proportionnelle au taux d'endommagement limite. Considérons le problème 2D suivant : un carré de côté $2l_0$, ayant une fissure (débouchante) en son centre de longueur 2a, d'épaisseur b. La figure 1.3 montre ce volume cubique fissuré. La surface transmettant les efforts est de $2(l_0 - a)b$. L'endommagement d vaut donc : $d = a/l_0$ en première approximation. Le taux d'endommagement est donc relié à la vitesse de propagation de la fissure par la relation : $\dot{d} = \dot{a}/l_0$. De plus, on peut formellement écrire la longueur l_0 comme le produit $c_R \tau$ où τ est un temps. On obtient donc

$$\dot{d} = \frac{1}{\tau} \frac{\dot{a}}{c_R} \tag{1.11}$$

Il apparaît ainsi clairement que la limitation de la vitesse de propagation de la fissure se relie très naturellement à la limitation du taux de croissance de l'endommagement. Cette théorie peut servir de point de départ de recherche d'essai permettant de mesurer la



FIG. 1.3: Schéma d'un volume élémentaire fissuré.

vitesse maximale de propagation de fissure, et déterminer ainsi la caractéristique temporelle τ , ou la longueur l_0 du modèle à effet retard. Dans une expérience, on peut envisager d'exploiter le caractère observable de la vitesse de propagation de fissure, qui est lié à la caractéristique de la grandeur interne.

1.3 Développement d'un premier modèle d'endommagement orthotrope

L'objet dans un premier temps est de pouvoir évaluer l'endommagement dans un composite. N'ayant pas de modèle à notre disposition, nous avons choisi de proposer un modèle d'endommagement simple pour chacun des modules d'élasticité (3 modules de raideur et 3 modules de cisaillement) du matériau. De ce fait, 6 endommagements caractérisent donc ce premier modèle. Ainsi pour chacun, la loi d'endommagement utilisée est la suivante :

$$d = \begin{cases} d_c \left\langle \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_c - \varepsilon_0} \right\rangle_+ & \text{si} : \varepsilon \le \varepsilon_c, \\ d_c & \text{sinon.} \end{cases}$$
(1.12)

où $\langle X \rangle_+ = X$ si X > 0, 0 sinon. La figure 1.4 montre la relation entre un endommagement et sa déformation correspondante le pilotant.



FIG. 1.4: Évolution de l'endommagement en fonction de la déformation.

La matrice de souplesse endommagée s'écrit :

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\mathbf{v}_{12}/E_1 & -\mathbf{v}_{13}/E_1 & 0 & 0 & 0\\ -\mathbf{v}_{21}/E_2 & 1/E_2 & -\mathbf{v}_{23}/E_2 & 0 & 0 & 0\\ -\mathbf{v}_{31}/E_3 & -\mathbf{v}_{32}/E_3 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} \end{bmatrix}$$
(1.13)

où les modules d'Young et de cisaillement sont endommagés. La description des modules

en fonction des endommagements s'écrit :

$$E_1 = (1-d_1)E_1^0 (1.14)$$

$$E_2 = (1 - d_2)E_2^0 \tag{1.15}$$

$$E_3 = (1 - d_3)E_3^0 \tag{1.16}$$

$$G_{12} = (1 - d_{12})G_{12}^{0}$$
(1.17)
$$(1.17)$$

$$G_{23} = (1 - d_{23})G_{23}^{0}$$
(1.18)

$$G_{13} = (1 - d_{13})G_{13}^0 \tag{1.19}$$

En annexe C, se trouve le programme CAST3M qui simule un impact sur panneau en utilisant ce modèle à 6 variables d'endommagement. Le tableau 1.1 présente des valeurs de paramètres de la loi d'endommagement plastique ductile linéaire en déformation pour différents matériaux. Ce modèle ne s'adaptant pas parfaitement bien avec les composites,

Matériau	déformation	déformation	endommagement
	seuil ε_0	critique ε_c	critique d_c
Cuivre	0,35	1,04	0,85
Acier E24	0,50	0,88	0,17
Acier 30 CD4	0,02	0,37	0,24
Alliage AU 4G1	0,03	0,25	0,23

 TAB. 1.1: Tableau des valeurs des coefficients dans la loi d'endommagement plastique ductile linéaire en déformation

on choisit d'utiliser comme base de travail un modèle développé à l'ONERA Châtillon par Maire [MAI 98]. Le chapitre suivant décrit ce modèle et la description des phénomènes d'endommagement matriciel et de rupture de fibres.

1.4 Développement du modèle d'endommagement de l'ONERA

1.4.1 Introduction générale du modèle

1.4.1.1 Définition de l'endommagement

Dans un premier temps, la définition du dommage n'est pas celle utilisée dans la partie précédente. Effectivement le dommage d est défini comme étant le rapport de la surface des cavités A^D sur la surface actuelle endommagée A, et non la surface initiale A^0 , comme suivant :

$$d = \frac{A^D}{A} \tag{1.20}$$

Ces surfaces sont illustrées sur la figure 1.5. Ainsi, l'endommagement peut aussi s'écrire



FIG. 1.5: Coupe d'une structure endommagée.

en fonction des modules d'Young courant E et initial E_0 (ou des modules de souplesse courant S et initial S_0) :

$$d = \frac{E_0 - E}{E} \iff E = \frac{E_0}{1 + d} \iff S = S_0(1 + d)$$
(1.21)

On rappelle la relation entre le module de raideur *E* et le module de souplesse *S* : E = 1/S

1.4.1.2 Mise en évidence des différents endommagements

La figure 1.6 schématise les différents stades d'endommagement lors d'un essai à rupture sur un composite. De plus, la figure 1.7 présente pour ce même essai, l'évolution de la contrainte en fonction de la déformation. De ces deux figures, trois étapes sont





mises en valeur :

- 1. le comportement élastique linéaire gouverne l'essai,
- 2. puis l'endommagement matriciel intervient,
- 3. et enfin l'endommagement des fibres devient prépondérant.

Cette succession d'étapes d'endommagement va permettre de modéliser le phénomène en deux étapes aussi. Vaziri [WIL 99, WIL 01, WIL 03] présente un modèle d'endommagement de la matrice et des fibres qui est basé sur ces différentes étapes mises en évidence ci-dessus.



FIG. 1.7: Évolution de la contrainte en fonction de la déformation mettant en évidence les différents endommagements : de la matrice et des fibres.

1.4.1.3 Loi de comportement d'un matériau orthotrope

La matrice de souplesse \mathbb{S}^0 d'un matériau orthotrope suivant les directions 1, 2 et 3 est décrite par :

$$\mathbb{S}^{0} = \begin{bmatrix} S_{11}^{0} & S_{12}^{0} & S_{13}^{0} & 0 & 0 & 0\\ S_{21}^{0} & S_{22}^{0} & S_{23}^{0} & 0 & 0 & 0\\ S_{31}^{0} & S_{32}^{0} & S_{33}^{0} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & S_{44}^{0} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55}^{0} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66}^{0} \end{bmatrix}$$
(1.22)

où le termes sont exprimés en fonction des modules d'Young, de cisaillement et des coefficients de Poisson comme suivant : $S_{11}^0 = 1/E_1^0$, $S_{22}^0 = 1/E_2^0$, $S_{33}^0 = 1/E_3^0$; $S_{12}^0 = S_{21}^0 = -v_{12}/E_1^0$, $S_{13}^0 = S_{31}^0 = -v_{13}/E_1^0$, $S_{23}^0 = S_{32}^0 = -v_{23}/E_2^0$; $S_{44}^0 = 1/G_{12}^0$, $S_{55}^0 = 1/G_{23}^0$, $S_{66}^0 = 1/G_{13}^0$.

1.4.2 Endommagement de la matrice

1.4.2.1 Description de l'endommagement matriciel

La figure 1.8 présente l'évolution de la contrainte en fonction de la déformation et fait apparaître un endommagement matriciel sur les différentes courbes. De plus, les comportements de l'endommagement en traction et compression ne sont pas similaires ; les micro-fissures s'ouvrent et se referment, et quand elles sont fermées, l'endommagement est dit passif : il n'a a pas d'endommagement en compression car la matière est compacte au point d'être considérée comme homogène sans cavité (voir figure 1.8).



FIG. 1.8: L'endommagement matriciel vu sur la courbe contrainte-déformation.

1.4.2.2 Forces thermodynamiques

En partant du tenseur des déformations général ε , on peut construire :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{+} = \mathbb{P}.\left\langle \boldsymbol{\varepsilon}^{diag} \right\rangle_{+}.\mathbb{P}^{T} = \mathbb{P}.\left(\begin{array}{ccc} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{I} \rangle_{+} & 0 & 0\\ 0 & \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{II} \rangle_{+} & 0\\ 0 & 0 & \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{III} \rangle_{+} \end{array}\right).\mathbb{P}^{T}$$
(1.23)

où ε_I , ε_{II} , ε_{III} sont les valeurs propres du tenseur des déformations.

Pour ce modèle purement scalaire, qui ne comporte que trois variables d'endommagement correspondant aux trois directions principales du matériau, il faut distinguer le forces thermodynamiques normales et tangentielles pour leur associer des cinétiques d'endommagement différentes. Ceci peut être comparé à la distinction des modes 1, 2 et 3 en mécanique de la rupture.

Ces différentes forces thermodynamiques correspondent aux endommagements dans les diverses directions sont les suivantes :

$$y_i^n = \frac{1}{2} \mathbb{C}_{ii}^0 \cdot \varepsilon_i^+ \cdot \varepsilon_i^+ \text{ for } i \in \{1, 2, 3\}$$
 (1.24)

$$y_1^t = (b_1.\mathbb{C}_{66}^0.\mathbb{c}_{13}^+.\mathbb{c}_{13}^+ + b_2.\mathbb{C}_{44}^0.\mathbb{c}_{12}^+.\mathbb{c}_{12}^+)$$
(1.25)

$$y_2^t = (b_3.\mathbb{C}_{55}^0.\mathbb{E}_{23}^+.\mathbb{E}_{23}^+ + b_4.\mathbb{C}_{44}^0.\mathbb{E}_{12}^+.\mathbb{E}_{12}^+)$$
(1.26)

$$y_3^t = (b_5.\mathbb{C}_{66}^0.\mathbb{e}_{13}^+.\mathbb{e}_{13}^+ + b_6.\mathbb{C}_{55}^0.\mathbb{e}_{23}^+.\mathbb{e}_{23}^+)$$
(1.27)

1.4.2.3 Loi d'endommagement matriciel

Il est à noter que le critère dépend explicitement des forces thermodynamiques. La force motrice de l'augmentation des défauts est la force thermodynamique. Autrement dit, la cinétique d'endommagement est donnée par les relations liant les variables d'endommagement et leurs forces thermodynamiques associées. Ici, ces relations ne dépendent par du chargement. Pour vérifier le second principe de la thermodynamique [MAI 92b, MAI 95, CHA 96, CHA 01] et avoir un caractère irréversible, le potentiel de

dissipation est restreint à la surface limitant le domaine non endommagé. Ainsi, le seuil d'endommagement s'exprime par une fonction indicatrice F de ce potentiel dans l'espace des variables force thermodynamique :

$$F(y,d) \le 0 \tag{1.28}$$

Parfois cette fonction scalaire avec seuil peut être remplacée par une fonction d'hérédité [LAD 95] :

$$y(t) = \sup_{\tau \in [0,t]} y(\tau) \tag{1.29}$$

De là, la loi d'endommagement est décrite par :

$$F_i(y_i, d_i^m) = g_i^n(y_i^n) + g_i^t(y_i^t) - d_i^m$$
(1.30)

avec

$$g_{i}^{n}(y_{i}^{n}) = d_{c(i)}^{n} \cdot \left(1 - e^{-\left(\frac{\left\langle\sqrt{y_{i}^{n}} - \sqrt{y_{o(i)}^{n}}\right\rangle_{+}}{\sqrt{y_{c(i)}^{n}}}\right)^{p^{n}}}\right)$$
(1.31)

La figure 1.9 présente la loi d'endommagement matriciel du modèle ODM. On visualise ainsi le seuil de déformation à partir duquel la matrice commence à s'endommager, et l'endommagement critique.



FIG. 1.9: Évolution de l'endommagement matriciel en fonction de la déformation.

1.4.2.4 Paramètres de désactivation du dommage

Pour la fermeture progressive, on définit l'index de désactivation par :

$$\eta_{i}^{m} = \begin{cases} 1 & \text{si} : \Delta \varepsilon_{i}^{f} \leq \bar{\varepsilon}_{i} \\ \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{\Pi}{2} \frac{\bar{\varepsilon}_{i} + \Delta \varepsilon_{i}^{f}}{\Delta \varepsilon_{i}^{f}}\right) \right) & \text{si} : -\Delta \varepsilon_{i}^{f} \leq \bar{\varepsilon}_{i} \leq \Delta \varepsilon_{i}^{f} \\ 0 & \text{si} : \bar{\varepsilon}_{i} \leq -\Delta \varepsilon_{i}^{f}. \end{cases}$$
(1.32)

où $\Delta \varepsilon_i^f = (1 + aif di) \Delta \varepsilon_i^0$. And $d_c^n(i)$, $p_{(i)}^n$, $y_{o(i)}^n$, $y_{c(i)}^n$, $d_c^t(i)$, $p_{(i)}^t$, $y_{o(i)}^t$, $y_{c(i)}^t$, a_i^f , $\Delta \varepsilon_i^0$ sont des paramètres du modèle. La figure 1.10 présente l'évolution du paramètre de désactivation du dommage en fonction de la déformation correspondante.



FIG. 1.10: Évolution du paramètre de désactivation en fonction de la déformation principale.

1.4.2.5 Déformations résiduelles

Déformation stockée ε_s La figure 1.11 explique comment naît la contrainte résiduelle dite stockée ε_s . Effectivement avec le chargement indiqué (a, b, c puis d), la refermeture de la fissure (c) créera alors une déformation stockée (vue en d) dûe au contact des lèvres de la fissure lors de la refermeture. On note donc que la distance AB initialement nulle, n'est pas zéro à la fin du chargement. On parle alors de déformation stockée. Elle est évaluée de la façon suivante :

$$\dot{\varepsilon}_{s} = \mathbb{S}^{0} : \left(\sum_{i} \dot{\eta}_{i}^{m} . d_{i}^{m} . \mathbb{C}^{mf} : \mathbb{H}_{i}^{0} : \mathbb{C}^{mf} \right) : \bar{\varepsilon}$$
(1.33)



FIG. 1.11: Contact unilatéral et déformation résiduelle correspondante.

Déformation résiduelle ε_r Cette déformation résiduelle provient de la micro-plasticité qui apparaît aux pointes des micro-fissures, et qui fait qu'il peut exister une déformation plastique. Cette déformation résiduelle peut être évaluée via leur taux de variation :

$$\dot{\varepsilon}_r = \mathbb{S}^0 : \left(\sum_i \xi_i . \eta_i^m . \dot{d}_i^m . \mathbb{C}^{mf} : \mathbb{H}_i^0 : \mathbb{C}^{mf} \right) : \bar{\varepsilon}$$
(1.34)

1.4.3 **Endommagement des fibres**

1.4.3.1 Description

À présent, la rupture des composites passe par l'étape d'endommagement des fibres (voir les figures 1.6 et 1.7). Dans le composite considéré, il y a deux directions de fibres : sens 1 et 2. Cependant l'endommagement en cmopression et traction n'ont pas les mêmes caractéristiques, alors on introduit quatres endommagements (pour deux directions seulement):

- endommagement de traction dans le sens $1: d_{1t}^f = d_1^f$, endommagement de compression dans le sens $1: d_{1c}^f = d_2^f$,
- endommagement de traction dans le sens 2 : $d_{2t}^f = d_3^f$, endommagement de compression dans le sens 2 : $d_{2c}^f = d_4^f$,

Forces thermodynamiques 1.4.3.2

Cette rupture est gouvernée par les forces thermodynamiques suivantes :

$$y_{ii}^{f} = \frac{1}{2} \varepsilon_{i} \mathbb{C}_{ii}^{0} < \varepsilon_{i} >_{+} \text{ pour } i \in \{1, 2\}$$

$$(1.35)$$

$$y_{ic}^{f} = \frac{1}{2} \varepsilon_{i} \mathbb{C}_{ii}^{0} < \varepsilon_{i} >_{-} \text{ pour } i \in \{1, 2\}$$

$$(1.36)$$

1.4.3.3 Loi d'endommagement

En utilisant le même type de loi d'endommagement avec des paramètres distincts, l'endommagement des fibres s'écrit :

$$d_{i}^{f} = d_{i}^{cf} \cdot \left(1 - e^{-\left(\frac{\left\langle \sqrt{y_{i}^{f}} - \sqrt{y_{i}^{of}} \right\rangle_{+}}{\sqrt{y_{i}^{cf}}}\right)^{p_{i}^{f}}} \right) \text{ pour } i \in \{1, 2, 3, 4\}$$
(1.37)

1.4.4 Loi de comportement endommagée générale

Le relation de comportement contrainte déformation globale est la suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}^{mf} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbb{C}^m \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{plastic} \tag{1.38}$$

La déformation plastique $\varepsilon_{plastic}$ est définie comme étant la somme des déformations résiduelles ε_s et ε_r :

$$\varepsilon_{plastic} = \varepsilon_r + \varepsilon_s \tag{1.39}$$

Et les matrices de raideur \mathbb{C}^{mf} et \mathbb{C}^m sont décrites :

$$\mathbb{C}^{mf} = \left(\mathbb{S}^{0} + \sum_{i=1}^{3} \eta_{i}^{m} . d_{i}^{m} . \mathbb{H}_{i}^{m} + \sum_{j=1}^{4} d_{j}^{f} . \mathbb{H}_{j}^{f}\right)^{-1}$$
(1.40)

$$\mathbb{C}^m = \left(\mathbb{S}^0 + \sum_{i=1}^3 \eta_i^m . d_i^m . \mathbb{H}_i^m\right)^{-1}$$
(1.41)

où les matrices 6x6 \mathbb{H}_i^m sont définies par :

Tenseurs des effets du dommage matriciel \mathbb{H}_1^m , \mathbb{H}_2^m , \mathbb{H}_3^m :
Tenseurs des effets des dommages des fibres $\mathbb{H}_1^f, \mathbb{H}_2^f, \mathbb{H}_3^f, \mathbb{H}_4^f$:

$$\mathbb{H}_{j}^{f} = \begin{bmatrix} h_{11}^{fj}.S_{11}^{0} & h_{12}^{fj}.S_{12}^{0} & h_{13}^{fj}.S_{13}^{0} & 0 & 0 & 0\\ h_{21}^{fj}.S_{21}^{0} & h_{22}^{fj}.S_{22}^{0} & h_{23}^{fj}.S_{23}^{0} & 0 & 0 & 0\\ h_{31}^{fj}.S_{31}^{0} & h_{32}^{fj}.S_{32}^{0} & h_{33}^{fj}.S_{33}^{0} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & h_{44}^{fj}.S_{44}^{0} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{55}^{fj}.S_{55}^{0} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{66}^{fj}.S_{66}^{0} \end{bmatrix} \text{ pour } j \in \{1, 2, 3, 4\}$$

$$(1.45)$$

1.4.5 Validation de l'implémentation : endommagement de matrice

Dans ce paragraphe, on va comparer les calculs EUROPLEXUS et les calculs Matlab de l'ONERA, pour différents cas de chargements. Le but ici, est clairement de valider l'implémentation dans EUROPLEXUS, en trouvant des résultats similaires pour chacun des deux calculateurs (Matlab et Europlexus). L'éventail des différents cas tests permettra ainsi de valider définitivement l'implémentation du modèle d'endommagement de l'ONERA dans le code Europlexus.

1.4.5.1 Introduction à la validation

Dans ce chapitre, on va traiter des différents cas tests de validation pour le modèle de l'ONERA. Le modèle sera ainsi utilisé sous les 3 types de chargements suivants :

- 1. traction dans le sens chaîne : chargement axial dans la direction principale (1 ou 2) du composite,
- 2. traction pour un composite +/-45 degrés : chargement axial dans une direction intermédiaire (entre les directions 1 et 2 du composite),
- 3. traction dans le sens hors plan : chargement hors plan, dans la direction 3 du composite.

Les figures 1.12, 1.20 et 1.26 présentent la schématisation des trois simulations.

1.4.5.2 Traction dans le sens "chaine"

L'expérience On s'interesse ici à un essai de traction quasi-statique dans le sens "chaine" du composite. La figure 1.12 présente les directions de chargement et principales du composite. Dans cette configuration à 0 degré, la base d'axes (x,y,z) est égale à la base d'axes (1,2,3) du composite. Il faut donc noter que :

$$\begin{cases} "1" = "x" \\ "2" = "y" \\ "3" = "z" \end{cases}$$
(1.46)



FIG. 1.12: Essai de traction à 0 degré sur le composite.

Analytiquement, on obtient la figure 1.13. Cette figure présente l'évolution du dommage en fonction de la déformation pour le cas de traction suivant la direction 1. Cette figure 1.13 montre aussi la déformation pour laquelle l'endommagement est 90% de l'endommagement critique; c'est à dire une déformation de $13.56E^{-3}mm/mm$. La figure 1.14



FIG. 1.13: évolution analytique du dommage en fonction de la déformation (mm/mm) pour le modèle ODM, avec les caractéristiques du matériau utilisées pour la validation.

présente l'évolution de la contrainte de traction en fonction du temps, ce qui représente aussi le chargement. Il s'agit d'un chargement cyclique qui permet d'utiliser davantage le modèle dans les transitions traction-compression. Dans ce cas, les index d'activation jouent un rôle important et sont parfois supérieurs à 1/2 (compression : endommagement actif) parfois inférieur (traction : endommagement passif). De plus on atteint un endommagement final de 0,78, qui est quasiment l'endommagement critique 0,8.

Les résultats Le résultat visuellement le plus important est représenté sur le graphique $\sigma(\varepsilon)$: la figure 1.15 présente l'évolution de la contrainte $\sigma_{11} = \sigma_{xx}$ en fonction de la déformation $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{xx}$ pour les deux calculs effectués avec Matlab et avec Europlexus. Il permet de visualiser le comportement non linéaire du matériau durant les différents cycles. On constate une nette corrélation entre les résultats Matlab et EUROPLEXUS pour un comportement clairement non linéaire du matériau. De même, la figure 1.17 pré-



FIG. 1.14: Composite 0 degré : Contrainte 11 en fonction du temps.



FIG. 1.15: Composite 0 degré : Contrainte 11 en fonction de la déformation 11.



FIG. 1.16: Composite 0 degré : Endommagement 1 en fonction du temps.



FIG. 1.17: Composite 0 degré : Endommagement 1 en fonction de la déformation 1.

sente l'évolution de l'endommagement d_1 en fonction de la déformation $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{xx}$ pour les deux calculs, et en plus pour le cas analytique de la loi d'endommagement directement. On peut comparer les résultats obtenus avec la solution analytique donnée sur la figure 1.13. Il faut aussi noter (qui n'est pas représenté dans un graphique) que les endommagements d_2 et d_3 sont nuls pour les 2 calculs. On constate aisément que les résultats EUROPLEXUS/Matlab sont très similaires. La limite de corrélation des 2 résultats est dûe à Matlab, qui donne les résultats avec 6 chiffres significatifs maximum. La figure 1.18 présente les évolutions de l'index d'activation 1 en fonction du temps pour les 2 calculs Matlab et EUROPLEXUS. La figure 1.19 présente l'évolution de la déformation résiduelle générale en fonction du temps pour les 2 calculs. Ce qu'on ne voit pas très bien



FIG. 1.18: Composite 0 degré : index d'activation 1 en fonction du temps.

sur les figures 1.14, 1.15, 1.16, 1.17, 1.18, et 1.19, est le fait qu'il y a bien deux courbes superposées : la courbe EUROPLEXUS et la courbe Matlab. Ce qui permet de conclure que les 2 calculs donnent les mêmes résultats.

À la suite de tous ces résultats, on peut en conclure que **l'essai de traction ''chaîne''** est validé.

Dans le sens transverse (traction-compression dans le sens 2 et non dans le sens 1), Matlab ne permet pas d'avoir des caractéristiques différentes entre les directions 1 et 2. Donc pour la validation, un essai dans la direction 2 donne exactement les mêmes résultats que dans la direction 1 (car les caractéristiques matériaux 1 et 2 sont obligatoirement égales dans Matlab).

1.4.5.3 Traction pour un composite +/-45 deg

L'expérience On s'intéresse ici à un essai de traction quasi-statique, à 45 degrés des directions principales du composite. La figure 1.20 présente les directions de chargement



FIG. 1.19: Composite 0 degré : déformation résiduelle globale 1 en fonction du temps.

et principales du composite. Ici, l'effet du cisaillement sera important, et les déformations en cisaillement influenceront le calcul de l'endommagement.



FIG. 1.20: Essai de traction à 45 degré sur le composite.

Les résultats La figure 1.21 présente l'état de déformation de l'élément pour un chargement raisonnable donné. L'amplitude des déformation est de 1. On trace de la même façon que la partie précédente, les relations entre contraintes, déformations, et endommagements calculés avec EUROPLEXUS, et avec Matlab (ODM implanté dans Matlab à l'Onera Châtillon). La figure 1.22 présente la relation entre la contrainte σ_{11} et la déformation ε_{11} . De même, la figure 1.23 présente la relation entre la contrainte de cisaillement σ_{12} et la déformation ε_{12} associée.

Les résultats des calculs EUROPLEXUS et Matlab sont conformes au fait que :

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = +/-\sigma_{12} \tag{1.47}$$

ce qui est vérifié par le changement de base à 45 degrés.

Le "+/-" dans l'équation 1.47 vient du fait qu'il s'agit d'un composite à +45 ou -45 degrés.



FIG. 1.21: Composite +/-45 : États non déformé et déformé de l'élément (amplitude 1).

Donc on ne s'intéressera pas aux variables "redondantes". De la même façon, les endommagements d_1 et d_2 sont égaux (car on a affaire à un composite 45 degrés ; cette remarque est fausse avec un composite 30 degrés par exemple). On s'intéressera seulement à d_1 pour les tracés graphiques des endommagements. L'endommagement est une grandeur qui dé-



FIG. 1.22: Composite +/-45 : Contrainte 11 en fonction de la deformation 11

pend des différentes déformations (normales, tangentielles). Pour cet essai à +/-45 degrés, on a établi les relations entre les différentes déformations (voir équation 1.47). La figure 1.24 montre l'évolution de l'endommagement en fonction, respectivement, de la déformation normale ε_{11} . On voit clairement que les résultats EUROPLEXUS et Matlab sont très proches. Les différences observées proviennent aussi de Matlab d'ont l'algorithme est



FIG. 1.23: Composite +/-45 : Contrainte 12 en fonction de la deformation 12



FIG. 1.24: Composite +/-45 : Endommagement 1 en fonction de la deformation 11

donné en contrainte, et non en déplacement comme dans EUROPLEXUS. Par exemple on peut noter les différences suivantes entre 2 calculs Matlab : la figure 1.25 présente l'évolution de la déformation calculée en fonction du temps pour la même expérience, pour 2 sous-découpages différents au niveau des contraintes. En conclusion, **l'essai de traction**



FIG. 1.25: Composite +/-45 : Déformation 1 en fonction du temps pour 2 pas d'incrément différents dans Matlab.

+/-45 degrés est <u>globalement</u> validé. Effectivement on a vu qu'il fallait être prudent pour le moment sur ce cas test car les courbes ne coïncident pas exactement.

1.4.5.4 Traction dans le sens 3

L'expérience On s'intéresse ici à un essai de traction quasi-statique dans le sens 3 du composite. La figure 1.26 présente les directions de chargement et principales du composite.

Les résultats La figure 1.27 présente l'évolution de la contrainte $\sigma_{33} = \sigma_{zz}$ en fonction de la déformation $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{zz}$ pour les deux calculs effectués avec Matlab et avec EURO-PLEXUS. Il faut aussi noter que les endommagements d_1 , d_2 et d_3 sont nuls pour ce calcul. L'endommagement d_3 reste nul car l'endommagement critique d_3^c est nul. On constate une très nette similitude entre les calculs Matlab et EUROPLEXUS : les courbes sont confondues sur les figures 1.27, 1.28 et 1.29. En conclusion, **l'essai de traction hors plan est aussi validé**.



FIG. 1.26: Essai de traction hors plan sur le composite.



FIG. 1.27: Contrainte 33 en fonction de la déformation 33.



FIG. 1.28: Déformation 33 en fonction du temps.



FIG. 1.29: Contrainte 33 en fonction du temps.

1.4.5.5 Conclusion

On peut ici conclure sur la validation numérique de l'implémentation du modèle d'endommagement ODM (Onera Damage Model) dans le code EUROPLEXUS. La seule remarque à noter tout de même est celle concernant la différence entre les déformations résiduelles Matlab et EUROPLEXUS pour le cas où il y a une déformation de cisaillement (voir l'essai composite à +/-45 degrés). Cependant la loi Contrainte déformation reste juste.

Effectivement on a pu comparer des calculs différents avec le modèle implanté dans Matlab par l'ONERA. Les résultats sont si proches que la conclusion d'une implémentation rigoureuse et exacte du modèle n'est plus à démontrer. On peut conclure que le modèle d'endommagement ODM est implémenté correctement dans le code EURO-PLEXUS, et est disponible dans les versions d'EUROPLEXUS.

1.4.6 Validation de l'implémentation : endommagements de matrice et fibres

Cette partie traite de la validation de la rupture des fibres dans les calculs. Dans un premier temps, un essai de traction dans le sens des fibres permet de visualiser la zone élastique, puis l'endommagement matriciel (cf la partie précédente), et la rupture des fibres qui se caractérise par une baisse importante de la courbe contrainte-déformation. Cette simulation a été effectuée avec le code de calcul EUROPLEXUS, et le modèle monodimensionnel de l'ONERA. La figure 1.30 illustre ces trois zones : élastique, en-dommagement matriciel, et rupture des fibres. La figure 1.31 présente pour cette même



FIG. 1.30: Contrainte en fonction de la déformation dans la direction 1.

expérience numérique, l'évolution du dommage d_1 en fonction de la déformation. Cette



figure décrit la loi d'endommagement dans la direction 1. On constate sur ces 2 figures

FIG. 1.31: Dommage en fonction de la déformation dans la direction 1.

1.30 et 1.31 que les deux simulations sont très similaires. Ce constat permet ainsi de valider l'implémentation faite dans EUROPLEXUS en ce qui concerne la direction 1.

La valeur du paramètre d'endommagement critique pour chacun des dommages, permet d'avoir une courbe contrainte-déformation diminuant presque jusqu'à zéro (voir figure 1.32).

1.5 Applications numériques

1.5.1 Éprouvette en traction

Cette simulation d'une éprouvette en traction a été utilisée afin d'identifier les différents paramètres statiques du modèle d'endommagement de l'ONERA. Ces travaux ont été réalisés à SNECMA Villaroche par le personnel de SNECMA : département des composites pour l'expérimentation et le bureau des méthodes pour la simulation utile à l'identification. La figure 1.33 présente l'éprouvette de traction utilisée et ses dimensions en millimètres.

1.5.2 Impact sur panneau

1.5.2.1 Premier modèle d'endommagement orthotrope

En annexe A se trouve le programme cast3m intégral de cette simulation. La figure 1.34 montre le dommage d_{13} correspondant au module de cisaillement G_{13} sur la dé-



FIG. 1.32: Relation contrainte déformation en fonction du paramètre d_c^f .



FIG. 1.33: Éprouvette de traction utilisée pour l'identification (dimensions en mm).

formée du maillage à trois instants successifs du calcul. Cette toute première simulation d'impact sur panneau avec endommagement orthotrope [MEN 06b] a déjà permis de confirmer que les zones d'endommagement principal correspondent bien au coin supérieur opposé et à la zone d'impact. Effectivement, l'expérience (SNECMA Villlaroche) montre aussi que c'est ces parties qui sont les plus dégradées après l'impact. La vitesse d'impact est de 50 m/s dans la simulation. Ce modèle décrit approximativement le com-



FIG. 1.34: Dommage 13 sur maillage déformé à trois instants (15, 55 et 85μ s) après l'impact.

portement du composite lors de la phase d'endommagement, mais ne permet pas de simuler jusqu'à la rupture.

1.5.2.2 Modèle d'endommagement ODM

D'abord, un calcul qui n'utilisait que la modélisation de l'endommagement matriciel a été effectué. Les résultats sont présentés dans la figure 1.35. On note aussi que les zones



FIG. 1.35: Dommage 3 sur maillage déformé à 4 instants (15, 55, 80 et 110μ s) après l'impact.

principalement endommagées sont celle impactée et le coin supérieur opposé.

Ensuite, cette simulation a pu être directement confrontée avec l'expérience à SNECMA. Une campagne d'essai avait été menée à SNECMA, et l'observation des panneau post mortem permettent de montrer la cohérence et l'adéquation du modèle avec la réalité. La figure 1.36 présente les images du panneau après impact, ainsi que les résultats de la simulation. On peut constater que les zones endommagées numériquement correspondent aux mêmes zones endommagées "noircies" expérimentalement. Les résultats de



FIG. 1.36: Panneaux post mortem : simulation et expérience (vues de face et de derrière).

la simulations localisent l'endommagement maximal là où une (ou plusieurs) marco fissure a séparé le panneau en trois parties. Les résultats sont similaires à l'expérience, et le modèle d'endommagement est donc prédictif.

1.6 Conclusion et perspectives

Le développement d'un modèle d'endommagement de composites avec l'ONERA, a permis de caractériser le comportement du matériau lors de la phase endommageable. De plus, la prise en compte de la rupture des fibres a permis de décrire un comportement en rupture du composite.

En ce qui concerne la phase post-endommagement au niveau numérique, une alternative pourrait être le passage en élément fantôme des éléments dont le dommage est devenu critique. Avec la correction apportée qui prend en compte la rupture des fibres, ce passage s'effectue lorsque le niveau de contrainte dans l'élément est faible. Ce passage engendre alors beaucoup moins, voir presque pas, d'erreur en ce qui concerne l'énergie du système : le passage en élément fantôme conserve presque l'énergie car la contrainte est presque nulle.

Une autre alternative serait de développer la naissance d'une macro fissure dans le milieu à partir du champ d'endommagement. Ce passage endommagement macro fissure est un axe de recherche très actif. Ensuite, la mécanique de la rupture pilote l'évolution de la (les) fissure(s) dans la structure. La partie suivante s'intéresse justement à la simulation numérique de la propagation dynamique de fissure.

1. Modélisation d'endommagement de composites

Chapitre 2

Mécanique de la rupture

Ce chapitre pose le problème général et présente les bases de la mécanique de la rupture sur lesquelles s'appuieront les développements numériques présentés dans les chapitres suivants. Les approches énergétique et locale de la mécanique de la rupture seront abordées, ainsi que les critères de propagation de fissure.

Sommaire

2.1	Introd	luction	56
2.2	Problème de référence		56
	2.2.1	Problème général de structure fissurée	56
2.3	Approche énergétique		58
	2.3.1	Taux de restitution d'énergie G	58
	2.3.2	Facteurs d'intensité des contraintes	60
	2.3.3	Relation entre les facteurs d'intensité des contraintes et G	63
	2.3.4	Évaluation numérique des facteurs d'intensité des contraintes	64
	2.3.5	Critère de propagation de fissure associé	65
2.4	4 Approche locale		66
	2.4.1	Zones cohésives	66
	2.4.2	Évaluer des contraintes en pointe de fissure	68
2.5	Concl	usion	71

2.1 Introduction

Ce chapitre présente les bases de la mécanique de la rupture nécessaires pour aborder la simulation numérique de propagation de fissure. La figure 2.1 montre la relation contrainte-déformation depuis l'état initial jusqu'à rupture lors d'un simple essai de traction. Les étapes d'endommagement et de rupture y sont aussi représentées. Le chapitre 1 présente les travaux de développement de modèles d'endommagement et rupture de composites. La rupture est caractérisée par la propagation d'une macro fissure, conséquence de l'endommagement. Cette figure montre deux comportements de matériau : fragile et ductile. Cette courbe de contrainte-déformation illustre également le comportement macroscopique lors de la rupture d'une structure entière. Le problème abordé dans la suite



FIG. 2.1: Relation contrainte-déformation : élasticité, endommagement puis rupture avec deux types de matériau (fragile et ductile).

est concentré sur la modélisation d'une structure possédant à l'origine une ou plusieurs macro fissure. Nous travaillerons donc sur un solide initialement fissuré soumis à des sollicitations dynamiques ou statiques.

Le paragraphe suivant pose le problème de référence qui nous intéresse ici, et les notions et développements connus de la mécanique de la rupture.

2.2 Problème de référence

2.2.1 Problème général de structure fissurée

On considère un domaine solide Ω , soumis à la force volumique \mathbf{f}_d , et présentant une fissure. Les deux lèvres de la fissure sont désignées par Γ^+ et Γ^- . Le contour du domaine est défini par $\partial \Omega_1$ et $\partial \Omega_2$: sur la première frontière $\partial \Omega_1$, sont imposés les déplacements \mathbf{u}_d , et sur la seconde $\partial \Omega_2$ les efforts \mathbf{F}_d . On note que toutes les grandeurs précédentes dépendent du temps. La géométrie de référence est représentée sur la figure 2.2. La spécificité du problème mécanique [LEM 90, DEB 84] de propagation de fissure



FIG. 2.2: Domaine considéré Ω contenant une fissure.

[JAN 77, BOR 98, BOR 85, BOR 93] est que la partie du domaine $\Omega(t)$ évolue au cours du temps. Ainsi, la longueur de la fissure est notée a(t) en 2D (et A(t) la surface en 3D) est amenée à évoluer en fonction du temps. Écrivons maintenant les équations locales ou globales du problème à résoudre.

Équations locales

Ces équations sont composées des équations standard auxquelles s'ajoute la loi de propagation de fissure. Le problème s'écrit :

pour tout point $\mathbf{x} \in \Omega(t)$ du domaine, pour tout temps $t \in [0, T]$, trouver $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ cinématiquement admissible, $\sigma(\mathbf{x}, t)$, la longueur de la fissure a(t) connaissant $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)$, $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0)$, a(0), $\mathbf{F}_d(t)$ sur $\partial\Omega_2$, $\mathbf{u}_d(t)$ sur $\partial\Omega_1$, $\mathbf{f}_d(t)$ dans Ω :

$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \mathbf{u}_d(\mathbf{x},t)$	sur $\partial \Omega_1(t)$	
$\mathbf{div}(\mathbf{\sigma}(\mathbf{x},t)) + \mathbf{f}_d(\mathbf{x},t) = \mathbf{\rho}\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t)$	dans $\Omega(t)$	
$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t) \cdot (\mathbf{n}(\mathbf{x},t)) = \mathbf{F}_d(\mathbf{x},t)$	sur $\partial \Omega_2(t)$	(2 1)
$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)\cdot(\mathbf{n}(\mathbf{x},t))=0$	sur $\Gamma^+(t)$ et $\Gamma^-(t)$	(2.1)
$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t) = \mathbb{K} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{x},t))$	dans $\Omega(t)$	
$\dot{a}(t) = \dot{a}(a(t), \mathbf{\sigma}(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t))$		

 \mathbb{K} est l'opérateur de Hooke décrivant la loi de comportement du matériau non nécessairement élastique linéaire, et ε est l'opérateur déformation (partie symétrique du gradient).

Formulation faible

La formulation variationnelle permet de passer des équations locales à une formulation faible sur tout le domaine [SCH 93b, ROT 87]. **Hypothèses** On se placera par la suite en petites perturbations (HPP), ainsi le domaine Ω ne dépendra pas du temps. La seule dépendance avec le temps est associée à la propagation de fissure.

Les équations locales précédentes peuvent être intégrées sur le domaine Ω , et le problème général devient ainsi :

Trouver $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$, $\mathbf{\sigma}(\mathbf{x},t)$ et a(t) tels que :

-**u**(**x**,*t*) soit cinématiquement admissible : ∀**x** ∈ ∂Ω₁, ∀*t* ∈ [0,*T*]

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \mathbf{u}_d \tag{2.2}$$

 $- \forall t \in [0,T]$ et $\forall \mathbf{v} \in U_0$

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\partial \Omega_2} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v} \, dS \tag{2.3}$$

 U_0 est l'espace vectoriel des champs virtuels défini par :

- $U_0 = \{ \mathbf{v} \text{ tel que } \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0 \ \forall \mathbf{x} \in \partial \Omega_1, \text{ et } \mathbf{v} \text{ régulier et cinématiquement admissible à } 0 \}$ (2.4)
- − Loi de comportement linéaire élastique \mathbb{C} , avec σ contrainte de Cauchy et ε déformation (avec l'hypothèse des petites déformations) : $\forall x \in \Omega, \forall t \in [0, T]$

$$\sigma(\mathbf{x},t) = \mathbb{C} \cdot \varepsilon(\mathbf{u}(\mathbf{x},t)) \tag{2.5}$$

− Critère de propagation de fissure : $\forall t \in [0,T]$

$$\dot{a}(t) = \dot{a}(t, a(t), \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{\sigma}(\mathbf{x}, t))$$
(2.6)

Le problème étant maintenant posé, la mécanique de la rupture va traiter plus précisément le comportement en pointe de fissure, et le critère de propagation.

2.3 Approche énergétique

Les objectifs de cette partie sont d'une part de donner des notions utiles pour la compréhension des développements futurs, et montrer le lien entre les équations précédentes et la théorie énergétique de la fissuration. Les notions de taux de restitution d'énergie et de facteur d'intensité des contraintes y sont présentées.

2.3.1 Taux de restitution d'énergie

Les principales références concernant les premiers travaux de la fissuration énergétique sont ceux de Griffith [GRI 21] et Rice [RIC 88, RIC 80]. Cette théorie suppose que la propagation de fissure dissipe de l'énergie. Ainsi, la variation d'énergie dW_{fis} nécessaire à un accroissement de l'aire de la fissure dA s'écrit :

$$dW_{fis} = 2\gamma dA \tag{2.7}$$

Le premier principe de la thermodynamique peut s'écrire de la façon suivante :

$$\frac{\partial E_{int}}{\partial t} + \frac{\partial E_{cin}}{\partial t} = P_{ext} + Q - 2\gamma \frac{\partial A}{\partial t}$$
(2.8)

où E_{int} est l'énergie interne, E_{cin} l'énergie cinétique, P_{ext} la puissance des efforts extérieurs et Q le taux de chaleur reçue. De plus la variation d'énergie interne s'écrit aussi :

$$\frac{\partial E_{int}}{\partial t} = Q + \frac{\partial W_{elas}}{\partial t} = Q + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \, d\Omega \tag{2.9}$$

où W_{elas} est l'énergie élastique, σ le tenseur des contraintes de Cauchy et $\dot{\epsilon}$ le tenseur des taux de déformation. La puissance des efforts extérieurs s'écrit :

$$P_{ext} = \int_{\partial \Omega_2} \mathbf{F}_d \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dS + \int_{\Omega} \mathbf{f}_d \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} d\Omega$$
(2.10)

où **u** est le champ de déplacement, \mathbf{f}_d les forces volumiques et \mathbf{F}_d les forces surfaciques. Le premier principe de la thermodynamique s'écrit :

$$\frac{\partial E_{cin}}{\partial t} = \int_{\partial \Omega_2} \mathbf{F}_d \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \, dS + \int_{\Omega} \mathbf{f}_d \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \, d\Omega - \frac{\partial W_{elas}}{\partial t} - 2\gamma \frac{\partial A}{\partial t} \tag{2.11}$$

La dérivée de l'énergie cinétique peut aussi s'écrire en fonction de la variation d'aire de la fissure, et du temps de façon découplée :

$$\frac{\partial E_{cin}}{\partial t} = \left(\int_{\partial \Omega_2} \mathbf{F}_d \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial A} \, dS + \int_{\Omega} \mathbf{f}_d \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial A} \, d\Omega - \frac{\partial W_{elas}}{\partial A} - 2\gamma \right) \frac{\partial A}{\partial t} \tag{2.12}$$

De cette équation, le signe de la dérivée de l'énergie par rapport au temps donne la stabilité de l'équilibre mécanique, c'est à dire la propagation de la fissure ou non. De plus, le processus de propagation de fissure étant irréversible, le scalaire $\frac{\partial A}{\partial t}$ est obligatoirement positif ou nul. Par conséquent, il y aura propagation lorsque la variation d'énergie cinétique est positive, et non propagation lorsque cette variation est négative. On en déduit le taux de restitution d'énergie *G* de la façon suivante :

$$G = \int_{\partial\Omega_2} \mathbf{F}_d \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial A} dS + \int_{\Omega} \mathbf{f}_d \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial A} d\Omega - \frac{\partial W_{elas}}{\partial A}$$
(2.13)

Les trois scénarios possibles sont les suivants :

- $-G < 2\gamma$: il n'y a pas propagation,
- $G = 2\gamma$: initiation ou propagation *stable* de la fissure,
- et enfin $G > 2\gamma$: propagation *instable* de la fissure.

On peut donc déterminer le risque de propagation de fissure à partir du taux de restitution de l'énergie *G*. L'écriture du taux de restitution d'énergie en fonction de la complexité du matériau fait l'objet d'un grand nombre de travaux [SUO 89b, SUO 92b, SUO 92a, SUO 92c, SUO 92d, SUO 89a] s'intéressant spécialement aux cuves de centrale nucléaire dont les caractéristiques matériaux sont très variables dans l'espace dû au fort gradient de température. Aussi, le calcul du taux de restitution d'énergie a été un axe de recherche important [SHI 86, HUS 74, NUI 75, DEL 85, DEL 82].

Le taux de restitution de l'énergie constitue à lui seul un critère de propagation de fissure, mais ne permet pas de déterminer la direction de propagation : un seul scalaire ne peut rendre compte d'autant d'informations. Pour déterminer cette direction, davantage d'informations sont nécessaires, et la sollicitation de fissure pourra les renseigner par l'intermédiaire des facteurs d'intensité des contraintes par exemple.

2.3.2 Facteurs d'intensité des contraintes

La présence d'une fissure crée un certain nombre de mouvements possibles au niveau des lèvres de la fissure. Ils correspondent aux trois modes de rupture (ou de sollicitation de la fissure), décrits sur la figure 2.3 : un mode d'ouverture et deux modes de cisaillement. Le mode d'ouverture, dit mode 1, est le principal acteur de la propagation de la fissure. Cependant, l'influence de chacun des modes est quantifiée dans les grandeurs appelées



FIG. 2.3: Les différents modes de rupture : modes I, II et III.

facteurs d'intensité des contraintes. Ces derniers caractérisent l'intensité des champs en pointe de fissure ; ainsi pour les contraintes ils sont notés K_i^{dyn} , et pour les déplacements K_i^{cin} , où $i \in \{1, 2, 3\}$ correspond au mode de rupture.

2.3.2.1 Analyse asymptotique en pointe de fissure

Une analyse asymptotique en pointe de fissure peut être effectuée [IRW 57] afin de trouver la forme des champs de déplacement et de contrainte en pointe de fissure. En statique, la résolution s'effectue à partir de l'équation d'équilibre statique $div(\sigma(x)) = 0$ uniquement. L'injection du champs de déplacement se fait via la loi de comportement.

Dans le cas d'un comportement isotrope linéaire élastique, la résolution rend les champs



FIG. 2.4: Repères et coordonnées cylindriques en pointe de fissure.

asymptotiques de pointe de fissure suivants; les champs de contrainte sont pour chacun des modes :

$$\sigma_{1}^{dyn}(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} & 0\\ & \cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) & 0\\ sym & & 0 \end{bmatrix}$$
$$\sigma_{2}^{dyn}(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} -\sin\frac{\theta}{2}\left(2+\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right) & -\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) & 0\\ & & -\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} & 0\\ & & & 0 \end{bmatrix}$$
$$\sigma_{3}^{dyn}(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sin\theta\\ & 0 & \cos\theta\\ sym & 0 \end{bmatrix}$$

où (r, θ) sont les coordonnées cylindriques d'origine la pointe de fissure (illustrée sur la figure 2.4). L'intensité en contraintes de chacun des modes est caractérisée par les facteurs d'intensité dynamiques K_1^{dyn} , K_2^{dyn} et K_3^{dyn} , et le champ de contrainte en pointe de fissure s'écrit :

$$\sigma(r,\theta) = \sum_{k=1}^{3} K_k^{dyn} \sigma_k^{dyn}(r,\theta)$$
(2.14)

Les vecteurs déplacements des modes 1, 2 et 3 s'écrivent :

$$\mathbf{u}_{1}^{cin}(r,\theta) = \frac{1+\nu}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2})(k-\cos\theta) \\ -\sin(\frac{\theta}{2})(k-\cos\theta) \\ 0 \end{pmatrix}_{(u_{r},u_{\theta},u_{z})}$$
(2.15)

$$\mathbf{u}_{2}^{cin}(r,\theta) = \frac{1+\nu}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{pmatrix} -sin(\frac{\theta}{2})(k+cos\theta)+2sin\frac{3\theta}{2}\\ -cos(\frac{\theta}{2})(k+cos\theta)+2cos\frac{3\theta}{2}\\ 0 \end{pmatrix}_{(u_{r},u_{\theta},u_{z})}$$
(2.16)

$$\mathbf{u}_{3}^{cin}(r,\theta) = 4 \frac{1+\nu}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}_{(u_{r},u_{\theta},u_{z})}$$
(2.17)

L'intensité de chacun des ces déplacements est caractérisée par les facteurs d'intensité cinématiques K_1^{cin} , K_2^{cin} et K_3^{cin} , et le champ de déplacement en pointe de fissure est de la forme :

$$\mathbf{u}(r,\theta) = \sum_{k=1}^{3} K_{k}^{cin} \mathbf{u}_{k}^{cin}(r,\theta)$$
(2.18)

Dans le cas d'un matériau dont les caractéristiques mécaniques restent isotropes mais dépendent de l'espace ($E(\mathbf{x})$ par exemple), Menouillard [MEN 06a] a montré la façon de calculer les nouveaux champs asymptotiques, et certains résultats intéressants sont explicités, notamment pour des modules d'Young à gradient constant.

2.3.2.2 Facteurs d'intensité des contraintes statiques

Les facteurs d'intensité des contraintes statiques [NEW 81, FRE 78] sont définis par :

$$K_1^{dyn} = K_1^{cin} = \lim_{r \to 0} \sqrt{2\pi r} \,\sigma_{22}(\theta = \pi) = \lim_{r \to 0} \frac{\mu}{1+k} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [u_2(\theta = \pi)] \quad (2.19)$$

$$K_2^{dyn} = K_2^{cin} = \lim_{r \to 0} \sqrt{2\pi r} \,\sigma_{12}(\theta = \pi) = \lim_{r \to 0} \frac{\mu}{1+k} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [u_1(\theta = \pi)] \quad (2.20)$$

$$K_{3}^{dyn} = K_{3}^{cin} = \lim_{r \to 0} \sqrt{2\pi r} \,\sigma_{23}(\theta = \pi) = \lim_{r \to 0} \frac{\mu}{4} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [u_{3}(\theta = \pi)]$$
(2.21)

où $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, et l'opérateur [.] est défini par $[f(\theta = \pi)] = f(\pi) - f(-\pi)$ et *k* la constante de Kolosov définie, en fonction du coefficient de Poisson ν , par :

$$k = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{en déformations planes,} \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{en contraintes planes.} \end{cases}$$
(2.22)

2.3.2.3 Facteurs d'intensité des contraintes dynamiques

En dans le cas dynamique, ils s'écrivent :

$$K_1^{dyn} = \lim_{r \to 0} \sqrt{2\pi r} \,\sigma_{22}(\theta = \pi)$$
 (2.23)

$$K_2^{dyn} = \lim_{r \to 0} \sqrt{2\pi r} \,\sigma_{12}(\theta = \pi)$$
 (2.24)

$$K_3^{dyn} = \lim_{r \to 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{23}(\theta = \pi)$$
 (2.25)

$$K_1^{cin} = \lim_{r \to 0} \frac{\mu}{1+k} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [u_2(\theta = \pi)]$$
(2.26)

$$K_{2}^{cin} = \lim_{r \to 0} \frac{\mu}{1+k} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [u_{1}(\theta = \pi)]$$
(2.27)

$$K_3^{cin} = \lim_{r \to 0} \frac{\mu}{4} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [u_3(\theta = \pi)]$$
 (2.28)

Ces facteurs d'intensité des contraintes, statiques et dynamiques, sont liés aussi entre eux par la relation suivante [BUI 78] :

$$K_j^{cin} = f_j(\dot{a}) K_j^{dyn} \tag{2.29}$$

avec

$$f_i(\dot{a}) = \frac{4\alpha_i(1-\alpha_2^2)}{(k+1)D(\dot{a})} \text{ avec } i \in \{1,2\}$$
(2.30)

$$f_3(\dot{a}) = \frac{1}{\alpha_2} \tag{2.31}$$

$$\alpha_i = \sqrt{1 - (\frac{\dot{a}}{c_i})^2} \tag{2.32}$$

$$D(\dot{a}) = 4\alpha_1 \alpha_2 - (1 + \alpha_2^2)^2$$
 (2.33)

où c_1 et c_2 sont respectivement les célérités des ondes de traction et de cisaillement. D et la fonction dont le zéro définit la célérité des ondes de Rayleigh c_r .

2.3.3 Relation entre les facteurs d'intensité des contraintes et le taux de restitution d'énergie

À l'aide des développements dans [IRW 57] et la connaissance des champs asymptotiques, la relation entre le taux de restitution d'énergie G et les facteurs d'intensité des contraintes K_1 et K_2 , appelée aussi formule d'Irwin, s'écrit :

$$G = \frac{1+k}{8\mu} \left(K_1^2 + K_2^2 \right) + \frac{1}{2\mu} K_3^2$$
(2.34)

De plus, en 1968, Rice [RIC 68] introduit le concept d'intégrale indépendante du contour : l'intégrale de Rice *J* définie de la façon suivante :

$$J = \int_{\Gamma} \left(W n_1 - \sigma_{ik} n_k \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) dS$$
(2.35)

où Γ est un contour orienté autour de la pointe de fissure, *W* l'énergie de déformation, n_k la k^{eme} composante du vecteur **n** u_i la i^{eme} composante du champ de déplacement. Rice [RIC 88] a montré l'égalité du taux de restitution d'énergie *G* et de l'intégrale de Rice *J*. Alors la relation générale entre les facteurs d'intensité des contraintes, le taux de restitution d'énergie et l'intégrale *J* est :

$$J = G = \frac{\xi}{E} \left(K_1^2 + K_2^2 \right) + \frac{1 + \nu}{E} K_3^2$$
(2.36)

avec

$$\xi = \begin{cases} 1 - v^2 & \text{en déformations planes} \\ 1 & \text{en contraintes planes} \end{cases}$$
(2.37)

2.3.4 Évaluation numérique des facteurs d'intensité des contraintes

Ce paragraphe concerne le calcul des facteurs d'intensité des contraintes et le critère de propagation associé dans le cas de la mécanique linéaire élastique. Effectivement les facteurs d'intensité des contraintes sont des valeurs locales définis par une limite : ils ne sont donc pas exploitables directement. Une approche possible [FRE 98, RÉT 05a] est d'utiliser une formulation avec deux champs de déplacement : le champ réel et un champ virtuel. En utilisant le champ d'extension virtuelle de la fissure \mathbf{q} défini par :

$$\begin{cases} \mathbf{q} = \mathbf{0} & \text{en dehors de la surface S2} \\ \|\mathbf{q}\| = 1 & \text{dans la surface S1} \end{cases}$$
(2.38)
tangent à la fissure dans le domaine

et schématisé sur la figure 2.5, alors on peut construire l'intégrale suivante :

$$I^{int} = -\int_{S2} \left[(\sigma^{aux} : \nabla \mathbf{u} - \rho \dot{\mathbf{u}} . \dot{\mathbf{u}}^{aux}) div(\mathbf{q}) - (\sigma^{aux} : (\nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{q}) + \sigma^{aux} : (\nabla \mathbf{u}^{aux} \nabla \mathbf{q})) \right] dS + \int_{S2} \left[(\mathbf{div}(\sigma^{aux}) . \nabla \mathbf{u}(\mathbf{q}) + \rho \ddot{\mathbf{u}} . \nabla \mathbf{u}^{aux}(\mathbf{q})) + (\rho \dot{\mathbf{u}}^{aux} . \nabla \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{q}) + \rho \dot{\mathbf{u}} . \nabla \dot{\mathbf{u}}^{aux}(\mathbf{q}) \right] dS$$
(2.39)



FIG. 2.5: Champ d'extension virtuelle d'une fissure courbe

L'utilisation d'un champ d'extension virtuelle comme décrit ci-avant, diminue les erreurs numériques sur l'estimation des champs en pointe de fissure. Si K_i^{aux} représentent les facteurs d'intensité des contraintes du champ virtuel, alors on obtient l'équivalence avec la relation d'Irwin :

$$I^{int} = \frac{2(1-\nu^2)}{E} \left(f_1(\dot{a}) K_1^{dyn} K_1^{aux} + f_2(\dot{a}) K_2^{dyn} K_2^{aux} \right)$$
(2.40)

Les fonction f_i sont définies dans l'équation 2.30. Le champ d'extension virtuelle suit la fissure et son orientation (voir la figure 2.5).

Un choix approprié du champ virtuel \mathbf{u}^{aux} permet de déterminer les facteurs K_i^{dyn} : ainsi un champ de déplacement tel que ($K_1^{aux} = 1, K_2^{aux} = 0$) mettra en évidence le terme K_1^{dyn} (et $K_1^{aux} = 0, K_2^{aux} = 1$ pour la détermination de K_2^{dyn}). Ainsi en effectuant deux calculs similaires, les deux facteurs d'intensité des contraintes peuvent être estimés. À partir de leur connaissance, peut-on estimer à présent le comportement de la fissure, et si elle propage, est-on capable de donner la direction et la vitesse ?

2.3.5 Critère de propagation de fissure associé

Les facteurs d'intensité des contraintes caractérisent effectivement le champ de déplacement et de contraintes en pointe de fissure. Un critère connu depuis 1978 [BUI 78] est, dans le cas de l'élasticité linéaire, le critère en contrainte circonférentielle maximale. La direction de propagation θ_c est telle que $\sigma_{\theta\theta}$ en pointe de fissure est maximal. Donc, connaissant le champ de contraintes en pointe de fissure en fonction des facteurs d'intensité des contraintes, on peut résoudre l'équation en θ suivante :

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0 \tag{2.41}$$

La solution θ_c exprimée en fonction des facteurs d'intensité des contraintes, est la suivante :

$$\theta_c = 2 \arctan\left[\frac{1}{4} \left(\frac{K_1^{dyn}}{K_2^{dyn}} - sign(K_2^{dyn})\sqrt{8 + \left(\frac{K_1^{dyn}}{K_2^{dyn}}\right)^2}\right)\right]$$
(2.42)

Ensuite, l'intensité du chargement en pointe de fissure s'écrit comme un facteur d'intensité des contraintes équivalent :

$$K_{\theta\theta}^{dyn} = \cos^3\left(\frac{\theta_c}{2}\right)K_1^{dyn} - \frac{3}{2}\cos\left(\frac{\theta_c}{2}\right)\sin\left(\theta_c\right)K_2^{dyn}$$
(2.43)

Et le critère de propagation est donné par :

$$\begin{cases} \operatorname{si} K_{\theta\theta}^{dyn} < K_{1c} & \operatorname{alors} \dot{a} = 0\\ \operatorname{sinon} \dot{a} > 0 & \operatorname{et} K_{\theta\theta}^{dyn} = K_{1D}(\dot{a}) \end{cases}$$
(2.44)

avec d'après Kanninen [KAN 85]

$$K_{\theta\theta}^{dyn} = K_{1D}(\dot{a}) = \frac{K_{1c}}{1 - \left(\frac{\dot{a}}{c_r}\right)^m}$$
(2.45)

Donc l'expression de la vitesse de propagation de la fissure peut être déduite de l'équation précédente, et vaut :

$$\dot{a} = \left(1 - \frac{K_{1c}}{K_{\theta\theta}^{dyn}}\right)^{1/m} c_r \tag{2.46}$$

où *m* est un paramètres qui sera pris égal à 1 par la suite. Les intégrales d'interaction pour le calcul des facteurs d'intensité des contraintes seront utilisées dans certains calculs de validation. Les travaux effectués sur ces critères sont considérés comme acquis. Mais la limitation d'utilisation est essentiellement dû au caractère non linéaire du comportement du matériau. En effet, si une plasticité confinée en pointe de fissure ne perturbe guère les facteurs d'intensité des contraintes élastiques, une plasticité étendue leur fera perdre leur sens. C'est pour cela que qu'un autre critère de propagation est envisagé ici : une contrainte moyennée en pointe de fissure peut être utilisée, couplée ou non à une approche zone cohésive. Aussi d'autres possibilités existent : notamment basée sur la perte d'éllipticité.

2.4 Approche locale

Après la présentation d'une approche énergétique dite globale, la mécanique de la rupture peut être aussi perçue de manière locale, notamment au niveau du critère de propagation, et du comportement en pointe de fissure. Effectivement, l'utilisation des facteurs d'intensité des contraintes est très commode pour un matériau élastique linéaire, mais lorsque le comportement devient non-linéaire, endommageable ou alors qu'une plasticité étendue apparaît, les calculs de facteurs d'intensité des contraintes n'ont plus de sens physique. Menouillard [MEN 06a] montre déjà les premières difficultés d'évaluation des facteurs d'intensité des contraintes lorsque le module d'Young est variable dans l'espace. Lorsque l'endommagement [GEE 00, KUH 00, FEE 95, WEI 98] ou la plasticité [ELG 06a, ELG 06b] apparaissent, les difficultés n'en sont qu'accrues et la signification des facteurs d'intensité des contraintes perd tout son sens. Ces phénomènes apparaissent aussi localement en pointe de fissure, et le processus de rupture dépend donc de la taille de cette zone dite "ductile" par rapport à la taille du problème ; si elle reste suffisamment petite, les calculs restent valides. Les forces de cohésion ralentissent et adoucissent la propagation de la fissure grâce à la dissipation d'énergie. Un problème important est le fait que la majorité des matériaux utilisés en mécanique ne sont pas parfaitement élastiques fragiles comme décrit dans [GRI 21], mais qu'une ductilité apparaît assez rapidement. La figure 2.1 illustre bien ce phénomène en montrant 2 courbes : l'une pour un matériau fragile et l'autre pour un matériau plus ductile.

2.4.1 Zones cohésives

Ces zones cohésives ont été introduites par Barenblatt [BAR 62, BAR 59] et Dugdale [DUG 60] pour des fissurations ductiles et par [HIL 76] pour des fissurations fragiles. Il y a deux méthodes d'utilisation des zones cohésives. L'approche de Xu et Needleman [XU 94, FAL 01] est d'utiliser une loi de cohésion à l'interface des éléments, et que la propagation de la (ou les) fissure(s) soit(ent) gouvernée(s) par cette loi. Les zones cohésives sont situés sur les bords de tous les éléments. D'autre part, l'approche plus récente d'Ortiz [ORT 99], Camacho [CAM 96] et Ruiz [RUI 01] consiste à insérer progressivement des éléments cohésifs sur les interfaces lorsqu'un critère est atteint en avant de la fissure. Les zones cohésives sont alors adaptives mais limitées à rester sur le bord des éléments.

Les figures 2.6 et 2.8 montrent la zone cohésive qui va traduire l'ouverture progressive et la rupture lors de l'avancée de la fissure. De nombreux travaux ont pu faire l'objet de publications récentes sur ce sujet, notamment de Borst [BOR 97, BOR 85, BOR 93, BOR 96, REM 03, WEL 02, PAM 98, SCH 93a, PEE 98, PEE 01, GEE 98, PEE 02].



FIG. 2.6: Représentation schématisée d'une zone cohésive et loi contrainte-déplacement dans la zone.



FIG. 2.7: Contrainte le long de la zone cohésive dans le prolongement de la fissure.

La figure 2.6 présente la zone géographique où seront localisées les forces de cohésion, et la loi de cohésion. La figure 2.8 présente l'évolution, lors de la propagation de la fissure, de la zone cohésive. Ceci traduit l'avancée de la fissure et la dissipation d'énergie pendant ce même temps. Pour chaque liaison cohésive consumée, une certaine quantité d'énergie a été dissipée. C'est ce caractère qui donne tout son intérêt à l'utilisation de zone



FIG. 2.8: Schéma de la représentation de la zone cohésive dans le maillage.

cohésive. On peut en fait trancher progressivement les éléments par des zones cohésives : cette opération impose des "remaillages" progressifs qui sont plutôt des sous désoupages d'éléments quasi existants.

On va maintenant introduire la notion de critère local de rupture en pointe de fissure.

2.4.2 Évaluer des contraintes en pointe de fissure

Dans cette partie, l'idée principale est de moyenner les contraintes en pointe de fissure afin d'évaluer le comportement possible de la fissure. L'intérêt que présente cette méthode est qu'elle pourra s'appliquer aussi bien à des matériaux fragiles que ductiles. Ainsi, on va chercher à déterminer la contrainte d'ouverture locale en pointe de fissure, et la direction de la possible propagation, si la contrainte d'ouverture est suffisamment importante. Les analyses étant faites en dynamique explicite, les évolutions spatiales et temporelles des contraintes sont assez chaotiques et un "lissage" spatial (et aussi temporel) permet d'avoir une meilleure stabilité des prévisions. Pour arriver à ces grandeurs, doit-on moyenner le tenseur des contraintes puis chercher la direction, ou alors moyenner directement la direction ?

Dans tous les cas, le calcul de moyenne en pointe de fissure va nécessiter une intégration spécifique :

$$\tilde{f} = \int_{\mathcal{D}} f(\mathbf{x}) . \delta(\mathbf{x}) \, d\mathcal{D} \tag{2.47}$$

 \mathcal{D} est le domaine (ici Ω), f la fonction à moyenner et δ la fonction poids qui vérifie

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{x}) \, d\Omega = 1 \tag{2.48}$$

La fonction poids peut avoir par exemple l'allure d'une Gaussienne centrée sur la pointe de fissure, qui ne dépend que de la distance à la pointe de fissure :

$$\delta(r) = \frac{1}{\delta_0} e^{-\frac{r^2}{R^2}}$$
(2.49)

où *R* est un paramètre de longueur. Dans la littérature, de Borst [BOR 06b] utilise un rayon *R* valant environ 3 longueurs d'élément de pointe de fissure. La figure 2.9 présente trois



FIG. 2.9: Les différentes façons de calculer une contrainte non locale en pointe de fissure.

méthodes différentes d'évaluation de la contrainte critique en pointe de fissure permettant de construire un critère de propagation :

- la contrainte de cisaillement maximale,
- la direction de contrainte principale moyennée,
- et le tenseur des contraintes moyenné.

Dans tous les cas, la loi définissant la vitesse de propagation de la fissure \dot{a} est donnée par :

$$\dot{a} = \begin{cases} 0 & \text{si } \tilde{\sigma} \leqslant \sigma_c \\ c_R \left(1 - \frac{\sigma_d}{\tilde{\sigma}} \right) & \text{si } \tilde{\sigma} > \sigma_c \end{cases}$$
(2.50)

où c_R est la célérité des ondes de Rayleigh, σ_c la contrainte critique d'ouverture d'initiation de propagation (à comparer au K_{Ic}), σ_d la seconde contrainte d'ouverture et $\tilde{\sigma}$ la contrainte non locale d'ouverture de fissure. Grégoire [GRÉ 07] précise les relations entre les deux contraintes critiques et leur significations au niveau expérimental : l'une correspond au démarrage et la second (inférieure à la première) au redémarrage.

La figure 2.10 présente l'évolution de la vitesse de propagation de fissure en fonction de la contrainte moyennée en pointe de fissure.

2.4.2.1 Moyenner le tenseur des contraintes

C'est la moyenne du tenseur des contraintes de pointe de fissure qui est faite. Ainsi pour chaque composante en 2D, on obtient :

$$\tilde{\sigma}_{xx} = \int_{\Omega} \sigma_{xx} \delta d\Omega; \ \tilde{\sigma}_{yy} = \int_{\Omega} \sigma_{yy} \delta d\Omega; \ \tilde{\sigma}_{xy} = \int_{\Omega} \sigma_{xy} \delta d\Omega$$
(2.51)



FIG. 2.10: Critère de propagation de fissure avec la contrainte moyennée ($c_R = 5000m/s$, $\sigma_c = 10MPa$ et $\sigma_d = 7MPa$.

Ensuite la direction principale γ_1 est déterminée par :

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\tilde{\sigma}_{xy}}{\tilde{\sigma}_{xx}^2 - \tilde{\sigma}_{yy}^2}$$
(2.52)

2.4.2.2 Moyenner la direction

Ici, c'est le contraire, on moyenne les directions principales. Ainsi

$$\gamma_2 = \int_{\Omega} \alpha \delta d\Omega \tag{2.53}$$

où

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$
(2.54)

Ces deux visions sont-elles équivalentes ? γ_1 est-il égal à γ_2 ?

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\int_{\Omega} \sigma_{xy} \delta d\Omega}{\int_{\Omega} \sigma_{xx} \delta d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{yy} \delta d\Omega}\right)$$
(2.55)

$$\gamma_2 = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}\right) \delta d\Omega \qquad (2.56)$$

Ces deux méthodes ne devraient pas conduire au même résultat. Mais qu'en est-il au niveau de l'expérimentation numérique ?

2.5 Conclusion

Ce chapitre a présenté la théorie de la mécanique de la rupture et les principales notions concernant le taux de restitution d'énergie, les facteurs d'intensité des contraintes. Cette introduction permet de poser les bases mécaniques du travail de thèse, et les différentes approches présentées, énergétique et locale, permettent quant à elles, d'avoir plusieurs visions de la résolution du problème de fissuration. De plus la résolution de la propagation de fissure, appliquée à un matériau élasto-plastique, par le calcul des facteurs d'intensité des contraintes est plus complexe que pour le cas d'un matériau au comportement linéaire élastique. Les champs asymptotiques sont connus pour une fissure fixe [ELG 06b] mais incertains dans le cas d'une fissure mobile. 2. Mécanique de la rupture
Chapitre 3

État de l'art des méthodes numériques pour la propagation de fissure

Ce chapitre présente les différentes méthodes numériques actuellement mises en oeuvre pour la simulation de propagation dynamique de fissure. La discrétisation en espace selon la méthode des éléments finis étendus est plus particulièrement développée. Enfin, la stabilité du schéma d'intégration de Newmark explicite est présentée.

Sommaire

3.1	Introd	uction	75
3.2	Métho	des de simulation numérique : état de l'art	75
	3.2.1	Méthodes des éléments de frontière	75
	3.2.2	Méthodes sans maillage	76
	3.2.3	Méthodes des éléments finis	76
	3.2.4	Méthodes basées sur la partition de l'unité	77
3.3	Repré	sentation et évolution de l'interface de discontinuité dans le temps	77
	3.3.1	Fonction de niveau ou level-set	77
	3.3.2	Application à la propagation de fissure	78
	3.3.3	Maillages level-set/structure indépendants	78
3.4	Discré	tisation spatiale et temporelle	78

	3.4.1	Discrétisation spatiale	79
	3.4.2	Discrétisation temporelle	81
3.5	Conclu	ision	84

3.1 Introduction

Ce chapitre présente les différentes méthodes numériques actuellement mises en oeuvre pour la simulation de propagation dynamique de fissure. En particulier, la discrétisation en espace selon la méthode des éléments finis étendus est explicitée. Enfin, le schéma d'intégration de Newmark est aussi abordé en terme de stabilité pour la configuration explicite. Dans un premier temps, un état de l'art des méthodes de simulations numériques actuelles qui permettent de traiter la propagation dynamique de fissure sera présenté. Ainsi les méthodes des éléments de frontière, sans maillage, des éléments finis et des méthodes basées sur la partition de l'unité seront très brièvement décrites mettant en avant leurs avantages et inconvénients respectifs. L'évolution d'interface qui se conjugue très bien avec la méthode de partition de l'unité est présentée à travers la notion de fonction de niveau. De plus les discrétisations spatiale, selon la méthode des éléments finis étendus, ainsi que temporelle, à l'aide du schéma d'intégration de Newmark appliqué dans le cas explicite, sont toutes deux explicitées.

Enfin les notions utiles pour simuler la propagation dynamique de fissure par la méthode des éléments finis étendus en explicite sont précisées.

3.2 Méthodes de simulation numérique pour la propagation de fissure : état de l'art

Les différentes méthodes présentées ci-après sont des approches différentes pour la simulation. Les développements sur la méthode des éléments finis usuels sont encore en cours alors que des méthodes sans maillage progressent de leur côté. C'est à dire qu'il s'agit d'un sujet encore très ouvert, qui ne permet pas encore de faire de choix franc. Toutes ces alternatives restent envisageables pour l'avenir, et chacun apporte sa contribution sur les différents axes de recherche concernant les méthodes de simulation numérique pour la propagation de fissure.

3.2.1 Méthodes des éléments de frontière

Cette méthode [PAR 97, ALI 02] est basée sur les calculs aux frontières du domaine. Pour ce qui est de la propagation de fissure, elle permet une description aisée de la fissure [BLA 81, MI 92] : en effet seules les frontières du domaine sont représentées dans la méthode. Par conséquent, la représentation de l'évolution de la fissure est naturelle. Cependant les limitations de cette méthode résident dans les problèmes numériques [POR 92] d'intégration en espace et en temps, qui sont principalement la gestion des calculs volumiques sur la structure ou partie.

3.2.2 Méthodes sans maillage

Les méthodes sans maillage sont diverses, mais la plus utilisée et développée est la méthode EFG (Element Free Galerkin Method). Elle a été proposée par Belytschko [BEL 94b, LU 94] il y a une douzaine d'années environ. Elle a été rapidement appliquée à la propagation de fissure [BEL 95b, LU 95, SUK 97]. L'implémentation numérique de cette technique est maintenant acquise [DOL 98]. Les principaux développements sont explicités dans [KRY 99, BEL 94a, BEL 95a]. Ensuite, le traitement de la discontinuité en déplacement, rencontré dans le problème de fissuration est vu dans [COR 96, BEL 96]. Enfin l'utilisation de fonctions de forme comportant la description de la discontinuité a aussi fait l'objet de publications [FLE 97, KRY 97]. Les principales difficultés tournent autour de l'intégration, des fonctions de forme notamment. Ces opérations ne sont pas triviales et souvent très coûteuses.

3.2.3 Méthodes des éléments finis

La méthodes des éléments finis [BEL 00, HUG 87] est déjà très utilisée en mécanique, et aussi en mécanique de la rupture. Le premier inconvénient est que la fissure doit être partie intégrante du maillage de la structure. Souvent le maillage est raffiné en pointe de fissure afin de mieux évaluer les singularités. Donc il faut mailler la structure et la fissure. Le second, qui découle du premier, se produit quand il y a propagation de la fissure : il faut alors remailler la structure et la nouvelle fissure sauf si la fissure suit les bords des éléments. Dans ce cas la méthode de déboutonnage [CAR 00] peut alors être utilisée. En dynamique, ces opérations peuvent devenir très nombreuses : la zone remaillée peut être restreinte [ATL 85] ou large [BAZ 78]. Le fait que la fissure évolue dans le temps apporte deux cas de figure : le trajet de la fissure est connu par avance, ou pas. Dans le premier cas la structure est maillée intelligemment, c'est à dire que le trajet de la fissure est d'ores et déjà prévu à l'avance. C'est par exemple le cas d'une propagation de fissure en mode 1 pur où la fissure progresse de façon rectiligne. Dans le second cas où le trajet n'est pas connu par avance, et c'est notamment le cas en mode mixte, où la fissure a une trajectoire courbe, le maillage est modifié si la fissure avance : cela impose une procédure de remaillage de la structure qui s'effectue principalement au voisinage de la pointe de fissure. La configuration est alors modifiée, et certaines quantités (déplacement, déformation, contraintes) doivent être initialisées sur la nouvelle configuration : il est alors nécessaire d'opérer une projection de champs.

Ces deux procédures de remaillage et de projection de champs sont les deux inconvénients de l'utilisation de la méthode des éléments finis pour la propagation de fissure en dynamique. Le remaillage est une procédure techniquement réalisable et fiable en 2D, mais coûteuse. Quant à la projection de champs, elle a été progressivement améliorée, mais elle ne pourra jamais conserver exactement toutes les quantités d'intérêt localement et globalement. C'est donc le changement de maillage qui pénalise l'exactitude et le coût des calculs. C'est pour ces raisons que des méthodes sans remaillage ont vu le jour récemment.

3.2.4 Méthodes basées sur la partition de l'unité

La méthode des éléments finis a l'inconvénient de nécessiter une procédure de remaillage lorsque la fissure propage. La prise en compte de l'interface dans la discrétisation pourrait permettre de s'affranchir de cette opération lourde. Melenk et Babuška [MEL 96, BAB 97] introduisent la partition de l'unité, et montrent qu'en s'intéressant à cette dernière, l'ajout de fonctions de forme particulières est rendu possible. De ce fait, la discrétisation se voit donc être enrichie par des fonctions de forme décrivant le comportement à l'interface. Ces fonctions de forme enrichies servent à prendre en compte, dans la discrétisation, la présente fissure [MOË 02a, BEL 99, MOË 99, BEL 01, DUA 01, DOL 00]. Ces méthodes sont d'autant plus intéressantes en trois dimensions qu'elles ne nécessitent pas de remaillage [SUK 01, SUK 00]. Ces méthodes ont suscité un réel intérêt ces dix dernières années [MOË 02c, GRA 02, STO 01, WAG 01, BEL 03, MOË 02a] : tout d'abord pour consolider le fait que la description X-FEM était valide [BEC 05, STA 03, ZI 03, STA 03], et que les schémas d'intégration étaient stables [RÉT 05c, RÉT 05b, RÉT 04, RÉT 05a]. Des développements plus poussés concernant les critères de propagation ont fait l'objet de nombreuses publications pour les zones cohésives [GEE 98, PEE 02, BOR 96, BOR 03, BOR 04] couplées à X-FEM [MOË 02b], pour le contact [DOL 01], et aussi pour traiter de la simulation numérique de coupe [GUE 05] par exemple. Deux problèmes sont à traiter séparément : la localisation de l'interface et le calcul de mécanique.

3.3 Représentation et évolution de l'interface de discontinuité dans le temps

L'interface de discontinuité et son évolution dans le temps sont à traiter aussi. Deux possibilités sont alors proposées : mailler la fissure et sa progression avec des segments en 2D, et avec des triangles en 3D, ou alors utiliser des fonctions de niveau (aussi appelées "level-set") qui permettent de localiser la fissure. Ainsi la méthode X-FEM peut utiliser une caractérisation spatiale de la fissure à l'aide de fonctions dites de niveau. Le cas tridimensionnel [SUK 00, GRA 02] apporte la complexité au problème qui encourage à caractériser la position de l'interface de discontinuité avec ces fonctions de niveau. Ces méthodes étaient utilisées en mécanique des fluides afin de calculer l'évolution de l'interface entre deux fluides non miscibles par exemple. Les fonctions de niveau sont aussi beaucoup utilisées en imagerie virtuelle pour le retraitement des images.

3.3.1 Fonction de niveau ou level-set

La localisation de l'interface est associée à l'iso-zéro d'un champ scalaire dans l'espace ; de plus l'évolution de l'interface ne dépend que de la vitesse normale à la surface. L'utilisation de fonctions de niveau pour traiter ce problème d'évolution date de 1994 [SUS 94, SET 96]. La mise en équation pour chacune des étapes du calcul a été progressivement améliorée [SET 99, SET 01, SET 03]. Le domaine de la mécanique des fluides a beaucoup contribué à ces évolutions [SOC 03]. Les différentes difficultés de chaque étape de calcul ont été résolues. Ainsi l'utilisation d'un maillage régulier s'avère très performant associé à un algorithme de calcul en différences finies. Les étapes de propagation de champs, d'orthogonalisation, d'extension des vitesses sont principalement référencées dans [MAL 95, PEN 99, ADA 99, OSH 01, OSH 02, PRA 06].

3.3.2 Application à la propagation de fissure

Sukumar [SUK 01] décrit les premières applications sur cette idée. L'utilisation de fonctions de niveau pour l'évolution de fissure dans l'espace est notamment décrite dans les références suivantes [SUK 00, MOË 02c, GRA 02, VEN 02, VEN 03]. L'utilisation de fonctions de niveau pour traiter la fissure dans le cas tridimensionnel est une nécessité. Pour ce faire, la fissure est décrite par au minimum deux fonctions de niveau [GRA 02, DUF 07, BOR 06a] : la première localisera par son iso-zéro la surface du plan de fissure, et la seconde servira à définir le front, ou les fronts.

Propagation des fonctions de niveau : Le choix s'est porté sur ce qui existait déjà [MOË 02c, GRA 02, BOR 06a] dans la propagation des fonctions de niveau. En fait, le vecteur vitesse de propagation de fissure est séparée en deux partie : chacune des deux parties correspond à la propagation d'une fonction de niveau. La mise à jour des levelsets est purement explicite ; les étapes sont l'extension des vitesses, puis l'ajustement d'un champ de vitesse sur la fissure, et la mise à jour des champs, et enfin la réinitialisation à une distance signée.

3.3.3 Maillages level-set/structure indépendants

Le traitement numérique des fonctions de niveau nécessite un maillage spatial d'appui. Deux possibilités s'ouvrent : soit le maillage est le même que celui de la structure, soit les fonctions de niveau s'appuient sur un maillage indépendant de celui de la structure. La référence [PRA 06] explicite notamment ce second choix sur des calculs de propagation dynamique de fissure en mode mixte.

Nous avons choisi cette méthode de maillage level-set indépendant du maillage de la structure dans le code EUROPLEXUS en dynamique rapide. La méthode a été développée en 2D et 3D avec une représentation différence finie 3D du mouvement des level-sets.

3.4 Discrétisation spatiale et temporelle

Le système d'équations (2.1) du prolème de référence à résoudre est un système d'équations différentielles espace-temps. C'est à dire que les grandeurs (déplacement, vitesse, accélération) sont définies en fonction de l'espace et du temps. Le couplage des équations différentielles avec les conditions de bord implique une résolution approchée,

étant donnée la complexité du problème. L'approximation éléments finis espace-temps permet en l'ocurrence de résoudre ce type de système. Les parties suivantes précisent les discrétisations spatiale et temporelle utilisées pour ce type de problème mécanique.

3.4.1 Discrétisation spatiale

3.4.1.1 Discrétisation spatiale : FEM

La méthode des éléments finis a pour but de résoudre le système d'équations décrit dans (2.1). Les principales références [BEL 00, HUG 87, BAT 82] analysent précisément la méthode et les fonctionnalités : la mise en équation pour la résolution numérique éléments finis y est détaillée. Ainsi, on considère un domaine Ω discrétisé par un ensemble \mathcal{N} de N noeuds. Sur cet ensemble de noeuds, s'appuie une famille de fonctions de forme N_i avec $i \in \mathcal{N}$. La discrétisation passe par la définition d'un espace de fonctions tests approprié, sur lequel les solutions de la (re)formulation variationnelle de l'équation est exacte. Le déplacement discrétisé $\overline{\mathbf{U}}$ au point \mathbf{x} s'écrit alors

$$\bar{\mathbf{U}} = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{U}_i \tag{3.1}$$

 $\hat{\mathbf{U}}$ définit une approximation éléments finis standard du champ de déplacement. Il en est de même pour la vitesse et l'accélération.

3.4.1.2 Discrétisation spatiale : X-FEM

Dans un premier temps, les fonctions de forme constituent une partition de l'unité sur le domaine entier Ω si

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\mathbf{x}) = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$
(3.2)

Sous cette condition alors on peut enrichir la base de fonctions de forme en utilisant une fonction d'enrichissement ψ telle que

$$\bar{\mathbf{U}} = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{U}_i + \sum_{j \in \mathcal{N}^e} N_j(\mathbf{x}) \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) \mathbf{U}_j^e$$
(3.3)

De plus, le domaine d'influence de la fonction d'enrichissement ψ est l'ensemble des éléments connectés aux noeuds appartenant à \mathcal{N}^e ; ces noeuds sont alors dits "enrichis". Cela revient à enrichir le déplacement standard par le champ de déplacement $\psi(\mathbf{x})$. Avec cette manière d'écrire, si l'on choisit les grandeurs \mathbf{U}_i égales à 0 et \mathbf{U}_j^e égales à 1, le champ de déplacement discrétisé correspond au champ de déplacement $\psi(\mathbf{x})$ souhaité :

$$\bar{\mathbf{U}} = \sum_{j \in \mathcal{N}^e} N_j(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x})$$
(3.4)

Si l'on veut décrire une fissure, le champ de déplacement est discontinu; alors la fonction d'enrichissement doit être discontinue également. Cette propriété s'exploite avec la méthode des éléments finis étendus. Ainsi, il semble judicieux de choisir la fonction discontinue H, qui décrit la présente discontinuité, dont la définition est la suivante :

$$H(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } \mathbf{x} \text{ est au dessus de la fissure} \\ -1 & \text{si } \mathbf{x} \text{ est au dessous de la fissure} \end{cases}$$
(3.5)

D'autres fonctions discontinues peuvent aussi être choisies (par exemple +1 au dessus, et 0 sous la fissure). L'approximation éléments finis étendus du champ de déplacement \overline{U} au point x s'écrit en tenant compte de l'équation 3.5 :

$$\bar{\mathbf{U}} = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{U}_i + \sum_{j \in \mathcal{N}^e} N_j(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) \mathbf{U}_j^e$$
(3.6)

On peut aussi ajouter en plus des fonctions enrichies décrivant plus précisément le déplacement en pointe de fissure [DUA 01, MOË 99, MOË 02a, BEL 99]. La base de fonction d'enrichissement la plus judicieuse est la suivante :

$$[B_{\alpha}] = \left[\sqrt{r}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\theta\right), \sqrt{r}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\theta\right)\right]$$
(3.7)

où (r, θ) sont les coordonnées cylindriques dans le repère local lié au front de fissure. Et les solutions asymptotiques du champ de déplacement peuvent être obtenues en combinant linéairement les 4 fonctions de cette base. L'approximation s'écrit finalement :

$$\bar{\mathbf{U}} = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{U}_i + \sum_{j \in \mathcal{N}^e} N_j(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) \mathbf{U}_j^e + \sum_{k \in \mathcal{N}^{front}} \sum_{\alpha \in [1,4]} N_k(\mathbf{x}) B_\alpha(\mathbf{x}) \mathbf{b}_{k,\alpha}$$
(3.8)



FIG. 3.1: Stratégies d'enrichissement du maillage contenant une fissure.

La figure 3.1 présente deux stratégies d'enrichissement pour traiter la fissure : utilisation d'enrichissements saut uniquement, et discontinus et singuliers de pointe de fissure.

3.4.2 Discrétisation temporelle

3.4.2.1 Méthode de Newmark

Dans cette partie, on s'interesse à l'intégration numérique de l'équation d'équilibre dynamique 3.9 suivante :

$$M\ddot{x} = f_{ext} - f_{int}$$
 ou $M\ddot{x} + Kx = f_{ext}$ (3.9)

Tout d'abord le schéma général de la méthode de Newmark [NEW 59, VEL 60], applicable aussi bien au domaine linéaire que non-linéaire, sera présenté. La famille des schémas de Newmark [NEW 59] ne formule aucune hypothèse sur les dérivation des grandeurs dans le temps. Il est basé sur un développement limité de Taylor des fonctions temporelles. Les dérivations successives peuvent être approchées par un développement de Taylor en utilisant 2 paramètres β pour le déplacement *x* et γ pour la vitesse *x*. Le passage du pas *n* au pas *n* + 1 est ainsi donné par :

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t \dot{x}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{x}_n + \frac{\Delta t^3}{3} \left(3\beta \frac{\ddot{x}_{n+1} - \ddot{x}_n}{\Delta t} \right)$$
(3.10)

$$\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + \Delta t \ddot{x}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \left(2\gamma \frac{\ddot{x}_{n+1} - \ddot{x}_n}{\Delta t} \right)$$
(3.11)

Au final en notant U_n le déplacement à l'instant n, \dot{U}_n la vitesse, \ddot{U}_n l'accélération, alors les relations s'écrivent :

$$U_{n+1} = U_n + \Delta t \dot{U}_n + \Delta t^2 (\frac{1}{2} - \beta) \ddot{U}_n + \Delta t^2 \beta \ddot{U}_{n+1}$$

$$\dot{U}_{n+1} = \dot{U}_n + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{U}_n + \gamma \Delta t \ddot{U}_{n+1}$$
(3.12)

Le schéma explicite de différence centrée est donné pour le couple de valeur $\beta = 0$ et $\gamma = \frac{1}{2}$; le résultat est décrit ci-après :

$$U_{n+1} = U_n + \Delta t \dot{U}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{U}_n$$

$$\dot{U}_{n+1} = \dot{U}_n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{U}_n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{U}_{n+1}$$
(3.13)

Le tableau 3.1 présente les différents algorithmes utilisés en fonction du couple de paramètres (γ , β).

3.4.2.2 Stabilité

On s'intéresse à présent aux conditions éventuelles de stabilité d'un schéma d'intégration temporelle de Newmark, sur la base de l'équation de mouvement suivante :

$$\mathbb{M}\ddot{U}_n + \mathbb{K}U_n = F_{ext} \tag{3.14}$$

Algorithme	type	γ	β
purement explicite	explicite	0	0
différence centrée	explicite	1/2	0
accélération linéaire	implicite	1/2	1/6
accélération moyenne	implicite	1/2	1/4
accélération moyenne modifiée	implicite	$1/2 + \gamma$	$(1 + \gamma)^2/4$
Fox-Goodwin	implicite	1/2	1/12

TAB. 3.1: Résumé des propriétés des schémas numériques de Newmark.

où \mathbb{M} est la matrice de masse du système considéré, \mathbb{K} la matrice de raideur. On définit alors les notations suivantes (avec \mathbb{B} matrice symétrique) :

$$[X] = X_{n+1} - X_n , \quad \langle X \rangle = \frac{X_{n+1} + X_n}{2}$$

$$2 \langle X \rangle^T \mathbb{B}[X] = 2 [X]^T \mathbb{B} \langle X \rangle = [X^T \mathbb{B} X] \qquad (3.15)$$

Donc on peut écrire que le système 3.13 est équivalent à :

$$\begin{bmatrix} U \end{bmatrix} = \Delta t \left\langle \dot{U} \right\rangle + \frac{\Delta t^2}{2} (2\beta - \gamma) \begin{bmatrix} \ddot{U} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{U} \end{bmatrix} = \Delta t \left\langle \ddot{U} \right\rangle + \Delta t \left(\gamma - \frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} \ddot{U} \end{bmatrix}$$
(3.16)

On développe en commençant par l'opération suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{U} \end{bmatrix}^T \left(\mathbb{M} \begin{bmatrix} \ddot{U} \end{bmatrix} + \mathbb{K} \begin{bmatrix} U \end{bmatrix} \right) = 0 \tag{3.17}$$

On injecte les équations 3.16 dans l'équation 3.17, et on obtient [HUG 87] :

$$-\left(\gamma - \frac{1}{2}\right)\left[\ddot{U}\right]^{T} \mathbb{A}\left[\ddot{U}\right] = \left\langle\ddot{U}\right\rangle^{T} \mathbb{A}\left[\ddot{U}\right] + \left[\dot{U}\right]^{T} \mathbb{K}\left\langle\dot{U}\right\rangle$$
(3.18)

où

$$\mathbb{A} = \mathbb{M} + \frac{\Delta t^2}{2} (2\beta - \gamma) \mathbb{K}$$
(3.19)

Et comme les matrices \mathbb{M} et \mathbb{K} représentent des formes bilinéaires symétriques, alors on peut en conclure d'après 3.15 que :

$$\frac{1}{2} \left[\ddot{\boldsymbol{U}}^T \mathbb{A} \ddot{\boldsymbol{U}} + \dot{\boldsymbol{U}}^T \mathbb{K} \dot{\boldsymbol{U}} \right] = -(\gamma - \frac{1}{2}) \left[\ddot{\boldsymbol{U}} \right]^T \mathbb{A} \left[\ddot{\boldsymbol{U}} \right]$$
(3.20)

De là, on peut écrire que **le schéma est stable si** $\gamma \ge 1/2$ **et** \mathbb{A} **définie positive**. Si ces conditions sont vérifiées, alors le schéma est stable. De plus, les solutions ω du problème de vibration (det($\mathbb{K} - \omega^2 \mathbb{M}$) = 0) doivent être considérées. Soit le vecteur X_{ω} correspondant à la valeur ω^2 , donc :

$$\mathbb{K}X_{\omega} = \omega^2 \mathbb{M}X_{\omega} \tag{3.21}$$

En s'appuyant sur la définition de la matrice \mathbb{A} , on peut écrire :

$$X_{\omega}^{T} \mathbb{A} X_{\omega} = X_{\omega}^{T} \mathbb{M} X_{\omega} + \frac{\Delta t^{2}}{2} (2\beta - \gamma) X_{\omega}^{T} \mathbb{K} X_{\omega}$$
(3.22)

Donc

$$X_{\omega}^{T} \mathbb{A} X_{\omega} = \left(1 + (\beta - \frac{\gamma}{2})(\omega \Delta t)^{2}\right) X_{\omega}^{T} \mathbb{M} X_{\omega}$$
(3.23)

Donc la condition de stabilité du schéma numérique (\mathbb{A} positive $\forall \omega^2$) est que les solutions du problème de vibration det($\mathbb{K} - \omega^2 \mathbb{M}$) = 0 doivent vérifier :

$$1 + (\beta - \frac{\gamma}{2})(\omega \Delta t)^2 \ge 0 \tag{3.24}$$

On retrouve alors les conditions de stabilité du schéma de Newmark :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \le \gamma \le 2\beta & \text{schéma inconditionnellement stable,} \\ \frac{1}{2} \le \gamma \text{ et } 2\beta \le \gamma & \text{schéma stable si } \Delta t \le \Delta t_c = \frac{1}{\omega_{max}\sqrt{\frac{\gamma}{2}-\beta}}. \end{cases}$$
(3.25)

où ω_{max} est la plus grande valeur de pulsation propre de la structure discrétisée. Et, dans la pratique cette valeur critique est déterminée en calculant la plus grande pulsation propre du plus petit élément. Enfin, pour le cas explicite, le pas de temps critique est alors donné par le couple de paramètres $\beta = 0$ et $\gamma = \frac{1}{2}$:

$$\Delta t_c = \frac{2}{\omega_{max}} \tag{3.26}$$

La méthode de calcul du pas de temps critique pour un schéma explicite a ainsi été détaillée. Cette méthode globale de détermination de pas de temps critique dans le cas explicite, sera appliquée pour les cas d'éléments enrichis en une, deux et trois dimensions.

3.4.2.3 Remarque sur Newmark explicite

Le schéma en différence centrée de Newmark peut être vue d'une manière différente de celle exposée précédemment. Ainsi pour l'implémentation numérique, il est plus commode de visualiser l'algorithme de résolution par demi pas de temps. Ainsi pour résoudre l'équation :

$$M\ddot{u}^t = f^t_{ext} - f^t_{int} \tag{3.27}$$

L'utilisation de la différence centrée pour les vitesse et accélération s'écrit :

$$\dot{u}^t = \frac{u^{t+\Delta t} - u^{t-\Delta t}}{\Delta t}$$
(3.28)

$$\ddot{u}^t = \frac{u^{t+\Delta t} - 2u^t + u^{t-\Delta t}}{\Delta t^2}$$
(3.29)

Les vitesses au demi temps supérieur et inférieur s'écrivent :

$$\dot{u}^{t-\frac{\Delta t}{2}} = \frac{-u^{t-\Delta t} + u^{t}}{\Delta t} \quad ; \quad \dot{u}^{t+\frac{\Delta t}{2}} = \frac{-u^{t} + u^{t+\Delta t}}{\Delta t}$$
(3.30)

Le étapes de de résolution de l'algorithme qui permettent de passer du temps *t* au temps $t + \Delta t$ sont les suivantes :

- 1. position au temps $t + \Delta t : u^{t+\Delta t} = x^{t-\Delta t} + \Delta t \dot{u}^t$,
- 2. vitesse au temps $t + \Delta t/2$: $\dot{u}^{t+\Delta t/2} = (u^{t+\Delta t} u^t)/\Delta t$,
- 3. accélération au temps $t + \Delta t$: $\ddot{u}^{t+\Delta t} = M^{-1} \left(f_{ext}^{t+\Delta t} f_{int}^{t+\Delta t} \right)$,
- 4. vitesse au temps $t + \Delta t : \dot{u}^{t+\Delta t} = \dot{u}^{t} + (\ddot{u}^{t+\Delta t} + \ddot{u}^{t}) \Delta t/2.$

Ainsi, l'avancée des calculs dans le temps est triviale. Le pas de temps de calcul doit cependant être inférieur au pas de temps critique. La simplicité des calculs fait de ce schéma d'intégration son succès en dynamique rapide.

3.4.2.4 Avancée de la fissure

L'avancée de la fissure se fait à partir d'un schéma numérique d'intégration explicite : c'est à dire que l'actualisation de la longueur de la fissure $a_{t+\Delta t}$ est évaluée à partir de la longueur et de la vitesse au temps précédent :

$$a_{t+\Delta t} = a_t + \dot{a}_t \cdot \Delta t \tag{3.31}$$

De même la position de la pointe de fissure est aussi actualisée via le même algorithme.

3.5 Conclusion

Dans tous les cas, la simulation numérique du phénomène de propagation dynamique de fissure nécessite de tenir compte des trois points suivants :

- la description spatiale de la fissure au niveau du champs de déplacement discontinus, et des autres champs,
- le critère de propagation : la détermination des grandeurs permettant de définir la propagation, en terme de vitesse et de direction,
- et enfin l'évolution de la discontinuité dans l'espace en fonction du temps.

On a ainsi explicité les techniques numériques qui permettent de traiter de ces différents points. En ce qui concerne les travaux présentés ci-après, la description spatiale de la fissure est fournie par la méthode des éléments finis étendus (X-FEM) et des fonctions de niveau permettant de localiser cette fissure. Ensuite un critère de propagation particulier a été développé, et enfin l'évolution de la fissure au cours du temps est évaluée par les fonctions de niveau grâce à un algorithme explicite.

Chapitre 4

Théorie : X-FEM en dynamique explicite

Dans ce chapitre, la mise en place globale de la méthode des éléments finis étendus pour la propagation de fissure en dynamique explicite sera exposée. On présentera deux méthodes de diagonalisation de matrice de masse qui respectent des propriétés essentielles, et l'étude de pas de temps critiques d'éléments enrichis. Enfin ces études seront validées par des applications numériques avec discontinuité fixe en déplacement.

Sommaire

4.1	Introduction				
4.2	2 Diagonalisation de la matrice de masse				
	4.2.1	Introduction	7		
	4.2.2	Diagonalisation 1 : masse diagonale	9		
	4.2.3	Diagonalisation 2 : masse diagonale par bloc	2		
	4.2.4	Conservation de l'énergie cinétique	5		
4.3	.3 Étude de pas de temps critique X-FEM				
	4.3.1	Élément monodimensionnel	8		
	4.3.2	Éléments bidimensionnels	5		

	4.3.3	Éléments tridimensionnels		
	4.3.4	Bilan		
4.4	4.4 Propagation d'onde à travers la discontinuité			
	4.4.1	Introduction		
	4.4.2	Cas simple monodimensionnel		
	4.4.3	Cas bidimensionnel		
4.5	Conclu	ısion		

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, la mise en place efficace de la méthode des éléments finis étendus (ou X-FEM) pour la propagation de fissure en dynamique explicite est proposée. Elle a fait notamment l'objet d'une implémentation intégrale dans EUROPLEXUS, code de dynamique explicite développé au CEA Saclay, et commercialisé par Samtech. Le chapitre est organisé de la façon suivante : le point de départ de l'intégration dans un code de calcul explicite est basé sur l'utilisation d'une matrice de masse diagonale. Par conséquent, après avoir étudié de manière approfondie deux techniques de diagonalisation de matrice de masse avec fonctions de forme enrichies, nous nous concentrons, d'une part, sur l'étude de pas de temps critiques pour divers éléments enrichis associée à ces dernières techniques, et d'autre part, sur la vérification de la non-propagation d'onde à travers la discontinuité en déplacement. *In fine*, le chapitre 5 presentera quatre exemples numériques pour valider ces études.

4.2 Diagonalisation de la matrice de masse

4.2.1 Introduction

Cette partie présente deux techniques de diagonalisation de la matrice de masse pour les calculs numériques. En effet, il y a au moins deux raisons pour lesquelles on a besoin de travailler sur les techniques de diagonalisation de matrice de masse avec la méthode des éléments finis étendus.

La première est liée au fait qu'un code de calcul dynamique explicite nécessite une matrice de masse diagonale, car le code ne comporte pas de matrice ; c'est à dire que l'architecture de ces codes (comme EUROPLEXUS, RADIOSS ou LS-DYNA par exemple) est telle que la matrice de masse n'existe que sous la forme d'une liste de réels représentant les termes de la diagonale de la matrice de masse. L'intérêt réside dans le fait que l'inversion de la matrice de masse est triviale, il ne s'agit que d'inverser des scalaires non nuls. La résolution de l'équation suivante devient alors évidente :

$$\mathbb{M}_{diagonale} \ddot{U}_{n+1} = F_{n+1}^{ext} - F_{n+1}^{int}$$
(4.1)

En somme, il est très souhaitable que la matrice de masse soit diagonale afin de pouvoir utiliser au mieux la méthode X-FEM dans des codes explicites industriels. Le problème ici, est que l'on ne sait pas diagonaliser une matrice de masse qui comporte des termes correspondant à des degrés de liberté enrichis. Dans le cas des éléments finis, il existe plusieurs méthodes de diagonalisation de matrice de masse : la plus connue est celle qui est définie par la sommation des termes d'une ligne pour obtenir le terme correspondant de la diagonale. Ces méthodes sont souvent basées sur la partition de l'unité, et la conservation de la masse dans la matrice : c'est à dire que la somme des termes de la matrice de masse est égale à la masse de la structure. La question qui se pose ici est : comment diagonaliser cette matrice de masse qui comporte des termes correspondant à des degrés de liberté enrichis ? Cette recherche porte sur la méthode des éléments finis étendus, et donc il faut aborder la façon de diagonaliser une matrice de masse dans une base de fonctions de forme qui comporte des fonctions enrichies. Tout d'abord, la matrice de masse consistante prend la forme générale suivante avec un rangement adéquat des fonctions de forme :

$$\mathbb{M}_{XFEM} = \begin{pmatrix} \mathbb{M}_{standard} & \mathbb{M}_{couplage} \\ \mathbb{M}_{couplage} & \mathbb{M}_{enrichie} \end{pmatrix}$$
(4.2)

où la matrice $\mathbb{M}_{standard}$ est la matrice de masse construite à partir des fonctions de forme non enrichies seulement, la matrice $\mathbb{M}_{enrichie}$ construite à partir des fonctions de forme enrichies uniquement, et $\mathbb{M}_{couplage}$ par le couplage des fonctions de forme standard et enrichies. La diagonalisation de matrice de masse est utilisée systématiquement pour le calcul dynamique explicite; la technique de diagonalisation de la matrice $\mathbb{M}_{standard}$ est bien connue [ZIE 00, HUG 87]. L'objet de ce paragraphe est la diagonalisation de la matrice masse \mathbb{M}_{XFEM} de la méthode des éléments finis étendus.

Le deuxième enjeu concerne la taille du pas de temps de stabilité du schéma en dynamique explicite. Ce pas de temps dépend en effet de la dimension du plus petit élément de cette structure. Gerlach [GER 99] a montré que l'enrichissement discontinu introduit un caractère non stabilisant du schéma de Newmark explicite, et que le pas de temps tend vers zéro. En effet, si l'on considère à présent une structure comportant une fissure, et sa représentation par la méthode des éléments finis étendus, le pas de temps critique dépend de la plus petite partie des éléments coupés par la fissure. La figure 4.1 montre l'équiva-



FIG. 4.1: Équivalence entre un élément enrichi et 2 éléments finis.

lence entre un élément fini étendu joignant les noeuds 1 et 2, et 2 éléments finis successifs joignant 1 à 3 et 3=4 à 2.

On voit que le pas de temps critique du problème tend vers zéro lorsque la coupure s'approche d'un noeud. Plus généralement, dans un éléments fini enrichi le pas de temps explicite tend vers zéro lorsque la fissure "passe" très près d'un noeud. Cette configuration sera très pénalisante pour d'éventuels calculs de propagation de fissure, car le chemin de celle-ci n'est pas connu par avance, et cette configuration est donc très probable. Remmers [REM 07] a contourné la difficulté en interdisant à la fissure de couper les éléments en trop petits morceaux. Pour ce faire, il déplace légèrement les noeuds au cours du calcul. Cette

technique est assez approximative ; le pas de temps critique sera de toute façon plusieurs dizaines de fois, voire centaines, plus petit que le pas de temps critique de l'élément fini non enrichi, ce qui pénalise tout le calcul. L'idée qui a été suivie dans ce travail est de modifier la répartition des masses sur les degrés de liberté de l'élément fini étendu de manière à conserver l'énergie cinétique globale ainsi que celle de chacun des souséléments coupés. La répartition des masses devra être bien choisie.

Ce qui suit présente deux méthodes de diagonalisation de matrice masse pour éléments enrichis qui respectent la conservation de l'énergie cinétique, puis les calculs de pas de temps critiques pour divers éléments enrichis monodimensionnel, bidimensionnels et tridimensionnels avec ces deux méthodes. On montrera que les matrices de masse ainsi construites permettent de respecter la non-propagation d'onde à travers la discontinuité ; une démonstration sera proposée pour les deux diagonalisations, et une validation numérique confirmera cette propriété.

On proposera deux méthodes de diagonalisation : la méthode 1 (respectivement 2) qui crée une matrice de masse **diagonale** (respectivement **diagonale par bloc**). La méthode 2 est dite diagonale par bloc car elle diagonalise la matrice de masse dans une base différente de la base habituelle, et le retour dans la base habituelle donne une matrice diagonale par bloc, et non plus diagonale.

4.2.2 Diagonalisation 1 : masse diagonale

4.2.2.1 Méthode de diagonalisation

L'objectif de ce paragraphe est de démontrer la méthode de diagonalisation de matrice masse mise en place et basée sur la conservation de l'énergie cinétique. Menouillard [MEN 06c] précise aussi la démonstration de la méthode de diagonalisation. On cherche à respecter la conservation de l'énergie cinétique discrète $(\frac{1}{2}\dot{U}^T M \dot{U})$ avec une matrice de masse diagonale. Pour ce faire, m_{diag}^{fem} désignera le terme courant de la diagonale de la matrice masse correspondant aux fonctions de forme standard, et m_{diag}^{xfem} les termes de la diagonale correspondant aux fonctions de forme enrichies. La matrice d'interaction n'intervient pas dans la diagonalisation.

$$m_{diag}^{fem} = \frac{m}{n_{nodes}} \tag{4.3}$$

$$m_{diag}^{xfem} = \frac{m}{n_{nodes}} \frac{1}{mes(\Omega_{el})} \int_{\Omega_{el}} \psi^2 d\Omega$$
(4.4)

où Ω_{el} est l'élément considéré, *m* sa masse, $mes(\Omega_{el})$ sa longueur en 1D, sa surface (en 2D) ou son volume (en 3D), n_{nodes} le nombre de noeuds de l'élément, et ψ la fonction d'enrichissement (par exemple la fonction Heaviside *H*).

4.2.2.2 Démonstration sur un élément monodimensionnel

L'utilisation d'un élément monodimensionnel à deux noeuds permettra d'appuyer la démonstration. Chaque noeud possède un degré de liberté standard correspondant aux

fonctions de forme N_1 , N_2 et un degré de liberté supplémentaire correspondant à la fonction d'enrichissement ψ associée à chacune des fonctions de forme standard. Le champ de déplacement est approché par :

$$\mathbf{u}^{\mathbf{h}} = N_1 \bar{\mathbf{U}}_1 + N_2 \bar{\mathbf{U}}_2 + N_1 \psi \tilde{\mathbf{U}}_{11} + N_2 \psi \tilde{\mathbf{U}}_{12}$$
(4.5)

La matrice de masse diagonalisée est de la forme :

$$\mathbb{M}^{diag} = \begin{bmatrix} m_1^{fem} & 0 & 0 & 0\\ 0 & m_2^{fem} & 0 & 0\\ 0 & 0 & m_3^{xfem} & 0\\ 0 & 0 & 0 & m_4^{xfem} \end{bmatrix}$$
(4.6)

L'objectif ici est de déterminer les coefficients de la matrice tels que cette matrice permette de conserver l'énergie cinétique, c'est à dire que $T^h = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbb{M}^{diag} \dot{\mathbf{U}}$ soit égal à $T = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{el}} \rho \dot{\mathbf{u}}^2 d\Omega$, qui est l'énergie cinétique exacte. Dans un premier temps, on considère un champ de vitesse constant dans la structure, ce qui correspond à un déplacement de corps rigide à vitesse constante $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{\bar{a}}$. Ainsi, on a $\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{i}}$ égal à $\mathbf{\bar{a}}$ et $\mathbf{\tilde{U}}_{\mathbf{i}\mathbf{l}}$ à 0. Donc le calcul de l'énergie cinétique discrète donne

$$T^{h} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^{T} \mathbb{M}^{diag} \dot{\mathbf{U}} = \frac{1}{2} (m_{1}^{fem} \dot{\vec{\mathbf{U}}}_{1}^{2} + m_{2}^{fem} \dot{\vec{\mathbf{U}}}_{2}^{2}) = \frac{1}{2} (m_{1}^{fem} + m_{2}^{fem}) \bar{\mathbf{a}}^{2}$$
(4.7)

et l'énergie cinétique exacte est :

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{el}} \rho \dot{\mathbf{u}}^2 d\Omega = \frac{1}{2} m \bar{\mathbf{a}}^2$$
(4.8)

Dans un second temps, la structure subit un autre déplacement de corps rigide où les deux parties s'éloignent l'une de l'autre à la même vitesse \bar{a} ; c'est à dire que le champ de vitesse est décrit par $\dot{u} = \bar{a}\psi(x)$.

$$T^{h} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^{T} \mathbb{M}^{diag} \dot{\mathbf{U}} = \frac{1}{2} (m_{3}^{xfem} \dot{\tilde{\mathbf{U}}}_{11}^{2} + m_{4}^{xfem} \dot{\tilde{\mathbf{U}}}_{12}^{2}) = \frac{1}{2} (m_{3}^{xfem} + m_{4}^{xfem}) \bar{\mathbf{a}}^{2}$$
(4.9)

et

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{el}} \rho \dot{\mathbf{u}}^2 d\Omega = \frac{1}{2} \rho \bar{\mathbf{a}}^2 \int_{\Omega_{el}} \psi^2 d\Omega$$
(4.10)

Donc se déduisent des équations 4.7 à 4.10 les relations suivantes :

$$m_1^{fem} = m_2^{fem} = \frac{m}{2}$$
 (4.11)

$$m_3^{xfem} = m_4^{xfem} = \frac{m}{2} \frac{1}{mes(\Omega_{el})} \int_{\Omega_{el}} \psi^2 d\Omega$$
(4.12)

On a ainsi fait la démonstration de la méthode de diagonalisation en respectant la conservation de l'énergie cinétique pour des mouvements de corps rigide traduisant la présence ou non de la discontinuité de déplacement.

4.2.2.3 Application à un élément monodimensionnel

On considère à présent un élément monodimensionnel Ω de longueur *L*, de masse volumique ρ , de section *S* coupé à une distance εL du noeud de gauche noté noeud *I*. Le noeud de droite est noté noeud *II*. Les fonctions de forme sont ainsi f_I et f_{II} , et la fonction d'enrichissement *H* vaut +1 à gauche et -1 à droite. Les fonctions de forme enrichies sont donc (Hf_I, Hf_{II}) notées par la suite $(f_{I'}, f_{II'})$. La base de fonction de forme de l'élément devient $(f_I, f_{II}, f_{I'}, f_{II'}) = (\phi_k)_{k \in \{1,2,3,4\}}$. La figure 4.2 montre les 2 fonctions de forme standard (f_I, f_{II}) , et les deux fonctions enrichies $(f_{I'}, f_{II'})$. La matrice de masse consistante est définie par ces termes m_{ij} de la i^{eme} ligne et de la j^{eme} colonne comme suit :

$$m_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i \phi_j d\Omega \tag{4.13}$$

On note $m = \rho SL$ la masse de l'élément. Le résultat pour la matrice de masse consistante est le suivant :

$$\mathbb{M}_{1d}^{XFEM} = m \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\epsilon^3 & \frac{1}{6} - u^2 + \frac{2}{3}\epsilon^3 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} - \epsilon^2 + \frac{2}{3}\epsilon^3 & \frac{1}{3} - 2\epsilon + 2\epsilon^2 - \frac{2}{3}\epsilon^3 \\ \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\epsilon^3 & \frac{1}{6} - \epsilon^2 + \frac{2}{3}\epsilon^3 & \frac{1}{3} & -2\epsilon + 2\epsilon^2 - \frac{2}{3}\epsilon^3 \\ \frac{1}{6} - \epsilon^2 + \frac{2}{3}\epsilon^3 & \frac{1}{3} - 2\epsilon + 2\epsilon^2 - \frac{2}{3}\epsilon^3 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$
(4.14)

La diagonalisation de cette matrice de masse passe par le calcul de $\int_{\Omega} H^2 d\Omega$; dans notre cas on a la relation $H^2 = 1$. L'application des équations 4.11 et 4.12 fait que tous les termes de la diagonale sont égaux à la masse divisée par 2, soit $\frac{m}{2}$. Donc la matrice de masse diagonale s'écrit :

$$\mathbb{M}_{1d}^{XFEM-diag} = \frac{m}{2}\mathbb{I}_4 \tag{4.15}$$

où la matrice \mathbb{I}_4 est la matrice identité de dimension 4x4. Au bilan, la matrice masse



FIG. 4.2: Fonctions de forme classiques (f_I, f_{II}) et enrichies $(f_{I'}, f_{II'})$ pour un élément monodimensionnel coupé par une fissure.

diagonale associée aux degrés de liberté étendus est la même que celle des degrés de liberté usuels.

4.2.3 Diagonalisation 2 : masse diagonale par bloc

4.2.3.1 Élément poutre

On considère toujours le même élément monodimensionnel coupé, mais une nouvelle base de fonction de forme $(f_1, f_{1'}, f_2, f_{2'})$ utilisée ici et définie par :

$$\begin{pmatrix} f_{I} \\ f_{I'} \\ f_{II} \\ f_{II'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{1} \\ f_{1'} \\ f_{2} \\ f_{2'} \end{pmatrix} = \mathbb{P} \cdot \begin{pmatrix} f_{1} \\ f_{1'} \\ f_{2} \\ f_{2'} \end{pmatrix}$$
(4.16)

La figure 4.3 présente ces nouvelles fonctions de forme. On constate qu'elles sont à chaque fois nulle d'un côté de la fissure; on parle alors de fonction tronquée, ou de base d'Hansbo (voir [HAN 04]).



FIG. 4.3: Base de fonctions tronquées pour un élément coupé. Cette base est équivalente à celle de la figure 4.2.

Le champ de déplacement peut alors être discrétisé dans chacune des 2 bases présentées. Ainsi

$$u = u_I f_I + u_{I'} f_{I'} + u_{II} f_{II} + u_{II'} f_{II'}$$
(4.17)

$$u = u_1 f_1 + u_{1'} f_{1'} + u_2 f_2 + u_{2'} f_{2'}$$
(4.18)

Et la relation entre chacun des vecteurs déplacement est donnée par :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_{1'} \\ u_2 \\ u_{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_I \\ u_{I'} \\ u_{II} \\ u_{II'} \end{pmatrix} = \mathbb{P}^T \cdot \begin{pmatrix} u_I \\ u_{I'} \\ u_{II} \\ u_{II'} \end{pmatrix}$$
(4.19)

La matrice de masse peut se diagonaliser de la façon suivante dans la base d'Hansbo (voir [ROZ 07]) :

$$\mathbb{M}_{1,1',2,2'} = \frac{\rho SL}{2} \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1-\epsilon & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1-\epsilon & 0\\ 0 & 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}$$
(4.20)

On remarque ici que la somme de toutes les 4 fonctions de forme fait 1 sur le domaine, donc la somme des termes de la matrice de masse sera égale à la masse de l'élément. On note $(f_1, f_{1'}, f_2, f_{2'}) = (\phi_k)_{k \in \{1, 2, 3, 4\}}$, et on vérifie :

$$\sum_{i=1}^{4} \phi_i = 1 \tag{4.21}$$

Donc la somme de tous les termes de la matrice de masse consistante est :

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{k=1}^{4}m_{ik} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{k=1}^{4}\int_{\Omega}\phi_{i}\phi_{k}d\Omega = \int_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{4}\phi_{i}\right)\left(\sum_{k=1}^{4}\phi_{k}\right)d\Omega = \int_{\Omega}d\Omega = m \quad (4.22)$$

Maintenant, pour revenir dans la base I, I', II, II', on fait un changement de base appliqué à la matrice de masse comme suit :

$$\mathbb{M}_{I,I',II,II'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{I} \cdot \mathbb{M}_{1,I',2,2'} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

$$= \frac{\rho SL}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2\varepsilon - 1 & 0 & 0 \\ 2\varepsilon - 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2\varepsilon - 1 \\ 0 & 0 & 2\varepsilon - 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

On parlera ici de méthode de diagonalisation en matrice diagonale par bloc, contrairement à la première méthode exposée que l'on nommera matrice diagonale. Ces travaux font référence en particulier à [MEN 07a]. Donc une matrice diagonale et une matrice diagonale par bloc peuvent être construites dans une base de fonctions de forme comportant des fonctions enrichies dans le cas d'éléments finis 1D.

4.2.3.2 Élément triangle

On considère cette fois un élément triangle, de surface *S*, coupé par une discontinuité en déplacement, schématisé sur la figure 4.4. Pour cet élément, les relations entre les fonctions de forme standard et tronquées sont du même type que celle de l'élément monodimensionnel mais s' écrivent de façon plus générale :

$$f_I = f_1 + f_{1'} (4.25)$$

$$f_{I'} = H(x_I)(f_1 - f_{1'})$$
(4.26)

$$f_{II} = f_2 + f_{2'} \tag{4.27}$$

$$f_{II'} = H(x_{II})(f_2 - f_{2'})$$
(4.28)

$$f_{III} = f_3 + f_{3'}$$
(4.29)

$$f_{III'} = H(x_{III})(f_3 - f_{3'})$$
(4.30)



FIG. 4.4: Élément triangle coupé par une fissure.

où $H(\mathbf{x})$ est la valeur de la fonction d'enrichissement au point \mathbf{x} . De la même façon, la matrice de masse d'un élément triangle peut s'écrire dans la base d'Hansbo comme suit :

$$\mathbb{M}_{1,1',2,2',3,3'} = \frac{\rho S}{3} \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$
(4.31)

À présent, on peut revenir dans la base standard en utilisant le changement de base décrit dans les équations 4.25 à 4.30.

$$\mathbb{M}_{I,I',II,II',III,III'} = \frac{\rho S}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2\varepsilon - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\varepsilon - 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2\varepsilon - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\varepsilon - 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\varepsilon - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon - 1 & 1 \end{pmatrix}$$
(4.32)

Ces matrices de masse représentent en fait la moitié de la véritable matrice ; c'est à dire qu'elles ne décrivent que ce qu'il se passe dans la direction \vec{x} ou la direction \vec{y} . La matrice de masse en 2D est en fait une matrice deux fois plus grande, avec en haut à gauche et en bas à droite la matrice décrite ci-dessus, et 0 ailleurs.

$$\mathbb{M}_{I,I',II,II',III,III',I,II',III,III'} = \begin{bmatrix} \mathbb{M}_{I,I',II,II',III,III'} & 0\\ 0 & \mathbb{M}_{I,I',II,II',III,III'} \end{bmatrix}$$
(4.33)

$$\mathbb{M}_{1,1',2,2',3,3',1,1',2,2',3,3'} = \begin{bmatrix} \mathbb{M}_{1,1',2,2',3,3'} & 0\\ 0 & \mathbb{M}_{1,1',2,2',3,3'} \end{bmatrix}$$
(4.34)

Pour cet élément triangle on constate que cette méthode donne vraiment une matrice de masse diagonale par bloc ; et ces blocs sont des blocs de 2 par 2. Par la suite, les matrices de masse résultant de cette méthode seront appelées matrices de masse diagonale par bloc.

4.2.4 Conservation de l'énergie cinétique

Ici on va s'intéresser à la conservation de l'énergie cinétique avec l'utilisation des différentes matrices de masse diagonalisées.

4.2.4.1 Élément monodimensionnel

On considère ici l'élément monodimensionnel des parties précédentes qui subira deux mouvements différents. Le premier mouvement est un mouvement de corps rigide à vitesse constante V. L'énergie cinétique de l'élément est donc $E_c = \frac{1}{2}mV^2$ où $m = \rho SL$ est sa masse, S sa section, ρ est sa masse volumique et L sa longueur. La discrétisation du mouvement dans la base standard est [V, V, 0, 0] et dans la base d'Hansbo [V, V, V, V]. La démonstration de la méthode de diagonalisation est basée sur le respect de la conservation de l'énergie cinétique, donc on a dans la base standard :

$$E_{dis} = \frac{1}{2} [V, V, 0, 0] . \mathbb{M}_{I, I', II, II'} . [V, V, 0, 0]^T = \frac{1}{2} m V^2 = E_c$$
(4.35)

et dans la base des fonctions de forme tronquée :

$$E_{dis} = \frac{1}{2} [V, V, V, V] . \mathbb{M}_{1, 1', 2, 2'} . [V, V, V, V]^{T} = \frac{1}{2} \frac{m}{2} (\varepsilon + 1 - \varepsilon + 1 - \varepsilon + \varepsilon) V^{2}$$

= $\frac{1}{2} m V^{2} = E_{c}$ (4.36)

Le second mouvement prend en compte la présence de la fissure dans l'élément; il s'agit de l'éloignement de ses deux parties à vitesse constante V. Ainsi, l'énergie cinétique de l'élément entier est la même que pour le mouvement précédent, c'est à dire $E_c = \frac{1}{2}mV^2$. La discrétisation dans la base standard est [0, 0, -V, -V] et dans la base d'Hansbo [V, -V, -V, V]. La vérification de l'exactitude du calcul de l'énergie cinétique discrète dans la base standard est triviale car la méthode de diagonalisation est basée sur cette égalité, donc

$$E_{dis} = \frac{1}{2} [0, 0, -V, -V] \cdot \mathbb{M}_{I, I', II, II'} \cdot [0, 0, -V, -V]^T = \frac{1}{2} m V^2 = E_c$$
(4.37)

et dans la base des fonctions de forme tronquées, on peut aussi vérifier la relation :

$$E_{dis} = \frac{1}{2} [V, -V, -V, V] \cdot \mathbb{M}_{1, 1', 2, 2'} \cdot [V, -V, -V, V]^{T}$$

= $\frac{1}{2} \frac{m}{2} \left(\varepsilon V^{2} + (1 - \varepsilon)(-V)^{2} + (1 - \varepsilon)(-V)^{2} + \varepsilon V^{2} \right) = \frac{1}{2} m V^{2} = E_{c} \quad (4.38)$

Pour le cas d'un élément enrichi monodimensionnel, on a pu montrer que la conservation de l'énergie cinétique était respectée pour des mouvements de corps rigide qu'il y ait une fissure ou non.

4.2.4.2 Structure de trois éléments monodimensionnels

Cette fois c'est une structure de 3 éléments monodimensionnels qui nous intéresse afin de montrer que les matrices diagonalisées par quelque méthode que ce soit, respectent bien la conservation de l'énergie cinétique. La figure 4.5 présente la structure composée de trois éléments. L'élément central est coupé par une fissure ; il est donc aussi enrichi par la méthode des éléments finis étendus. La figure 4.6 présente les 6 fonctions de forme : 4



FIG. 4.5: Structure de 3 éléments dont le central est enrichi.

fonctions de forme standard (une par noeud) et 2 fonctions de forme enrichies associées à la présence de la fissure. On parlera alors de base enrichie standard (c'est dû à son arrangement et son écriture même si elle contient des fonctions de forme enrichies). La



FIG. 4.6: Fonctions de formes standard et enrichies pour une structure de 3 éléments monodimensionnels : N_1 , N_2 , HN_2 , N_3 , HN_3 and N_4 .

figure 4.7 présente les 6 fonctions de forme de la base d'Hansbo. La discrétisation dans la base enrichie standard est de la forme suivante :

$$[U]_{diag} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & a_2 & u_3 & a_3 & u_4 \end{bmatrix}^T$$
(4.39)

et le champ de déplacement correspondant approché est donné par :

$$U(M,t) = u_1.N_1(M) + u_2.N_2(M) + a_2.H(M).N_2(M) + u_3.N_3(M) + a_3.H(M).N_3(M) + u_4.N_4(M)$$
(4.40)

Cette discrétisation permet aussi bien de décrire le champ de déplacement que de vitesse et d'accélération. Ensuite, la matrice de masse diagonale [MEN 06c] pour la structure



FIG. 4.7: Base de fonctions de forme d'Hansbo pour une structure de 3 éléments monodimensionnels : *Hansbo*₁, *Hansbo*₂, *Hansbo*₃, *Hansbo*₄, *Hansbo*₅ and *Hansbo*₆.

entière est la suivante :

$$\mathbb{M}_{diag} = \frac{\rho SL}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
(4.41)

Et la matrice de masse diagonale par bloc [ROZ 07] est décrite par :

$$\mathbb{M}_{block-diag} = \frac{\rho SL}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2\varepsilon - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon - 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2\varepsilon - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon - 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
(4.42)

De la même façon que pour l'élément monodimensionnel seul, on va utiliser deux mouvements de corps rigide générant une énergie cinétique théorique de $\frac{1}{2}mV^2$ (où $m = \rho Sl = \rho S3L$). Le premier mouvement est un mouvement de corps rigide à vitesse constante V. Le vecteur vitesse s'écrit $[v_1] = [V, V, 0, V, 0, V]$ dans la base standard enrichie, et $[v'_1] = [V, V, V, V, V, V]$ dans la base d'Hansbo. L'énergie cinétique discrète est évaluée par $E_{c(mouv-1)}^{exact} = \frac{1}{2}[v_1] \cdot \mathbb{M} \cdot [v_1]^T$. Ainsi pour chaque matrice de masse (diagonale et diagonale par bloc), l'énergie cinétique discrète est :

$$E_{c(mouv-1)}^{diag} = \frac{1}{2} [v_1] . \mathbb{M}_{diag} . [v_1]^T = \frac{1}{2} \rho S l V^2 = E_{c(mouv-1)}^{exact}$$
(4.43)

$$E_{c(mouv-1)}^{bloc-diag} = \frac{1}{2} [v_1'] . \mathbb{M}_{bloc-diag} . [v_1']^T = \frac{1}{2} \rho S l V^2 = E_{c(mouv-1)}^{exact}$$
(4.44)

Le second mouvement est la séparation de la structure à vitesse constante V, basée sur la présence de la fissure. Le vecteur vitesse s'écrit $[v_2] = [-V, 0, -V, 0, -V, V]$ dans la

base standard enrichie, et $[v'_2] = [-V, -V, -V, V, V, V]$ dans la base d'Hansbo. L'énergie cinétique discrète est calculée par $\frac{1}{2}[v_2]$. \mathbb{M} . $[v_2]^T$ pour chacune des 2 matrices de masse.

$$E_{c(mouv-2)}^{diag} = \frac{1}{2} [v_2] \cdot \mathbb{M}_{diag} \cdot [v_2]^T = \frac{1}{2} \rho S l V^2 = E_{c(mouv-2)}^{exact}$$
(4.45)

$$E_{c(mouv-2)}^{bloc-diag} = \frac{1}{2} [v_2'] \cdot \mathbb{M}_{bloc-diag} \cdot [v_2']^T = \frac{1}{2} \rho S l V^2 = E_{c(mouv-2)}^{exact}$$
(4.46)

Par conséquent, la conservation de l'énergie cinétique est vérifiée pour une structure de trois éléments.

4.3 Étude de pas de temps critique X-FEM

Dans cette partie on s'intéresse au calcul du pas de temps critique pour plusieurs éléments de dimension 1, 2 et 3. L'objectif ici est d'évaluer les pas de temps critiques d'éléments coupés par une fissure : ces éléments seront donc enrichis par la méthode des éléments finis étendus, et les pas de temps critiques seront calculés en utilisant les différentes matrices de masse : matrices de masse consistante, diagonale et diagonale par bloc.

4.3.1 Élément monodimensionnel

4.3.1.1 Élément barre FEM

Dans un tout premier temps, on considère un élément fini monodimensionnel de longueur *L*, de module d' Young *E*, de section *S* et de masse volumique ρ . Sa masse est notée $m = \rho SL$. Les matrices de raideur et de masse de l'élément fini standard monodimensionnel sont connues et s'écrivent :

$$\mathbb{K}_{1d}^{FEM} = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} ; \ \mathbb{M}_{1d}^{FEM} = m \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$
(4.47)

Quant à la matrice de masse diagonale, elle vaut : $\mathbb{M}_{1d}^{FElump} = \frac{m}{2}\mathbb{I}_2$. Pour le cas d'un élément fini standard, le pas de temps critique se calcule à partir des matrices de masse et de rigidité de dimension 2x2. Les résultats de pas de temps critiques sont décrits ci-après. Avec la matrice de masse consistante, les solutions ω de l'équation det $(\mathbb{K} - \omega^2 \mathbb{M}) = 0$ sont $\{0, 0, 2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}\}$. Donc on peut en déduire que le pas de temps critique vaut $\Delta t_c^{FEconsistant} = L\sqrt{\frac{\rho}{3E}}$. Et avec la matrice de masse diagonale, les solutions ω de l'équation det $(\mathbb{K} - \omega^2 \mathbb{M}) = 0$ sont $\{0, 0, 2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}\}$. Donc on peut en déduire que le pas de temps critique vaut $\Delta t_c^{FEconsistant} = L\sqrt{\frac{\rho}{3E}}$. Et avec la matrice de masse diagonale, les solutions ω de l'équation det $(\mathbb{K} - \omega^2 \mathbb{M}^{diag}) = 0$ sont $\{0, 0, 2, -2\}$. Donc on en déduit que le pas de temps critique vaut $\Delta t_c^{FEdiag} = L\sqrt{\frac{\rho}{E}}$. Le tableau 4.1 rassemble ces 2 résultats.

4.3.1.2 Élément barre X-FEM

À présent on considère ce même élément monodimensionnel de longueur *L*, mais contenant une discontinuité de déplacement à une distance εL du noeud de gauche ($\varepsilon \in$

Matrice de masse	Pas de temps critique normalisé par $\Delta t_c^{FE diag} = L \sqrt{\frac{\rho}{E}}$
Consistante	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
Diagonale	1

TAB. 4.1: Tableau des pas de temps critiques de l'élément fini monodimensionnel de longueur *L*, de module d' Young *E*, de section *S* et de masse volumique ρ , avec matrice de masse consistante et diagonale.



FIG. 4.8: Élément monodimensionnel de longueur L contenant une discontinuité en déplacement à une distance εL du noeud gauche.

[0,1]). La figure 4.8 montre cet élément coupé et la présence de la discontinuité. On enrichit l'élément par la méthode éléments finis étendus en ajoutant la fonction saut H valant -1 à gauche de la discontinuité, et +1 à droite. Les tailles des matrices sont donc 4x4. La matrice de rigidité de cet élément 1D est :

$$\mathbb{K}_{1d}^{XFEM} = \frac{ES}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 - 2\varepsilon & -2\varepsilon + 1 \\ -1 & 1 & 2\varepsilon - 1 & 1 - 2\varepsilon \\ 1 - 2\varepsilon & 2\varepsilon - 1 & 1 & -1 \\ 2\varepsilon - 1 & 1 - 2\varepsilon & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
(4.48)

La matrice de masse consistante s'écrit quant à elle :

$$\mathbb{M}_{1d}^{XFEM} = m \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\epsilon^3 & \frac{1}{6} - \epsilon^2 + \frac{2}{3}\epsilon^3 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} - \epsilon^2 + \frac{2}{3}\epsilon^3 & \frac{1}{3} - 2\epsilon + 2\epsilon^2 - \frac{2}{3}\epsilon^3 \\ \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\epsilon^3 & \frac{1}{6} - \epsilon^2 + \frac{2}{3}\epsilon^3 & \frac{1}{3} & -2\epsilon + 2\epsilon^2 - \frac{2}{3}\epsilon^3 \\ \frac{1}{6} - \epsilon^2 + \frac{2}{3}\epsilon^3 & \frac{1}{3} - 2\epsilon + 2\epsilon^2 - \frac{2}{3}\epsilon^3 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$(4.49)$$

où $\varepsilon L \in [0, L]$ est la position de la coupure dans l'élément de longueur *L*, de section *S*, de masse volumique ρ et de module d'Young *E*. ε est appelé fraction de coupure de l'élément. La matrice de masse diagonale est $\mathbb{M}_{1d}^{XFEM-diag} = \frac{m}{2}\mathbb{I}_4$ (équation 4.15).

Matrice de masse consistante Les solutions ω de l'équation det $(\mathbb{K} - \omega^2 \mathbb{M}) = 0$ sont $\{0, \frac{2\sqrt{3}}{\epsilon}, -\frac{2\sqrt{3}}{\epsilon}, \frac{2\sqrt{3}}{\epsilon-1}, \frac{2\sqrt{3}}{1-\epsilon}\}$. Donc on en déduit que le pas de temps critique dépend de la position de la discontinuité, et vaut

$$\Delta t_c^{X-FEMconsistant}(\varepsilon) = \min_{\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}, \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{3}}\right) \Delta t_c^{FEdiag}$$
(4.50)

D'après cette relation, le pas de temps tend vers zéro quand la discontinuité se rapproche d'un noeud.

Matrice de masse diagonale Les solutions ω de l'équation det $(\mathbb{K} - \omega^2 \mathbb{M}^{diag}) = 0$ sont $\{0, 4\sqrt{\epsilon}, -4\sqrt{\epsilon}, 4\sqrt{1-\epsilon}, -4\sqrt{1-\epsilon}\}$. Donc on en déduit que le pas de temps critique dépend aussi de la position de la discontinuité :

$$\Delta t_c^{X-FEMdiagonale}(\varepsilon) = \min_{\varepsilon \in [0,1]} \left(\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}, \frac{1}{2\sqrt{1-\varepsilon}}\right) \Delta t_c^{FEdiag}$$
(4.51)

Le pas de temps ici ne tend pas vers zéro lorsque la discontinuité se rapproche d'un noeud ; la limite inférieure est $\frac{1}{\sqrt{2}}\Delta t_c^{FEdiag}$.

Matrice de masse diagonale par bloc Les solutions ω de l'équation det $(\mathbb{K} - \omega^2 \mathbb{M}^{diag}) = 0$ sont $\{0, 2, -2\}$. Donc on peut en déduire que le pas de temps critique ne dépend pas de la position de la discontinuité, mais est constant :

$$\Delta t_c^{X-FEMbloc-diagonale}(\varepsilon) = \Delta t_c^{FEdiag}$$
(4.52)

Le tableau 4.2 rassemble l'ensemble de ces 3 résultats suivant les matrices de masse utilisées. De plus, la figure 4.9 présente l'évolution des ces différents pas de temps en fonction de la position de la fissure pour cet élément monodimensionnel enrichi suivant les trois matrices de masse utilisées.

Matrice de masse	Pas de temps critique normalisé par Δt_c^{FEdiag}	Pas de temps critique normalisé par Δt_c^{FEdiag} pour toute position de coupure ($\forall \varepsilon$)
Consistante	$\min_{\epsilon \in [0,1]} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}, \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{3}} \right)$	0
Diagonale	$\min_{\epsilon \in [0,1]} \left(\frac{1}{2\sqrt{\epsilon}}, \frac{1}{2\sqrt{1-\epsilon}} \right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
Diagonale par bloc	1	1

TAB. 4.2: Tableau des pas de temps critiques de l'élément enrichi monodimensionnel de longueur *L* avec matrice de masse consistante, diagonale et diagonale par bloc en fonction de la fraction de coupure ε .

On constate effectivement que le pas de temps critique d'un élément enrichi tend vers zéro lorsque la fissure tend vers un noeud (en utilisant la matrice de masse consistante). Le fait de modifier la matrice de masse permet d'améliorer un pas de temps critique de l'ordre de grandeur du pas de temps critique du même élément fini non enrichi.

$\Delta t_c / \Delta t_c^0$	X-FEM	FΈ
Masse Consistante	0	0
Masse diagonale	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
Masse diagonale par bloc	1	0

TAB. 4.3: Valeur minimum du pas de temps critique normalisé suivant les masses consistante, diagonale et diagonale par bloc, pour un élément X-FEM et deux éléments FEM.

Remarque 1 : $\ll \Delta t_c^{X-FEMbloc-diagonale}(\varepsilon) = \Delta t_c^{FEdiag} \gg L'utilisation de la base d'Hansbo ou de la base des fonctions de forme standard n'a pas d'incidence sur les résultats des pas de temps critiques. Effectivement on peut passer de l'une à l'autre par une simple opération de changement de base. Ainsi la résolution de l'équation suivante dans les deux bases est équivalente :$

$$det(\mathbb{K}_{I,I',2,2'} - \omega^2 \mathbb{M}_{I,I',2,2'}) = det(\mathbb{P}^T \mathbb{K}_{I,I',II,II'} \mathbb{P} - \omega^2 \mathbb{P}^T \mathbb{M}_{I,I',II,II'} \mathbb{P})$$

$$= det(\mathbb{P}^T(\mathbb{K}_{I,I',II,II'} - \omega^2 \mathbb{M}_{I,I',II,II'})\mathbb{P})$$

$$= 16 det(\mathbb{K}_{I,I',II,II'} - \omega^2 \mathbb{M}_{I,I',II,II'})$$
(4.53)

car det $(\mathbb{P}.\mathbb{P}^T) = 16$.

Si l'on effectue cette procédure de calcul de pas de temps critique dans la base d'Hansbo on va montrer pourquoi le pas de temps critique de l'élément enrichi est égal au pas de temps critique de l'élément fini standard quelle que soit la position de la discontinuité. Ainsi la matrice de raideur dans la base d'Hansbo est :

$$\mathbb{K}_{1,1',2,2'} = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 & -\epsilon \\ 0 & 1-\epsilon & \epsilon-1 & 0 \\ 0 & \epsilon-1 & 1-\epsilon & 0 \\ -\epsilon & 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}$$
(4.54)

Donc la résolution de l'équation det $(\mathbb{K}_{1,1',2,2'} - \omega^2 \mathbb{M}_{1,1',2,2'}) = 0$ conduit à l'équation suivante

$$\epsilon^{2} (1-\epsilon)^{2} \alpha^{2} (\alpha-2)^{2} = 0$$
(4.55)

où $\alpha = \frac{\omega^2 \rho SL^2}{2ES}$. La solution est donnée pour $\alpha = 2$ quelle que soit la position de la discontinuité. Donc $\Delta t_c = \frac{2}{\omega} = L \sqrt{\frac{\rho}{E}}$. D'autre part, on peut aussi noter que dans la base d'Hansbo les matrice de masse et de raideur sont composées des matrices de masse et raideur de l'élément fini simple au facteurs ε et $1 - \varepsilon$ près.

Remarque 2 : sur la fonction d'enrichissement Dans les paragraphes précédent, la fonction d'enrichissement utilisée est H valant +/-1. Mais qu'en est-il des résultats si une autre fonction d'enrichissement avait été utilisée ?

On reprend le calcul du pas de temps critique pour le cas d'un élément monodimensionnel coupé par une fissure à une distance $\mathcal{E}L$ du noeud gauche (voir la référence [MEN 06c]). La fonction d'Heaviside standard notée \mathcal{H} , est utilisée ici à la place de H. Elle est définie par :

$$\begin{cases} \mathcal{H}(x-\varepsilon) = 0 & \text{si } x \le \varepsilon; \\ \mathcal{H}(x-\varepsilon) = 1 & \text{si } x > \varepsilon. \end{cases}$$
(4.56)

Les matrices de masse et de raideur sont dans ce cas :

$$\mathbb{M}_{XFEM} = m \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \epsilon^2 - \epsilon + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\epsilon^3 & \frac{1}{6} - \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{1}{3}\epsilon^3 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} - \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{1}{3}\epsilon^3 & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\epsilon^3 \\ \epsilon^2 - \epsilon + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\epsilon^3 & \frac{1}{6} - \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{1}{3}\epsilon^3 & \epsilon^2 - \epsilon + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\epsilon^3 & \frac{1}{6} - \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{1}{3}\epsilon^3 \\ \frac{1}{6} - \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{1}{3}\epsilon^3 & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\epsilon^3 & \frac{1}{6} - \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{1}{3}\epsilon^3 & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\epsilon^3 \end{bmatrix} (4.57)$$

$$\mathbb{K}_{XFEM} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 - \epsilon & \epsilon - 1 \\ -1 & 1 & \epsilon - 1 & 1 - \epsilon \\ 1 - \epsilon & \epsilon - 1 & 1 - \epsilon \\ 1 - \epsilon & \epsilon - 1 & 1 - \epsilon \end{bmatrix}$$

$$(4.58)$$

La matrice de masse diagonale est :

$$\mathbb{M}_{\mathcal{H}}^{lumped} = \rho Sl \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\varepsilon) & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\varepsilon) \end{bmatrix}$$
(4.59)

La figure 4.9 présente l'évolution du pas de temps critique dans le cas de l'utilisation de cette fonction d'enrichissement. Elle correspond à la courbe intitulée "Masse diagonale X-FEM (H=0/+1)".

D'autre part on peut aussi utiliser les fonctions d'enrichissement suivantes :

$$\begin{cases} H_1(x) = 1 & \text{si } x < \varepsilon; \\ H_1(x) = 0 & \text{si } x > \varepsilon. \end{cases} \begin{cases} H_2(x) = 0 & \text{si } x < \varepsilon; \\ H_2(x) = 1 & \text{si } x > \varepsilon. \end{cases}$$
(4.60)

Et dans ce cas, la matrice de raideur s'écrit :

$$\mathbb{K}_{XFEM} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & \varepsilon & \varepsilon - 1 \\ -1 & 1 & -\varepsilon & 1 - \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon - 1 & 1 - \varepsilon & 0 & 1 - \varepsilon \end{bmatrix}$$
(4.61)

La méthode de diagonalisation donne la matrice de masse suivante :

$$\mathbb{M}_{\mathcal{H}}^{diag} = \rho Sl \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\varepsilon}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\varepsilon}{2} \end{bmatrix}$$
(4.62)



FIG. 4.9: Pas de temps critique normalisé (par rapport au pas de temps critique de l'élément fini standard avec matrice de masse diagonale Δt_c^{FEdiag}) d'un élément monodimensionnel enrichi avec masse consistante, diagonale et diagonale par bloc en fonction de la position de la fissure.

Finalement le pas de temps critique ne dépend pas de la position de la discontinuité ϵ et vaut :

$$\Delta t_c(\mathbf{\epsilon}) = \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta t_c^{0FEM} \tag{4.63}$$

On obtient aussi les mêmes résultats de pas de temps avec les fonctions suivantes :

$$\begin{cases} H_1(x) = 0 & \text{si } x < \varepsilon; \\ H_1(x) = 1 & \text{si } x > \varepsilon. \end{cases} \begin{cases} H_2(x) = -1 & \text{si } x < \varepsilon; \\ H_2(x) = 0 & \text{si } x > \varepsilon. \end{cases}$$
(4.64)

On constate que l'utilisation de la fonction standard Heaviside \mathcal{H} au lieu de H ne donne pas exactement les mêmes résultats, mais que ceux-ci restent comparables : c'est à dire que le pas de temps critique en utilisant d'autres fonctions d'enrichissement comme celles proposées ci-dessus ne tend pas vers zéro mais est toujours au moins supérieur à la moitié du pas de temps critique de l'élément fini standard.

Il était important de noter que le travail présenté ne se limitait pas à l'utilisation de la fonction d'enrichissement H valant +/-1, mais pouvait aussi s'appliquer avec d'autres fonctions d'enrichissement. L'annexe A montre l'étude de pas de temps critique sur un élément monodimensionnel avec une discontinuité faible.

Concernant l'implémentation de la méthode X-FEM dans EUROPLEXUS, le choix s'est porté sur la fonction d'enrichissement H = +/-1 car elle permet d'obtenir une



FIG. 4.10: Pas de temps critique avec la méthode de diagonalisation 1 en utilisant une intégration numérique non exacte sur 2, 5, 10 et enfin 50 points d'intégration.

matrice de masse diagonale constante au détriment du gain sur le pas de temps critique que pouvait apporter une autre méthode. Ainsi les éléments quadrangles et cubes ont été intégrés dans le code, rendant possible des calculs bidimensionnels et tridimensionnels.

Remarque 3 : influence de l'intégration numérique sur le pas de temps critique Les pas de temps critiques théoriques ont été déterminés en utilisant un travail analytique. Cependant, le calculs se font avec une intégration numérique de la matrice de raideur : soit l'intégration numérique est exacte (par exemple en sous-découpant l'élément coupé en sous-triangles), ou alors approchée (pour un jeu supplémentaire de points de Gauss dans l'élément coupé). Pour un calcul approché (comme il a été choisi d'opérer dans EUROPLEXUS), la détermination du pas de temps critique est présenté sur la figure 4.10 pour différents sous-découpages de l'élément coupé.

Conclusion On a donc explicité deux méthodes de diagonalisation de matrice de masse qui respectent toutes deux la conservation de l'énergie cinétique pour des mouvements de corps rigide prenant en compte ou pas la présence la discontinuité. De plus ces méthodes permettent aussi d'obtenir un pas de temps critique de l'élément enrichi ne s'annulant pas lorsque la discontinuité est proche d'un des noeuds. Enfin elles donnent même au pas de temps critique de l'élément enrichi l'ordre de grandeur du, voire l'égalité avec le pas de temps critique de l'élément fini sans discontinuité. Ce résultat est-il extensible aux éléments bidimensionnels et tridimensionnels ?

4.3.2 Éléments bidimensionnels

4.3.2.1 Élément triangle

La figure 4.11 montre un élément triangle coupé par une fissure. La fraction de coupure ε représente le rapport entre la surface d'une partie coupée extraite et de la surface du triangle initial. La figure 4.12 présente l'évolution du pas de temps critique de l'élé-



FIG. 4.11: Élément triangle coupé par une fissure.

ment triangle en fonction de la fraction de coupure pour les deux types de diagonalisation de matrice de masse. Cette fraction de coupure est un scalaire compris dans l'intervalle [0,1] et symbolise le rapport de taille entre les deux parties de l'élément ; c'est à dire que ce rapport de taille vaut en fait $\varepsilon/(1-\varepsilon)$ ou l'inverse. On remarque sur la figure 4.12 que les résultats de l'élément monodimensionnel s'étendent immédiatement ; c'est à dire que l'utilisation de la matrice de masse diagonale par bloc permet d'obtenir le même pas de temps critique que l'élément fini quelle que soit la fraction de coupure. Par contre la matrice de masse diagonale donne un pas de temps critique qui dépend de la fraction de coupure, mais est toujours supérieure à $\sqrt{2}/2$ fois le pas de temps critique de l'élément fini. D'un côté la matrice de masse diagonale par bloc donne un pas de temps critique égal au pas de temps critique de l'élément fini, et de l'autre la matrice de masse diagonale constante donne un pas de temps $\sqrt{2}/2$ fois le pas de temps critique de l'élément fini standard. La figure 4.13 présente l'évolution du pas de temps critique (de la méthode 1) normalisé en fonction de la fraction de coupure de l'élément. L'intérêt de cette figure est que l'élément est coupé par une fissure droite inclinée, et que l'inclinaison n'a pas d'influence sur le pas de temps de l'élément. Seule la fraction de coupure influe sur la valeur du pas de temps critique.

4.3.2.2 Élément quadrangle

À présent on considère un élément quadrangle qui serait aussi coupé par une discontinuité en déplacement. La figure 4.14 montre cet élément et la discontinuité : la coupure est caractérisée par la variable ε qui représente la fraction de coupure de l'élément. La figure 4.15 présente l'évolution du pas de temps critique en fonction de la fraction de coupure de l'élément pour les deux techniques de diagonalisation utilisées. Pour cet élément



FIG. 4.12: Pas de temps critique de l'élément triangle coupé par une fissure, en fonction de la fraction de coupure.

on peut observer que les pas de temps critiques des différentes techniques sont proches (10% d'écart). De plus, contrairement à ce qu'il se passe pour les cas précédents, le pas de temps critique correspondant à l'utilisation de la matrice de masse diagonale par bloc n'est pas insensible à la position de la coupure. Pour garantir la stabilité quelle que soit la position de la fissure, il faut choisir un pas de temps de l'élément étendus inférieur à 0,7 fois la taille du pas de temps critique de l'élément standard dans un cas, et 0,75 avec la matrice de masse diagonale par bloc. L'apport de cette nouvelle technique n'est pas déterminant pour les quadrangles. On peut aussi noter que le pas de temps critique d'un élément quadrangle de côté L est supérieur à celui d'un élément triangle de côté de même longueur. Donc il sera intéressant de comparer le pas de temps critique d'une structure élémentaire à 4 noeuds composée d'un quadrangle ou de deux triangle.

4.3.2.3 Est-il préférable de mailler avec des triangles ou des quadrangles.

La question que l'on se pose ici est la suivante : *le pas de temps critique est-il plus grand si l'on maille une structure avec des quadrangles, ou si elle est maillée uniquement avec des triangles avec les deux méthodes de diagonalisation de la matrice de masse ?* La figure 4.16 présente le problème modèle d'une structure de 4 noeuds que l'on souhaite étudier de deux façons :

- un seul élément quadrangle; il s'agit du travail exposé dans le paragraphe précédent,
- deux élément triangles ayant deux noeuds en commnun.



FIG. 4.13: Pas de temps critique d'un élément triangle coupé par une fissure inclinée, pour 3 angles d'inclinaison α : 0, 30 et 45 degrés.



FIG. 4.14: Élément quadrangle coupé par une fissure.

Dans la figure 4.16 apparaissent 3 trois surfaces : *S* la surface de l'élément quadrangle, *S*₁ et *S*₂ les surfaces des 2 triangles composant la structure. Trois fractions de coupure différentes (ε fraction de coupure de l'élément quadrangle, ε_1 et ε_2 celles de de chacun des triangles composant la structure) permettent de décrire les différents cas. Nous avons la relation :

$$b = 1 - \varepsilon = 1 - \frac{\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2}{S} \tag{4.65}$$

La figure 4.17 résume les valeurs des pas de temps critiques pour les deux structures de 4 noeuds, avec les deux techniques de diagonalisation.

Les conclusions sont relativement simples : pour la diagonalisation par le système de masse diagonale, il vaut mieux mailler en quadrangle, car le pas de temps est 30% supérieur; et pour la diagonalisation par le système de matrice diagonale par bloc, c'est



FIG. 4.15: Pas de temps critique de l'élément quadrangle coupé par une fissure, en fonction de la fraction de coupure.



FIG. 4.16: Structures de 4 noeuds maillées par deux triangles et un quadrangle, coupées par une fissure.

également le cas, mais il y a très peu de différence. Si l'on compare les deux modèles optimaux pour chacune des approches de diagonalisation, tous sont équivalents.

4.3.3 Éléments tridimensionnels

4.3.3.1 Élément tétraèdre

La figure 4.18 présente un élément tétraèdral coupé par une fissure ; la fraction de coupure est toujours notée ε . Les quatre fonctions de forme standard de cet élément sont


FIG. 4.17: Pas de temps critique de 2 éléments triangle et un élément quadrangle coupés par une fissure, en fonction de la position *b* de celle-ci.



FIG. 4.18: Élément tétraèdre coupé par une fissure.

les fonctions standard : c'est à dire que chacune vaut 1 en un noeud, et 0 aux autres. Pour un tétraèdre, entité géométrique à quatre noeuds, on aura ainsi 4 fonctions de forme f_I , f_{II} , f_{III} et f_{IV} . On a ainsi les relations suivantes :

$$\forall k \in \{I, II, III, IV\} \ \left(f_k(\mathbf{x}_k) = 1 \text{ et } \forall j \neq k, \ f_k(\mathbf{x}_j) = 0\right)$$
(4.66)

En entrant dans les détails, on peut trouver une fonction de forme f_I en résolvant les quatre équations suivantes :

$$f_I(\mathbf{x}_I) = 1 \tag{4.67}$$

$$f_I(\mathbf{x}_{II}) = 0 \tag{4.68}$$

$$f_I(\mathbf{x}_{III}) = 0 \tag{4.69}$$

$$f_I(\mathbf{x}_{IV}) = 0 \tag{4.70}$$

On peut alors construire la fonction de forme f_I du type $a_Ix + b_Iy + c_Iz + d_I$, ce qui correspond à la détermination de 4 scalaires : le bilan consiste en la résolution d'un système de 4 équations à 4 inconnues (a_I, b_I, c_I, d_I) . Le système peut s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} x_{I} & y_{I} & z_{I} & 1\\ x_{II} & y_{II} & z_{II} & 1\\ x_{III} & y_{III} & z_{III} & 1\\ x_{IV} & y_{IV} & z_{IV} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{I} \\ b_{I} \\ c_{I} \\ d_{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
(4.71)

où (x_k, y_k, z_k) sont les coordonnées des noeuds de l'élément. La figure 4.19 présente quant à elle les résultats des pas de temps critiques de cet élément en fonction de la fraction de coupure ε pour les deux techniques de diagonalisation de matrice de masse. Ici on obtient



FIG. 4.19: Pas de temps critique de l'élément tétraèdre coupé par une fissure, en fonction de la fraction de coupure.

des résultats très similaires au cas de l'élément triangle et de l'élément monodimensionnel ; c'est à dire que le pas de temps du tétraèdre enrichi vaut exactement le pas de temps du tétraèdre standard en utilisant la matrice de masse diagonale par bloc. Et la matrice de masse diagonale permet simplement d'obtenir un pas de temps critique supérieur à 0,707 fois le pas de temps de l'élément standard.

4.3.3.2 Élément cubique

La figure 4.20 présente un élément cubique coupé par une fissure. Les huit fonctions de forme du cube de référence sont par exemple :

$$f_k(\mathbf{x}) = \frac{1}{8} (1 + \delta_{xk} x) (1 + \delta_{yk} y) (1 + \delta_{zk} z)$$
(4.72)

où δ_{xk} , δ_{yk} , δ_{zk} , valant +1 ou -1, définissent la fonction de forme f_k correspondant au noeud k. La figure 4.21 présente les évolutions des pas de temps critiques en fonction de la fraction de coupure pour les deux techniques de diagonalisation. Les résultats obtenus sont similaires à ceux obtenus dans le cas du quadrangle.



FIG. 4.20: Élément cube coupé par une fissure.

4.3.4 Bilan

Le tableau 4.4 présente tous les résultats précédents : c'est à dire pour chaque élément étudié, sont données les informations suivantes : pas de temps critique de l'élément fini standard avec les deux techniques de diagonalisation, et la valeur la plus pénalisante du pas de temps critique de l'élément contenant la discontinuité en déplacement avec aussi les deux méthodes de diagonalisation de matrice de masse. Pour davantage de précision concernant les valeurs du tableau 4.4, les valeurs de pas de temps critique sont proportionnelles à $L\sqrt{\frac{p}{E}}$, et de plus, le coefficient de Poisson était pris égal à 0,3. Avec toutes les méthodes de diagonalisation et quel que soit le type d'élément fini étudié, un pas de temps de 0,707 fois le pas de temps de l'élément sans enrichissement garantit la stabilité.



FIG. 4.21: Pas de temps critique de l'élément cube coupé par une fissure, en fonction de la fraction de coupure.

Élément	$\begin{array}{c c} \Delta t_c^{FEM} \\ \hline \Delta t_c^{FEM} & \Delta t_c^{FEM lump} \end{array}$		Δt_c^{XFEM} normalisée par $\Delta t_c^{FEMlump}$	
	M standard	M diagonal	M bloc-diagonale	M diagonale
1D	0.5774	1	1	> 0.707
Triangle	0.2819	0.5638	1	> 0.707
Quadrangle	0.4354	0.7601	> 0.77	> 0.707
Tétrèdre	0.1919	0.4071	1	> 0.707
Cube	0.3651	0.6324	> 0.76	> 0.707

TAB. 4.4: Tableau des pas de temps critiques pour différents éléments : standard et enrichis (Module d'Young E = 1, longueur L = 1, masse volumique $\rho = 1$, coefficient de Poisson $\nu = 0, 3$).

4.4 Propagation d'onde à travers la discontinuité

4.4.1 Introduction

Dans cette partie, on souhaite vérifier que les différentes techniques de diagonalisation de matrice masse n'engendrent pas d'erreur dans le calcul pour le passage des ondes à l'interface [MEN 07b]; c'est à dire que la prise en compte de la discontinuité en espace est

maintenue dans le calcul dynamique avec la matrice de masse diagonalisée. Par exemple, s'il y a propagation d'une onde de traction (ou compression) dans la structure, elle ne doit en aucun cas franchir l'interface, sinon le calcul est faux. Si on parle en terme de valeur nodale de déplacement (ou vitesse), alors la partie de la structure ne contenant pas l'onde initialement devra conserver des valeurs de déplacement, vitesse, accélération constantes et égales à zéro.

Dans le cas du schéma de Newmark explicite, la première valeur apportant éventuellement l'erreur de calcul sera l'accélération. Effectivement, en partant du cas où les 3 composantes du vecteur d'état (déplacement, vitesse, accélération) sont nulles au temps n, alors l'erreur au temps n + 1 ne pourra provenir que du calcul de l'accélération par l'équation 4.74 comme décrit ci-dessous :

$$U_{n+1} = U_n + \Delta t \dot{U}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{U}_n \qquad (4.73)$$

$$\mathbb{M}.\ddot{U}_{n+1} = F_{n+1}^{ext} - F_{n+1}^{int}$$
(4.74)

$$\dot{U}_{n+1} = \dot{U}_n + \frac{\Delta t}{2} \left(\ddot{U}_{n+1} + \ddot{U}_n \right)$$
 (4.75)

La source d'erreur possible étant à présent localisée, il suffit de montrer que les calculs de propagation d'onde à travers la discontinuité montrent que rien n'est transmis (à l'échelle numérique) de part et d'autre de la discontinuité en espace. La démonstration se fera sur le cas monodimensionnel, et enfin on la validera avec un calcul de propagation en 2 dimensions dont on comparera les résultats avec Remmers [REM 07] qui traita ce problème avec une autre méthode de diagonalisation.

4.4.2 Cas simple monodimensionnel

4.4.2.1 Démonstration

On démontre la propriété dans le cas monodimensionnel, et en utilisant une structure de 6 éléments qui permette de travailler aussi sur la deuxième couche d'éléments après la fissure. On considère pour cela la structure de 6 éléments de longueur *L* chacun, de section *S*, schématisée sur la figure 4.22. La masse de la structure entière est notée $m = \rho S6L$. On



FIG. 4.22: Structure de 6 éléments coupée par une fissure.

va ainsi évaluer la possibilité qu'apparaissent des valeurs non nulles d'accélération aux noeuds (1), (2), et (3) de la figure 4.22. La discrétisation spatiale est donc la suivante :

$$U(x) = [u_1, u_2, u_3, u_4, a_3, a_4, u_5, u_6, u_7] \cdot [N_1, N_2, N_3, N_4, HN_3, HN_4, N_5, N_6, N_7]^T$$
(4.76)

H vaut -1 à gauche et +1 à droite. Dans notre cas, on impose une vitesse initiale au noeud (7), et une onde traverse la structure de droite à gauche ; il n'y a pas de force extérieure alors : $F_{n+1}^{ext} = 0$. On suppose aussi qu'on se trouve à la configuration *n* où l'onde n'a pas encore traversé la discontinuité, donc les déplacements des noeuds 1, 2 et 3 sont encore nuls : $u_1 = u_2 = 0$ et $u_3 - a_3 = 0$. De plus, on travaille ici en élasticité linéaire (module d'Young *E*); donc la matrice de raideur interviendra dans le calcul des forces internes. L'étape intéressante est la suivante :

$$\ddot{U}_{n+1} = -\mathbb{M}^{-1}.\mathbb{K}.U_{n+1} \tag{4.77}$$

On construit dans un premier temps la matrice de raideur globale :

$$\mathbb{K} = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -2\varepsilon & 2\varepsilon -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 2\varepsilon -1 & 2 -2\varepsilon & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2\varepsilon & 2\varepsilon -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\varepsilon -1 & 2 -2\varepsilon & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\varepsilon -1 & 2 -2\varepsilon & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$
(4.78)

et la matrice de masse diagonalisée par les deux techniques s'écrit (χ est un paramètre qui permet de sélectionner la technique : $\chi = 1$ correspond à la matrice diagonale par bloc, et $\chi = 0$ à la matrice diagonale) :

$$\mathbb{M} = \frac{m}{12} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \chi(2\varepsilon - 1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi(2\varepsilon - 1) & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \chi(2\varepsilon - 1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \chi(2\varepsilon - 1) & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(4.79)

La démonstration est une démonstration par récurrence sur le pas de temps de calcul *n*. *Proposition* $\mathcal{P}(n)$: *les déplacement, vitesse, accélération aux noeuds à gauche de la discontinuité sont nuls, et les composantes standard et enrichies sont identiques.*

Démonstration par récurrence :

On suppose que cette proposition est vérifiée au temps n, et on veut montrer qu'elle reste vraie au temps n + 1.

Donc on peut effectuer le calcul par l'équation 4.77, et on obtient :

$$\ddot{u_1} = -\frac{12ES}{mL}(u_1 - u_2) = 0 \tag{4.80}$$

$$\ddot{u}_2 = -\frac{6ES}{mL}(-u_1 + 2u_2 - u_3 + a_3) = 0$$
(4.81)

	à gauche de la discontinuité	à droite de la discontinuité
	noeuds 1, 2 et 3 $(H = -1)$	noeud 4 $(H = +1)$
Déplacement	$u_1 = u_2 = u_3 - a_3 = 0$	$u_4 = a_4$
Vitesse	$\dot{u}_1 = \dot{u}_2 = \dot{u}_3 - \dot{a}_3 = 0$	$\dot{u}_4 = \dot{a}_4$
Accélération	$\ddot{u}_1 = \ddot{u}_2 = \ddot{u}_3 - \ddot{a}_3 = 0$	$\ddot{u}_4 = \ddot{a}_4$

TAB. 4.5: Tableau présentant la proposition de récurence au formalisme mathématique.

Ensuite, on arrive aux équations suivantes en combinant linéairement les équations du système 4.77 :

$$\begin{bmatrix} 1 + \chi(1 - 2\varepsilon) \end{bmatrix} (\ddot{u}_3 - \ddot{a}_3) = -\frac{2ES}{ml} \begin{bmatrix} -2u_2 + 2(\varepsilon + 1)(u_3 - a_3) + 2\varepsilon(a_4 - u_4) \end{bmatrix} = 0 \\ \begin{bmatrix} 1 + \chi(1 - 2\varepsilon) \end{bmatrix} (\ddot{u}_4 - \ddot{a}_4) = -\frac{2ES}{ml} 2\varepsilon(-u_3 + a_3 + u_4 - a_4) = 0$$

On a prouvé que l'accélération de chacun des 3 noeuds à gauche de la discontinuité reste nulle au temps n + 1. Donc avec un schéma de Newmark explicite, la vitesse de chaque noeud n'est pas modifiée (équation 4.75) et reste égale à zéro; donc le nouveau déplacement ne change pas non plus (équation 4.73). En conclusion, on a démontré pour le cas monodimensionnel qu'il n'y avait pas passage de l'onde à travers l'interface de discontinuité pour les deux méthodes de diagonalisation de matrice de masse.

4.4.2.2 Validation

Maintenant, on va simplement faire la vérification numérique sur les 2 méthodes de diagonalisation. On réutilise la même structure que précédemment, et on trace les champs de déplacement, vitesse, accélération, déformation et contrainte dans la structure au temps 25*s* : c'est le moment où l'onde a déjà commencé à se réfléchir. La figure 4.23 présente ces 5 évolutions pour les 2 techniques de diagonalisation. Donc on constate aussi que l'onde de traction ne franchit pas la discontinuité en déplacement pour les deux cas de méthodes de diagonalisation.

4.4.3 Cas bidimensionnel

On considère cette fois la structure discrétisée en 78x39 éléments et schématisée sur la figure 4.24. Le chargement en vitesse est défini de la façon suivante :

$$V = \begin{cases} V_0 t/t_r & \text{pour } t \le t_r, \\ V_0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
(4.82)

où t_r vaut 0, 1s et la vitesse V_0 10m/s. La présence de la discontinuité devra réfléchir cette onde de traction. La figure 4.25 montre l'onde de traction s'approchant de la discontinuité aux temps 1.5s et 2s. La figure 4.26 met en évidence la réflexion de l'onde et la nonpropagation à travers la discontinuité. Les résultats sont en parfait adéquation avec la référence [REM 07]. On constate que l'onde ne passe pas à travers l'interface.De plus,



FIG. 4.23: Propagation de l'onde dans la structure de 6 éléments au temps 25s : les champs de déplacement, vitesse, accélération, déformation et contrainte sont représentés.

les deux techniques de diagonalisation donnent des résultats très proches (voir la figure 4.26 où il y a bien deux courbes qui se superposent). Ces observations permettent de valider ce qu'on constatait déjà dans le calcul précédent, où les ondes ne traversent pas l'interface de discontinuité en déplacement.

4.5 Conclusion

La question que l'on se posait d'abord était la façon de diagonaliser une matrice de masse qui comportait des fonctions de forme enrichies. La réponse a pu être donnée grâce à la conservation de l'énergie cinétique qui devait être vérifiée, et deux méthodes de diago-



FIG. 4.24: Géométrie et chargement.



FIG. 4.25: Contrainte σ_{yy} dans l'épaisseur suivant y mesurée au centre de la structure à t = 1.5s (le graphique de gauche) et t = 2s (celui de droite).



FIG. 4.26: Contrainte σ_{yy} dans l'épaisseur suivant y mesurée au centre de la structure à t = 3s, et la différence des contraintes σ_{yy} de chaque techniquedans l'épaisseur suivant y.

nalisation de matrice de masse ont ainsi été proposées et détaillées. De plus, ces méthodes permettent d'obtenir pour des élément finis enrichis avec une fonction saut seulement, un pas de temps critique proche du pas de temps critique des éléments finis standard. Donc on a pu lever le problème pénalisant les calculs explicites avec la méthode des éléments finis étendus. Enfin, on a pu aussi vérifier que les matrices de masse diagonalisées par chacune des deux techniques, permettent de tenir explicitement compte de la présence d'une interface de discontinuité en déplacement, et traduit correctement le comportement dynamique au voisinage de l'interface.

Chapitre 5

Simulations numériques de propagation dynamique de fissure

Ce chapitre présente l'implémentation de toute la stratégie X-FEM et fonctions de niveau afin d'avoir les outils opérationnels pour la simulation de propagation dynamique de fissure dans EUROPLEXUS. Ensuite, des simulations et une confrontation des résultats numériques et expérimentaux, clôtureront ce travail.

Sommaire

5.1	Introd	luction
5.2	Implé	mentation dans EUROPLEXUS
	5.2.1	Description de la fissure
	5.2.2	Calcul mécanique tenant compte de la fissure
	5.2.3	Algorithme général
5.3 Simulations numériques		
	5.3.1	Mode 1 pur
	5.3.2	Expérience de Kalthoff
	5.3.3	Expérience sur Compact Compression Specimen
	5.3.4	Éprouvette trouée et fissurée
5.4	Conclu	usion

5.1 Introduction

Ce chapitre a pour objet d'expliciter la stratégie d'implémentation de la méthode des éléments finis étendus pour la propagation de fissure dans un code de calcul dynamique explicite industriel EUROPLEXUS, et ensuite de détailler quelques simulations numériques. La stratégie d'implémentation s'appuie essentiellement sur les résultats des travaux de recherche concernant les pas de temps critiques. On détaille aussi l'implémentation du traitement numérique des fonctions de niveau qui localisent la fissure dans la structure. Les liens entre les calculs sur les fonctions de niveau et la structure sont aussi développés. Dans une première partie, une implémentation robuste de X-FEM dans un code industriel de dynamique explicite EUROPLEXUS (CEA Saclay) est explicitée, et des simulations numériques de propagation de fissure dans des structures chargées dynamiquement sont exposées dans la seconde partie.

5.2 Implémentation dans EUROPLEXUS

Cette section a pour objet de décrire la stratégie d'implémentation de la méthode des éléments finis étendus pour la propagation de fissure dans EUROPLEXUS, code développé au CEA Saclay.

5.2.1 Description de la fissure

5.2.1.1 Utilisation de fonctions de niveau

Dans un premier temps, la fissure est décrite à l'aide de deux fonctions de niveau [GRA 02] : l'une localisant la surface de la fissure et la seconde le front de fissure. La figure 5.1 montre les iso-zéros de ces deux fonctions de niveau : leur combinaison permet de construire la localisation de la fissure dans l'espace. Ensuite, on a construit des éléments (quadrangle et cube) X-FEM. Le nombre de degrés de liberté par noeud (2 en 2D et 3 en 3D) est doublé (4 en 2D et 6 en 3D). Ces noeuds sont susceptibles d'être enrichis à l'aide de l'activation de ces degrés de liberté supplémentaires. La recherche des éléments coupés par la fissure permet d'activer ces degrés de liberté supplémentaires. On a ainsi créé un maillage d'éléments susceptibles d'être enrichis : il faut bien choisir ce maillage, car la fissure ne peut évoluer que dans cette zone. Cette procédure de recherche d'éléments enrichis est appelée à l'initialisation et à chaque pas de temps lorsque la fissure propage. La matrice de masse est diagonale : les termes relatifs aux degrés de liberté standard sont ceux utilisés pour les éléments standard, et les termes correspondant aux degrés de liberté enrichis, sont aussi pris égaux aux termes standard [MEN 06c, MEN 07b].

De plus, la position de tous les noeuds, points de Gauss est repérée par rapport à la configuration initiale.



FIG. 5.1: Les deux fonctions de niveau localisant la fissure dans l'espace.

5.2.1.2 Maillage spécifique aux fonctions de niveau

Le maillage spécifique aux fonctions de niveau est choisi régulier. Il s'agit en fait d'un parallèlépipède discrétisé en *NIxNJxNK* éléments de coté *DXxDYxDZ*. Cette description est illustrée sur la figure 5.2. Le coin inférieur gauche est repéré initialement par ses co-



FIG. 5.2: Maillage régulier spécifique aux fonctions de niveau.

ordonnées X_0, Y_0, Z_0 . La donnée de ces 9 paramètres permet donc de construire et localiser le maillage spécifique aux fonctions de niveau. Ce maillage doit englober entièrement les éléments dits enrichissables. Ce maillage est ensuite invariant dans l'espace et dans le temps. La finesse de celui doit être au moins égale à celle du maillage de la structure. L'initialisation des fonctions de niveau, ou la construction de la fissure initiale se fait grâce à la donnée des équations des plans des deux fonctions de niveau : l'équation de PHI1 et celle de PHI2. Donc actuellement la fissure initiale est limitée à être plane rectiligne semi-infinie.

5.2.2 Calcul mécanique tenant compte de la fissure

5.2.2.1 Les forces internes

Dans cet partie, c'est le calcul des forces internes qui est décrit, et notamment l'intégration sur les éléments coupés par la fissure. L'évaluation des forces internes aux degrés de liberté standard est la même de celle du problème éléments finis, c'est à dire :

$$F^{int} = \int_{\Omega} B^T \, \sigma \, d\Omega \tag{5.1}$$

Quant aux degrés de liberté enrichis, en écrivant la puissance des efforts intérieurs :

$$P_{int} = \underbrace{[u]^T \cdot \int_{\Omega} B^T \cdot \sigma d\Omega}_{standard} + \underbrace{[\tilde{u}]^T \cdot \int_{\Omega} H B^T \cdot \sigma d\Omega}_{enrichi}$$
(5.2)

avec [u] les degrés de liberté standard du déplacement, $[\tilde{u}]$ les degrés de liberté enrichis du déplacement, σ la contrainte, *H* la fonction d'enrichissement, alors on peut écrire que :

$$\tilde{F}^{int} = \int_{\Omega} H B^T \, \sigma \, d\Omega \tag{5.3}$$

L'intégration ici d'une fonction discontinue $HB^T \sigma$ (à cause de la présence de la fonction d'enrichissement H) peut se faire de deux manières : la première consiste à sous découper chaque sous-partie coupée par la fissure afin d'effectuer une intégration exacte sur les points de Gauss de chaque côté de la discontinuité d'une fonction continue (car plus aucun élément n'est coupé par la fissure), et la seconde consiste en une intégration approchée mais dont l'erreur est réduite par le nombre accru de points de Gauss utilisés dans l'élément (voir la thèse de Elguedi [ELG 06a]). Le code développé au LaMCoS utilise la première méthode. Notre choix s'est portée sur la seconde car elle ne nécessitait pas les développements lourds de sous-découpage d'élément. Ensuite, l'intégration approchée se montre suffisamment efficace. Il a été montré [ELG 06a] qu'un nombre de 4x4x4 (en 3D, et 4x4 en 2D) sous-éléments (non-conformes avec la fissure) dans l'élément étaient le plus approprié pour une intégration efficace et convenable. Donc on a créé des éléments présous-découpés : par exemple, en 2D des quadrangles qui comportent 68 points de Gauss : c'est à dire les 4 points de Gauss standard lorsque l'élément n'est pas sous-découpé, et 64 autres points qui pourront être utiles si l'élément a besoin d'être sous-découpé après avance de la fissure par exemple.



• Enrichissement saut

FIG. 5.3: Schéma du choix du sous-découpage choisi pour les éléments enrichis.

5.2.2.2 La propagation de fissure

L'utilisation des fonctions de niveau est courante pour la description d'évolution d'interface. Il a été fait le choix d'utiliser un schéma de calcul en différences centrées pour le calcul des fonctions de niveau grâce à sa robustesse et simplicité d'intégration. La condition est que le maillage relatif aux fonctions de niveau doit être régulier. Même si le maillage de la structure est initialement régulier, sa déformabilité ne lui permet pas d'être utilisé pour la description des fonctions de niveau. C'est la raison pour laquelle deux maillages différents interviennent entre la structure et les fonctions de niveau. Aussi, pour maintenir un maillage régulier tout au long du calcul, les calculs relatifs aux fonctions de niveau s'effectue sur la configuration initiale. Donc les grandeurs relatives aux fonctions de niveau sont des valeurs à reporter sur la configuration initiale.

L'algorithme utilisé ici est celui décrit par Gravouil [GRA 02] utilisant les fonctions de niveau pour décrire la fissure. La compilation des 2 fonctions de niveau permet de construire le champs d'extension des vitesses prenant en compte la fissure existante. Le transport du vecteur vitesse de propagation de fissure de la configuration actuelle vers la configuration initiale, qui est la configuration de travail des fonctions de niveau, n'est pas encore intégré. Donc la limitation actuelle des calculs en grandes déformations et grands déplacements provient du fait que ce vecteur vitesse n'est pas transporté en tenant compte du changement de configuration.

5.2.3 Algorithme général

On décrit ci-après l'algorithme global mettant en relation les fonctions de niveau et la méthode des éléments finis étendus :

1. Initialisation des fonctions de niveau sur tous les noeuds et points de Gauss de la

partie du maillage "enrichissable";

- 2. Recherche des éléments coupés et donc des noeuds enrichis ;
- 3. Calcul mécanique avec les degrés de liberté enrichis activés ;
- 4. Calcul du critère de propagation de fissure : direction et vitesse de propagation ;
- 5. Transport de la vitesse de propagation de la configuration actuelle vers la configuration initiale;
- 6. Extension des vitesses des fonctions de niveau;
- 7. Propagation au pas de temps suivant des fonctions de niveau;
- 8. Retour à l'étape 3 ou arrêt du calcul.

On peut retrouver cette implémentation dans les fichiers d'EUROPLEXUS suivants : le module X-FEM *m_xfem_lvlset.ff*, l'élément quadrangle enrichi *xcar.ff*, l'élément cubique enrichi *xcub.ff*, et le fichier d'initialisation des nombres de points de Gauss et degré de liberté suivant les éléments et les noeuds *inico1.ff*.

5.3 Simulations numériques

L'objectif de cette partie est de valider la stratégie numérique choisie et en particulier le calcul du pas de temps sur des garanties plus complexes. Nous considérerons qu'il y aura validation des résultats précédents si les calculs explicites se divergent pas. Effectivement, un pas de temps de calcul supérieur au pas de temps critique engendrera directement une divergence des résultats qui se traduira par l'explosion des valeurs de déplacements, vitesses et accélérations. On pourra aussi comparer avec l'implicite, les résultats de calcul de propagation de fissure pour les cas test suivants :

- Mode 1 pur : calcul en mode 1 pur sans puis avec propagation de fissure,
- Essai de Kalthoff : essai de propagation dynamique de fissure en mode 2,
- Compact Compression Specimen (CCS) : propagation en mode mixte,
- Éprouvette trouée et fissurée : propagation en mode mixte.

La première vérification sera donc au niveau du pas de temps de calcul en explicite ; le pas de temps d'un calcul convergent est inférieur au pas de temps critique. On regardera plus en détail les trajets de fissure, afin de montrer que certains éléments de la structure comportaient une fraction de coupure ε proche de 1 ou 0, donc que le pas de temps critique était le plus pénalisant et malgré cela le calcul a convergé. La deuxième sera plus précise et sera axée sur la comparaison des résultats entre calculs explicites et implicites. Les calculs implicites seront aussi effectués avec deux stratégies d'enrichissement : enrichissement saut uniquement, et enrichissements saut et fonctions de pointe de fissure. Ainsi, le dernier calcul sera considéré comme la référence en terme de solution. Pour ces simulations de validation, les calculs utilisant le critère de propagation gouverné par les facteurs d'intensité des contraintes, et de la contrainte de cisaillement maximale, est le code de calcul *ELFE_3D* développé au LaMCoS ; et EUROPLEXUS utilise le critère en

contrainte moyennée en pointe de fissure. La quatrième expérience confrontera des résultats numériques et expérimentaux d'une expérience de plaque trouée et fissurée impactée dans un système de barre de Hopkinson.

5.3.1 Mode 1 pur

Le premier test s'appuie sur une plaque infinie comportant une fissure semi-infinie. La figure 5.4 présente la structure, le chargement et les conditions limites de l'essai. L'application numérique est effectuée avec les dimensions h = 2m, L = 10m, l = 5m et les propriétés matériaux E = 210GPa, v = 0, 3, $\rho = 8000kgm^{-3}$. La contrainte de traction σ_0 est de 500*MPa*. Les facteurs d'intensité des contraintes sont évalués dans un *J*-domaine de rayon 0.1*m*. Les résultats numériques sont normalisés par $\sigma_0\sqrt{h}$, et le calcul est effectué jusqua'au temps 900µs. La solution théorique de ce problème pour une vitesse d'avance



FIG. 5.4: Schéma et conditions de l'expérience de propagation de fissure en mode 1 pur.

de fissure donnée est décrit dans [FRE 98]. La validité de la solution analytique est vraie tant que l'onde n'a pas été réfléchie sur la face inférieure.

$$K_1^{dyn}(0,t) = \frac{2\sigma_0}{1-\nu} \sqrt{\frac{c_1 t(1-2\nu)}{\pi}}$$
(5.4)

Et pour une fissure mobile à vitesse *a*, le facteur d'intensité des contraintes dynamique en mode 1 s'écrit :

$$K_1^{dyn}(\dot{a},t) = k(\dot{a})K_1^{dyn}(0,t)$$
(5.5)

où k est une fonction de la vitesse de pointe de fissure à, qui peut aussi être approché par :

$$k(\dot{a}) = \frac{1 - \frac{\dot{a}}{c_r}}{1 - \frac{\dot{a}}{2c_r}}$$
(5.6)

Au final on peut écrire la solution analytique de facteur d'intensité des contraintes en mode 1 pur : \dot{a}

$$K_{1}^{dyn}(\dot{a},t) = \frac{2\sigma_{0}}{1-\nu}\sqrt{\frac{c_{d}t(1-2\nu)}{\pi}}\frac{1-\frac{\dot{a}}{c_{r}}}{1-\frac{\dot{a}}{2c_{r}}}$$
(5.7)

	Discrétisation	Pas de temps	Enrichissement
Explicite	60x120	$4,5\mu s$	saut X _{dis}
Implicite	60x120	9µs	saut X _{dis}
Implicite	40x80	45 µs	saut + pointe X_{cla}

TAB. 5.1: Tableau des caractéristiques des trois calculs pour le mode 1 pur.

Le test est effectué sur la structure en imposant la vitesse de propagation constante de fissure de $v_0 = 1500m/s$ après le temps $t = 1,5t_c$, et nulle avant. Les trois calculs sont décrits dans le tableau 5.1. Il faut noter que le pas de temps critique de cette structure vaut 0,76 fois (voir le tableau 4.4) $l\sqrt{\frac{\rho}{E}}$ où $l = \frac{4}{60}mm$; on trouve $\Delta t_c = 9,88\,\mu s$. La figure 5.5 présente les résultats analytique et numérique de facteur d'intensité des contraintes en fonction du temps pour les trois calculs décrits dans le tableau 5.1. On constate que, bien que le calcul explicite ait été effectué avec un pas de temps valant la moitié du pas de temps critique (il fallait $\Delta t_c^{XFEM} \leq 0.707\Delta t_c^{FEM}$), le calcul n'a pas divergé mais est assez proche de la solution implicite pour les deux étapes d'avancée de fissure, fixe puis mobile.



FIG. 5.5: Mode 1 pur : solutions numériques et analytique de \bar{K}_1 pour une fissure fixe puis mobile.

5.3.2 Expérience de Kalthoff

On s'intéresse à présent à un cas de mode mixte avec propagation de fissure. En particulier, l'importance du mode 2 dans cet essai de Kalthoff schématisé sur la figure 5.6 est l'origine d'un trajet de fissure plus complexe dans l'éprouvette. La géométrie est décrite sur la figure 5.6. Dans notre cas, la vitesse du projectile est de $V_0 = 20ms^{-1}$, ce qui correspond à une rupture fragile. La modélisation du chargement sera une vitesse imposée de V_0 sur la face impactée. Le projectile n'est pas modélisé. Les caractéristiques matériaux sont celles du 18Ni1900 maraging : E = 190GPa, v = 0, 3, $\rho = 8000kgm^{-3}$, $K_{1c} = 68MPa\sqrt{m}$. Les dimensions sont L = 0, 1m, l = 0,05m, la longueur initiale de la fissure est a = 0,05m, et le problème est considéré à déformations planes.



FIG. 5.6: Géométrie et conditions limites de l'expérience de Kalthoff.

5.3.2.1 Avec les facteurs d'intensité des contraintes

Le maillage est régulier de la forme 80x80 éléments quadrangles linéaires. L'intégration implicite est faite avec un pas de temps $\Delta t^{imp} = 1 \mu s$. Et pour le schéma explicite, le pas de temps utilisé est $\Delta t^{exp} = \frac{1}{2} \Delta t_c^0 = 0,125 \mu s$. Le pas de temps critique est quant à lui égal à 0, 198µs. Il faut préciser simplement que le pas de temps de calcul explicite vaut la moitié du pas de temps critique théorique déterminé dans les études précédentes. La figure 5.7 présente les résultats en matière de trajet de fissure pour les trois calculs : implicite et explicite avec uniquement les enrichissements saut, et implicite avec les enrichissements saut et de pointe de fissure. On constate donc dans un premier temps que le calcul explicite n'a pas divergé, et que les trois calculs donnent sensiblement le même résultat de trajet de fissure. Les deux calculs qui n'utilisent que l'enrichissement saut sont très similaires. La figure 5.8 présente le graphe d'évolution de la longueur de fissure en fonction du temps pour les trois calculs. On constate que les trois évolutions de la longueur de fissure dans le temps sont très proches. La similitude des trois résultats peut aussi s'observée sur la figure 5.9 qui présente la déformée de l'éprouvette pour chacun des trois calculs à trois instants différents. En conclusion, le calcul explicite sur l'essai de Kalthoff (rupture en mode 2 avec propagation de fissure) est considéré comme convenable, car ces résultats sont très similaires aux calculs implicites dont la validité des résultats est admise. Enfin,



FIG. 5.7: Trajet de fissure dans l'expérience de Kalthoff.



FIG. 5.8: Évolution de la longueur de fissure dans l'expérience de Kalthoff.



FIG. 5.9: Norme du champ de déplacement sur le maillage déformé (2 fois) aux temps $t = 40\mu s$, $t = 60\mu s$ et $t = 80\mu s$.

le calcul explicite converge avec le pas de temps utilisé valant la moitié du pas de temps critique. On ne remet donc pas en cause les résultats théoriques de pas de temps critiques déterminés dans la partie précédente.

5.3.2.2 Avec les contraintes non locales en pointe de fissure

Pour le calcul sur l'éprouvette de Kalthoff à vitesse d'impact imposée, les résultats des deux calculs mettant en jeu chacune des deux méthodes de détermination de contrainte non locale en pointe de fissure, sont présentés sur la figure 5.10; les trajets des fissures pour les 2 cas sont assez proches. La différence intervient au début de la propagation, car la technique moyennant le tenseur global adoucit la courbure de la fissure au départ. Le tableau 5.2 présente les caractéristiques mécaniques de l'expérience de Kalthoff. La longueur locale intervient dans la fonction poids δ d'intégration de détermination des valeurs moyennées; elle représente environ deux fois la longueur d'un élément. De plus

Masse volumique	ρ	$8000 kg/m^3$
Module d'Young	E	190 GPa
Coefficient de Poisson	ν	0,3
Contrainte de démarrage en pointe	σ_c	68 <i>MPa</i>
Contrainte de redémarrage en pointe	σ_d	68 <i>MPa</i>
Célérité des ondes de Rayleigh	C_R	1220 m/s
Longueur locale	R	0,003 m

TAB. 5.2: Tableau des paramètres utilisés pour l'expérience Kalthoff avec le critère en contrainte moyennée

la figure 5.11 présente l'évolution des longueurs des fissures en fonction du temps pour les deux calculs. On constate que les vitesses d'avancée de la fissure, donc les pentes des courbes, sont très semblables sauf à l'initiation de propagation. La technique moyennant le tenseur entier a une pente plus progressive.

5.3.3 Expérience sur Compact Compression Specimen

On s'intéresse ici au cas d'une propagation dynamique de fissure en mode mixte, qui n'est ni mode 1 pur ni mode 2 pur, mais bien la combinaison des deux modes qui engendrera cette fois, une trajectoire davantage courbe. La figure 5.12 présente les conditions de chargement et les dimensions de l'éprouvette. Ces expériences ont déjà fait l'objet de publication notamment Maigre [MAI 85, MAI 93, MAI 92a], Rittel [RIT 97b, RIT 00, RIT 96, RIT 97a] et Bui [BUI 92]. Les caractéristiques matériau sont celles du PMMA : E = 5,76 GPa, v = 0,42, $\rho = 1180 kgm^{-3}$. L'effort $P_1(t)$ est dû à un impact à une vitesse $V_0 = 20 ms^{-1}$. L'éprouvette est supposée avoir un comportement élastique linéaire, et le problème est à déformations planes. Bien que l'éprouvette soit géométriquement symétrique, la déformée et la propagation de fissure ne le sont pas ; ceci est dû au chargement non symétrique.



FIG. 5.10: Expérience de Kalthoff : trajet de fissure pour les deux calculs de contraintes moyennées.



FIG. 5.11: Expérience de Kalthoff : longueur de fissure en fonction du temps pour les deux calculs de contraintes moyennées.

5.3.3.1 Avec les facteurs d'intensité des contraintes

La discrétisation globale est de 39x60 éléments (voir tableau 5.3), et les pas de temps utilisés pour chacune des 3 simulations, sont exposés dans le tableau 5.3. Le critère utilisant les facteurs d'intensité des contraintes a besoin des paramètres suivants : facteur d'intensité des contraintes critique $K_{Ic} = 12,65 MPa\sqrt{m}$ et la vitesse des ondes de Rayleigh $c_R = 1220 m/s$.



FIG. 5.12: Schéma et condition de l'expérience numérique de propagation de fissure en mode mixte sur Compact Compression Specimen.

	Implicite X _{cla}	Implicite X _{dis}	Explicite X _{dis}
Discrétisation (structure entière)	39x60	39x60	39x60
Pas de temps (en μs)	1	1	0.25

TAB. 5.3: CCS : Pas de temps et maillage utilisés pour les trois calculs.

On peut aussi observer sur la figure 5.13 la déformée du maillage à la fin du calcul. Plus précisément sur la figure 5.14, le trajet de fissure obtenu est très proche de celui obtenu avec une intégration implicite en temps, avec ou sans fonction d'enrichissement en pointe de fissure. Et temporellement, la similitude des calculs est aussi visible sur la figure 5.15 qui montre l'évolution de la longueur de fissure en fonction du temps. Ce que l'on souhaitait démontrer avec ces calculs, est la stabilité de l'algorithme de Newmark explicite couplé avec la méthode des éléments finis étendus pour traiter des propagations dynamiques de fissure. Ces calculs montrent effectivement la stabilité du schéma avec les différents pas de temps utilisés, et que les résultats généraux sont en concordance avec ceux de la mécanique de la rupture. La discrétisation enrichie choisie (uniquement les fonctions saut) et le schéma de Newmark explicite créent une autre alternative, cohérente et juste, de calcul de propagation dynamique de fissure.

5.3.3.2 Avec les contraintes non locales en pointe de fissure

Dans cette partie, on simule la même expérience en utilisant le critère de contrainte moyennée en pointe de fissure. Le coût d'un calcul X-FEM par rapport à un calcul éléments finis standard est illustré dans le tableau 5.4. Ce tableau précise entre autre les types



FIG. 5.13: CCS : Maillage déformé de l'éprouvette.



FIG. 5.14: CCS : trajet de la fissure dans l'éprouvette maillée en 39x60.



FIG. 5.15: CCS : évolution de la longueur de fissure dans le temps.



FIG. 5.16: CCS : trajet de la fissure dans le maillage de l'éprouvette.

de calculs utilisés lors de la simulation : ainsi pour le cas sans fissure, il n'y a pas de temps passé sur les calculs de la mécanique de la rupture et de fonctions de niveau, par contre, le calcul avec fissure libre utilise toutes ces procédures. Les paramètres de calcul mécanique

Expérience	Sans fissure	Fissure fixe	Fissure libre
Temps CPU (s)	39,90	85,49	329,73
Calcul FE	Х	Х	Х
Calcul mécanique de la rupture		Х	Х
Calcul level-sets			Х

TAB. 5.4: CCS : Temps CPU des différentes simulations 2D avec $\Delta t = 0, 1\mu s$ et un temps final de $142\mu s$.

sont les suivants : la contrainte de démarrage $\tilde{\sigma}_c = 10 MPa$, la contrainte de redémarrage [GRÉ 07] $\tilde{\sigma}_d = 7 MPa$ et la vitesse des ondes de Rayleigh $c_R = 5000m/s$. La figure 5.17 présente le maillage utilisé pour l'expérimentation numérique. Sur la partie de droite, on note aussi la déformée et le trajet de fissure.

Remarque sur le post-traitement de EUROPLEXUS : On remarque que la fissure n'est pas maillée mais qu'une ouverture apparaît bien, car il n'y a pas encore de post-traitement pour illustrer l'ouverture de la fissure comme dans *ELFE_3D*. La fissure est simplement représentée par l'intersection de l'iso-zéro d'une fonction de niveau et la partie négative de l'autre. Cette représentation est pondérée par les fonctions de forme du maillage de la structure. D'un autre côté, les résultats de la propagation de la fissure (vitesse, direction, position de la pointe) sont sauvés sur un fichier de données, et c'est à partir de ce fichier de données que les courbes suivantes 5.18 à 5.23 sont tracées.

La figure 5.18 présente l'évolution de la contrainte moyennée en pointe de fissure en fonction du temps. La description de la fissure en utilisant seulement les fonctions saut, crée des paliers d'avancement de la fissure lors de la propagation : la discontinuité mécanique dans le maillage se propage par pas d'un élément à la fois. De plus, le schéma temporelle explicite va créer des oscillations lors de l'avancement de la fissure; c'est pourquoi les réponses temporelles sont si perturbées. La figure 5.19 montre la vitesse de propagation en fonction du temps. Ensuite la loi de propagation rend la vitesse de propagation. Ainsi la figure 5.20 montre la vitesse de propagation en fonction de la contrainte moyennée en pointe de fissure. Cette courbe est similaire à celle de la figure 2.10 illustrée dans le premier chapitre explicitant le critère utilisé. La figure 5.21 présente la direction de la pointe de fissure en fonction du temps ; on note que la direction initiale est de -90degrés. Enfin la comparaison des résultats entre les calculs effectués sur ELFE 3D et sur EUROPLEXUS avec les différents critères de contraintes est illustrée sur la figure 5.22, qui présente l'évolution de la longueur de fissure en fonction du temps, et sur la figure 5.23 qui présente le trajet de la fissure pour les deux calculs. On constate sur ces figures 5.22 et 5.23 que les trajets de fissure sont proches, et que les évolutions temporelles de la



FIG. 5.17: CCS : maillages initial et déformé au temps final.



FIG. 5.18: CCS : évolution de la contrainte moyennée en fonction du temps.

fissure sont similaires aussi. Les résultats des deux calculs sont comparables d'un point de vue temporel et spatial ce qui permet de valider les simulations utilisant le critère en contrainte moyennée par rapport à l'utilisation des facteurs d'intensité des contraintes.

5.3.4 Éprouvette trouée et fissurée

Ce cas test aura la particularité de confronter les résultats expérimentaux et numériques. L'expérimentation a été réalisée en mars 2007 sous la direction de Grégoire [GRÉ 07].



FIG. 5.19: CCS : évolution de la vitesse de propagation en fonction du temps.



FIG. 5.20: CCS : évolution de la vitesse de propagation en fonction de la contrainte moyennée en pointe.

Masse volumique	$1180 kg/m^3$
Module d'Young	2800 <i>MPa</i>
Coefficient de Poisson	0,42
Contrainte de démarrage	1 MPa
Contrainte de redémarrage	0.8 <i>MPa</i>
Longueur locale	1 <i>mm</i>
Vitesse des ondes de Rayleigh	799 m/s

TAB. 5.5: PMMA : caractéristiques mécanique de l'éprouvette



FIG. 5.21: CCS : évolution de la direction de la pointe de fissure en fonction du temps



FIG. 5.22: CCS : évolution de la longueur de fissure en fonction du temps : comparaison des calculs EUROPLEXUS (avec $\tilde{\sigma}$) et ELFE_3D (avec K_i).

5.3.4.1 Protocole expérimental

L'expérience consiste en un impact sur barre de Hopkinson, et une éprouvette trouée et fissurée au centre. La figure 5.24 présente le protocole expérimental. Une éprouvette en PMMA, et deux barres en Nylon encadrant l'éprouvette. Les caractéristiques mécaniques du Nylon sont les suivantes : module d'Young de 3600 MPa, masse volumique de $1145 kg/m^3$, et un coefficient de Poisson de 0,41. La longueur des barre en nylon permet de ne pas avoir de retour d'onde pendant la durée de l'expérience au sein de l'éprouvette en PMMA, et le choix du matériau Nylon crée l'impédance adéquat au niveau des surfaces de contact. Les caractéristiques mécaniques étant proches de celles du PMMA, l'onde de compression initiale est transmise sans réflexion parasite. Les essais ont été effectués par D. Grégoire au LMS de l'École Polytechnique. Un système de Zimmer permet d'enregistrer l'abscisse de la pointe de fissure en fonction du temps, grâce à la caractéristique



FIG. 5.23: CCS : Trajet de la fissure avec les 2 calculs EUROPLEXUS (critère en contrainte) et ELFE_3D (critère en facteur d'intensité des contraintes).

de transparence du matériau PMMA. L'éprouvette a les caractéristiques géométriques dé-





crites sur la figure 5.25. La figure 5.26 présente la photo d'une éprouvette post mortem après l'expérience. On distingue la fissure initiale et sa propagation.

5.3.4.2 Résultats expérimentaux et numériques

La figure 5.27 présente une visualisation CAO de l'éprouvette avant et après simulation avec EUROPLEXUS. Globalement les résultats semblent proches dans le domaine spatial. La figure 5.29 présente les trajets de la fissure correspondant à l'expérience et à la simulation numérique. On constate que les trajets sont proches, et que la différence, peut provenir de la fabrication de la fissure initiale non parfaite. Effectivement, le front de fissure initial a une certaine épaisseur dûe à l'outil utilisé. Ainsi, la figure 5.30 montre l'évolution de la longueur de fissure en fonction du temps pour le calcul et l'expérience. Ce que l'on constate est qu'il y a un arrêt de la fissure aussi bien dans la simulation que



FIG. 5.25: PMMA : dimensions de l'éprouvette utilisée pour les essais.



FIG. 5.26: PMMA : éprouvette post mortem.

dans l'expérience. Cependant la différence entre les temps d'arrêt peut être expliquée par la première phase de propagation : en effet la fissure initiale est construite artificiellement, donc le front de fissure est localisé dans une zone plus large et moins singulière que le cas numérique. Donc la contrainte seuil de propagation est supérieure à la valeur de seuil de la seconde phase où la fissure expérimentale se rapproche davantage du numérique. La figure 5.28 présente l'évolution dans le temps de la contrainte moyennée de pointe de fissure : on observe ainsi deux principaux intervalles de temps pour lesquels la contrainte moyennée est importante : ces deux zones correspondent aux phases d'avancée de fissure. La figure 5.30 montre l'évolution dans le temps de la longueur de la fissure : les deux phases de propagation apparaissent très clairement sur le graphique. Enfin, la figure 5.31 présente l'évolution de la direction de la fissure en fonction du temps : on remarque que le premier saut de direction à l'initialisation de la propagation est d'environ 30 degrés, et qu'ensuite la direction de la fissure tend à se stabiliser aux alentours de 0 degré. On peut conclure que les résultats expérimentaux et numériques sur cet essai, sont similaires. Cette expérience valide encore les développements théoriques effectués au niveau du calcul et du critère de propagation.



FIG. 5.27: PMMA : éprouvette avant et après simulation numérique.



FIG. 5.28: PMMA : Contrainte moyennée en pointe de fissure.

5.4 Conclusion

On a montré dans ce chapitre que des simulations numériques de propagation de fissure en dynamique explicite étaient valides, et que le pas de temps de calcul n'était pas aussi pénalisant. Les travaux théoriques du chapitre 4 ont déjà pu être validés ici, car les calculs n'ont pas divergé malgré les trajets de la fissure non connus à l'avance dans le maillage. Ensuite, les résultats des simulations dont la description de la fissure était limitée à l'utilisation des fonctions saut sont très proches des résultats des méthodes utilisant des enrichissements de pointe de fissure. Cette stratégie d'enrichissement se révèle suffisante pour le calcul de propagation de fissure en dynamique explicite. Et le coût de calcul X-FEM n'est pas négligeable mais reste très intéressant étant donné les tâches supplémentaires à effectuer au niveau de la mécanique de la rupture et des propagations des fonctions de niveau. Enfin, le critère en contrainte moyennée de pointe de fissure développé dans le chapitre 2, s'est montré très proche du traditionnel critère en facteur d'intensité des contraintes de la mécanique linéaire de la rupture. D'ailleurs, ce critère a la perspective



FIG. 5.29: PMMA : trajets expérimental et numérique de la fissure dans l'éprouvette.



FIG. 5.30: PMMA : longueur de la fissure en fonction du temps.

de s'adapter plus facilement en cas de présence de plasticité par exemple. De plus, ce critère satisfait aussi les comparaisons entre simulation et expérience. Pour conclure, ce chapitre a donné les validations numériques au travail théorique précédent et les résultats sont très encourageants pour traiter de propagation de fissure avec l'utilisation de la méthode des éléments finis étendus en dynamique explicite.



FIG. 5.31: PMMA : direction de la fissure en fonction du temps.

5. Simulations numériques de propagation dynamique de fissure
Conclusion et perspectives

Dans un premier chapitre, on a développé une théorie de l'endommagement et adapté à deux types modèles pour matériaux composites. L'un des modèles est en plus enrichi d'un critère de rupture (type zone cohésive) où la contrainte peut s'annuler. Cette introduction permet de caractériser l'état du milieu avant l'apparition d'une macro-fissure. Les développements faits ici sont intégrés dans un code de calcul commercial du CEA Saclay.

Dans un deuxième chapitre, on a décrit la théorie générale de la mécanique de la rupture avec différentes approches (énergétique et locale).

Dans un troisième chapitre, on a fait l'inventaire des méthodes numériques utilisées pour la simulation numérique de propagation de fissure. On a aussi explicité comment l'utilisation de fonctions de niveau pouvait gérer l'évolution de la fissure au cours du temps. Les discrétisations temporelle et spatiale ont été développées pour les cas particuliers du schéma explicite de Newmark et de la méthode des éléments finis étendus. La combinaison des deux pose les problèmes de conception de matrice de masse diagonale et de pas de temps critique.

Le chapitre 4 décrit l'analyse théorique correspondant à la résolution de ces deux problèmes. Les résultats de ces travaux sont utilisés lors de l'implémentation de la méthode X-FEM dans un code de calcul commercial (EUROPLEXUS du CEA Saclay). De plus ce chapitre valide les méthodes de diagonalisation de matrice de masse pour des fissures fixes : la prise en compte de la présence de la discontinuité est réelle, et aucune erreur n'est commise à l'interface. En terme de pas de temps critique, les développements explicités sont les plus performants ; effectivement, le pas de temps d'un élément X-FEM est exactement le même que celui de l'élément fini standard pour une certaine technique de diagonalisation de matrice de masse. Ces résultats sont déterminants pour l'applicabilité de X-FEM en dynamique explicite.

Dans le dernier chapitre, les applications numériques de propagation dynamique de fissure ont permis d'une part de valider les travaux de recherches théoriques décrits dans le chapitre 4, et ceux concernant le critère local de propagation de fissure énoncé dans le chapitre 2.

La résolution efficace de la propagation de fissure en dynamique explicite (grâce à un pas de temps de calcul similaire avec ou sans fissure) est donc prouvée dans cette thèse. Ce résultat permet d'envisager l'implémentation efficace de la méthode des éléments finis étendus pour le calcul de propagation de fissure dans les codes de dynamique explicite. D'autres applications peuvent être aussi envisagées en utilisant différentes fonctions d'enrichissement qui correspondent à des problèmes physiques différents : la description d'une discontinuité faible par exemple pour caractériser un bimatériau dans un maillage non conforme [VAL 07] ou pour décrire des éléments de bord [ROZ 07]. Au final, la résolution numérique de problème d'endommagement et rupture a été abordé dans cette thèse : les problèmes numériques correspondant aux calculs dynamiques ont été traités aussi (dépendance au maillage pour l'endommagement), une solution pour la simulation numérique de propagation de fissure dans un code de dynamique explicite a été développée d'un point de vue pratique et efficace, et a été appliquée dans un code industriel.

Le chaînon manquant est le passage automatique d'un endommagement diffus vers une macro-fissuration pour être complétement prédictif sur la simulation numérique de la rupture d'une pièce sous choc.

Annexe A Discontinuité faible

Dans cette partie, on va appliquer la méthode de diagonalisation. La prise en compte de la dicontinuité faible en déplacement s'effectue grâce à la fonction d'enrichissement Ψ décrite dans la figure A.1. La discrétisation du déplacement est donnée par :

$$u = u_I f_I + u_{I''} f_{I''} + u_{II} f_{II} + u_{II''} f_{II''}$$
(A.1)

où les fonctions f_I , f_{II} sont les fonctions de forme standard, et $f_{I''}$, $f_{II''}$ sont les fonctions de forme enrichies. Ces fonctions supplémentaires sont données par :

$$f_{I''} = \Psi \cdot f_I \tag{A.2}$$

$$f_{II''} = \Psi \cdot f_{II} \tag{A.3}$$

La fonction d'enrichissement Ψ dépend de la position de la discontinuité : ϵL . ϵ peut



FIG. A.1: Fonction d'enrichissement Ψ utilisée pour décrire la discontinuité faible

être appelée fraction de coupure également, et L est la longueur de l'élément. Le module d'Young à gauche de la discontinuité vaut E_1 , et vaut E_2 à droite. On peut écrire une

relation entre les deux raideurs : $E_2 = \alpha \cdot E_1$. La matrice de rigidité correspondante s'écrit :

$$\mathbb{K} = \frac{E_1}{L} \begin{bmatrix} \epsilon(1-\alpha) + \alpha & -\epsilon(1-\alpha) - \alpha & \alpha(1-\epsilon) & -\epsilon \\ -\epsilon(1-\alpha) - \alpha & \epsilon(1-\alpha) + \alpha & -\alpha(1-\epsilon) & \epsilon \\ \alpha(1-\epsilon) & -\alpha(1-\epsilon) & \frac{\epsilon^3(1-\alpha) + 4\alpha - 3\alpha\epsilon(2-\epsilon)}{3} & -\frac{\epsilon^3(1-\alpha) + \alpha - 3\alpha\epsilon(1-\epsilon)}{3} \\ -\epsilon & \epsilon & -\frac{\epsilon^3(1-\alpha) + \alpha - 3\alpha\epsilon(1-\epsilon)}{3} & \frac{\epsilon^3(1-\alpha) + 3\epsilon - \alpha\epsilon(3+3\epsilon+\epsilon^2)}{3} \\ \end{array} \right]$$
(A.4)

Les calculs de pas de temps critique sont effectués avec deux types de matrice de masse : masse consistante et masse diagonalisée par la méthode décrite dans le chapitre 4. Les résultats de pas de temps en fonction de la position de la discontinuité sont illustrés sur la figure A.2. Les calculs ont été effectués pour différents rapports de raideur $E_1/E_2 = \alpha$.



FIG. A.2: Pas de temps critique avec discontinuité faible pour différents rapports de rigidité : 1, 2 et 20.

Le premier graphique présente le pas de temps pour $\alpha = 1$, le second pour $\alpha = 2$, et le troisième pour $\alpha = 20$. Ce qu'on constate dans un premier temps, c'est que la valeur minimale du pas de temps correspondant à une matrice de masse consistante est zéro lorsque la discontinuité est proche d'un noeud, alors que la valeur minimale du pas de temps correspondant à la matrice de masse diagonale n'est jamais zéro. L'intérêt ici de l'utilisation de la méthode de diagonalisation est encore montré avec une discontinuité faible. Le quatrième graphique présente les 6 courbes précédentes en utilisant pour chaque cas le facteur α . En fait, les pas de temps critiques sont proportionnels à $1/\sqrt{\alpha}$.

Annexe B

Jeu de données EUROPLEXUS X-FEM

Le programme Europlexus du calcul du Compact Compression Specimen est le suivant :

* Sortie Paraview : dans le dossier	VMIS ISOT
OPNF DPRV '/home/tomtom/output/'	*!!- PMMA :
*!!	RO 1180 YOUNG 5.76E9 NU 0.42
*!! maillage	ELAS 60E6
*!!	TRAC 2 60E6 0.01041666
GIBI 9 sur1	110E6 0.1
DPLA NONL	LECT TOUS TERM
*!!	*!!
*!! dimensions	* ! ! level-set : FISSURE
*!!	*!!
DIMENSION	LVL7
PT3L 100 PT4L 50000 ZONE 4	NI 200 NJ 200 DX 0.0002 DY 0.0002
BLOQ 80000 GLIS 1 40000	XZER 0.01 YZER 0.035
DEPL 100000 CAR4 50000	FISX 1. FISY 0. FISC -0.03
XCAR 50000 TRIA 50000	PRBX 0. PRBY -1. PRBC 0.052
ECRO 965000 TABL 1 8 FORC 100000	ORDR 8 KICR 10.E6 RAYO 0.005
TERM	CHOI 2 CR 5000.
*!!	LECT C2
*!! geometrie	*!!
*!!	*!! liaisons
GEOM	*!!
XCAR C2	LIAI
CAR4 SB2	*!!
CAR4 SB1 QUAC1	*!! chargement, vitesse
TRIA TRIC1	*!!
TERM	CHAR 3 FACTO 2
*	*!! calcul dynamique :
*!!	PRESS FORCE 1 3673.
*!! materiau	LECT 65 97 129 161 193 225
*!!	257 273 305 337 356 389 TERM
MATERIAU	TABLE 8

0. 0.	VARI DEPL XLVL
16.E-6 0.	ECRO ECRC LECT 2 3 TERM
26.E-6 5.	*!!
48.E-6 21.5	*!! calcul
70.E-6 5.	*!!
75.E-6 3.	OPTION
90.E-6 0.	AMORT LINE 0.2
1.0.	PAS AUTOMATIQUE
*!!	STEP IO
*!! ecriture	*!! calcul dynamique :
*!!	CALCUL TINI 0. TFIN 142.e-6
ECRITURE COOR DEPLA FREQ 100	*!!
POINTS LECT 320 TERM	*!! fin
ELEM LECT 434 438 TERM	*!!
FICHIER FORMAT AVS PRVW FREQ 20	

Ce programme effectue un calcul de propagation dynamique de fissure avec un critère en contrainte moyennée en pointe de fissure : la contrainte limite est $\sigma_c = 10 MPa$, et la vitesse des ondes de Rayleigh c_R est de 5000 m/s.

Annexe C

Programme endommagement CAST3M

*	*
* schema de resolution de probleme dynamique	* CONSTRUCTION DES MODELES
* endommagement a effet retard	* ISOTROPE ET ORTHOTROPE
* Thomas Menouillard 11/04	*
*	* constantes du materiau : aluminium
*	you1 = 70.E9;
* EN ENTREE :	nu1=0.34;
* - maillage : mail1	rh1 = 7800.;
* - surface encastree : fsur	sy1 = 150.E6;
* - surface chagree : S2	mo1 = MODE mail1 MECA ELAS ISOT;
*	ma1 = MATR mo1 YOUN you1 NU nu1 RHO rh1;
'OPTION' 'TRACER' PSC ;	*moeort1 et mateort1 : materiau elastique orthotrope
*'OPTION' 'TRACER' PS;	yg0 = 'TABLE';
*'TITRE' 'DEBUT';	* 1-1; 2-2; 3-3; 4-12; 5-23; 6-13
*'TRACER' cach mail1;	yg0.1 = you1;
*	yg0.2 = 0.8*you1;
* PARAMETRE DU SCHEMA	yg0.3 = 0.5*you1;
*	nu12val = nu1;
bet = 0.25;	nu23val=nu1*1.1;
gam = 0.5;	nu13val=nu1*1.05;
dur = 100.e-6;	yg0.4= you1/(2.*(1.+nu1));
*cdt = 2.E-1 ;	yg0.5 = 0.9*yg0.4;
dt = 1.e-6;	yg0.6 = 0.8*yg0.4;
* implicite	vect1 = 0. 0. 1.;
gamd=0.5;	vect2 = 0. 1. 0.;
* explicite	moeort1 = MODEmail1 MECA ELAS ORTH;
*gamd = 0.;	mateort1 = MATE moeort1 DIRE vect1 vect2 PERP

Programme CAST3M du premier modèle d'endommagement orthotrope :

```
'YG1' yg0.1 'YG2' yg0.2 'YG3' yg0.3 'NU12'
                                                 mti = m1 ET clt;
                                                 *
nu12val
                                                 *
'NU23' nu23val 'NU13' nu13val 'G12' yg0.4
'G23' yg0.5 'G13' yg0.6 'ALP1' 0.
                                                 * CHARGEMENT
'ALP2' 0. 'ALP3' 0. 'RHO' rh1;
                                                 *impulsion en bout de plaque
* CHOIX DU MATERIAU
                                                 * charge en bout :
mo1 = moeort1;
                                                 *fo = 1.e6;
maca1 = mateort1;
                                                 * charge sur le cote :
*_
* CALCUL DU PAS DE TEMPS
                                                 fo = 3.e5;
                                                 * force :
toc = ((rh1)^{**}(0.5))/(1.^{*}((you1)^{**}(0.5)));
                                                 f = FORC FX (0.6*fo) FY (fo) FZ 0. S2;
MESS 'le pas de temps critique est :' toc ;
                                                 lit='PROG' 0. dt (2*dt) (3*dt) (1.5*dur);
                                                 lif = PROG 0. 1. 1. 0. 0.;
*dt = cdt*toc;
MESS 'le pas de temps utilise est :' dt;
                                                 evof = EVOL MANU t lit f(t) lif;
*
                                                 cha = CHAR f evof;
                                                 evof = evof 'COULEUR' roug;
* CONDITIONS AUX LIMITES
                                                 *___
                                                 * CONDITIONS INITIALES
* encastrement
                                                 *nulles
clt = BLOQ UX UY UZ fsur;
                                                 u = MANU CHPO mail 1 3 UX 0. UY 0. UZ 0.;
                                                 v = MANU CHPO mail1 3 UX 0. UY 0. UZ 0.;
*_
* MATRICE DE RIGIDITE
                                                 lid = PROG 0.;
                                                 liv = PROG 0.:
k1 = RIGIDITE mo1 maca1;
                                                 * INITIALISATION
                                                 *
* MATRICE DE MASSE
*
                                                 tab = 'TABLE';
*
                                                 tab.0 = 'TABLE';
SI (bet EGA 0.);
                                                 (tab.0).dep = 'EXTRAIRE' (u) UX (p4);
mas = LUMP (MASS mo1 maca1);
                                                 (tab.0).vit = 'EXTRAIRE' (v) UX (p4);
                                                 t = 0.;
SINO;
mas = MASS mo1 maca1;
                                                 lix = 'PROG' 0.;
FINS:
                                                 liec = 'PROG' 0.;
*
                                                 lied = 'PROG' 0.;
                                                 liet = 'PROG' 0.;
* M TILDE
                                                 liex = 'PROG' 0.;
*____
                                                 n=0;
                                                 fext = 'TIRE' cha t;
m1 = mas ET (bet * ((dt) * (2.)) * k1);
                                                 b = fext - (k1 * (u));
```

```
a = 'RESOUD' mti b;
                                                  dpf23.0 = 0. * idml; df23.0 = 0. * idml;
                                                  dpf13.0 = 0. * idml;df13.0 = 0. *idml;
ec = 0.;
ed = 0.;
                                                  * endommagement critique : dc
*
                                                  dc='TABLE';
*preparation des chml utiles :
                                                  dnc='TABLE';dcc = 'TABLE';
d0 = 'MANUEL' CHPO mail1 1 'SCAL' 0.;
                                                  const1 = 0.5;
id = 'MANUEL' CHPO mail1 1 'SCAL' 1.;
                                                  * par defaut : 0.23
d0ml = 'CHANGER' cham d0 mo1 'STRESSES';
                                                  dc.1 = const1; dnc.1 = dc.1 * idml; dcc.1 = dnc.1;
idml = 'CHANGER' cham id mo1 'STRESSES';
                                                  dc.2 = const1; dnc.2 = dc.2 * idml; dcc.2 = dnc.2;
idgr = 'CHANGER' 'GRAVITE' mo1 idml;
                                                  dc.3 = const1; dnc.3 = dc.3 * idml; dcc.3 = dnc.3;
dn = d0ml; dpoin = 0. * idml;
                                                  dc.4 = const1; dnc.4 = dc.4 * idml; dcc.4 = dnc.4;
                                                  dc.5 = const1; dnc.5 = dc.5 * idml; dcc.5 = dnc.5;
* INITIALISATION DES CARACTERISTIQUES
yg = 'TABLE';
                                                  dc.6 = const1; dnc.6 = dc.6 * idml; dcc.6 = dnc.6;
                                                  * deformation critique : epsec
yg.1 = idml * yg0.1;
                                                  epsec = 'TABLE';
yg.2 = idml * yg0.2;
                                                  epsec.1 = 0.25; epsec.2 = 0.25; epsec.3 = 0.25;
yg.3 = idml * yg0.3;
yg.4 = idml * yg0.4;
                                                  epsec.4 = 0.25; epsec.5 = 0.25; epsec.6 = 0.25;
                                                  * seuil de deformation : epses
yg.5 = idml * yg0.5;
yg.6 = idml * yg0.6;
                                                  epses = 'TABLE';
k1n=k1;
                                                  epses.1 = 0.03; epses.2 = 0.03; epses.3 = 0.03;
                                                  epses.4 = 0.03; epses.5 = 0.03; epses.6 = 0.03;
matn = maca1;
                                                  * parametres de la loi : a et tauc
                                                  aret = 'TABLE'; tauc = 'TABLE';
* MODELE D ENDOMMAGEMENT
                                                  aret.1 = 2.25; aret.2 = 2.25; aret.3 = 2.25; aret.4 =
* EFFET RETARD
                                                  2.25:
                                                  aret.5 = 2.25; aret.6 = 2.25;
* pour chaque direction :
                                                  tauc.1=2.e-5;tauc.2=2.e-5;tauc.3=2.e-5;
                                                  tauc.4=2.e-5;tauc.5=2.e-5;tauc.6=2.e-5;
* / /epse - epses
* . 1 - a < dc <-----> -d >
                                                  * pour anim
* d = ---(1 - e epsec - epses / / )
                                                  1 n p a s = 50;
* tauc
                                                  1 pas = (dc.1)'/' 1 npas;
                                                  liso = 'PROG' 0. PAS 1pas (dc.1);
* les variables : d point et d :
dpf1 = TABLE;df1 = TABLE;
dpf2 = TABLE; df2 = TABLE;
dpf3 = TABLE;df3 = TABLE;
                                                  * EXTRACTION DES COORDONNEES
                                                  * DANS LE MAILLAGE
dpf12 = TABLE; df12 = TABLE; dpf23 = TABLE;
df23 = TABLE; dpf13 = TABLE; df13 = TABLE;
dpn1 ='TABLE';
                                                  coox = 'COORDONNEE' 1 mail1;
dpf1.0 = 0. * idml; df1.0 = 0. * idml;
                                                  coox = 'CHANGER' CHAM coox mo1;
dpf2.0 = 0. * idml; df2.0 = 0. * idml;
                                                  cooy = 'COORDONNEE' 2 mail1;
dpf3.0 = 0. * idml; df3.0 = 0. * idml;
                                                  cooy = 'CHANGER' CHAM cooy mo1;
dpf12.0 = 0. * idml; df12.0 = 0. * idml;
                                                  cooz = 'COORDONNEE' 3 mail1;
```

cooz = 'CHANGER' CHAM cooz mo1;	fa2 = R1 'MASQUE' 'INFERIEUR' 0.;
*	fa2 = 'CHANGER' 'STRESSES' mo1 fa2;
*	* $df3.n = (fa1 * df3.n) '+' (fa2 * dcc.3);$
* BOUCLE SUR LE TEMPS	* endommagement : d12
*	R1 = 'CHANGER' 'GRAVITE' mo1 (dcc.4-
*	df12.n);
n=-1;	fa1 = R1 'MASQUE' 'SUPERIEUR' 0.;
*REPE bot 10;	fa1 = 'CHANGER' 'STRESSES' mo1 fa1;
REPE bot;	fa2 = R1 'MASQUE' 'INFERIEUR' 0.;
*—iteration	fa2 = 'CHANGER' 'STRESSES' mo1 fa2;
aca = a;	* $df12.n = (fa1 * df12.n) '+' (fa2 * dcc.4);$
ua = u;	* endommagement : d23
fa = fext;	R1 = 'CHANGER' 'GRAVITE' mo1 (dcc.5-
* eca = ec;	df23.n);
* $eda = ed$;	fa1 = R1 'MASQUE' 'SUPERIEUR' 0.;
t = t + dt;	fa1 = 'CHANGER' 'STRESSES' mo1 fa1;
n = n + 1;	fa2 = R1 'MASQUE' 'INFERIEUR' 0.;
'MESSAGE' ' ';	fa2 = 'CHANGER' 'STRESSES' mo1 fa2;
'MESSAGE' '+- PAS TEMPS ' n '+';	* $df23.n = (fa1 * df23.n) '+' (fa2 * dcc.5);$
'MESSAGE' ' * Temps = ' t '/ ' dur;	* endommagement : d13
*	R1 = 'CHANGER' 'GRAVITE' mo1 (dcc.6-
* endommagement : d1	df13.n);
R1 = 'CHANGER' 'GRAVITE' mo1 (dcc.1-df1.n);	fa1 = R1 'MASQUE' 'SUPERIEUR' 0.;
* trac R1 mo1;	fa1 = 'CHANGER' 'STRESSES' mo1 fa1;
fa1 = R1 'MASQUE' 'SUPERIEUR' 0.;	fa2 = R1 'MASQUE' 'INFERIEUR' 0.;
fa11 = 'CHANGER' 'STRESSES' mo1 fa1;	fa2 = 'CHANGER' 'STRESSES' mo1 fa2;
fa2 = R1 'MASQUE' 'INFERIEUR' 0.;	* $df13.n = (fa1 * df13.n) '+' (fa2 * dcc.6);$
fa21 = 'CHANGER' 'STRESSES' mo1 fa2;	*
* $df1.n = (fa11 * df1.n) '+' (fa21 * dcc.1);$	*—calcul des predicteurs
* 'TITRE' 'trace de df1.' n;	up = (u) + (dt * (v)) + ((0.5-bet)*((dt)**(2.))*(a));
* 'TRACER' df1.n mo1;	vp = (v) + ((1 gam) * dt * (a));
* 'LISTE' df1.n;	*initialisation pour la boucle sur l endommage
* endommagement : d2	ment :
R1 = 'CHANGER' 'GRAVITE' mo1 (dcc.2-df2.n);	dpn1 = TABLE;dpn2 = TABLE;
fa1 = R1 'MASQUE' 'SUPERIEUR' 0.;	dpn3 = TABLE;dpn12 = TABLE;
fa1 = 'CHANGER' 'STRESSES' mo1 fa1;	dpn23 = TABLE ;dpn13 = TABLE ;
fa2 = R1 'MASQUE' 'INFERIEUR' 0.;	i=0;
fa2 = 'CHANGER' 'STRESSES' mo1 fa2;	dpn1.i = 0. * idml; dpn2.i = 0. * idml;
df2.n = (fa1 * df2.n) '+' (fa2 * dcc.2);	dpn3.i = 0. * idml; dpn12.i = 0. * idml;
* endommagement : d3	dpn23.i = 0.*idml; dpn13.i = 0.*idml;
R1 = 'CHANGER' 'GRAVITE' mo1 (dcc.3-df3.n);	*
fa1 = R1 'MASQUE' 'SUPERIEUR' 0.;	* BOUCLE i SUR LE TAUX D ENDOMMAGE-
fa1 = 'CHANGER' 'STRESSES' mo1 fa1;	MENT

'REPETER' bouend 1;	m1 = mas ET (bet * ((dt)**(2.))* k1n);
'MESSAGE' ' - boucle sur le calcul	mti = m1 ET clt;
du taux d endommagement : ' (i+1);	a = RESO mti b;
* calcul de l'endommagement au pas de temps n+1 :	*calcul des deplacements
df1.(n+1) =df1.n '+'(dt*dpf1.n*(1gamd))	tab.n = 'TABLE';
'+'(gamd*dt *(dpn1.i));	u = up + (bet * ((dt) * (2.)) * a);
df2.(n+1) =df2.n '+'(dt*dpf2.n*(1gamd))	(tab.n).dep = EXTR (u) UX (p4);
'+'(gamd*dt *(dpn2.i));	*- TRACER DES CONTRAINTES DE VON
df3.(n+1) = df3.n '+'(dt*dpf3.n*(1gamd))	MISES
'+'(gamd*dt *(dpn3.i));	def1 = 'DEFORME' mail1 u 0.15;
df12.(n+1)=df12.n'+'(dt*dpf12.n*(1gamd))	sig1 = sigm mo1 matn u;
'+'(gamd*dt *(dpn12.i));	svm1 = VMIS mo1 matn sig1;
df23.(n+1) =df23.n'+'(dt*dpf23.n*(1gamd))	* 'TRACER' sig1 mo1 def1;
'+'(gamd*dt *(dpn23.i));	*—calcul des vitesses
df13.(n+1)=df13.n'+'(dt*dpf13.n*(1gamd))	v = vp + (gam * dt * a);
'+'(gamd*dt *(dpn13.i));	(tab.n).vit = EXTR(v) UX(p4);
	* taux de variation d endommagement : dpn1.i
i=i+1;	epsn = EPSI mo1 u matn;
*	ep = 'TABLE';
*—calcul de la matrice de rigidite k1n :	epxxn = 'EXCO' EPXX epsn 'SCAL';ep.1 =
yg.1 = (idml - df1.(n+1))*yg0.1;	epxxn;
yg.2 = (idml - df2.(n+1))*yg0.2;	epyyn = 'EXCO' EPYY epsn 'SCAL';ep.2 =
yg.3 = (idml - df3.(n+1))*yg0.3;	epyyn;
yg.4 = (idml - df12.(n+1))*yg0.4;	epzzn = 'EXCO' EPZZ epsn 'SCAL'; ep.3 = epzzn;
yg.5 = (idml - df23.(n+1))*yg0.5;	gaxyn = 'EXCO' GAXY epsn 'SCAL';ep.4 =
yg.6 = (idml - df13.(n+1))*yg0.6;	gaxyn;
*nu12val= nu1;	gayzn = 'EXCO' GAYZ epsn 'SCAL' ;ep.5 = gayzn ;
*nu23val=nu1*1.1;	gaxzn = 'EXCO' GAXZ epsn 'SCAL';ep.6 =
*nu13val=nu1*1.05;	gaxzn;
*moeort1 = MODE mail1 MECA ELAS ORTH;	* CALCUL DES DIFFERENTS D POINTS :
mateort1 = MATE moeort1 DIRE vect1 vect2 PERP	dpn1.j.i
'YG1' yg.1 'YG2' yg.2 'YG3' yg.3 'NU12' nu12val	j=0;
'NU23' nu23val 'NU13' nu13val 'G12' yg.4	'REPETER' botj3 6;
'G23' yg.5 'G13' yg.6 'ALP1' 0.	* calcul des 6 endommagement non corrigés ! ! !
'ALP2' 0. 'ALP3' 0. 'RHO' rh1;	j=j+1;
matn = mateort1;	dnc.j = dc.j*(ep.j+(-1.*epses.j*idml))/(epsec.j-
*— matrice de rigidite	epses.j);
k1n = 'RIGIDITE' mo1 matn;	*'TRACER' dnc mo1 'TITRE' 'dnc avant masque';
*	dprov = 'CHANGER' 'GRAVITE' mo1 dnc.j;
*—calcul du second membre	dprov = dprov 'MASQUE' 'SUPERIEURE' 0.;
fext = TIRE cha t;	dprov = 'CHANGER' 'STRESSES' mo1 dprov;
b = fext - (k1n * (up));	dnc.j= dprov *dnc.j;
*—resolution	dnc.j = 'CHANGER' 'GRAVITE' mo1 dnc.j;

<pre>dnc.j = 'CHANGER' 'STRESSES' mo1 dnc.j;</pre>	exp3 = dnc.4 '-' df12.(n+1);
*'TITRE' 'Damage non corrigé DNC.' j;	exp4 = 'CHAN' 'GRAVITE' mo1 exp3;
*'TRACER' liso dnc.j mo1 def1;	exp4 = exp4 'MASQUE' 'SUPERIEUR' 0.;
'FIN' botj3;	exp4 = 'CHAN' 'STRESSES' mo1 exp4;
<pre>**</pre>	exp2 = 'EXP' (-1. * aret.4 * exp4);
* CALCUL DES DIFFERENTS D POINT	dpn12.i = fa1 * (1./tauc.4)* ((1.*idml) '-' exp2);
*	* calcul de d point 23 :
* calcul de d point 1 :	R1 = 'CHAN' 'GRAVITE' mo1 (dcc.5-df23.(n+1));
R1 = 'CHAN' 'GRAVITE' mo1 (dcc.1-df1.(n+1));	fa1 = R1 'MASQUE' 'SUPERIEUR' 0.;
fa1 = R1 'MASQUE' 'SUPERIEUR' 0.;	fa1 = 'CHAN' 'STRESSES' mo1 fa1;
fa1 = 'CHAN' 'STRESSES' mo1 fa1;	exp3 = dnc.5 '-' df23.(n+1);
exp3 = dnc.1 '-' df1.(n+1);	exp4 = 'CHAN' 'GRAVITE' mo1 exp3;
exp4 = 'CHAN' 'GRAVITE' mol exp3;	<pre>exp4 = exp4 'MASQUE' 'SUPERIEUR' 0.;</pre>
exp4 = exp4 'MASQUE' 'SUPERIEUR' 0.;	exp4 = 'CHAN' 'STRESSES' mo1 exp4;
exp4 = 'CHAN' 'STRESSES' mol exp4;	exp2 ='EXP' (-1. * aret.5 * exp4);
exp2 = 'EXP' (-1. * aret.1 * exp4);	dpn23.i = fa1 * (1./tauc.5)* ((1.*idml) '-' exp2);
<pre>dpn1.i = fa1 * (1./tauc.1) * ((1.*idml) '-' exp2);</pre>	* calcul de d point 13 :
*'TITRE' 'D point dpn1.' i '/ 3';	R1 = 'CHAN' 'GRAVITE' mo1 (dcc.6-df13.(n+1));
*'TRACER' dpn1.i mo1;	fa1 = R1 'MASQUE' 'SUPERIEUR' 0. ;
* calcul de d point 2 :	fa1 = 'CHAN' 'STRESSES' mo1 fa1 ;
R1 = 'CHAN' 'GRAVITE' mo1 (dcc 2-df2 (n+1));	evp3 = dpc 6 '-' df13 (n+1);
R1 = CHAN GRAVITE mot (dcc.2-dr2.(n+1)),	exp3 = dif(.0 - dif(3.(ii+1)),
fa1 = R1 'MASQUE' 'SUPERIEUR' 0.;	exp4 = 'CHAN' 'GRAVITE' mo1 exp3;
fa1 = 'CHAN' 'STRESSES' mol fa1;	exp4 = exp4 'MASQUE' 'SUPERIEUR' 0.;
exp3 = dnc.2 '-' df2.(n+1);	exp4 = 'CHAN' 'STRESSES' mo1 exp4;
exp4 = 'CHAN' 'GRAVITE' mol exp3;	exp2 = 'EXP' (-1 * aret 5 * exp4):
exp4 = cHAV GRAVITE horeaps;	<pre>cxp2 = LXI ('1.' arct.3' cxp4),</pre>
exp4 = exp4 'MASQUE' 'SUPERIEUR' 0.;	dpn13.i = fa1 * (1./tauc.6)* ((1.*idml) '-' exp2);
exp4 = 'CHAN' 'STRESSES' mo1 exp4;	*
exp2 = 'EXP' (-1. * aret.2 * exp4);	*test de sortie : convergence du calcul
dpn2.i = fa1 * (1./tauc.2)* ((1.*idml) '-' exp2);	*- 'SI' (('ABS' (dpn1.i-dpn1.(i-1))) < (0.01);
<pre>* calcul de d point 3 :</pre>	* QUITTER bouend;
R1 = 'CHAN' 'GRAVITE' mo1 (dcc.3-df3.(n+1));	* 'FINSI';
fa1 = R1 'MASQUE' 'SUPERIEUR' 0.;	'TITRE' 'D point';
fa1 = 'CHAN' 'STRESSES' mo1 fa1;	*'TRACER' dpn1.i mo1;
exp3 = dnc 3'-' df3 (n+1);	'EIN' bouend:
exp3 = diff(n+1); exp4 = 'CHAN' 'GRAVITE' mo1 exp3; exp4 = exp4 'MASQUE' 'SUPERIEUR' 0.; exp4 = 'CHAN' 'STRESSES' mo1 exp4; exp2 = 'EXP' (-1. * aret.3 * exp4);	 * * FIN BOUCLE SUR ENDOMMAGEMENT * * le dommage au temps n+1 est : d point et d :
dpn3.i = fa1 * (1./tauc.3)* ((1.*idml) '-' exp2);	dpf1.(n+1) = dpn1.i;
* calcul de d point 12 :	dpf2.(n+1) = dpn2.i;
R1 = 'CHAN' 'GRAVITE' mo1 (dcc.4-df12.(n+1));	dpf3.(n+1) = dpn3.i;
fa1 = R1 'MASQUE' 'SUPERIEUR' 0.;	dpf12.(n+1) = dpn12.i;
fa1 = 'CHAN' 'STRESSES' mo1 fa1;	dpf23.(n+1) = dpn23.i;

```
fa2 = 'CHANGER' 'STRESSES' mo1 fa2;
dpf13.(n+1) = dpn13.i;
                                               df3.(n+1) = (fa1 * df3.(n+1)) '+' (fa2 * dcc.3);
* les endommagements sont :
df1.(n+1) = df1.n'+'(dt*dpf1.n*(1.-gamd))
                                               df3.(n+1) = 'CHAN' 'GRAVITE' mo1 df3.(n+1);
'+'(gamd*dt*dpf1.(n+1));
                                               df3.(n+1) = 'CHAN' 'STRESSES' mo1 df3.(n+1);
df2.(n+1) = df2.n'+'(dt*dpf2.n*(1.-gamd))
                                                * endommagement : d12
'+'(gamd*dt*dpf2.(n+1));
                                               R1 = (dcc.4 - df12.(n+1));
                                               R1 = 'CHANGER' 'GRAVITE' mo1 R1;
df3.(n+1) = df3.n'+'(dt*dpf3.n*(1.-gamd))
                                               fa1 = R1 'MASQUE' 'SUPERIEUR' 0.;
'+'(gamd*dt*dpf3.(n+1));
df12.(n+1) = df12.n'+'(dt*dpf12.n*(1.-gamd))
                                               fa1 = 'CHANGER' 'STRESSES' mo1 fa1;
'+'(gamd*dt*dpf12.(n+1));
                                               fa2 = R1 'MASQUE' 'INFERIEUR' 0.;
df23.(n+1) = df23.n'+'(dt*dpf23.n*(1.-gamd))
                                               fa2 = 'CHANGER' 'STRESSES' mo1 fa2;
'+'(gamd*dt*dpf23.(n+1));
                                               df12.(n+1) = (fa1 * df12.(n+1)) '+' (fa2 * dcc.4);
df13.(n+1) = df13.n'+'(dt*dpf13.n*(1.-gamd))
                                               df12.(n+1) = 'CHAN' 'GRAVITE' mo1 df12.(n+1);
'+'(gamd*dt*dpf13.(n+1));
                                               df12.(n+1) = 'CHAN' 'STRESSES'
                                                                                         mo1
*
                                               df12.(n+1);
* endommagement : d1
                                               * endommagement : d23
R1 = (dcc.1 - df1.(n+1));
                                               R1 = (dcc.5 - df23.(n+1));
R1 = 'CHANGER' 'GRAVITE' mo1 R1:
                                               R1 = 'CHANGER' 'GRAVITE' mo1 R1:
* 'TITRE' 'dcc-df1.(n+1) GRAVITE';
                                               fa1 = R1 'MASQUE' 'SUPERIEUR' 0.;
* 'TRACER' R1 mo1;
                                               fa1 = 'CHANGER' 'STRESSES' mo1 fa1;
                                               fa2 = R1 'MASQUE' 'INFERIEUR' 0.;
fa1 = R1 'MASQUE' 'SUPERIEUR' 0.;
fa1 = 'CHANGER' 'STRESSES' mo1 fa1;
                                               fa2 = 'CHAN' 'STRESSES' mo1 fa2;
fa2 = R1 'MASQUE' 'INFERIEUR' 0.;
                                               df23.(n+1) = (fa1 * df23.(n+1)) '+' (fa2 * dcc.5);
fa2 = 'CHANGER' 'STRESSES' mo1 fa2;
                                               df23.(n+1) = 'CHAN' 'GRAVITE' mo1 df23.(n+1);
df1.(n+1) = (fa1 * df1.(n+1))'+'(fa2 * dcc.1);
                                               df_{23.(n+1)} = 'CHAN' 'STRESSES'
                                                                                         mo1
df1.(n+1) = 'CHAN' 'GRAVITE' mo1 df1.(n+1);
                                               df23.(n+1);
df1.(n+1) = 'CHAN' 'STRESSES' mo1 df1.(n+1);
                                               * endommagement : d13
                                               R1 = (dcc.6-df13.(n+1));
* endommagement : d2
                                               R1 = 'CHANGER' 'GRAVITE' mo1 R1;
R1 = (dcc.2-df2.(n+1));
R1 = 'CHANGER' 'GRAVITE' mo1 R1;
                                               fa1 = R1 'MASQUE' 'SUPERIEUR' 0.;
fa1 = R1 'MASOUE' 'SUPERIEUR' 0.;
                                               fa1 = 'CHANGER' 'STRESSES' mo1 fa1;
fa1 = 'CHANGER' 'STRESSES' mo1 fa1;
                                               fa2 = R1 'MASQUE' 'INFERIEUR' 0.;
fa2 = R1 'MASQUE' 'INFERIEUR' 0.;
                                               fa2 = 'CHANGER' 'STRESSES' mo1 fa2;
fa2 = 'CHANGER' 'STRESSES' mo1 fa2;
                                               df13.(n+1) = (fa1 * df13.(n+1)) '+' (fa2 * dcc.6);
                                               df13.(n+1) = 'CHAN' 'GRAVITE' mo1 df13.(n+1);
df2.(n+1) = (fa1 * df2.(n+1))'+'(fa2 * dcc.2);
df2.(n+1) = 'CHAN' 'GRAVITE' mol df2.(n+1);
                                               df13.(n+1) = 'CHAN' 'STRESSES'
                                                                                         mo1
df2.(n+1) = 'CHAN' 'STRESSES' mol df2.(n+1);
                                               df13.(n+1);
* endommagement : d3
R1 = (dcc.3-df3.(n+1));
                                               h=n+1;
R1 = 'CHANGER' 'GRAVITE' mo1 R1;
                                               dtot = ((df1.h)^{**2.})' + ((df2.h)^{**2.})' + ((df3.h)^{**2.});
fa1 = R1 'MASQUE' 'SUPERIEUR' 0.;
                                               dtot=dtot'+'((df12.h)**2.)'+'((df23.h)**2.)
fa1 = 'CHANGER' 'STRESSES' mo1 fa1;
                                               '+'((df13.h)**2.);
fa2 = R1 'MASQUE' 'INFERIEUR' 0.;
                                               dtot=dtot/6;
```

 $dtot=dtot^{**}.5;$

'TITRE' 'Endommagement au temps ' t ; *'TRACER' liso dtot mo1 def1 ;

'TITRE' 'Endommagement' 1' au temps ' t; 'TRACER' liso df1.(n+1) mo1 def1; 'TITRE' 'Endommagement' 2' au temps ' t ; 'TRACER' liso df2.(n) mo1 def1; 'TITRE' 'Endommagement' 3' au temps ' t; 'TRACER' liso df3.(n) mo1 def1; 'TITRE' 'Endommagement' 12' au temps ' t; 'TRACER' liso df12.(n) mo1 def1; 'TITRE' 'Endommagement' 23' au temps ' t ; 'TRACER' liso df23.(n) mo1 def1; 'TITRE' 'Endommagement' 13' au temps ' t; 'TRACER' liso df13.(n) mo1 def1; *-test de sortie SI (t > dur); QUITTER bot; FINSI; *—fin boucle FIN bot;

* * FIN BOUCLE SUR LE TEMPS * POST TRAITEMENT *_ * def1 = 'DEFORME' mail1 u 1.; sig1 = sigm mo1 maca1 u;svm1 = VMIS mo1 maca1 sig1; * 'TRACER' svm1 mo1 def1; dept = EVOL MANU x lix f(x) lid; vitt = EVOL MANU x lix f(x) liv; MESS 'Calcul dynamique schema de newmark'; MESS 'gamma =' gam; MESS 'beta =' bet ; MESS 'le pas de temps critique est :' toc ; MESS 'duree du calcul ' dur; MESS 'nombre de pas de temps = ' n; *OPTI DONN 5; *fin;

Annexe D

Jeu de données EUROPLEXUS ODM

Le jeu de données EUROPLEXUS suivant correspond au calcul de validation de l'implémentation de ODM pour un essai de traction sur un composite.

cube thomas Menouillard 14/02/05 Validation du modele ODM	GEOM CUB8 mail1
ЕСНО	TERM
*	*
*_ maillage	*_ materiau
*	*
	_
GIBI 9 mail1	MATERIAU
TRIDIMENSIONNEL NONLINEAIRE	* materiau onera damage
LAGC GHOST	model
*	ODMS
_	RO 900
*– dimensions	YG1 1000, YG2 500, YG3 80,
*	NU12 0.173 NU13 0.26 NU23 0.1
_	G12 850, G13 400, G23 200,
DIMENSION	DCN1 0.02 DCN2 0.02 DCN3 0.
PT4L 500 ZONE 2 CUB8 500	DCT1 0.02 DCT2 0.02 DCT3 0.
BLOO 8000 GLIS 1 400 DEPL 100 FORC	YON1 2.E5 YON2 2.E5 YON3 2.E5
10	YCN1 25000. YCN2 25000. YCN3 12.
ECRO 300 TABL 1 6	YOT1 2.E5 YOT2 2.E5 YOT3 0.E5
TERM	YCT1 25000. YCT2 25000. YCT3 0.
*	PN1 1.2 PN2 1.2 PN3 2.
	PT1 1.2 PT2 1.2 PT3 0.
*- geometrie	HN1 1. HN2 1. HN3 1. HP1 0.5 HP2 0.5
*	HP3 0.7
_	HHP1 0.7 HHP2 0.7 HHP3 0.7

XSI1 3.2 XSI2 3.2 XSI3 0.	*– liaisons
AIF1 0.5 AIF2 0.5 AIF3 0.5	*
DEO1 0.1 DEO2 0.1 DEO3 0.04	
B1 1. B2 0. B3 1. B4 0. B5 0. B6 0.	BLOQ 3 LECT 5 6 7 8 TERM
! effet retard endommagements matriciels	BLOQ 2 LECT 1 5 8 4 TERM
TAU1 0.2E-6 TAU2 0.2E-6 TAU3 0.2E-6	BLOQ 1 LECT 1 2 5 6 TERM
A1 2.25 A2 2.25 A3 2.25	*
LATE 0 GHOS 0	*– chargement, vitesse
! endommagements de fibre	
DCF1 10. DCF2 0. DCF3 0. DCF4 0.	CHAR 1 FACTO 2
YFO1 5.1079 YFO2 1.E4 YFO3 1.E4	* traction direction 1 :
YFO4 1.E5	DEPL 1 15.E-1 LECT 3 4 8 7 TERM
YFC1 10. YFC2 2.E8 YFC3 2.E8 YFC4	TABLE 6
2.E8	0. 0.
PF1 1.5 PF2 1. PF3 1. PF4 1.	100. 0.25
HF11 1. HF21 0. HF31 0. HF41 0.	2000.25
HF51 0. HF61 0. HF71 0. HF81 0.45 HF91	300. 0.5
0.7	4000.5
HF12 0. HF22 0. HF32 0. HF42 0.	500.1 1.
HF52 0. HF62 0. HF72 0. HF82 0. HF92 0.	*
HF13 0. HF23 0. HF33 0. HF43 0. HF53 0.	*– ecriture
HF63 0. HF73 0. HF83 0. HF93 0.	*
HF14 0. HF24 0. HF34 0. HF44 0. HF54 0.	ECRITURE CONT ECRO DEPLA FREQ
HF64 0. HF74 0. HF84 0. HF94 0.	1000
AF1 2.05 TOF1 0.006 AF2 2.05 TOF2	POINTS LECT 1 PAS 1 8 TERM
0.006	ELEM LECT 1 TERM
AF3 2.05 TOF3 0.006 AF4 2.05 TOF4	FICHIER alic TEMPS 11 FREQ 100
0.006	POINTS LECT 1 PAS 1 8 TERM
RDC1 10.96 RDC2 10.96 RDC3 10.97	ELEM LECT 1 TERM
RDC4 10.98	OPTION
EPS1 0.9 EPS2 -0.91 EPS3 0.92 EPS4 -	*
0.93	*– calcul
LECT TOUS	*
COMPLEMENT	CALCUL TINI 0. DTMAX 2.E-2 TFIN
MORTHO	500.
AXE1 0.707 -0.707 0 AXE2 0.707 .707 0	SUITE
LECT TOUS	==== DESSIN ====
*	

Bibliographie

[ADA 99] ADALSTEINSSON D., SETHIAN J.

The fast construction of extension velocities in level set methods. *Journal of Computational Physics*, 1999, vol. 148, n° 1, p. 2–22.

[ALI 02] ALIABADI M.

The boundary element method : Applications in Solids and Structures. Chichester : Wiley, 2002. 580p.

- [ALL 95] ALLIX O., LADEVÈZE P. Damage analysis of interlaminar fracture specimens. *Composite Structures*, 1995, vol. 31, p. 61–74.
- [ALL 97] ALLIX O., DEU J.

Delayed-damage modelling for fracture prediction of laminated composites under dynamic loading. *Engineering Transactions/Rozprawy Inzynierskie*, 1997, vol. 45, n° 1, p. 29–46.

[ALL 03] ALLIX O., FEISSEL P., THÉVENET P. A delay damage mesomodel of laminates under dynamic loading : basic aspects and identification issues. *Computers and Structures*, 2003, vol. 81, nº 12, p. 1177–1191.

[ATL 85] ATLURI S., NISHIOKA T. Numerical studies in dynamic fracture mechanics. *International Journal of Fracture*, 1985, vol. 27, nº 3, p. 245–261.

[BAB 97] BABUSKA I., MELENK J. The partition of unity method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1997, vol. 40, nº 4, p. 727–758.

[BAR 59] BARENBLATT G.

The formation of equilibrium cracks during brittle fracture : general ideas and hypotheses, axially symmetric cracks. *J. Appl. Math. Mech*, 1959, vol. 23, n^o 3, p. 622–636.

[BAR 62] BARENBLATT G.

The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Advances in Applied Mechanics*, 1962, vol. 7, n^o 2, p. 55–129.

[BAT 82] BATHE K.

Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Englewood Cliffs : Prentice-Hall, 1982. 745p.

- [BAZ 78] BAZANT Z., GLAZIK J., ACHENBACH J. Elastodynamic fields near running cracks by finite elements. *Computers and Structures*, 1978, vol. 8, p. 193–198.
- [BEC 05] BECHET E., MINNEBO H., MOËS N., BURGARDT B. Improved implementation and robustness study of the X-FEM for stress analysis around cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, vol. 64, nº 8, p. 1033–1056.
- [BEL 89] BELYTSCHKO T., LASRY D. A study of localization limiters for strain-softening in statics and dynamics. *Computers and Structures*, 1989, vol. 33, nº 3, p. 707–715.
- [BEL 94a] BELYTSCHKO T., GU L., LU Y. Fracture and crack growth by element-free Galerkin methods. *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng*, 1994, vol. 2, p. 519–534.
- [BEL 94b] BELYTSCHKO T., LU Y., GU L. Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, vol. 37, n^o 2, p. 229–256.
- [BEL 95a] BELYTSCHKO T., LU Y., GU L. Crack propagation by element-free Galerkin methods. *Eng. Fract. Mech.(USA)*, 1995, vol. 51, nº 2, p. 295–315.
- [BEL 95b] BELYTSCHKO T., ORGAN D., KRONGAUZ Y. A coupled finite element-element-free Galerkin method. *Computational Mechanics*, 1995, vol. 17, n^o 3, p. 186–195.
- [BEL 96] BELYTSCHKO T., TABBARA M. Dynamic fracture using element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1996, vol. 39, nº 6, p. 923–938.
- [BEL 99] BELYTSCHKO T., BLACK T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, vol. 45, n^o 5, p. 601–620.
- [BEL 00] BELYTSCHKO T., LIU W., MORAN B. Nonlinear finite elements for continua and structures. New York : Wiley, 2000. 650p.
- [BEL 01] BELYTSCHKO T., MOËS N., USUI S., PARIMI C. Arbitrary discontinuities in finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, vol. 50, p. 993–1013.
- [BEL 03] BELYTSCHKO T., PARIMI C., MOËS N., SUKUMAR N., USUI S. Structured extended finite element methods for solids defined by implicit surfaces. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, vol. 56, p. 609–635.
- [BLA 81] BLANDFORD G., INGRAFFEA A., LIGGETT J. Two-dimensional stress intensity factor computations using the boundary element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1981, vol. 17, p. 387–404.

- [BOR 85] DE BORST R., NAUTA P. Non-orthogonal cracks in a smeared finite element model. *Engineering computations*, 1985, vol. 2, nº 1, p. 35–46.
- [BOR 93] DE BORST R., SLUYS L., MÜHLHAUS H., PAMIN J. Fundamentals issues in finite element analyses of localization of deformation. *Engineering computations*, 1993, vol. 10, nº 2, p. 99–121.
- [BOR 96] DE BORST R., BENALLAL A., HEERES O. A gradient-enhanced damage approach to fracture. *Journal de physique IV*, 1996, vol. 6, nº 6, p. 6–6.
- [BOR 97] DE BORST R. Some recent developments in computational modelling of concrete fracture. *International Journal of Fracture*, 1997, vol. 86, nº 1, p. 5–36.
- [BOR 98] DE BORST R., VAN DER GIESSEN E. Material instabilities in solids. Chichester : Wiley, 1998. 556p.
- [BOR 03] DE BORST R.
 - Numerical aspects of cohesive-zone models. *Engineering Fracture Mechanics*, 2003, vol. 70, n^o 14, p. 1743–1757.
- [BOR 04] DE BORST R., GUTIÉRREZ M., WELLS G., REMMERS J., ASKES H. Cohesive-zone models, higher-order continuum theories and reliability methods for computational failure analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, vol. 60, p. 289–315.
- [BOR 06a] BORDAS S., MORAN B. Enriched finite elements and level sets for damage tolerance assessment of complex structures. *Engineering fracture mechanics*, 2006, vol. 73, n^o 9, p. 1176–1201.
- [BOR 06b] DE BORST R., REMMERS J., NEEDLEMAN A. Mesh-independent discrete numerical representations of cohesive-zone models. *Engineering fracture mechanics*, 2006, vol. 73, nº 2, p. 160–177.
- [BUI 78] BUI H. *Mécanique de la rupture fragile*. Paris : Masson, 1978. 215p.
- [BUI 92] BUI H., MAIGRE H., RITTEL D. A new approach to the experimental determination of the dynamic stress intensity factor. *International Journal of Solids and Structures*, 1992, vol. 29, n^o 23, p. 2881– 2895.
- [CAM 96] CAMACHO G., ORTIZ M.
 - Computational modelling of impact damage in brittle materials. *International Journal of Solids and Structures*, 1996, vol. 33, n^o 20, p. 2899–2938.
- [CAR 00] CARIN Y.
 - Modélisation de la propagation dynamique de fissure. Thèse de doctorat, Paris : École Nationale des Ponts et chaussées, 2000. 141p.

- [CHA 96] CHABOCHE J., LESNE P., MAIRE J. A constitutive and damage model mixing scalar and tensorial damage variables. Academie des Sciences(Paris), Comptes Rendus, Serie II b,, 1996, vol. 322, p. 187–193.
- [CHA 01] CHABOCHE J., MAIRE J.

New progress in micromechanics-based CDM models and their application to CMCs. *Composites Science and Technology*, 2001, vol. 61, n^o 15, p. 2239–2246.

[COR 96] CORDES L., MORAN B.

Treatment of material discontinuity in the Element-Free Galerkin method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, vol. 139, n^o 1, p. 75–89, Elsevier Science.

[DEB 84] DE BORST R., VERMEER P.

Possibilities and limitations of finite elements for limit analysis. *Geotechnique*, 1984, vol. 34, p. 199–210.

[DEL 82] DELORENZI H.

On the energy release rate and the J-integral for 3-D crack configurations. *International Journal of Fracture*, 1982, vol. 19, n° 3, p. 183–193.

[DEL 85] DELORENZI H.

Energy Release Rate Calculations by the Finite Element Method. *Eng. Fract. Mech.*, 1985, vol. 21, n^o 1, p. 129–143.

[DOL 98] DOLBOW J., BELYTSCHKO T. An introduction to programming the meshless element free Galerkin method. Archives of Computational Methods in Engineering, 1998, vol. 5, nº 3, p. 207–241.

[DOL 00] DOLBOW J., MOËS N., BELYTSCHKO T.

Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method. *Finite Elements in Analysis and Design(0168-874 X)*, 2000, vol. 36, n^o 3, p. 235–260.

[DOL 01] DOLBOW J., MOËS N., BELYTSCHKO T. An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, vol. 190, n^o 51, p. 6825–6846.

[DUA 01] DUARTE C., HAMZEH O., LISZKA T., TWORZYDLO W. A generalized finite element method for the simulation of three-dimensional dynamic crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, vol. 190, nº 15, p. 2227–2262.

[DUF 07] DUFLOT M.

A study of the representation of cracks with level sets. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2007, vol. 70, n^o 11, p. 1261-1302.

[DUG 60] DUGDALE D.

Yielding of steel sheets containing slits. J. Mech. Phys. Solids, 1960, vol. 8, n^o 2, p. 100–104.

[ELG 06a] ELGUEDJ T.

Simulation numérique de la propagation de fissure en fatigue par la méthode des éléments finis étendus : prise en compte de la plasticité et du contact-frottement. Thèse de doctorat, Villeurbanne : INSA de Lyon, 2006. 168p.

[ELG 06b] ELGUEDJ T., GRAVOUIL A., COMBESCURE A.

Appropriate extended functions for X-FEM simulation of plastic fracture mechanics. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 2006, vol. 195, n^o 7-8, p. 501–515.

- [FAL 01] FALK M., NEEDLEMAN A., RICE J. A critical evaluation of cohesive zone models of dynamic fracture. *Journal de physique IV*, 2001, vol. 85.
- [FEE 95] FEENSTRA P., DE BORST R.

A plasticity model and algorithm for mode-I cracking in concrete. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and Geomechanics Abstracts*, 1995, vol. 32, n° 8, p. 374A–374A.

[FLE 97] FLEMING M., CHU Y., MORAN B., BELYTSCHKO T. Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1997, vol. 40, nº 8, p. 1483–1504.

[FRE 78] FREUND L.

Stress Intensity Factor Calculations Based on a Conservation Integral. *International Journal of Solids and Structures*, 1978, vol. 14, nº 3, p. 241–250.

[FRE 98] FREUND L.

Dynamic Fracture Mechanics. Cambridge : Cambridge University Press, 1998. 563p.

- [GEE 98] GEERS M., DE BORST R., BREKELMANS W., PEERLINGS R. Strain-based transient-gradient damage model for failure analyses. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1998, vol. 160, n^o 1, p. 133–153.
- [GEE 00] GEERS M., DE BORST R., PEERLINGS R. Damage and crack modeling in single-edge and double-edge notched concrete beams. *Engineering Fracture Mechanics*, 2000, vol. 65, n° 2-3, p. 247–261.

```
[GER 99] GERLACH C.
Computational methods for the dynamic response of cracked specimens. Thèse de
doctorat, Chicago, US : Northwestern University, 1999. 130p.
```

[GRA 02] GRAVOUIL A., MOËS N., BELYTSCHKO T. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets - Part II : Level set update. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, vol. 53, p. 2569–2586.

[GRÉ 07] GRÉGOIRE D., MAIGRE H., RÉTHORÉ J., COMBESCURE A. Dynamic crack propagation under mixed-mode loading - Comparison between experiments and X-FEM simulations. *International Journal of Solids and Structures*, 2007, vol. 44, nº 20, p. 6517–6534.

```
[GRI 21] GRIFFITH A.
```

The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 1921, vol. 221, p. 163–198.

[GUE 05] GUETARI Y., LE CORRE S., MOËS N. Etude des possibilites de la methode X-FEM pour la simulation numerique de la coupe. *Mecanique & Industries*, 2005, vol. 6, p. 315–319.

[HAN 04] HANSBO A., HANSBO P.

A finite element method for the simulation of strong and weak discontinuities in solid mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics And Engineering*, 2004, vol. 193, p. 3523-3540.

[HIL 76] HILLERBORG A., MODEER M., PETERSSON P. et al.

Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 1976, vol. 6, n^o 6, p. 773–782.

[HUG 87] HUGHES T.

The finite element method. Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall, 1987. 803p.

[HUL 74] HULT J.

Creep in continua and structures. *In Zeman J.L., Ziegler F. ed. Topics in applied continuum mechanics* Symposium Vienna, march 1-2, 1974. Wien : Springer-Verlag, 1974, p. 137–155.

[HUS 74] HUSSAIN M., PU S., UNDERWOOD J.

Strain energy release rate for a crack under combined mode I and mode II. *ASTM*, *STP*, 1974, vol. 560, p. 2–28.

[IRW 57] IRWIN G.

Analysis of stresses and stains near the end of a crack transverse a plate. *Journal of Applied Mechanics*, 1957, vol. 24, p. 361–364.

[JAN 77] JANSON J., HULT J.

Fracture mechanics and damage mechanics- A combined approach. (*International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, 14 th, Delft, Netherlands, Aug. 30-Sept. 4, 1976.*) Journal de Mecanique Appliquée,, 1977, vol. 1, nº 1, p. 69–84.

```
[KAN 85] KANNINEN M., POPELAR C.
```

Advanced fracture mechanics. New York : Oxford University Press New York, 1985. 563p.

[KRY 97] KRYSL P., BELYTSCHKO T.

Element-free Galerkin method : Convergence of the continuous and discontinuous shape functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1997, vol. 148, n° 3-4, p. 257–277.

[KRY 99] KRYSL P., BELYTSCHKO T. The Element Free Galerkin Method for Dynamic Propagation of Arbitrary 3-D Cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, vol. 44, n^o 6, p. 767–780.

[KUH 00] KUHL E., RAMM E., DE BORST R.

An anisotropic gradient damage model for quasi-brittle materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, vol. 183, n^o 1, p. 87–103.

[LAD 95] LADEVEZE P.

A damage computational approach for composites : Basic aspects and micromechanical relations. *Computational Mechanics*, 1995, vol. 17, n^o 1, p. 142–150.

[LAS 88] LASRY D., BELYTSCHKO T. Localization limiters in transient problems. *International Journal of Solids and Structures*, 1988, vol. 24, nº 6, p. 581–597.

[LEM 90] LEMAÎTRE J., CHABOCHE J. Mechanics of Solid Materials. Cambridge : Cambridge University Press, 1990. 556p.

[LU 94] LU Y., BELYTSCHKO T., GU L.

A new implementation of the element free Galerkin method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 1994, vol. 113, n° 3-4, p. 397–414.

[LU 95] LU Y., BELYTSCHKO T., TABBARA M.

Element-free Galerkin method for wave propagation and dynamic fracture. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1995, vol. 126, n^o 1, p. 131–153.

[MAI 85] MAIGRE H., RITTEL D.

Dynamic fracture detection using the force-displacement reciprocity : application to the compact compression specimen. *International Journal of Fracture*, 1985, vol. 73, n^o 1, p. 67–79.

[MAI 92a] MAIGRE H., RITTEL D., BUI H.

Détermination expérimentale de la tenacité dynamique des matériaux fragiles : une nouvelle approche. *Mécanique, matériaux, électricité*, 1992, , n° 445, p. 8–11, Science et Industrie.

[MAI 92b] MAIRE J.

Etudes théorique et expérimentale du comportement de matériaux composites en contraintes planes. Thèse de doctorat, Besançon : Université de Besançon, 1992. 341p.

[MAI 93] MAIGRE H., RITTEL D.

Mixed-mode quantification for dynamic fracture initiation : application to the compact compression specimen. *International Journal of Solids and Structures*, 1993, vol. 30, n^o 23, p. 3233–3244.

[MAI 95] MAIRE J., LESNE O., LESNE P.

Effets de la désactivation de l'endommagement dans les composites à matrice céramique. rapport, 1995, Tiré à part- Office national d'études et de recherches aerospatiales. Chatillon : Office national d'études et de recherches aérospatiales.

[MAI 98] MAIRE J., LESNE P.

An Explicit Damage Model for the Design of Composites Structures. *Composites Science and Technology*, 1998, vol. 58, n^o 5, p. 773–778.

- [MAL 95] MALLADI R., SETHIAN J., VEMURI B. Shape modeling with front propagation : a level set approach. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1995, vol. 17, n^o 2, p. 158–175.
- [MEL 96] MELENK J., BABUSKA I. Partition of unity finite element method : basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, vol. 139, nº 1, p. 289–314.
- [MEN 06a] MENOUILLARD T., ELGUEDJ T., COMBESCURE A. Mixed-mode stress intensity factors for graded materials. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, vol. 43, nº 7-8, p. 1946–1959.
- [MEN 06b] MENOUILLARD T., RÉTHORÉ J., BUNG H., SUFFIS A. Composite blade damaging under impact. J. Phys. IV France, 2006, vol. 134, p. 409– 415.
- [MEN 06c] MENOUILLARD T., RÉTHORÉ J., COMBESCURE A., BUNG H. Efficient explicit time stepping for the eXtended Finite Element Method (X-FEM). *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2006, vol. 68, n^o 9, p. 911–939.
- [MEN 07a] MENOUILLARD T., MOËS N., COMBESCURE C. An optimal explicit time stepping for cracks modelled with X-FEM. *IUTAM Symposium on Discretisation Methods for Evolving Discontinuities*, 2007, vol. 5, Springer.
- [MEN 07b] MENOUILLARD T., RÉTHORÉ J., MOËS N., COMBESCURE A., BUNG H. Mass lumping strategies for X-FEM explicit dynamics : application to crack propagation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, in press, 2007.

```
[MI 92] MI Y., ALIABADI M.
Dual boundary element method for three-dimensional fracture mechanics analysis. Engineering analysis with boundary elements, 1992, vol. 10, n<sup>o</sup> 2, p. 161–171.
```

[MOË 99] MOËS N., DOLBOW J., BELYTSCHKO T. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, vol. 46, n^o 1, p. 131–150.

[MOË 02a] MOËS N., BELYTSCHKO T.
 « XFEM, de nouvelles frontières pour les éléments finis». Revue européenne des éléments finis, 2002, vol. 11, p. 305–318.

[MOË 02b] MOËS N., BELYTSCHKO T. Extended finite element method for cohesive crack growth. *Engineering Fracture Me-chanics*, 2002, vol. 69, nº 7, p. 813–833.

[MOË 02c] MOËS N., GRAVOUIL A., BELYTSCHKO T. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets - Part I : Mechanical model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, vol. 53, p. 2549–2568.

[MUR 82] MURAKAMI S. Notion of Continuum Damage Mechanics and Its Application to Anisotropic Creep Damage Theory. In Baylac B. ed. Inelastic Analysis and Life Prediction in Elevated Temperature Design : presented at the Pressure Vessels and Piping Conference and Exhibit, Orlando, Florida, June 27-July 2, 1982, p. 239–250, New York : ASME.

[NEW 59] NEWMARK N.

A Method of Computation for Structural Dynamics, vol. 85, EM3. Journal of the Engineering Mechanics division, ASCE, 1959.

[NEW 81] NEWMAN JR J., RAJU I.

Stress-Intensity Factor Equations for Cracks in Three-Dimensional Finite Bodies. *In Lewis J.C., Sines G. eds. Fracture Mechanics, 14 th Symposium,*, 1981, vol. 1 : Theory and Analysis, ASTM STP 791, p. 238–265.

[NUI 75] NUISMER R.

An energy release rate criterion for mixed mode fracture. *International Journal of Fracture*, 1975, vol. 11, n^o 2, p. 245–250.

[ORT 99] ORTIZ M., PANDOLFI A.

Finite-deformation irreversible cohesive elements for three-dimensional crackpropagation analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, vol. 44, n° 9, p. 1267–1282.

- [OSH 01] OSHER S., FEDKIW R. Level set methods - An overview and some recent results. *Journal of Computational Physics*, 2001, vol. 169, n° 2, p. 463–502.
- [OSH 02] OSHER S., FEDKIW R. Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces. New York : Springer, 2002. 273p.

[PAM 98] PAMIN J., DE BORST R. Simulation of crack spacing using a reinforced concrete model with an internal length parameter. Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv), 1998, vol. 68, n° 9, p. 613–625.

- [PAR 97] PARIS F., CANAS J. Boundary element method : fundamentals and applications. Oxford : Oxford University, 1997. 392p.
- [PEE 96] PEERLINGS R., DE BORST R., BREKELMAN W., DE VREE J., SPEE I. Some observations on localisation in non-local and gradient damage models. *European journal of mechanics. A. Solids*, 1996, vol. 15, n^o 6, p. 937–953.
- [PEE 98] PEERLINGS R., DE BORST R., BREKELMANS W., GEERS M. Gradient-enhanced damage modelling of concrete fracture. *Mechanics of Cohesivefrictional Materials*, 1998, vol. 3, nº 4, p. 323–342.
- [PEE 01] PEERLINGS R., GEERS M., DE BORST R., BREKELMANS W. A critical comparison of nonlocal and gradient-enhanced softening continua. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, vol. 38, nº 44-45, p. 7723–7746.
- [PEE 02] PEERLINGS R., DE BORST R., BREKELMANS W., GEERS M. Localisation issues in local and nonlocal continuum approaches to fracture. *European Journal of Mechanics A : Solids*, 2002, vol. 21, nº 2, p. 175–189.

- [PEN 99] PENG D., MERRIMAN B., OSHER S., ZHAO H., KANG M. A PDE-based fast local level set method. *Journal of Computational Physics*, 1999, vol. 155, n^o 2, p. 410–438.
- [PES 63] PESTEL E., LECKIE F. *Matrix methods in elastomechanics*. New York : McGraw-Hill New York, 1963. 435p.

[POR 92] PORTELA A., ALIABADI M., ROOKE D. The dual boundary element method- Effective implementation for crack problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1992, vol. 33, n^o 6, p. 1269–1287.

- [PRA 06] PRABEL B., COMBESCURE A., GRAVOUIL A., MARIE S. Level set X-FEM non-matching meshes : application to dynamic crack propagation in elastic-plastic media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2006, vol. 69, p. 1533–1569.
- [RAN 70] RANKINE W. *A Manual of Applied Mechanics*. London : C. Griffin and company, 1870. 696p.

[REM 03] REMMERS J., BORST R., NEEDLEMAN A. A cohesive segments method for the simulation of crack growth. *Computational Mechanics*, 2003, vol. 31, nº 1, p. 69–77.

[REM 07] REMMERS J. J. C., DE BORST R., NEEDLEMAN A. An evaluation of the accuracy of discontinuous finite elements in explicit calculations. *IUTAM Symposium on Discretisation Methods for Evolving Discontinuities*, 2007, vol. 5, Springer.

[RÉT 04] RÉTHORÉ J., GRAVOUIL A., COMBESCURE A. A stable numerical scheme for the finite element simulation of dynamic crack propagation with remeshing. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004, vol. 193, p. 4493-4510.

[RÉT 05a] RÉTHORÉ J.

Méthode des éléments finis étendus en espace et en temps : application à la propagation dynamique des fissures. Thèse de doctorat, Villeurbanne : INSA de Lyon, 2005. 143p.

[RÉT 05b] RÉTHORÉ J., GRAVOUIL A., COMBESCURE A. A combined space-time extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, vol. 64, p. 260–284.

[RÉT 05c] RÉTHORÉ J., GRAVOUIL A., COMBESCURE A.

An energy-conserving scheme for dynamic crack growth using the eXtended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, vol. 63, p. 631–659.

[RIC 68] RICE J.

Mathematical analysis in the mechanics of fracture. *Fracture : An Advanced Treatise*, 1968, vol. 2, p. 191–311.

[RIC 80] RICE J.

The Mechanics of Earthquake Rupture. In Dziewonski A.M., Boschi E., eds. Physics of the Earth's Inferior : Varenna on Lake Comom, Villa Monastero, 23rd July-4th August, 1979. Amsterdam : North-Holland Pub., 1980, p. 555–649.

[RIC 88] RICE J.

Elastic Fracture Mechanics Concepts for Interfacial Cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 1988, vol. 55, n^o 1, p. 98–103.

[RIT 96] RITTEL D., MAIGRE H.

An investigation of dynamic crack initiation in PMMA. *Mechanics of Materials*, 1996, vol. 23, n^o 3, p. 229–239.

[RIT 97a] RITTEL D., LEVIN R., MAIGRE H. The influence of mode-mixity on dynamic failure mode transitions in polycarbonate. *Journal de physique IV*, 1997, vol. 7, nº 3, p. 3–3.

[RIT 97b] RITTEL D., LEVIN R., MAIGRE H.

On dynamic crack initiation in polycarbonate under mixed-mode loading. *Mechanics Research Communications*, 1997, vol. 24, n^o 1, p. 57–64.

[RIT 00] RITTEL D.

Experimental investigation of transient thermoplastic effects in dynamic fracture. *International Journal of Solids and Structures*, 2000, vol. 37, n^o 21, p. 2901–2913.

[ROT 87] ROTS J., DE BORST R. Analysis of Mixed-Mode Fracture in Concrete. Journal of Engineering Mechanics, 1987, vol. 113, nº 11, p. 1739–1758.

[ROZ 07] ROZYCKI P., MOËS N., BECHET E., DUBOIS C.

X-FEM explicit dynamics for constant strain elements to alleviate mesh constraints on internal or external boundaries. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, in press, 2007.

[RUI 01] RUIZ G., PANDOLFI A., ORTIZ M. Three-dimensional cohesive modeling of dynamic mixed-mode fracture. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, vol. 52, nº 5, p. 97–111.

[SCH 93a] SCHELLEKENS J., DE BORST R. On the numerical integration of interface elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1993, vol. 36, nº 43-66, p. 30–31.

[SCH 93b] SCHELLENKENS J., DE BORST R. A Non-Linear Finite Element Approach for the Analysis of Mode-I Free Edge Delamination in Composites. *International Journal of Solids and Structures*, 1993, vol. 30, n^o 9, p. 1239–1253.

[SET 96] SETHIAN J.

A fast marching level set method for monotonically advancing fronts. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA, february*, 1996, vol. 93, n^o 4, p. 1591–1595.

[SET 99] SETHIAN J.

Level Set Methods and Fast Marching Methods : Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science. Cambridge : Cambridge University Press, 1999. 378p.

[SET 01] SETHIAN J.

Evolution, implementation, and application of level set and fast marching methods for advancing fronts. *Journal of Computational Physics*, 2001, vol. 169, n^o 2, p. 503–555.

[SET 03] SETHIAN J., SMEREKA P.

Level set methods for fluid interfaces. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2003, vol. 35, n^o 1, p. 341–372.

[SHA 71] SHAH R., KOVAYASHI A. Stress intensity factor for an elliptical crack under arbitrary normal loading. *Enginee-ring Fracture Mechanics*, 1971, vol. 3, n^o 1, p. 71–96.

[SHI 86] SHIH C., MORAN B., NAKAMURA T.

Energy release rate along a three-dimensional crack front in a thermally stressed body. *International Journal of Fracture*, 1986, vol. 30, n^o 2, p. 79–102.

[SOC 03] SOCHNIKOV V., EFRIMA S. Level set calculations of the evolution of boundaries on a dynamically adaptive grid. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, vol. 56, p. 1913– 1929.

[STA 03] STAZI F., BUDYN E., CHESSA J., BELYTSCHKO T. An extended finite element method with higher-order elements for curved cracks. *Computational Mechanics*, 2003, vol. 31, nº 1, p. 38–48.

[STO 01] STOLARSKA M., CHOPP D., MOËS N., BELYTSCHKO T. Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, vol. 51, p. 943–960.

[SUF 03] SUFFIS A., LUBRECHT T., COMBESCURE A. Damage model with delay effect Analytical and numerical studies of the evolution of the characteristic damage length. *International Journal of Solids and Structures*, 2003, vol. 40, nº 13-14, p. 3463–3476.

[SUF 04] SUFFIS A. Développement d'un modèle d'endommagement à taux de croissance contrôlé pour la simulation robuste de ruptures sous impacts. Thèse de doctorat, Villeurbanne : INSA de Lyon, 2004. 170p.

[SUK 97] SUKUMAR N., MORAN B., BLACK T., BELYTSCHKO T. An element-free Galerkin method for three-dimensional fracture mechanics. *Computational Mechanics*, 1997, vol. 20, nº 1, p. 170–175.

[SUK 00] SUKUMAR N., MOËS N., MORAN B., BELYTSCHKO T. Extended finite element method for three-dimensional crack modelling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000, vol. 48, p. 1549–1570. [SUK 01] SUKUMAR N., CHOPP D., MOËS N., BELYTSCHKO T. Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, vol. 190, n^o 46, p. 6183–6200.

[SUO 89a] SUO X., COMBESCURE A.

The mathematical formulation of the second derivative of potential energy in brittle fracture theory(Sur la formulation mathematique de la derivee seconde de l'energie potentielle en theorie de la rupture fragile). *Academie des Sciences,(Paris), Comptes Rendus, Serie II-Mecanique, Physique, Chimie, Sciences de l'Univers, Sciences de la Terre*, 1989, vol. 308, n° 13, p. 1119–1122.

[SUO 89b] SUO X., COMBESCURE A.

Sur une formulation mathématique de la dérivée seconde de l'énergie potentielle en théorie de la rupture fragile. *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 2, Mécanique, Physique, Chimie, Sciences de l'univers, Sciences de la Terre*, 1989, vol. 308, n° 13, p. 1119–1122, Gauthier-Villars.

[SUO 92a] SUO X., COMBESCURE A.

« Energy release rate and integral for any non homogeneous material». *The American Society of Mechanical Engineers*, 1992, vol. 233, p. 173–179.

[SUO 92b] SUO X., COMBESCURE A. Double virtual crack extension method for crack growth stability assessment. *International Journal of Fracture*, 1992, vol. 57, nº 2, p. 127–150.

[SUO 92c] SUO X., COMBESCURE A. On the application of G (Θ) method and its comparison with De Lorenzi s approach. *Nuclear Engineering and Design*, 1992, vol. 135, p. 207–224.

[SUO 92d] SUO X., COMBESCURE A. Second variation of energy and an associated line independent integral in fracture mechanics. I-Theory. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 1992, vol. 11, n^o 5, p. 609–624.

[SUS 94] SUSSMAN M., SMEREKA P., OSHER S. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *Journal of Computational Physics*, 1994, vol. 114, n^o 1, p. 146–159, Professional, Inc. San Diego, CA, USA.

[VAL 07] VALANCE S., CORET M., COMBESCURE A. Strain simulation of steel during a heating-cooling cycle including solid-solid phase change. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2007, vol. 26, p. 460–473.

[VEL 60] VELETSOS A., NEWMARK N. Effect of Inelastic Behavior on the Response of Simple Systems to Earthquake Motions. *Proceedings of the second world conference on earthquake engineering*, 1960, vol. 11, p. 859–912.

[VEN 02] VENTURA G., XU J., BELYTSCHKO T. A vector level set method and new discontinuity approximations for crack growth by EFG. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, vol. 54, p. 923–944.

- [VEN 03] VENTURA G., BUDYN E., BELYTSCHKO T. Vector level sets for description of propagating cracks in finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, vol. 58, p. 1571–1592.
- [WAG 01] WAGNER G., MOËS N., LIU W., BELYTSCHKO T. The extended finite element method for rigid particles in Stokes ow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, vol. 51, p. 293–313.
- [WEI 98] WEIHE S., KROPLIN B., DE BORST R. Classification of smeared crack models based on material and structural properties. *International Journal of Solids and Structures*, 1998, vol. 35, nº 12, p. 1289–1308.
- [WEL 02] WELLS G., SLUYS L., DE BORST R. Simulating the propagation of displacement discontinuities in a regularized strainsoftening medium. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, vol. 53, nº 5, p. 1235–1256.
- [WIL 99] WILLIAMS K., FLOYD A., VAZIRI R., POURSARTIP A. Numerical simulation of in-plane damage progression in laminated composite plates. *Proceedings of the 12th International Conference on Composite Materials (ICCM/12), paper*, 1999, vol. 614.
- [WIL 01] WILLIAMS K., VAZIRI R. Application of a damage mechanics model for predicting the impact response of composite materials. *Computers and Structures*, 2001, vol. 79, n^o 10, p. 997–1011, Elsevier.
- [WIL 03] WILLIAMS K., VAZIRI R., POURSARTIP A. A physically based continuum damage mechanics model for thin laminated composite structures. *International Journal of Solids and Structures*, 2003, vol. 40, n^o 9, p. 2267–2300, Elsevier.
- [XU 94] XU X., NEEDLEMAN A. Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids. J. Mech. Phys. Solids, 1994, vol. 42, nº 9, p. 1397–1407.
- [ZI 03] ZI G., BELYTSCHKO T. New crack-tip elements for XFEM and applications to cohesive cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, vol. 57, p. 2221–2240.

[ZIE 00] ZIENKIEWICZ O., TAYLOR R. *The Finite Element Method.* Oxford : Butterworth-Heinemann, 2000.

THÈSE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

NOM : MENOUILLARD

Prénoms : Thomas, François, Olivier

TITRE : Dynamique explicite pour la simulation numérique de propagation de fissure par la méthode des éléments finis étendus

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2007-ISAL-0048

DATE de SOUTENANCE : 20 septembre 2007

École doctorale : MEGA

Spécialité : Mécanique - Génie Mécanique - Génie Civil

Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 / et bis CLASSE :

RÉSUMÉ :

La simulation numérique fait maintenant partie intégrante du processus de conception et validation de structures mécaniques. Les outils de simulations sont de plus en plus performants permettant une description très fine des phénomènes. De plus ces outils ne se limitent plus à la mécanique linéaire, mais sont développés pour décrire des comportements plus compliqués allant jusqu'à la ruine des structures, ce qui intéresse le domaine de la sécurité. Un chargement dynamique ou statique peut ainsi engendrer un endommagement, une fissuration puis une rupture de la structure. La dynamique rapide permet de simuler des phénomènes "rapides" tels que des explosions, des chocs et impacts sur structure. Le domaine d'application est très varié. Il concerne par exemple l'étude de la durée de vie et les scénarios d'accidents de la cuve du réacteur nucléaire. Mais aussi en aéronautique, l'intégrité d'une aube de soufflante soumise à un impact d'oiseau. Il est alors très intéressant pour les codes de dynamique rapide de pouvoir prédire de façon robuste et stable de tels phénomènes : l'évaluation de l'endommagement dans la structure et la simulation de propagation de fissure constituent un enjeu essentiel. Pour ce faire la méthode des éléments finis étendus a l'avantage de s'affranchir de remaillage et de projection de champs lors de la propagation de fissure. Effectivement la fissure est décrite cinématiquement via une stratégie appropriée d'enrichissement sur des degrés de liberté supplémentaires. On met en évidence ensuite les difficultés liant la discrétisation spatiale de cette méthode avec la discrétisation temporelle d'un schéma de calcul explicite : l'écriture diagonale de la matrice de masse et le pas de temps de stabilité associé. On présente donc deux méthodes de diagonalisation de matrice de masse basées sur la conservation de l'énergie cinétique, et des études de pas de temps critiques pour divers éléments finis enrichis. L'intérêt mis en évidence ici est que le pas de temps n'est pas plus pénalisant que celui du problème éléments finis standard. Des comparaisons avec des simulations numériques sur un autre code permettent de valider les travaux théoriques. Un essai de propagation de fissure en mode mixte a été exploité afin de vérifier la prédiction de la simulation.

MOTS-CLÉS : dynamique, explicite, éléments finis étendus, fissuration, pas de temps de stabilité, endommagement de composites

Laboratoire(s) de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures UMR CNRS 5259 - INSA de Lyon 20, avenue Albert Einstein 69621 Villeurbanne Cedex FRANCE

Directeur de thèse : Monsieur le Professeur Alain COMBESCURE

Président du jury : Monsieur le Professeur Patrick LABORDE

Composition du jury : BUNG Hariddh LABORDE Patrick PANDOLFI Anna SUFFIS Arnaud COMBESCURE Alain MOËS Nicolas RIXEN Daniel