

# THESE

*présentée*

DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

*pour obtenir*

## LE GRADE DE DOCTEUR

ECOLE DOCTORALE DES SCIENCES POUR L'INGENIEUR DE LYON :  
MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE (M.E.G.A.)  
SPECIALITE : MECANIQUE

*par*

**Atanas CHAPKOV**

Ingénieur I.N.S.A. de Lyon

## ETUDE DES CONTACTS ELASTOHYDRODYNAMIQUES LUBRIFIES AVEC UN FLUIDE NON NEWTONIEN

Soutenue le 20 septembre 2006 devant la commission d'examen :

**Jury :** Pr. G. Bayada  
Dr. P. Ehret  
Pr. J. Frêne Rapporteur  
Pr. A.A. Lubrecht  
D.R. P. Montmitonnet Rapporteur  
D.R. M. Raous

**Invité :** Dr. P.M.E. Cann  
Dr. S. Bair

Cette thèse a été préparée au Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Solides de l'I.N.S.A. de LYON



<b>SIGLE</b>	<b>ECOLE DOCTORALE 2005</b>	<b>NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE</b>
	<b><u>CHIMIE DE LYON</u></b>  Responsable : M. Denis SINOUE	M. Denis SINOUE Université Claude Bernard Lyon 1 Lab Synthèse Asymétrique UMR UCB/CNRS 5622 Bât 308 2 <sup>ème</sup> étage 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.44.81.83 Fax : 04 78 89 89 14 <a href="mailto:sinou@univ-lyon1.fr">sinou@univ-lyon1.fr</a>
<b>E2MC</b>	<b><u>ECONOMIE, ESPACE ET MODELISATION DES COMPORTEMENTS</u></b>  Responsable : M. Alain BONNAFOUS	M. Alain BONNAFOUS Université Lyon 2 14 avenue Berthelot MRASH M. Alain BONNAFOUS Laboratoire d'Economie des Transports 69363 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.69.72.76 <a href="mailto:Alain.bonnafous@ish-lyon.cnrs.fr">Alain.bonnafous@ish-lyon.cnrs.fr</a>
<b>E.E.A.</b>	<b><u>ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</u></b>  M. Daniel BARBIER	M. Daniel BARBIER INSA DE LYON Laboratoire Physique de la Matière Bâtiment Blaise Pascal 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43.64.43 Fax 04 72 43 60 82 <a href="mailto:Daniel.Barbier@insa-lyon.fr">Daniel.Barbier@insa-lyon.fr</a>
<b>E2M2</b>	<b><u>EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION</u></b> <a href="http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2M2">http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2M2</a>  M. Jean-Pierre FLANDROISp	M. Jean-Pierre FLANDROIS UMR 5558 Biométrie et Biologie Evolutive Equipe Dynamique des Populations Bactériennes Faculté de Médecine Lyon-Sud Laboratoire de Bactériologie BP 1269600 OULLINS Tél : 04.78.86.31.50 Fax 04 72 43 13 88 <a href="mailto:E2m2@biomserv.univ-lyon1.fr">E2m2@biomserv.univ-lyon1.fr</a>
<b>EDIIS</b>	<b><u>INFORMATIQUE ET INFORMATION POUR LA SOCIETE</u></b> <a href="http://www.insa-lyon.fr/ediis">http://www.insa-lyon.fr/ediis</a>  M. Lionel BRUNIE	M. Lionel BRUNIE INSA DE LYON EDIIS Bâtiment Blaise Pascal 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43.60.55 Fax 04 72 43 60 71 <a href="mailto:ediis@insa-lyon.fr">ediis@insa-lyon.fr</a>
<b>EDISS</b>	<b><u>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE</u></b> <a href="http://www.ibcp.fr/ediss">http://www.ibcp.fr/ediss</a>  M. Alain Jean COZZONE	M. Alain Jean COZZONE IBCP (UCBL1) 7 passage du Vercors 69367 LYON Cedex 07 Tél : 04.72.72.26.75 Fax : 04 72 72 26 01 <a href="mailto:cozzone@ibcp.fr">cozzone@ibcp.fr</a>
	<b><u>MATERIAUX DE LYON</u></b> <a href="http://www.ec-lyon.fr/sites/edml">http://www.ec-lyon.fr/sites/edml</a>  M. Jacques JOSEPH	M. Jacques JOSEPH Ecole Centrale de Lyon Bât F7 Lab. Sciences et Techniques des Matériaux et des Surfaces 36 Avenue Guy de Collongue BP 163 69131 ECULLY Cedex Tél : 04.72.18.62.51 Fax 04 72 18 60 90 <a href="mailto:Jacques.Joseph@ec-lyon.fr">Jacques.Joseph@ec-lyon.fr</a>
<b>Math IF</b>	<b><u>MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE FONDAMENTALE</u></b> <a href="http://www.ens-lyon.fr/MathIS">http://www.ens-lyon.fr/MathIS</a>  M. Franck WAGNER	M. Franck WAGNER Université Claude Bernard Lyon1 Institut Girard Desargues UMR 5028 MATHEMATIQUES Bâtiment Doyen Jean Braconnier Bureau 101 Bis, 1 <sup>er</sup> étage 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43.27.86 Fax : 04 72 43 16 87 <a href="mailto:wagner@desargues.univ-lyon1.fr">wagner@desargues.univ-lyon1.fr</a>
<b>MEGA</b>	<b><u>MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE</u></b> <a href="http://www.lmfa.ec-lyon.fr/autres/MEGA/index.html">http://www.lmfa.ec-lyon.fr/autres/MEGA/index.html</a>  M. François SIDOROFF	M. François SIDOROFF Ecole Centrale de Lyon Lab. Tribologie et Dynamique des Systèmes Bât G8 36 avenue Guy de Collongue BP 163 69131 ECULLY Cedex Tél : 04.72.18.62.14 Fax : 04 72 18 65 37 <a href="mailto:Francois.Sidoroff@ec-lyon.fr">Francois.Sidoroff@ec-lyon.fr</a>



## Résumé

L'utilisation d'huiles contenant des polymères dans des applications élastohydrodynamiques présente deux avantages : de faibles pertes par frottement visqueux et une stabilité de l'épaisseur de film sur une gamme étendue de température. Cependant, les prédictions théoriques classiques surestiment largement l'épaisseur de film générée dans le contact. La prise en compte de la rhéologie plus complexe du fluide est indispensable pour la modélisation adéquate du phénomène de lubrification.

L'approche adoptée est basée sur la dérivation d'une équation de Reynolds généralisée, résolues par les techniques MultiGrilles et MultiGrilles-MultiIntegration.

Les études paramétriques montrent l'influence de la rhéologie sur la distribution de l'épaisseur de film et de la pression dans le contact. L'analyse de l'équation de Reynolds couplée à un comportement du fluide de type Eyring permet de quantifier la déformation élastique des rugosités dans le contact. L'utilisation de modèles plus avancés de type Rabinowitsch, Tait et Doolittle, permet de prédire une épaisseur de film d'huile très proche de celles mesurées expérimentalement.

Mot-clés : champ de pression, compressibilité, contact ponctuel, Doolittle, EHD, épaisseur de film, Eyring, lubrifiant, MultiIntegration, MultiGrilles, piézo-viscosité, Rabinowitsch, réduction d'amplitude, rhéologie, rugosité harmonique, Reynolds, Tait, validation expérimentale

## Abstract

The use of polymer containing oils for elastohydrodynamic application has two advantages : low power losses and temperature independent film thickness. Meanwhile, the prediction based on the classical theory largely overestimates the film thickness. In this case, the lubricant rheology needs to be taken into account for an accurate description of the phenomena.

The approach is based on the derivation of a generalized Reynolds equation. The MultiGrid, Multilevel-MultiIntegration numerical techniques are used to solve the problem.

The parametrical study shows the influence of the rheological properties on the film thickness and pressure distribution. First, the Eyring law is used. The analysis of the Reynolds equation is used to quantify the elastic deformation of the harmonic roughness. Then, more advanced models as : Rabinowitsch, Tait and Doolittle, are implemented. The comparison with the experimental results shows a good agreement.

Keywords : amplitude reduction, compressibility, Doolittle, EHL, experimental validation, Eyring, harmonic roughness, lubricant, MultiIntegration, MultiGrid, MultiLevel, piezo-viscosity, point contact, pressure, Rabinowitsch, rheology, Reynolds, Tait



# Table des matières

<b>Notations</b>	<b>1</b>
<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Evolution de la lubrification élastohydrodynamique</b>	<b>9</b>
1.1 Contact EHD sur-alimenté entre deux surfaces lisses . . . . .	9
1.1.1 Modélisation et résultats numériques . . . . .	9
1.1.2 Travail expérimental . . . . .	10
1.2 Techniques numériques . . . . .	10
1.3 Contact EHD sous-alimenté . . . . .	11
1.3.1 Modélisation et résultats numériques . . . . .	11
1.3.2 Travail expérimental . . . . .	11
1.4 Endommagement et durée de vie des pièces mécaniques . . . . .	11
1.5 Problème rugueux - modélisation des rugosités . . . . .	12
1.5.1 Modélisation et résultats numériques . . . . .	12
1.5.2 Travail expérimental . . . . .	14
1.6 Modélisation rhéologique des fluides . . . . .	14
1.6.1 Modélisation rhéologique à taux de cisaillement élevé . . . . .	15
1.6.2 Modélisation rhéologique à faible taux de cisaillement . . . . .	16
1.7 Futurs développements dans le domaine de l'EHD . . . . .	16
<b>2 Modélisation de la lubrification élastohydrodynamique</b>	<b>19</b>
2.1 Modélisation du fluide à fort taux de cisaillement . . . . .	19
2.2 Relations fondamentales . . . . .	21
2.2.1 Profil des vitesses . . . . .	22
2.3 Equation de Reynolds modifiée . . . . .	24
2.4 Equation de séparation des surfaces . . . . .	25
2.4.1 La séparation géométrique des surfaces . . . . .	25
2.4.2 Rugosité des surfaces . . . . .	26
2.4.3 Déformation élastique . . . . .	26
2.5 Equation de l'équilibre de la charge . . . . .	27
2.6 Modélisation du fluide à faible taux de cisaillement . . . . .	27
2.6.1 Loi de compressibilité . . . . .	27
2.6.2 Loi de piézo-viscosité . . . . .	28
2.7 Adimensionnement du problème EHD . . . . .	30
2.7.1 L'équation de Reynolds . . . . .	31
2.7.2 Equation de séparation des surfaces . . . . .	32
2.7.3 Equation de l'équilibre de la charge . . . . .	32
2.7.4 Loi de compressibilité . . . . .	32
2.7.5 Lois de piézo-viscosité . . . . .	33

2.8	Paramètres de contact EHD . . . . .	33
2.9	Conclusion . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Outils numériques</b>	<b>35</b>
3.1	Positionnement du problème . . . . .	35
3.2	Principe de base des MultiGrilles et problème modèle . . . . .	36
3.2.1	Opérateurs de transfert . . . . .	38
3.2.2	Cycle de correction, <i>FMG</i> . . . . .	40
3.3	Principe de l'intégration rapide . . . . .	41
3.4	Application des principes des MultiGrilles et de l'intégration rapide au problème d'EHD . . . . .	43
3.4.1	Equations Discrètes . . . . .	43
3.4.2	Schéma de relaxation . . . . .	46
3.4.3	Algorithme de résolution . . . . .	48
3.4.4	Vitesse de convergence et précision de la solution . . . . .	49
3.4.5	Codes de calcul . . . . .	51
3.5	Conclusion . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Déformation élastique des rugosités - comportement newtonien</b>	<b>53</b>
4.1	Comportement asymptotique de l'équation de Reynolds . . . . .	54
4.1.1	Conséquences du comportement asymptotique . . . . .	54
4.2	Déformation des rugosités de faible amplitude . . . . .	56
4.2.1	Déformation des rugosités - description de l'entrée du contact . . . . .	56
4.2.2	Analyse du contact sec rugueux - Johnson [86] . . . . .	59
4.2.3	Déformation des rugosités - rôle de l'épaisseur de film . . . . .	61
4.2.4	Comparaison des paramètres $\nabla$ et $\Lambda_{eq}$ . . . . .	64
4.3	Conclusion . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Déformation élastique des rugosités - comportement non newtonien</b>	<b>67</b>
5.1	Equation de Reynolds . . . . .	67
5.1.1	Conséquences du comportement de l'équation de Reynolds modifiée . . . . .	68
5.2	Déformation des rugosités de faible amplitude . . . . .	69
5.2.1	La réduction d'amplitude suivant la ligne centrale . . . . .	71
5.2.2	La réduction d'amplitude à $X = 0.6, Y = 0$ . . . . .	78
5.3	Conclusion . . . . .	81
<b>6</b>	<b>Modèles Rhéologiques Avancés</b>	<b>83</b>
6.1	Equation de Reynolds modifiée et conséquences. Etude paramétrique . . . . .	83
6.1.1	Influence de la contrainte limite $\tau_0$ . . . . .	84
6.1.2	Influence du coefficient de roulement/glisement $S$ . . . . .	84
6.2	Comparaison des résultats numériques et expérimentaux . . . . .	87
6.2.1	Mesures rhéologiques des fluides . . . . .	87
6.2.2	Mesures de l'épaisseur de film centrale . . . . .	89
6.2.3	Comparaisons des résultats . . . . .	89
6.3	Conclusion . . . . .	90
	<b>Conclusion Générale</b>	<b>93</b>
<b>A</b>	<b>Expression analytique de prédiction d'épaisseur de film centrale</b>	<b>97</b>

# Notations

$a$	amplitude de la rugosité	[m]
$A$	amplitude adimensionnée de la rugosité, $A = a/c$	[.]
$A_x$	constante de l'équation de contrainte de cisaillement suivant $X$	[.]
$A_y$	constante de l'équation de contrainte de cisaillement suivant $Y$	[.]
$B$	paramètre de Doolittle	[.]
$B_1$	constante d'intégration	[.]
$b$	demi-longueur de la zone de Hertz du cercle de contact dans les directions $x$ et $y$ , $b = (3wR_x/2E')^{1/3}$	[m]
$c$	approche hertzienne $c = b^2/R_x$	[m]
$C_x$	constante de l'équation de contrainte de cisaillement suivant $X$	[.]
$C_y$	constante de l'équation de contrainte de cisaillement suivant $Y$	[.]
$D_x$	constante de l'équation de contrainte de cisaillement suivant $X$	[.]
$D_y$	constante de l'équation de contrainte de cisaillement suivant $Y$	[.]
$E$	module d'Young	[Pa]
$E'$	module d'Young équivalent, $2/E' = (1 - \nu_1^2)/E_1 + (1 - \nu_2^2)/E_2$	[Pa]
$f(\tau/\tau_0)$	fonction rhéologique	[.]
$f$	second membre de l'équation différentielle	[.]
$f^h$	second membre du problème différentiel discret	[.]
$\hat{f}^H$	second membre du problème différentiel discret transféré sur une grille grossière	[.]
$G$	paramètre adimensionné de matériau, $G = \alpha E'$	[.]
$h$	séparation des surfaces	[m]
$h_0$	déplacement de corps solide (permet de résoudre l'équation d'équilibre)	[m]
$h_c$	épaisseur centrale du film de lubrifiant	[m]
$H_c$	épaisseur de film centrale adimensionnée $H_c = h_c/c$	[.]
$h_{x,y}$	pas de discrétisation dans les directions $x$ et $y$	[m]
$H$	séparation adimensionnée, $H = h/c$	[.]
$H_0$	déplacement adimensionné de corps solide $H_0 = h_0/c$	[.]
$i, j, I, J$	indices des points du maillage sur une grille de niveaux $L$ et $L - 1$	[.]
$I_h^H$	opérateur de restriction (injection ou restriction pondérée)	[.]
$I_H^h$	opérateur d'interpolation	[.]
$K_0$	le module d'élasticité à la pression ambiante	[Pa]
$K_{00}$	valeur de $K$ de référence	[Pa]
$K(x, y)$	noyau d'intégration continu	[.]
$K_{i,j}^{h,h}$	noyau d'intégration discret exact	[.]
$\tilde{K}_{i,j}^{h,h}$	noyau d'intégration discret approché	[.]
$L$	opérateur différentiel	[.]
$L^h$	opérateur différentiel discrétisé sur la grille de pas $h$	[.]
$L$	niveau de grille de discrétisation	[.]
$L$	paramètre adimensionné de charge (Moes), $L = G(2U)^{1/4}$	[.]
$\bar{L}$	constante EHD (Hooke)	[.]

$m$	nombre de points de correction suivant une interpolation	[.]
$M$	paramètre adimensionné de charge (Moes), $M = W(2U)^{-3/4}$	[.]
$n_x, n_y$	nombre de points de discrétisation dans les directions $x$ et $y$	[.]
$N$	nombre total de points de discrétisation	[.]
$O$	centre du contact, origine du repère $(O, x, y, z)$	[.]
$N$	paramètre adimensionné non-newtonien, $N = \bar{\lambda} p_h^2 \pi / (12E' \tau_0)$	[.]
$p$	pression	[Pa]
$p_H$	pression maximale de Hertz, $p_H = (3w)/(2\pi b^2)$	[Pa]
$p_{sm}$	pression entre deux surfaces lisses,	[Pa]
$p_0$	paramètre de piezo-viscosité (Roelands)	[.]
$\Delta P$	variation de la pression adimensionnée induite par la rugosité, $\Delta P = \delta p / p_H$	[.]
$\delta p$	variation de la pression induite par la rugosité,	[Pa]
$P$	pression adimensionnée, $P = p / p_H$	[.]
$\hat{P}$	champ de pression initial adimensionné	[.]
$\tilde{P}$	pression adimensionnée non mise à jour	[.]
	pendant la relaxation courante	[.]
$\bar{P}$	pression adimensionnée mise à jour	[.]
	pendant la relaxation courante (Gauss-Seidel)	[.]
$Q$	paramètre adimensionné non-newtonien (Hooke)	[.]
$Q_{X,Y}$	coefficient adimensionné de l'équation de Reynolds	[.]
$r^h$	résidu du problème différentiel discret $r^h = f^h - \mathcal{L}^h \tilde{u}^h$	[.]
$resn$	norme du résidu sur le domaine de calcul	[.]
$r$	résidu de l'équation d'équilibre	[.]
$R_0$	fraction du volume occupé	[.]
$\mathcal{R}$	micro-géométrie (rugosité) de la surface	[m]
$\bar{\mathcal{R}}$	micro-géométrie (rugosité) de la surface adimensionnée, $\bar{\mathcal{R}} = \mathcal{R}/c$	[.]
$R_x$	rayon de courbure réduit dans la direction $x$ , $R_x = (R_{x1}^{-1} + R_{x2}^{-1})^{-1}$	[m]
$R_y$	rayon de courbure réduit dans la direction $y$ , $R_y = R_x$	[m]
$S$	coefficient de roulement/glisement $S = (u_2 - u_1)/\bar{u}$	[.]
$t$	temps	[s]
$T$	temps adimensionné $T = t\bar{u}/b$	[.]
$T_g$	température de transition vitreuse	[K]
$u$	vitesse suivant la direction de roulement	[m/s]
$\bar{u}$	vitesse moyenne $\bar{u} = (u_1 + u_2)/2$	[m/s]
$U$	paramètre adimensionné de vitesse, $U = (\mu_0 \bar{u}) / (E' R_x)$	[.]
$u$	solution continue exacte du problème différentiel	[.]
$u^h$	solution exacte du problème différentiel discret	[.]
$\hat{u}^h$	solution initiale imposée avant la résolution du problème différentiel discret	[.]
$\hat{u}^H$	solution du problème différentiel	[.]
	transférée sur une grille grossière $\hat{u}^H = I_h^H \tilde{u}^h + v^H$	[.]
$\tilde{u}^h$	solution approchée du problème différentiel discret sur la grille de pas $h$	[.]
$\bar{u}^h$	solution convergée du problème différentiel discret sur la grille de pas $h$	[.]
$w$	force normale appliquée au contact (charge)	[N]
$v$	vitesse suivant la direction perpendiculaire à la direction de roulement	[m/s]
$v^h$	erreur dans la solution du problème différentiel discret $v^h = u^h - \tilde{u}^h$	[.]
$w(x)$	fonction intégrale	[.]
$w_i^h$	fonction intégrale discrète exacte sur la grille de pas $h$	[.]
$\tilde{w}_i^h$	fonction intégrale discrète approchée sur la grille de pas $h$	[.]
$\bar{w}_i^h$	fonction intégrale discrète calculée sur la grille de pas $h$	[.]
$W$	paramètre adimensionné de charge, $W = w / (E' R_x^2)$	[.]

$\mathcal{W}$	intégrale de la déformation élastique adimensionnée totale	[.]
$\Delta\mathcal{W}$	intégrale de la déformation élastique adimensionnée induite par les rugosités	[.]
$\mathcal{W}_{sm}$	intégrale de la déformation élastique adimensionnée entre deux surfaces lisses	[.]
$\nabla$	longueur d'onde adimensionnée	[.]
$\bar{\nabla}$	longueur d'onde adimensionnée généralisée	[.]
$x$	direction de roulement	[.]
$x, y, z$	coordonnées dans le repère $(O, x, y, z)$	[m]
$X, Y$	coordonnées adimensionnées, $X = x/b, Y = y/b$	[.]
$z$	indice de piezo-viscosité (Roelands)	[.]
$z$	direction suivant l'épaisseur du film de lubrifiant (perpendiculaire au plan de contact)	[.]

## Symboles grecs

$\alpha$	index de piezo-viscosité	[Pa <sup>-1</sup> ]
$\bar{\alpha}$	index de piezo-viscosité adimensionné, $\bar{\alpha} = \alpha p_H$	[.]
$\beta_K$	coefficient de variation thermique de $K_{00}$	[K <sup>-1</sup> ]
$\dot{\gamma}$	taux de cisaillement	[s <sup>-1</sup> ]
$\eta$	viscosité à taux élevé de cisaillement	[Pa.s]
$\epsilon$	coefficient adimensionné de l'équation de Reynolds	[.]
$\bar{\eta}$	viscosité adimensionnée, $\bar{\eta} = \eta/\eta_0$	[.]
$\kappa$	paramètre adimensionné de la réduction d'amplitude	[.]
$\lambda$	longueur d'onde de la rugosité	[.]
$\bar{\lambda}$	paramètre adimensionné de vitesse, $\bar{\lambda} = 12(\mu_0 \bar{u} R_x^2)/(b^3 p_H)$	[.]
$\mu$	viscosité à faible taux de cisaillement	[Pa.s]
$\nu$	coefficient de Poisson	[.]
$\nu_{0,1,2}$	nombre de relaxations sur chaque niveau de grille, $\nu_0$ sur la grille grossière, $\nu_1$ à la descente et $\nu_2$ à la remontée d'un V-cycle	[.]
$\rho$	densité du lubrifiant	[kg.m <sup>-3</sup> ]
$\bar{\rho}$	densité adimensionnée $\bar{\rho} = \rho/\rho_0$	[.]
$\tau$	contrainte de cisaillement	[Pa]
$\tau_a$	contrainte moyenne de cisaillement suivant x	[Pa]
$\tau_b$	contrainte moyenne de cisaillement suivant y	[Pa]
$\tau_e$	contrainte équivalente de cisaillement, $\tau_e = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}$	[Pa]
$\tau_m$	contrainte moyenne de cisaillement	[Pa]
$\bar{\tau}_m$	contrainte moyenne adimensionnée de cisaillement	[.]
$\tau_0$	contrainte limite de cisaillement	[Pa]
$\phi$	facteur rhéologique intervenant dans l'équation de Reynolds modifiée	[.]
$\Phi$	flux complémentaire induit par les effets non-newtoniens	[m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup> ]
$\psi$	paramètre de flux $\psi = 1/\sqrt{S}$	[.]
$\omega_{1,2,3}$	facteurs de sous-relaxation de l'équation de Reynolds $\omega_1, \omega_2$ et de l'équation de l'équilibre de la charge $\omega_3$	[.]
$\Omega$	domaine de calcul EHD	[m <sup>2</sup> ]

## Indices

$i,d$	initiale et déformée (amplitude)
$nwt$	comportement newtonien
$s$	position initiale de la rugosité
$t$	temps
$x$	suyant x
$y$	suyant y

- 0 à la pression ambiante
- 1 l'indice solide 1
- 2 l'indice solide 1

# Introduction

## Mécanique générale

L'importance de la mécanique dans la vie de tous les jours est très souvent mise au second plan en dépit des avancées technologiques dans d'autres domaines, tels que les télécommunications ou l'informatique. Cependant, derrière une interface électronique, se cache tout un autre monde : celui de la mécanique. Un exemple classique est l'évolution de l'architecture des voitures. Aujourd'hui, les véhicules modernes sont équipés de systèmes de contrôle, d'asservissement et de gestion électronique. Citons par exemple les systèmes qui gèrent le comportement dynamique du véhicule, les systèmes d'asservissement du moteur et de la boîte de vitesses, tous les équipements de confort. Cependant, on peut constater que la mécanique, certes rendue invisible, est omniprésente. Derrière chaque bouton du tableau de bord ou en dehors de l'habitacle, des pièces mécaniques subissent des actions différentes et variables dans le temps. Par exemple, les pneus subissent des déformations dues au contact avec la route, le moteur est soumis à des sollicitations complexes (mécaniques et thermiques). Tous ces phénomènes sont des objets d'études de branches différentes de la mécanique classique - mécanique des fluides, mécanique des milieux continus, mécanique de la rupture...

## Mécanique des contacts

La branche de la mécanique, située à la jonction de la mécanique des solides et de la mécanique des fluides, ayant pour objet l'étude des contacts, s'appelle la Mécanique des Contacts. Il y a toute une variété de contacts qui peuvent être classés selon leur nature, le comportement des solides en contact, les conditions de fonctionnement etc... On peut distinguer les contacts lubrifiés, secs, mixtes, entre des surfaces lisses ou rugueuses, élastiques ou plastiques, par exemple le contact entre pneu-route, came-poussoir, piston-chemise, engrenages. Selon Lubrecht [96], les objectifs de ces études sont :

1. de prédire si le contact fonctionne normalement (ou comment éviter l'avarie immédiate),
2. de prévoir l'apport énergétique nécessaire pour que le contact fonctionne,
3. d'assurer la durée de vie demandée.

Pour la plupart des applications, la lubrification est primordiale pour pouvoir respecter les conditions  $N^{\circ} 2$  et  $N^{\circ} 3$ .

## Mécanique des Contacts Lubrifiés

Comme cité ci-dessus, les contacts peuvent être lubrifiés ou secs. Dans le premier cas, un lubrifiant entre les deux corps en contact est utilisé : des huiles, des graisses ou des émulsions. Le rôle du lubrifiant est de créer une épaisseur de film qui a pour but d'accommoder les vitesses des corps en contact, de transmettre la charge appliquée, d'évacuer la chaleur produite et de diminuer l'usure



FIG. 1 – Exemple de contacts lubrifiés : contact came-poussoir moteur Volkswagen Golf GTI (en haut à gauche) [65], contact piston-chemise (en haut à droite), roulement à butées Timken (en bas) [121]

en évitant les contacts solide-solide. La Figure 1 montre des exemples classiques de contacts lubrifiés.

Remarque : la plupart des roulements sont lubrifiés avec de la graisse ( $\approx 80\%$ ).

Dans ces exemples de contacts lubrifiés appelés ElastoHydroDynamiques (EHD), les pièces sont soumises à des sollicitations mécaniques et thermiques sévères et variables dans le temps. Les pressions qui en résultent sont suffisamment élevées pour induire des déformations élastiques, importantes devant l'épaisseur du film de lubrifiant. Parallèlement à ce phénomène, le comportement du fluide change d'une manière significative.

Le travail exposé dans le présent mémoire s'inscrit dans le cadre des études de contacts EHD. Deux aspects caractérisent les contacts étudiés : l'épaisseur de film est faible et du même ordre de grandeur que la micro-géométrie (la rugosité) de surfaces et/ou les propriétés du lubrifiant changent avec le taux de cisaillement. D'abord, les irrégularités de surface entraînent des surpressions locales dans le contact. Lorsqu'elles traversent le film, elles provoquent, dans la matière, des contraintes de cisaillement importantes. Ensuite, la baisse de la viscosité du fluide avec le cisaillement entraîne la chute de l'épaisseur de film. Par conséquent, le rapport entre la hauteur des aspérités de surface et l'épaisseur de film est modifié. Dans ces conditions, la durée de vie est directement affectée, comme le suggèrent les travaux de Dawson [37] et Tallian et McCool [120].

## Les enjeux industriels

Les deux caractéristiques des contacts EHD citées ci-dessus sont des conséquences des enjeux industriels. Ces derniers sont destinés à répondre aux attentes des utilisateurs et aux normes environnementales imposées, permettant de résister à la concurrence. Les solutions de chacune de ces exigences sont antagonistes à plusieurs titres. Le secteur automobile constitue un exemple classique.

La recherche de performances est plus que jamais d'actualité dans l'automobile. La multiplication des équipements de confort et de sécurité (renforcement des éléments de suspension, des systèmes de freinage et des pneumatiques) oblige, le poids moyen des voitures ne cesse d'augmenter. Par conséquent, les efforts appliqués sur les différents composants mécaniques sont très importants. Parallèlement, pour diminuer les pertes d'énergie par frottement visqueux, des huiles à faible viscosité (générant une faible épaisseur de film) sont utilisées. Pour pallier ce phénomène négatif pour la durée de vie, des additifs, contenant par exemple du phosphore (P) et du soufre (S), sont ajoutés dans l'huile. Or, lors du processus de combustion, une partie de l'huile est aussi consommée et éjectée avec les gaz brûlés. Ainsi, les particules d'additifs - P, S, se trouvent dans les systèmes de post-traitement - les catalyseurs, les De-NOx, en diminuant leur efficacité. Avec le renforcement des normes européennes - les quantités des émissions admissibles ont été divisées par 4 ou 5 en dix ans, les constructeurs d'automobiles sont devant le dilemme. La suppression des additifs utilisés dans les huiles permettrait de préserver l'efficacité des systèmes de post-traitement et de répondre aux normes environnementales, de plus en plus exigeantes. Par contre, cette solution influencerait considérablement la durée de vie des moteurs pour les raisons citées ci-dessus. Le deuxième consiste à changer régulièrement tout le système de post-traitement pollué par les particules d'additifs. Dans les deux cas, cela engendre d'importants surcoûts.

Une autre voie possible est l'utilisation d'huiles contenant des polymères. Le mélange correspondant présente l'avantage d'avoir une viscosité moins sensible à la température. Le revers de la médaille est que la modélisation des fluides devient plus complexe et leurs comportements ne peuvent pas être correctement décrits par les relations classiques.

De ce fait, du point de vue industriel, la connaissance de la lubrification avec des mélanges contenant des polymères offre des avantages considérables. D'abord, cela présente un atout commercial majeur pour la vente de mécanismes fiables, permettant ainsi d'optimiser leur maintenance et de réduire leur immobilisation. Lorsqu'il s'agit d'applications comme la production d'énergie ou l'aéronautique, la connaissance de la durée de vie des composants est vitale.

Cette thèse a pour objectif l'étude des contacts EHD entre des surfaces rugueuses ou lisses, lubrifiées avec un fluide dont le comportement peut être défini comme newtonien ou avec des fluides contenant des polymères (non-newtonien).

Le Chapitre 1 propose un résumé de l'évolution de la lubrification EHD.

Le Chapitre 2 contient les différents modèles théoriques nécessaires pour la mise en équation d'un problème d'EHD.

Le Chapitre 3 introduit les notions des techniques numériques utilisées pour la résolution des équations présentées dans le Chapitre 2.

Le Chapitre 4 présente une étude de contact entre des surfaces rugueuses lubrifiées avec un fluide

newtonien.

Le Chapitre 5 se base sur des observations du Chapitre 4 pour analyser le comportement du contact lubrifié avec un fluide d'Eyring.

Le Chapitre 6 utilise des relations rhéologiques plus complexes - modèle de Rabinowitsch [94], Tait [73] et Doolittle [38], pour décrire le comportement du fluide dans les contacts EHD. Il présente également une comparaison des épaisseurs de film obtenues numériquement et expérimentalement.

# Chapitre 1

## Evolution de la lubrification élastohydrodynamique

### 1.1 Contact EHD sur-alimenté entre deux surfaces lisses

#### 1.1.1 Modélisation et résultats numériques

La mise en équation d'un problème d'EHD est étroitement liée avec les équations de Hertz et de Reynolds. Hertz [72] présente une étude concernant la déformation élastique des solides semi-infinis. Il propose une solution analytique du champ de pression pour un problème bidimensionnel. Plus tard, Reynolds [114] s'intéresse à l'écoulement d'un fluide mince visqueux entre deux surfaces parallèles. Des hypothèses (film mince, nombre de Reynolds faible...) permettent de simplifier les équations générales de la mécanique des fluides de Navier-Stokes. L'équation ainsi obtenue décrit la conservation du débit massique. Elle lie la pression qui règne dans le contact avec sa géométrie et les propriétés rhéologiques du lubrifiant.

Pour calculer l'épaisseur de film entre les dentures des engrenages, en 1916, Martin [102] utilise l'équation de Reynolds en régime iso-visqueux rigide. Plus tard, en 1938, Peppler [110] prend en compte la déformation des surfaces avec l'hypothèse de fluide iso-visqueux. Les effets de piézo-viscosité sont pris en compte dans l'étude de la lubrification des dentures rigides proposée par Gatcombe [54] en 1945. Les résultats obtenus indiquent une épaisseur de film dans le contact de même ordre de grandeur que les aspérités des surfaces. Cela semble irrationnel, vu la durée de vie presque illimitée des pièces mécaniques.

Un grand pas en avant est accompli par Ertel [47] qui propose la première étude EHD de contact linéique. Le calcul de la géométrie déformée est basée sur la théorie de contact sec de Hertz [72]. L'épaisseur de film est obtenue en ajoutant une constante au profil déformé. Suite à son analyse, Ertel propose la première expression analytique pour calculer l'épaisseur de film. Ertel explique également les limites de son approche : le fluide est considéré incompressible, l'éventuelle existence d'une réduction de l'épaisseur de film et un pic de pression à la sortie de contact. Petrousevich [111] parvient à déterminer l'épaisseur de film et le diagramme de champ de pression de contact en résolvant simultanément les équations de Reynolds et de la déformation élastique. Les résultats obtenus numériquement confirment l'existence du pic de pression à la sortie de contact. Dans les années 1960, Dowson et Higginson [39] réalisent un grand nombre de simulations numériques pour calculer l'épaisseur de film dans un contact cylindre/plan. Les résultats obtenus permettent de dégager l'influence des différents paramètres sur l'épaisseur de film. Les paramètres de contact sont groupés dans trois paramètres adimensionnés, utilisés par la suite pour trouver une expression analytique de l'épaisseur de film minimale.

Vu la complexité de la tâche, les premières solutions pour des contacts circulaires sont basées sur des considérations similaires que celles d'Ertel - Archard et Cowking [4]. Dans la période 1966-1967, Hamrock et Dowson [66],[67],[68],[69] proposent une étude numérique complète du contact elliptique entre des surfaces lisses. Ils présentent des formules analytiques pour évaluer l'épaisseur de film centrale et minimale en fonction des paramètres adimensionnés. La distinction claire des différents régimes de lubrification est due aux travaux de Johnson [85] et de Hamrock et Dowson [70] : iso-visqueux rigide, iso-visqueux élastique, piézo-visqueux rigide, piézo-visqueux élastique. La lubrification EHD peut être définie comme la lubrification en régime piézo-visqueux élastique.

### 1.1.2 Travail expérimental

Parallèlement avec les études théoriques, plusieurs personnes ont contribué à la maîtrise des études expérimentales. Lane and Hughes [93] et MacConochie et Cameron [101] présentent des mesures d'épaisseur de film de contact entre les dentures des engrenages. Certes, à ce stade les performances des techniques adoptées (résistance électrique) sont assez limitées.

Un vrai essor dans le domaine est atteint avec la mise en place d'une technique basée sur l'interférométrie optique par Gohar et Cameron [57],[58] et par Foord et al. [52]. Cette méthode repose sur l'analyse des franges issues de l'interférence des rayons lumineux. Elle permet de reconstituer le champ d'épaisseur de film dans le contact. La sensibilité du dispositif de mesure est exceptionnelle. En interférométrie conventionnelle, les plus faibles épaisseurs mesurables sont de l'ordre de 80 et 100  $\eta m$ . L'interférométrie en film mince permet d'augmenter les performances de la méthode. Dans ce cas, les plus faibles épaisseurs mesurables sont entre 2 et 5  $\eta m$  - Johnston et al. [88].

Les mesures expérimentales ont permis de visualiser le champ d'épaisseur de film avec son profil particulier à la sortie de contact. Elles ont également permis d'étudier l'influence des différents paramètres de contact sur l'épaisseur de film.

## 1.2 Techniques numériques

Même si les expressions analytiques des épaisseurs de film de Dowson et Higginson [39] et Hamrock et Dowson [66],[67],[68],[69] présentent une avancée majeure dans la compréhension des phénomènes EHD, les pressions de contact restent relativement faibles - jusqu'à 0.5  $GPa$ . Au-delà de cette limite, les algorithmes utilisés deviennent instables et inefficaces. Une méthode alternative proposée par Evans et Snidle [48] permet d'obtenir des solutions pour des pressions plus élevées  $O(1 GPa)$ . Les solutions des équations de la lubrification EHD sont obtenues d'une manière itérative. Cette méthode associée aux fortes non-linéarités et au grand nombre de points nécessaire, rend le processus classique de résolution vite cher en temps CPU. Une nouvelle étape est franchie avec le développement de techniques MultiGrilles par Brandt [19] et leur application à des problèmes EHD par Lubrecht [95]. Pour accélérer le calcul de déformations élastiques, Brandt et Lubrecht [21],[22], développent un algorithme de MultiGrille MultiIntegration (MLMI). Dans la même optique, Venner [122] optimise la relaxation de l'équation de Reynolds et rend ainsi l'algorithme MultiGrille beaucoup plus stable et efficace. La résolution d'un problème EHD pour des pressions élevées  $O(3 GPa)$  devient possible même sur des ordinateurs personnels.

## 1.3 Contact EHD sous-alimenté

### 1.3.1 Modélisation et résultats numériques

Jusqu'à maintenant, la modélisation EHD considère que le contact est sur-alimenté. Cela signifie que l'épaisseur de film dans le contact ne dépend pas de la quantité de lubrifiant qui alimente le contact. Très souvent, lorsque la quantité de lubrifiant n'est pas suffisante, le ménisque de formation du film se rapproche de la frontière du contact hertzien. Dans ce cas, l'épaisseur de film est directement dépendante de la position du ménisque. Le contact est dit sous-alimenté. Elrod et Adams [46] et plus tard Bayada [18] proposent une équation de Reynolds modifiée couplée avec une condition supplémentaire pour tenir compte de la sous-alimentation.

Chevalier [29] présente une étude numérique du phénomène dans les contacts EHD en considérant comme un paramètre l'huile disponible sur la piste pour déterminer la sévérité de la sous-alimentation. Il propose la relation entre la quantité de lubrifiant disponible à l'entrée et l'épaisseur de film centrale. Damiens [35] étudie la physique de l'éjection du lubrifiant et parvient à décrire la sensibilité d'un contact à une sous-alimentation locale. Popovici [112] met en évidence les effets d'une hauteur variable à l'entrée du contact sur la distribution de l'épaisseur de film dans le contact.

### 1.3.2 Travail expérimental

Wedeven [131] et Wedeven et al. [133] constatent expérimentalement que dans les conditions de sous-alimentation, l'épaisseur de film est plus faible que celle d'un contact sur-alimenté. Chiu [30] obtient des résultats montrant que la sévérité de la sous-alimentation augmente avec la viscosité du fluide et la vitesse de roulement. Cette constatation est confirmée aussi par Gadallah et Dalmaz [53].

Puisque le phénomène de sous-alimentation est caractéristique pour des applications utilisant de la graisse, plusieurs études expérimentales sont disponibles dans la littérature. Cann et al. [26] distinguent trois zones de réduction d'épaisseur de film en fonction des états de la graisse dans ces zones. Une étude de l'influence de la quantité et de la qualité des huiles de base constituant les graisses est proposée par Cann [24] et Mérieux et al. [103].

## 1.4 Endommagement et durée de vie des pièces mécaniques

A part le challenge scientifique que représente l'étude de l'endommagement et de la durée de vie, le sujet suscite le plus grand intérêt des ingénieurs d'application car il est directement lié à la fiabilité et au fonctionnement correct des mécanismes. La plupart des modèles sont articulés autour de la modélisation de la fatigue de roulement, pour des raisons historiques.

Talian [119] propose une revue complète des modèles de fatigue de contact. Il distingue deux approches utilisées dans les modèles. La première est basée sur des critères de résistance statistiques. L'approche traite uniquement la phase d'initiation de la fissure responsable de l'endommagement. Lundberg et Palmgren [100] proposent une relation entre la contrainte de cisaillement maximale, sa profondeur, le volume surcontraint, le nombre de chargements et la probabilité de survie. De nombreuses évolutions du modèle ont eu lieu permettant au modèle de s'affiner. La version la plus connue est proposée par Ioannides et Harris [82] dans laquelle la notion d'une contrainte limite propre au matériau est ajoutée dans la définition du modèle. Au-dessous de cette limite, la durée de vie infinie est obtenue. Cette approche tient également compte du champ de contraintes

de cisaillement dans le solide. En 1990, Lubrecht et al. [98] affinent le modèle d'Ioannides et Harris [82] en permettant d'éliminer certaines constantes dans le modèle, ainsi que la profondeur d'initiation de la fissure. Coulon [33] et Coulon et al. [34] utilisent cette formulation pour étudier la fatigue de roulement des surfaces indentées.

La deuxième classe de modèle est basée sur des considérations plus physiques du phénomène. L'accumulation des dislocations autour des inclusions est étudiée par Lamagnère et al. [92]. Après un certain nombre de chargements, un seuil critique de dislocation est atteint, conduisant à la formation d'une fissure.

Une classe intermédiaire de modèle de prédiction de la fatigue est l'approche de Dang Van et al. [36]. L'analyse peut être considérée comme mésoscopique puisqu'elle est basée sur une description au niveau du grain mais à l'aide des données macroscopiques. Un critère proposé permet la prise en compte des sollicitations multiaxiales.

Dans toutes ces approches, la phase de propagation de la fissure n'est pas prise en compte puisqu'elle est très courte par rapport à la phase de sa nucléation (hypothèse de *High Cycle Fatigue*).

## 1.5 Problème rugueux - modélisation des rugosités

### 1.5.1 Modélisation et résultats numériques

Lorsque l'épaisseur de film est du même ordre de grandeur que la micro-géométrie des surfaces, cette dernière doit être prise en compte lors de la modélisation EHD. La présence de rugosités modifie l'épaisseur de film et provoque des variations du champ de pression dans le contact. La distribution des contraintes dans la matière est aussi perturbée, ce qui d'un point de vue pratique, peut se traduire par une réduction de la durée de vie des pièces.

La modélisation des aspérités des surfaces débute avec les travaux de Greenwood et Williamson [64] et Greenwood et Tripp [63] de contact sec entre deux surfaces rugueuses. L'approche utilise une description statistique des irrégularités. Le microcontact entre les aspérités est considéré hertzien et indépendant des contacts voisins.

Des résultats d'épaisseur centrale de film dans un contact iso-visqueux élastique sont obtenus par Patir et Cheng [109]. La rugosité des surfaces est modélisée par des aspérités statistiques. D'autres études sont proposées par Goglia et al. [55],[56], Kweh et al. [91], Venner et ten Napel [129] et Ehret et al. [41].

Le développement des algorithmes de calcul plus performants, ainsi que la progression des moyens de calcul, permettent de traiter le problème EHD transitoire en temps raisonnables. Ai et Cheng [1], [2] obtiennent des résultats avec des surfaces indentées et avec des surfaces réelles. La modélisation des deux surfaces rugueuses est prise en compte dans le travail de Lubrecht et Venner [99]. Les solutions deviennent difficiles à interpréter lorsque le glissement est considéré.

A ce stade, les simulations des contacts EHD entre des surfaces avec des rugosités réelles, lubrifiées avec un fluide newtonien sont relativement bien maîtrisées. Cependant, la complexité des profils réels voir Figure 1.1, ne permet pas l'interprétation et la compréhension des phénomènes essentiels de la lubrification EHD. Cette approche est aussi relativement limitée lors d'une étude paramétrique des effets de la rugosité sur la lubrification EHD.

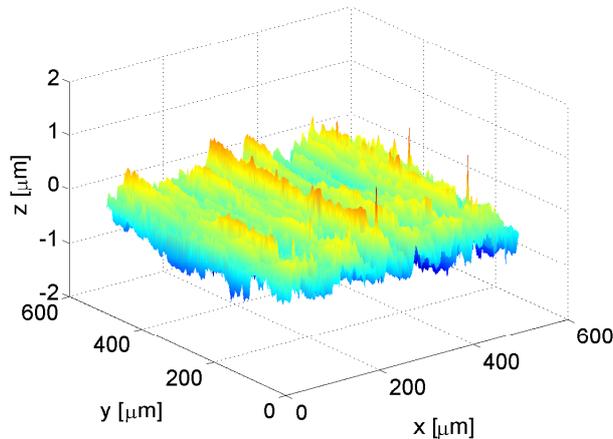


FIG. 1.1 – Exemple de rugosité réelle

Pour améliorer la connaissance du phénomène et la qualité des moyens de prédiction, une approche alternative consiste à considérer des rugosités harmoniques sinusoïdales. Le profil initial de la rugosité est entièrement défini par une amplitude initiale et une (deux dans le cas des surfaces anisotropes) longueur(s) d'onde. Greenwood et Johnson [60] proposent une étude analytique du contact rugueux avec des rugosités transversales. Ils distinguent les surpressions induites par les rugosités et parviennent à quantifier l'amplitude de ces dernières pour les produire. Le résultat est obtenu dans les conditions de roulement/glisement. Les travaux sont étendus pour tout type de rugosité harmonique par Morales [106], Greenwood et Morales [61]. Ils découpent le problème rugueux transitoire en deux problèmes séparés. Dans le premier, les aspérités sont stationnaires et la zone centrale de contact est concernée. Le deuxième considère que la surface rugueuse est en mouvement et analyse la propagation des perturbations produites à l'entrée du contact. Le profil final de la rugosité est la somme des solutions des deux problèmes. Dans les conditions de roulement/glisement, les deux solutions ne se propagent pas à la même vitesse. Ils observent une dissociation entre les rugosités déformées et les surpressions qui les produisent. Les observations de Venner [122] sont confirmées : dans les conditions de roulement/glisement, il y a un déphasage entre le profil déformé et les surpressions. Le seul défaut est que pour pouvoir quantifier les surpressions dans le contact, le modèle de Greenwood et Morales [61] a besoin de l'amplitude déformée à l'entrée du contact.

Hooke [76], [77] propose une analyse basée sur la méthode de faibles perturbations pour le contact linéique avec une rugosité bidirectionnelle. Il étudie l'influence des conditions de fonctionnement et de l'orientation de la rugosité sur la réduction d'amplitude de cette dernière. La notion de longueur d'entrée de contact est introduite. Selon ses observations, lorsque la longueur d'onde de la rugosité est faible, l'amplitude est très peu déformée. Au contraire, lorsque la longueur d'onde est importante, l'amplitude de la rugosité est presque complètement écrasée, la longueur de référence est la longueur d'entrée de contact. Suite à ce travail, un paramètre adimensionné gouvernant la réduction d'amplitude est proposé.

En parallèle, plusieurs études numériques ont été menées. Les travaux de Couhier [32] et Venner et al. [124] fournissent des résultats sur la réduction d'amplitude dans un contact linéique. Les résultats obtenus sont tracés en fonction d'un paramètre adimensionné similaire au paramètre de Hooke [76]. Lubrecht et al. [97] étudient le même phénomène dans les conditions de roulement/glisement. Ils proposent une expression modifiée du paramètre afin de tenir compte

du roulement/glisement. Venner et Lubrecht [127] étendent l'étude aux contacts circulaires en roulement pur. Ils proposent un paramètre généralisé pour tout type de rugosité gouvernant la déformation élastique dans les conditions de roulement/glisement. Une courbe pour quantifier l'amplitude déformée est également présentée. Avec cette dernière, l'obstacle pour l'exploitation du modèle analytique de Greenwood et Morales [61] est franchi.

Le couplage des deux méthodes analytique et numérique est accompli par Hooke et Venner [80]. Ils comparent des résultats obtenus pour un contact linéaire et circulaire. La conclusion est la même pour les deux types de contact : la réduction d'amplitude dans les deux cas est gouvernée par le rapport entre la longueur de la rugosité et la longueur d'entrée de contact.

L'étape suivante de la résolution du problème rugueux est le couplage avec d'autres effets typiques des contacts EHD. Venner et al. [123] publient des résultats concernant la réduction d'amplitude dans un contact circulaire sous-alimenté. Basés sur les observations numériques montrant une diminution de la longueur d'entrée, ces résultats proposent une expression modifiée du paramètre adimensionné. Cette version du paramètre tient compte aussi de la quantité d'huile disponible à l'entrée. Venner et Hooke [125] confirment les observations de Venner al. [123] à propos de la prise en compte de l'huile disponible.

### 1.5.2 Travail expérimental

Les mesures expérimentales de l'épaisseur de film utilisent l'interférométrie optique. Dans la plupart des travaux expérimentaux, des surfaces avec aspérités bien définies comme des indents ou des micro bosses sont utilisées, par exemple les travaux de Wedeven et Cusano [132], Kaneta et Cameron [89]. Les résultats de Wedeven et Cusano [132] permettent de valider les observations numériques d' Ai et Cheng [1]. La comparaison des observations de Kaneta et al. [90] et de Venner et Lubrecht [126] montre une très bonne corrélation. Plus récemment, Felix-Quinonez et al. [50] présentent des résultats expérimentaux d'épaisseur de film mesurée lors du passage d'une rainure dans un contact EHD. La comparaison avec les résultats obtenus avec l'approche de Greenwood et Morales [61] présente aussi un bon accord.

Le passage à l'utilisation expérimentale des surfaces avec des rugosités plus complexes présente des difficultés. Par exemple, Ehret et al. [42] obtiennent des solutions numériques qui montrent que le profil des bosses déformées est différent de l'original. Leurs observations sont confirmées expérimentalement par Ehret et al. [44]. Felix-Quinonez et al. [51] montrent une étude expérimentale et numérique avec des rugosités bidimensionnelles. Ils soulignent l'importance de la prise en compte de la micro-géométrie mais aussi de la modélisation rhéologique pour la compréhension des phénomènes.

## 1.6 Modélisation rhéologique des fluides

Les conditions de fonctionnement des contacts EHD sont très sévères - des pressions élevées, des taux de cisaillement importants (faible épaisseur de film par rapport à la vitesse de glissement), des effets thermiques. Dans ces conditions, les propriétés rhéologiques des lubrifiants subissent des transformations importantes. La prise en compte de la modélisation du comportement du fluide est donc indispensable sous ces sollicitations extrêmes.

### 1.6.1 Modélisation rhéologique à taux de cisaillement élevé

Deux approches différentes sont utilisées pour la caractérisation des propriétés rhéologiques en fonction du taux de cisaillement.

La première est basée sur la mesure expérimentale du coefficient de frottement dans le contact à l'aide d'une machine EHD. Les résultats montrent que le coefficient de frottement est généralement inférieur à 0.1. Or, une modélisation newtonienne - relation linéaire entre la contrainte de cisaillement et le taux de cisaillement, surestime largement cette valeur. Cette observation permet de discuter la validité de la modélisation newtonienne pour le calcul du coefficient de frottement. La mesure du coefficient de frottement avec une vitesse moyenne constante, associée à l'hypothèse de profil de vitesses connu, permet d'en déduire la contrainte de cisaillement. Cela met en évidence l'existence d'une contrainte limite de cisaillement caractéristique pour chaque fluide.

Johnson et Tevaarwerk [87] proposent une relation de cisaillement basée sur le modèle de Maxwell. Dans ce modèle, le taux de cisaillement total est la somme entre le cisaillement élastique et le cisaillement visqueux. Johnson et Tevaarwerk [87] testent plusieurs huiles et proposent différentes fonctions pour la partie visqueuse. Pour la plupart des huiles, une fonction en sinus hyperbolique permet un bon accord avec les résultats expérimentaux. Cependant, dans le cadre des contacts EHD, la majeure partie du frottement est due au terme visqueux. Cela permet de ne considérer que le deuxième terme de l'équation de Johnson et Tevaarwerk [87]. Le terme en sinus hyperbolique, souvent référé comme le modèle d'Eyring, est la relation la plus souvent utilisée pour décrire les effets fluidifiants des huiles par les tribologues. Houpert [81] confirme la bonne corrélation théorie expérience avec la loi visqueuse en sinus hyperbolique pour en cisaillement longitudinal.

Jacod [83], Bair et Qureshi [12] présentent une description détaillée des modèles rhéologiques valables dans la littérature.

Conry et al. [31] obtiennent une équation de Reynolds modifiée avec le modèle d'Eyring. Les simulations numériques avec le modèle d'Eyring implémenté commencent par les contacts linéaires. Ai et al. [3] obtiennent des solutions pour des contacts lisses. Vergne et al. [130] et Ehret et al. [43] parviennent à résoudre le problème bidimensionnel. Ils remarquent que lorsque la contrainte limite de cisaillement devient très faible, l'épaisseur de film décroît également.

L'analyse des surfaces rugueuses débute avec les travaux de Chang et al. [27]. Les observations montrent que les champ de pression et d'épaisseur de film dépendent du modèle rhéologique. Chang et al. [27] indiquent que les différences entre les modèles sont plus importantes pour les faibles longueurs d'onde. Elcoate et al. [45] présentent des résultats de simulations numériques avec des rugosités réelles.

L'étude des surfaces harmoniques sinusoïdales est l'objet des travaux de Hooke [78]. Il propose une extension de la courbe de réduction pour inclure les effets non-newtoniens. Jacod et al. [84] observent le même phénomène et montrent que la réduction d'amplitude n'est pas constante dans la zone centrale de contact. Une démarche proposée par Ehret [43] permet la dérivation directe de l'équation de Reynolds. Elle est basée sur une expansion de Taylor de premier ordre de la relation contrainte de cisaillement et taux de cisaillement. Plus tard, Greenwood [59] confirme que cette approximation est adéquate pour l'analyse de la lubrification entre deux surfaces lisses et qu'elle pourrait l'être lorsque les surfaces sont rugueuses.

La deuxième approche pour la caractérisation rhéologique des fluides est basée sur des mesures de la viscosité en fonction du taux de cisaillement à des pressions élevées. Les résultats expérimentaux confirment aussi l'existence d'une contrainte limite de cisaillement - Bair et Winer [13], [14]. Les mesures de viscosité en fonction du cisaillement permettent ainsi de remonter directement aux contraintes. Le modèle le plus général est celui de Carreau-Yasuda Yasuda et al. [135]. Il permet d'approximer les résultats expérimentaux avec une très bonne corrélation. Cependant, le modèle a deux défauts majeurs. Le premier est lié au nombre de paramètres nécessaires pour son utilisation. Ils peuvent être extraits à l'aide de mesures expérimentales ou à l'aide de simulations de dynamique moléculaire - Bair et al. [10]. Le deuxième désavantage est que la dérivation directe d'une équation de Reynolds n'est pas possible. Cela explique son application limitée dans le domaine de l'EHD.

### 1.6.2 Modélisation rhéologique à faible taux de cisaillement

Dans cette catégorie sont comprises les relations décrivant la dépendance de la densité et de la viscosité des fluides en fonction de la pression et de la température.

Pour décrire la compressibilité du fluide, Dowson et Higginson [40] proposent une relation empirique. Cette expression est la plus utilisée dans le domaine de l'EHD vue sa simplicité. L'équation de Tait [73] présente une meilleure modélisation des effets de compressibilité des fluides. Par contre, son utilisation exige la connaissance de trois paramètres supplémentaires.

La variation de la viscosité en fonction de la pression est étudiée par Barus [16], [17]. Il observe une dépendance exponentielle pour des pressions jusqu'à 100 MPa.

Plus tard, Bridgman [23] élargit le domaine de mesures jusqu'à 1 *GPa*. Les résultats obtenus montrent que la nature de la dépendance de la viscosité varie avec la pression. Pour de faibles pressions, la croissance observée est plus faible que celle donnée par la relation de Barus [16],[17]. Pour des pressions comprises entre 200 et 300 *MPa*, la réponse est exponentielle. Finalement, pour des pressions encore plus élevées, l'augmentation de la viscosité est plus rapide que celle d'une fonction exponentielle. La courbe de la viscosité en fonction de la pression présente deux points d'inflexion. La seule équation disponible et capable de décrire cette tendance est l'équation de Doolittle [38] basée sur la théorie du volume libre. De nouveau, le modèle exige la connaissance plus avancée du fluide puisque son utilisation nécessite la connaissance de deux paramètres supplémentaires.

Finalement, une troisième équation est élaborée par Roelands [115] légèrement plus complexe que celle de Barus [16],[17] mais aussi beaucoup utilisée dans le domaine de l'EHD.

## 1.7 Futurs développements dans le domaine de l'EHD

Les contacts EHD sur- ou sous- alimentés entre deux surfaces lisses lubrifiées avec un fluide newtonien sont relativement bien compris. Des formules analytiques permettent l'estimation des épaisseurs de film centrale et minimale pour tous les types de contacts. Les mesures expérimentales basées sur la technique d'interférométrie optique sont aussi bien maîtrisées.

Les études numériques et expérimentales des surfaces rugueuses harmoniques ou avec des rugosités particulières (indents, rainures...), lubrifiées avec un fluide newtonien, montrent aussi une bonne compréhension des phénomènes de lubrification. Les analyses ont permis de mettre en

évidence l'influence significative de l'entrée de contact sur la déformation élastique des aspérités. Les contacts étudiés sont aussi sur- ou sous- alimentés.

Du point de vue industriel, pour la plupart des applications de tous les jours, la prédiction de la durée de vie des composants mécaniques est un atout majeur. Tallian [118] propose une classification des paramètres influençant la durée de vie des contacts. A l'issue de cette classification, un paramètre adimensionné composé de l'amplitude de la rugosité et de l'épaisseur de film centrale est proposé pour estimer les effets sur la performance des contacts. Or, les études numériques et analytiques ont clairement montré que la pente (la longueur d'onde) des rugosités joue aussi un rôle important sur les surpressions et sur les surcontraintes. Pour des estimations rapides, un outil basé sur ces trois paramètres est donc nécessaire, d'autant plus que l'explication du phénomène serait plus directe.

Les études des effets non-newtoniens dans les contacts linéiques ont déjà permis d'observer des différences de comportement. Des simulations numériques bidimensionnelles avec des surfaces harmoniques lubrifiées avec un fluide d'Eyring ne sont pas valables actuellement. Elles sont nécessaires pour généraliser le modèle de réduction d'amplitude.

L'utilisation de modèles de comportement de fluide plus complexes nécessite des mesures rhéologiques complexes. Pour cette raison, il n'y a pas de résultats de simulations numériques complètes basés sur ces modèles. Cependant, l'utilisation d'huiles à taux élevé de polymères et leurs propriétés montrent la nécessité de cette modélisation.



## Chapitre 2

# Modélisation de la lubrification élastohydrodynamique

La modélisation d'un problème de lubrification EHD est basée sur les équations suivantes : l'équation de Reynolds, l'équation de l'élasticité et l'équation de l'équilibre de la charge. L'équation de Reynolds décrit l'écoulement de film mince entre deux corps solides ; l'équation de l'élasticité décrit la déformation élastique des corps en contact et l'équation de l'équilibre de la charge assure que l'intégrale de la pression dans le contact doit être égale à la force extérieure appliquée. A ces trois équations sont associées les relations constitutives du fluide. Dans le Chapitre 1, ces relations sont classées en deux groupes : relations à grand taux de cisaillement et relations à faible taux de cisaillement. Les premières relations sont nécessaires pour l'obtention de l'équation de Reynolds et pour cette raison sont présentées au début du chapitre. Les deuxièmes lient la densité et la viscosité du fluide à la pression issue de l'équation de Reynolds.

L'introduction de modèles rhéologiques non newtoniens conduit à l'obtention d'une équation de Reynolds modifiée. Le terme modifiée est utilisé pour désigner l'ajout de termes supplémentaires dans l'équation de Reynolds. Leurs expressions dépendent des modèles rhéologiques.

Ce chapitre présente les équations utilisées pour la modélisation d'un problème EHD. D'abord, les relations entre la viscosité et la contrainte de cisaillement sont présentées. La section suivante est consacrée à l'obtention de l'équation de Reynolds modifiée. Par la suite, les expressions de l'élasticité, de l'équilibre de la charge et les relations à faible taux de cisaillement sont présentées. Finalement, les grandeurs caractéristiques du contact sec de Hertz sont utilisées pour l'adimensionnement du problème.

### 2.1 Modélisation du fluide à fort taux de cisaillement

Les modèles rhéologiques donnent les relations entre la contrainte de cisaillement et le taux de cisaillement dans le fluide. Lorsque le fluide est dit newtonien, la relation est linéaire. Dans le cas contraire, le fluide est dit non newtonien. La Figure 2.1 donne une comparaison entre le modèle newtonien et différents modèles non newtoniens. Pour tous les modèles non newtoniens, à partir d'une certaine valeur de la contrainte de cisaillement adimensionnée  $\tau/\tau_0$ , la relation devient fortement non linéaire. La principale différence entre les modèles non newtoniens est la manière dont la contrainte de cisaillement adimensionnée approche sa valeur asymptotique pour des valeurs élevées du cisaillement.

Pour généraliser l'écriture des relations rhéologiques, Hamrock et al. [71] et Jacod [83] utilisent

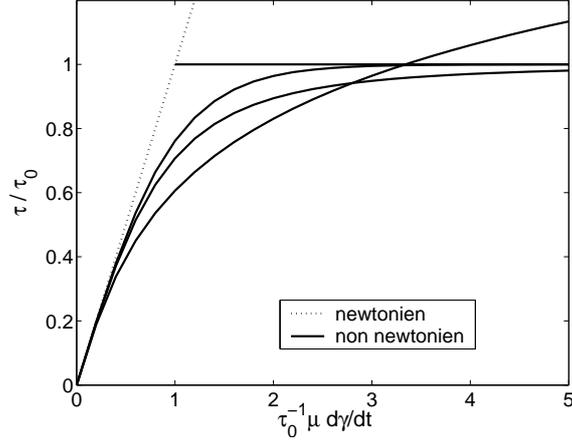


FIG. 2.1 – Comparaison entre différents modèles rhéologiques Hamrock et al. [71]. Evolution de la contrainte de cisaillement adimensionnée  $\tau/\tau_0$  en fonction de la viscosité  $\mu$ , du taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  et de la contrainte limite de cisaillement  $\tau_0$

Modèle	$f(\tau/\tau_0)$
newtonien	1
Eyring	$(\tau_0/\tau) \sinh(\tau/\tau_0)$
Rabinowitsch	$1 + (\tau/\tau_0)^2$

TAB. 2.1 – Fonctions rhéologiques

la notion de fonction rhéologique. Cette fonction donne la relation entre la viscosité  $\mu$  qui dépend uniquement de la pression, du taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  et de la contrainte de cisaillement  $\tau$  :

$$\mu \dot{\gamma} = \tau f(\tau/\tau_0) \quad (2.1)$$

Remarque : Dans les travaux de Hamrock et al. [71], Jacod [83], le symbole  $\mu$  dans l'expression 2.1 est remplacé par le symbole  $\eta$ . Le même symbole est utilisé dans les relations viscosité-pression. Dans le cadre de cette étude, les notions utilisées par Bair et Khonsari [8] sont adoptées ;  $\eta$  désigne la viscosité qui dépend du taux de cisaillement et  $\mu$  désigne la viscosité qui dépend uniquement de la pression.

Le Tableau 2.1 et la Figure 2.2 montrent les fonctions rhéologiques utilisées dans le cadre de cette étude.

Remarque : Greenwood [59] utilise une fonction rhéologique similaire :  $f(\tau/\tau_0) = 1 + (1/2) (\tau/\tau_0)^2$ . Pour des valeurs élevées de la contrainte limite de cisaillement  $\tau_0$ , on a :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} f(\tau/\tau_0) = 1 \quad (2.2)$$

L'équation 2.2 montre que le modèle newtonien peut être considéré comme un cas particulier des modèles non newtoniens.

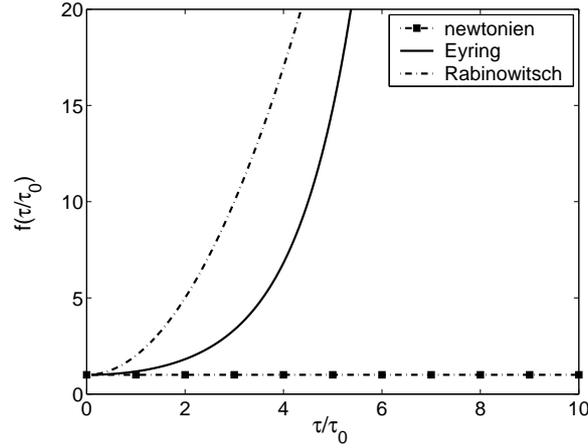


FIG. 2.2 – Comparaison des différentes fonctions rhéologiques utilisées dans le cadre de cette étude

## 2.2 Relations fondamentales

L'équation de Reynolds est un cas particulier de l'équation vectorielle de Navier Stokes (3 équations en  $3D$ ). L'équation de Navier Stokes est basée sur les lois suivantes : la loi de comportement du fluide (loi rhéologique), la loi fondamentale de la dynamique et la loi de conservation de la masse. Les hypothèses suivantes permettent de simplifier les expressions des lois :

- le film est mince - l'épaisseur de film  $h$  (suivant  $z$ ) est très faible par rapport aux dimensions caractéristiques du contact ( $h/b \ll 1$ ,  $h/R_x \ll 1$ ,  $h/R_y \ll 1$ ) Figure 2.3,
- le fluide est continu et adhère aux parois,
- l'écoulement est laminaire,
- la pression est constante dans l'épaisseur de film, i.e.  $p$  ne dépend pas de  $z$ ,
- les forces de volume et de surface sont négligées devant les forces visqueuses.

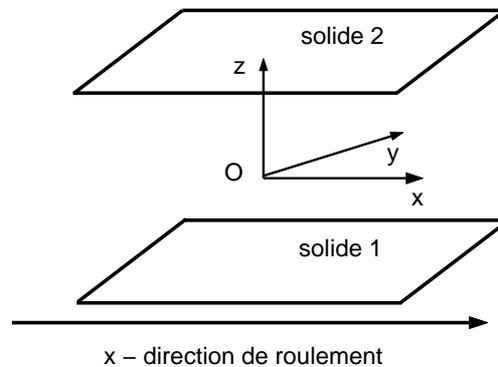


FIG. 2.3 – Schéma de contact

Avec les hypothèses précédentes, l'équilibre d'un volume élémentaire de fluide s'écrit :

$$\begin{cases} \tau_x = \tau_a + z \frac{\partial p}{\partial x} \\ \tau_y = \tau_b + z \frac{\partial p}{\partial y} \\ \tau_e^2 = \tau_x^2 + \tau_y^2 \end{cases} \quad (2.3)$$

avec  $\tau_e$  la contrainte équivalente de cisaillement et  $\tau_a, \tau_b$  les contraintes moyennes de cisaillement suivant  $x$  et  $y$ . Les relations entre les gradients des vitesses et les contraintes de cisaillement deviennent :

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial u}{\partial z} = \tau_x f(\tau_e/\tau_0) \\ \mu \frac{\partial v}{\partial z} = \tau_y f(\tau_e/\tau_0) \end{cases} \quad (2.4)$$

L'utilisation des équations 2.3 et 2.4 conduit aux expressions suivantes :

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial u}{\partial z} = \left( \tau_a + z \frac{\partial p}{\partial x} \right) f(\tau_e/\tau_0) \\ \mu \frac{\partial v}{\partial z} = \left( \tau_b + z \frac{\partial p}{\partial y} \right) f(\tau_e/\tau_0) \end{cases} \quad (2.5)$$

Les expressions 2.5 doivent être intégrées dans l'épaisseur de film (suivant  $z$ ) pour obtenir le profil des vitesses. Suivant le modèle rhéologique :

- modèle newtonien : la fonction rhéologique est égale à l'unité et les intégrations sont triviales.
- modèle de Rabinowitsch : les intégrations sont plus longues mais peuvent être effectuées analytiquement.
- modèle d'Eyring : les expressions analytiques des intégrales ne sont pas disponibles. Deux choix sont possibles : le premier consiste à intégrer les expressions numériquement dans l'épaisseur de film  $h$ , sur tout le domaine de calcul. Cette tâche devient très vite coûteuse lors d'un calcul transitoire, même avec les moyens de calcul modernes. Le deuxième choix est basé sur l'utilisation d'une approximation de la fonction rhéologique  $f(\tau/\tau_0)$  qui permet l'intégration directe. Une approximation linéaire (basée sur un développement de Taylor) est proposée par Ehret et al. [43] et Holt et al. [75]. Selon Greenwood [59], lorsque les gradients de pression ne sont pas importants et le glissement est uniquement dans la direction du roulement  $x$ , les expressions des contraintes de cisaillement peuvent être simplifiées. Selon Greenwood [59], lorsqu'une approximation linéaire de la fonction rhéologique est utilisée, la contrainte moyenne  $\tau_b$  suivant  $y$  est nulle. Dans ce cas, les contraintes de cisaillement suivant  $x$  et  $y$  sont partiellement couplées. La contrainte équivalente de cisaillement  $\tau_e$  devient :

$$\tau_e^2 = \tau_x^2 + \tau_y^2 \approx \tau_x^2 \quad (2.6)$$

Greenwood [59] suggère que cette approximation est adéquate pour l'analyse des contacts EHD lisses et qu'elle pourrait l'être aussi pour des surfaces rugueuses.

## 2.2.1 Profil des vitesses

### Modèle d'Eyring

Les hypothèses précédentes et l'équation 2.6 permettent de simplifier les équations 2.5 :

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial u}{\partial z} = \left( \tau_a + z \frac{\partial p}{\partial x} \right) f \left( \frac{\tau_a}{\tau_0} + \frac{z}{\tau_0} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \\ \mu \frac{\partial v}{\partial z} = z \frac{\partial p}{\partial y} f \left( \frac{\tau_a}{\tau_0} + \frac{z}{\tau_0} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (2.7)$$

L'approximation linéaire de la fonction rhéologique est issue du développement de Taylor au 1<sup>er</sup> ordre par rapport à  $z$  :

$$f \left( \frac{\tau_a}{\tau_0} + \frac{z}{\tau_0} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = f(\tau_a/\tau_0) + \frac{z}{\tau_0} \frac{\partial p}{\partial x} f'(\tau_a/\tau_0) \quad (2.8)$$

La linéarisation de la fonction rhéologique permet une intégration analytique suivant  $z$  des gradients des vitesses 2.4. Le profil des vitesses est le suivant :

$$\begin{cases} \mu u(z) = \left( \frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) \frac{\partial p}{\partial x} \left( \frac{\tau_a}{\tau_0} f'(\tau_a/\tau_0) + f(\tau_a/\tau_0) \right) + \\ \mu \frac{z}{h} (u_2 - u_1) + \mu \bar{u} \\ \mu v(z) = \left( \frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) \frac{\partial p}{\partial y} f(\tau_a/\tau_0) \end{cases} \quad (2.9)$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} u = u_1, v = 0 & \text{si } z = -h/2 \\ u = u_2, v = 0 & \text{si } z = h/2 \end{cases} \quad (2.10)$$

La contrainte de cisaillement moyenne suivant  $x$  s'écrit :

$$\tau_0 \sinh \left( \frac{\tau_a}{\tau_0} \right) = \mu \frac{u_2 - u_1}{h} \quad (2.11)$$

### Modèle de Rabinowitsch

Dans le cas du modèle de Rabinowitsch, l'équation 2.4 devient :

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial u}{\partial z} = \tau_x \left( 1 + \left( \frac{\tau_e}{\tau_0} \right)^2 \right) \\ \mu \frac{\partial v}{\partial z} = \tau_y \left( 1 + \left( \frac{\tau_e}{\tau_0} \right)^2 \right) \end{cases} \quad (2.12)$$

Les gradients de vitesses 2.12 sont directement intégrés suivant  $z$ . Les expressions des vitesses avec les conditions aux limites 2.10 deviennent :

$$\begin{cases} \mu u(z) = \mu \frac{u_2 + u_1}{2} + A_x z + B_x \left( \frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) + C_x \frac{z^3}{3} + D_x \left( \frac{z^4}{4} - \frac{h^4}{64} \right) \\ \mu v(z) = A_y z + B_y \left( \frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) + C_y \frac{z^3}{3} + D_y \left( \frac{z^4}{4} - \frac{h^4}{64} \right) \end{cases} \quad (2.13)$$

avec  $A_x, A_y, B_x, B_y, C_x, C_y, D_x, D_y$  des constantes par rapport à  $z$  :

$$\left\{ \begin{array}{l}
A_x = \tau_a \left( 1 + \frac{\tau_a^2 + \tau_b^2}{\tau_0^2} \right) \\
A_y = \tau_b \left( 1 + \frac{\tau_a^2 + \tau_b^2}{\tau_0^2} \right) \\
B_x = \left( \frac{\partial p}{\partial x} \left( 1 + \frac{3\tau_a^2 + \tau_b^2}{\tau_0^2} \right) + 2 \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\tau_a \tau_b}{\tau_0^2} \right) \\
B_y = \left( \frac{\partial p}{\partial y} \left( 1 + \frac{\tau_a^2 + 3\tau_b^2}{\tau_0^2} \right) + 2 \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\tau_a \tau_b}{\tau_0^2} \right) \\
C_x = \frac{1}{\tau_0^2} \left( \tau_a \left( 3 \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 \right) + 2 \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} \tau_b \right) \\
C_y = \frac{1}{\tau_0^2} \left( \tau_b \left( \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + 3 \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 \right) + 2 \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} \tau_a \right) \\
D_x = \frac{1}{\tau_0^2} \frac{\partial p}{\partial x} \left( \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 \right) \\
D_y = \frac{1}{\tau_0^2} \frac{\partial p}{\partial y} \left( \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 \right)
\end{array} \right. \quad (2.14)$$

Les contraintes de cisaillement moyennes  $\tau_a$  et  $\tau_b$  sont les solutions du système :

$$\left\{ \begin{array}{l}
A_x + C_x \frac{h^2}{12} = \mu \frac{u_2 - u_1}{h} \\
A_y + C_y \frac{h^2}{12} = 0
\end{array} \right. \quad (2.15)$$

Remarque : La résolution du système d'équations 2.15 s'effectue par une méthode itérative de Newton-Raphson. Un algorithme de la méthode est proposé par Press et al. [113] - Section 9.6.

### 2.3 Equation de Reynolds modifiée

Les flux suivant les directions  $x$  et  $y$  sont obtenus en intégrant dans l'épaisseur de film les expressions 2.9 ou 2.13. L'utilisation de la loi de conservation de la masse conduit à l'obtention de l'équation de Reynolds modifiée :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{12\mu} \phi_x \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho h^3}{12\mu} \phi_y \frac{\partial p}{\partial y} \right) - \frac{\partial (\bar{u} \rho h)}{\partial x} - \frac{\partial (\rho h)}{\partial t} = 0 \quad (2.16)$$

Les symboles  $\phi_x$  et  $\phi_y$  sont liés à l'introduction de modèles non newtoniens. Greenwood [59] les définit comme facteurs de flux suivant  $x$  et  $y$ . Ehret et al. [43] et Jacod [83] définissent les termes  $\mu/\phi_x$ ,  $\mu/\phi_y$  comme des viscosités efficaces. Les expressions sont différentes suivant le modèle rhéologique. Pour le modèle newtonien :

$$\begin{cases} \phi_x = 1 \\ \phi_y = 1 \end{cases} \quad (2.17)$$

Lorsque le modèle d'Eyring est utilisé, les expressions sont les suivantes :

$$\begin{cases} \phi_x = \cosh\left(\frac{\tau_a}{\tau_0}\right) \\ \phi_y = \frac{\tau_0}{\tau_a} \sinh\left(\frac{\tau_a}{\tau_0}\right) \end{cases} \quad (2.18)$$

Finalement, pour le modèle de Rabinowitsch,  $\phi_x$  et  $\phi_y$  sont :

$$\begin{cases} \phi_x = 1 + \frac{3\tau_a^2 + \tau_b^2}{\tau_0^2} + 2\frac{\tau_a\tau_b}{\tau_0^2} \left(\frac{\partial p}{\partial y} / \frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{3}{20} \frac{h^2}{\tau_0^2} \left( \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 \right) \\ \phi_y = 1 + \frac{\tau_a^2 + 3\tau_b^2}{\tau_0^2} + 2\frac{\tau_a\tau_b}{\tau_0^2} \left(\frac{\partial p}{\partial x} / \frac{\partial p}{\partial y}\right) + \frac{3}{20} \frac{h^2}{\tau_0^2} \left( \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 \right) \end{cases} \quad (2.19)$$

avec  $\tau_a$  et  $\tau_b$  les solutions du système 2.15.

### Conditions aux limites

La pression entre les surfaces en contact  $O(1)$  *GPa* est très supérieure à la pression ambiante  $O(10^{-4})$  *GPa*. Dans ces conditions, la pression en dehors du contact (pression ambiante) peut être négligée par rapport à la pression dans le contact. Pour cette raison, les conditions aux limites de l'équation de Reynolds sont :

$$p(x, y, t) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad (2.20)$$

avec  $\Omega$  le domaine de calcul de l'équation de Reynolds.

## 2.4 Equation de séparation des surfaces

La séparation des surfaces peut être définie comme la somme de trois termes :

- la séparation géométrique des surfaces,
- la rugosité des surfaces,
- la déformation élastique des surfaces induite par le champ de pression.

### 2.4.1 La séparation géométrique des surfaces

La géométrie des corps en contact est représentée par une géométrie équivalente Figure 2.4. Dans cette représentation, le contact est entre un plan et un paraboloïde. Lorsque les rayons du paraboloïde suivant  $x$  et  $y$  sont les mêmes, le contact est dit circulaire (ponctuel). Dans le cadre de cette étude, le contact EHD est considéré circulaire.

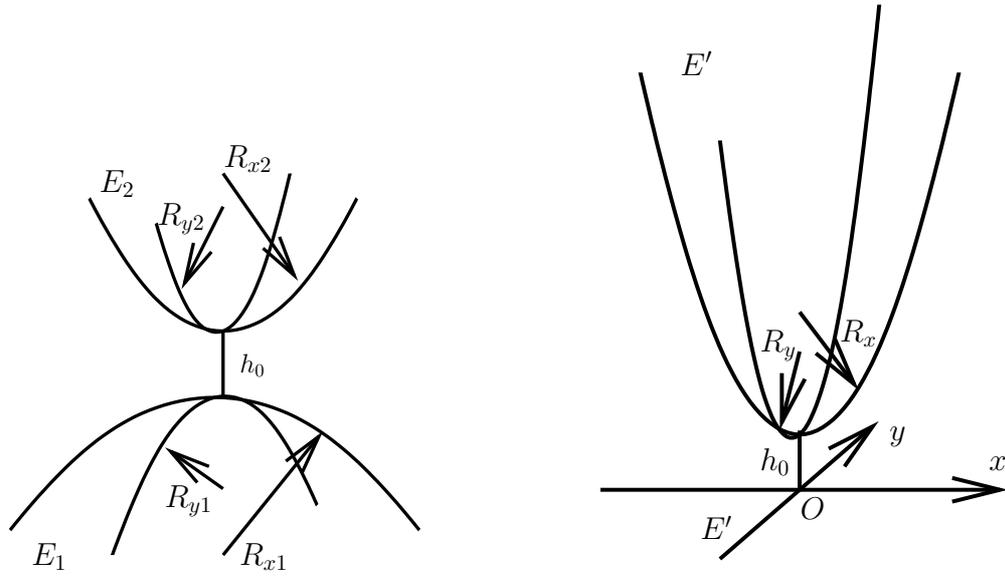


FIG. 2.4 – Géométrie des corps en contact. Géométrie réelle (à gauche) et géométrie équivalente (à droite) [35]

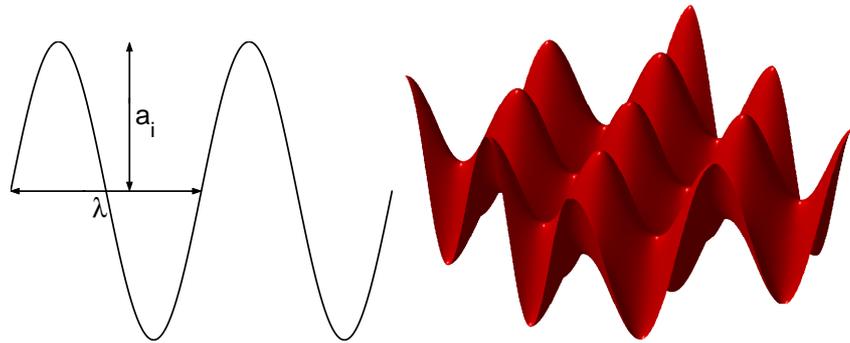


FIG. 2.5 – Exemple de rugosités harmoniques. Schéma 1D (à gauche), 2D une rugosité isotrope  $\lambda_x = \lambda_y$  (à droite)

## 2.4.2 Rugosité des surfaces

L'expression des rugosités doit être ajoutée lorsque les surfaces ne sont plus lisses. Les surfaces générées numériquement peuvent être aléatoires ou périodiques. Dans le cadre de cette étude, des surfaces harmoniques sont étudiées. Les rugosités harmoniques sont caractérisées par les paramètres : amplitude  $a_i$  et longueurs d'onde suivant  $x$  et  $y$  -  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$ . La Figure 2.5 montre un schéma d'une rugosité 1D harmonique et un exemple de surface isotrope 2D.

## 2.4.3 Déformation élastique

La déformation élastique des solides en contact doit être prise en compte puisqu'elle modifie la séparation des surfaces. Le calcul de la déformation est basé sur l'hypothèse d'un milieu semi-infini.

Finalement, l'expression de la séparation des surfaces s'écrit :

$$h(x, y, t) = \underbrace{h_0(t) + \frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y}}_{\text{macro géométrie}} - \underbrace{\mathcal{R}(x, y, t)}_{\text{rugosité}} + \underbrace{\frac{2}{\pi E'} \iint_{\Omega} \frac{p(x', y', t) dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}}_{\text{déformation élastique}} \quad (2.21)$$

$h_0(t)$  est l'approche de corps solide. La valeur de ce paramètre est négative puisque les corps se rapprochent après l'application de l'effort.  $h_0(t)$  peut être interprété comme le déplacement d'un point du solide suffisamment loin du contact.  $\mathcal{R}(x, y, t)$  désigne la rugosité de la surface. La rugosité est attachée au solide et se déplace avec sa vitesse  $u_2$  :

$$\begin{cases} \mathcal{R}(x, y, t) &= a_i(t) \cos\left(2\pi \frac{x - \bar{x}}{\lambda_x}\right) \cos\left(2\pi \frac{y}{\lambda_y}\right) \\ a_i(t) &= a_i 10^{-10 \left(\max\left(0, \frac{x - \bar{x}}{\lambda_x}\right)^2\right)} \\ \bar{x} &= x_s + u_2 t \end{cases} \quad (2.22)$$

$\bar{x}_s$  désigne l'endroit où la rugosité commence et  $\bar{x}$  est la position de la rugosité à l'instant  $t$ . L'expression, proposée par Venner et Lubrecht [127], permet de commencer le calcul transitoire avec une surface lisse et d'introduire progressivement la rugosité dans le contact.

## 2.5 Equation de l'équilibre de la charge

L'équation de l'équilibre de la charge postule que l'intégrale de la pression doit équilibrer la force extérieure appliquée au contact. La condition d'équilibre s'écrit :

$$w = \iint_{\Omega} p(x, y, t) dx dy \quad (2.23)$$

## 2.6 Modélisation du fluide à faible taux de cisaillement

Les pressions qui règnent dans le contact sont très élevées de l'ordre de 1 *GPa*. Dans ces conditions, les propriétés du fluide changent d'une manière significative. Les propriétés du fluide qui interviennent dans l'équation de Reynolds sont la viscosité à faible taux de cisaillement  $\mu$  et la densité  $\rho$  du fluide. Cette section présente les différentes relations disponibles dans la littérature.

### 2.6.1 Loi de compressibilité

La loi de compressibilité lie le changement de la densité  $\rho$  avec la pression  $p$ .

#### Relation de Dowson et Higginson

Dans le domaine de l'EHD, la loi de Dowson et Higginson est la plus connue [40] :

$$\rho(p) = \rho_0 \frac{0.59 \cdot 10^9 + 1.34p}{0.59 \cdot 10^9 + p} \quad (2.24)$$

avec  $\rho_0$  la densité à la pression ambiante. La relation 2.24 a deux asymptotes : lorsque  $p \rightarrow 0$ ,  $\rho = \rho_0$  et  $p \rightarrow \infty$   $\rho = 1.34\rho_0$ . La relation 2.24 montre une augmentation relative de la densité à forte pression de 34% par rapport à la densité à la pression ambiante.

## Relation de Tait

Une autre loi de variation de la densité avec la pression est la relation de Tait [73], [74]. En régime isotherme, la relation est la suivante :

$$\frac{\rho_0}{\rho(p)} = 1 - \frac{\ln \left( 1 + \frac{p}{K_0} (1 + K'_0) \right)}{1 + K'_0} \quad (2.25)$$

avec  $K_0$  le module d'élasticité à la pression ambiante  $p_0$  et  $K'_0$  le taux de variation de  $K_0$  avec la pression. L'expression de  $K_0$  est :

$$K_0(T) = K_{00} \exp(-\beta_K T) \quad (2.26)$$

où  $K_{00}$  est la valeur  $K_0$  à la température  $T_{00}$  et  $\beta_K$  est le coefficient de variation avec la température  $T$ .

La Figure 2.6 montre une comparaison des deux lois de compressibilité pour le lubrifiant PDMS 500. Les valeurs de  $K_{00}$  et  $\beta_K$  sont issues des travaux de Sachdev et al. [116]. Plus de détails concernant le lubrifiant PDMS 500 sont présentés dans le Chapitre 6.

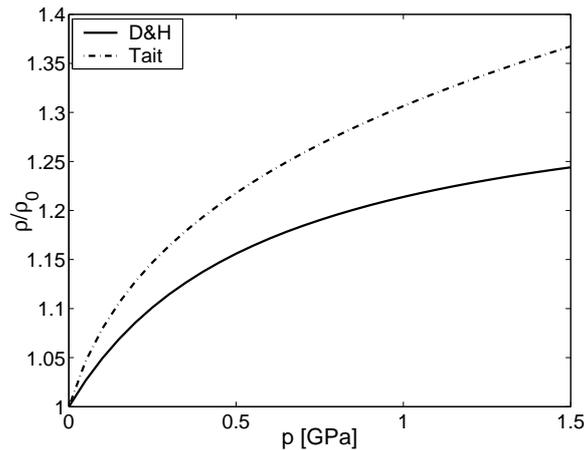


FIG. 2.6 – Evolution de la densité relative avec la pression. Comparaison entre les relations de Dowson et Higginson 2.24 et Tait 2.25

L'écart entre les deux courbes augmente avec la pression. Pour des valeurs élevées de la pression, il est de l'ordre de 10%. Bair et Kotzalas [9] alertent que l'utilisation de l'équation 2.24 conduit à des tendances physiques irréalistes : selon 2.24, la vitesse longitudinale des liquides organiques augmente avec la température tandis que les observations montrent la tendance inverse. D'un autre côté, l'utilisation de l'équation 2.25 nécessite la connaissance de trois constantes  $K'_0$ ,  $K_{00}$  et  $\beta_K$  dont les valeurs sont obtenues par l'ajustement de courbes aux données expérimentales. Les mesures expérimentales sont disponibles pour certains lubrifiants : Sachdev et al. [116] ou Fakhreddine et Zoller [49]. Cependant, l'influence de la compressibilité sur l'épaisseur de film centrale ou minimale n'est pas significative. Pour ces raisons, l'utilisation de la relation 2.24 dans l'équation de Reynolds reste justifiée. Pour plus de détails voir [9].

### 2.6.2 Loi de piézo-viscosité

La variation de la piézo-viscosité  $\mu$  avec la pression  $p$  est beaucoup plus importante que la variation de la compressibilité du fluide. La dépendance de la viscosité avec la pression a été

étudiée et répertoriée par Bridgman [23]. Le comportement à faibles pressions  $\leq 150 \text{ MPa}$  varie d'une manière exponentielle ou linéaire. Pour des pressions comprises entre  $200 \text{ MPa}$  et  $300 \text{ MPa}$ , la relation devient linéaire et pour des pressions  $\geq 1 \text{ GPa}$  la dépendance est plus qu'exponentielle.

### Relation de Barus

Barus [16],[17] étudie l'évolution de la viscosité avec la pression et propose une relation linéaire. En régime isotherme la relation est la suivante :

$$\mu(p) = \mu_0(1 + \alpha p) \quad (2.27)$$

avec  $\alpha = (1/\mu)(\partial\mu/\partial p)_{p=0}$  le coefficient de piézo-viscosité. Dans la plupart des travaux dans le domaine de l'EHD, une autre relation est appelée la relation de Barus :

$$\mu(p) = \mu_0 \exp(\alpha p) \quad (2.28)$$

Pour des huiles minérales, la valeur de  $\alpha$  est comprise entre  $10^{-8}$  et  $2 \cdot 10^{-8} \text{ Pa}^{-1}$ .

Remarque : Pour des faibles valeurs de  $p$ , l'équation 2.28 peut être rendue linéaire, ainsi elle devient identique à l'équation 2.27.

### Relation de Roelands

Roelands [115] élabore une relation plus précise, valable pour des pressions inférieures à  $1 \text{ GPa}$ . En régime isotherme l'équation s'écrit :

$$\mu(p) = \mu_0 \exp \left( (\ln(\mu_0) + 9.67) \left( -1 + \left( 1 + \frac{p}{p_0} \right)^z \right) \right) \quad (2.29)$$

où  $z$  est le coefficient de visco-pression et  $p_0$  la pression de référence. Typiquement,  $z = 0.6$  et  $p_0 = 1.96 \cdot 10^8 \text{ Pa}$ . La définition de  $\alpha$  permet de trouver une relation entre  $\alpha$ ,  $p_0$  et  $z$  :

$$\frac{\alpha p_0}{z} = \ln(\mu_0) + 9.67 \quad (2.30)$$

### Relation de Doolittle

Selon les observations expérimentales de Bridgman [23], la relation de Roelands 2.29 sous-estime la viscosité pour des pressions supérieures à  $1 \text{ GPa}$ . Doolittle [38] propose une autre relation basée sur la théorie du volume libre. Plus tard, Morel et al. [107] donnent une signification physique de cette relation. La relation utilise le ratio entre le volume occupé par les chaînes moléculaires et le volume libre. Pour avoir un mouvement des chaînes moléculaires (changement des propriétés du fluide), un volume libre suffisant est nécessaire. Souvent la notion de volume libre est associée à la notion de température de transition vitreuse  $T_g$ . A cette température, il y a une génération de volume libre, créée par le mouvement coopératif des chaînes moléculaires. La relation de Doolittle en régime isotherme s'écrit :

$$\mu(p) = \mu_0 \exp \left( BR_0 \left( \frac{1}{\rho_0/\rho(p) - R_0} - \frac{1}{1 - R_0} \right) \right) \quad (2.31)$$

avec :  $B$ , le paramètre de Doolittle et  $R_0$ , le ratio de volume occupé à l'état de référence.

La Figure 2.7 montre une comparaison entre les trois formulations pour la dépendance entre la viscosité et la pression à faible taux de cisaillement pour le lubrifiant PDMS 500. Plus de détails

concernant le lubrifiant PDMS 500 sont présentés au Chapitre 6. A faibles pressions (inférieures à  $0.6 \text{ GPa}$ ), le comportement prédit est similaire. Les différences deviennent plus notables pour les pressions élevées (supérieures à  $1 \text{ GPa}$ ). La nature de la dépendance entre la viscosité et la pression est différente dans les trois équations. Dans le domaine de l'EHD, les deux premières équations sont largement utilisées. L'utilisation de l'équation 2.31 nécessite la connaissance de deux paramètres  $B$  et  $R_0$ , dont les valeurs sont obtenues par l'ajustement de courbes aux données expérimentales.

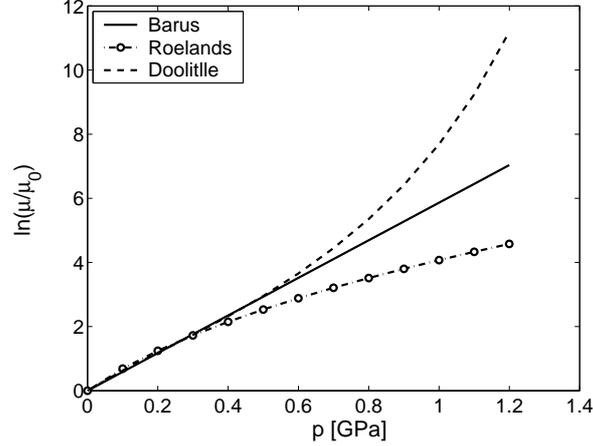


FIG. 2.7 – Evolution de la viscosité avec la pression. Comparaison entre les relations de Barus 2.28, Roelands 2.29 et Doolittle 2.31

## 2.7 Adimensionnement du problème EHD

Cette technique consiste à rendre sans dimension les équations physiques à résoudre en vue de leur étude numérique et / ou analytique. L'adimensionnement a pour but de diminuer le nombre de paramètres physiques en utilisant des paramètres composés sans dimension. Dans ce cas, l'ordre des paramètres est de 1, ce qui améliore la précision numérique et facilite l'interprétation des résultats obtenus.

Le problème EHD est adimensionné grâce aux paramètres du contact sec de Hertz. Dans le cadre de cette étude, le contact est considéré circulaire (ponctuel). Les paramètres sont :  $b$  le rayon de contact, l'approche hertzienne  $c$  et la pression maximale de Hertz  $p_H$ . Les expressions des paramètres sont :

$$\begin{cases} b &= \sqrt[3]{\frac{3wR_x}{2E'}} \\ p_H &= \frac{3w}{2\pi b^2} \\ c &= \frac{b^2}{R_x} \end{cases} \quad (2.32)$$

Pour l'adimensionnement de la compressibilité  $\rho$  et de la viscosité  $\mu$ , les valeurs à la pression ambiante sont utilisées. Les contraintes de cisaillement  $\tau$  sont adimensionnées par rapport à la contrainte limite de cisaillement  $\tau_0$ . Les paramètres adimensionnés sont :

$$\left\{ \begin{array}{ll} X = x/b & H = h/c \\ Y = y/b & H_0 = h_0/c \\ P = p/p_H & A_i = a_i/c \\ \bar{\tau} = \tau/\tau_0 & T = t\bar{u}/b \end{array} \right. \quad (2.33)$$

### 2.7.1 L'équation de Reynolds

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\bar{\rho}H^3}{\bar{\lambda}\bar{\mu}} \phi_X \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\bar{\rho}H^3}{\bar{\lambda}\bar{\mu}} \phi_Y \frac{\partial P}{\partial Y} \right) - \frac{\partial(\bar{\rho}H)}{\partial X} - \frac{\partial(\bar{\rho}H)}{\partial T} = 0 \quad (2.34)$$

Les définitions de  $\bar{\lambda}$ ,  $\bar{\mu}$  et  $S$  sont dans la Nomenclature.

#### Modèle newtonien

Dans le cas du comportement newtonien :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_X = 1 \\ \phi_Y = 1 \end{array} \right. \quad (2.35)$$

#### Modèle d'Eyring

Les expressions de  $\phi_X$  et  $\phi_Y$  sont différentes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_X = \cosh(\bar{\tau}_a) \\ \phi_Y = \frac{\sinh(\bar{\tau}_a)}{\bar{\tau}_a} \end{array} \right. \quad (2.36)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sinh(\bar{\tau}_a) = N \frac{\bar{\mu}S}{H} \\ N = \frac{\bar{\lambda}p_H^2\pi}{12E'\tau_0} \end{array} \right. \quad (2.37)$$

#### Modèle de Rabinowitsch

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_X = 1 + 3\bar{\tau}_a^2 + \bar{\tau}_b^2 + 2\bar{\tau}_a\bar{\tau}_b \left( \frac{\partial P}{\partial Y} / \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{3}{20} \left( \frac{p_H^2\pi H}{\tau_0 E'} \right)^2 \left( \left( \frac{\partial P}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial P}{\partial Y} \right)^2 \right) \\ \phi_Y = 1 + \bar{\tau}_a^2 + 3\bar{\tau}_b^2 + 2\bar{\tau}_a\bar{\tau}_b \left( \frac{\partial P}{\partial X} / \frac{\partial P}{\partial Y} \right) + \frac{3}{20} \left( \frac{p_H^2\pi H}{\tau_0 E'} \right)^2 \left( \left( \frac{\partial P}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial P}{\partial Y} \right)^2 \right) \end{array} \right. \quad (2.38)$$

Les expressions des contraintes moyennes de cisaillement 2.15, sont réarrangées en fonction de  $\tau_a$  dans la première équation et  $\tau_b$  dans la deuxième. Dans ce cas, le système adimensionné devient :

$$\begin{cases} \bar{\tau}_a^3 + \bar{\tau}_a (\bar{\tau}_b^2 + Z_X) + \bar{\tau}_b Z - N \frac{\bar{\mu} S}{H} = 0 \\ \bar{\tau}_b^3 + \bar{\tau}_b (\bar{\tau}_a^2 + Z_Y) + \bar{\tau}_a Z = 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

avec :

$$\begin{cases} Z = \frac{1}{6} \left( \frac{p_H^2 \pi H}{\tau_0 E'} \right)^2 \frac{\partial P}{\partial X} \frac{\partial P}{\partial Y} \\ Z_X = 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{p_H^2 \pi H}{\tau_0 E'} \right)^2 \left( 3 \left( \frac{\partial P}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial P}{\partial Y} \right)^2 \right) \\ Z_Y = 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{p_H^2 \pi H}{\tau_0 E'} \right)^2 \left( \left( \frac{\partial P}{\partial X} \right)^2 + 3 \left( \frac{\partial P}{\partial Y} \right)^2 \right) \end{cases} \quad (2.40)$$

### 2.7.2 Equation de séparation des surfaces

$$\begin{aligned} H(X, Y, T) &= H_0(T) + \frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{2} - \bar{\mathcal{R}}(X, Y, T) \\ &+ \frac{2}{\pi^2} \iint_{\Omega} \frac{P(X', Y', T) dX' dY'}{\sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2}} \end{aligned} \quad (2.41)$$

avec :

$$\begin{cases} \bar{\mathcal{R}}(X, Y, T) = A_i(T) \cos \left( 2\pi \frac{X - \bar{X}}{\lambda_x/b} \right) \cos \left( 2\pi \frac{Y}{\lambda_y/b} \right) \\ A_i(T) = A_i 10^{-10 \left( \max(0, \frac{X - \bar{X}}{\lambda_x/b})^2 \right)} \\ \bar{X} = X_s + T \end{cases} \quad (2.42)$$

### 2.7.3 Equation de l'équilibre de la charge

$$\iint_{\Omega} P(X, Y, T) dX dY = \frac{2\pi}{3} \quad (2.43)$$

### 2.7.4 Loi de compressibilité

Relation de Dowson et Higginson

$$\bar{\rho}(P) = \frac{0.59 \cdot 10^9 + 1.34P \cdot p_H}{0.59 \cdot 10^9 + P \cdot p_H} \quad (2.44)$$

## Relation de Tait

$$\frac{1}{\bar{\rho}(P)} = 1 - \frac{\ln \left( 1 + \frac{P \cdot p_H}{K_0} (1 + K'_0) \right)}{(1 + K'_0)} \quad (2.45)$$

### 2.7.5 Lois de piézo-viscosité

#### Relation de Barus

$$\bar{\mu}(P) = \exp(\bar{\alpha}P) \quad (2.46)$$

#### Relation de Roelands

$$\bar{\mu}(P) = \exp \left( (\ln(\mu_0) + 9.67) \left( -1 + \left( 1 + \frac{P \cdot p_H}{p_0} \right)^z \right) \right) \quad (2.47)$$

#### Relation de Doolittle

$$\bar{\mu}(P) = \exp \left( BR_0 \left( \frac{1}{1/\bar{\rho}(P) - R_0} - \frac{1}{1 - R_0} \right) \right) \quad (2.48)$$

## 2.8 Paramètres de contact EHD

L'utilisation de paramètres de contact aide la compréhension des phénomènes physiques mis en jeux. Plusieurs groupes de paramètres existent dans le domaine de l'EHD. Par exemple, Hamrock et Dowson [66] proposent un groupe de trois paramètres. Plus tard, suite aux travaux de Moes [104], les paramètres de Hamrock et Dowson [66] sont groupé en deux paramètres :

$$\begin{cases} M &= \frac{w}{E' R_x^2} \left( \frac{\mu_0 2\bar{u}}{E' R_x} \right)^{-3/4} \\ L &= \alpha E' \left( \frac{\mu_0 2\bar{u}}{E' R_x} \right)^{1/4} \end{cases} \quad (2.49)$$

Les paramètres utilisés dans l'équation de Reynolds adimensionnée 2.34 et dans l'équation de Barus adimensionnée 2.46 sont exprimés en fonction de  $M$  et  $L$  (contact circulaire) :

$$\begin{cases} \bar{\lambda} &= \left( \frac{128\pi^3}{3M^4} \right)^{1/3} \\ \bar{\alpha} &= \frac{L}{\pi} \left( \frac{3M}{2} \right)^{1/3} \end{cases} \quad (2.50)$$

## 2.9 Conclusion

Dans ce chapitre, la mise en équation du problème d'EHD est présentée. Pour la modélisation du fluide, plusieurs modèles rhéologiques sont disponibles. Ces derniers se composent de deux parties. D'abord, les relations rhéologiques à taux élevé de cisaillement sont présentées, suite auxquelles une expression de l'équation de Reynolds modifiée est obtenue. La deuxième présente

des modèles de variation de densité et de viscosité avec la pression. Les relations de Tait 2.25 et Doolittle 2.31 sont plus complexes et décrivent plus précisément le comportement du fluide et cela dans un domaine plus étendu. Cependant, leur utilisation exige la connaissance des paramètres supplémentaires accessibles uniquement à partir de mesures expérimentales. Cela limite leur application en faveur des relations moins complexes : Dowson et Higginson 2.24, Barus 2.28 et Roelands 2.29.

# Chapitre 3

## Outils numériques

Les solutions analytiques des équations, présentées dans le chapitre précédent, n'existent que pour des cas simplifiés et sous formes asymptotiques (épaisseur de film centrale ou minimale) - Dowson et Higginson [40], Hamrock et Dowson [66], Nijenbanning et al. [108]. Dans la plupart des cas, une solution numérique complète est nécessaire. Dans ce chapitre, les techniques de résolution des problèmes modèles sont abordées dans un premier temps. Ensuite, leur application dans le cadre de l'étude ainsi que quelques résultats sont exposés.

### 3.1 Positionnement du problème

La résolution d'un problème ElastoHydroDynamique nécessite la résolution simultanée de trois équations : l'équation de Reynolds, l'équation des déformations élastiques et l'équation de l'équilibre de la charge. Dans le cas d'un comportement non newtonien du fluide (Chapitre 5), un système d'équations non linéaires liées à la rhéologie plus complexe du lubrifiant est nécessaire. Ces équations donnent les contraintes moyennes dans le fluide. Le temps de leur résolution par une méthode itérative (Newton - Raphson) est bien inférieur au temps de résolution des autres équations. Pour cette raison, seuls les outils pour résoudre l'équation de Reynolds, l'équation des déformations élastiques et l'équation de l'équilibre de la charge sont exposés.

Les raisons qui rendent le problème EHD difficile à résoudre sont :

1. les équations de Reynolds, des déformation élastiques et de l'équilibre de la charge sont fortement couplées : une variation dans l'approche mutuel le  $H_0$  se traduit par une modification de la valeur de l'épaisseur de film  $H$  donc de la pression  $P$  via l'équation de Reynolds,
2. une forte non linéarité entre la viscosité  $\eta$  et la pression  $P$ ,
3. un changement de la nature de l'équation de Reynolds dans la zone de basse et de haute pression,
4. le caractère non local de l'équation de la déformation élastique (équation intégrale) qui fait intervenir a priori les pressions  $P$  dans tous les points. De ce fait, une variation de la pression  $P$  en un point modifie la déformation élastique de tous les points ainsi que la distribution de la pression  $P$  via l'équation de Reynolds.

Ces difficultés du problème EHD imposent l'utilisation des algorithmes qui respectent ces particularités. Par exemple, l'utilisation des méthodes dites directes pour le calcul de la déformée élastique et pour la résolution de l'équation de Reynolds n'est pas adaptée vu le grand nombre d'opérations nécessaires qui augmente rapidement avec le nombre de points sur la grille (le temps CPU est  $O(N^3)$  et  $O(N^2)$ ) avec  $N$  le nombre total de points. Le temps CPU devient encore plus

important puisqu'il faut deviner une bonne première approximation soit pour la pression  $P$  soit pour la déformée élastique. Une autre approche consiste à utiliser des méthodes dites itératives qui tendent à trouver la solution de l'équation de Reynolds approchée. Dans ce cas, il y a une différence entre la solution calculée et la solution discrète exacte (erreur numérique). Une analyse du spectre fréquentiel de cette erreur (*Local Mode Analysis*) montre que les méthodes itératives sont très efficaces pour réduire les erreurs numériques dont la longueur est inférieure ou égale au pas de discrétisation. Par contre, pour les autres longueurs, la réduction est très lente. Une étude détaillée est proposée par Brandt [21] et par Venner et Lubrecht [128].

## 3.2 Principe de base des MultiGrilles et problème modèle

La notion de fréquence de l'erreur, efficacement réduite pour une grille donnée, est le principe de base des MultiGrilles. Les basses fréquences (les variations lentes de l'erreur) peuvent être correctement représentées sur une grille moins fine. Dans ce cas, une partie des fréquences de l'erreur devient haute et donc efficacement réduite par des relaxations. Ainsi, l'application de plusieurs grilles avec des pas de discrétisation différents conduit à une réduction rapide donc à une bonne vitesse de convergence. De plus, le temps CPU pour effectuer les relaxations pour un problème  $2D$  sur une grille avec un pas deux fois supérieur ( $H = 2h$ ) est  $O(N/16)$  avec  $N$  le nombre de points sur la grille fine.

Pour la mise en équation, un problème modèle est utilisé. Généralement, une équation linéaire ou non linéaire différentielle peut s'écrire sous la forme suivante :

$$L \langle u \rangle = f \tag{3.1}$$

avec :

- $L$  - l'opérateur continu différentiel
- $\langle u \rangle$  - l'inconnue
- $f$  - le membre de droite (une fonction connue)

L'équation 3.1 est discrétisée en utilisant un schéma de discrétisation adapté au problème. Yavneh [136] propose une étude comparative de différents schémas de discrétisation. Dans le cadre de cette étude, un schéma différences finies du second ordre est utilisé sur une grille carrée avec le même pas de discrétisation  $h$ . L'équation 3.1 s'écrit :

$$L^h \langle \underline{u}^h \rangle = \underline{f}^h \tag{3.2}$$

avec :

- $L^h$  - l'opérateur discret différentiel
- $\langle \underline{u}^h \rangle$  - le vecteur d'inconnues discret
- $\underline{f}^h$  - le vecteur de membre de droite discret (une fonction connue)

Pour la suite, on définit pour un problème  $2D$  :

$$\begin{cases} \underline{v}^h = \underline{u}^h - \underline{\tilde{u}}^h \\ \underline{r}^h = \underline{f}^h - L^h \langle \underline{\tilde{u}}^h \rangle \\ rn^h = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N |r_i^h| \end{cases} \quad (3.3)$$

avec :

- $\underline{v}^h$  - le vecteur de l'erreur numérique
- $\underline{u}^h$  - le vecteur de la solution discrète exacte
- $\underline{\tilde{u}}^h$  - le vecteur de la solution approchée après quelques relaxation  $\nu_1$
- $\underline{r}^h$  - le vecteur du résidu
- $rn^h$  - la norme du résidu

Définie de cette manière, il paraît évident que, lorsque la solution obtenue est la solution exacte :  $\underline{r}^h = 0 \Leftrightarrow \underline{v}^h = 0 \Leftrightarrow \underline{\tilde{u}}^h = \underline{u}^h$ . En combinant les équations 3.2 et 3.3, on obtient :

$$L^h \langle \underline{\tilde{u}}^h + \underline{v}^h \rangle = L^h \langle \underline{\tilde{u}}^h \rangle + \underline{r}^h \quad (3.4)$$

L'opérateur différentiel  $L$  est non linéaire dans le cadre de cette étude. Ceci implique qu'il détermine et dépend de la solution. Dans ce cas, on ne peut pas séparer la correction  $\underline{v}^h$  de la solution approchée  $\underline{\tilde{u}}^h$  et travailler uniquement sur la correction. Pour cette raison, dans le livre de Venner et Lubrecht [128], le schéma appelé FAS est utilisé (*Full Approximation Scheme*). Il s'agit maintenant de faire intervenir des variables de la grille grosse. Autrement dit, il faut résoudre le problème modifié sur une grille moins fine avec un pas de discrétisation  $H = 2h$  en faisant intervenir les résidus  $\underline{\tilde{u}}^h$  et la solution approchée  $\underline{r}^h$  déjà connus de la grille fine. Le problème sur la grille moins fine s'écrit :

$$L^H \langle \underline{\hat{u}}^H \rangle = \underline{\hat{f}}^H \quad (3.5)$$

avec :

$$\underline{\hat{u}}^H = I_h^H \underline{\tilde{u}}^h + \underline{v}^H \quad (3.6)$$

et :

$$\underline{\hat{f}}^H = L^H \langle I_h^H \underline{\tilde{u}}^h \rangle + I_h^H \underline{r}^h \quad (3.7)$$

Le symbole  $I_h^H$  est utilisé pour désigner l'opérateur de transfert de la grille fine  $h$  vers la grille moins fine  $H$ . Plus de détails sur les opérateurs de transfert sont exposés dans la section suivante. Le problème modifié transféré sur la grille moins fine est traité de la même manière que sur la grille fine. Apès un certain nombre de relaxations, une meilleure approximation de  $\underline{\hat{u}}^H$  est obtenue  $\underline{\tilde{u}}^H$ . La correction de la solution de la grille fine s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\underline{\tilde{u}}^h = \underline{\tilde{u}}^H + I_H^h (\underline{\tilde{u}}^H - I_h^H \underline{\tilde{u}}^h) \quad (3.8)$$

La symbole  $I_H^h$  est utilisé pour désigner l'opérateur de transfert de la grille moins fine  $h$  vers la grille fine  $H$ . Plus de détails sur les opérateurs de transfert sont exposés dans la section suivante.

### 3.2.1 Opérateurs de transfert

Dans la Section 3.2, la notion d'opérateur de transfert entre la grille fine et la grille moins fine est utilisée. Le rôle de l'opérateur entre deux grilles de taille différente a pour but de transférer un maximum d'information sur la grille de destination (fine ou moins fine) qui est nécessaire pour la résolution du problème. Les opérateurs de transfert sont classés dans deux groupes :

- $I_h^H$  - opérateur de restriction. Il est utilisé pour le transfert de l'information de la grille fine vers la grille moins fine,
- $I_H^h$  - opérateur d'interpolation. Il est utilisé pour le transfert de l'information de la grille moins fine vers la grille.

Pour effectuer les transferts, la construction d'une matrice est nécessaire. Cette matrice est caractérisée par un *motif* qui se répète périodiquement. Sa définition est suffisante pour caractériser le transfert. De plus, l'utilisation du motif facilite l'implémentation et diminue la mémoire nécessaire pour son stockage.

#### La restriction

La restriction  $I_h^H$  est un opérateur qui a pour but de transférer des quantités sur la grille moins fine avec  $N/2$  points. La résolution qui s'ensuit réduit efficacement l'erreur sur cette grille. Généralement, il y a plusieurs opérateurs de restriction. Le plus simple est appelé injection et consiste à injecter les valeurs à des noeuds qui coïncident avec les noeuds de la grille fine (un noeud sur deux). Par exemple, le résidu  $\underline{r}^h$  s'écrit :

$$r_{I,J}^H = r_{2I,2J}^h \quad (3.9)$$

avec  $i, j$  et  $I, J$  les indices respectivement des grilles fine et moins fine. Le motif s'écrit sous forme matricielle :

$$I_h^H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

La deuxième manière de transférer l'information est une sorte de moyenne pondérée. Dans ce cas, la valeur en un point  $I, J$  est moyennée par les 9 valeurs autour de la grille fine :

$$r_{I,J}^H = (4r_{2I,2J}^h + 2(r_{2I-1,2J}^h + r_{2I+1,2J}^h + r_{2I,2J-1}^h + r_{2I,2J+1}^h) + (r_{2I-1,2J-1}^h + r_{2I+1,2J-1}^h + r_{2I+1,2J+1}^h + r_{2I-1,2J+1}^h))/16 \quad (3.11)$$

Certes, moins intuitive, cette deuxième définition de l'opérateur de restriction présente des avantages par rapport à l'injection directe. La moyenne pondérée transfère l'information (ici le résidu) en filtrant les hautes fréquences qui de toute façon ne peuvent pas être efficacement réduites sur la grille moins fine. L'opérateur d'injection transfère la valeur exacte qui peut contenir des hautes fréquences et interférer avec les basses fréquences. Venner et Lubrecht [128] et Brandt [20] proposent une étude détaillée du sujet. Le motif dans ce cas s'écrit sous forme matricielle :

$$I_h^H = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

La figure 3.1 montre l'opérateur de restriction moyenne pondérée dans le cas d'un problème  $2D$ . Dans le cadre de cette étude, l'opérateur de restriction moyenne pondérée est utilisé.

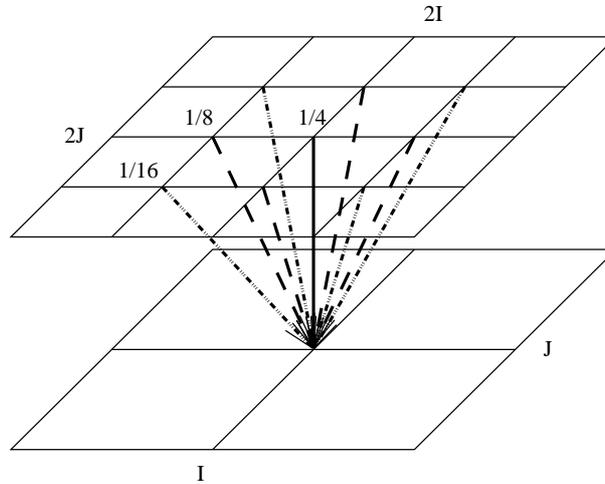


FIG. 3.1 – L'opérateur de restriction pondérée entre la grille fine  $h$  et la grille moins fine  $H$  pour un problème  $2D$  [35]

L'opérateur différentiel discret  $L^H$  dans les équations 3.5 et 3.7 peut être obtenu par une discrétisation directe sur la grille moins fine ou par des multiplications entre les opérateurs de restriction et d'interpolation et l'opérateur de la grille fine. Comme suggéré par Venner et Lubrecht [128], la discrétisation directe donne un opérateur différentiel adapté au sujet de cette étude. De plus, la deuxième manière de définir  $L^H$  fait intervenir 9 variables ce qui rend l'implémentation assez délicate. Pour ces raisons, une dérivation directe de l'opérateur discret est utilisée.

### L'interpolation

L'interpolation  $I_H^h$  est un opérateur qui a pour but de transférer des quantités sur la grille fine avec  $N$  points une fois que la réduction des basses fréquences de l'erreur est terminée. Cela signifie qu'une matrice de  $N/2$  lignes et  $N$  colonnes est nécessaire. De nouveau, un motif caractérisant l'opération d'interpolation est utilisé. Lorsque le point coïncide avec un point de la grille fine, la quantité est injectée dans ce point. Lorsqu'il s'agit de transférer de l'information en un point de la grille fine qui n'existe pas sur la grille moins fine, deux opérateurs peuvent être utilisés. Suivant le nombre de points de la grille moins fine qu'ils font intervenir, l'opérateur est dit bi cubique ou bilinéaire en  $2D$ . Dans le cadre de cette étude, un opérateur bilinéaire est utilisé. La forme du motif est la suivante :

$$I_H^h = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

La figure 3.2 montre l'opérateur d'interpolation bilinéaire dans le cas d'un problème  $2D$ .

L'interpolation de la correction sur la grille fine introduit des erreurs de hautes fréquences. Pour les réduire donc améliorer la solution, l'application des relaxations sur cette grille est nécessaire  $\nu_2$ .

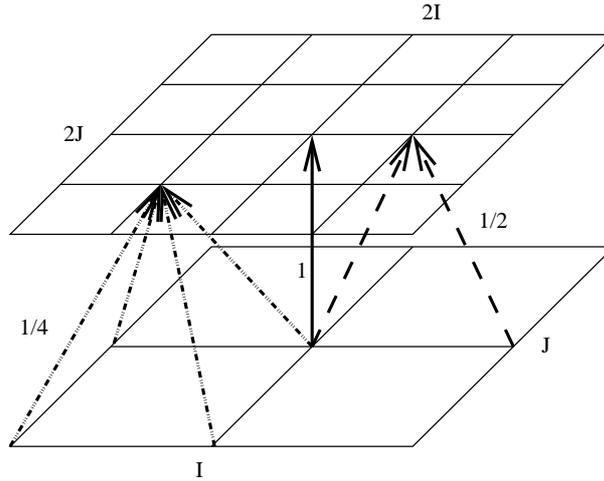


FIG. 3.2 – L'opérateur d'interpolation bilinéaire entre la grille moins fine  $H$  et la grille fine  $h$  pour un problème  $2D$  [35]

### 3.2.2 Cycle de correction, FMG

On appelle un cycle de deux niveaux le processus suivant :

- application de quelques relaxations  $\nu_1$  sur la grille fine,
- transfert de l'information de la grille fine vers la grille moins fine,
- application de quelques relaxations sur la grille moins fine,
- transfert de l'information de la grille moins fine vers la grille fine ,
- application de quelques relaxations  $\nu_2$  sur la grille fine.

L'inconvénient du cycle à deux niveaux est que la vitesse de convergence diminue à partir d'un certain nombre de relaxations sur la grille moins fine. De nouveau, la raison pour cette diminution réside dans l'utilisation d'une grille dont le pas de discrétisation n'est pas suffisant pour réduire toutes les basses fréquences de l'erreur. Après quelques relaxations sur cette grille, il reste des composantes basses fréquences (par rapport au pas de discrétisation  $H$ ) qui persistent. Dans ce cas, au lieu d'utiliser seulement une grille moins fine, on peut utiliser plusieurs grilles moins fines (chaque fois le pas de discrétisation est doublé, donc le nombre de points divisé par 4 en  $2D$ ) pour corriger la solution. Par la suite, les symboles suivants sont adoptés (voir la Figure 3.3) :

- $L = 1$  - le niveau le plus grossier avec un nombre de points  $n$  et un pas de discrétisation  $h^1$ . Le niveau suivant est  $L = 2$  avec un nombre de points  $4n$  et un pas de discrétisation  $h^2 = h^1/2...$
- si le nombre de grilles est  $k$ , la grille fine  $L = k$  avec un nombre de points  $2^{2(k-1)}n$  et un pas de discrétisation  $h^k = h^1/2^{k-1}$

Dans ce cas, le processus est appelé un cycle. Suivant le chemin parcouru pour effectuer la correction, on distingue deux types de cycles : le cycle  $V$  et le cycle  $W$ . Les Figures 3.4 et 3.5 présentent graphiquement le principe d'un  $V$  et d'un  $W$  cycle. Le symbole  $\nu_0$  signifie le nombre de relaxations sur la grille la plus grossière. Il peut varier selon le cas (entre 40 et 100) sans influence significative sur le temps  $CPU$  puisque la grille contient très peu de points. En général,  $\nu_1 = 2$  et  $\nu_2 = 1$ . Le  $W$  cycle nécessite plus de temps  $CPU$  mais pour certains cas, il est mieux adapté (plus stable) que le  $V$  cycle.

Au début d'un cycle, on dispose d'une initialisation de la variable sur la grille fine. Ensuite, on effectue un certain nombre de relaxations  $\nu_1$  sur cette grille avant de commencer de calculer

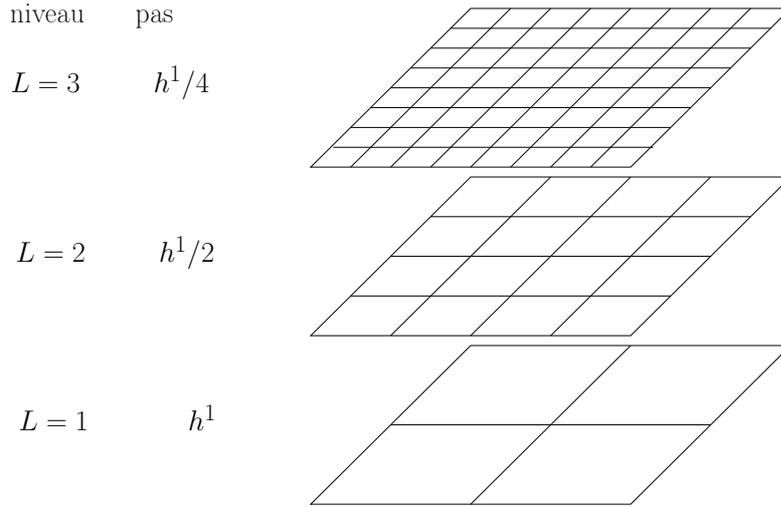


FIG. 3.3 – Exemple de structure de grilles 2D [35]

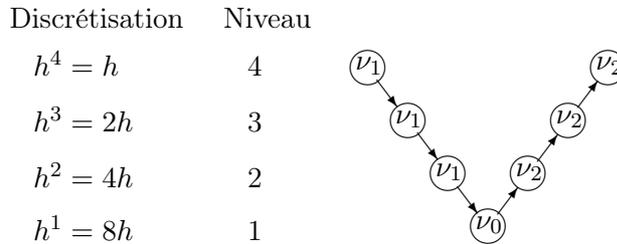


FIG. 3.4 – Schéma d'un cycle  $V(\nu_1, \nu_2)$  avec 4 grilles (niveaux) [128]

la correction. L'idée de *FMG Full MultiGrid* est de commencer à résoudre le problème sur la grille la plus grossière et d'interpoler la solution approchée sur la grille plus fine qui à son tour améliore la solution et l'interpole sur la grille encore plus fine et cela jusqu'à la grille la plus fine. L'initialisation ainsi obtenue contre un petit surcoût de travail supplémentaire est bien meilleure que l'initialisation d'un cycle seul. La Figure 3.6 montre le principe de l'algorithme *FMG* avec  $V$  cycles. Le symbole  $\mathbb{I}_H^h$  signifie l'opérateur d'interpolation qui est différent de celui de la correction [128].

### 3.3 Principe de l'intégration rapide

Dans les sections précédentes, le principe des MultiGrilles a été brièvement exposé. Cet algorithme est utilisé pour résoudre l'équation de Reynolds. Comme cité dans la section 3.1, l'équation de la déformation élastique doit être résolue simultanément avec celle de Reynolds. Elle s'écrit sous la forme :

$$w(x) = \int_{\Omega} K(x, y)u(y) dy \quad (3.14)$$

avec  $x$  et  $y$  des vecteurs de  $n$  dimensions. Dans le cadre de cette étude (2D) les  $x, y$  contiennent deux composantes chacun. La fonction  $K(x, y)$  est appelée le noyau. Elle donne l'influence d'une pression ponctuelle sur la déformation élastique de tous points d'un milieu semi-infini. Après discrétisation, l'équation 3.14 devient :

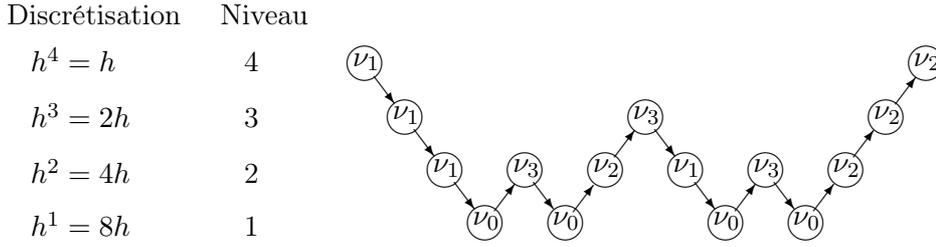


FIG. 3.5 – Schéma d'un cycle  $W(\nu_1, \nu_2)$  avec 4 grilles (niveaux) [128]

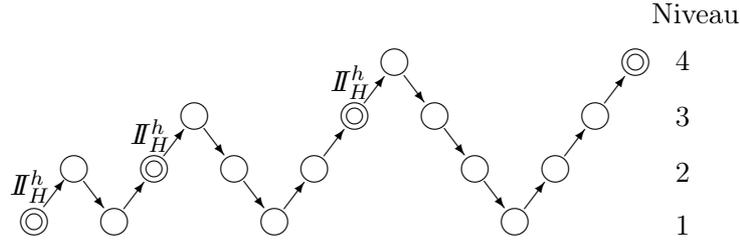


FIG. 3.6 – Schéma d'un algorithme FMG avec 1 V cycle par raffinement [128]

$$w^h(x_i^h) = h^2 \sum_j K_{i,j}^{hh} u_j^h \quad (3.15)$$

Cette équation nécessite le calcul de l'intégrale sur tout le domaine pour obtenir la déformation en un point. Par exemple, pour un milieu  $2D$  avec  $N$  le nombre total de points, le nombre de sommations nécessaires est  $N^2$ . Même avec les ordinateurs modernes, ce calcul devient vite très coûteux. L'algorithme d'intégration rapide propose une autre alternative. Il est basé sur les propriétés du noyau  $K^{hh}$  dit lisse. Les variations du noyau, à partir d'une certaine distance de l'endroit où la pression ponctuelle est appliquée, sont sans gradients importants. Donc, comme l'idée de base de l'algorithme des MultiGrilles, on peut correctement représenter, à partir d'une certaine distance, le noyau sur une grille moins fine. Au lieu d'utiliser la valeur exacte du noyau, on peut définir un noyau approché de la manière suivante :

$$K_{i,j}^{hh} = \tilde{K}_{i,j}^{hh} + O(\epsilon) \quad (3.16)$$

avec  $O(\epsilon)$  l'erreur d'approximation. Dans ce cas, l'équation 3.15 devient :

$$w_i^h \approx \tilde{w}_i^h = H^d \sum_J K_{i,J}^{hH} u_J^H \quad (3.17)$$

avec :

$$u_J^H = 2^{-d} [(\mathbb{I}_H^h)^T u^h]_J \quad (3.18)$$

D'après l'équation 3.17, l'intégrale peut être correctement calculée à partir des quantités de la grille grossière. Cela implique un gain de temps puisqu'on somme sur moins de points. Cependant, le noyau n'est pas lisse partout. Les variations ne sont pas lisses à proximité de l'endroit où la pression ponctuelle est appliquée. Pour cette raison, une correction calculée sur la grille fine est nécessaire. Généralement, l'expression de l'intégrale de la déformation devient :

$$w_i^h = w_I^H + h^d \sum_j (K_{i,j}^{hh} - \tilde{K}_{i,j}^{hh}) u_j^h \quad (3.19)$$

Pour avoir la valeur exacte de l'intégrale, il faut faire la somme des corrections pour tous les points du domaine  $\Omega$ . Dans ce cas, l'intérêt d'avoir un algorithme différent de la somme classique se perd puisque au final on effectue le même nombre d'opérations. Au lieu de cela, les propriétés lisses du noyau sont utilisées. La différence  $K_{i,j}^{hh} - \tilde{K}_{i,j}^{hh}$  devient négligeable à partir d'une certaine distance :

$$\lim_{|i-j| \rightarrow \infty} (K_{i,j}^{hh} - \tilde{K}_{i,j}^{hh}) = 0 \quad (3.20)$$

Dans le livre de Venner et Lubrecht [128], une limite  $m$  est calculée analytiquement en fonction du problème. Dans ce cas, la correction est appliquée jusqu'à une certaine distance du point où la pression ponctuelle est appliquée. Finalement, l'expression de la déformée élastique devient :

$$w_i^h \simeq w_I^H + h^d \sum_{|j-i| \leq m} (K_{i,j}^{hh} - \tilde{K}_{i,j}^{hh}) u_j^h \quad (3.21)$$

Le nombre d'opérations pour calculer l'intégrale 3.15 est passé de  $O(N^2)$  à  $O(N \ln(N))$ .

## 3.4 Application des principes des MultiGrilles et de l'intégration rapide au problème d'EHD

Les principes des techniques numériques, exposés précédemment, sont appliqués au problème de l'EHD. L'équation de Reynolds qui gouverne l'écoulement des films minces entre deux parois est résolue en utilisant l'algorithme des MultiGrilles 3.2. La deuxième équation, celle de la déformation élastique, est résolue en utilisant un algorithme d'intégration rapide 3.3.

### 3.4.1 Equations Discrètes

Les équations sont discrétisées avec un pas de discrétisation constant et identique en espace  $h_X$  et  $h_Y$  et en temps  $h_T$  sur un domaine carré. Le nombre de points suivant  $T$  varie suivant la nature du problème. Pour les calculs transitoires, le nombre de pas de temps doit être suffisant pour éviter les effets transitoires d'initialisation. Par exemple, lors du passage des rugosités dans le contact, le nombre de pas temps suggéré par Venner et Lubrecht [127] doit permettre le passage d'au moins deux longueurs d'onde avant l'observation des phénomènes EHD.

Les équations sont résolues d'une manière itérative. Les critères d'arrêts des itérations sont : soit un nombre de cycles maximal atteint, soit le résidu moyen de l'équation de Reynolds et le résidu de la déformation élastique inférieurs à une limite donnée fixée par l'utilisateur.

### Equation de Reynolds

L'équation de Reynolds est discrétisée avec un schéma de second ordre. Pour le terme de Poiseuille, un schéma de différences finies arrières centrales (*Standard Upstream 2<sup>nd</sup> order (SU2)*) est adopté. En stationnaire, pour le terme de Couette un schéma de différence arrière court est appliqué. Dans le cas de problèmes transitoires, le terme de Couette et le terme transitoire sont discrétisés ensemble. Un schéma de discrétisation mixte est utilisé (*Narrow Upstream 2<sup>nd</sup> order (NU2)*). Les indices utilisés sont les suivants :

- $i$  - l'indice suivant  $X$ ,

- $n_X$  - nombre de points suivant  $X$ ,
- $j$  - l'indice suivant  $Y$ ,
- $n_Y$  - nombre de points suivant  $Y$ ,
- $k$  - l'indice suivant  $T$ ,
- $n_T$  - nombre de points suivant  $T$ .

Après discrétisation du terme de Poiseuille, chaque partie ( $Q_X$  suivant  $X$  et  $Q_Y$  suivant  $Y$ ) s'écrit sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_X = \frac{\xi_{X,i-1/2,j}P_{i-1,j} - (\xi_{X,i-1/2,j} + \xi_{X,i+1/2,j})P_{i,j} + \xi_{X,i+1/2,j}P_{i+1,j}}{h^2} \\ Q_Y = \frac{\xi_{Y,i,j-1/2}P_{i,j-1} - (\xi_{Y,i,j-1/2} + \xi_{Y,i,j+1/2})P_{i,j} + \xi_{Y,i,j+1/2}P_{i,j+1}}{h^2} \end{array} \right. \quad (3.22)$$

Les symboles  $\xi_X$  et  $\xi_Y$  sont liés aux fonctions rhéologiques  $\phi_X$  et  $\phi_Y$ . Les expressions détaillées, pour chaque modèle de lubrifiant, sont présentées dans les chapitres suivants. D'une manière générale,  $\xi_X$  et  $\xi_Y$  s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_{X,i,j} = \frac{\bar{\rho}_{i,j}(H_{i,j})^3}{\bar{\eta}_{i,j}\lambda} \phi_X \\ \xi_{Y,i,j} = \frac{\bar{\rho}_{i,j}(H_{i,j})^3}{\bar{\eta}_{i,j}\lambda} \phi_Y \end{array} \right. \quad (3.23)$$

Les coefficient  $\xi_X$  et  $\xi_Y$  dans les points  $i \pm 1/2$  et  $j \pm 1/2$  sont calculés comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_{X,i\pm 1/2,j} = (\xi_{X,i,j} + \xi_{X,i\pm 1,j})/2 \\ \xi_{X,i,j\pm 1/2} = (\xi_{X,i,j} + \xi_{X,i,j\pm 1})/2 \\ \xi_{Y,i\pm 1/2,j} = (\xi_{Y,i,j} + \xi_{Y,i\pm 1,j})/2 \\ \xi_{Y,i,j\pm 1/2} = (\xi_{Y,i,j} + \xi_{Y,i,j\pm 1})/2 \end{array} \right. \quad (3.24)$$

En stationnaire, le terme de Couette discrétisé devient :

$$H_X = \frac{1.5\bar{\rho}_{i,j}H_{i,j}^h - 2\bar{\rho}_{i-1,j}H_{i-1,j} + 0.5\bar{\rho}_{i-2,j}H_{i-2,j}}{h} \quad (3.25)$$

En transitoire, le terme de Couette et le terme transitoire sont considérés ensemble. L'implémentation est plus délicate puisque le schéma de discrétisation change suivant le rapport  $h_X/h_T$  - Figure 3.7. Si  $h_X/h_T \leq 1$  :

$$\begin{aligned} H_X + H_T &= \frac{1.5\bar{\rho}_{i,j}H_{i,j} - 2.0\bar{\rho}_{i-1,j}H_{i-1,j} + 0.5\bar{\rho}_{i-2,j}H_{i-2,j}}{h_X^{-1} - h_T^{-1}} \\ &+ \frac{1.5\bar{\rho}_{i,j}H_{i,j} - 2.0\bar{\rho}_{i-1,j}^{k-1}H_{i-1,j}^{k-1} + 0.5\bar{\rho}_{i-2,j}^{k-2}H_{i-2,j}^{k-2}}{h_T} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Sinon :

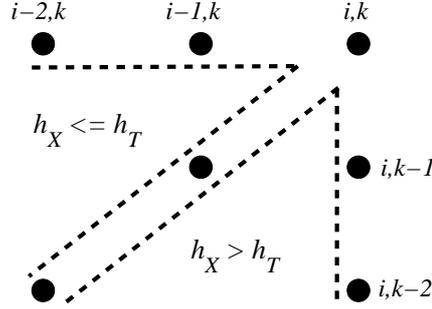


FIG. 3.7 – Schéma 1D de discrétisation NU2

$$\begin{aligned}
 H_X + H_T = & \frac{1.5\bar{\rho}_{i,j}H_{i,j} - 2.0\bar{\rho}_{i-1,j}^{k-1}H_{i-1,j}^{k-1} + 0.5\bar{\rho}_{i-2,j}^{k-2}H_{i-2,j}^{k-2}}{h_X} \\
 & + \frac{1.5\bar{\rho}_{i,j}H_{i,j} - 2.0\bar{\rho}_{i,j}^{k-1}H_{i,j}^{k-1} + 0.5\bar{\rho}_{i,j}^{k-2}H_{i,j}^{k-2}}{h_T^{-1} - h_X^{-1}}
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Les symboles  $k - 1$  et  $k - 2$  signifient les termes aux pas de temps précédents (des quantités connues). Lorsque le symbole  $k$  n'apparaît pas, les quantités concernent le pas de temps actuel. L'avantage de ce schéma est que l'erreur de discrétisation inférieure à l'erreur de discrétisation d'un schéma classique de second ordre. De plus, elle s'annule dans la direction caractéristique de l'équation advective ( $h_X = h_T$ ) ainsi que pour  $h_X = 0.5h_T$  et  $h_X = 2h_T$ . Yavneh [136] et Wijnant [134] proposent des études détaillées concernant la discrétisation NU2 et la comparaison des schémas de discrétisation pour des problèmes de la Dynamique des Fluides.

### Equation de l'élasticité

Pour la discrétisation de l'équation de l'élasticité, on considère que la pression est constante sur un domaine carré  $h_X \times h_Y$  autour d'un point  $X'_i, Y'_j$ . On obtient ainsi :

$$H_{i,j} = H_0 + \frac{X_i^2}{2} + \frac{Y_j^2}{2} + \mathcal{R}_{i,j} + \sum_{i'} \sum_{j'} K_{i,i',j,j'} P_{i',j'} \tag{3.28}$$

avec  $K_{i,i',j,j'}$  le noyau discret dont la forme analytique est connue :

$$\begin{aligned}
 K_{i,i',j,j'}^{hh} = & \frac{2}{\pi^2} \left\{ |X_p| \operatorname{arcsinh} \left( \frac{Y_p}{X_p} \right) + |Y_p| \operatorname{arcsinh} \left( \frac{X_p}{Y_p} \right) \right. \\
 & - |X_m| \operatorname{arcsinh} \left( \frac{Y_p}{X_m} \right) - |Y_p| \operatorname{arcsinh} \left( \frac{X_m}{Y_p} \right) \\
 & - |X_p| \operatorname{arcsinh} \left( \frac{Y_m}{X_p} \right) - |Y_m| \operatorname{arcsinh} \left( \frac{X_p}{Y_m} \right) \\
 & \left. + |X_m| \operatorname{arcsinh} \left( \frac{Y_m}{X_m} \right) + |Y_m| \operatorname{arcsinh} \left( \frac{X_m}{Y_m} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_p = X_i - X_{i'} + h/2 \\ X_m = X_i - X_{i'} - h/2 \\ Y_p = Y_j - Y_{j'} + h/2 \\ Y_m = Y_j - Y_{j'} - h/2 \end{array} \right. \quad (3.30)$$

### Equation de l'équilibre de la charge

Finalement, l'équilibre de la charge discrétisée s'écrit :

$$h^2 \sum_i \sum_j P_{i,j}^h = \frac{2\pi}{3} \quad (3.31)$$

### 3.4.2 Schéma de relaxation

L'équation de Reynolds et l'équation de l'équilibre de la charge sont résolues d'une manière itérative. Pour la résolution de l'intégrale de la déformation élastique, un processus de multi intégration est adopté. A la fin du processus, les distributions de la pression  $P$  et de l'épaisseur de film  $H$  sont obtenues. La solution est considérée atteinte lorsque l'erreur numérique liée au résidu des équations est inférieure à l'erreur de discrétisation. Au-delà de cette précision, le travail supplémentaire pour diminuer les résidus n'améliore pas la solution finale d'une manière significative, puisque l'erreur de discrétisation domine et dépend uniquement du maillage.

### Relaxation de l'équation de Reynolds

D'une manière schématique, l'équation de Reynolds s'écrit :

$$Q_X + Q_Y - H_X - H_T = 0 \quad (3.32)$$

La nature de cette équation change dans le domaine de calcul EHD. Dans les zones de haute pression, en raison du caractère fortement non linéaire entre la viscosité  $\eta$  et la pression  $P$ , les termes de Poiseuille  $Q_X$ ,  $Q_T$  deviennent très faibles comparés aux autres termes ; l'équation est hyperbolique. Dans ce cas, le comportement est gouverné par l'équation advective  $H_X - H_T = 0$ . L'analyse de Brand et Lubrecht [22] et Venner et Lubrecht [128] montre qu'une relaxation distributive de Jacobi par ligne donne une rapide réduction du résidu. La notion de relaxation distributive est utilisée puisque la correction  $\delta_{i,j}$  calculée en un point sert à corriger les quantités des points autour suivant le schéma :

$$\omega_2 \delta_{i,j} \begin{bmatrix} 0 & -1/4 & 0 \\ -1/4 & 1 & -1/4 \\ 0 & -1/4 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Cela limite les perturbations liées au caractère intégral de l'équation de l'élasticité [128] qui, après relaxation, peuvent induire des erreurs encore plus importantes qu'avant la relaxation. La pression est corrigée à la fin de la relaxation.

Dans la zone de basse pression, l'équation de Reynolds est elliptique. Les termes de Poiseuille sont prépondérants devant les autres termes. L'analyse de Venner et Lubrecht [128] montre que l'utilisation d'une relaxation par ligne de Gauss Seidel réduit efficacement les hautes fréquences

de l'erreur numérique. Pour ce type de relaxation, la pression corrigée est utilisée dans le calcul de la correction des points suivants.

L'application de ces schémas de relaxation dépend de la définition de la zone basse et haute pression. Venner et Lubrecht [128] proposent une valeur limite de  $\xi_l$ . Dans le cas du comportement newtonien, si la condition 3.34 est remplie, une relaxation de Gauss Seidel par ligne est appliquée, dans le cas contraire, la relaxation par ligne distributive de Jacobi est utilisée.

$$|\xi_{i,j+1}|, |\xi_{i,j-1}|, |\xi_{i+1,j}|, |\xi_{i-1,j}| > \xi_l \quad (3.34)$$

Lorsque la rhéologie du fluide exige un modèle non newtonien, le paramètre de choix de relation est légèrement modifié. L'équation de Reynolds dans la zone de basse pression, gouvernée par le terme de Poiseuille, est anisotrope. Cela peut devenir une source d'instabilité :  $|\xi_X| < |\xi_Y|$  et  $|\xi_X| < \xi_l$  signifie que selon le critère 3.34, l'utilisation d'une relaxation distributive de Gauss Seidel par ligne est nécessaire. Dans certains cas, lorsque  $\xi_Y \gg \xi_X$ , le deuxième terme de Poiseuille  $Q_Y$  reste important, ce qui induit des instabilités au processus. Pour cette raison, le critère de choix est modifié dans ce cas :

$$|\xi_{i,j+1}|, |\xi_{i,j-1}| > \xi_l \quad (3.35)$$

Ces schémas de relaxation s'appliquent par ligne. Les schémas classiques calculent et corrigent la solution ponctuellement. Venner et Lubrecht [128] proposent une autre alternative. Une correction calculée sous la forme :

$$A^j \cdot \underline{\delta}_j = \underline{r}_j \quad (3.36)$$

est appliquée sur toute la ligne. Les termes de la matrice  $A^j$  sont définis par :

$$A_{i,k}^j = \frac{\partial(L\underline{P})_{i,j}}{\partial P_{k,j}} \quad (3.37)$$

Le système 3.36 peut être résolu avec une méthode d'inversion, du type pivot de Gauss. La matrice  $A^j$  est pleine et le temps *CPU* qui en découle lors d'une relaxation exige  $O(N^2)$  opérations, ce qui rend le processus lent. La vitesse de convergence n'est pas diminuée si une solution approchée du problème 3.36 est utilisée. Au lieu de considérer une matrice pleine, seuls les termes vérifiant  $-3 \leq i - k \leq 2$  sont considérés. Avec cette condition, la matrice devient hexagonale et le temps *CPU* est  $O(N)$ . Les expressions des termes de la matrice sont présentés dans le livre de Venner et Lubrecht [128] - Annexe C Systems of Equations of Line Relaxations.

Remarque : l'indice  $k$  dans l'expression 3.37 est un indice muet. Il n'indique pas le pas de temps.

### Relaxation de l'équation de l'équilibre de la charge

L'équation de l'équilibre de la charge présente la condition physique de contact. La force appliquée doit être égale à la somme (intégrale) de la pression dans le contact. Cette condition détermine la valeur de  $H_0$ , appelée l'approche mutuelle. Cela implique que lorsque l'intégrale de la pression calculée est inférieure à la force appliquée, les deux corps doivent s'approcher :  $H_0$  doit diminuer. Dans l'autre configuration, la valeur de  $H_0$  doit augmenter. La manière dont l'approche mutuelle influence la charge et la pression n'est pas directe. Un changement dans la valeur de  $H_0$  signifie un changement dans l'épaisseur de film donc dans la distribution de la pression. De son côté, la modification dans la pression change l'équilibre de la charge. La recherche de la valeur de  $H_0$  se fait d'une manière itérative : une approximation de la pression est calculée pour une valeur de  $H_0$ , ensuite la valeur de l'approche mutuelle est corrigée :

$$h_X h_Y \sum_i \sum_j P_{i,j} - \frac{2\pi}{3} = r \quad (3.38)$$

Soient  $\tilde{H}_0$  et  $\bar{H}_0$  les valeurs de l'approche mutuelle avant et après relaxation, la correction s'écrit :

$$\bar{H}_0 = \tilde{H}_0 + \omega_3 r \quad (3.39)$$

Le changement de la valeur de  $H_0$  induit des erreurs de grande longueur d'onde par nature dans la solution. En effet, cela est dû à l'effet retardé de l'influence de  $H_0$  sur la pression via l'épaisseur de film. Il faut un certain nombre de relaxations sur les grilles pour que ce changement soit assimilé. Pour cette raison, la relaxation de l'équation de l'équilibre de la charge s'effectue sur la grille la plus grossière.

### Paramètres de relaxation

Dans les expressions 3.33 et 3.39, les symboles de  $\omega_2$  et  $\omega_3$  représentent les paramètres de relaxation. Le caractère fortement non linéaire de l'équation de Reynolds impose que les valeurs de ces paramètres soient inférieures à 1.0 (paramètres de sous-relaxation). En général, lorsque les valeurs de  $M$  et  $L$  augmentent, les valeurs des coefficients diminuent. Les valeurs des paramètres de relaxation varient selon le type de relaxation appliquée. Pour la relaxation de type Gauss par ligne,  $\omega_1 \in [0.4 : 0.8]$ , pour la relaxation distributive par ligne de Jacobi,  $\omega_2 \in [0.2 : 0.4]$  et pour la correction de l'approche mutuelle,  $\omega_3 \in [0.01 : 0.2]$ .

### 3.4.3 Algorithme de résolution

L'algorithme commence avec une initialisation de la pression. Le champ de pression de Hertz est utilisé :

$$P(X, Y) = \begin{cases} \sqrt{1 - X^2 - Y^2}, & \text{si } X^2 + Y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.40)$$

La valeur initiale de l'approche mutuelle, basée sur l'expression analytique de Moes [105], est donnée par la relation suivante :

$$H_0 = 1.67M^{-1/9} - 1.897 + \frac{0.2}{50}L \quad (3.41)$$

### Calcul stationnaire

Une première approximation de l'épaisseur de film est calculée avec les valeurs initiales de  $P$  et  $H_0$ . Pour un fluide non newtonien, les fonctions rhéologiques nécessitent la résolution d'un système d'équations supplémentaire (voir Chapitre 5). Le schéma 3.8 montre les différentes étapes du processus de résolution.

### Calcul transitoire

Pour les calculs transitoires, le pas de temps  $h_T$  est constant sur toutes les grilles et égal au pas de la discrétisation spatiale de la grille fine,  $h_T = h_X = h_Y$ . La première étape est le calcul stationnaire lisse dont l'algorithme est détaillé ci-dessus (pas de temps  $k = 0$ ). Ensuite, pour le premier pas de temps ( $k = 1$ ), les variables à l'instant  $k - 2$  sont initialisées et considérées égales aux variables à l'instant  $k - 1$ . Cette initialisation perturbe les résidus des équations de Reynolds et de l'équilibre mais la stabilité globale de l'algorithme est conservée. Des  $V$  cycles sont appliqués à chaque pas de temps. Pour retrouver la vitesse de convergence du calcul stationnaire,

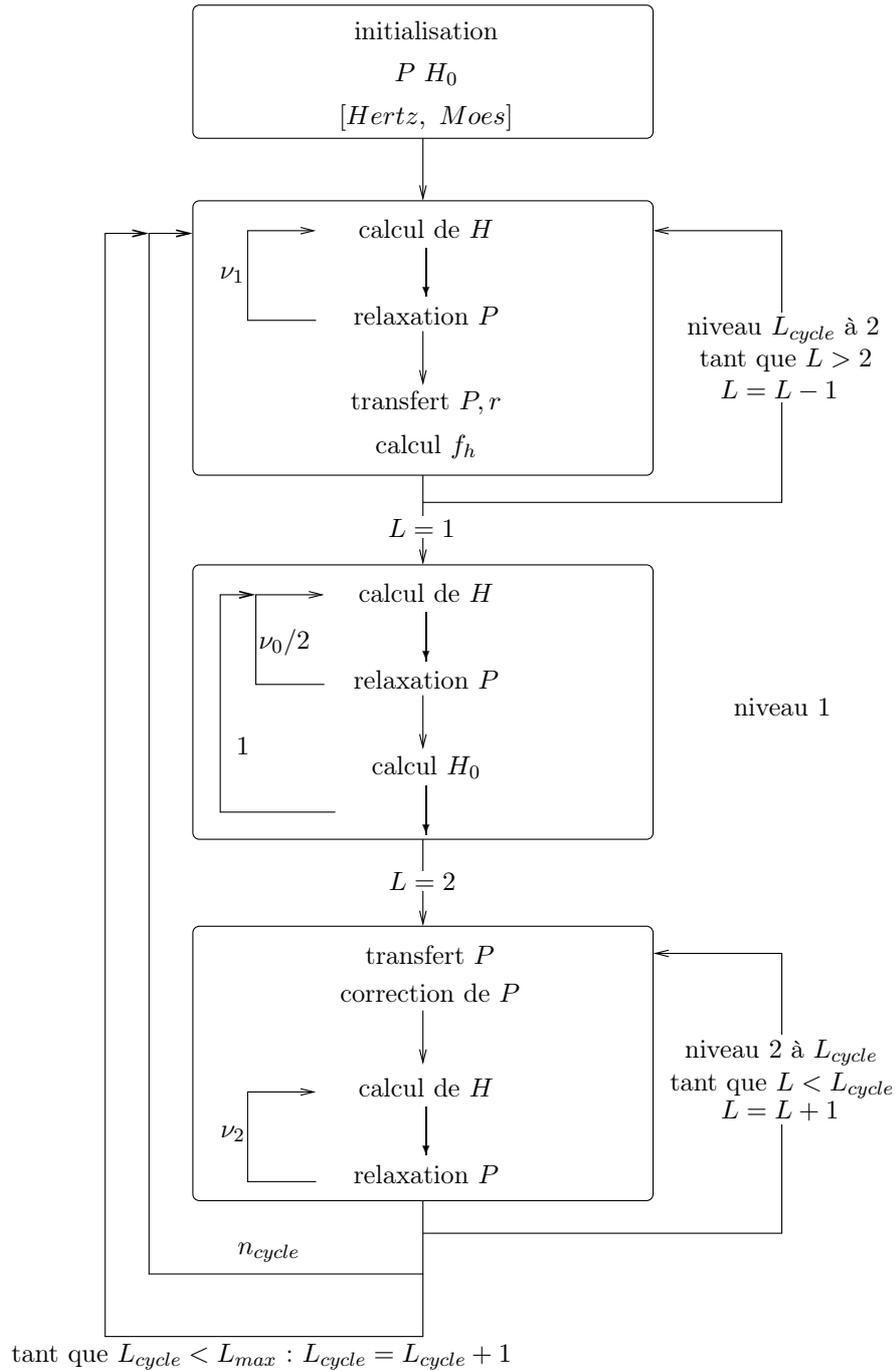


FIG. 3.8 – Algorithme de résolution du problème EHD par la méthode FMG avec  $n_{cycle}$   $V$  cycles

les premiers pas de temps sont effectués avec des surfaces lisses. Le schéma 3.9 montre le processus d'un calcul transitoire.

### 3.4.4 Vitesse de convergence et précision de la solution

#### Vitesse de convergence

Un outil pratique utilisé pour définir la performance d'un calcul est la vitesse de convergence ou réduction du résidu de l'équation en question. Dans cette étude, les équations à résoudre sont l'équation de Reynolds et l'équation de l'équilibre de la charge. Lorsque le processus de résolution

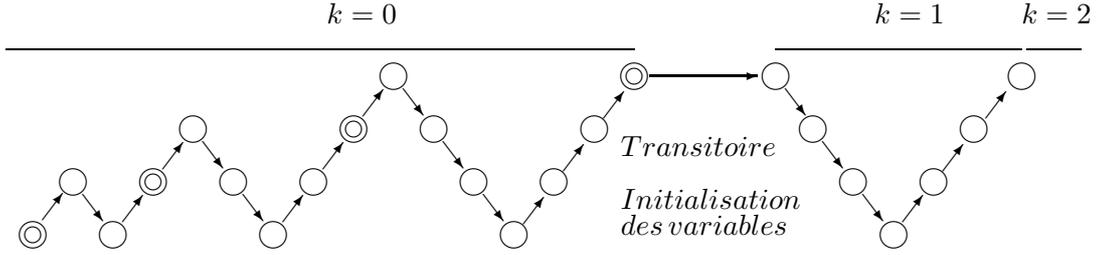


FIG. 3.9 – Schéma d'un calcul transitoire ( $k \geq 1$ ) avec 1 V cycle par pas de temps. Algorithme FMG avec 1 V cycle par raffinement pour le calcul stationnaire ( $k = 0$ )

est efficace et stable, les normes des résidus définies ci-dessous diminuent à la même vitesse.

$$\begin{aligned}
 resn &= h_X h_Y \sum_{i=0}^{n_X} \sum_{j=0}^{n_Y} |r_{i,j}| \\
 r &= h_X h_Y \sum_{i=0}^{n_X} \sum_{j=0}^{n_Y} P_{i,j} - \frac{2\pi}{3}
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

avec  $resn$  le résidu moyen de l'équation de Reynolds et  $r_{i,j}$  la valeur au point  $i, j$  et  $r$  le résidu de l'équation de l'équilibre de la charge. La Figure 3.10 montre l'évolution des résidus en fonction du nombre de cycles.

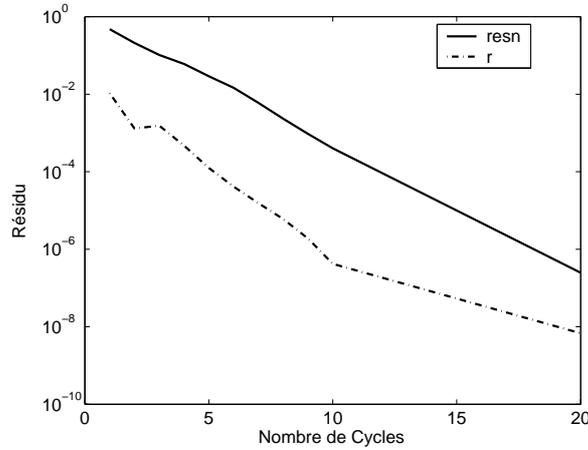


FIG. 3.10 – Evolution des résidus en fonction du nombre de cycles.  $M = 200$ ,  $L = 10$

### Estimation de l'erreur

La solution sur une grille est dite convergée lorsque l'erreur numérique est inférieure à l'erreur de discrétisation. L'erreur de discrétisation ne peut pas être estimée a priori. Lorsque la solution est lisse, l'erreur de discrétisation est gouvernée par le premier terme de l'erreur de troncature  $O(h^2)$ . Cela implique que l'erreur est divisée par 4 lorsque le pas est divisé par 2. Le Tableau 3.1 montre la réduction relative de l'erreur de discrétisation de l'équation de Reynolds. Le comportement du fluide est considéré non newtonien. Pour une rhéologie newtonienne, Venner et Lubrecht [128] présentent des tendances similaires.

W cycle	(L3 - L4)/(L4 - L5)	(L4 - L5)/(L5 - L6)	$H_c$
2	1.75	4.50	$3.08071 \cdot 10^{-2}$
3	2.55	4.57	$3.08020 \cdot 10^{-2}$
4	3.07	4.21	$3.08012 \cdot 10^{-2}$
5	3.39	3.98	$3.08010 \cdot 10^{-2}$
6	3.53	3.88	$3.08008 \cdot 10^{-2}$
10	3.64	3.69	$3.08014 \cdot 10^{-2}$

TAB. 3.1 – Evolution de l’erreur de discrétisation relative entre deux grilles consécutives en fonction du nombre de cycles. Le niveau L6 correspond à un maillage  $512 \times 512$  points. La valeur de  $H_c$  est calculée sur L6

### 3.4.5 Codes de calcul

Dans la suite, trois codes basés sur les principes des MultiGrilles et l’intégration rapide sont utilisés. D’abord, dans le Chapitre 4, un code transitoire pour simuler le passage des rugosités dans le contact est utilisé. Le comportement du fluide est considéré newtonien. Dans le Chapitre suivant, le comportement rhéologique est non newtonien. Le modèle du lubrifiant est celui de Ree-Eyring. Finalement, dans le Chapitre 6, des simulations basées sur des modèles rhéologiques plus avancés sont présentées.

La validation des codes de calcul pour les modèles non newtoniens est assez délicate, puisque les résultats dans la littérature sont rares. La plupart des travaux considèrent un fluide non newtonien de type Ree-Eyring dans un contact linéique entre deux surfaces lisses ou rugueuses Jacod et al. [84]. Il n’y a pas de résultats issus des simulations numériques complètes basées sur les modèles rhéologiques présentés dans le Chapitre 6.

## 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, les outils numériques utilisés par la suite sont présentés. L’algorithme de résolution du problème d’EHD est basé sur les techniques des MultiGrilles pour la résolution de l’équation de Reynolds et sur les techniques de l’intégration rapide pour le calcul de l’intégrale de la déformation élastique. Le gain de temps est considérable, le temps CPU est  $O(N \ln(N))$ . L’application du schéma de relaxation distributive pour la résolution de l’équation de Reynolds augmente la stabilité de l’algorithme. Ces propriétés de l’algorithme permettent l’exécution d’un grand nombre de calculs nécessaires pour les études paramétriques.

Les résultats des codes sont exploités dans les chapitres suivants pour étudier la distribution de la pression et de l’épaisseur de film.



## Chapitre 4

# Déformation élastique des rugosités - comportement newtonien

Ce chapitre traite les déformations élastiques des rugosités harmoniques dans un contact EHD. Le comportement du fluide est considéré newtonien. La viscosité  $\mu$  suit la relation de Roelands 2.29 et la densité  $\rho$  est donnée par l'expression de Dowson et Higginson 2.24. Les équations présentées dans le Chapitre 2 sont résolues à l'aide des techniques numériques exposées au Chapitre 3.

La présence de rugosités dans le contact modifie la distribution de la pression ce qui cause des modifications dans l'épaisseur de film. Deux descriptions du phénomène de la déformation élastique des rugosités sont présentées :

- La première approche est basée sur l'influence de l'entrée du contact sur la déformation des rugosités. Dans des conditions de roulement pur, le phénomène est étudié analytiquement par Morales-Espejel [106], Greenwood et Morales-Espejel [62], Hooke [76] et Hooke et Venner [80]. Des études numériques sont proposées par Venner et al. [124], Couhier [32], Venner et Lubrecht [127]. Suite à ces travaux, le paramètre adimensionné  $\nabla$  est introduit comme gouvernant la déformation élastique des rugosités. Le paramètre  $\nabla$  prend en compte les conditions de fonctionnement du contact ainsi que les caractéristiques des rugosités.
- La deuxième approche utilise le rôle de l'épaisseur de film sur l'absorption des fluctuations de la pression induites par le passage des rugosités dans le contact. D'abord, une description qualitative du phénomène est présentée. Suite à des observations, un nouveau paramètre adimensionné  $\Lambda_{eq}$  gouvernant la déformation élastique est proposé. Il tient compte de l'épaisseur centrale de film  $H_c$  et de la longueur d'onde  $\lambda$  de la rugosité.

Le comportement, en terme de déformation élastique, prédit par les deux paramètres  $\nabla$  et  $\Lambda_{eq}$  est similaire : pour les petites valeurs des paramètres, les rugosités passent dans le contact peu déformées ; pour des grandes valeurs, les rugosités sont presque complètement écrasées.

Remarque : Dans ce chapitre, le contact EHD fonctionne dans des conditions de roulement pur. Dans ce cas :  $\bar{u} = u_1 = u_2$ .

## 4.1 Comportement asymptotique de l'équation de Reynolds

Lorsque le comportement du fluide est considéré newtonien, les fonctions rhéologiques sont égales à l'unité :  $\phi_X \equiv \phi_Y \equiv 1$  et l'équation de Reynolds adimensionnée 2.34 prend sa forme classique :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\bar{\rho} H^3}{\lambda \bar{\mu}} \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\bar{\rho} H^3}{\lambda \bar{\mu}} \frac{\partial P}{\partial Y} \right)}_{\text{terme de Poiseuille}} - \underbrace{\left( \frac{\partial (\bar{\rho} H)}{\partial X} + \frac{\partial (\bar{\rho} H)}{\partial T} \right)}_{\text{terme advectif}} = 0 \quad (4.1)$$

Pour des conditions typiques de fonctionnement des contacts EHD, la valeur de la viscosité dans la zone de haute pression ( $p \approx O(1) \text{ GPa}$ ) devient très importante ( $\bar{\mu} \approx O(10^6)$ ) par rapport aux gradients de pression ( $\partial P / \partial X \approx \partial P / \partial Y \approx O(1)$ ) :  $\bar{\mu} \gg \partial P / \partial X$ ,  $\bar{\mu} \gg \partial P / \partial Y$ . Le terme de Poiseuille devient ainsi négligeable devant les autres termes. L'équation de Reynolds se transforme en une équation advective (équation de transport) :

$$\frac{\partial (\bar{\rho} H)}{\partial X} + \frac{\partial (\bar{\rho} H)}{\partial T} = 0 \quad (4.2)$$

dont la direction caractéristique est  $X = T$ . La solution de l'équation 4.2 est de la forme  $\bar{\rho} H = \bar{\rho} H(X - T)$ . Cette expression montre que dans la zone de haute pression, le terme  $\bar{\rho} H$  se propage suivant la direction  $X = T$  sans changement de l'amplitude. De plus, la densité du fluide  $\bar{\rho}$  varie très peu dans cette zone et présente une asymptote  $\bar{\rho} \rightarrow 1.34$  lorsque  $p \rightarrow \infty$  selon l'équation de Dowson et Higginson 2.24. Pour cette raison, il est raisonnable de considérer la densité  $\bar{\rho}$  constante dans la zone de haute pression et de négliger son influence sur l'épaisseur de film. Dans ces conditions, la solution de l'équation 4.2 est de la forme  $H = H(X - T)$ . L'écriture de l'expression en variables dimensionnées  $h = h(x - \bar{u}t)$  montre que les changements dans l'épaisseur de film se propagent à la vitesse moyenne (ici, égale à  $u_1$  et à  $u_2$ ), indépendamment de la vitesse à laquelle les surfaces entrent dans le contact - Venner [122].

### 4.1.1 Conséquences du comportement asymptotique

#### Surfaces lisses

Cette particularité de l'équation de Reynolds, associée à l'hypothèse de fluide incompressible, explique la forme plate observée de l'épaisseur de film dans la zone centrale du contact. Ces considérations restent valables lorsque la relation de Barus 2.28 est utilisée, puisqu'elle prédit des valeurs de la viscosité  $\bar{\mu}$  encore plus importantes. La Figure 4.1 montre un exemple des profils de l'épaisseur de film suivant la ligne centrale ( $Y = 0$ ) obtenus avec les relations de Barus 2.28 et Roelands 2.29. Le fluide est considéré d'abord incompressible  $\bar{\rho} = 1$ , ensuite compressible. La densité relative est calculée avec l'équation de Dowson et Higginson 2.24. Lorsque le fluide est incompressible, la distribution de l'épaisseur de film présente un plateau dans la zone centrale du contact. Dans le cas contraire, la forme de la solution de l'équation 4.1 impose que le produit  $\bar{\rho} \cdot H$  soit constant par rapport à  $X$ . La densité du fluide augmente légèrement dans la première partie de cette zone jusqu'à  $X = 0$ , ce qui impose une faible baisse de l'épaisseur de film. Dans la deuxième partie de la zone  $X > 0$ , le phénomène contraire a lieu. La pression dans le contact diminue, ce qui entraîne une baisse de la densité et donc une augmentation de l'épaisseur de film. De l'autre côté, le choix de la relation pour le calcul de la viscosité  $\bar{\mu}$  influence aussi les profils obtenus. Pour les mêmes conditions de fonctionnement, la valeur de la viscosité donnée par la relation de Roelands 2.29 est inférieure à celle prédite par la relation de Barus 2.28 - Figure 2.7, ce qui implique une plus faible épaisseur de film.

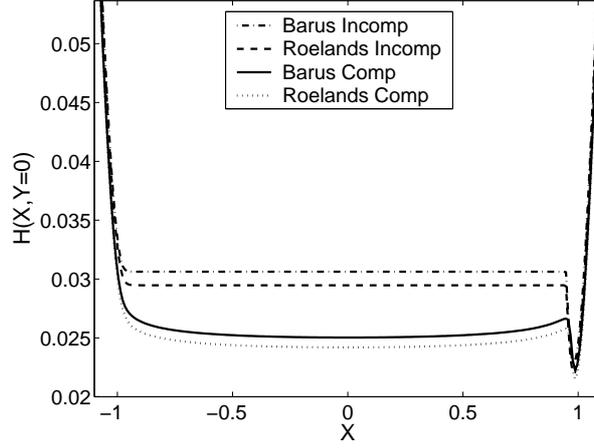


FIG. 4.1 – Exemple de distribution de l'épaisseur de film  $H$  entre deux surfaces lisses,  $M = 1000$ ,  $L = 10$

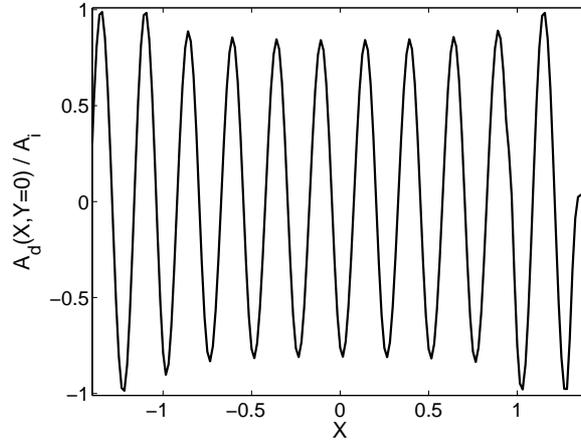


FIG. 4.2 – Exemple de réduction d'amplitude d'une surface isotrope  $\lambda_x = \lambda_y = 0.25$ ,  $M = 1000$ ,  $L = 10$ , relation de Roelands 2.29, fluide compressible 2.24

### Surfaces rugueuses

L'analyse du comportement de l'équation de Reynolds peut être étendue au cas des surfaces rugueuses : dans la zone de haute pression, les effets de piézo-viscosité rendent le terme de Poiseuille négligeable par rapport au terme advectif. Cela implique que dans la zone centrale du contact, la rugosité déformée se propage sans changement dans l'amplitude. De ce fait, la rugosité déformée est caractérisée par deux paramètres : l'amplitude déformée  $A_d$  à l'entrée de la zone haute pression et les longueurs d'onde suivant  $X$  et  $Y$  -  $\lambda_x/b$ ,  $\lambda_y/b$ . La Figure 4.2 montre le rapport entre l'amplitude déformée et l'amplitude initiale  $A_d/A_i$ , d'une rugosité isotrope, suivant la ligne centrale du contact  $Y = 0$ .

Pour caractériser la déformation des rugosités, la notion d'enveloppe de la déformation élastique  $\mathcal{D}_{wr}$  est utilisée. Le paramètre est défini de la manière suivante :

$$\mathcal{D}_{wr}(X, Y) = \max_T \left( \frac{A_d(X, Y)}{A_i} \right) \quad (4.3)$$

Suivant la valeur du paramètre  $\mathcal{D}_{wr}$ , le contact EHD peut être divisé en trois zones - Figure 4.3 :

- dans la première zone  $X < -1.0$ , la valeur de  $\mathcal{D}_{wr}$  est égale à l'unité. La pression dans le

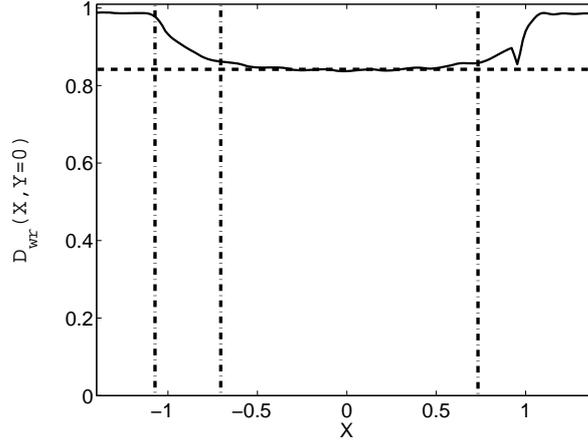


FIG. 4.3 – Exemple de l’enveloppe de déformation élastique d’une surface isotrope  $\lambda_x/b = \lambda_y/b = 0.25$ ,  $M = 1000$ ,  $L = 10$ , relation de Roelands 2.29, fluide compressible 2.24

contact n’est pas suffisamment élevée pour déformer élastiquement les rugosités. Les légères oscillations de  $\mathcal{D}_{wr}$  sont liées aux mouvements de corps solide avec le temps  $H_0(T)$ . La période des oscillations est égale à la longueur d’onde de la surface rugueuse.

- Dans la deuxième zone  $X \approx -1.0$  : la valeur du paramètre varie d’une façon importante puisque les rugosités se déforment .
- Dans la troisième zone, le paramètre  $\mathcal{D}_{wr}$  devient de nouveau constant : l’amplitude déformée de la rugosité ne change pas ; la valeur est définie à l’entrée de cette zone.

A la sortie du contact, la pression diminue graduellement ce qui est accompagné par une augmentation de la valeur de  $\mathcal{D}_{wr}$ . A la sortie du contact,  $X > 1$ , le rapport devient de nouveau égal à l’unité.

## 4.2 Déformation des rugosités de faible amplitude

La déformation des rugosités dans un contact linéique est étudiée numériquement par Couhier [32] et Venner et al. [124]. Pour des rugosités de faible amplitude :  $A_i < H_c$ , la déformation est linéaire : lorsque l’amplitude initiale est doublée, l’amplitude déformée dans le contact est aussi doublée. Cette constatation présente un avantage important puisqu’elle permet de s’affranchir de l’influence de l’amplitude initiale. La linéarité de la déformation élastique justifie l’utilisation du rapport  $A_d/A_i$ . La Figure 4.4 montre l’évolution de l’amplitude relative  $A_d(X = Y = 0)/A_i$  en fonction de la longueur d’onde de la rugosité pour trois amplitudes initiales.  $H_c$  désigne l’épaisseur centrale de film calculée pour les mêmes conditions de fonctionnement avec des surfaces lisses.

### 4.2.1 Déformation des rugosités - description de l’entrée du contact

Hooke [76],[77],[79] propose une étude analytique de l’influence des rugosités sur l’épaisseur de film dans un contact linéique fonctionnant dans les conditions de roulement/glisement. Selon ses travaux, la déformation des rugosités est gouvernée par un paramètre adimensionné  $\nabla$ . Il représente le rapport entre la longueur d’onde de la surface rugueuse et la longueur de la zone d’entrée du contact. L’expression du paramètre est la suivante :

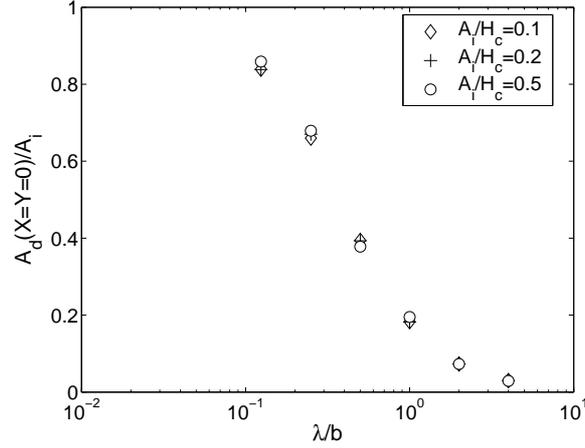


FIG. 4.4 – Evolution de l'amplitude relative en fonction de  $\lambda/b$ , pour trois amplitudes initiales, roulement pur [124]

$$\nabla = \frac{8}{3\pi\bar{L}} \frac{\lambda}{b} \sqrt{\frac{M}{L}} = \text{constante} \times \frac{\lambda}{b} \sqrt{\frac{M}{L}} \quad (4.4)$$

avec  $\bar{L}$  une constante pour tous les contacts fonctionnant dans les conditions de lubrification EHD.

Venner et Lubrecht [127] proposent un paramètre adimensionné, issu des études numériques dans un contact ponctuel. L'expression du paramètre proposé est la suivante :

$$\nabla = \frac{\lambda}{b} \sqrt{\frac{M}{L}} \quad (4.5)$$

Les deux expressions 4.4 et 4.5 sont similaires à une constante près. Cela montre que la déformation élastique dans les contacts linéiques et circulaires est gouvernée par le même phénomène. Dans le cadre de cette étude, le paramètre proposé par Venner et Lubrecht 4.5 est utilisé. La Figure 4.5 montre la courbe de réduction d'amplitude pour une surface isotrope -  $\lambda_x = \lambda_y = \lambda$ . La courbe de réduction présente deux asymptotes : pour des faibles valeurs de  $\nabla$   $A_d(X = Y = 0)/A_i \approx 1$ , la rugosité est très peu déformée; pour des valeurs importantes de  $\nabla$ , la rugosité est complètement déformée dans le contact  $A_d(X = Y = 0)/A_i \approx 0$ .

### Zone d'entrée du contact EHD

La zone d'entrée du contact est le domaine caractérisé par une valeur de l'enveloppe  $\mathcal{D}(X, Y)_{wr}$  qui varie d'une manière significative - Figure 4.3. Dans cette zone, la pression est suffisamment élevée pour déformer élastiquement la rugosité, mais les effets de piézo-viscosité ne sont pas assez importants pour rendre le terme de Poiseuille négligeable par rapport aux autres termes de l'équation de Reynolds. La taille de cette zone dépend des conditions de fonctionnement représentées par les paramètres adimensionnés  $M$  et  $L$ . Lorsque la longueur d'onde est petite par rapport à la zone d'entrée ( $\nabla \ll 1$ ), la rugosité est très peu déformée. Dans le cas contraire, la longueur d'onde est très supérieure à la zone d'entrée ( $\nabla \gg 1$ ) et les rugosités sont complètement aplaties. Les expressions 4.4 et 4.5 permettent une estimation analytique du rapport  $l_2/l_1$ , où  $l_1$  et  $l_2$  désignent la taille de la zone d'entrée, voir Figure 4.6 :

$$\frac{l_2}{l_1} = \sqrt{\frac{M_1}{M_2}} \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \quad (4.6)$$

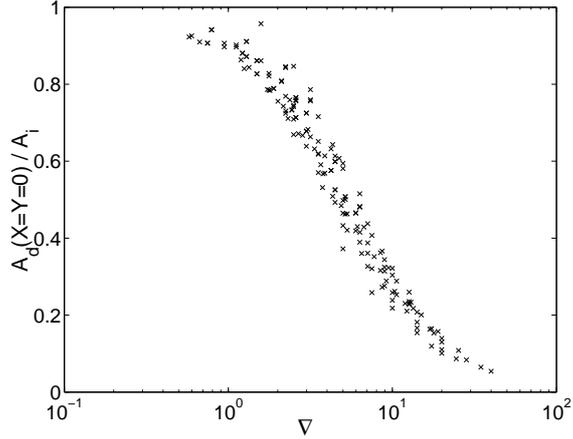


FIG. 4.5 – L'évolution de l'amplitude relative  $A_d(X = Y = 0)/A_i$  en fonction du paramètre adimensionné  $\nabla$  - Equation 4.5

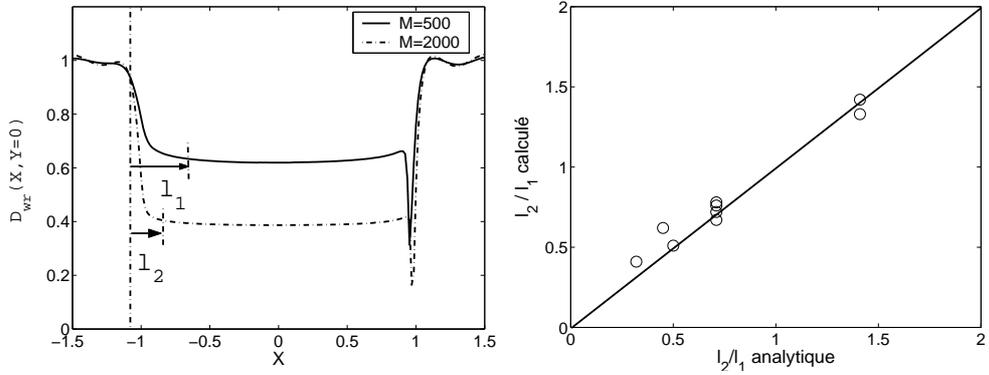


FIG. 4.6 – La zone d'entrée du contact pour deux valeurs de  $M$ ,  $L = 10$ ,  $\lambda_x/b = \lambda_y/b = 0.5$  (à gauche). Comparaison des valeurs analytiques et mesurées du rapport  $l_2/l_1$  (à droite)

La Figure 4.6 montre la zone d'entrée du contact pour deux valeurs de  $M$  ainsi qu'une comparaison entre les valeurs du rapport  $l_2/l_1$ , calculées avec l'expression 4.6, et les valeurs mesurées graphiquement. La Figure 4.6 (à gauche) confirme que la taille de la zone diminue lorsque  $M$  augmente. Dans ces conditions le comportement du contact est proche de celui du contact sec. La Figure 4.6 (à droite) montre un bon accord entre les valeurs mesurées de la zone d'entrée et les valeurs analytiques.

### Influence des rugosités sur le champ de pression

La présence de rugosités dans le contact modifie le champ de pression. En roulement pur, les fluctuations de pression et de l'épaisseur de film se propagent à la même vitesse. Lorsque les rugosités sont harmoniques, les variations de pression le sont également (si on respecte l'hypothèse des faibles amplitudes). Pour cette raison, les variations sont décrites par une amplitude et par les longueurs d'ondes suivant  $X$  et  $Y$ , identiques à celles de la rugosité. L'amplitude de la variation  $\Delta P$  est définie comme :

$$\Delta P(X, Y, T) = P(X, Y, T) - P_{sm}(X, Y) \quad (4.7)$$

avec  $P_{sm}$  le champ de pression entre deux surfaces lisses. La Figure 4.7 montre un exemple de profil de pression suivant la ligne centrale ( $Y = 0$ ) lors du passage de la rugosité dans le contact

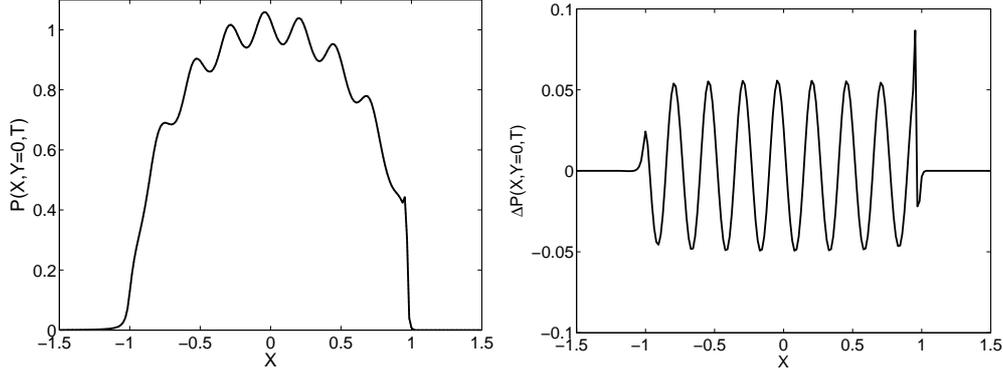


FIG. 4.7 – La pression suivant la ligne centrale ( $Y = 0$ ) lors du passage d’une rugosité :  $\lambda_x/b = \lambda_y/b = 0.25$ ,  $M=2000$ ,  $L=20$ , à gauche : le profil complet de la pression, à droite : les variations de la pression induites par la rugosité

et les surpressions correspondantes, obtenues avec la définition 4.7. Les variations de  $\Delta P$  sont harmoniques et ont une amplitude quasi constante.

#### 4.2.2 Analyse du contact sec rugueux - Johnson [86]

Johnson [86] propose une analyse du contact sec biplan avec des rugosités transversales ( $1D$ ) ou des rugosités isotropes ( $2D$ ). Les surpressions adimensionnées (par rapport à la pression hertzienne maximale  $p_H$ ) sont fonction uniquement de la pente des rugosités ( $A_i/(\lambda/b)$ ) et sont directement liées au paramètre adimensionné  $\chi$ . Dans le cas de rugosité isotrope, l’expression du paramètre est la suivante :

$$\chi = \frac{\pi^2 A_i}{2 \lambda/b} \quad (4.8)$$

En fonction de la valeur du paramètre  $\chi$ , le champ de pression peut être continu ou discontinu. Lorsque le champ de pression est continu :

$$\chi < \sqrt{2}/2 \Leftrightarrow \Delta P = \sqrt{2}\chi \quad (4.9)$$

L’expression des rugosités isotropes utilisée par Johnson [86] est différente de l’expression utilisée dans le cadre de cette étude :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathcal{R}}(X, Y) = A_i \cos\left(2\pi \frac{X}{\lambda/b}\right) \cos\left(2\pi \frac{Y}{\lambda/b}\right) \\ \bar{\mathcal{R}}(X, Y) = A_i \left( \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) + \cos\left(2\pi \frac{y}{\lambda}\right) \right) \quad \text{Johnson[86]} \end{array} \right. \quad (4.10)$$

Cette particularité modifie l’expression des surpressions pour deux raisons : d’abord, l’amplitude maximale de la rugosité est 1 au lieu de 2 (Johnson [86]) et la densité de pics sur une surface de taille  $\lambda \times \lambda$  augmente : 2 au lieu de 1 (Johnson [86]). L’expression des surpressions dans le cas de champ discontinu devient :

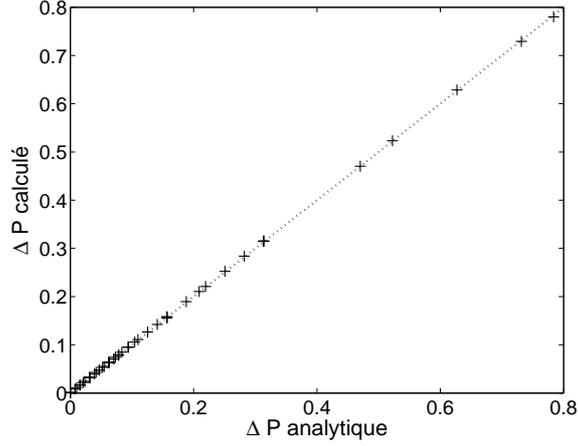


FIG. 4.8 – Comparaison entre les valeurs théoriques 4.9 et les valeurs calculées numériquement des surpressions  $\Delta P$

$$\chi > \sqrt{2}/2 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta P = 2 \left( \frac{6}{\pi} \right)^{1/3} \chi^{2/3} - 1 \quad (4.11)$$

Dans le cadre de cette étude, l'hypothèse de rugosités de faible amplitude impose que les champs de pressions soient continus. Dans ce cas, la valeur du paramètre  $\chi$  est inférieure à  $\sqrt{2}/2$ . La Figure 4.8 montre une comparaison entre les surpressions calculées avec l'équation 4.9 et les surpressions issues de la résolution numérique du problème de contact sec à l'aide de l'algorithme proposé par Venner et Lubrecht [128]. La Figure 4.8 présente un bon accord entre la théorie et la résolution numérique dans le cas du champ de pression continu.

### Approximation de contact lubrifié par un contact sec

La formule de Johnson 4.9 donne la valeur de la surpression nécessaire pour l'écrasement complet de la rugosité dans le contact. Lorsque le contact considéré est EHD, les déformations élastiques des rugosités provoquent un écrasement partiel des rugosités. La formule de Johnson 4.9 peut être modifiée pour tenir compte du phénomène :

$$\Delta P = \sqrt{2} \frac{\pi^2}{2} \frac{A_i - A_d}{\lambda/b} = \sqrt{2} \chi \left( 1 - \frac{A_d}{A_i} \right) \quad (4.12)$$

Le terme  $A_i - A_d$  représente la proportion d'amplitude déformée dans le contact lubrifié. La Figure 4.9 montre une comparaison entre les surpressions issues des simulations numériques et les surpressions prédites par l'équation 4.12. L'utilisation de la formule modifiée de Johnson 4.12 montre une corrélation satisfaisante entre les résultats numériques et les estimations analytiques. Cette approche du contact lubrifié justifie aussi l'utilisation du même paramètre adimensionné  $\nabla$  pour la courbe de réduction d'amplitude, Figure 4.5, et pour les surpressions dans le contact, Figure 4.10.

Remarque : La plage de variation des paramètres adimensionnés  $M$  et  $L$  est donnée dans le Tableau 4.2.

La courbe des surpression a une forme plus complexe, lorsque de grandes longueurs d'onde  $1 \ll \lambda/b$  sont considérées. Dans ce cas, le passage d'une longueur d'onde dans le contact est

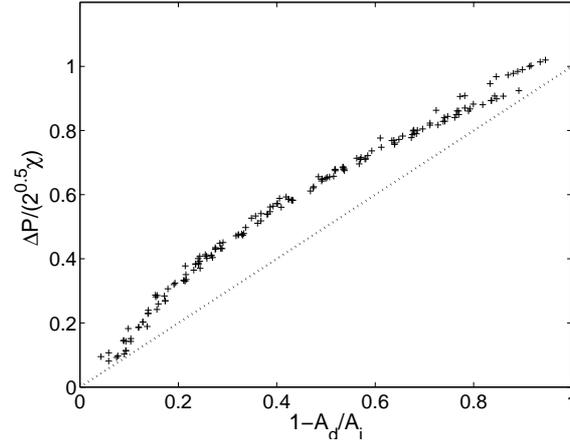


FIG. 4.9 – Comparaison entre les surpressions calculées numériquement et par la formule modifiée de Johnson 4.12

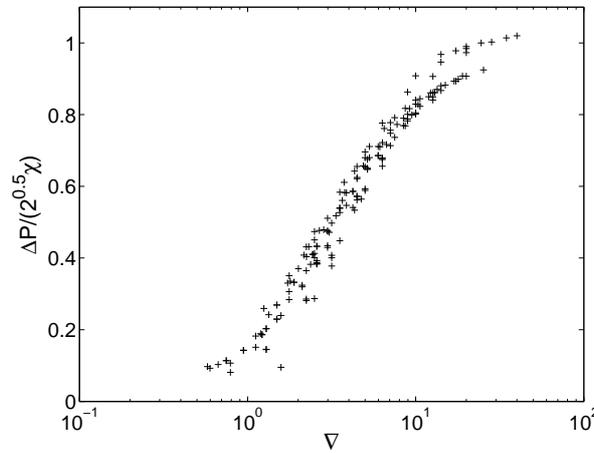


FIG. 4.10 – Evolution des surpressions  $\Delta P$  en fonction du paramètre adimensionné  $\nabla$  - Equation 4.5

équivalent à un changement du rayon de courbure du contact hertzien. Une étude analytique des surpressions est proposée par Hooke [79]. Cependant, cela exige l'ajout des effets d'inertie au système en question, ce qui complique l'analyse et l'interprétation des résultats.

### 4.2.3 Déformation des rugosités - rôle de l'épaisseur de film

La section étudie l'influence de l'épaisseur de film sur la déformation élastique des rugosités. L'approche est basée sur des observations qualitatives de la réduction d'amplitude et des surpressions correspondantes dans le contact.

#### Influence de l'épaisseur centrale $H_c$

La même configuration de contact hertzien est utilisée pour les simulations numériques. La variation de l'épaisseur centrale  $H_c$  se fait via la vitesse uniquement. L'utilisation des paramètres adimensionnés exige que le rapport  $b/R_x$  reste constant. Dans ce cas, la condition s'écrit :

$$M^{1/3} \times L = \text{constante} \quad (4.13)$$

Paramètres		Unités
$R_x$	$7.5 \times 10^{-3}$	[m]
$b$	$0.319 \times 10^{-3}$	[m]
$p_H$	$1.16 \times 10^9$	[Pa]
$A_i$	$7.65 \times 10^{-3}$	[-]

TAB. 4.1 – Paramètres du contact hertzien 4.2.3

M	L	$H_c$	$A_i(\%H_c)$	$A_d$
1000.0	7.0	$1.91 \times 10^{-2}$	40.0	$5.5 \times 10^{-3}$
594.6	8.3	$3.19 \times 10^{-2}$	24.0	$6.2 \times 10^{-3}$
353.6	9.9	$5.25 \times 10^{-2}$	14.6	$6.7 \times 10^{-3}$
177.8	12.4	$9.96 \times 10^{-2}$	7.7	$6.9 \times 10^{-3}$

TAB. 4.2 – Variations des paramètres adimensionnés  $M$  et  $L$ , utilisés dans 4.2.3

Le Tableau 4.1 montre les paramètres du contact hertzien utilisés pour les simulations numériques.

En termes de paramètres adimensionnés, le Tableau 4.2 résume les variations de  $M$  et  $L$ . La valeur du coefficient de piézo-viscosité  $\alpha$  est  $2.2 \times 10^{-8} GPa^{-1}$  et la viscosité à la pression ambiante  $\mu_0$  est  $40 \times 10^{-3} Pa \cdot s$ . Le rapport entre la valeur maximale et la valeur minimale de l'épaisseur centrale  $H_c$  est de 5.

Le Tableau 4.2 montre que l'augmentation de l'épaisseur de film implique une déformation moins importante (de  $A_d = 5.5 \times 10^{-3}$  à  $A_d = 6.9 \times 10^{-3}$ ). La rugosité est mieux absorbée par le film plus épais ( $A_d$  est plus important). Inversement, pour les surpressions  $\Delta P$ , une baisse est observée - Figure 4.11. La même constatation est déduite en utilisant la formule modifiée de Johnson 4.12.

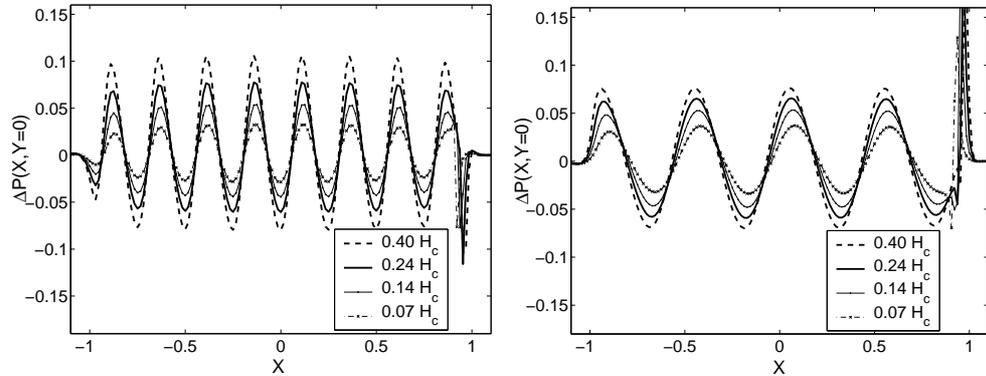


FIG. 4.11 – Comparaison des surpressions calculées avec les conditions de fonctionnement 4.2, à gauche :  $\lambda/b = 1/4$  et à droite  $\lambda/b = 1/2$

### La courbe des surpressions $\Delta P$

Les surpressions dues aux passages des rugosités dans le contact sont calculées pour quatre longueurs d'onde différentes :  $\lambda/b_x = \lambda/b_y = 0.25, 0.5, 1, 2$ . Le Tableau 4.3 montre la variation des paramètres adimensionnés pour toutes les simulations numériques effectuées dans cette section. La Figure 4.12 montre l'évolution des surpressions en fonction de l'inverse de la racine de l'épaisseur centrale de film. D'abord, les surpressions présentent tous la même tendance :  $\Delta P$  augmente lorsque l'épaisseur de film diminue. Cependant, à une valeur de l'épaisseur de film donnée, les

Paramètre	Min	Max
$M$	88	3200
$L$	5	25
$H_c$	$5.7 \times 10^{-3}$	$198.3 \times 10^{-3}$
$A_i$	$1.76 \times 10^{-3}$	$66.58 \times 10^{-3}$
$W_x$	0.25	2

TAB. 4.3 – Variations des paramètres adimensionnés  $M$  et  $L$ , utilisés dans 4.2.3

surpressions changent avec la longueur d'onde. Cela suggère qu'un paramètre supplémentaire est nécessaire pour caractériser le phénomène et obtenir une courbe unique.

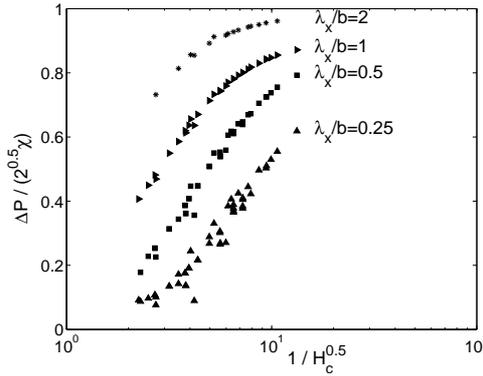


FIG. 4.12 – Variations de la pression pour quatre longueurs d'onde différentes

La Figure 4.13 présente la courbe de réduction d'amplitude et la courbe des surpressions en fonction d'un paramètre adimensionné  $\Lambda_{eq}$  défini comme :

$$\Lambda_{eq} = \frac{\lambda}{b} \frac{1}{\sqrt{H_c}} \quad (4.14)$$

Le paramètre 4.14 est composé du rapport entre la longueur d'onde et l'inverse de la racine de l'épaisseur de film centrale.

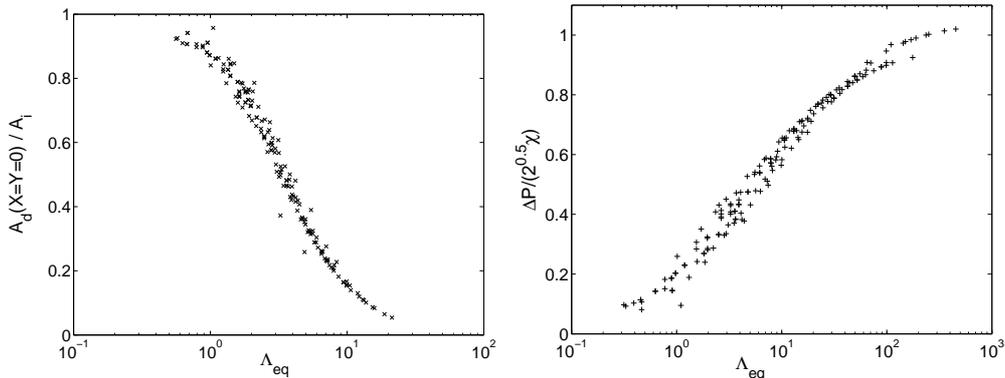


FIG. 4.13 – La courbe de réduction d'amplitude (à gauche) et la courbe des surpressions (à droite) en fonction de  $\Lambda_{eq}$  - Equation 4.14

La courbe de réduction d'amplitude montre que les rugosités sont très peu déformées  $A_d/A_i \approx 1$  pour de faible valeur du paramètre  $\Lambda_{eq}$ . Cependant, la surpression  $\Delta P$  correspondante est faible

par rapport à la pression nécessaire pour écraser complètement la rugosité  $\chi$ , donnée par la formule de Johnson 4.9 :  $\Delta P/\sqrt{2}\chi \approx 0$ .

#### 4.2.4 Comparaison des paramètres $\nabla$ et $\Lambda_{eq}$

Les similitudes de comportement des courbes de réduction d'amplitude et de surpression suggèrent que les deux paramètres adimensionnés  $\nabla$  et  $\Lambda_{eq}$  peuvent être liés. L'expression analytique de l'épaisseur de film centrale proposée par Nijenbanning et al. [108] peut être approximée par une expression plus simple. Plus de détails sur la formule analytique et sur l'approximation de l'estimation sont proposés dans l'Annexe A. L'approximation obtenue permet d'écrire :

$$\frac{1}{\sqrt{H_c}} \approx \frac{M^{7/18}}{L^{3/8}} = \sqrt{\frac{M}{L}} \cdot \frac{L^{1/8}}{M^{1/9}} \quad (4.15)$$

La variation du terme  $L^{1/8}/M^{1/9}$  n'est pas significative et peut être négligée en première approximation. Cela permet d'expliquer la relation linéaire entre le deux paramètres observée sur la Figure 4.14.

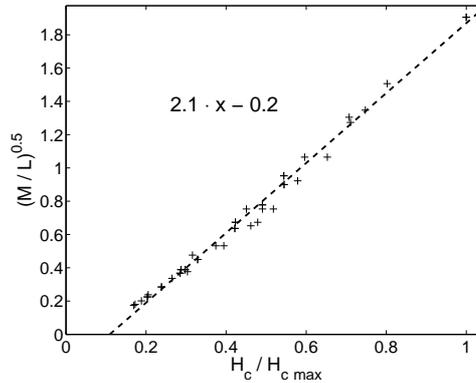


FIG. 4.14 – Comparaison entre les paramètres adimensionnés  $\nabla$  - Equation 4.5 et  $\Lambda_{eq}$  - Equation 4.14

### 4.3 Conclusion

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'influence des rugosités sur l'épaisseur de film et le champ de pression dans des contacts fonctionnant en régime piézo-visqueux. Le comportement du fluide est supposé newtonien. Cela génère d'importants effets piézo-visqueux dans la zone de haute pression. Grâce à cette particularité, l'équation de Reynolds se simplifie et devient une équation de transport. Dans ces conditions, la déformation est caractérisée par deux paramètres : l'amplitude déformée de la rugosité à l'entrée de la zone de haute pression et sa longueur d'onde.

Le paramètre  $\nabla$  est utilisé pour quantifier la réduction d'amplitude des rugosités. Le paramètre est issu des travaux analytiques de Hooke et les études numériques de Venner et Lubrecht. La signification physique de  $\nabla$  est basée sur l'influence de la zone d'entrée du contact. Dans cette région, la pression est suffisante pour déformer élastiquement la rugosité, mais les effets de piézo-viscosité ne sont pas encore suffisamment importants pour rendre le terme de Poiseuille négligeable par rapport aux autres termes de l'équation de Reynolds.

Suite à l'étude de l'influence de l'épaisseur de film sur le champ de pression, un nouveau paramètre  $\Lambda_{eq}$  gouvernant la réduction d'amplitude est proposé. Il tient compte de l'épaisseur de film centrale  $H_c$  et de la longueur d'onde adimensionnée  $\lambda/b$ . Ce paramètre met en évidence la capacité du film à absorber la rugosité : lorsque l'épaisseur de film est importante, la rugosité est peu déformée et les surpressions correspondantes sont faibles.

Le comportement prédit par les deux paramètres est similaire. Pour les faibles valeurs de  $\nabla$  et  $\Lambda_{eq}$ , la rugosité passe dans le contact peu déformée : le rapport  $A_d/A_i \approx 1$  ; dans le cas contraire, l'amplitude de la rugosité est fortement déformée.



## Chapitre 5

# Déformation élastique des rugosités - comportement non newtonien

Ce chapitre étudie les déformations élastiques des rugosités harmoniques dans un contact EHD. Le comportement du fluide est supposé non newtonien. Pour décrire la dépendance entre la contrainte de cisaillement  $\tau$  et le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ , le modèle d'Eyring est utilisé. La modélisation du fluide à faible taux de cisaillement est basée sur l'équation de Roelands 2.29 et l'équation de Dowson et Higginson 2.24.

L'utilisation d'un modèle non newtonien limite les effets de piézo-viscosité dans la zone de haute pression. Dans cette configuration, les déformations élastiques ne dépendent pas uniquement des conditions de fonctionnement à l'entrée du contact mais également de la position de la rugosité. Pour cette raison, l'approche présentée dans le chapitre précédent, qui consiste à étudier le phénomène au centre du contact, ne peut pas être directement appliquée.

Le comportement du fluide à fort taux de cisaillement - newtonien ou non newtonien, n'altère pas les tendances générales : les rugosités de petites longueurs d'onde sont très peu déformées tandis que les rugosités de grandes longueurs d'onde sont complètement écrasées. Dans un premier temps, l'analyse quantitative permet de prédire l'évolution de la déformation suivant la ligne centrale du contact. Le résultat obtenu est utilisé pour modifier les deux paramètres -  $\bar{\nabla}$  et  $\Lambda_{eq}$  présentés dans le chapitre précédent, afin de tenir compte des effets non newtoniens. Le paramètre ainsi modifié  $\bar{\nabla}$  est comparé au paramètre adimensionné  $Q$  issu des travaux analytiques de Hooke [79].

### 5.1 Equation de Reynolds

Une des caractéristiques du comportement non newtonien du fluide est la relation non linéaire entre le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  et la contrainte de cisaillement  $\tau$ . Cette relation modifie l'expression classique de l'équation de Reynolds qui s'écrit sous sa forme généralisée :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\bar{\rho} H^3}{\lambda \bar{\mu}} \phi_X \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\bar{\rho} H^3}{\lambda \bar{\mu}} \phi_Y \frac{\partial P}{\partial Y} \right)}_{\text{terme de Poiseuille}} - \underbrace{\left( \frac{\partial(\bar{\rho} H)}{\partial X} + \frac{\partial(\bar{\rho} H)}{\partial T} \right)}_{\text{terme advectif}} = 0 \quad (5.1)$$

avec les termes supplémentaires  $\phi_X$  et  $\phi_Y$  liés à la rhéologie non newtonienne du fluide. Dans le cas du modèle d'Eyring, les expressions sont :

$$\begin{cases} \phi_X &= \cosh(\bar{\tau}_a) \\ \phi_Y &= \frac{\sinh(\bar{\tau}_a)}{\bar{\tau}_a} \end{cases} \quad (5.2)$$

avec  $\bar{\tau}_a$  la contrainte moyenne adimensionnée de cisaillement suivant  $X$ . La présence de fonctions de flux suivant  $X$  et  $Y$  -  $\phi_X$  et  $\phi_Y$ , modifie le comportement classique de l'équation de Reynolds. Lorsque le modèle d'Eyring est utilisé, les effets de piézo-viscosité dans la zone de haute pression sont limités par les termes  $\phi_X$  et  $\phi_Y$ . L'exemple utilisé dans le chapitre précédent, Section 4.1, indique que la valeur de la viscosité  $\bar{\mu}$  dans la zone de haute pression est  $O(10^6)$ . Dans ce cas, les valeurs des viscosités efficaces selon  $X$  et  $Y$  -  $\bar{\mu}/\phi_X$  et  $\bar{\mu}/\phi_Y$ , sont  $O(10^2)$ . Le terme de Poiseuille n'est plus négligeable devant le terme advectif et l'analyse asymptotique présentée dans la Section 4.1 ne peut pas être utilisée pour étudier le comportement de l'équation de Reynolds généralisée.

### 5.1.1 Conséquences du comportement de l'équation de Reynolds modifiée

#### Surfaces lisses

Ai et al. [3] obtiennent des solutions numériques pour des contacts linéiques. Selon Ai et al. [3], l'épaisseur de film et le pic de pression dépendent de la contrainte limite de cisaillement  $\tau_0$  et du coefficient de roulement/glisement  $S$ . Lorsque les effets non newtoniens deviennent importants ( $\tau_0 \searrow$  et  $S \nearrow$ ), l'épaisseur de film diminue et le pic de pression à la sortie du contact disparaît. Les mêmes observations sont confirmées pour un contact ponctuel par Vergne et al. [130] et Ehret et al. [43]. Les résultats obtenus montrent aussi l'influence significative de la contrainte limite de cisaillement  $\tau_0$  sur le coefficient de frottement dans le contact.

La Figure 5.1 montre une comparaison de profils d'épaisseur de film et de pression suivant la ligne centrale  $Y = 0$ . On suppose que le fluide est compressible et suit la relation de Dowson et Higginson 2.24. Le comportement asymptotique de l'équation de Reynolds lorsque le fluide est newtonien impose un profil d'épaisseur de film quasi-constante dans la zone centrale. La forme légèrement convexe est due aux effets de compressibilité - Chapitre 4, Section 4.1.1. Le phénomène n'est pas observé pour un fluide d'Eyring. L'épaisseur de film est plus faible et diminue suivant la ligne centrale du contact. Les profils de pression sont similaires, la seule différence se situe au niveau du pic de pression à la sortie du contact ; il est absent pour un fluide d'Eyring.

Le choix de la relation pour la viscosité à faible taux de cisaillement  $\bar{\mu}$  n'influence pas d'une façon significative la forme générale des profils obtenus. L'utilisation de la relation de Barus 2.28 conduit à des épaisseurs de film légèrement plus importantes puisque les viscosités obtenues sont plus élevées.

#### Surfaces rugueuses

L'analyse du comportement de l'équation de Reynolds peut être étendue au cas des surfaces rugueuses. La relation entre le taux de cisaillement et la contrainte de cisaillement limite les effets de piézo-viscosité dans le contact. Dans ces conditions, le terme de Poiseuille n'est plus négligeable par rapport au terme advectif. En conséquence, l'équation de Reynolds ne se transforme pas en une équation de transport et la rugosité se propage dans la zone centrale du contact avec une amplitude variable. De ce fait, la rugosité déformée ne peut pas être caractérisée uniquement par deux paramètres : l'amplitude déformée  $A_d$  à l'entrée de la zone de haute pression et par les longueurs d'onde suivant  $X$  et  $Y$  -  $\lambda_x/b$ ,  $\lambda_y/b$ , comme pour le cas newtonien. La rugosité

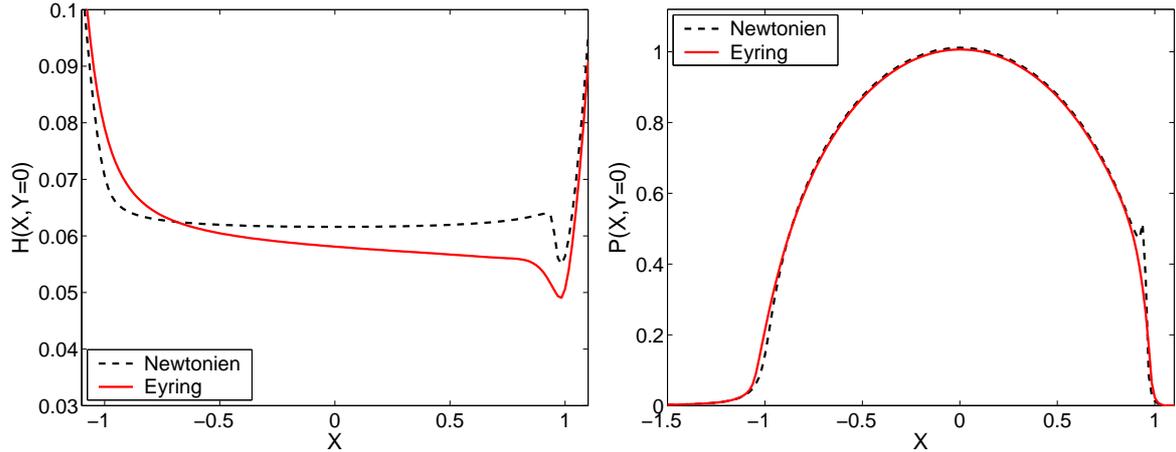


FIG. 5.1 – Exemple de profils d'épaisseur de film (à gauche) et de pression (à droite) suivant la ligne centrale  $Y = 0$  entre deux surfaces lisses.  $M = 500$ ,  $L = 20$ ,  $S = 0.05$ ,  $\tau_0 = 0.5 \text{ MPa}$

déformée est définie comme la différence en tout point entre la valeur maximale et la valeur minimale des variations temporelles de l'épaisseur de film :

$$A_d(X, Y) = \frac{1}{2} \left( \max_T (H(X, Y, T)) - \min_T (H(X, Y, T)) \right) \quad (5.3)$$

Chapkov et al.[28], utilisent les surpressions  $\Delta P(X, Y, T)$  et les déformations élastiques  $\Delta \mathcal{W}(X, Y, T)$ , induites par les rugosités, pour mieux illustrer les effets non newtoniens. Elles sont définies comme :

$$\begin{cases} \Delta P(X, Y, T) &= P(X, Y, T) - P_{sm}(X, Y) \\ \Delta \mathcal{W}(X, Y, T) &= \mathcal{W}(X, Y, T) - \mathcal{W}_{sm}(X, Y) \end{cases} \quad (5.4)$$

avec  $P_{sm}$  et  $\mathcal{W}_{sm}$  la pression et la déformation élastique dans le contact lorsque les surfaces sont lisses.  $\mathcal{W}$  est la déformation élastique totale donnée par l'équation 2.41. La Figure 5.2 présente un exemple de profils de surpressions  $\Delta P$  et de déformations élastiques  $\Delta \mathcal{W}$  suivant la ligne centrale  $Y = 0$ . La Figure 5.2 montre que les surpressions ne sont pas constantes suivant la direction de roulement. Une décroissance de la déformation élastique est logiquement observée. De l'autre côté, l'analyse de Johnson modifiée 4.2.2 suggère que l'amplitude déformée qui en résulte, augmente suivant la direction de  $X$ . La Figure 5.3 montre la variation du rapport  $A_d/A_i$  pour deux longueurs d'onde différentes.

## 5.2 Déformation des rugosités de faible amplitude

La déformation élastique des rugosités isotropes de faible amplitude est analysée dans cette section. L'hypothèse de rugosité de faible amplitude est de nouveau utilisée, comme au chapitre précédent, pour s'affranchir de l'influence de l'amplitude initiale  $A_i$  et étudier directement le rapport  $A_d/A_i$ . La réduction d'amplitude est étudiée en fonction des conditions de fonctionnement du contact :  $M$ ,  $L$  et  $S$  et de la caractéristique non newtonienne du fluide :  $\tau_0$ .

Le paramètre  $S$  désigne le taux de glissement dans le contact. La définition utilisée dans le cadre de cette étude permet d'avoir des valeurs positives ou négatives de  $S$ . Dans le premier cas, la surface rugueuse avance plus vite que la surface lisse et dans le deuxième cas, le phénomène

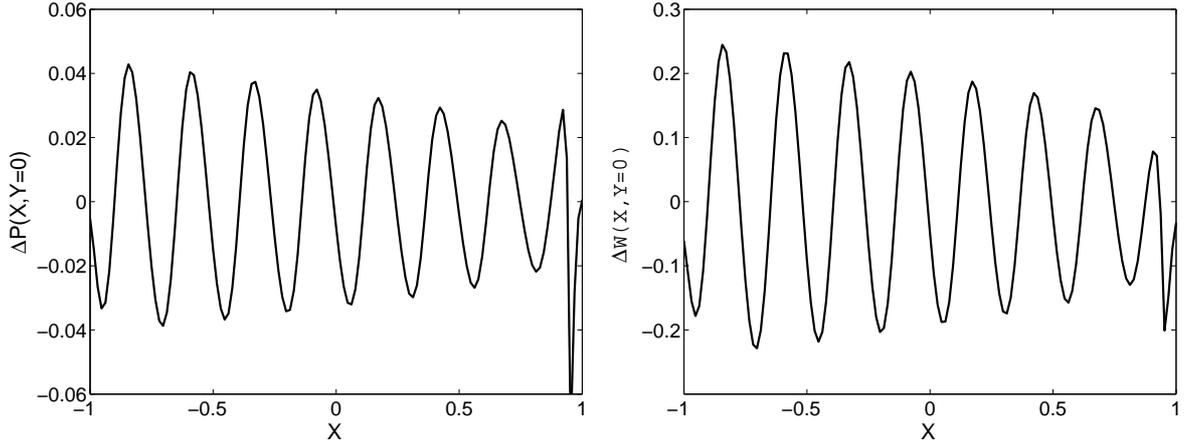


FIG. 5.2 – Exemple de profil des surpressions (à gauche) et des déformations élastiques (à droite) induites par les rugosités.  $M = 500$ ,  $L = 10$ ,  $S = 0.05$ ,  $\tau_0 = 1 \text{ MPa}$ ,  $A_i = 0.15H_c$ ,  $\lambda_x/b = 0.25$

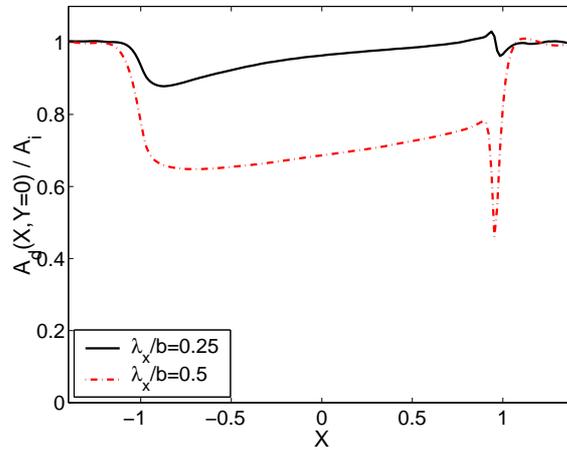


FIG. 5.3 – Exemple de profils d'amplitudes déformées obtenus à l'aide de l'Equation 5.3 pour deux longueurs d'onde différentes.  $M = 500$ ,  $L = 10$ ,  $S = 0.05$ ,  $\tau_0 = 1 \text{ MPa}$ ,  $A_i = 0.15H_c$ ,  $\lambda_x/b = 0.25$ ,  $\lambda_x/b = 0.5$

inverse est imposé. Jacod et al. [84] propose une analyse de la déformation des rugosités harmoniques dans un contact linéique. Selon ses résultats, le fait que la surface rugueuse avance plus vite ou moins vite que la surface lisse n'a pas d'incidence significative sur la réduction d'amplitude. Jacod et al. [84] proposent d'étudier le phénomène en fonction de  $|S|$ . Pour cette raison, uniquement des valeurs positives de  $S$  (la surface rugueuse avance plus vite) sont utilisées.

Une étude analytique du contact linéique est proposée par Hooke [78]. Il analyse l'influence du modèle rhéologique sur la déformation des rugosités dans le contact. Dans les conditions de roulement pur, Hooke [78] suggère la similitude des résultats obtenus pour les deux modèles rhéologiques. Dans les conditions de roulement/glisement et pour un fluide newtonien, le profil des rugosités dans le contact est remplacé par le profil de l'onde complémentaire résultant de la perturbation qui a lieu à l'entrée du contact. Dans le cas du comportement non newtonien, la présence des effets fluidifiants (*shear thinning*) a pour conséquence de rendre l'onde complémentaire très peu significative et donc d'atténuer les différences entre le roulement pur et le roulement/glisement. Ces observations justifient la comparaison directe entre les résultats obte-

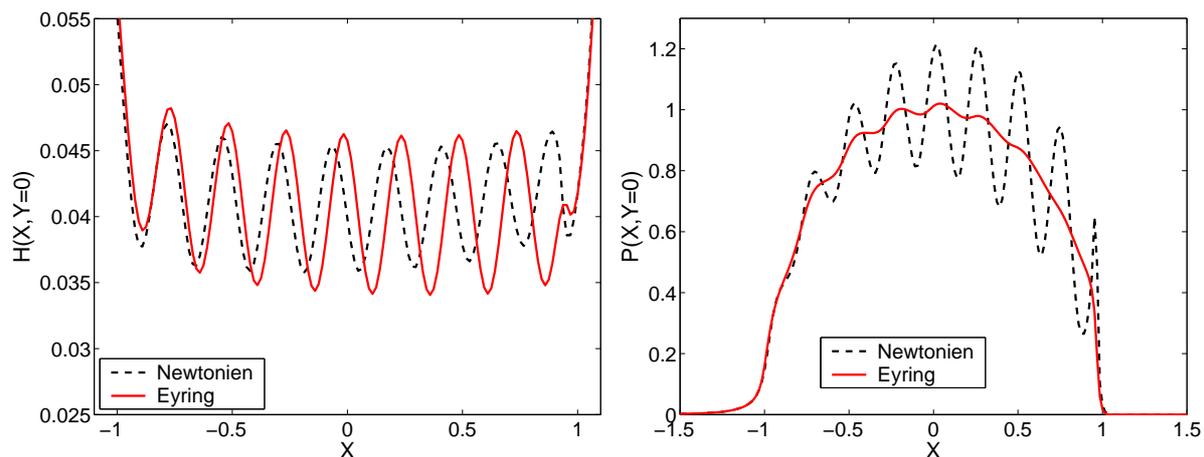


FIG. 5.4 – Exemple de déphasage entre les profils d'épaisseur de film (à gauche) et de pression (à droite) obtenus avec les deux modèles rhéologiques.  $M = 500$ ,  $L = 10$ ,  $S = 0.1$ ,  $\tau_0 = 1 \text{ MPa}$ ,  $A_i = 0.15H_c$ ,  $\lambda_x/b = 0.25$

nus en roulement pur avec un fluide newtonien et les résultats en roulement/glisement obtenus avec un fluide d'Eyring.

Un autre point important qui différencie le comportement non newtonien du comportement newtonien est le déphasage (à taux de roulement/glisement égal) entre les profils de la pression et de l'épaisseur de film. La Figure 5.4 montre un exemple de profils d'épaisseur de film et de pression suivant la ligne centrale, obtenus avec les deux modèles rhéologiques.

### 5.2.1 La réduction d'amplitude suivant la ligne centrale

#### Influence de la longueur d'onde de la rugosité - $\lambda_x$

La Figure 5.5 montre la réduction d'amplitude suivant la ligne centrale pour trois longueurs d'onde différentes. La variation du rapport  $A_d(X, Y = 0)/A_i$  dans la zone centrale dépend de la longueur d'onde. Lorsque  $\lambda_x$  diminue, les différences entre les deux modèles s'accroissent. Au contraire, pour les très grandes longueurs d'onde la réduction d'amplitude est quasi-constante dans la zone de haute pression.

#### Influence de la charge appliquée - $M$

L'influence de la charge sur les effets non newtoniens est étudiée à travers le paramètre  $M$ . La Figure 5.6 montre la réduction d'amplitude suivant la ligne centrale pour deux valeurs de  $M$ . D'abord, les deux modèles présentent la même tendance : la déformation est plus importante pour des valeurs de  $M$  élevées. Ensuite, l'écart entre les deux modèles rhéologiques diminue lorsque la charge augmente. Dans ce cas, le contact est très chargé, les effets de piézo-viscosité redeviennent importants, ce qui rend de terme de Poiseuille de nouveau négligeable par rapport au terme advectif. Le comportement non newtonien s'approche au comportement newtonien.

#### Influence du lubrifiant - $L$

L'influence du paramètre  $L$  peut être interprétée de deux manières différentes. La première considère la variation de  $L$  comme une variation du coefficient de piézo-viscosité  $\alpha$ . Dans ce cas, lorsque  $\alpha$  augmente, la viscosité de l'huile  $\bar{\mu}$  devient plus importante. Par conséquent, le terme

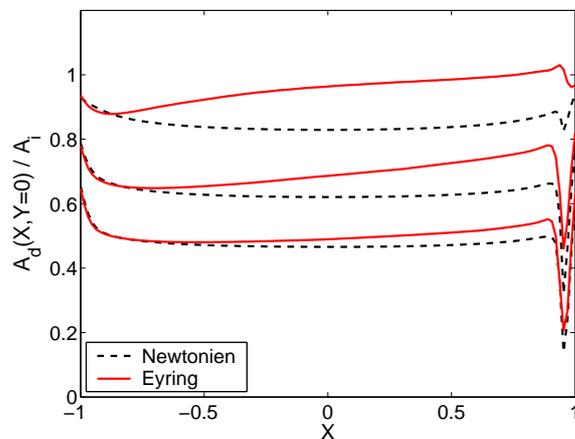


FIG. 5.5 – Exemple de courbes de réduction suivant la ligne centrale pour trois longueurs d’onde.  $M = 500$ ,  $L = 10$ ,  $S = 0.05$ ,  $\tau_0 = 1 \text{ MPa}$ ,  $A_i = 0.15H_c$ ,  $\lambda_x/b = 0.25$  (en haut),  $\lambda_x/b = 0.5$  (au milieu),  $\lambda_x/b = 0.75$  (en bas)

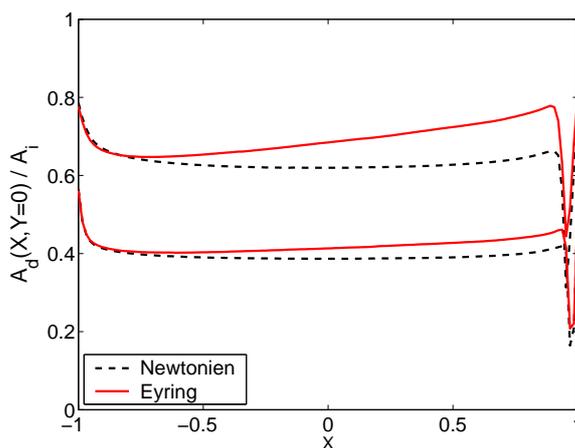


FIG. 5.6 – Exemple de courbes de réduction suivant la ligne centrale pour deux charges.  $M = 500$  (en haut),  $M = 2000$  (en bas).  $L = 10$ ,  $S = 0.05$ ,  $\tau_0 = 1 \text{ MPa}$ ,  $A_i = 0.15H_c$ ,  $\lambda_x/b = 0.5$

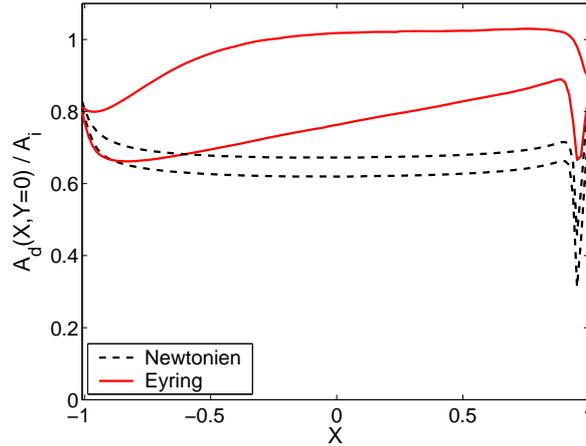


FIG. 5.7 – Exemple de courbes de réduction suivant la ligne centrale pour deux valeurs de  $L$ .  $M = 500$ ,  $L = 10$  (en bas),  $L = 20$  (en haut),  $S = 0.05$ ,  $\tau_0 = 0.5 \text{ MPa}$ ,  $A_i = 0.15H_c$ ,  $\lambda_x/b = 0.5$

de Poiseuille devient très faible par rapport au terme advectif. Le comportement de l'équation de Reynolds approche le comportement asymptotique présenté dans le chapitre précédent.

La deuxième interprétation s'avère assez délicate. Lorsqu'on fait varier uniquement la valeur de ce paramètre, par exemple : si on multiplie par deux  $L$ , la valeur de la vitesse moyenne  $\bar{u}$  est multipliée par 16. Une valeur constante de  $M$  impose  $w/\bar{u}^{3/4}$  constant et que la valeur de la charge  $w$  soit multipliée par 8. Il est difficile de dégager une tendance claire dans ce cas.

La Figure 5.7 montre un exemple de courbes de réduction obtenues avec deux valeurs de  $L$  différentes. Les résultats suggèrent une augmentation de l'écart entre les courbes lorsque la valeur de  $L$  augmente.

### Influence de la contrainte limite de cisaillement - $\tau_0$

La réduction d'amplitude dépend de la contrainte limite de cisaillement du fluide. Lorsque  $\tau_0 \rightarrow \infty$ , la fonction rhéologique  $f(\tau/\tau_0)$  devient égale à l'unité - Tableau 2.1, la relation entre  $\dot{\gamma}$  et  $\tau$  est linéaire et le comportement newtonien. La Figure 5.8 présente une comparaison de courbes de réduction obtenues avec les deux modèles rhéologiques.

### Influence du taux de glissement - $S$

Lorsque le taux de roulement/glisement -  $S$ , augmente l'amplitude de l'onde complémentaire qui en résulte augmente aussi. Dans ces conditions, le phénomène ne peut plus être négligé comme le suggère Hooke [78]. Pour cette raison, uniquement l'influence de faibles valeurs de  $S$  est étudiée. Lorsque  $S$  augmente, les effets fluidifiants deviennent plus importants et donc l'amplitude déformée augmente. La Figure 5.9 montre une comparaison entre la courbe de réduction newtonienne et les courbes de réduction non newtoniennes obtenues pour trois valeurs de  $S$ .

### Approche analytique de la réduction d'amplitude

Greenwood [59] propose une analyse du comportement de l'équation de Reynolds pour un fluide non newtonien. Selon Greenwood [59] : *la magnitude et la direction du flux de pression  $\Phi$  dépendent de la direction des gradients de pression  $h/\tau_0 \times [\partial p/\partial x, \partial p/\partial y]$  et des vitesses de glissement  $\mu/(h\tau_0) \times (u_1 - u_2, v_1 - v_2)$* . Dans le cadre de ce travail, le glissement est uniquement

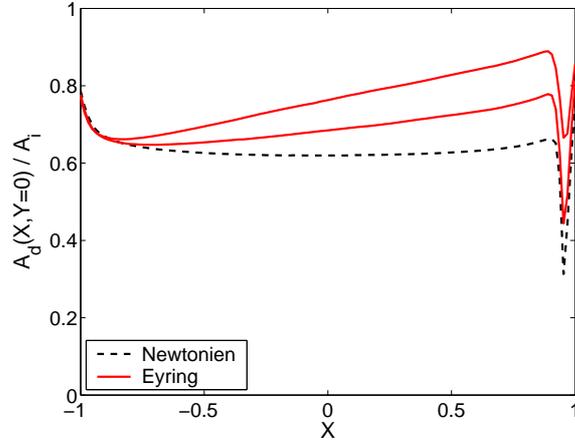


FIG. 5.8 – Exemple de courbes de réduction suivant la ligne centrale pour deux valeurs de  $\tau_0$ .  $M = 500$ ,  $L = 10$ ,  $S = 0.05$ ,  $\tau_0 = 0.5 \text{ MPa}$  (en haut),  $\tau_0 = 1 \text{ MPa}$  (en bas),  $A_i = 0.15H_c$ ,  $\lambda_x/b = 0.5$

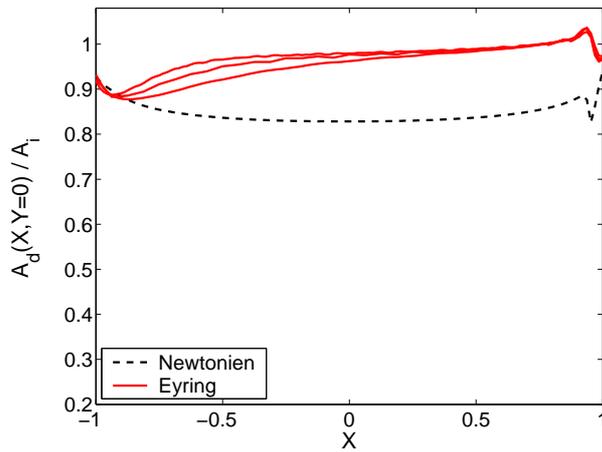


FIG. 5.9 – Exemple de courbes de réduction suivant la ligne centrale pour trois valeurs de  $S$ .  $M = 500$ ,  $L = 10$ ,  $S = 0.05$  (en bas),  $S = 0.1$  (au milieu),  $S = 0.2$  (en haut),  $\tau_0 = 1 \text{ MPa}$ ,  $A_i = 0.15H_c$ ,  $\lambda_x/b = 0.25$

selon le sens de roulement -  $x$  et les gradients de pression ne sont pas importants. Dans ces conditions, le flux de pression  $\Phi$  dépend uniquement du terme  $\mu/(h\tau_0) \times (u_1 - u_2)$ . L'utilisation de paramètres adimensionnés conduit à l'expression suivante :

$$\Phi = \mathcal{F} \left( \frac{NS\bar{\mu}}{H} \right) \quad (5.5)$$

Cette expression est en effet, la partie non newtonienne des viscosités - Chapitre 2, Equation 2.37. Le terme 5.5 est à l'origine de la différence de comportement entre les deux modèles rhéologiques. Dans le cas d'un comportement newtonien, la contrainte limite de cisaillement  $\tau_0$  tend vers l'infini et le terme 5.5 approche zéro. Dans le cas d'un fluide d'Eyring, ce terme 5.5 est plus important, ce qui engendre un flux complémentaire dans le contact.

Deux hypothèses de travail sont utilisées lors de l'analyse du flux complémentaire. Tout d'abord, les variations de l'épaisseur de film induites par le passage des rugosités sont négligées. La valeur de référence de l'épaisseur de film est la valeur centrale calculée entre deux surfaces lisses -  $h_c$ . La deuxième, considère les effets de compressibilité du fluide de second ordre : le fluide est incompressible :  $\rho = \rho_0 \Leftrightarrow \bar{\rho} = 1$ . La Figure 5.10 présente un schéma 1D avec le principe de l'approche. La courbe en vert désigne le flux complémentaire  $\Phi$  induit par la différence de surpressions (la courbe en rouge) entre les domaines  $A$  et  $B$ . Pour les besoins de l'analyse, les notations suivantes sont utilisées :

- L'amplitude initiale de la rugosité -  $a_i$ .
- Sous l'effet de la pression dans le contact, l'amplitude se déforme élastiquement -  $a_d$ .
- Lorsque le fluide est newtonien - Chapitre 4 - l'amplitude de la rugosité déformée ne varie pas d'une manière significative dans la zone de haute pression -  $a_d|_{nwt}$ .
- L'amplitude déformée varie dans la zone de haute pression si le comportement du fluide est décrit par le modèle d'Eyring. Elle peut être considérée comme une superposition entre l'amplitude déformée obtenue avec un modèle newtonien  $a_d|_{nwt}$  et le changement induit par le flux supplémentaire  $da_d|_{eyr}$ .

Ces considérations permettent de relier directement le flux complémentaire  $\Phi$  et le changement dans l'amplitude déformée  $da_d|_{eyr}$  suivant la ligne centrale du contact qui en résulte. La loi de conservation volumique s'écrit sous la forme :

$$dt \Phi = \int_0^{\lambda_x/2} da_d|_{eyr} \sin \left( \frac{2\pi x}{\lambda_x} \right) dx \quad (5.6)$$

La variation de l'amplitude déformée  $da_d|_{eyr}$  est négligée dans le domaine d'intégration de longueur  $\lambda_x/2$ . Par ailleurs, la variation du flux  $\Phi$  avec  $da_d|_{eyr}$  est considérée de second ordre. Dans ce cas, l'Equation 5.6 devient :

$$dt \frac{h_c^3}{12\mu} \phi_X \frac{\partial p}{\partial x} = \int_0^{\lambda_x/2} da_d|_{eyr} \sin \left( \frac{2\pi x}{\lambda_x} \right) dx \quad (5.7)$$

Le gradient de pression peut être approximé par :

$$\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{\Delta p}{\lambda_x/2} \quad (5.8)$$

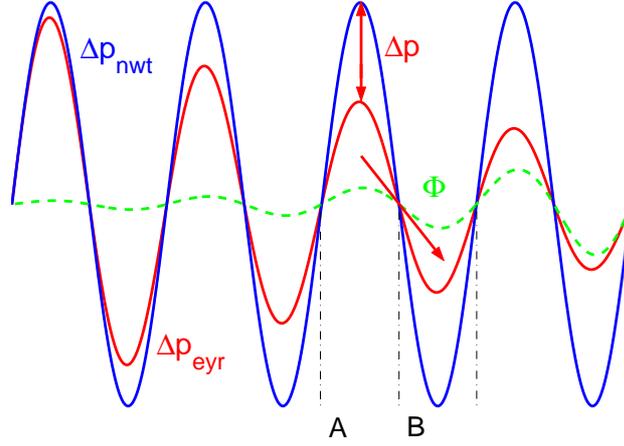


FIG. 5.10 – Schéma 1D représentant le principe de l'analyse de flux complémentaire induit par les effets non newtoniens. Les symboles  $\Delta p_{nwt}$  et  $\Delta p_{eyr}$  désignent les suppressions induites par les rugosités - Equation 5.4, pour le modèle newtonien et pour le modèle d'Eyring. La courbe en pointillé représente l'intégrale du flux suivant la ligne centrale

avec  $\Delta p$  la surpression donnée par l'analyse modifiée de Johnson - Section 4.2.2, exprimée avec des dimensions. Le gradient de pression devient :

$$\frac{\partial p}{\partial x} \approx \pi E' \frac{a_i - a_d|_{eyr}}{\lambda_x^2} \quad (5.9)$$

avec  $a_i - a_d|_{eyr}$  la déformation partielle des rugosités dans le contact. En écrivant que  $x = \bar{u}t$ , l'Equation 5.7 devient :

$$\frac{da_d|_{eyr}}{dx} + \frac{h_c^3}{\lambda_x^3} \phi_X \frac{E' \pi^2}{\mu \bar{u}} a_d|_{eyr} = \frac{h_c^3}{\lambda_x^3} \phi_X \frac{E' \pi^2}{\mu \bar{u}} a_i \quad (5.10)$$

L'équation 5.10 est une équation différentielle de premier ordre, dont les solutions sont de la forme :

$$a_d|_{eyr} = a_i + B_1 \exp\left(-\kappa \frac{x}{b}\right) \quad (5.11)$$

avec :

$$\kappa = b \frac{h_c^3}{\lambda_x^3} \phi_X \frac{E' \pi^2}{\mu \bar{u}} \quad (5.12)$$

A l'entrée du contact  $X(= x/b) = -1$ , les courbes de réduction d'amplitude sont identiques pour les deux modèles rhéologiques. Cette condition permet d'identifier la constante  $B_1$ . L'Equation 5.11 devient :

$$1 - \frac{a_d|_{eyr}}{a_i} = \left(1 - \frac{a_d|_{nwt}}{a_i}\right) \exp(-\kappa(X + 1)) \quad (5.13)$$

### Paramètres adimensionnés

Pour exprimer le terme  $\phi_X$  dans l'Equation 5.12, l'hypothèse de faibles variations de  $H$  dans la zone centrale est de nouveau utilisée. Dans ces conditions,  $\phi_X$  devient :

$$\phi_X = \cosh \left( \operatorname{asinh} \left( \frac{NS\bar{\mu}}{H_c} \right) \right) \quad (5.14)$$

L'Equation 5.14 peut être réécrite comme :

$$\phi_X = \sqrt{1 + \left( \frac{NS\bar{\mu}}{H_c} \right)^2} \quad (5.15)$$

L'expression de  $N$  en fonction de  $M, L, E', \tau_0$  et  $\alpha$  est la suivante :

$$N = \frac{1}{18^{1/3}} \frac{1}{E'\tau_0\alpha^2} \frac{L^2}{M^{2/3}} \quad (5.16)$$

Pour les conditions typiques de fonctionnement, les variations des paramètres adimensionnés sont données dans le Tableau 5.1.

Paramètres	Min	Max
$N$	$10^{-4}$	$10^{-1}$
$S$	$2 \times 10^{-1}$	$0.5 \times 10^{-1}$
$\bar{\mu}$	$10^6$	$10^{10}$
$H_c$	$10^{-3}$	$10^{-1}$
$NS\bar{\mu}/H_c$	$10^2$	$10^{11}$

TAB. 5.1 – Plage de variation des paramètres de contact

Dans ces conditions, l'Equation 5.15 peut être linéarisée par l'expression suivante :

$$\phi_X = \frac{NS\bar{\mu}}{H_c} \quad (5.17)$$

En utilisant les équations 5.12 et 5.17, l'approximation de  $\phi_X$  permet d'obtenir l'expression de  $\kappa$  en fonction des paramètres adimensionnés, les propriétés du lubrifiant et du matériau :

$$\kappa = \frac{\pi^2}{768^{1/3}} \frac{H_c^2}{(\lambda_x/b)^3} \frac{1}{\alpha^2\tau_0E'} SL^2M^{2/3} \quad (5.18)$$

Hooke [79] propose une analyse du problème basée sur les petites perturbations de la pression et de l'épaisseur de film. Hooke [79] obtient un paramètre adimensionné gouvernant le phénomène de réduction d'amplitude avec le modèle d'Eyring. L'expression du paramètre est la suivante :

$$Q = \frac{768^{1/3}}{\pi^2} \frac{(\lambda_x/b)^2}{H_c^2} \frac{\alpha^2\tau_0E'}{M^{2/3}L^2} \quad (5.19)$$

L'injection de l'Equation 5.19 dans l'Equation 5.18 conduit à l'expression suivante :

$$\kappa = \frac{S}{(\lambda_x/b)} \frac{1}{Q} \quad (5.20)$$

Finalement, l'Equation 5.13 devient :

$$1 - \frac{A_d}{A_i}|_{eyr} = \left( 1 - \frac{A_d}{A_i}|_{nwt} \right) \exp(-\kappa(X+1)) \quad (5.21)$$

Pour de très faibles valeurs de  $\kappa$  :  $\kappa \rightarrow 0$ , le membre de droite de l'expression 5.21 peut être linéarisé. Ainsi, en première approximation, les deux côtés de l'expression deviennent égaux. Physiquement, cela signifie que les effets non newtoniens ne sont pas importants et que les réductions

d'amplitude obtenues avec les deux modèles rhéologiques sont assez proches.

L'analyse présentée est basée sur une modélisation  $1D$ . Les résultats issus des simulations numériques sont pour un modèle  $2D$  - contact ponctuel avec des rugosités isotropes. Dans ces conditions, l'expression du gradient de pression approximée par l'analyse de Johnson modifiée - Section 4.2.2, est légèrement différente (multipliée par  $\sqrt{2}$ ). Ensuite, le flux supplémentaire suivant la direction de roulement  $X$  est le résultat de l'interaction entre les flux dans les deux directions du contact  $X$  et  $Y$ . Pour ces raisons, un paramètre supplémentaire  $\psi$  est ajouté à l'expression de  $\kappa$  :

$$\kappa = \frac{S}{(\lambda_x/b)} \frac{1}{Q} \psi \quad (5.22)$$

La Figure 5.11 montre des comparaisons de courbes de réduction obtenues numériquement et analytiquement avec les expressions 5.21 et 5.22. Les résultats montrent une bonne corrélation entre les deux solutions.

### 5.2.2 La réduction d'amplitude à $X = 0.6, Y = 0$

#### Théorie newtonienne

Les paramètres qui gouvernent la réduction d'amplitude dans un contact rugueux lubrifié avec un fluide newtonien sont présentés au Chapitre 4 - Equation 4.5 et Equation 4.14. Le paramètre  $\nabla$  est basé sur une description de l'influence de l'entrée du contact sur la déformation élastique des rugosités. Le deuxième paramètre  $\Lambda_{eq}$  s'appuie sur la capacité du film d'absorber la rugosité. L'amplitude de la rugosité déformée est mesurée à l'endroit  $X = 0.6$  suivant la ligne centrale. Cette position est choisie pour éviter l'influence de la sortie du contact (le phénomène de restriction et le pic de pression) sur le rapport  $A_d/A_i$ . Le Tableau 5.2 donne la plage de variation des paramètres utilisés pour les simulations numériques.

Paramètres	Min	Max
$M$	100	3200
$L$	5	20
$S$	0.05	0.2
$\tau_0$	$0.5e6$	$1.0e7$
$\lambda_x$	0.25	4

TAB. 5.2 – *Plage de variation des paramètres de contact utilisés pour les simulations numériques*

La Figure 5.12 montre la réduction d'amplitude en fonction des paramètres adimensionnés  $\nabla$  et  $\Lambda_{eq}$ . Le rapport  $A_d/A_i$  présente une tendance unique pour des valeurs de  $\nabla$  ou  $\Lambda_{eq}$  supérieures à 5. Pour de faibles valeurs une dispersion du rapport  $A_d(X = 0.6, Y)/A_i$  est observée. Le phénomène est causé par les effets non newtoniens. Par exemple pour deux valeurs distinctes de la contrainte limite de cisaillement  $\tau_0$ , les paramètres  $\nabla$  et  $\Lambda_{eq}$  prédisent la même valeur de réduction d'amplitude. La section précédente montre clairement qu'il y a une différence en termes de déformations élastiques. Il est donc nécessaire de réactualiser les définitions des paramètres pour tenir compte de la rhéologie non newtonienne du fluide.

#### Paramètres modifiés

L'analyse présentée dans la section précédente permet de prendre en compte les effets non newtoniens lors de la déformation des rugosités. Une extension des paramètres newtoniens est proposée

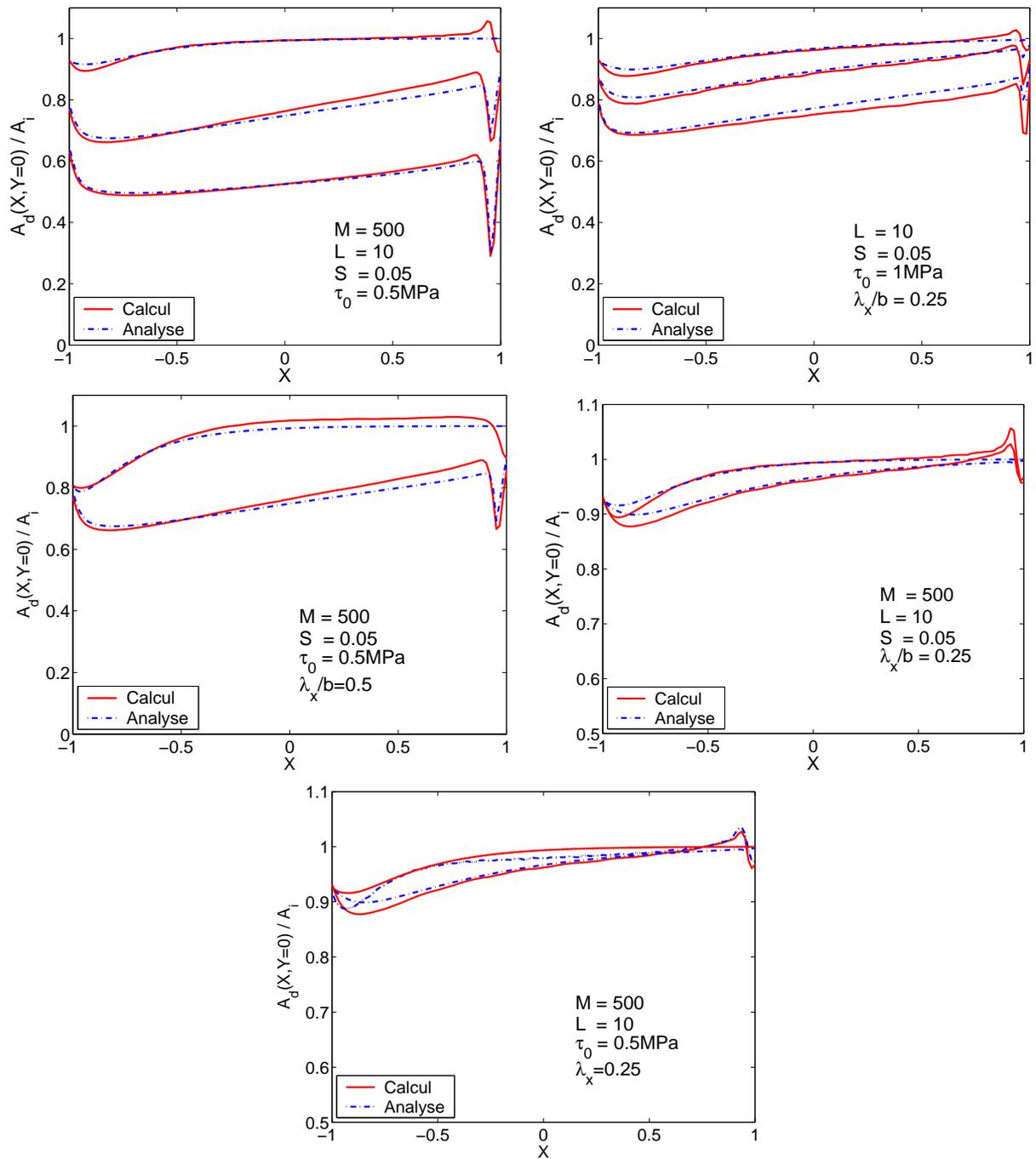


FIG. 5.11 – Comparaisons entre les résultats numériques et les prédictions analytiques : (en haut à gauche) - variation de  $\lambda_x/b = 0.25, 0.5, 0.75$ ; (en haut à droite) - variation de  $M = 500, 1000, 2000$ ; (au milieu à gauche) - variation de  $L = 10, 20$ ; (au milieu à droite) - variation de  $\tau_0 = 0.5 \text{ MPa}, 1 \text{ MPa}$ ; (en bas) - variation de  $S = 0.05, 0.2$

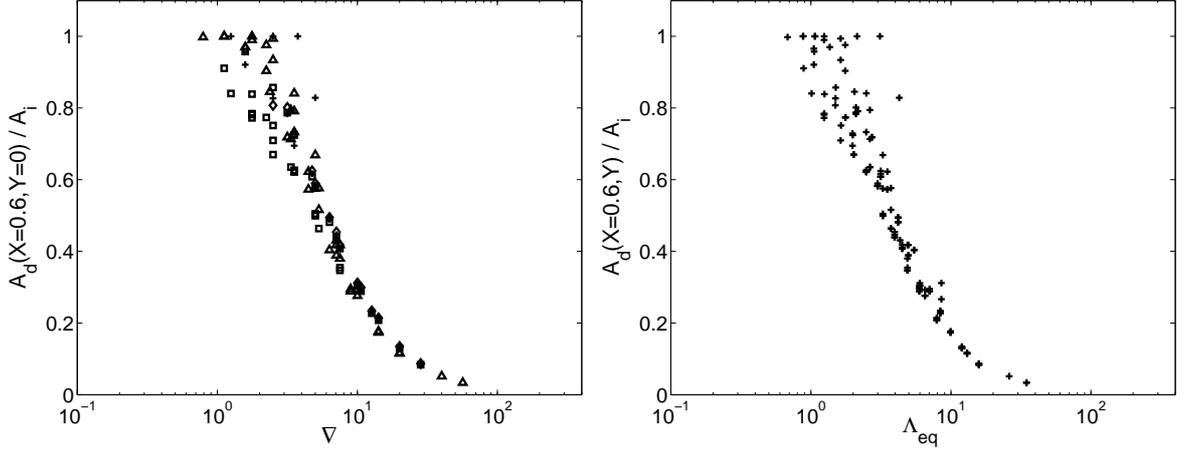


FIG. 5.12 – La réduction d’amplitude mesurée à  $X = 0.6$  et  $Y = 0$  en fonction de :  $\nabla$  - Equation 4.5 (à gauche) et  $\Lambda_{eq}$  - Equation 4.14 (à droite). Les plages de variations des paramètres de contact sont données dans le Tableau 5.2

en s’appuyant sur des résultats obtenus avec l’approche analytique. Les expressions modifiées pour les paramètres sont :

$$\bar{\nabla} = \nabla \left[ 1 - \exp \left( -\frac{1}{\nabla \times \kappa} \right) \right] \quad (5.23)$$

$$\bar{\Lambda}_{eq} = \Lambda_{eq} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{1}{\Lambda_{eq} \times \kappa} \right) \right] \quad (5.24)$$

La Figure 5.13 montre le rapport  $A_d(X = 0.6, Y = 0)/A_i$  en fonction des paramètres modifiés :  $\bar{\nabla}$  et  $\bar{\Lambda}_{eq}$ . La dispersion observable auparavant pour de faibles valeurs des paramètres est réduite.

L’expression modifiée du paramètre  $\bar{\nabla}$  permet de généraliser les effets des deux types de comportements rhéologiques ainsi que les différents degrés d’approximation. L’ordre 0 ( $O(0)$ ) considère les différences en terme de déformations élastiques négligeables et  $\bar{\nabla} \equiv \nabla$ . Lorsque les différences entre les modèles sont approximées par une relation linéaire (approximation  $O(1)$ ) :

$$\bar{\nabla} = \nabla \left[ 1 - \exp \left( -\frac{1}{\nabla \times \kappa} \right) \right] \approx \frac{1}{\kappa} = \frac{(\lambda_x/b)}{S} Q \frac{1}{\psi} \quad (5.25)$$

La linéarisation de l’Equation 5.23 permet d’obtenir un paramètre dont l’expression est similaire au paramètre proposé par Hooke - Equation 5.19.

### Cas limites

L’extension des paramètres permet de généraliser la courbe de réduction des rugosités harmoniques. Les résultats obtenus montrent aussi que le modèle newtonien est un cas particulier du modèle non newtonien. Par exemple, pour des valeurs de  $\tau_0$  très élevées, la fonction rhéologique  $f(\tau/\tau_0)$  - Tableau 2.1, devient égale à l’unité et le comportement est newtonien. Ensuite, pour des grandes longueurs d’onde, la différence en terme de déformation élastique entre les deux modèles diminue. Ces tendances peuvent être résumées de la manière suivante :

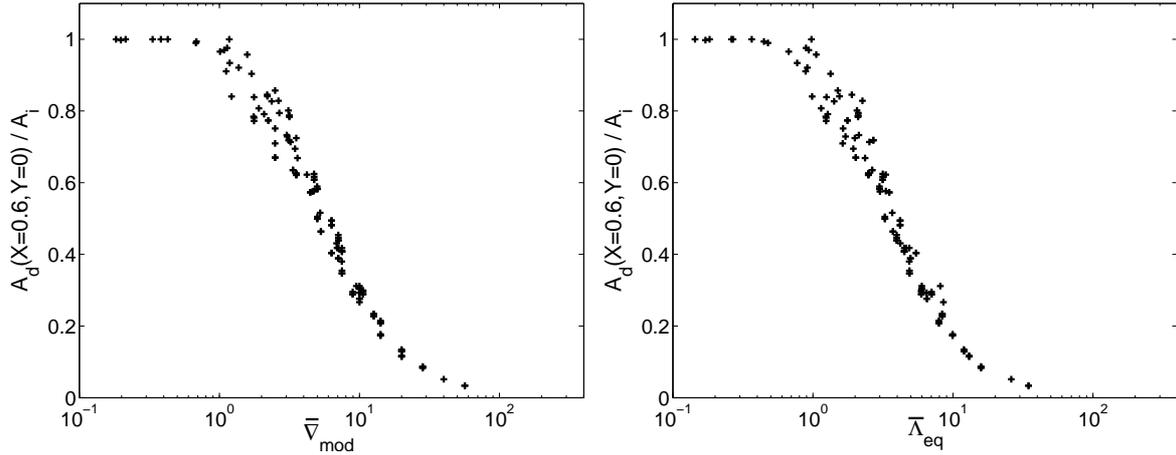


FIG. 5.13 – La réduction d’amplitude mesurée à  $X = 0.6$  et  $Y = 0$  en fonction des paramètres adimensionnés réactualisés :  $\bar{\nabla}$  - Equation 5.23 (à gauche) et  $\bar{\Lambda}_{eq}$  - Equation 5.24 (à droite). Les plages de variations des paramètres de contact sont données dans le Tableau 5.2

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_0 \rightarrow \infty \\ \lambda_x/b \rightarrow \infty \end{array} \right. \implies \bar{\nabla} \rightarrow \nabla ; \bar{\Lambda}_{eq} \rightarrow \Lambda_{eq} \quad (5.26)$$

### 5.3 Conclusion

Le chapitre présente une étude des effets non newtoniens sur les champs de pression, d’épaisseur de film et sur la courbe de réduction des rugosités de faible amplitude. Le comportement non newtonien du fluide est à l’origine des effets de piézo-viscosité beaucoup moins importants surtout dans la zone de haute pression. De ce fait, le terme de Poiseuille n’est plus négligeable comparé au terme advectif de l’équation de Reynolds. Cette caractéristique a une influence directe sur la distribution de l’épaisseur de film et sur le champ de pression. Lorsque les surfaces sont lisses, les champs de pression obtenus avec les deux modèles sont assez proches. Seul, le pic de pression situé à la sortie du contact est moins prononcé pour le cas de fluide d’Eyring. Les distributions d’épaisseurs de film deviennent proches pour des valeurs élevées de  $\tau_0$ . Dans le cas contraire, l’épaisseur de film est plus faible et elle diminue dans le sens de roulement.

Les différences sont encore plus significatives lorsque la rugosité des surfaces est prise en compte. L’amplitude de la rugosité déformée varie dans la zone centrale du contact (augmente suivant la ligne centrale) pour les mêmes raisons citées ci-dessus. Par conséquent, l’approche présentée dans le chapitre précédent, ne peut pas être directement appliquée. Le chapitre propose une analyse du rapport  $A_d(X, Y = 0)/A_i$  suivant la ligne centrale du contact. La courbe de réduction d’amplitude est étudiée d’un point de vue qualitatif, puis quantitatif. L’analyse du flux induit par les effets non newtoniens permet d’expliquer les observations issues des simulations numériques. Suite à cette étude, des expressions généralisées des paramètres, gouvernant la réduction d’amplitude sont proposées.



## Chapitre 6

# Modèles Rhéologiques Avancés

Dans ce chapitre, le comportement du fluide est décrit par des modèles rhéologiques plus complexes que les relations utilisées dans le chapitre précédent 5. La modélisation du fluide à fort taux de cisaillement - Equation 2.1, est donnée par la relation de Rabinowitsch Tableau 2.1. La dépendance de la viscosité à faible taux de cisaillement est basée sur les équations de Tait 2.45 et de Doolittle 2.48.

Le comportement du contact est analysé à travers la distribution de l'épaisseur de film et le champ de pression. Une première partie est consacrée à l'étude paramétrique du contact. Elle met en évidence l'influence significative de la modélisation du fluide à fort taux de cisaillement sur la distribution de l'épaisseur de film et sur le pic de pression à la sortie du contact. Ensuite, l'analyse permet de démontrer l'influence significative du coefficient de roulement/glisement et de la contrainte limite sur l'épaisseur centrale et minimale du contact.

Finalement, des comparaisons entre les résultats numériques et les résultats expérimentaux de l'épaisseur de film sont présentées pour deux lubrifiants.

### 6.1 Equation de Reynolds modifiée et conséquences. Etude paramétrique

Les surfaces en contact sont considérées lisses. Dans ce cas, le terme transitoire de l'équation de Reynolds, présentée dans le Chapitre 5, Equation 5.1 devient nul. L'équation de Reynolds est dite *stationnaire* :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\bar{\rho} H^3}{\lambda \bar{\mu}} \phi_X \frac{\partial P}{\partial X} \right)}_{\text{terme de Poiseuille}} + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\bar{\rho} H^3}{\lambda \bar{\mu}} \phi_Y \frac{\partial P}{\partial Y} \right) - \underbrace{\left( \frac{\partial(\bar{\rho} H)}{\partial X} \right)}_{\text{terme de Couette}} = 0 \quad (6.1)$$

Les expressions des flux complémentaires  $\phi_X$  et  $\phi_Y$  pour le modèle de Rabinowitsch sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_X = 1 + 3\bar{\tau}_a^2 + \bar{\tau}_b^2 + 2\bar{\tau}_a \bar{\tau}_b \left( \frac{\partial P}{\partial Y} / \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{3}{20} \left( \frac{p_H^2 \pi H}{\tau_0 E'} \right)^2 \left( \left( \frac{\partial P}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial P}{\partial Y} \right)^2 \right) \\ \phi_Y = 1 + \bar{\tau}_a^2 + 3\bar{\tau}_b^2 + 2\bar{\tau}_a \bar{\tau}_b \left( \frac{\partial P}{\partial X} / \frac{\partial P}{\partial Y} \right) + \frac{3}{20} \left( \frac{p_H^2 \pi H}{\tau_0 E'} \right)^2 \left( \left( \frac{\partial P}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial P}{\partial Y} \right)^2 \right) \end{array} \right. \quad (6.2)$$

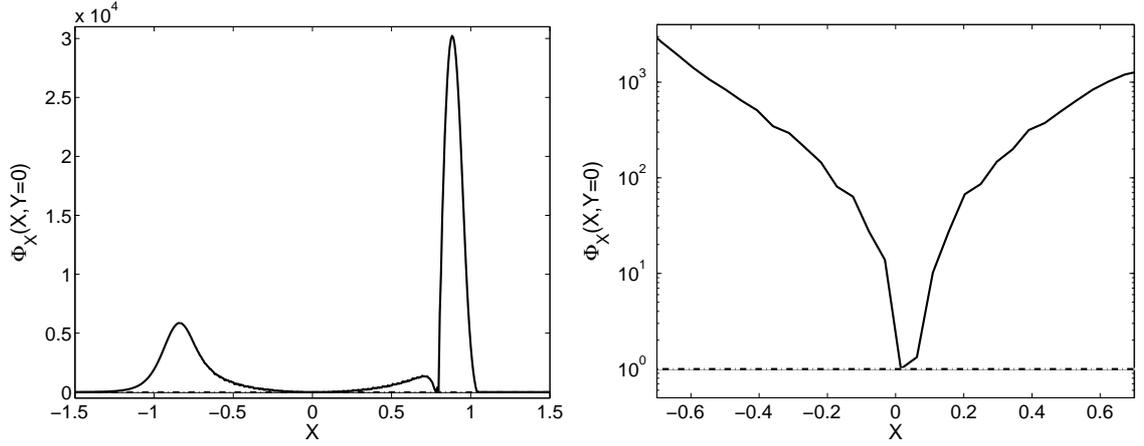


FIG. 6.1 – Evolution du flux supplémentaire  $\Phi_X$  suivant la ligne centrale  $Y = 0$  entre deux surfaces lisses - vue générale (à gauche) et zoom dans la zone centrale (à droite).  $M = 65.57$ ,  $L = 4.90$ ,  $S = 0.0$ ,  $\tau_0 = 0.926 \text{ MPa}$ . La ligne en pointillé présente la valeur de  $\Phi_X$  pour le cas newtonien :  $\Phi_X = 1$

avec  $\bar{\tau}_a$  et  $\bar{\tau}_b$  les contraintes moyennes adimensionnées de cisaillement suivant  $X$  et  $Y$ , solutions du système d'équations 2.39. La Figure 6.1 montre un exemple de variation de  $\Phi_X$  suivant la ligne centrale  $Y = 0$ . Le cas newtonien est représenté par la courbe en pointillé. Dans ce cas,  $\Phi_X$  est constant et égal à l'unité.

L'analyse des effets non newtoniens présentée dans le chapitre précédent 5 peut être également appliquée dans le cas du modèle de Rabinowitsch. Les effets de piézo-viscosité sont limités par la nature de la relation entre la contrainte de cisaillement  $\tau$  et le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ . Le terme de Poiseuille persiste dans la zone centrale du contact. Dans ces conditions, le flux du au terme de Poiseuille modifie la distribution de l'épaisseur de film.

### 6.1.1 Influence de la contrainte limite $\tau_0$

Lorsque la contrainte limite de cisaillement  $\tau_0$  augmente la plage de variation linéaire entre la contrainte de cisaillement et la viscosité du fluide augmente. La Figure 6.2 montre l'évolution de la viscosité  $\eta$  en fonction de la contrainte de cisaillement  $\tau$  pour trois valeurs de  $\tau_0$ . La Figure 6.2 montre que la longueur du plateau newtonien dépend de  $\tau_0$ . Pour de faibles valeurs de  $\tau_0$ , le plateau devient très court suivi d'une décroissance rapide de  $\eta$  avec  $\tau$ . La Figure 6.3 montre l'évolution de l'épaisseur de film et de la pression suivant la ligne centrale pour trois valeurs de la contrainte limite de cisaillement. La valeur très élevée de  $1e5\tau_0$  correspond au cas newtonien où  $\tau_0 \rightarrow \infty$ . Pour les valeurs extrêmes de  $\tau_0$ , la Figure 6.3 présente une baisse de l'épaisseur de film centrale de 20%. Par contre, le modèle rhéologique a très peu d'influence sur le champ de pression.

La Figure 6.4 illustre l'influence de la contrainte limite de cisaillement sur l'épaisseur de film centrale et minimale.

### 6.1.2 Influence du coefficient de roulement/glisement $S$

Le coefficient de roulement/glisement est le deuxième paramètre à prendre en compte lors de l'étude paramétrique. Le paramètre  $S$  intervient dans l'expression des flux supplémentaires  $\Phi_X$  et  $\Phi_Y$  via le calcul des contraintes moyennes de cisaillement  $\bar{\tau}_a$  et  $\bar{\tau}_b$  - Chapitre 2, système

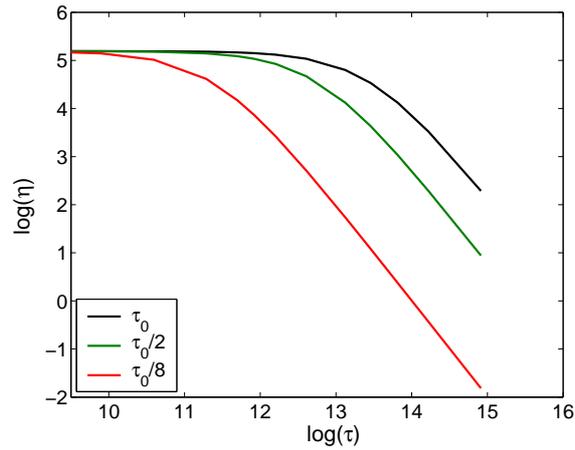


FIG. 6.2 – Evolution de la viscosité  $\eta$  en fonction de la contrainte de cisaillement  $\tau$  pour trois valeurs de la contrainte limite de cisaillement

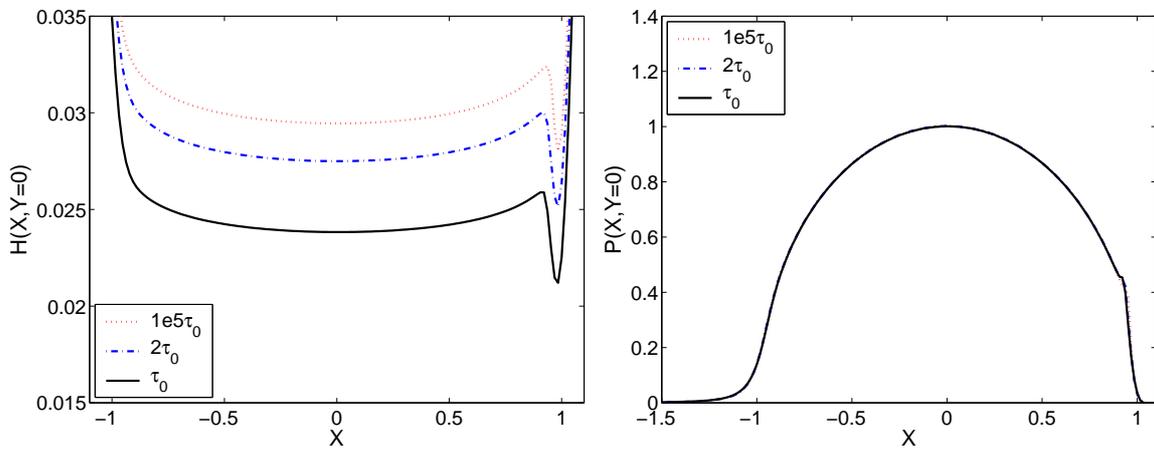


FIG. 6.3 – Evolution de l'épaisseur de film (à gauche) et de la pression (à droite) suivant la ligne centrale  $Y = 0$  entre deux surfaces lisses pour trois valeurs de la contrainte limite de cisaillement.  $M = 554.92$ ,  $L = 6.26$ ,  $S = 0.0$

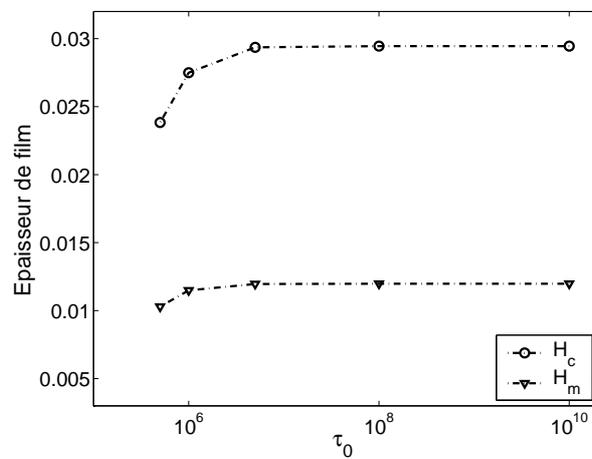


FIG. 6.4 – Evolution de l'épaisseur de film centrale et minimale en fonction de la contrainte limite de cisaillement.  $M = 554.92$ ,  $L = 6.26$ ,  $S = 0.0$

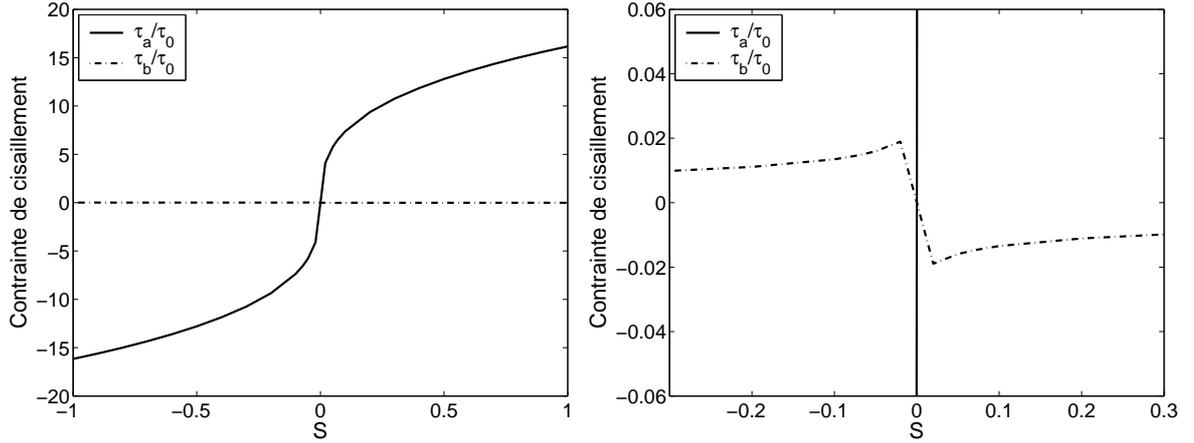


FIG. 6.5 – Evolution des contraintes moyennes de cisaillement en fonction du coefficient de roulement/glisserment  $S$

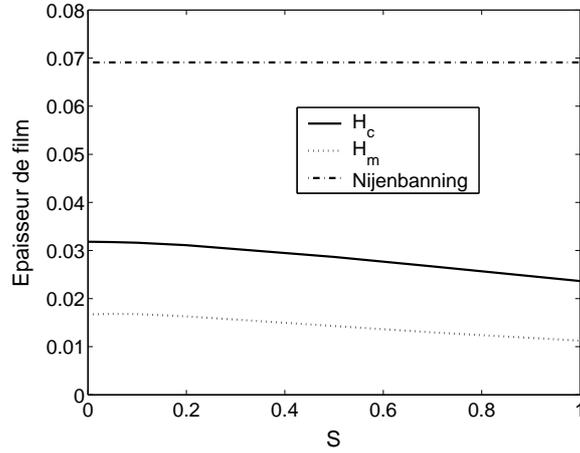


FIG. 6.6 – Evolution de l'épaisseur de film centrale  $H_c$  et minimale  $H_m$  en fonction du coefficient de roulement/glisserment  $S$ .  $M = 149.59$ ,  $L = 3.72$ ,  $\tau_0 = 0.926$  MPa. La ligne en pointillé désigne le résultat obtenu avec la formule analytique de Nijebanning et al. [108]

d'équations 2.39. Il désigne le roulement/glisserment uniquement suivant la direction du roulement  $X$ . En roulement pur, les contraintes  $\bar{\tau}_a$  et  $\bar{\tau}_b$  sont nulles. La Figure 6.5 montre un exemple de variation des contraintes moyennes de cisaillement suivant  $X$  et  $Y$  au centre du contact. Le coefficient de roulement/glisserment joue un rôle significatif dans la distribution des contraintes moyennes de cisaillement. Puisque le glissement est uniquement dans le sens de roulement, la contrainte suivant dans cette direction  $\bar{\tau}_a$  est nettement supérieure à la contrainte dans le sens perpendiculaire  $\bar{\tau}_b$ .

La contrainte dans le sens de roulement augmente avec le coefficient de roulement/glisserment. De ce fait, les flux suivant  $X$  et  $Y$  -  $\Phi_X$  et  $\Phi_Y$  augmentent aussi. Les effets fluidifiants deviennent plus importants pour des valeurs de  $S$  élevées. Il est donc logique d'observer une décroissance de l'épaisseur de film centrale - Figure 6.6.

## 6.2 Comparaison des résultats numériques et expérimentaux

Cette deuxième partie du chapitre propose une comparaison entre des résultats numériques et expérimentaux. Le travail expérimental est composé de deux parties. La première est consacrée aux mesures rhéologiques permettant de déduire les propriétés des fluides et les paramètres nécessaires pour décrire leurs comportements. Les paramètres ainsi obtenus sont utilisés dans les équations de Tait 2.45, de Doolittle 2.48 et de Rabinowitsch Tableau 2.1, lors des simulations numériques. Dans un deuxième temps, l'épaisseur de film dans un contact EHD entre une bille et un disque (contact circulaire bille/plan) est mesurée.

### 6.2.1 Mesures rhéologiques des fluides

Les lubrifiants testés sont des huiles silicones contenant du polydiméthylsiloxane (PDMS). Le comportement des ces huiles est caractérisé par une baisse de la viscosité  $\eta$  avec le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ . Les mesures effectuées peuvent être classées en deux groupes : mesures à faible taux de cisaillement et mesures à fort taux de cisaillement. Les premières permettent l'obtention des paramètres de Tait 2.45 et de Doolittle 2.48. Les deuxièmes sont utilisées pour la recherche de la valeur de la contrainte limite de cisaillement  $\tau_0$ .

Les mesures sont effectuées par Dr. S. Bair dans le centre de rhéologie à haute pression à l'école d'ingénieur en mécanique George W. Woodruff, Atlanta, Etats-Unis.

#### Viscosité à faible taux de cisaillement - $\mu$

Le rapport de Schultheisz et al. [117] fournit une description complète des propriétés rhéologiques des PDMS pour différentes températures. Les travaux de Sachdev et al. [116] et Fakhreddine et al. [49] proposent des mesures rhéologiques en fonction de la pression, du volume et de la température (PVT). Sachdev et al. [116] et Fakhreddine et al. [49] préconisent l'utilisation du modèle de Tait 2.45 comme équation PVT. Leurs résultats expérimentaux permettent d'obtenir les valeurs des paramètres nécessaires pour le modèle théorique. La valeur de la constante  $K'_0$  est donnée par l'expression suivante :

$$K'_0 = \frac{1 - C}{C} \quad (6.3)$$

ou  $C$  est une constante universelle pour les PDMS :  $C = 0.0894$ . L'identification des constantes  $\beta$  et  $K_{00}$  permet d'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{llll} \beta & = & B_1 & = & [6.69 - 6.9] \times 10^{-3} & \text{Sachdev et al. [116]} \\ \beta & = & B_2 & = & 6.59 \times 10^{-3} & \text{Fakhreddine et al. [49]} \\ K_{00} & = & B_0/C & = & [0.76 - 1.02] \times 10^9 & \text{Sachdev et al. [116]} \\ K_{00} & = & B_1/C & = & 1.13 \times 10^9 & \text{Fakhreddine et al. [49]} \end{array} \right. \quad (6.4)$$

Pour décrire l'influence de la température sur la compressibilité, Sachdev et al. [116] proposent une relation quadratique et Fakhreddine et al. [49] utilisent une relation cubique. Dans les deux cas, les valeurs des constantes devant les termes d'ordre élevé ( $O(2)$  ou  $O(3)$ ) sont négligeables devant les constantes des termes  $O(0)$  et  $O(1)$ . Dans ces conditions, l'utilisation d'une relation linéaire s'avère tout à fait justifié. Pour des températures inférieures à  $250^\circ C$ , cette relation donne des résultats avec une erreur relative de l'ordre de 5%. Le tableau 6.1 résume les valeurs

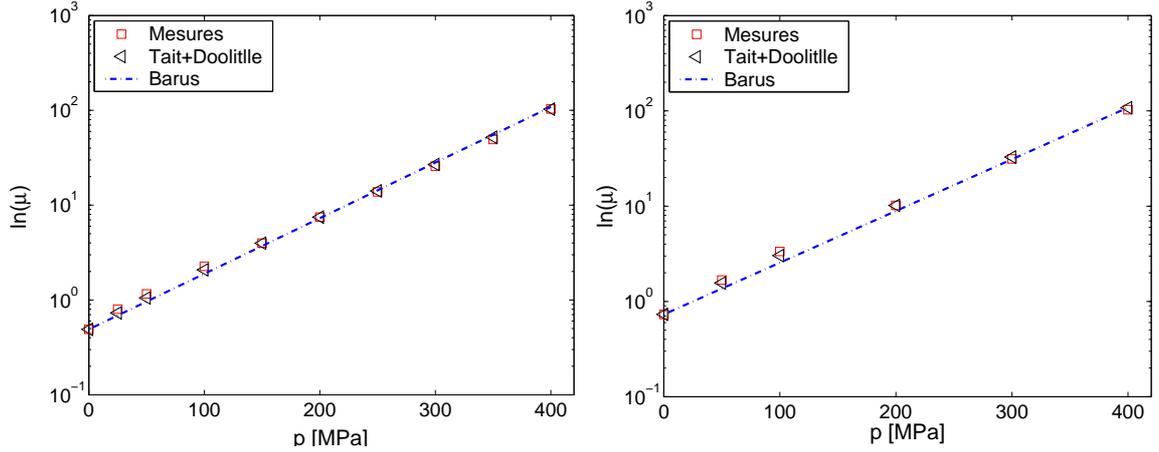


FIG. 6.7 – Evolution de la viscosité en fonction de la pression - comparaison entre les mesures expérimentales Bair [7] et prédictions théoriques - Doolittle 2.48 et Barus 2.28. A gauche PDMS500 et à droite PDMS1000

des différents paramètres utilisés dans cette étude. Les valeurs de Bair [7] sont utilisées lors des simulations numériques puisqu'elles permettent d'approximer au mieux les mesures expérimentales de Bair [7].

Paramètres	Sachdev et al. [116]	Fakhreddine et al. [49]	Bair [7]	Unités
$K'_0$	10.19	10.19	10.19	$[-]$
$\beta$	$[6.69 - 6.9] \times 10^{-3}$	$6.59 \times 10^{-3}$	$6.34 \times 10^{-3}$	$[^\circ C]$
$K_{00}$	$[0.76 - 1.02] \times 10^9$	$1.13 \times 10^9$	$[1.03 - 1.08] \times 10^9$	$[Pa]$

TAB. 6.1 – Paramètres rhéologiques des huiles PDMS - modélisation de la compressibilité

Les paramètres nécessaires -  $R$ ,  $B_0$ , pour l'équation de Doolittle 2.48 sont obtenus par une approximation des résultats expérimentaux. Le tableau 6.2 donne la valeurs des paramètres et des états de référence (indice  $R$ ) pour les deux huiles PDMS.

Paramètres	PDMS 500	PDMS 1000	Unités
$T_0$	26	40	$[^\circ C]$
$R_0$	0.7088	0.6893	$[-]$
$B$	1.755	1.985	$[-]$
$\mu_0$	0.490	0.731	$[Pa.s]$

TAB. 6.2 – Paramètres rhéologiques des huiles PDMS - équation de Doolittle 2.48

La Figure 6.7 montre les mesures expérimentales et les résultats théoriques pour les deux types de PDMS. Les résultats obtenus avec l'équation de Barus 2.28 sont également tracés. Les deux modèles théoriques montrent un bon accord avec les expériences. Cependant, les différences de comportement deviennent plus importantes à des pressions plus élevées  $O(1GPa)$  - Chapitre 2, Figure 2.7.

### Viscosité à fort taux de cisaillement - $\eta$

L'utilisation du modèle de Rabinowitsch Tableau 2.1 exige la connaissance d'un seul paramètre rhéologique - la contrainte de limite de cisaillement  $\tau_0$ . La valeur de ce paramètre peut être obtenu

expérimentalement - en approximant les mesures de  $\eta$  en fonction de  $\dot{\gamma}$ , ou avec des formules analytiques valables dans la littérature. Bair et Qurechi [11] définissent  $\tau_0$  comme :

$$\tau_0 = \frac{\rho RT}{M} \quad (6.5)$$

où  $R$  désigne la constante des gaz parfaits :  $R = 8.3145 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$  et  $M$  la masse moléculaire moyenne du fluide. Berry [15] propose une relation pour les methylsiloxanes entre la viscosité, la densité volumique et la masse moléculaire moyenne à  $T = 298.15 \text{ K}$  :

$$M = 6610 \left( \log \left( \frac{\mu}{\rho} \right) - 1 \right)^2 \quad (6.6)$$

avec  $\mu$  exprimé en  $\text{Pa.s}$  et  $\rho$  exprimé en  $\text{kg.m}^{-3}$ . Cette expression illustre clairement l'importance de la masse moléculaire sur l'épaisseur de film dans le contact. Lorsque la masse moléculaire augmente, l'Equation 6.6 montre que la contrainte limite de cisaillement diminue, ce qui cause une baisse de l'épaisseurs de film - Figure 6.6. Bair [5] utilise l'Equation 6.6 pour le calcul analytique de l'épaisseur de film corrigée pour tenir compte des effets non newtoniens.

Pour le lubrifiant PDMS500, la contrainte limite de cisaillement est calculée à l'aide des formules 6.5 et 6.6. Dans le cas de PDMS 1000, la valeur proposée par Bair [6] pour le calcul analytique de l'épaisseur de film par est utilisée. Le Tableau 6.3 montre les valeurs de  $\tau_0$  utilisées pour les simulations numériques.

Paramètres	PDMS 500	PDMS 1000	Unités
$\tau_0$	0.13	0.15	[MPa]

TAB. 6.3 – Paramètres rhéologiques des huiles PDMS - la relation de Rabinowitsch Tableau 2.1

### 6.2.2 Mesures de l'épaisseur de film centrale

Les mesures de l'épaisseur de film sont effectuées par Dr. P. Cann [25] à l'Impérial College à Londres, Grande Bretagne. Le dispositif expérimental est basé sur la technique interférométrique développée par Gohar et Cameron [57], [58]. Pour plus de détails sur le principe de fonctionnement de la machine et son utilisation Damien [35].

Le contact fonctionne dans les conditions de roulements pur  $S = 0$ . L'épaisseur de film est mesurée au centre d'un contact entre un disque en verre et une bille en métal (contact circulaire bille/plan) en fonction de la vitesse de roulement. Les autres paramètres de fonctionnement restent identiques (à part la température - Tableau 6.2 pour toutes les mesures. Le Tableau 6.4 résume les paramètres hertziens du problème :

La pression maximale de contact est limitée par le disque en verre beaucoup plus fragile que l'acier composant la bille. Pour cette raison, la pression maximale ne doit pas accéder  $0.6 \text{ GPa}$ .

### 6.2.3 Comparaisons des résultats

Les mesures expérimentales de l'épaisseur de film centrale sont comparées avec les résultats issus des simulations numériques. Les résolutions sont effectuées sur une grille de  $257 \times 257$  points sur un domaine carré  $X \in [-2.5 : 1.5]$  et  $Y \in [-2.0 : 2.0]$  avec un pas de discrétisation  $\Delta X = \Delta Y = 1.563 \times 10^{-2}$ . Pour des cas de faibles chargements ( $M < 100$  et  $L > 5$ ), la simulation numérique doit avoir un domaine d'entrée plus important pour éviter le phénomène de sous-alimentation numérique - la position de l'entrée du contact influence l'épaisseur de film. Dans

Paramètres		Unités
$E'_1$	210	[GPa]
$E'_2$	75	[GPa]
$\nu_1$	0.3	[-]
$\nu_2$	0.25	[-]
$E'$	118.81	[GPa]
$R_x$	$9.50 \times 10^3$	[m]
$f$	20	[f]
$b$	$1.34 \times 10^{-4}$	[m]
$p_H$	0.533	[GPa]

TAB. 6.4 – Paramètres de contact sec hertzien

ces cas, le domaine de calcul est doublé :  $513 \times 513$  points sur un domaine  $X \in [-6.5 : 1.5]$  et  $Y \in [-4.0 : 4.0]$ . Le Tableau 6.5 donne la plage de variation de différents paramètres adimensionnés lors des simulations numériques.

Paramètres	PDMS 500		PDMS 1000	
	Min	Max	Min	Max
M	19.61	620.17	8.64	273.18
L	2.32	7.32	2.82	8.91
$\bar{\alpha}$	7.19		6.66	

TAB. 6.5 – Paramètres adimensionnés utilisés pour les simulations numériques

Parallèlement, les résultats obtenus sont comparés avec les solutions analytiques issues des formules de Hamrock et Dowson [66] et Nijenbanning et al. [108]. Chevalier [29] propose un résumé complet de toutes les expressions analytiques valables dans la littérature pour tous les régimes de fonctionnement et tous les types de contact.

La Figure 6.8 montre une comparaison entre les mesures expérimentales de Cann [25], les résultats issus des simulations numériques et des expressions analytiques de Nijenbanning et al. [108] et de Hamrock et Dowson [66].

La Figure 6.8 illustre un bon accord entre les résultats expérimentaux et les résultats issus des simulations numériques pour les deux huiles PDMS. Pour le lubrifiant PDMS 500, les puissances des droites sont très proches : 0.493 - expérimentalement et 0.485 - numériquement. La différence est quasi identique  $O(20\%)$ . Pour le lubrifiant PDMS 1000, les puissances sont aussi assez proches : 0.416 - expérimentalement et 0.477 - numériquement. L'écart relatif pour des vitesses inférieures à  $0.4 \text{ m/s}$  est de l'ordre de 20% et augmente jusqu'à 30% pour les vitesses supérieures.

Dans les deux cas, les formules classiques surestiment largement les valeurs mesurées expérimentalement. Pour des vitesses élevées, les valeurs théoriques sont deux (PDMS 500) ou trois (PDMS 1000) fois supérieures à celles mesurées expérimentalement.

### 6.3 Conclusion

Ce chapitre présente une étude du contact circulaire lubrifié avec un fluide dont le comportement est modélisé par des équations rhéologiques plus complexes. Le travail dans ce chapitre comporte

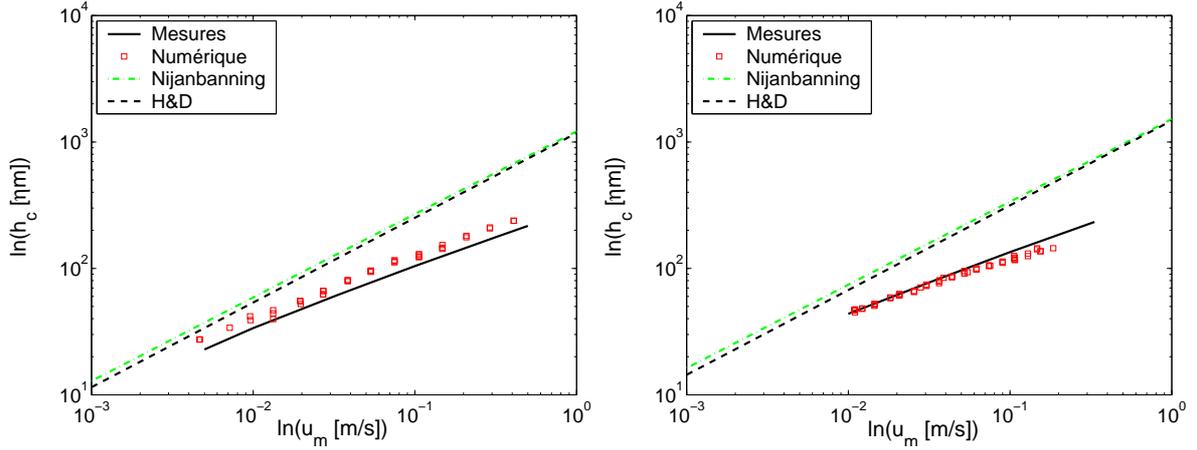


FIG. 6.8 – Comparaison entre les mesures expérimentales, les résultats numériques et les formules analytiques de Hamrock et Dowson [66] et Nijanbanning et al. [108]. A gauche PDMS500 et à droite PDMS 1000

deux parties. La première est consacrée à l'étude numérique des effets non newtoniens sur la distribution de la pression et de l'épaisseur de film dans le contact. Comme dans le chapitre précédent 5 où le modèle d'Eyring est utilisé, la relation contrainte de cisaillement - taux de cisaillement limitent les effets de piézo-viscosité. L'épaisseur de film est inférieure au cas newtonien. Les effets non newtoniens augmentent lorsque la contrainte limite de cisaillement diminue ou que le taux de roulement/glissement augmente. Dans les deux cas, l'écart entre les épaisseurs de film non newtoniennes ou newtoniennes s'accroît.

La deuxième partie de ce chapitre est consacrée à la comparaison des résultats issus des simulations numériques et des mesures expérimentales. Les paramètres nécessaires pour les simulations numériques sont issus des mesures rhéologiques des fluides. Dans le souci d'avoir des modèles décrivant au mieux le comportement du fluide, les mêmes échantillons qui ont servi pour caractériser les propriétés des lubrifiants, sont utilisés pour les mesures des épaisseurs de film. La comparaison des deux résultats illustre un bon accord entre l'approche théorique et les mesures expérimentales. Dans le premier cas - PDMS 500, l'écart est  $O(20\%)$ , pour le fluide PDMS 1000, l'écart relatif est supérieur  $O(30\%)$  pour les vitesses élevées. De plus, les prédictions issues des formules analytiques surestiment largement les résultats expérimentaux. Pour certaines conditions de fonctionnement, l'écart relatif peut atteindre 300%.



# Bilan et Perspectives

## Bilan

La lubrification EHD concerne tous les contacts lubrifiés pour lesquels la pression dans le film lubrifiant est suffisamment élevée pour déformer élastiquement les surfaces. Parallèlement à cela, le comportement du fluide est modifié par la pression et le taux de cisaillement dans le contact.

La compréhension du phénomène de lubrification EHD a un impact direct sur le fonctionnement des mécanismes. Une lubrification mal adaptée peut provoquer la dégradation anticipée des surfaces. Les conséquences se traduisent par une modification de la géométrie locale, de l'épaisseur de film et de la pression dans le contact. Dans ces conditions, l'état de contraintes élastiques dans le solide change ce qui peut favoriser la propagation des fissures, des apparitions d'écaillages et donc une diminution de la durée de vie du mécanisme.

De point de vue théorique, les équations qui modélisent la lubrification EHD sont : l'équation de Reynolds, l'équation de la déformation élastique des solides et les lois rhéologiques du fluide (viscosité, compressibilité). Selon la relation entre le taux de cisaillement et la contrainte de cisaillement, les fluides peuvent être classés dans deux catégories :

- fluides newtoniens - la relation entre le taux de cisaillement, la viscosité à faible taux de cisaillement et la contrainte de cisaillement est linéaire,
- fluides non newtoniens la relation entre le taux de cisaillement, la viscosité à faible taux de cisaillement et la contrainte de cisaillement est non linéaire.

Le travail s'est articulé autour de trois axes. Dans un premier temps, une étude sur la déformation élastique des rugosités isotropes et des surpressions associées dans un contact circulaire lubrifié avec un fluide newtonien est présentée. Dans un second temps, les conclusions de cette première partie sont utilisées pour l'analyse qualitative et quantitative des mêmes phénomènes physiques lorsque le comportement du fluide est considéré non newtonien. La dernière partie du travail est consacrée à l'étude du contact circulaire lisse lubrifié avec un fluide non newtonien modélisé par des relations rhéologiques plus complexes. Finalement, les comparaisons entre les résultats numériques et les mesures expérimentales montrent un bon accord.

Le Chapitre 2 résume les équations mises en jeux et résolues numériquement. La forte non linéarité de l'équation de Reynolds, associées au caractère intégral de l'équation des déformations élastiques, nécessite une discrétisation fine du domaine du calcul (grand nombre de points). Un code est développé pour un contact circulaire lisse (stationnaire) ou rugueux (transitoire) lubrifié avec un fluide dont le comportement est généralisé (newtonien/non newtonien). Pour accélérer la convergence du processus de résolution, les techniques des MultiGrilles et des MultiGrilles-MultiIntégration sont utilisées. Pour améliorer la stabilité du code, le paramètre de changement entre la relaxation de Gauss Seidel et Jacobi est modifié pour tenir compte des effets non new-

toniens.

Lorsque le comportement du fluide est considéré newtonien, les effets de piezo-viscosité deviennent significatifs lorsque la pression devient importante. Cela transforme l'équation de Reynolds en une équation de transport - dans la zone de haute pression, l'épaisseur de film est quasi constante. Pour les mêmes raisons, lorsque la micro-géométrie des surfaces est prise en compte, la réduction de l'amplitude de la rugosité est aussi quasi constante dans cette région. Pour quantifier le phénomène de la réduction d'amplitude, classiquement, le paramètre adimensionné  $\nabla$  est utilisé. L'analyse de la capacité du film d'absorber la rugosité permet de proposer un nouveau paramètre gouvernant le phénomène,  $\Lambda_{eq}$ . Il tient compte de l'épaisseur de film centrale et de la longueur d'onde de la rugosité. Le comportement prédit par les deux paramètres est similaire : l'amplitude de la rugosité de faible longueur d'onde est très peu déformée dans le contact tandis que l'amplitude de la rugosité de grande longueur d'onde est presque complètement écrasée. L'analyse modifiée du contact sec rugueux, basée sur la déformation partielle des rugosités, permet d'approximer les surpressions associées.

Pour un fluide non newtonien, les effets de piezo-viscosité sont limités par la relation non linéaire et la viscosité est beaucoup moins importante. Pour cette raison, l'équation de Reynolds ne se transforme pas en une équation de transport et l'analyse asymptotique précédente ne peut pas être directement appliquée. L'étude du flux supplémentaire induit par ses effets non newtoniens permet d'expliquer et de quantifier la réduction de l'amplitude de la rugosité suivant la ligne centrale. En se basant sur les résultats obtenus par cette analyse, les définitions des paramètres adimensionnés  $\nabla$  et  $\Lambda_{eq}$  sont étendues pour tenir compte du comportement rhéologique du fluide.

La dernière partie du travail porte sur l'étude des contacts lisses lubrifiés avec un fluide à rhéologie plus complexe. D'abord, une étude numérique met en évidence l'influence des effets non newtoniens sur l'épaisseur de film dans le contact. Ensuite, le couplage entre le travail expérimental et numérique permet :

- d'identifier les paramètres nécessaires pour la modélisation des fluides (mesures rhéologiques)
- d'effectuer les simulations numériques avec cette modélisation,
- de comparer les épaisseurs de film mesurées expérimentalement et calculées numériquement.

Un bon accord entre les deux approches est observé pour deux huiles silicones. En même temps, les comparaisons des résultats avec les prédictions analytiques classiques montrent que ces dernières surestiment largement les épaisseurs de film.

## Perspectives

### Modélisation et Analyse

Dans un premier temps, il serait intéressant de faire le couplage entre le travail expérimental et numérique pour plusieurs lubrifiants afin d'établir des classes d'huiles non newtoniennes utilisées dans le domaine de l'EHD. Dans la même optique, il est souhaitable d'effectuer des mesures expérimentales de l'épaisseur de film en fonction de taux de roulement/glisement  $S$  ainsi que des profils d'épaisseur permettant une analyse et comparaison plus fine.

Il serait également intéressant de réactualiser les formules classiques disponibles afin de tenir compte des effets non newtoniens de lubrifiants.

Le Chapitre 6 aborde le contact entre deux surfaces lisses. Pour aller plus loin dans la modélisation, une étude paramétrique du contact entre des surfaces rugueuses est nécessaire. L'analyse des flux induits par les effets de piezo-viscosité limités, montrée dans le Chapitre 5, Equations 5.11 et 5.12, est indépendante de l'expression du flux  $\phi_X$ . Elle peut être étendue pour le modèle de Rabinowitsch. Cela permettrait de généraliser la démarche proposée.

L'utilisation d'huiles dont le taux de polymères devient très important, nécessite des modèles non newtoniens encore plus généralisés pour décrire leur comportement. Il est donc souhaitable que l'étape suivante soit consacrée à l'implémentation de modèles plus complets. Cela impliquerait des calculs plus longs puisque la dérivation directe d'une équation de Reynolds n'est pas disponible et qu'une intégration, en tout point, suivant l'épaisseur de film s'impose.



## Annexe A

# Expression analytique de prédiction d'épaisseur de film centrale

En 1994, Nijenbanning et al. [108] proposent une extension analytique de l'épaisseur de film centrale unique valable quelles que soient les conditions de fonctionnement du contact. Avec l'adimensionnement adopté dans ce travail -  $H = h/(b^2/R_x)$ , l'expression devient :

$$H_c = (1.5 \cdot M)^{-2/3} \cdot \left[ \underbrace{\left(1.70 \cdot t \cdot M^{-1/9} \cdot L^{3/4}\right)^r}_{\text{piézo-visqueux élastique}} + \underbrace{\left(1.96 \cdot M^{-1/9}\right)^r}_{\text{iso-visqueux élastique}} \right]^{s/r} + \underbrace{\left(47.30 \cdot M^{-2}\right)^s}_{\text{iso-visqueux rigide}} \right]^{1/s} \quad (\text{A.1})$$

avec les constantes qui sont de la forme :

$$\begin{cases} r = \exp\left(1 - \frac{6}{L+8}\right) \\ s = 12 - 10 \cdot \exp\left(M^{-2}\right) \\ t = 1 - \exp\left(-0.9 \cdot \left(\frac{M}{L}\right)^{1/6}\right) \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

En régime EHD, l'épaisseur de film centrale peut être approximée par le terme piézo-visqueux élastique. La variation du terme  $t$  est présentée sur la Figure 4.15. En première approximation, le terme  $t$  peut être supposé constant.

Avec cette hypothèse, l'expression de l'épaisseur de film approximée devient proportionnelle à :

$$H_c \approx M^{-7/9} \cdot L^{3/4} = \frac{L}{M} \cdot \frac{M^{2/9}}{L^{1/4}} \quad (\text{A.3})$$

La Figure A.2 montre la qualité de l'approximation de l'expression A.1.

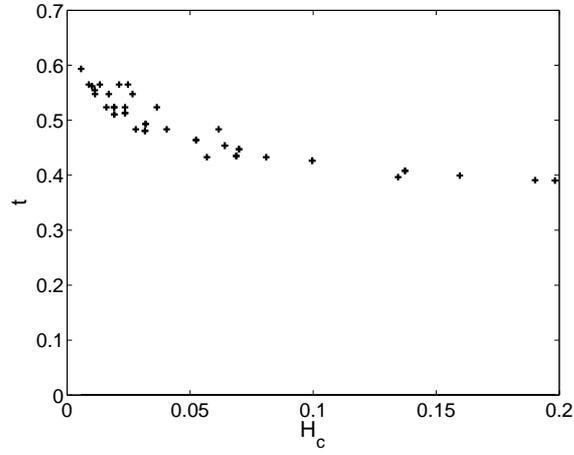


FIG. A.1 – Evolution du paramètre  $t$  de l'expression analytique de Nijenbanning et al. [108] en fonction de l'épaisseur de film centrale calculée

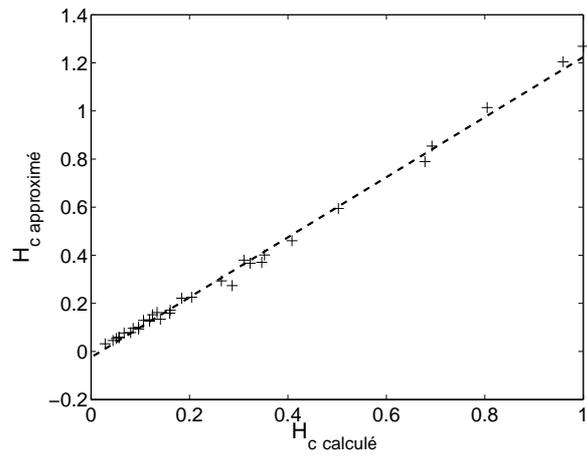


FIG. A.2 – Comparaison des épaisseurs de film obtenues numériquement et à l'aide de l'approximation A.3

# Bibliographie

- [1] X. AI et H. S. CHENG, The influence of moving dent on point ehl contacts. *STLE Tribology Transactions*, 1994, vol. 37, n° 2, pp. 323 – 235.
- [2] X. AI et H. S. CHENG, A transient EHL analysis for line contacts EHL contact with a measured surface roughness using MultiGrid Technique. *ASME Journal of Tribology*, 1994, vol. 116, pp. 549 – 556.
- [3] X. AI, Y. HU et L. ZHENG, A Full Numerical Solution for Transient Elastohydrodynamic Contacts with Eyring Fluid. *Wear*, 1989, vol. 135, pp. 15 – 27.
- [4] J. F. ARCHARD et E. W. COWKING, Elastohydrodynamic Lubrication at Point Contacts. *Proc. Instn. Mech. Engrs. Part J*, 1965-1966, vol. 180, pp. 47 –56.
- [5] S. BAIR, A Rough Shear-Thinning Correction for EHD Film Thickness. *STLE Tribology Transactions*, 2004, vol. 47, pp. 361 – 365.
- [6] S. BAIR, *High shear rate viscosity measurements for PDMS fluids*. Rapport technique, George W. Woodruff School of Mechanical Engineering, Georgia Institute of Technology, Atlanta, 2006.
- [7] S. BAIR, *Pressure viscosity measurements for DC200 PDMS500*. Rapport technique, George W. Woodruff School of Mechanical Engineering, Georgia Institute of Technology, Atlanta, 2006.
- [8] S. BAIR et M. M. KHONSARI, Generalized Reynolds equations for line contact with double-Newtonian shear-thinning. *Tribology Letters*, 2005, vol. 18, pp. 513 – 520.
- [9] S. BAIR et M. KOTZALAS, A Simple Calculation of EHL Traction at Small Slide/Roll Ration Including Roller Elasticity. *Présentation au congrès WTC III - Washington*, 2005.
- [10] S. BAIR, C. MCCABE et P. T. CUMMINGS, Comparison of Non-equilibrium Molecular Dynamics with Experimental Measurements in the Nonlinear Shear-Thinning Regime. *Phys. Rev. Lett.*, 2002, vol. 88, pp. page 4.
- [11] S. BAIR et F. QURESHI, The Generalized Newtonian Fluid Model and Elastohydrodynamic Film Thickness. *ASME Journal of Tribology*, 2003, vol. 125, pp. 70 – 75.
- [12] S. BAIR et F. QURESHI, The High Pressure Rheology of Polymer-Oil Solutions. *Tribology International*, 2003, vol. 36, pp. 637 – 645.
- [13] S. BAIR et W.O. WINER, A rheological model for elastohydrodynamic contacts based on primary laboratory data. *Transactions of the ASME*, 1979, vol. 101, pp. 258 – 265.
- [14] S. BAIR et W.O. WINER, Shear strength measurements of lubricants at high pressure. *Transactions of the ASME*, 1979, vol. 101, pp. 251 – 257.
- [15] A. J. BARRY, Flow Characteristics of Organopolysiloxane Fluids. *Journal of Applied Physics*, 1946, vol. 17, pp. 1020.
- [16] C. BARUS, Note on the Dependence of Viscosity on Pressure and Temperature. *Am. Acad. of Arts ans Science*, 1891, vol. 28, pp. 13–18.

- [17] C. BARUS, Isothermals, isopiestic and isometrics relative to viscosity. *Am. J. of Science*, 1893, vol. 45, pp. 87 – 96.
- [18] G. BAYADA, M. CHAMBAT et M. EL ALAOU, Variational Formulation and Finite Elements Algorithm for Cavitation Problems. *ASME Journal of Tribology*, 1990, vol. 112, pp. 398 – 403.
- [19] A. BRANDT, Multi-level adaptative solutions to boundary value problems. *Mathematics of Computation*, 1977, vol. 31, pp. 333 – 390.
- [20] A. BRANDT, *MultiGrid Techniques : 1984 Guide with Application of Fluid Dynamics*. GMD Bonn, St. Agustin, 1984, ISBN 3 884 570811.
- [21] A. BRANDT, Rigorous Local Mode Analysis of Multigrid. *Prelim. Proc. 4th Copper Mountain Conference of MultiGrid Methods, Copper Mountain Colorado*, 1990.
- [22] A. BRANDT et A. A. LUBRECHT, Multilevel Matrix Multiplication and Fast Solution of Integral Equations. *J. of Comp. Phys.*, 1990, vol. 90, pp. 348 – 370.
- [23] P. W. BRIDGMAN, Physics of High Pressure. *Bell and sons Ltd. London*, 1931, pp. 330 – 356.
- [24] P. M. E. CANN, Starved Grease Lubrication of Rolling Contacts. *STLE Tribology Transactions*, 1999, vol. 42, pp. 867 – 873.
- [25] P. M. E. CANN, *Film thickness measurements for PDMS fluids*. Rapport technique, Department of Mechanical Engineering, Tribology Section, Imperial College, London, 2006.
- [26] P. M. E. CANN, F. CHEVALIER et A. A. LUBRECHT, Track Depletion and Replenishment in a Grease Lubricated Point Contact : A Quantitative Analysis. *Proceedings of the Leeds-Lyon Symposium on Tribology*, 1997, pp. 405 – 414.
- [27] L. CHANG, C. CUSANO et T. F. CONRY, Effects of Lubricant Rheology and Kinematic Conditions on Micro-Elastohydrodynamic Lubrication. *ASME Journal of Tribology*, 1967, vol. 111, n° 2, pp. 344 – 351.
- [28] A. D. CHAPKOV, C. H. VENNER et A. A. LUBRECHT, Roughness Amplitude Reduction under Non-Newtonian EHD Lubrication Conditions. *Proceedings of the Leeds-Lyon Symposium on Tribology*, 2005, pp. 637 – 648.
- [29] F. CHEVALIER. *Modélisation des Conditions d’Alimentation dans les Contacts EHD Ponctuels*. Thèse de doctorat, INSA-Lyon, 1996.
- [30] Y. P. CHIU, An Analysis and Prediction of Lubricant Starvation in Following Contact Systems. *ASLE Transactions*, 1974, vol. 16, pp. 276 – 280.
- [31] T. F. CONRY, S. WANG et C. CUSANO, A Reynolds-Eyring Equation of Elastohydrodynamic Lubrication in Line Contacts. *ASME Journal of Tribology*, 1987, vol. 109, pp. 648 – 658.
- [32] F. COUHIER. *Influence des rugosités de surface sur les mécanismes de lubrification de contact élastohydrodynamique*. Thèse de doctorat, INSA-Lyon, 1996.
- [33] S. COULON. *Modélisation Prédiction de la Durée de Vie des Contact Ponctuels Lubrifiés en Présence d’Indentation*. Thèse de doctorat, 2001.
- [34] S. COULON, F. VILLE et A. A. LUBRECHT, Experimental investigations on Rolling Contact Fatigue for dented surfaces using artificial defects. *Proceedings of the Leeds-Lyon Symposium on Tribology*, 2005, pp. 691–701.
- [35] B. DAMIENS. *Modélisation de la Lubrification sous-alimentée dans les Contacts Elastohydrodynamiques Elliptiques*. Thèse de doctorat, INSA-Lyon, 2003.

- [36] K. DANG VAN, A. LE DOUARON et H. P. LIEURADE, Multiaxial fatigue limit : a new approach. *6th International Conference on Fracture (ICF6), 1984, New Delhi, India*, pp. 1879 – 1885.
- [37] P. H. DAWSON, Effect of Metallic Contact on the Pitting of Lubricated Rolling Surfaces. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 1962, vol. 4, pp. 16 – 21.
- [38] K. A. DOOLITTLE, Studies in Newtonian Flow II. The Dependence of the Viscosity of Liquids on Free-Space. *Journal of Applied Polymer Science*, 1951, vol. 22, pp. 1471 – 1475.
- [39] D. DOWSON et G. R. HIGGINSON, A Numerical Solution to the ElastoHydrodynamic Problem. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 1959, pp. 6 – 15.
- [40] D. DOWSON et G. R. HIGGINSON, Elasto-hydrodynamic lubrication - the fundamentals of roller and gear lubrication. *Pergamon Press, Oxford*, 1966, page 235.
- [41] P. EHRET, D. DOWSON et C. M. TAYLOR, Waviness orientation in EHL point contacts. *Proceedings of the Leeds-Lyon Symposium on Tribology*, 1996, pp. 235 – 244.
- [42] P. EHRET, D. DOWSON et C. M. TAYLOR, Time-dependent solutions with waviness and asperities in EHL point contacts. *Proceedings of the Leeds-Lyon Symposium on Tribology*, 1997, pp. 313 – 324.
- [43] P. EHRET, D. DOWSON et C. M. TAYLOR, On Lubricant Transport Conditions in Elasto-hydrodynamic Conjunctions. *Trans. Roy. Soc. of London*, 1998, vol. 454, pp. 247 – 258.
- [44] P. EHRET, A. FÉLIX-QUINONEZ, J. LORD, R. LARSSON et O. MARKLUND, Experimental analysis of micro-elastohydrodynamic conditions. *Proceedings of the Leeds-Lyon Symposium on Tribology*, 2000, pp. 621 – 624.
- [45] C. D. ELCOATE, T. G. HUGHES, C. R. EVANS et R. W. SNIDLE, Thin Film Time Dependent Micro-EHL Solutions with Real Surface Roughness. *Proceedings of the Leeds-Lyon Symposium on Tribology*, 1999, pp. 163 – 174.
- [46] H. G. ELROD et M. L. ADAMS, A Computer Program for Cavitation and Starvation Problems. *Proceedings of the Leeds-Lyon Symposium on Tribology*, 1974, pp. 37 – 41.
- [47] A. M. ERTEL, Hydrodynamic Lubrication based on New Principles. *Akad. Nauk SSSR Prikadnaya Matematika i Mekhanika*, 1939, vol. 3, pp. 41 – 52.
- [48] C. R. EVANS et R. W. SNIDLE, Inverse solution of Reynolds' equation of lubrication under point-contact elastohydrodynamic conditions. *ASME Journal of Lubrication Technology*, 1991, vol. 103, pp. 539 – 546.
- [49] Y. A. FAKHREDDINE et P. ZOLLER, The Equation of State of a Polydimethylsiloxane Fluid. *Journal of Applied Polymer Science*, 1990, vol. 41, pp. 1087 – 1093.
- [50] A. FÉLIX-QUINONEZ, P. EHRET et J. L. SUMMERS, Numerical analysis of experimental observations of a single transverse ridge passing through an elastohydrodynamic lubrication point contact under rolling/sliding conditions. *Proc. Instn. Mech. Engrs. Part J*, 2004, vol. 218, n° 2, pp. 109 – 123.
- [51] A. FÉLIX-QUINONEZ, P. EHRET et J. L. SUMMERS, On Three-Dimensional Flat-Top Defects Passing Through an EHL Point Contact : A Comparison of Modeling with Experiments. *Transactions of the ASME*, 2005, vol. 127, pp. 51 – 60.
- [52] C. A. FOORD, W. C. HAMMAM et A. CAMERON, Evaluation of Lubricants Using Optical Elastohydrodynamics. *ASLE Transactions*, 1968, vol. 11, n° 1, pp. 31 – 43.
- [53] N. GADALLAH et G. DALMAZ, Hydrodynamic Lubrication of the Rib-Roller End Contact of a Tapered Roller Bearing. *ASME Journal of Tribology*, 1984, vol. 106, pp. 265 – 274.
- [54] E. K. GATCOMBE, Lubrication Characteristics of Involute Spur Gears - a Theoretical Investigation. *ASME Journal of Lubrication Technology*, 1945, vol. 67, pp. 177 – 185.

- [55] P. R. GOGLIA, C. CUSANO et T. F. CONRY, The Effects of Irregularities on the Elastohydrodynamic Lubrication of Sliding Line Contacts : Part I -Single Irregularities. *ASME Journal of Tribology*, 1984, vol. 106, pp. 104 – 112.
- [56] P. R. GOGLIA, C. CUSANO et T. F. CONRY, The Effects of Irregularities on the Elastohydrodynamic Lubrication of Sliding Line Contacts : Part II -Wavy Surfaces. *ASME Journal of Tribology*, 1984, vol. 107, pp. 113 – 119.
- [57] R. GOHAR et A. CAMERON, Optical Measurement of Oil Film Thickness under Elastohydrodynamic Lubrication. *Nature*, 1963, vol. 200, pp. 458 – 459.
- [58] R. GOHAR et A. CAMERON, The Mapping of Elastohydrodynamic Contacts. *ASLE Transactions*, 1967, vol. 10, pp. 215 – 225.
- [59] J. A. GREENWOOD, Two-Dimensional Flow of a Non-Newtonian Lubricant. *Proc. Instn. Mech. Engrs. Part J*, 1999, vol. 214, pp. 29 – 41.
- [60] J. A. GREENWOOD et K. L. JOHNSON, The Behaviour of Transverse Roughness in Sliding Elastohydrodynamically Lubricated Contacts. *Wear*, 1992, vol. 153, pp. 107 – 117.
- [61] J. A. GREENWOOD et G. E. MORALES-ESPEJEL, The behaviour of transverse roughness in EHL contacts. *Proc. Instn. Mech. Engrs. Part J*, 1994, vol. 208, pp. 121 – 132.
- [62] J. A. GREENWOOD et G. E. MORALES-ESPEJEL, The behaviour of transverse roughness in EHL contacts. *Proceedings of the Leeds-Lyon Symposium on Tribology*, 1997, pp. 307 – 312.
- [63] J. A. GREENWOOD et J. H. TRIPP, The contact of two nominally flat rough surfaces. *Proc. Instn. Mech. Engrs. Part J*, 1971, vol. 185, pp. 625 – 633.
- [64] J. A. GREENWOOD et J. B. P. WILLIAMSON, Contact of nominally flat surfaces. *Proc. Roy. Soc. London, Series A*, 1966, vol. 295, pp. 300 – 319.
- [65] Site Francophone Volkswagen Golf GTI, <<http://www.passiongolfgti.com>> (consulté le 06.06.06).
- [66] B. J. HAMROCK et D. DOWSON, Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Point Contacts, part I - Theoretical Formulation. *ASME Journal of Lubrication Technology*, 1976, vol. 98, pp. 223 – 229.
- [67] B. J. HAMROCK et D. DOWSON, Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Point Contacts, part II - Ellipticity Parameter Results. *ASME Journal of Lubrication Technology*, 1976, vol. 98, pp. 375 – 383.
- [68] B. J. HAMROCK et D. DOWSON, Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Point Contacts, part III - Fully flooded Results. *ASME Journal of Lubrication Technology*, 1977, vol. 99, pp. 264 – 276.
- [69] B. J. HAMROCK et D. DOWSON, Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Point Contacts, part IV, Starvation Results. *JOLT*, 1977, vol. 99, pp. 15 – 23.
- [70] B. J. HAMROCK et D. DOWSON, Minimum Film Thickness in elliptical contacts for different regimes of fluid film lubrication. *Proceedings of the Leeds-Lyon Symposium on Tribology*, 1979, pp. 22 – 27.
- [71] B. J. HAMROCK, S. R. SCHMID et B. O. JACOBSON, *Fundamentals of Fluid Film Lubrication*. Marcel Dekker Inc., 2004, ISBN 0 8247 5371 2.
- [72] H. HERTZ, On the Contact of Elastic Solids. *J. Reine und Angew. Math.*, 1881, vol. 92, pp. 292 – 302.
- [73] J. O. HIRSCHFELDER, C. F. CURTISS et R. B. BIRD, *Molecular Theory of Gases and Liquids*. Wiley, New York, 1954, p 1219.

- [74] D. L. HOGENBOOM, W. WEBB et J. A. DIXON, Viscosity of Several Liquid Hydrocarbons as a Function of Temperature, Pressure and Free Volume. *Journal of Chemical Physics*, 1967, pp. 2586 – 2598.
- [75] C. A. HOLT, C. R. EVANS et R. W. SNIDLE, Solution of the Non-Newtonian Elastohydrodynamic Problem for Circular Contacts Based on a Flow Continuity Method. *Proc. Instn. Mech. Engrs. Part J*, 1996, vol. 210, pp. 763 – 787.
- [76] C. J. HOOKE, Surface Roughness Modification in Elasto-Hydrodynamic Line Contacts Operating in the Elastic Piezoviscous Regime. *Proc. Instn. Mech. Engrs. Part J*, 1998, vol. 202, pp. 145 – 162.
- [77] C. J. HOOKE, Surface Roughness Modification in EHL Line Contacts - the Effects of Roughness Wavelength, Orientation and Operating Conditions. *Proceedings of the Leeds-Lyon Symposium on Tribology*, 1999, pp. 193 – 202.
- [78] C. J. HOOKE, The Behaviour of Low-Amplitude Surface Roughness under Line Contacts : Non-Newtonian Fluids. *Proc. Instn. Mech. Engrs. Part J*, 2000, vol. 214, n° 3, pp. 253 – 265.
- [79] C. J. HOOKE, The Effect of Roughness in EHL contacts. *Proceedings of the Leeds-Lyon Symposium on Tribology*, 2005, pp. 31 – 46.
- [80] C. J. HOOKE et C. H. VENNER, Surface roughness attenuation in line and point contacts. *Proc. Instn. Mech. Engrs. Part J*, 2000, vol. 214, pp. 439 – 444.
- [81] L HOUPERT. *Contribution à l'étude du frottement dans un contact Elastohydrodynamique*. Thèse de doctorat, INSA-Lyon, 1980.
- [82] E. IOANNIDES et T. A. HARRIS, A New Fatigue Life Model for Rolling Bearings. *ASME Journal of Tribology*, 1985, vol. 107, pp. 367 – 378.
- [83] B. JACOD. *Friction in elastohydrodynamic lubrication*. Thèse de doctorat, University of Twente, the Netherlands, ISBN : 90-365-1782-6, 2002.
- [84] B. JACOD, P. M. LUGT, M.-L. DUMONT, J. H. TRIPP et C. H. VENNER, Amplitude Reduction of Waviness in elastohydrodynamic Lubrication Using an Eyring Fluid Model. *Proc. Instn. Mech. Engrs. Part J*, 2000, vol. 214, pp. 343 – 350.
- [85] K. L. JOHNSON, Regimes of Elastohydrodynamic Lubrication. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 1970, vol. 12, pp. 9 – 16.
- [86] K. L. JOHNSON, *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989, ISBN 0 521 347963.
- [87] K. L. JOHNSON et J. L. TEVAARWERK, Shear Behaviour of Elastohydrodynamic Oil Films. *Proc. Roy. Soc. London*, 1977, vol. 356, n° 1685, pp. 215 – 236.
- [88] G. J. JOHNSTON, R. WAYTE et H. A. SPIKES, The measurement and study of very thin lubricant films in concentrated contacts. *STLE Tribology Transactions*, 1991, vol. 34, pp. 187 – 194.
- [89] M. KANETA et A. CAMERON, Effects of asperities in elastohydrodynamic lubrication. *ASME Journal of Tribology*, 1980, vol. 102, pp. 374 – 379.
- [90] M. KANETA, T. SAKAI et H. NISHAKAWA, Optical interferometric observations on the effects of a bump on point contact EHL. *ASME Journal of Lubrication Technology*, 1992, vol. 114, pp. 779 – 784.
- [91] C. C. KWEH, C. R. EVANS et R. W. SNIDLE, Micro-Elastohydrodynamic Lubrication of An Elliptical Contact with Transverse and 3-dimensional Roughness. *ASME Journal of Tribology*, 1989, vol. 111, pp. 577 – 584.

- [92] P. LAMAGNÈRE, R. FOUGÈRES, G. LORMAND, A. VINCENT, D. GIRODIN, G DUDRAGNE et F. VERGNE, A Physically Based Model for Endurance Limit of Bearing Steels. *ASME Journal of Tribology*, 1998, vol. 120, pp. 421 – 426.
- [93] T. B. LANE et T. G. HUGHES, A study of the oil-film formation in gears by electrical resistance measurements. *British Journal of Applied Physics*, 1952, vol. 3, n° 10, pp. 315 – 318.
- [94] J. R. LIN, Non-Newtonian Effects on the Dynamic Characteristics of One-dimensional Slider Bearings : Rabinowitsch Model. *Tribology Letters*, 2001, vol. 10, n° 4, pp. 237 – 243.
- [95] A. A. LUBRECHT. *Numerical Solution of the EHL Line and Point Contact Problem Using Multigrid Techniques*. Thèse de doctorat, University of Twente, Enschede, The Netherlands ISBN 90-9001583-3, 1987.
- [96] A. A. LUBRECHT, Polycopié : Lubrification EHD, quatrième année INSA de Lyon, département GMD. INSA de Lyon, Villeurbanne. 2002.
- [97] A. A. LUBRECHT, A. GRAILLE, C. H. VENNER et J. A. GREENWOOD, Waviness Amplitude Reduction in Line Contacts Under Rolling-Sliding. *ASME Journal of Tribology*, 1999, vol. 120, pp. 705 – 709.
- [98] A. A. LUBRECHT, B. O. JACOBSON et E. IOANNIDES, Lundberg Palmgren Revisited. Rolling Element Bearings - Towards the 21st century : papers presented by the Tribology Group of the Institution of Mechanical Engineers and held at the Institution of Mechanical Engineers on 16 November 1990, London, UK. *Published for the Institution of Mechanical Engineers by Mechanical Engineering Publications*, 1990, vol. 1, pp. 17 – 20.
- [99] A. A. LUBRECHT et C. H. VENNER, Aspects of two-sided surface waviness in an EHL line contact. *Proceedings of the Leeds-Lyon Symposium on Tribology*, 1993, pp. 205 – 214.
- [100] G. LUNDBERG et A. PALMGREN, Dynamic Capacity of Rolling Bearings. *Acta Polytechnica, Mech. Eng. Series I, Roy. Sw. Acad. of Eng. Science*, 1947, vol. 7, n° 3, pp. 207 – 213.
- [101] I. O. MACCONOCHIE et A. CAMERON, The measurement of oil film thickness in gear teeth. *ASME Journal of Basic Eng.*, 1960, vol. 82, pp. 29 – 34.
- [102] H. M. MARTIN, Lubrication of Gear Teeth. *Engineering*, 1916, vol. 102, pp. 119 – 121.
- [103] J. S. MÉRIEUX, S. HURLEY, A. A. LUBRECHT et P. M. E. CANN, Shear-Degradation of Grease and Base Oil Availability in Starved EHL Lubrication. *Proceedings of the Leeds-Lyon Symposium on Tribology*, 2000, pp. 581 – 588.
- [104] H. MOES, Optimum similarity analysis with applications to elastohydrodynamic lubrication. *Wear*, 1992, vol. 159, pp. 398 – 407.
- [105] H. MOES, *Lubrication and Beyond, lecture notes*. code 115531, University of Twente, Enschede, The Netherlands, 2000.
- [106] G. E. MORALES-ESPEJEL. *Elastohydrodynamic Lubrication of Smooth and Rough Surfaces*. Thèse de doctorat, University of Cambridge, Cambridge, 1993.
- [107] H. MORREL, M. H. COHEN et G. TURNBULL, Molecular Transport in Liquids and Glasses. *Journal of Applied Physics*, 1959, vol. 31, pp. 1164 – 1169.
- [108] G. NIJENBANNING, C. H. VENNER et H. MOES, Film Thickness in elastohydrodynamically lubricated elliptic contacts. *Wear*, 1994, vol. 176, pp. 217 – 229.
- [109] N. PATIR et H. S. CHENG, Effect of Surface Roughness Orientation on Central Film-Thickness in EHD Contact. *Proceedings of the Leeds-Lyon Symposium on Tribology*, 1979, pp. 15 – 21.
- [110] W PEPPLER, Druckübertragung und geschmiert zylindrischen Gleit und Walzflächen. *VDI ForchHft, Berlin*, 1938, page 391.

- [111] A. I. PETRUSEVICH, Fundamental Conclusion from the Hydrodynamic Contact Theory of Lubrication. *Izv. Akad.,Nauk. SSSR (OTN)*, 1951, page page 209.
- [112] G. POPOVICI. *Effest of lubricant starvation on performance of Elasto-Hydrodynamically lubricated contacts*. Thèse de doctorat, University of Twente, Enschede, The Netherlands. ISBN 90-3652270-6, 2005.
- [113] W. H. PRESS, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING et B. P. FLANNERY, *Numerical Recipies in C++*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002, ISBN 0 521 75033 4.
- [114] O. REYNOLDS, On the Theory of Lubrication and its Application to Mr. Beauchamps Tower's Experiments, including an Experimental Determination of the viscosity of Olive Oil. *Phil. Trans. Roy. Soc. of London*, 1886, vol. 177, pp. 157 – 234.
- [115] C. J. A. ROELANDS. *Correlation aspects of the viscosity-temperature-pressure relationship of lubricating oils*. Thèse de doctorat, Technical University of Delft, The Netherlands, 1966.
- [116] V. K. SACHDEV, Y. UGUR et R. K. JAIN, Equation of state of poly(dimethylsiloxane) melts. *Journal of Polymer Science : Part B : Polymer Physics*, 1998, vol. 36, pp. 841 – 850.
- [117] C. R. SCHULTHEISZ, K. M. FLYN et S. D. LEIGH, *Certification of the Rheological Behavior of SRM 2491, Poldymethylsolorane*. No. NIST 260-147. National Institute of Standards and Technology - NIST, 2002.
- [118] T. E. TALLIAN, On competing Failure Modes in Rolling Contacts. *ASLE Transactions*, 1967, vol. 10, pp. 418 – 439.
- [119] T. E. TALLIAN, Simplified Contact Fatigue Life Prediction Model-Part I : Review of Published Models. *ASME Journal of Tribology*, 1992, vol. 114, pp. 207 – 213.
- [120] T. E. TALLIAN et J. L. MCCOOL, An Engineering Model of Spalling Fatigue Failure in Rolling Contact II. The Surface Model. *Wear*, 1971, vol. 17, pp. 447 – 461.
- [121] Site Constructeur TIMKEN, <<http://www.timken.com>> (consulté le 16.02.06).
- [122] C. H. VENNER. *Multilevel Solution of the EHL Line and Point Contact Problems*. Thèse de doctorat, University of Twente, Enschede, The Netherlands. ISBN 90-9003974-0, 1991.
- [123] C. H. VENNER, G. BERGER et P. M. LUGT, Waviness Deformation in Starved EHL Circular Contacts. *ASME Journal of Tribology*, 2004, vol. 126, n° 2, pp. 248 – 257.
- [124] C. H. VENNER, F. COUHIER, A. A. LUBRECHT et J. A. GREENWOOD, Amplitude Reduction of Waviness in transient EHL line contacts. *Proceedings of the Leeds-Lyon Symposium on Tribology*, 1997, pp. 103 – 112.
- [125] C. H. VENNER et C. J. HOOKE, Surface roughness attenuation in EHL line and point contacts under conditions of starved lubrication. *Proceedings of the IUTAM Symposium held in Cardiff, UK, 1-3 September 2004*, 2005.
- [126] C. H. VENNER et A. A. LUBRECHT, Numerical Simulation of a Transverse Ridge in a Circular EHL Contact Under Rolling/Sliding. *ASME Journal of Lubrication Technology*, 1994, vol. 116, n° 4, pp. 751 – 761.
- [127] C. H. VENNER et A. A. LUBRECHT, Amplitude Reduction of Non-Isotropic Harmonic Patterns in Circular EHL Contacts Under Pure Rolling. *Proceedings of the Leeds-Lyon Symposium on Tribology*, 1999, pp. 151 – 162.
- [128] C. H. VENNER et A. A. LUBRECHT, *MultiLevel Methods in Lubrication*. Elsevier, Amsterdam, 2000, ISBN 0-444-50503-2.
- [129] C. H. VENNER et W. E. ten NAPEL, Surface Roughness Effects in an EHL Line Contact. *ASME Journal of Tribology*, 1992, vol. 114, pp. 616 – 622.

- [130] F. VERGNE, J. P. CHAOMLEFFEL et G. DALMAZ, Elastohydrodynamic Lubrication of Point Contacts with Ree-Eyring Fluid : Film Thickness and Traction. *Journal of Rheology*, 1990, vol. 34, pp. 1357 – 1371.
- [131] L. D. WEDEVEN. *Optical Measurements in Elastohydrodynamic Rolling-Contact Bearings*. Thèse de doctorat, Imperial College, London, 1970.
- [132] L. D. WEDEVEN et C. CUSANO, Elastohydrodynamic film thickness measurements of artificially produced surface dents and grooves. *ASLE Transactions*, 1979, vol. 22, pp. 369 – 381.
- [133] L. D. WEDEVEN, D. EVANS et A. CAMERON, Optical Analysis of Ball Bearing Starvation. *ASME Journal of Lubrication Technology*, 1971, vol. 93, pp. 349 – 363.
- [134] H. WIJNANT, Y. *Contact Dynamics in the field of elastohydrodynamic Lubrication*. Thèse de doctorat, University of Twente, Enschede, the Netherlands, ISBN : 90-36512239, 1998.
- [135] K. YASUDA, R. C. ARMSTRONG et M. H. COHEN, Shear flow properties of concentrated solutions of linear and star branched polystyrenes. *Rheologica Acta*, 1981, vol. 20, n° 2, pp. pp. 163 – 178.
- [136] I. YAVNEH. *Multigrid Techniques for Incompressible Flows*. Thèse de doctorat, Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israel, 1991.

# Table des figures

1	Exemple de contacts lubrifiés : contact came-poussoir moteur Volkswagen Golf GTI (en haut à gauche) [65], contact piston-chemise (en haut à droite), roulement à butées Timken (en bas) [121] . . . . .	6
1.1	<i>Exemple de rugosité réelle</i> . . . . .	13
2.1	<i>Comparaison entre différents modèles rhéologiques Hamrock et al. [71]. Evolution de la contrainte de cisaillement adimensionnée <math>\tau/\tau_0</math> en fonction de la viscosité <math>\mu</math>, du taux de cisaillement <math>\dot{\gamma}</math> et de la contrainte limite de cisaillement <math>\tau_0</math></i> . . . . .	20
2.2	<i>Comparaison des différentes fonctions rhéologiques utilisées dans le cadre de cette étude</i> . . . . .	21
2.3	<i>Schéma de contact</i> . . . . .	21
2.4	<i>Géométrie des corps en contact. Géométrie réelle (à gauche) et géométrie équivalente (à droite) [35]</i> . . . . .	26
2.5	<i>Exemple de rugosités harmoniques. Schéma 1D (à gauche), 2D une rugosité isotrope <math>\lambda_x = \lambda_y</math> (à droite)</i> . . . . .	26
2.6	<i>Evolution de la densité relative avec la pression. Comparaison entre les relations de Dowson et Higginson 2.24 et Tait 2.25</i> . . . . .	28
2.7	<i>Evolution de la viscosité avec la pression. Comparaison entre les relations de Barus 2.28, Roelands 2.29 et Doolittle 2.31</i> . . . . .	30
3.1	<i>L'opérateur de restriction pondérée entre la grille fine <math>h</math> et la grille moins fine <math>H</math> pour un problème 2D [35]</i> . . . . .	39
3.2	<i>L'opérateur d'interpolation bilinéaire entre la grille moins fine <math>H</math> et la grille fine <math>h</math> pour un problème 2D [35]</i> . . . . .	40
3.3	<i>Exemple de structure de grilles 2D [35]</i> . . . . .	41
3.4	<i>Schéma d'un cycle <math>V(\nu_1, \nu_2)</math> avec 4 grilles (niveaux) [128]</i> . . . . .	41
3.5	<i>Schéma d'un cycle <math>W(\nu_1, \nu_2)</math> avec 4 grilles (niveaux) [128]</i> . . . . .	42
3.6	<i>Schéma d'un algorithme FMG avec 1 V cycle par raffinement [128]</i> . . . . .	42
3.7	<i>Schéma 1D de discrétisation NU2</i> . . . . .	45
3.8	<i>Algorithme de résolution du problème EHD par la méthode FMG avec <math>n_{cycle}</math> V cycles</i> . . . . .	49
3.9	<i>Schéma d'un calcul transitoire (<math>k \geq 1</math>) avec 1 V cycle par pas de temps. Algorithme FMG avec 1 V cycle par raffinement pour le calcul stationnaire (<math>k = 0</math>)</i> . . . . .	50
3.10	<i>Evolution des résidus en fonction du nombre de cycles. <math>M = 200, L = 10</math></i> . . . . .	50
4.1	<i>Exemple de distribution de l'épaisseur de film <math>H</math> entre deux surfaces lisses, <math>M = 1000, L = 10</math></i> . . . . .	55
4.2	<i>Exemple de réduction d'amplitude d'une surface isotrope <math>\lambda_x = \lambda_y = 0.25, M = 1000, L = 10</math>, relation de Roelands 2.29, fluide compressible 2.24</i> . . . . .	55

4.3	Exemple de l'enveloppe de déformation élastique d'une surface isotrope $\lambda_x/b = \lambda_y/b = 0.25$ , $M = 1000$ , $L = 10$ , relation de Roelands 2.29, fluide compressible 2.24	56
4.4	Evolution de l'amplitude relative en fonction de $\lambda/b$ , pour trois amplitudes initiales, roulement pur [124]	57
4.5	L'évolution de l'amplitude relative $A_d(X = Y = 0)/A_i$ en fonction du paramètre adimensionné $\nabla$ - Equation 4.5	58
4.6	La zone d'entrée du contact pour deux valeurs de $M$ , $L = 10$ , $\lambda_x/b = \lambda_y/b = 0.5$ (à gauche). Comparaison des valeurs analytiques et mesurées du rapport $l_2/l_1$ (à droite)	58
4.7	La pression suivant la ligne centrale ( $Y = 0$ ) lors du passage d'une rugosité : $\lambda_x/b = \lambda_y/b = 0.25$ , $M=2000$ , $L=20$ , à gauche : le profil complet de la pression, à droite : les variations de la pression induites par la rugosité	59
4.8	Comparaison entre les valeurs théoriques 4.9 et les valeurs calculées numériquement des surpressions $\Delta P$	60
4.9	Comparaison entre les surpressions calculées numériquement et par la formule modifiée de Johnson 4.12	61
4.10	Evolution des surpressions $\Delta P$ en fonction du paramètre adimensionné $\nabla$ - Equation 4.5	61
4.11	Comparaison des surpressions calculées avec les conditions de fonctionnement 4.2, à gauche : $\lambda/b = 1/4$ et à droite $\lambda/b = 1/2$	62
4.12	Variations de la pression pour quatre longueurs d'onde différentes	63
4.13	La courbe de réduction d'amplitude (à gauche) et la courbe des surpressions (à droite) en fonction de $\Lambda_{eq}$ - Equation 4.14	63
4.14	Comparaison entre les paramètres adimensionnés $\nabla$ - Equation 4.5 et $\Lambda_{eq}$ - Equation 4.14	64
5.1	Exemple de profils d'épaisseur de film (à gauche) et de pression (à droite) suivant la ligne centrale $Y = 0$ entre deux surfaces lisses. $M = 500$ , $L = 20$ , $S = 0.05$ , $\tau_0 = 0.5 MPa$	69
5.2	Exemple de profil des surpressions (à gauche) et des déformations élastiques (à droite) induites par les rugosités. $M = 500$ , $L = 10$ , $S = 0.05$ , $\tau_0 = 1 MPa$ , $A_i = 0.15H_c$ , $\lambda_x/b = 0.25$	70
5.3	Exemple de profils d'amplitudes déformées obtenus à l'aide de l'Equation 5.3 pour deux longueurs d'onde différentes. $M = 500$ , $L = 10$ , $S = 0.05$ , $\tau_0 = 1 MPa$ , $A_i = 0.15H_c$ , $\lambda_x/b = 0.25$ , $\lambda_x/b = 0.5$	70
5.4	Exemple de déphasage entre les profils d'épaisseur de film (à gauche) et de pression (à droite) obtenus avec les deux modèles rhéologiques. $M = 500$ , $L = 10$ , $S = 0.1$ , $\tau_0 = 1 MPa$ , $A_i = 0.15H_c$ , $\lambda_x/b = 0.25$	71
5.5	Exemple de courbes de réduction suivant la ligne centrale pour trois longueurs d'onde. $M = 500$ , $L = 10$ , $S = 0.05$ , $\tau_0 = 1 MPa$ , $A_i = 0.15H_c$ , $\lambda_x/b = 0.25$ (en haut), $\lambda_x/b = 0.5$ (au milieu), $\lambda_x/b = 0.75$ (en bas)	72
5.6	Exemple de courbes de réduction suivant la ligne centrale pour deux charges. $M = 500$ (en haut), $M = 2000$ (en bas). $L = 10$ , $S = 0.05$ , $\tau_0 = 1 MPa$ , $A_i = 0.15H_c$ , $\lambda_x/b = 0.5$	72
5.7	Exemple de courbes de réduction suivant la ligne centrale pour deux valeurs de $L$ . $M = 500$ , $L = 10$ (en bas), $L = 20$ (en haut), $S = 0.05$ , $\tau_0 = 0.5 MPa$ , $A_i = 0.15H_c$ , $\lambda_x/b = 0.5$	73
5.8	Exemple de courbes de réduction suivant la ligne centrale pour deux valeurs de $\tau_0$ . $M = 500$ , $L = 10$ , $S = 0.05$ , $\tau_0 = 0.5 MPa$ (en haut), $\tau_0 = 1 MPa$ (en bas), $A_i = 0.15H_c$ , $\lambda_x/b = 0.5$	74

5.9	Exemple de courbes de réduction suivant la ligne centrale pour trois valeurs de $S$ . $M = 500$ , $L = 10$ , $S = 0.05$ (en bas), $S = 0.1$ (au milieu), $S = 0.2$ (en bas), $\tau_0 = 1 \text{ MPa}$ , $A_i = 0.15H_c$ , $\lambda_x/b = 0.25$ . . . . .	74
5.10	Schéma 1D représentant le principe de l'analyse de flux complémentaire induit par les effets non newtoniens. Les symboles $\Delta p_{nwt}$ et $\Delta p_{eyr}$ désignent les suppressions induites par les rugosités - Equation 5.4, pour le modèle newtonien et pour le modèle d'Eyring. La courbe en pointillé représente l'intégrale du flux suivant la ligne centrale . . . . .	76
5.11	Comparaisons entre les résultats numériques et les prédictions analytiques : (en haut à gauche) - variation de $\lambda_x/b = 0.25, 0.5, 0.75$ ; (en haut à droite) - variation de $M = 500, 1000, 2000$ ; (au milieu à gauche) - variation de $L = 10, 20$ ; (au milieu à droite) - variation de $\tau_0 = 0.5 \text{ MPa}, 1 \text{ MPa}$ ; (en bas) - variation de $S = 0.05, 0.2$ . . . . .	79
5.12	La réduction d'amplitude mesurée à $X = 0.6$ et $Y = 0$ en fonction de : $\nabla$ - Equation 4.5 (à gauche) et $\Lambda_{eq}$ - Equation 4.14 (à droite). Les plages de variations des paramètres de contact sont données dans le Tableau 5.2 . . . . .	80
5.13	La réduction d'amplitude mesurée à $X = 0.6$ et $Y = 0$ en fonction des paramètres adimensionnés réactualisés : $\bar{\nabla}$ - Equation 5.23 (à gauche) et $\bar{\Lambda}_{eq}$ - Equation 5.24 (à droite). Les plages de variations des paramètres de contact sont données dans le Tableau 5.2 . . . . .	81
6.1	Evolution du flux supplémentaire $\Phi_X$ suivant la ligne centrale $Y = 0$ entre deux surfaces lisses - vue générale (à gauche) et zoom dans la zone centrale (à droite). $M = 65.57$ , $L = 4.90$ , $S = 0.0$ , $\tau_0 = 0.926 \text{ MPa}$ . La ligne en pointillé présente la valeur de $\Phi_X$ pour le cas newtonien : $\Phi_X = 1$ . . . . .	84
6.2	Evolution de la viscosité $\eta$ en fonction de la contrainte de cisaillement $\tau$ pour trois valeurs de la contrainte limite de cisaillement . . . . .	85
6.3	Evolution de l'épaisseur de film (à gauche) et de la pression (à droite) suivant la ligne centrale $Y = 0$ entre deux surfaces lisses pour trois valeurs de la contrainte limite de cisaillement. $M = 554.92$ , $L = 6.26$ , $S = 0.0$ . . . . .	85
6.4	Evolution de l'épaisseur de film centrale et minimale en fonction de la contrainte limite de cisaillement. $M = 554.92$ , $L = 6.26$ , $S = 0.0$ . . . . .	85
6.5	Evolution des contraintes moyennes de cisaillement en fonction du coefficient de roulement/glissement $S$ . . . . .	86
6.6	Evolution de l'épaisseur de film centrale $H_c$ et minimale $H_m$ en fonction du coefficient de roulement/glissement $S$ . $M = 149.59$ , $L = 3.72$ , $\tau_0 = 0.926 \text{ MPa}$ . La ligne en pointillé désigne le résultat obtenu avec la formule analytique de Nijenbanning et al. [108] . . . . .	86
6.7	Evolution de la viscosité en fonction de la pression - comparaison entre les mesures expérimentales Bair [7] et prédictions théoriques - Doolittle 2.48 et Barus 2.28. A gauche PDMS500 et à droite PDMS1000 . . . . .	88
6.8	Comparaison entre les mesures expérimentales, les résultats numériques et les formules analytiques de Hamrock et Dowson [66] et Nijenbanning et al. [108]. A gauche PDMS500 et à droite PDMS 1000 . . . . .	91
A.1	Evolution du paramètre $t$ de l'expression analytique de Nijenbanning et al. [108] en fonction de l'épaisseur de film centrale calculée . . . . .	98
A.2	Comparaison des épaisseurs de film obtenues numériquement et à l'aide de l'approximation A.3 . . . . .	98



# Liste des tableaux

2.1	<i>Fonctions rhéologiques</i> . . . . .	20
3.1	<i>Evolution de l'erreur de discrétisation relative entre deux grilles consécutives en fonction du nombre de cycles. Le niveau L6 correspond à un maillage 512×512 points. La valeur de <math>H_c</math> est calculée sur L6</i> . . . . .	51
4.1	<i>Paramètres du contact hertzien 4.2.3</i> . . . . .	62
4.2	<i>Variations des paramètres adimensionnés <math>M</math> et <math>L</math>, utilisés dans 4.2.3</i> . . . . .	62
4.3	<i>Variations des paramètres adimensionnés <math>M</math> et <math>L</math>, utilisés dans 4.2.3</i> . . . . .	63
5.1	<i>Plage de variation des paramètres de contact</i> . . . . .	77
5.2	<i>Plage de variation des paramètres de contact utilisés pour les simulations numériques</i>	78
6.1	<i>Paramètres rhéologiques des huiles PDMS - modélisation de la compressibilité</i> . .	88
6.2	<i>Paramètres rhéologiques des huiles PDMS - équation de Doolittle 2.48</i> . . . . .	88
6.3	<i>Paramètres rhéologiques des huiles PDMS - la relation de Rabinowitsch Tableau 2.1</i>	89
6.4	<i>Paramètres de contact sec hertzien</i> . . . . .	90
6.5	<i>Paramètres adimensionnés utilisés pour les simulations numériques</i> . . . . .	90

## FOLIO ADMINISTRATIF

### THESE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

NOM : CHAPKOV

DATE de SOUTENANCE : le 20/09/2006

Prénoms : Atanas Dimov

TITRE :

ETUDE DES CONTACTS ELASTOHYDRODYNAMIQUES

LUBRIFIES AVEC UN FLUIDE NON NEWTONIEN

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2006-ISAL-0050

Ecole doctorale : MEGA

Spécialité : MECANIQUE

Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 / et bis

CLASSE :

RESUME :

L'utilisation d'huiles contenant des polymères dans des applications élastohydrodynamiques présente deux avantages : de faibles pertes par frottement visqueux et une stabilité de l'épaisseur de film sur une gamme étendue de température. Cependant, les prédictions théoriques classiques surestiment largement l'épaisseur de film générée dans le contact. La prise en compte de la rhéologie plus complexe du fluide est indispensable pour la modélisation adéquate du phénomène de lubrification.

L'approche adoptée est basée sur la dérivation d'une équation de Reynolds généralisée, résolues par les techniques MultiGrilles et MultiGrilles-MultiIntegration.

Les études paramétriques montrent l'influence de la rhéologie sur la distribution de l'épaisseur de film et de la pression dans le contact. L'analyse de l'équation de Reynolds couplée à un comportement du fluide de type Eyring permet de quantifier la déformation élastique des rugosités dans le contact. L'utilisation de modèles plus avancés de type Rabinowitsch, Tait et Doolittle, permet de prédire une épaisseur de film d'huile très proche de celles mesurées expérimentalement.

MOT-CLES : champ de pression, compressibilité, contact ponctuel, Doolittle, EHD, épaisseur de film, Eyring, lubrifiant, MultiIntegration, MultiGrilles, piézo-viscosité, Rabinowitsch, réduction d'amplitude, rhéologie, rugosité harmonique, Reynolds, Tait, validation expérimentale

Laboratoire de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et de Solides (LaMCoS) de l'INSA de Lyon

Directeur de thèse: A. A. LUBRECHT

Président de jury :

Composition du jury : G. BAYADA, P. EHRET, J. FRENE, A. A. LUBRECHT, P. MONTMITONNET, M. RAOUS, P. M. E. CANN, S. BAIR