### THÈSE

# DÉVELOPPEMENT D'UN MODÈLE D'ENDOMMAGEMENT À TAUX DE CROISSANCE CONTRÔLÉ POUR LA SIMULATION ROBUSTE DE RUPTURES SOUS IMPACTS

Présentée devant l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

## pour obtenir le GRADE DE DOCTEUR

Ecole doctorale:

Mécanique, Energétique, Génie civil, Acoustique

Spécialité :

MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

par

### Arnaud SUFFIS Agrégé de Mécanique

Thèse soutenue le 21 Juin 2004 devant la Commission d'examen

#### Jury

SIDOROFF François	Professeur	Président
ALLIX Olivier	Professeur	Rapporteur
De BORST René	Professeur	Rapporteur
BONINI Jêrome	Ingénieur	Examinateur
BUNG Hariddh	Ingénieur	Examinateur
COMBESCURE Alain	Professeur	Directeur de thèse
ANDRIEUX Stéphane	Ingénieur	Invité
LUBRECHT Ton	Professeur	Invité

LaMCoS (INSA de Lyon/CNRS UMR 5514) 20, avenue Albert Einstein, 69621 VILLEURBANNE CEDEX (France)

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
	CHIMIE DE LYON	M. Denis SINOU Université Claude Bernard Lyon 1 Lab Synthèse Asymétrique UMR UCB/CNRS 5622 Bât 308
		2ème étage 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél: 04.72.44.81.83
	PROMOTED PROPERTY AND PROPERTY	sinou@univ-lyon1.fr
E2MC	ECONOMIE, ESPACE ET MODELISATION DES COMPORTEMENTS	M. Alain BONNAFOUS Université Lyon 2 14 avenue Berthelot MRASH
		Laboratoire d'Economie des Transports 69363 LYON Cedex 07 Tél: 04.78.69.72.76
	ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE,	Alain.Bonnafous@mrash.fr  M. Daniel BARBIER
E.E.A.	AUTOMATIQUE	INSA DE LYON Laboratoire Physique de la Matière Bâtiment Blaise Pascal
		69621 VILLEURBANNE Cedex Tél: 04.72.43.64.43 Daniel.Barbier@insa-lyon.fr
E2M2	EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2M2	M. Jean-Pierre FLANDROIS  UMR 5558 Biométrie et Biologie Evolutive  Equipe Dynamique des Populations Bactériennes  Faculté de Médecine Lyon-Sud Laboratoire de Bactériologie BP
		1269600 OULLINS Tél: 04.78.86.31.50 Jean-Pierre.Flandrois@biomserv.univ-lyon1.fr
	INFORMATIQUE ET INFORMATION	M. Lionel BRUNIE
EDIIS	POUR LA SOCIETE http://www.insa-lyon.fr/ediis	INSA DE LYON EDIIS Bâtiment Blaise Pascal
		69621 VILLEURBANNE Cedex Tél: 04.72.43.60.55 lbrunie@if.insa-lyon.fr
EDISS	INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE http://www.ibcp.fr/ediss	M. Alain Jean COZZONE IBCP (UCBL1) 7 passage du Vercors
		69367 LYON Cedex 07 Tél: 04.72.72.26.75 cozzone@ibcp.fr
	MATERIAUX DE LYON http://www.ec-lyon.fr/sites/edml	M. Jacques JOSEPH Ecole Centrale de Lyon Bât F7 Lab. Sciences et Techniques des Matériaux et des Surfaces
		36 Avenue Guy de Collongue BP 163 69131 ECULLY Cedex Tél: 04.72.18.62.51
	MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE	Jacques.Joseph@ec-lyon.fr M. Franck WAGNER
Math IF	FONDAMENTALE http://www.ens-lyon.fr/MathIS	Université Claude Bernard Lyon1 Institut Girard Desargues UMR 5028 MATHEMATIQUES Pâtiment Deven Joan Procession
		Bâtiment Doyen Jean Braconnier Bureau 101 Bis, 1er étage 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél: 04.72.43.27.86
MEGA	MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE http://www.lmfa.ec-lyon.fr/autres/MEGA/index.html	wagner@desargues.univ-lyon1.fr  M. François SIDOROFF  Ecole Centrale de Lyon  Lab. Tribologie et Dynamique des Systêmes Bât G8
		36 avenue Guy de Collongue BP 163 69131 ECULLY Cedex
		Tél:04.72.18.62.14 Francois.Sidoroff@ec-lyon.fr

#### INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

Directeur: STORCK A.

Professeurs:

AMGHAR Y. LIRIS

AUDISIO S. PHYSICOCHIMIE INDUSTRIELLE

BABOT D. CONT. NON DESTR. PAR RAYONNEMENTS IONISANTS

BABOUX J.C.

BALLAND B. PHYSIOUE DE LA MATIERE

PRODUCTIQUE ET INFORMATIQUE DES SYSTEMES MANUFACTURIERS BAPTISTE P.

BARBIER D. PHYSIQUE DE LA MATIERE

BASKURT A. LIRIS

BASTIDE J.P. LAEPSI\*\*\*\*

MECANIQUE DES CONTACTS BAYADA G.

LAEPSI\* BENADDA B.

BETEMPS M. AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE

PRODUCTIQUE ET INFORMATIQUE DES SYSTEMES MANUFACTURIERS BIENNIER F.

BLANCHARD J.M. BOISSE P. LAMCOS

BOISSON C. VIBRATIONS-ACOUSTIQUE BOIVIN M. (Prof. émérite) MECANIQUE DES SOLIDES

UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Développement Urbain BOTTA H. BOTTA-ZIMMERMANN M. (Mme) UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Développement Urbain

BOULAYE G. (Prof. émérite) INFORMATIQUE

BOYER J.C. MECANIQUE DES SOLIDES

CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Thermique du bâtiment **BRAU J** 

BREMOND G. PHYSIQUE DE LA MATIERE

BRISSAUD M. BRUNET M. GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE

MECANIQUE DES SOLIDES

INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION BRUNIE L.

**BUFFIERE J-Y.** GEMPPM\*\* **BUREAU J.C.** CEGELY\* CAMPAGNE J-P. PRISMA CAVAILLE J.Y. GEMPPM\*\*\* CHAMPAGNE J-Y. LMFA

CHANTE J.P.

CEGELY\*- Composants de puissance et applications UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Hydrologie urbaine CHOCAT B.

COMBESCURE A. MECANIQUE DES CONTACTS

**COURBON GEMPPM** 

COUSIN M. UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Structures

DAUMAS F. (Mme) CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Energétique et Thermique

DJERAN-MAIGRE I. UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL

DOUTHEAU A CHIMIE ORGANIQUE

DUBUY-MASSARD N. **ESCHIL** 

DUFOUR R. MECANIQUE DES STRUCTURES PHYSIQUE DE LA MATIERE DUPUY J.C.

EMPTOZ H. RECONNAISSANCE DE FORMES ET VISION GEMPPM\* ESNOUF C.

GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE EYRAUD L. (Prof. émérite)

FANTOZZI G.

FAVREL J. PRODUCTIQUE ET INFORMATIQUE DES SYSTEMES MANUFACTURIERS

FAYARD J.M. BIOLOGIE FONCTIONNELLE, INSECTES ET INTERACTIONS

FAYET M. (Prof. émérite) MECANIQUE DES SOLIDES

FAZEKAS A. **GEMPPM** 

FERRARIS-BESSO G. MECANIQUE DES STRUCTURES FLAMAND L. MECANIQUE DES CONTACTS

FLEURY E.

FLORY A. INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATIONS

FOUGERES R. GEMPPM\*\* FOUQUET F. GEMPPM\*\*\*

FRECON L. (Prof. émérite) REGROUPEMENT DES ENSEIGNANTS CHERCHEURS ISOLES

GERARD J.F. INGENIERIE DES MATERIAUX POLYMERES

GERMAIN P. LAEPSI\*\*\* GIMENEZ G. CREATIS\*\* GOBIN P.F. (Prof. émérite) GEMPPM\*\*\*

GONNARD P. GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE

GONTRAND M. PHYSIQUE DE LA MATIERE

GOUTTE R. (Prof. émérite) CREATIS\*\* GOUJON L GEMPPM\*\*\* GOURDON R. LAEPSI\*\*\*\*

GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE GRANGE G. (Prof. émérite)

GUENIN G. GEMPPM\*\*

GUICHARDANT M. BIOCHIMIE ET PHARMACOLOGIE GUILLOT G. PHYSIQUE DE LA MATIERE

GUINET A. PRODUCTIQUE ET INFORMATIQUE DES SYSTEMES MANUFACTURIERS

**GUYADER J.L.** VIBRATIONS-ACOUSTIQUE

GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE GUYOMAR D. HEIBIG A. MATHEMATIQUE APPLIQUEES DE LYON

MECANIQUE DES STRUCTURES JACQUET-RICHARDET G.

GEMPPM\*\* JAYET Y.

RECONNAISSANCE DE FORMES ET VISION JOLION J.M.

JULLIEN J.F. UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Structures

JUTARD A. (Prof. émérite) AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE

KASTNER R. UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Géotechnique KOULOUMDJIAN J. (Prof. émérite) INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION

LAGARDE M. BIOCHIMIE ET PHARMACOLOGIE LALANNE M. (Prof. émérite) MECANIQUE DES STRUCTURES

CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Energétique et thermique CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Energétique et thermique LALLEMAND A. LALLEMAND M. (Mme) UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Géotechnique LAREAL P (Prof. émérite)

LAUGIER A. (Prof. émérite) PHYSIQUE DE LA MATIERE LAUGIER C. BIOCHIMIE ET PHARMACOLOGIE

LAURINI R. INFORMATIQUE EN IMAGE ET SYSTEMES D'INFORMATION

UNITE MICROBIOLOGIE ET GENETIQUE LEJEUNE P.

LUBRECHT A. MECANIQUE DES CONTACTS

INTERACTION COLLABORATIVE TELEFORMATION TELEACTIVITE MASSARD N.

MAZILLE H. (Prof. émérite) PHYSICOCHIMIE INDUSTRIELLE

GEMPPM\*\*\* MERLE P. GEMPPM\*\*\* MERLIN J.

MIGNOTTE A. (Mle) INGENIERIE, INFORMATIQUE INDUSTRIELLE

PHYSICOCHIMIE INDUSTRIELLE MILLET J.P.

MIRAMOND M. UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Hydrologie urbaine

MOREL R. (Prof. émérite) MECANIQUE DES FLUIDES ET D'ACOUSTIQUES

MOSZKOWICZ P. LAEPSI\*

NARDON P. (Prof. émérite) NAVARRO Alain (Prof. émérite) BIOLOGIE FONCTIONNELLE, INSECTES ET INTERACTIONS

LAEPSI\*\* NELIAS D. LAMCOS

AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE NIEL E.

NORMAND B. **GEMPPM** NORTIER P. DREP CREATIS\*\* ODET C. OTTERBEIN M. (Prof. émérite) LAEPSI\*\*\*\*

PARIZET E.

VIBRATIONS-ACOUSTIQUE INGENIERIE DES MATERIAUX POLYMERES PASCAULT J.P.

VIBRATIONS-ACOUSTIQUE PAVIC G.

PECORARO S. **GEMPPM** PELLETIER J.M. GEMPPM\*\*\*

UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Matériaux PERA J.

PERRIAT P. GEMPPM\*\*

PERRIN J. INTERACTION COLLABORATIVE TELEFORMATION TELEACTIVITE

PINARD P. (Prof. émérite) PHYSIQUE DE LA MATIERE

PINON J.M. INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION

PONCET A. PHYSIQUE DE LA MATIERE

POUSIN J. MODELISATION MATHEMATIQUE ET CALCUL SCIENTIFIQUE PREVOT P. INTERACTION COLLABORATIVE TELEFORMATION TELEACTIVITE

PROST R. CREATIS\*

RAYNAUD M. CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Transferts Interfaces et Matériaux

REDARCE H. AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE

RETIF J-M. CEGELY

REYNOUARD J.M. UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Structures

RICHARD C. LGEF

MECANIQUE DES SOLIDES MECANIQUE DES FLUIDES RIGAL J.F. RIEUTORD E. (Prof. émérite)

ROBERT-BAUDOUY J. (Mme) (Prof. émérite) GENETIQUE MOLECULAIRE DES MICROORGANISMES

ROUBY D.

ROUX J.J. CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Thermique de l'Habitat

INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION RUBEL P.

CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Transferts Interfaces et Matériaux SACADURA J.F.

INGENIERIE DES MATERIAUX POLYMERES AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE SAUTEREAU H.

SCAVARDA S. (Prof. émérite) SOUIFI A. PHYSIQUE DE LA MATIERE

SOUROUILLE J.L. INGENIERIE INFORMATIQUE INDUSTRIELLE

THOMASSET D. AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE

THUDEROZ C. ESCHIL - Equipe Sciences Humaines de l'Insa de Lyon

UBEDA S. CENTRE D'INNOV. EN TELECOM ET INTEGRATION DE SERVICES

VELEX P. MECANIQUE DES CONTACTS

VERMANDE P. (Prof émérite) LAEPSI VIGIER G. GEMPPM\*\*\* VINCENT A. GEMPPM\*\*\* CREATIS\*\* VRAY D.

VUILLERMOZ P.L. (Prof. émérite) PHYSIQUE DE LA MATIERE

Directeurs de recherche C.N.R.S.:

BERTHIER Y. MECANIQUE DES CONTACTS

CONDEMINE G UNITE MICROBIOLOGIE ET GENETIQUE COTTE-PATAT N. (Mme) UNITE MICROBIOLOGIE ET GENETIQUE ESCUDIE D. (Mme) CENTRE DE THERMIOUE DE LYON

GEMPPM\*\*\* FRANCIOSI P.

MANDRAND M.A. (Mme) UNITE MICROBIOLOGIE ET GENETIQUE POUSIN G. BIOLOGIE ET PHARMACOLOGIE

ROCHE A. INGENIERIE DES MATERIAUX POLYMERES

SEGUELA A. GEMPPM\*\*\* VERGNE P. LaMcos

Directeurs de recherche I.N.R.A.:

BIOLOGIE FONCTIONNELLE, INSECTES ET INTERACTIONS FEBVAY G. GRENIER S. BIOLOGIE FONCTIONNELLE, INSECTES ET INTERACTIONS RAHBE Y. BIOLOGIE FONCTIONNELLE, INSECTES ET INTERACTIONS Directeurs de recherche I.N.S.E.R.M.: KOBAYASHI T.

PLM PRIGENT A.F. (Mme) BIOLOGIE ET PHARMACOLOGIE

MAGNIN I. (Mme) CREATIS\*\*

\*\*CEGELY

\*\*CREATIS

\*\*\*GEMPPM

\*\*\*\*LAEPSI

CENTRE DE GENIE ELECTRIQUE DE LYON

CENTRE DE RECHERCHE ET D'APPLICATIONS EN TRAITEMENT DE L'IMAGE ET DU SIGNAL

GROUPE D'ETUDE METALLURGIE PHYSIQUE ET PHYSIQUE DES MATERIAUX

LABORATOIRE D'ANALYSE ENVIRONNEMENTALE DES PROCEDES ET SYSTEMES INDUSTRIELS

Ce travail de thèse a été réalisée en grande partie au LaMCoS à l'INSA de Lyon, sous la direction d'Alain Combescure. Je tiens, avant toutes choses, à lui exprimer toute ma gratitude. S'il a, pendant ces trois années, encadré ce travail avec beaucoup de discernement et d'enthousiasme, il a également su me laisser l'indépendance nécessaire pour m'épanouir pleinement dans mon travail.

Par ailleurs, je souhaite adresser ma sincère reconnaissance non seulement au Professeur François Sidoroff qui a accepté de me faire l'honneur de présider le jury, mais aussi aux Professeurs Olivier Allix et René De Borst pour avoir rapporté sur ce mémoire. Un grand merci également à MM. Stéphane Andrieux, Jérôme Bonini, Hariddh Bung et Ton Lubrecht pour leur participation au jury en tant qu'examinateurs ou invités.

Tout au long de la thèse, j'ai été amené à travailler en collaboration avec un certain nombre de personnes. Je tiens, à ce titre, à remercier en premier le CEA Saclay, et notamment les membres du labo DYN dans son ensemble. Dans cette équipe, je tiens à citer Hariddh Bung, Pascal Galon et Michel Lepareux avec qui j'ai partagé joies et déboires de la programmation, ainsi que Laurent Borsoi pour nos longues discussions. Mes remerciements vont aussi à Mme Isabelle Renard et MM. Jérôme Bonini, Stéphane Giusti et David Chevrolet de SNECMA Moteurs pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux. J'adresse également une pensée particulière à M. Thierry Grünenwald du CEA Valduc, à MM. Pierre Chevrier et Xavier Boidin du LPMM, à M. Jean-François Deü du CNAM et à mes secrétaires préférées, à savoir Marie-Claude du CEA Saclay, France et Anne-Marie du LaMCoS et Marie d'ASINSA.

C'est ici également pour moi l'occasion de témoigner de mon amitié à l'ensemble des membres du laboratoire, et en particulier à ceux avec qui j'ai partagé ce que nous appelons notre bureau. Merci donc à Manue (pour m'avoir supporter), Pauline, Zouzou, Fabrice, Pedro et Jean-Claude (pour ses blagues).

En ce qui concerne Mme Hélène, Chouchou, Bobor, Tigro et Ivan, je leur réserve cet espace particulier. Grâce à eux, et au-délà de l'ambiance quotidienne qu'ils pouvaient mettre au labo, ils m'ont fait découvrir maintes et maintes choses... de la tête de veau à la saucisse de choux, du Beaujolais au Gigondas, de la Chartreuse aux confins de la Tarentaise. Je souhaite que la nouvelle génération, en l'occurrence Thomas, Tomtom et Steph (s'il reste des fautes d'orthographe dans ce mémoire, c'est à lui qu'il faut s'adresser!) sache perpétuer cette dynamique, mais je n'en doute pas vu le niveau relativement bas qu'ils peuvent atteindre parfois. De mon côté, j'ose espérer leur avoir apporté, en plus de mon amitié, un soupçon de culture musicale... de Desireless à La Compagnie Créole, de Johnny à Gotainer.

Pour m'avoir également accompagné, je tiens aussi à remercier mes anciens camarades thésards (ou non... paix à leur cerveau) de Cachan, à savoir, Braj, Christophe, Hervé, JP, Staffe, Totor, Vincent et Will.

Enfin, j'adresse une pensée particulière à ma petite famille, ma mère et mon père, ma soeur et mon beau-frère (et ma toutoune), ainsi qu'à Céline pour leur soutien au cours de toutes ces années.

## Table des matières

	Tabl	e des n	natières	i
	Tabl	e des fi	gures	V
	Liste	e des ta	bleaux	vii
	Intro	oductio	n	1
1	Etat	de l'ar	$\mathbf{t}$	5
	1.1	Les scl	hémas d'intégration numérique de Newmark	6
		1.1.1	Présentation générale	6
		1.1.2	Convergence des schémas numériques de Newmark	8
		1.1.3	Résumé	11
	1.2		d'endommagement macroscopique	11
	1.3		blème de localisation	14
		1.3.1	Le phénomène de localisation	15
		1.3.2	Le modèle du second gradient	17
		1.3.3	Le modèle de plasticité dépendant du taux de déformation	18
		1.3.4	Les autres solutions	18
		1.3.5	Bilan	19
	1.4		èse	19
2	L'en	domma	gement à effet retard	21
	2.1	Motiva		23
	2.2	Etude	des propriétés du modèle	24
		2.2.1	Modélisation élastique endommageable classique	24
		2.2.2	Modèle à endommagement retardé	28
	2.3	Conve	rgence numérique	34
		2.3.1	Convergence en temps	35
		2.3.2	Convergence en espace	37
		2.3.3	Convergence en espace et en temps	41
		2.3.4	Conclusions	43
	2.4	Déterr	nination uni-dimensionnelle de la longueur caractéristique	44
		2.4.1	Détermination analytique de la longueur caractéristique	44
		2.4.2	Validation du modèle analytique	52
		2.4.3	Conclusions	55

	2.5	Implantation numérique	. 56
		2.5.1 Plasticité couplée à l'endommagement retardé	. 57
		2.5.2 Integration numérique du modèle	. 59
		2.5.3 Exemple bi-dimensionnel	. 65
	2.6	Conclusions et perspectives	. 71
	2.7	Synthèse	
3	Iden	tification des paramètres : méthodologie et applications	75
	3.1	Problématique	
	3.2	Description des essais plaque/plaque	
		3.2.1 Caractéristiques générales	
		3.2.2 Mise en place expérimentale	. 86
		3.2.3 Courbe d'écaillage	
	3.3	Etude théorique : cas de l'Au4G1-T4	. 91
		3.3.1 Etude d'une simulation	. 92
		3.3.2 Identification par la méthode Chevrier	. 96
		3.3.3 Identification par la vitesse de face arrière	. 101
		3.3.4 Conclusion	. 105
	3.4	Etudes pratiques : le 7020-T6 et le Ta6V	. 107
		3.4.1 Cas de l'alliage d'aluminium 7020-T6	. 107
		3.4.2 Cas de l'alliage de titane Ta6V	. 115
	3.5	Conclusions et perspectives	
	3.6	Synthèse	. 119
4	App	lication : perforation d'une plaque en acier	121
	4.1	Description du matériau	. 123
	4.2	Description et résultats des expériences	. 124
		4.2.1 Protocole expérimental	. 124
		4.2.2 Résultats des essais	. 125
	4.3	Simulations des essais	. 126
		4.3.1 Description de la simulation	
		4.3.2 Simulations des essais sans effet retard	. 129
		4.3.3 Simulations des essais avec effet retard	. 131
		4.3.4 Bilan	. 134
	4.4	Simulations d'un essai fictif à $100m/s$	. 136
		4.4.1 Simulations sans effet retard	. 136
		4.4.2 Simulations avec effet retard	. 137
		4.4.3 Bilan	. 139
	4.5	Conclusions	. 139
	4.6	Synthèse	. 141
	Con	clusions et perspectives	143
	Bibl	iographie	147
	Δnn	eve A : détermination analytique de $\ell^{car}$ sur un modèle discret	155

Annexe B : exemple de jeu de données Europlexus	161
Annexe C : résumé des simulations effectuées avec l'Au4G1-T4	165
Annexe D : évolution du profil d'endommagement pour l'essai P12	169

## Table des figures

1.1	Méthodes d'intégration	7
1.2	Vue 2D schématisée d'une structure endommagée	12
1.3	Exemple de sensibilité au maillage	
1.4	Poutre uni-dimensionnelle	
2.1	Courbe contrainte/déformation du modèle classique	26
2.2	Poutre uni-dimensionnelle	28
2.3	Profil d'endommagement sans effet retard	29
2.4	Courbes contrainte/déformation avec le modèle à effet retard	31
2.5	Evolution de $D^{nc} - D$ en fonction de la déformation	32
2.6	Profil d'endommagement avec effet retard	33
2.7	Influence de la vitesse de sollicitation sur $\ell^{car}$	34
2.8	Convergence en temps pour le déplacement	37
2.9	Convergence en temps pour l'endommagement	38
2.10	Convergence en espace pour le déplacement	39
2.11	Convergence en espace pour l'endommagement	40
2.12	Convergence en espace et en temps pour le déplacement	41
2.13	Convergence en espace et en temps pour l'endommagement	42
2.14	Modèle d'endommagement retardé simplifié	46
2.15	Modèle d'endommagement retardé simplifié en contrainte	47
	Bornes du modèle simplifié d'endommagement retardé	49
2.17	Validation des hypothèses	53
	Comparaison des résultats numériques et analytiques	54
2.19	Influence des paramètres	55
	Maillage de l'essai chapeau	66
2.21	Courbe contrainte effective/déformation pour l'Au4G1-T4	67
	Modèle uni-dimensionnel équivalent à la perforation	69
	Résultats de la simulation 'chapeau' sans effet retard	73
2.24	Résultats de la simulation 'chapeau' avec effet retard	74
3.1	Domaine de différents dispositifs expérimentaux	79
3.2	Schéma simplifié d'un impact plaque/plaque	
3.3	Diagramme de Lagrange : cas élastique sans écaille	
3.4	Diagramme $(p, u)$ : cas élastique sans écaille	82
3.5	Diagramme de Lagrange : cas élastique avec écaille	83
3.6	Diagramme $(p, u)$ : cas élastique avec écaille	84

3.7	Diagramme de Lagrange : cas plastique avec écaille 85
3.8	Coupe 2D du lanceur
3.9	Vue 3D du lanceur
	Photos de cibles écaillées
3.11	Courbe d'écaillage du 7020-T6
3.12	Exemple d'évolution de vitesse de face arrière
3.13	Vitesse de face arrière expérimentale (Ta6V)
3.14	Maillage optimisé des plaques
3.15	Profil de la contrainte axiale
3.16	Profil de l'endommagement
3.17	Déformée de la plaque à la fin du calcul
3.18	Courbe $\sigma/t^c$ pour l'Au4G sans effet retard
3.19	Courbe $\sigma/t^c$ pour l'Au4G avec effet retard (référence)
3.20	Courbe $\sigma/t^c$ pour l'Au4G avec effet retard (influence de $a$ ) 102
3.21	Courbe $\sigma/t^c$ pour l'Au4G avec effet retard (influence de $\tau^c$ ) 102
3.22	Vitesse de face arrière pour l'Au4G sans effet retard
3.23	Vitesse de face arrière pour l'Au4G avec effet retard (référence) 104
3.24	Influence de la constante $a$
3.25	Influence du temps caractéristique
3.26	Evolution de la déformation à rupture
3.27	Courbes contrainte/déformation pour le 7020-T6
3.28	Courbe d'écaillage du 7020-T6 et résultats numériques
3.29	Profils de face arrière du Ta6V et résultats num. sans effet retard 117
3.30	Profils de face arrière du Ta6V et résultats num. avec effet retard 118
4	
4.1	Courbe contrainte effective/déformation pour l'inox
4.2	Photo de la tour de chute Orion et du poinçon plat utilisé
4.3	Photos des plaques après essais
4.4	Maillage (niveau 6) de la plaque
4.5	Comparaison du déplacement pour l'essai P9
4.6	Déformation plastique cumulée après impact pour l'essai P9 130
4.7	Comparaison de la vitesse pour l'essai P7 (sans retard)
4.8	Comparaison de la vitesse pour l'essai P7 (avec retard)
4.9	Vitesses résiduelles pour les simulations P7 et P12
	Comparaison de la vitesse pour l'essai P12 (sans retard)
4.11	1 ,
	Comparaison de la vitesse pour l'essai P12 (avec retard)
4.13	Comparaison de l'endommagement pour l'essai P12 (avec retard) 140

## Liste des tableaux

1.1	Resume des proprietes des schemas numeriques de Newmark 11
2.1	Propriétés de la simulation uni-dimensionnelle
2.2	Convergence en temps pour le déplacement
2.3	Convergence en temps pour l'endommagement
2.4	Convergence en espace pour le déplacement
2.5	Convergence en espace pour l'endommagement
2.6	Convergence en espace et en temps pour le déplacement
2.7	Convergence en espace et en temps pour l'endommagement 42
2.8	Propriétés quasi-statiques de l'Au4G1-T4
0.1	T
3.1	Longueurs caractéristiques pour l'Au4G1-T4
3.2	Résumé des valeurs de $V^{max} - V^{min}$
3.3	Caractéristiques mécaniques de l'alliage d'aluminium 7020-T6 108
3.4	Valeurs des constantes du modèles de Klepaczko pour le 7020-T6 109
3.5	Valeurs des constantes de la loi d'évolution de l'endommagement 111
3.6	Valeurs des constantes de la fonction $\Omega$
3.7	Valeurs des paramètres de l'endommagement retardé pour le 7020-T6 114
3.8	Caractéristiques mécaniques de l'alliage de titane Ta6V
3.9	Caractéristiques mécaniques du cuivre
4 1	C
4.1	Caractéristiques mécaniques de l'inox 304L
4.2	Valeurs des constantes de la loi d'évolution de l'endommagement 124
4.3	Caractéristiques de la tour de chute Orion
4.4	Essais de perforation avec embout plat
4.5	Résultats des essais de perforation avec embout plat

## Introduction

La simulation numérique fait aujourd'hui partie intégrante du processus de conception et de validation des pièces et structures développées dans le contexte industriel. Elle s'est imposée comme un outil indissociable de l'expérience acquise et des essais expérimentaux, notamment pour diminuer les coûts impliqués par ses derniers. Depuis l'apparition des premiers codes de calcul par éléments finis, un certain nombre d'évolutions ont eu lieu ouvrant de nouvelles perspectives. D'une part, la puissance de calcul a augmenté, et continue d'augmenter, de manière exponentielle permettant de simuler des cas de plus en plus grand avec une précision de plus en plus fine. D'autre part, la connaissance du comportement physique des matériaux s'est considérablement accrue. Nous restreignant dès à présent aux matériaux métalliques, un vaste choix de modélisations de leurs comportements, validées tant microscopiquement que macroscopiquement, ainsi que les essais associés permettant de les caractériser, sont désormais disponibles. Toutes sortes de modèles plastiques, dépendant éventuellement de la vitesse de déformation ou de la température, existent en effet et sont d'ores et déjà implantés dans les codes de calcul industriels les plus répandus. Tant que les études effectuées se cantonnent à leur domaine de validité, ces modèles donnent des résultats très satisfaisants. Dans un souci toujours plus grand de décrire la réalité, le monde industriel, et en particulier nos partenaires dans cette étude que sont le Commissariat à l'Energie Atomique et la SNECMA, s'intéressent actuellement à prévoir la rupture ductile des métaux sous choc, et ce afin d'optimiser au mieux les structures. Ce domaine fait aujourd'hui office de nouvelle frontière à franchir dans la justesse des simulations de problèmes industriels.

#### Cette étape se heurte à plusieurs difficultés :

- la première concerne le choix et l'identification d'une modélisation adéquate du phénomène de la rupture. Encore une fois, un certain nombre de modèles existent. Dans le cadre de la rupture ductile des métaux dans lequel nous nous plaçons, l'introduction d'une variable d'endommagement semble particulièrement adaptée. Ce domaine jouit en effet d'un double avantage. Tout d'abord, la très large bibliographie sur le sujet propose des modèles appropriés ainsi que les méthodes de caractérisation ad hoc. Ensuite, les principaux modèles d'endommagement ont déjà été intégrés dans les codes de calcul classiques.
- le choix de l'endommagement comme moyen de décrire la rupture introduit cependant une dépendance des résultats au maillage lors de simulations par éléments finis, ce qui n'est guère physique. Celui-ci se traduit par le problème de localisation abusive de la déformation (et de l'endommagement).

Une nouvelle fois, divers modèles ont été proposés dans la bibliographie pour résoudre ce dernier problème, d'autant plus qu'il ne concerne pas uniquement les seuls matériaux endommageables, mais également les matériaux dits adoucissants. Ils consistent en général à enrichir la description du matériau en introduisant par la même occasion de nouveaux paramètres. Ceux-ci correspondent généralement soit à une longueur interne, soit à un temps interne; ces grandeurs internes se voulant être l'image de la taille d'une zone d'influence au niveau microscopique ou d'une viscosité respectivement. Si ce domaine est largement examiné depuis plusieurs années, aucun modèle n'est réellement pour l'heure intégré dans un code de dynamique rapide à usage industriel. Plusieurs motifs peuvent expliquer ce constat. Le premier est la relative difficulté à intégrer ces modèles sans alourdir considérablement l'architecture du code et les temps de calcul. Le second réside dans l'identification des paramètres supplémentaires (longueur, temps ou autres...) associés au modèle permettant d'éviter la localisation.

L'évolution actuelle des moyens de calcul, ainsi que l'apparition de nouvelles techniques comme les techniques de remaillage automatique ou de décomposition de domaines, semblent pouvoir apporter à l'avenir une réponse adéquate au premier problème. Concernant le second, les choses paraissent moins claires et, selon les modèles, la méthode d'identification reste le plus souvent incertaine.

L'étude que nous proposons de mener se situe dans le cadre des impacts dynamiques sur des structures métalliques. La modélisation associée à ce type de matériaux est généralement isotrope et prend en compte la plasticité et l'éventuelle dépendance de celle-ci à d'autres variables. Ayant choisi de décrire la rupture à l'aide d'une variable d'endommagement, le problème de localisation va donc inévitablement se poser. Afin de l'éviter, on propose d'utiliser un modèle d'endommagement particulier dit à effet retard, effet qui consiste, on le verra, à limiter le taux de croissance de l'endommagement en introduisant notamment un temps caractéristique. Dans le cadre de sollicitations dynamiques, il permet de rendre les résultats objectifs vis-à-vis du maillage et donc d'obtenir, par exemple, des profils de zone complètement endommagée non-réduits à un élément. Ce modèle a été développé, et l'est encore, au Laboratoire de Mécanique et de Technologie de Cachan afin de décrire correctement la rupture des matériaux composites stratifiés [Ladevèze, 1992, Allix et Deü, 1997]. Les nombreuses études effectuées jusqu'alors se concentraient particulièrement sur l'introduction d'un retard dans les lois de type élastique endommageable qui conviennent à la modélisation des composites.

Pour utiliser le modèle d'endommagement retardé dans le contexte de notre étude, il va donc falloir tout d'abord en adapter l'écriture aux modèles que nous serons amener à rencontrer. Une fois ce travail effectué, se poseront à nous les deux problèmes classiques que nous avons évoqués précédemment.

Concernant le premier de ces deux problèmes (à savoir l'implantation dans un code et la durée excessive des simulations), l'implantation du modèle ne pose a priori pas de difficultés majeures. Par ailleurs, le modèle d'endommagement à effet retard introduit un temps caractéristique, mais, dans l'objectif d'utiliser les techniques numériques adéquates citées précédemment, l'intérêt de le traduire sous forme de

longueur est indéniable. Cela doit permettre en effet de donner une taille caractéristique de la zone complètement endommagée et donc de choisir judicieusement la finesse du maillage dans la zone concernée (avant le calcul ou, à l'avenir, en cours de calcul en utilisant une des techniques évoquées).

Le deuxième problème, c'est-à-dire celui de l'identification des deux paramètres du modèle d'endommagement retardé, a déjà fait l'objet de traitements théoriques, mais aucun n'a abouti pour l'instant à une identification effective des paramètres. Les prérequis nécessaires à cette étape sont, d'une part, la connaissance de la loi d'écrouissage du matériau et de ses dépendances supplémentaires éventuelles et, d'autre part, la connaissance de la loi d'endommagement en quasi-statique. Il semble ensuite possible de parvenir à effectuer correctement l'identification à partir de résultats d'essais de dynamique rapide comme les essais d'impact de plaques.

Une fois ces deux problèmes résolus, la simulation d'un cas industriel de rupture sous impact de bout en bout est alors envisageable.

Conformément au contexte qui vient d'être décrit, le travail qui suit propose donc de décrire successivement les points suivants :

- dans un premier temps, les éléments contextuels de l'étude sont brièvement présentés. Avant de se concentrer par la suite sur la simulation dynamique de pièces métalliques sous impact, le premier chapitre s'attache donc à décrire avant tout les schémas d'intégration de Newmark, outil indispensable à l'intégration des équations d'équilibre lors d'un calcul de dynamique. Ensuite, après une introduction à la notion d'endommagement, une revue des principaux modèles permettant d'éviter la localisation est effectuée.
- le second chapitre s'intéresse plus particulièrement au modèle d'endommagement à effet retard dont les principales équations et fondements sont détaillés préalablement. La suite de ce chapitre se focalise ensuite sur deux points. Le premier concerne l'établissement d'une formule permettant d'évaluer, à partir des données de la simulation et des matériaux, la taille de la zone complètement endommagée. Ce travail est précédé d'une étude de convergence, permettant de garantir la qualité des résultats qui la succéderont. Le second concerne l'implantation d'une loi de plasticité de von Mises couplée à l'endommagement retardé dans le code de dynamique explicite Europlexus [Europlexus , 2002].
- le troisième chapitre aborde le problème de l'identification des deux paramètres de l'endommagement retardé. Le détail des essais d'impact de plaques permettra d'abord de comprendre pourquoi ce type d'essai est particulièrement adapté à notre problématique. Suit ensuite un premier cas théorique. Celui-ci, à partir uniquement de simulations, va permettre de mettre en place deux protocoles d'identification des paramètres qui seront ensuite appliqués tour à tour à deux matériaux distincts.
- enfin, le dernier chapitre sera l'occasion d'appliquer le modèle à un cas industriel, à savoir la perforation d'une plaque, et, du même coup, d'en exposer les différents avantages et inconvénients.

## Chapitre 1

## Etat de l'art

Dans ce premier chapitre, nous proposons d'introduire progressivement les différentes notions aidant à la compréhension de l'étude qui suit. Dans le cadre de la rupture de pièces métalliques sous sollicitations dynamiques, nous allons étudier successivement les schémas d'intégration numérique de Newmark et la notion d'endommagement qui servira ultérieurement à modéliser la rupture. Enfin, le problème de dépendance au maillage sera évoqué et les principaux modèles existants passés brièvement en revue.

#### Sommaire

1	.1	Les sc	hémas d'intégration numérique de Newmark	6
		1.1.1	Présentation générale	6
		1.1.2	Convergence des schémas numériques de Newmark	8
		1.1.3	Résumé	11
1	.2	Notion	n d'endommagement macroscopique	11
1	.3	Le pro	blème de localisation	14
		1.3.1	Le phénomène de localisation	15
		1.3.2	Le modèle du second gradient	17
		1.3.3	Le modèle de plasticité dépendant du taux de déformation	18
		1.3.4	Les autres solutions	18
		1.3.5	Bilan	19
1	.4	Synthe	èse	19

Le présent chapitre dresse l'état de l'art des principaux domaines afférents à l'étude que nous effectuons ensuite. Celle-ci se concentre sur les sollicitations dynamiques des matériaux métalliques. La modélisation du comportement des métaux que nous serons amenés à faire pourra, selon les cas, être élastique endommageable, élasto-plastique endommageable ou visco-plastique endommageable. Le matériau sera supposé isotrope.

Dans un premier temps, les schémas d'intégration numérique de Newmark, qui incluent le schéma explicite habituel pour les codes de calcul dynamiques (et en particulier pour Europlexus [Europlexus , 2002] que nous utiliserons ensuite) sont décrits. Cette description nous servira lors de la détermination de l'ordre de convergence de notre modèle. Cette première partie est suivie d'une discussion sur la notion d'endommagement, clef de voûte de notre étude. C'est en effet l'endommagement qui nous permettra de représenter la rupture de nos structures. Celui-ci constitue par ailleurs l'origine du problème de localisation artificielle de la déformation que nous abordons ensuite. Après une description succincte de l'origine mathématique de la localisation, différents modèles de la littérature qui permettent de l'éviter, en introduisant soit une longueur caractéristique soit un temps caractéristique, sont exposés. Le détail des modèles de plasticité utilisés ultérieurement n'est pas présenté, car très bien connu dans l'ensemble.

### 1.1 Les schémas d'intégration numérique de Newmark

Ce type de schémas [Newmark , 1959] est utilisé notamment pour l'intégration en temps de problèmes de dynamique transitoire des structures discrétisées en espace. Il s'agit maintenant de résoudre :

$$\begin{cases}
M\ddot{U} + KU = F^{ext}(t) \\
\dot{U}(t_0) = \dot{U}^0 \\
U(t_0) = U^0
\end{cases}$$
(1.1)

où M est la matrice de masse et K la matrice de rigidité. On se contente ici d'un modèle sans amortissement. Dans le cas contraire, on ajouterait le terme  $C\dot{U}$  dans l'équation d'équilibre.

### 1.1.1 Présentation générale

Il s'agit d'une famille de méthodes numériques d'intégration en temps à un pas qui s'appuie sur le développement en série de Taylor du déplacement et de la vitesse [Gérardin et Rixen, 1993] :

$$\begin{cases}
U^{t+\Delta t} = U^t + \Delta t \dot{U}^t + \int_t^{t+\Delta t} (t + \Delta t - \tau) \ddot{U}(\tau) d\tau \\
\dot{U}^{t+\Delta t} = \dot{U}^t + \int_t^{t+\Delta t} \ddot{U}(\tau) d\tau
\end{cases}$$
(1.2)

où  $\Delta t$  est le pas de temps dont le choix, et ses contraintes, seront détaillés ultérieurement et où  $U^t$ ,  $\dot{U}^t$  et  $\ddot{U}^t$  sont respectivement les vecteurs déplacement, vitesse et accélération au pas de temps t de la structure discrétisée. On fait alors le calcul de l'intégrale en approximant la forme de la variable à intégrer sur l'intervalle considéré (ici l'accélération). Ainsi :

$$\begin{cases} \int_{t}^{t+\Delta t} \ddot{U}(\tau)d\tau \simeq (1-\gamma)\Delta t \ddot{U}^{t} + \gamma \Delta t \ddot{U}^{t+\Delta t} \\ \int_{t}^{t+\Delta t} (t+\Delta t - \tau) \ddot{U}(\tau)d\tau \simeq (\frac{1}{2}-\beta)\Delta t^{2} \ddot{U}^{t} + \beta \Delta t^{2} \ddot{U}^{t+\Delta t} \end{cases}$$
(1.3)

où  $\gamma$  et  $\beta$  sont deux paramètres qui, selon leurs valeurs, permettent de retrouver les différentes formules d'intégration directe comme cela est présenté sur la figure 1.1.

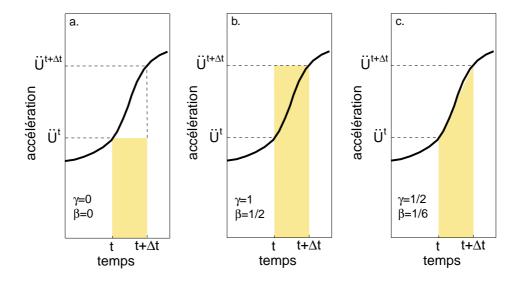


Fig. 1.1 – Formules d'intégration classiques selon la valeur de  $\gamma$  et de  $\beta$ . Pour le graphique a., on a un schéma d'Euler explicite, pour b., un schéma d'Euler implicite et pour c. une règle du trapèze.

En substituant l'expression des intégrales dans les séries de Taylor, on obtient alors les équations classiques de la famille des schémas de Newmark :

$$\begin{cases}
U^{t+\Delta t} = U^t + \Delta t \dot{U}^t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{U}^t + \frac{\Delta t^3}{6} 6\beta \left( \frac{\ddot{U}^{t+\Delta t} - \ddot{U}^t}{\Delta t} \right) \\
\dot{U}^{t+\Delta t} = \dot{U}^t + \Delta t \ddot{U}^t + \frac{\Delta t^2}{2} 2\gamma \left( \frac{\ddot{U}^{t+\Delta t} - \ddot{U}^t}{\Delta t} \right)
\end{cases}$$
(1.4)

On peut écrire ces égalités différemment en faisant intervenir ce que l'on appelle les prédicteurs du schéma de Newmark et que l'on note  ${}^pU^t$  pour le prédicteur du déplacement au temps t et  ${}^p\dot{U}^t$  pour le prédicteur de la vitesse au temps t qui sont des quantités connues explicitement à partir du pas de temps considéré :

$$\begin{cases} {}^{p}U^{t} = U^{t} + \Delta t \dot{U}^{t} + \Delta t^{2} \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ddot{U}^{t} \\ {}^{p}\dot{U}^{t} = \dot{U}^{t} + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{U}^{t} \end{cases}$$

$$(1.5)$$

De telle sorte que :

$$\begin{cases} U^{t+\Delta t} = {}^{p} U^{t} + \Delta t^{2} \beta \ddot{U}^{t+\Delta t} \\ \dot{U}^{t+\Delta t} = {}^{p} \dot{U}^{t} + \Delta t \gamma \ddot{U}^{t+\Delta t} \end{cases}$$
(1.6)

En injectant ces formulations dans l'équation d'équilibre 1.1, on obtient donc une relation entre les quantités au temps t et l'accélération au temps  $t + \Delta t$ .

$$(\beta \Delta t^{2}K + M)\ddot{U}^{t+\Delta t} = F^{ext} {}^{t+\Delta t} - K \left( U^{t} + \Delta t \dot{U}^{t} + \Delta t^{2} \left[ \frac{1}{2} - \beta \right] \ddot{U}^{t} \right)$$
(1.7)  
$$= F^{ext} {}^{t+\Delta t} - K^{p}U^{t}$$
(1.8)

Connaissant donc toutes les quantités au temps t et les efforts extérieurs au temps  $t + \Delta t$ , il est donc possible de déduire (en inversant notamment la matrice  $(\beta \Delta t^2 K + M)$ ) l'accélération au temps  $t + \Delta t$ . Comme les prédicteurs au temps t sont explicitement connus (voir équations 1.5), il est donc également possible d'en déduire, en utilisant les équations 1.6, le déplacement et la vitesse au temps  $t + \Delta t$ . Le caractère implicite ou explicite de la méthode apparaît par ailleurs nettement dans l'équation 1.7. Le schéma sera explicite si et seulement si  $\beta$  est nul. Dans ce cas, la résolution est simple puisque la matrice de masse M est généralement diagonale (ou diagonalisée)  $^1$ .

#### 1.1.2 Convergence des schémas numériques de Newmark

Le choix adéquat des paramètres  $\gamma$  et  $\beta$  permet aux schémas de Newmark d'être convergents, c'est-à-dire que, à un temps t fixé,  $U^t$  tend vers U(t) quand  $\Delta t$  tend vers 0. Afin d'exprimer les conditions de convergence des schémas de Newmark, nous allons exprimer la stabilité et la consistance de ces schémas, sachant que stabilité et consistance sont une condition nécessaire et suffisante de convergence de la méthode [Hugues , 1987]. Avant d'étudier la stabilité et la consistance, nous allons nous ramener à un problème plus simple, mais pas pour autant restrictif, qui est le problème de vibration libre [Hugues , 1987] ; on a donc :

$$\ddot{U}^t = -\omega^2 U^t \tag{1.9}$$

où  $\omega$  est la pulsation de la vibration. En utilisant cette dernière équation et les équations 1.4, on obtient donc :

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Cela n'est pas vrai dans le cas d'un schéma implicite ( $\beta \neq 0$ ) pour matrice ( $\beta \Delta t^2 K + M$ ).

$$\begin{bmatrix} 1 + \Delta t^2 \omega^2 \beta & 0 \\ \Delta t \omega^2 \gamma & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{t+\Delta t} \\ \dot{U}^{t+\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \Delta t^2 \omega^2 \left(\frac{1}{2} - \beta\right) & \Delta t \\ -\Delta t \omega^2 (1 - \gamma) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^t \\ \dot{U}^t \end{bmatrix}$$
(1.10)

En posant:

$$\begin{cases}
A_{1} = \begin{bmatrix}
1 + \Delta t^{2} \omega^{2} \beta & 0 \\
\Delta t \omega^{2} \gamma & 1
\end{bmatrix} \\
A_{2} = \begin{bmatrix}
1 - \Delta t^{2} \omega^{2} \left(\frac{1}{2} - \beta\right) & \Delta t \\
-\Delta t \omega^{2} (1 - \gamma) & 1
\end{bmatrix} \\
X^{t} = \begin{bmatrix}
U^{t} \\
\dot{U}^{t}
\end{bmatrix}$$
(1.11)

on a finalement  $^2$ :

$$A_1 X^{t+\Delta t} = A_2 X^t \tag{1.12}$$

#### 1.1.2.1 Stabilité

Un schéma d'intégration est dit stable s'il existe un pas critique  $\Delta t^{crit}$  tel que pour tout  $\Delta t \in [0, \Delta t^{crit}]$ , une perturbation finie du vecteur d'état à l'instant t n'entraîne qu'une modification non-croissante du vecteur d'état [Gravouil, 2000]. Supposons pour cela un équilibre  $X^t$  que nous perturbons par  $\delta X^t$ , on a alors :

$$X^{t+\Delta t} = A_1^{-1} A_2 (X^t + \delta X^t) = X^t + A_1^{-1} A_2 \delta X^t$$
 (1.13)

Ainsi, la perturbation engendrée au pas de temps suivant  $\delta Xt + \Delta t$  est telle que :

$$\delta X^{t+\Delta t} = A_1^{-1} A_2 \delta X^t \tag{1.14}$$

Par une récurrence simple, on obtient facilement que :

$$\delta X^{t+j\Delta t} = (A_1^{-1} A_2)^j \delta X^t \tag{1.15}$$

La stabilité implique donc que les valeurs propres simples de A soient de norme inférieure ou égale à 1 et que les valeurs propres multiples de norme strictement inférieure à 1. Les deux conditions obtenues sont alors :

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Avec ce formalisme, le problème de l'équation 1.1 s'écrit  $A_1X^{t+\Delta t} = A_2X^t + B^t$  où  $B^t = \begin{pmatrix} (1-\gamma)\Delta t F^{ext} & t + \gamma \Delta t F^{ext} & t + \Delta t \\ (\frac{1}{2}-\beta)\Delta t^2 F^{ext} & t + \beta \Delta t^2 F^{ext} & t + \Delta t \end{pmatrix}$  ou encore  $X^{t+\Delta t} = A_1^{-1}A_2X^t + L^t$  avec  $L^t = A_1^{-1}B^t$ .

$$\begin{cases} \gamma \ge \frac{1}{2} \\ 2 + \frac{\Delta t \omega (2\beta - \gamma)}{1 + \beta \Delta t^2 \omega^2} \ge 0 \end{cases}$$
 (1.16)

On distingue dès lors deux cas de stabilité selon la valeur du coefficient  $\gamma$  et  $\beta$ : – le schéma est inconditionnellement stable si :

$$\frac{1}{2} \le \gamma \le 2\beta \tag{1.17}$$

Le caractère implicite du schéma est une condition nécessaire dans ce cas  $(\beta \ge \frac{1}{2})$ .

- Le schéma est stable lorsque :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \le \gamma \\ 2\beta \le \gamma \end{cases} \tag{1.18}$$

sous réserve que le pas de temps  $\Delta t$  soit inférieur au pas de temps critique  $\Delta t^{crit}$  qui s'écrit :

$$\Delta t^{crit} = \frac{1}{\omega^{max} \sqrt{\frac{\gamma}{2} - \beta}} \tag{1.19}$$

où  $\omega^{max}$  est la plus grande pulsation propre de la structure discrétisée. Celleci est majorée par le maximum des  $\omega^{max}$  des éléments pris individuellement [Gravouil , 2000], c'est-à-dire par la pulsation propre associée au plus petit élément. Lors d'une étude uni-dimensionnelle, par exemple,  $\omega^{max}$  sera déterminé par :

$$\omega^{max} = \frac{2c}{\ell} \tag{1.20}$$

où c est la célérité des ondes dans le matériau considéré, et  $\ell$  la longueur du plus petit élément  $^3$ .

Notons immédiatement que, selon l'histoire des éléments considérés (déformation...) et le type de matériaux étudiés (plastique, visqueux, endommageable,...), la célérité c comme la longueur  $\ell$  seront amenées à évoluer au cours des calculs. Il faudra de manière indispensable actualiser le pas de temps critique  $\Delta t^{crit}$  en conséquence afin de garantir la stabilité tout au long du calcul.

 $<sup>^3</sup>$ En deux ou trois dimensions, la formule utilisée est identique.  $\ell$  correspond alors à la plus petite longueur caractéristique des éléments.

#### 1.1.2.2 Consistance

Un schéma d'intégration numérique est dit consistant si  $|\tau(t)| \leq C \Delta t^k$ , ceci quel que soit le temps t considéré, où C est une constante indépendante de  $\Delta t$ , k>0 est l'ordre de convergence et  $\tau(t)$  l'erreur locale de troncature définie par  $\Delta t \tau(t) = X^{t+\Delta t} - A_1^{-1} A_2 X^t - L^t$ . On peut montrer [Hugues , 1987] que les schémas de Newmark sont consistants et que leur ordre de convergence est égal à 2 si  $\gamma=\frac{1}{2}$  et à 1 si  $\gamma\neq\frac{1}{2}$ .

#### 1.1.3 Résumé

Selon les valeurs des coefficients caractéristiques, les propriétés des schémas numériques varient. Le tableau 1.1 résume les différentes caractéristiques correspondantes [Goudreau et Taylor, 1972, Dureisseix, 2003].

Algorithme	type	$\gamma$	β	Stabilité $\omega^{max} \Delta t^{crit}$	Ordre de précision
purement explicite	exp.	0	0	0	1
différence centrée	exp.	1/2	0	2	2
Fox-Goodwin	imp.	1/2	1/12	2.45	2
accélération linéaire	imp.	1/2	1/6	3.46	2
accélération moyenne	imp.	1/2	1/4	$\infty$	2
acc. moyenne modifiée	imp.	$1/2 + \gamma$	$(1+\gamma)^2/4$	$\infty$	1

Tab. 1.1 – Résumé des propriétés des schémas numériques de Newmark

Dans le cadre d'une étude dynamique, un schéma explicite est généralement utilisé (comme pour Europlexus par exemple). Nous considérons donc systématiquement le schéma de Newmark aux différences centrées dont l'ordre de convergence est égal à 2. Le paramètre  $\gamma$  est donc égal à  $\frac{1}{2}$  et le paramètre  $\beta$  est nul. Ceci implique en particulier une condition, communément appelée condition de Courant, sur le choix du pas de temps qui s'écrit :

$$\Delta t \le \Delta t^{crit} = \frac{\ell}{c} \tag{1.21}$$

où  $\ell$  correspond donc à la plus petite longueur caractéristique de la structure discrétisée  $^4$ .

### 1.2 Notion d'endommagement macroscopique

Cette section s'attache à décrire le formalisme simple d'endommagement qui sera utilisé tout au long de l'étude. La notion d'endommagement a été introduite

 $<sup>\</sup>frac{4\ell}{c}$  correspond au temps mis par l'onde à traverser la plus petite longueur de l'élément le plus petit, la nécessité pour  $\Delta t$  d'être au plus égal à cette valeur afin de pouvoir modéliser les phénomènes qui interviennent à cette échelle s'interprète alors facilement.

dans les années 50 par Kachanov [Kachanov, 1958] afin de modéliser la rupture par fluage des métaux en prenant en compte la détérioration progressive du matériau. Au cours des années 70, Lemaître et Chaboche notamment [Lemaître, 1996a, Lemaître et Chaboche, 1996b] ont étendu cette notion à la rupture ductile.

Par définition, l'endommagement évalue le niveau de détérioration (fissure, cavité, ...) de la matière. Un matériau est donc vierge de tout endommagement s'il ne possède pas de fissures ou de cavités à l'échelle microscopique. A l'inverse, un matériau sera dit complètement endommagé lorsque l'élément de volume sera rompu.

Afin de représenter le niveau d'endommagement, une variable mécanique d'endommagement notée D est introduite. Effectuons, pour la définir, un zoom de la coupe d'un matériau classique  $^5$ ; celui-ci est schématisé sur la figure 1.2.

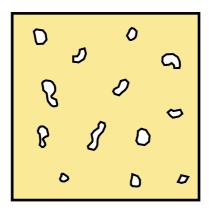


Fig. 1.2 – Vue 2D schématisée d'une structure endommagée

La surface de la coupe est égale à S. Notons maintenant  $\tilde{S}$  la surface de matériau résistant effectivement aux sollicitations extérieures ;  $\tilde{S}$  correspond donc à S à laquelle on soustrait les zones telles que les cavités, les zones relaxées, en prenant également en compte les diverses concentrations de contraintes, etc... La différence  $S^D = S - \tilde{S}$  est donc la surface ne participant pas à la résistance du matériau. Par définition, on notera :

$$D = \frac{S^D}{S} \tag{1.22}$$

Une hypothèse forte vient ici d'être faîte : celle de l'isotropie de l'endommagement. Rien n'impose en effet d'avoir le même endommagement selon le plan de coupe de notre matériau  $^6$ . On supposera donc tout au long de l'étude que l'orientation des fissures et cavités est distribuée de manière uniforme dans toutes les directions, et ce quel que soit le niveau d'endommagement. Ainsi, l'endommagement D est un

 $<sup>^5 \</sup>mathrm{Un}$  métal dans le cadre de notre étude.

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>Les procédés de fabrication orientent d'ailleurs bien souvent les défauts dans une direction privilégiée.

scalaire  $^7$  qui varie de 0 (la surface des cavités est nulles) pour le matériau nonendommagé à  $D^c$  avec  $D^c \leq 1$  pour le matériau rompu (le matériau est séparé en deux parties par une surface de vides). La croissance de cavités étant un phénomène irréversible, cette variation ne peut être que croissante.

L'introduction de la notion d'endommagement conduit à la notion de contrainte effective décrite par Rabotnov [Rabotnov , 1963] qui correspond à la contrainte rapportée à la section  $\tilde{S}$  résistant effectivement aux efforts. Afin de la définir simplement, le cadre élastique uni-dimensionnel est choisi. Classiquement, connaissant l'effort F appliqué à la surface S, la contrainte dite "usuelle" s'écrit :

$$\sigma = \frac{F}{S} \tag{1.23}$$

De toute évidence, en présence de défauts (caractérisés par  $S^D$ ), cette formulation n'est plus valable. C'est pourquoi nous définissons la contrainte effective  $\tilde{\sigma}$  égale au rapport de l'effort sur la surface participant effectivement à la résistance du matériau :

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{S}} \tag{1.24}$$

On a donc:

$$\sigma = \tilde{\sigma} \frac{\tilde{S}}{S} = \tilde{\sigma} (1 - D) \tag{1.25}$$

Une nouvelle hypothèse essentielle est alors effectuée : l'hypothèse d'équivalence en déformation. Tout comportement à la déformation d'un matériau endommagé est traduit par les lois de comportement du matériau vierge dans lesquelles on remplace la contrainte usuelle par la contrainte effective. Dans le cas de notre exemple, la relation de comportement va donc lier la déformation élastique  $\varepsilon_e$  à la contrainte effective comme suit :

$$\varepsilon_e = \frac{\tilde{\sigma}}{E} \tag{1.26}$$

où E est le module d'Young. Ceci permet de définir la relation suivante entre  $\varepsilon_e$  et  $\sigma$  :

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{(1-D)E} \tag{1.27}$$

Dans le cas de notre exemple simple, l'évolution de l'endommagement correspond donc bien à une détérioration des propriétés du matériau, en l'occurrence de son

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>Dans le cas de l'anisotropie, l'endommagement est représenté par un tenseur.

module d'Young. Pour un endommagement D fixé, le matériau se comporte comme un matériau sain de module d'Young  $\tilde{E} = E(1-D)$  moins résistant que le matériau initial.

Le formalisme mis en place est complètement généralisable au cas tri-dimensionnel et aux modèles de matériau plus sophistiqués (plasticité, visco-plasticité, etc...). Les précisions supplémentaires nécessaires seront faîtes au fur à mesure de notre étude.

### 1.3 Le problème de localisation

Les simulations numériques effectuées avec des matériaux adoucissants ou des matériaux endommageables donnent des résultats qui ne sont pas objectifs vis à vis du maillage. Cela se traduit en général par une localisation artificielle de la déformation ou de l'endommagement dans une zone dont la taille tend vers zéro lorsque le maillage est raffiné [Bazant , 1976, Benallal et al. , 1988]. L'exemple de la traction d'une plaque trouée (voir figure 1.3) proposé par Andrieux et al. [Andrieux et al. , 2004] nous en donne une bonne illustration : finesse et orientation du maillage influencent de manière significative les résultats. Ce phénomène apparaît aussi bien dans le cadre de sollicitations quasi-statiques que de sollicitations dynamiques, mais notre étude est volontairement restreinte à la dynamique. Afin de résoudre ce problème, la technique généralement utilisée est de considérer que les contraintes en un point matériel ne peuvent plus être décrites de manière locale, mais qu'elles doivent prendre en compte une longueur ou un temps interne traduisant l'interaction d'un point avec ses voisins (voir [Pijaudier-Cabot et Bazant , 1988, De Borst et al. , 1993]).

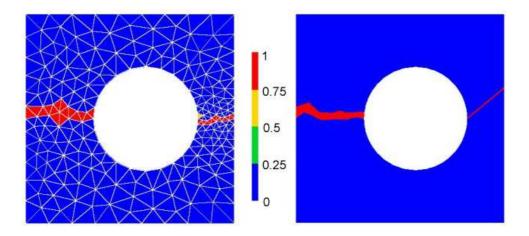


Fig. 1.3 – Exemple de sensibilité au maillage : endommagement d'une plaque trouée sous traction verticale [Andrieux et al. , 2004]

Cette partie propose, après un bref exposé de l'origine mathématique de la localisation, de décrire un certain nombre de modèles qui ont été mis en place afin de rendre les résultats indépendants du choix du maillage. Nous nous concentrerons plus particulièrement sur deux modèles, à savoir le modèle du second gradient et le modèle de matériaux dépendant du taux de déformation proposé notamment par Needleman [Needleman , 1988]. Une brève revue non-exhaustive des autres modèles sera également effectuée.

#### 1.3.1 Le phénomène de localisation

#### 1.3.1.1 Cadre de l'étude

Comme nous l'avons évoqué plus haut, la localisation concerne les matériaux adoucissants ou les matériaux endommageables. Ils ont en commun d'avoir, sur le tracé de la contrainte en fonction de la déformation, une pente qui devient négative à partir d'une déformation donnée. Le plus souvent, lors de l'étude d'un modèle permettant d'éviter la localisation, les différents auteurs considèrent un matériau type qui est élasto-plastique avec un module d'écrouissage h constant et négatif <sup>8</sup> [Bazant et Belytschko , 1985, Needleman , 1988, De Borst , 2004]. Pour la courbe contrainte/déformation, cela se traduit par une courbe à deux pentes ; la première, positive, traduit l'élasticité, la seconde, négative, traduit l'adoucissement (le point  $(\sigma^{max}, \varepsilon^{lim})$  délimite ses deux zones). La géométrie de la quasi-totalités des études est généralement réduite à une poutre uni-dimensionnelle sollicitée en traction [Bazant et Belytschko , 1985, Belytschko et Lasry , 1988, De Borst , 2004] (ponctuellement, à un plan infini sollicité en cisaillement [Needleman , 1988]). Ce cadre général, détaillé par la figure 1.4, constitue le support qui va permettre de mettre en évidence le phénomène de localisation.

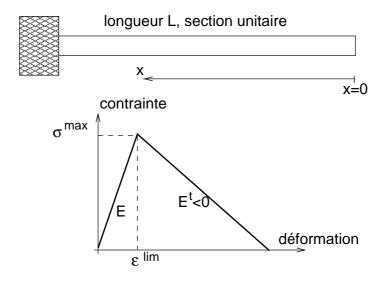


Fig. 1.4 – Poutre uni-dimensionnelle et loi de comportement adoucissante typique

 $<sup>^8\</sup>mathrm{Le}$  module tangent  $E^t$  est alors lui aussi négatif puisqu'égal à  $\frac{Eh}{E+h}.$ 

#### 1.3.1.2 La localisation

Afin de mettre en évidence le problème de localisation en dynamique, nous considérons donc le cas de la poutre uni-dimensionnelle représentée sur la figure 1.4. Dans ce cas, l'équation d'équilibre s'écrit :

$$\frac{\partial \sigma(x,t)}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \tag{1.28}$$

où u(x,t) correspond au déplacement de la poutre au point x et à l'instant t et est relié à la déformation totale  $\varepsilon$  par l'équation suivante :

$$\varepsilon(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \tag{1.29}$$

En supposant la décomposition additive de la déformation totale  $\varepsilon$  comme suit

$$\varepsilon(x,t) = \varepsilon_e(x,t) + \varepsilon_p(x,t) \tag{1.30}$$

où  $\varepsilon_p$  est la déformation plastique, on peut écrire la loi de comportement sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \sigma(x,t) = E\varepsilon(x,t) \ si \ \varepsilon \le \varepsilon^{lim} \\ \sigma(x,t) = \sigma^{max} + E^{t}(\varepsilon(x,t) - \varepsilon^{lim}) \ si \ \varepsilon > \varepsilon^{lim} \end{cases}$$
(1.31)

En écrivant les équations 1.28, 1.29 et 1.31 sous forme différentielle, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{\sigma}(x,t)}{\partial x} = \rho \frac{\partial^{2} v(x,t)}{\partial t^{2}} \\ \dot{\varepsilon}(x,t) = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \\ \dot{\sigma}(x,t) = E \dot{\varepsilon}(x,t) \ si \ \varepsilon \leq \varepsilon^{lim} \\ \dot{\sigma}(x,t) = E^{t} \dot{\varepsilon}(x,t) \ si \ \varepsilon > \varepsilon^{lim} \end{cases}$$

$$(1.32)$$

où v est la vitesse,  $\dot{\sigma}$  le taux de contrainte et  $\dot{\varepsilon}$  le taux de déformation. Cet ensemble d'équation nous permet finalement d'écrire l'équation différentielle, où seule la vitesse v apparaît, suivante :

$$\frac{\kappa}{\rho} \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \tag{1.33}$$

où  $\kappa=E>0$  si  $\varepsilon\leq \varepsilon^{lim}$  et  $\kappa=E^t<0$  si  $\varepsilon>\varepsilon^{lim}$ 

Plaçons-nous tout d'abord dans le cas où la déformation  $\varepsilon$  est inférieure à  $\varepsilon^{lim}$ . Dans ce cas, la forme de l'équation différentielle est hyperbolique, c'est-à-dire qu'elle se

traduit par une propagation d'onde à la vitesse  $\sqrt{\frac{\kappa}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ . Dès que  $\varepsilon > \varepsilon^{lim}$ , l'équation différentielle devient elliptique. Le changement de signe de  $\kappa$  amène donc à l'annulation brutale de la vitesse de propagation. Les ondes sont alors "piégées" dans le premier élément qui rencontre cette situation [Hadamard , 1903, Hill , 1962, Wu et Freund , 1984]. En effet, supposons qu'un élément rencontre cette situation, une augmentation de la déformation de cet élément n'est pas transmise aux voisins. On a alors localisation de la déformation dans cet unique élément, et ce quelle que soit sa taille.

Les modèles qui vont suivre s'attachent généralement à modifier l'écriture générale des équations afin d'éviter le passage d'une forme hyperbolique à une forme elliptique de l'équation d'équilibre.

#### 1.3.2 Le modèle du second gradient

Le principe général de ce modèle est d'introduire le second gradient de la déformation plastique dans les équations, ce qui permet d'assujettir la déformation locale en un point à celle de ces voisins.

Un formalisme basé sur des faits microscopiques, et notamment sur la mécanique des dislocations [Aifantis , 1984, Walgraef et Aifantis , 1985, Kratochvil , 1988], explique les fondements du modèle du second gradient. Ce modèle suppose que la contrainte dépend de la déformation totale, mais également du second gradient de la déformation plastique (voir [Zbib et Aifantis , 1988, Lasry et Belytschko , 1988] et pour le formalisme adopté ensuite [De Borst et Mülhaus , 1992, De Borst , 2004]) :

$$\sigma = \sigma \left( \varepsilon, \frac{\partial^2 \varepsilon_p}{\partial x^2} \right) \tag{1.34}$$

Sous la forme différentielle, on a alors :

$$\dot{\sigma} = E^t \dot{\varepsilon} + \Theta \frac{\partial^2 \dot{\varepsilon}_p}{\partial x^2} \tag{1.35}$$

Dans cette équation,  $\Theta$  est homogène à une longueur au carré multipliée par une contrainte. En effectuant une étude de dispersion  $^9$ , différents auteurs comme De Borst et al. [De Borst et Mülhaus , 1992, De Borst et al. , 1993, De Borst , 2004] parviennent à mettre en évidence le fait que, avec ce type de modèle, seules les ondes de longueur d'onde plus petite que  $\ell$  (où  $\ell$  est donnée par l'équation 1.36) peuvent se propager dans la zone localisée. La longueur  $\ell$  correspond alors à une longueur interne du matériau.

$$\ell = \sqrt{\frac{\Theta}{h}} \tag{1.36}$$

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup>Ce type d'étude consiste à supposer une solution de l'équation différentielle de la forme  $A \exp(i(kx + \lambda t))$ , puis d'établir la relation de dispersion correspondante.

Un certain nombre de simulations (quasi-statiques et dynamiques) réalisées par les mêmes auteurs, aussi bien uni-dimensionnelles (comme pour la poutre de la figure 1.4) que bi-dimensionnelles, ont permis de mettre en évidence l'aptitude du modèle du second gradient à résoudre les problèmes de localisation évoqués précédemment. Ce modèle comporte cependant quelques limitations. La première est l'introduction d'une variable supplémentaire (en plus des déplacements) dans l'algorithme, impliquant la définition de conditions aux limites ad hoc. La deuxième réside dans la détermination des paramètres supplémentaires associés au modèle.

#### 1.3.3 Le modèle de plasticité dépendant du taux de déformation

Pour ce modèle, un effet de vitesse est introduit via le taux de déformation plastique. Couplé à la propagation des ondes, cet effet introduit une longueur caractéristique.

Afin d'éviter la perte d'hyperbolicité de l'équation d'équilibre, Needleman propose d'utiliser une dépendance au taux de déformation. La contrainte n'est alors plus fonction de la déformation uniquement, mais également du taux de déformation plastique. Sous la forme proposée par Sluys [Sluys, 1992], on a :

$$\sigma = \sigma \left( \varepsilon, \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial t} \right) = \sigma^{max} + h \varepsilon_p + m \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial t}$$
 (1.37)

où m est le paramètre de sensibilité au taux de déformation homogène à un temps multiplié par une contrainte. Une étude de dispersion [Sluys , 1992] permet de mettre en évidence une longueur interne au modèle qui s'écrit :

$$\ell = \frac{2m}{\sqrt{\rho E}} \tag{1.38}$$

De nombreuses études de cas dynamiques <sup>10</sup> [Needleman , 1988, Sluys , 1992, De Borst et al. , 1993] montrent l'efficacité de ce modèle pour résoudre les problèmes de dépendance au maillage.

#### 1.3.4 Les autres solutions...

Il existe un certain nombre d'autres modèles. Le principe global de quelques uns d'entre eux est détaillé ici :

 les modèles dits non-locaux : ce type de modèles, développé en particulier par Bazant et Pijaudier-Cabot [Bazant , 1976, Bazant et Belytschko , 1985, Pijaudier-Cabot et Bazant , 1988], régularise le problème en moyennant les variables sur une zone dont la taille est donnée par des justifications microscopiques, imposant du même coup une taille de localisation non-nulle.

<sup>&</sup>lt;sup>10</sup>Le modèle, dont l'efficacité repose sur la propagation d'ondes, ne résout le problème de localisation que dans ce cadre dynamique.

- les modèles à discontinuité [Olivier et al., 1999] : les zones où la localisation se produit sont généralement petites devant l'échelle de la structure. Suite à cette constatation, les modèles à discontinuité proposent de représenter ces zones par une discontinuité dans le maillage, évitant ainsi les problèmes de dépendance à ce même maillage.
- les modèles à effet retard [Ladevèze, 1991] : ce type de modèles s'applique plus spécifiquement aux matériaux endommageables. Il s'agit dans ce cas de limiter le taux d'endommagement, introduisant par la même occasion un temps caractéristique dans la définition du matériau.
- etc...

#### 1.3.5 Bilan

Hormis les modèles à discontinuité, l'ensemble des modèles décrits complètent la description du matériau par un temps ou une longueur caractéristique. Cela permet de conserver en mémoire au niveau macroscopique des informations sur le comportement microscopique (longueur d'influence, vitesse d'évolution maximale,...) qui sont classiquement oubliées dans la mécanique des milieux continus.

Sans se vouloir une critique des autres modèles, cette étude va maintenant se focaliser sur le modèle d'endommagement à effet retard qui n'a pour le moment été développé que dans le cadre de matériau élastique endommageable.

### 1.4 Synthèse

En résumé, dans cette partie, ont été abordés successivement les thèmes suivants :

- la description des schémas de Newmark et, en particulier, de l'algorithme aux différences centrées qui est généralement utilisé dans le cadre des simulations en dynamique explicite.
- une introduction à la notion d'endommagement macroscopique.
- le détail du problème de localisation. Plusieurs modèles pour le résoudre en faisant intervenir une longueur interne dans la modélisation du matériau sont alors exposés. Enfin, le modèle d'endommagement retardé est pour la première fois évoqué.

## Chapitre 2

## L'endommagement à effet retard

Dans ce second chapitre, l'étude du modèle d'endommagement à effet retard est proposée. Après nous être intéressé à ses principales propriétés, nous nous concentrons, d'une part, sur une étude approfondie de la convergence de l'algorithme associé et, d'autre part, sur la mise en place d'une formulation analytique de la taille de la zone complètement endommagé qui peut être assimilée à la longueur interne déjà évoquée. In fine, un premier exemple est traité.

### Sommaire

Motiv	ations	23
Etude	des propriétés du modèle	24
2.2.1	Modélisation élastique endommageable classique	24
2.2.2	Modèle à endommagement retardé	28
Conve	rgence numérique	34
2.3.1	Convergence en temps	35
2.3.2	Convergence en espace	37
2.3.3	Convergence en espace et en temps	41
2.3.4	Conclusions	43
Déteri	mination uni-dimensionnelle de la longueur caractéristique	44
2.4.1	Détermination analytique de la longueur caractéristique	44
2.4.2	Validation du modèle analytique	52
2.4.3	Conclusions	55
	Etude 2.2.1 2.2.2 Conve 2.3.1 2.3.2 2.3.3 2.3.4 Détern 2.4.1 2.4.2	2.2.2 Modèle à endommagement retardé  Convergence numérique  2.3.1 Convergence en temps  2.3.2 Convergence en espace  2.3.3 Convergence en espace et en temps  2.3.4 Conclusions  Détermination uni-dimensionnelle de la longueur caractéristique  2.4.1 Détermination analytique de la longueur caractéristique  2.4.2 Validation du modèle analytique

2.5	Implantation numérique	56
	2.5.1 Plasticité couplée à l'endommagement retardé	57
	2.5.2 Integration numérique du modèle	59
	2.5.3 Exemple bi-dimensionnel	35
2.6	Conclusions et perspectives	71
2.7	Synthèse	71

## 2.1 Motivations

Suite au bref état de l'art effectué sur le thème de la localisation, il semble que le modèle d'endommagement à effet retard soit particulièrement adapté à notre problématique. En effet, nous nous sommes placés dans le cas des matériaux métalliques modélisés par des lois élastique, plastique ou plastique dépendante du taux de déformation. Chacune de ces lois est couplée à l'endommagement afin de représenter la ruine totale du matériau considéré suite à une sollicitation violente. Ce couplage à l'endommagement implique, comme nous l'avons vu précédemment, l'apparition d'un problème de localisation artificiel de la déformation et de l'endommagement. Ce cadre de la localisation en dynamique causée par l'endommagement constitue l'environnement idéal d'application du modèle d'endommagement à effet retard. Un certain nombre d'études, pour la plupart réalisées par les initiateurs du modèle au Laboratoire de Mécanique et de Technologie de Cachan [Ladevèze , 1991, 1992, Allix et al. , 1994, 1995, Deü , 1997], ont d'ores et déjà été publiées sur ce thème. Elles s'attachent en majorité à la description du modèle en tant que tel et à son application à la rupture des composites stratifiés.

L'étude du modèle d'endommagement à effet retard que nous proposons dans ce chapitre se veut pragmatique dans le sens où elle a pour but d'apporter des réponses précises aux questions qui pourront éventuellement se poser lors d'une étude ultérieure. Les deux principales questions dans ce chapitre sont :

- le modèle est-il bien convergent?
- la localisation dans un unique élément étant évitée grâce au modèle d'endommagement à effet retard, est-il possible de connaître la taille de la zone dans laquelle l'endommagement va avoir lieu afin de choisir au mieux le maillage a priori?

La réponse à ces deux questions doit permettre dans les applications à venir de garantir la convergence des résultats vers une solution et de permettre de choisir le maillage le mieux adapté à la sollicitation.

Avant d'attaquer ces études, une première analyse du modèle d'endommagement à effet retard est proposée. Elle s'applique, de la même manière que dans l'état de l'art sur la localisation, à mettre en évidence le problème de dépendance au maillage sur un cas élastique endommageable simple et à montrer la capacité du modèle d'endommagement à effet retard à le résoudre, ceci après avoir rapidement rappelé les principaux fondements et équations du modèle.

L'étude de la convergence du modèle est ensuite effectuée. Une méthode originale nous permet de déterminer, uniquement à partir de résultats de simulations numériques, l'ordre de convergence en terme de déplacement ou d'endommagement lorsque le pas de temps et le pas d'espace sont raffinés (simultanément ou séparément).

Cette dernière étude va permettre ensuite de garantir la qualité des résultats qui suivront, et en particulier ceux obtenus lors de l'étude de la longueur caractéristique. Cette dernière constitue un des points clefs de notre travail. S'appuyant sur une simplification du modèle d'endommagement à effet retard et des équations du problème, elle permet la mise en place d'une formulation analytique donnant, à par-

tir des paramètres du modèle et du chargement, un encadrement de la taille de la zone complètement endommagée. Ces résultats analytiques sont confrontés à ceux obtenus numériquement, permettant ainsi de valider la formulation mise en place. A l'issue de ces études, l'implantation du modèle d'endommagement retardé dans une loi de comportement plus complexe et plus générale que celle considérée jusqu'alors (la plasticité isotrope de von Mises couplée à l'endommagement retardé au lieu de l'élasticité endommageable) est effectuée dans le code de dynamique explicite Europlexus [Europlexus , 2002]. Celle-ci est ensuite appliquée à une première simulation bi-dimensionnelle au cours de laquelle nous allons retrouver l'ensemble des éléments qui auront pu être détaillés postérieurement, à savoir les principales propriétés du modèle d'endommagement retardé, la convergence du modèle et l'estimation de la longueur caractéristique.

# 2.2 Etude des propriétés du modèle

L'objectif de cette partie est de mettre en avant les principales propriétés du modèle d'endommagement proposé. Pour ce faire, l'étude est, dans un premier temps, restreinte au cas uni-dimensionnel et pour un matériau élastique endommageable. Ce cadre simplifié permet, d'une part, une programmation aisée du modèle et de l'exemple, à savoir l'étude classique d'une poutre uni-dimensionnelle soumise à une tension, et, d'autre part, une mise en évidence plus claire des principales propriétés du modèle.

## 2.2.1 Modélisation élastique endommageable classique

Ce paragraphe présente les principaux concepts entrant en jeu dans la modélisation du matériau élastique endommageable que nous considérons. Ce modèle est inspiré d'une modélisation pour des matériaux comme le béton faîte par Lemaître et al. [Lemaître , 1996a, Lemaître et Chaboche , 1996b] ainsi que de celle qui a été faîte pour les composites stratifiés à matrice céramique par Ladevèze [Ladevèze , 1986]. Pour l'un comme pour l'autre de ses matériaux, les phénomènes anélastiques peuvent être négligés.

#### 2.2.1.1 Présentation du modèle

Comme cela a été vu dans le chapitre 1, la contrainte effective  $\tilde{\sigma}$  est reliée à la déformation élastique  $\varepsilon_e$  par la loi de comportement à l'état vierge. Ainsi, dans le cadre uni-dimensionnel, en notant le module d'Young E, on a :

$$\tilde{\sigma} = E\varepsilon_e \tag{2.1}$$

L'endommagement D permet de relier la contrainte effective à la contrainte usuelle  $\sigma$ .

$$\sigma = \tilde{\sigma}(1 - D) \tag{2.2}$$

On en déduit :

$$\sigma = E(1 - D)\varepsilon_e \tag{2.3}$$

Reste à introduire une loi élémentaire d'évolution de l'endommagement. Une loi classique issue d'observation sur de nombreux matériaux métalliques sollicités en chargement uni-dimensionnel monotone croissant donne une variation linéaire de l'endommagement D avec la déformation [Lemaître , 1996a]. L'endommagement D s'initie donc pour une valeur seuil de la déformation élastique  $\varepsilon_e^s$  pour atteindre sa valeur critique  $D^c$  pour une déformation élastique critique  $\varepsilon_e^c$ . Ainsi :

$$D = D^c \left\langle \frac{\varepsilon_e - \varepsilon_e^s}{\varepsilon_e^c - \varepsilon_e^s} \right\rangle \tag{2.4}$$

où les crochets désignent la partie positive de la quantité considérée. Plus généralement, et notamment pour prendre en compte des éventuelles décharges au cours desquelles l'endommagement n'évolue pas, le taux d'endommagement au temps t s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} D = \sup_{\tau \le t} g(\varepsilon_e) \ si \ D < D^c \\ D = D^c \ sinon \end{cases}$$
 (2.5)

où la fonction g vaut :

$$g(\varepsilon_e) = D^c \left\langle \frac{\varepsilon_e - \varepsilon_e^s}{\varepsilon_e^c - \varepsilon_e^s} \right\rangle$$
 (2.6)

Avec ce modèle, nous avons étudié une structure représentée par un seul élément dont les caractéristiques sont résumées dans le tableau 2.1. Cet élément est soumis à un déplacement imposé (donné par le graphique a. de la figure 2.1). La courbe contrainte/déformation obtenue est également représentée sur le graphique b. de la figure 2.1.

Propriété	L	E	ρ	$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$	$\varepsilon_e^s$	$\varepsilon_e^c$	$D^c$
	m	GPa	$kg.m^{-3}$	$m.s^{-1}$	_	_	-
Matériau modèle	0.1	57	2280	5000	0	2.84e-3	1

Tab. 2.1 – Propriétés de la simulation uni-dimensionnelle

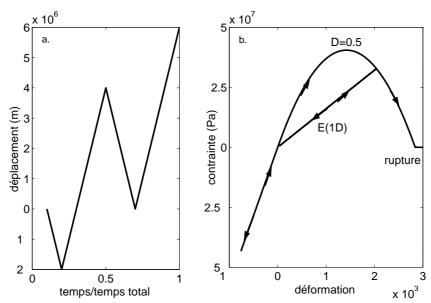


Fig. 2.1 – Evolution de la contrainte en fonction de la déformation (courbe b.) pour un élément unique soumis à un trajet de déplacement (courbe a.)

Dans un cadre thermodynamique plus général, la contrainte ainsi que la variable duale Y de l'endommagement dérivent d'un potentiel thermoélastique endommageable  $\psi_e$ . Nous restreignant au cas uni-dimensionnel, celui-ci est donné par l'équation 2.7 de laquelle on peut déduire la loi d'élasticité ainsi que l'expression de la variable associée à l'endommagement (voir équation 2.8).

$$\rho \psi_e = \frac{1}{2} E \varepsilon_e^2 (1 - D) \tag{2.7}$$

$$\begin{cases}
\sigma = \rho \frac{\partial \psi_e}{\partial \varepsilon_e} = (1 - D) E \varepsilon_e (1 - D) \\
Y = \rho \frac{\partial \psi_e}{\partial D} = -\frac{1}{2} E \varepsilon_e^2
\end{cases}$$
(2.8)

L'endommagement se déduit alors simplement de la variable -Y appelée usuellement taux de restitution d'énergie en considérant  $g(\sqrt{\frac{-2Y}{E}})$  dans l'équation 2.5 l'endommagement exprimer la dissipation mécanique qui est uniquement due à l'endommagement et qui vaut  $-Y\dot{D}$ . Remarquons en outre que celle-ci est bien positive étant donné que -Y est une forme quadratique définie positive et que l'endommagement ne peut que croître ; le second principe de la thermodynamique est donc bien vérifié.

 $<sup>^1{\</sup>rm On}$  peut également comme l'a fait Deü [Deü , 1997] introduire la notion de taux de restitution d'énergie seuil et critique et redéfinir la fonction g comme une fonction de Y uniquement. En l'occurrence, ces deux formulations sont équivalentes.

#### 2.2.1.2 Mise en évidence du problème de dépendance au maillage

Un exemple uni-dimensionnel simple est généralement choisi pour mettre en évidence le problème de dépendance au maillage, notamment dans le cadre des matériaux adoucissants. En dynamique, il s'agit de faire propager une onde de contrainte qui va endommager le matériau; cette onde est choisie, pour les exemples les plus classiques, de traction [Pijaudier-Cabot et Bazant , 1988, Belytschko et Lasry , 1988, De Borst et al. , 1990, Deü , 1997], mais elle peut être occasionnellement de cisaillement [Needleman , 1988]. Ici est étudié un exemple de poutre uni-dimensionnelle encastrée à une extrémité et soumise à une sollicitation de l'autre. Afin d'éviter les réflexions d'ondes à l'encastrement, la poutre est choisie suffisamment longue et la contrainte imposée (ou éventuellement le déplacement imposé) suffisamment élevée pour que l'endommagement apparaisse au niveau de l'extrémité libre. La figure 2.2 résume les caractéristiques de l'exemple qui sera simulé dans cette partie et dans les parties suivantes.

Il est choisi dans ce paragraphe d'imposer le déplacement de telle sorte que la vitesse de déformation à l'extrémité libre de la poutre soit de  $250s^{-1}$ . Les autres caractéristiques de la poutre ainsi que les propriétés du matériau élastique endommageable sont résumées dans le tableau 2.1 (sauf la déformation élastique seuil  $\varepsilon_e^s$  qui est ici égale à 1.32e-3). La simulation de cet exemple a été réalisée avec le logiciel Matlab dans lequel ont été programmées les équations présentées ci-dessus. L'intégration temporelle de l'équation d'équilibre est réalisée en utilisant le schéma numérique de Newmark aux différences centrées [Newmark , 1959, Hugues , 1987]. Comme cela a été vu dans le chapitre 1, c'est un schéma conditionnellement stable pour lequel le pas de temps choisi doit être inférieur au pas de temps critique déterminé par la condition de Courant. Dans cette partie, nous choisirons  $\Delta t = \Delta t^{crit}$ . Lorsque la simulation est réalisée, la rupture est observée dès lors que la limite de stabilité (c'est-à-dire D=0.5 dans ce cas) est dépassée dans un unique élément. Ainsi, la rupture (D=1) se produit dans cet élément quel que soit le raffinement du maillage (voir figure 2.3).

Ces simulations amènent à diverses conclusions :

- le profil d'endommagement dépend du maillage. La taille de la zone complètement endommagée est en effet toujours restreinte à un seul élément. Ce phénomène constitue la conséquence visible du problème de dépendance au maillage.
- le temps à rupture est de plus en plus petit lorsque le maillage est de plus en plus fin. En effet, le pas de temps choisi vérifie la condition de Courant nécessaire à la stabilité du schéma numérique [Newmark , 1959, Hugues , 1987]. Ainsi, plus le maillage est fin, plus le pas de temps  $\Delta t$  est petit. Or, l'élément situé à l'extrémité de la poutre atteint l'état complètement endommagé en un nombre de pas de temps égal quel que soit la valeur de  $\Delta t$ . Le temps à rupture tend même vers zéro lorsque le maillage est infiniment fin.
- l'énergie dissipée nécessaire pour rompre la poutre tend vers zéro lorsque le maillage est raffiné. En effet, si on considère l'énergie dissipée par unité de volume nécessaire pour atteindre la rupture, celle-ci correspond à l'aire sous la

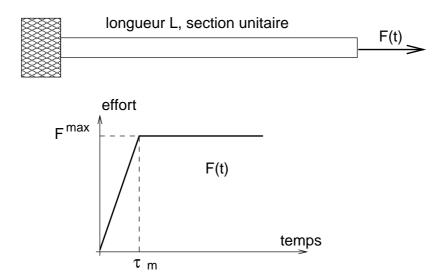


Fig. 2.2 – Poutre uni-dimensionnelle encastrée à gauche sollicitée à droite (c'est la contrainte qui est ici imposée, mais on peut imposer de la même manière une rampe en déplacement)

courbe contrainte déformation donnée par la figure 2.1. Par un calcul simple, on obtient rapidement que cette énergie dissipée par unité de volume est égal à  $\frac{E\varepsilon_e^c}{6}$ . La taille de la zone complètement endommagée étant toujours réduite à un unique élément, l'énergie dissipée tend alors effectivement vers zéro lorsque le maillage est raffiné.

- le taux d'endommagement tend vers l'infini. C'est une autre conséquence de la décroissance du temps à rupture. L'endommagement de l'unique élément s'endommageant totalement passe de plus en plus vite de sa valeur initialement nulle à sa valeur critique. Si on considère le mécanisme physique qui permet d'expliquer l'endommagement, à savoir la croissance et la coalescence de cavités, cela revient à dire que le taux d'extension des cavités tend lui-aussi vers l'infini. Ce scénario semble physiquement très improbable.

## 2.2.2 Modèle à endommagement retardé

Suite à ces constations, et en particulier du fait que le temps à rupture ne convergeait pas vers une valeur finie, le concept d'endommagement retardé a été proposé. Ladevèze proposa en effet dès le début des années 1990 [Ladevèze , 1991, 1992] de modifier la loi d'évolution de l'endommagement de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{D} = k \left\langle g\left(\varepsilon_{e}\right) - D\right\rangle^{n} & si \ D \leq D^{c} \\ D = D^{c} & sinon \end{cases}$$
 (2.9)

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Ceci n'est valable que dans le cas particulier où la déformation élastique seuil  $\varepsilon_e^s$  est nulle; ce qui est le cas dans l'exemple considéré dans ce paragraphe.

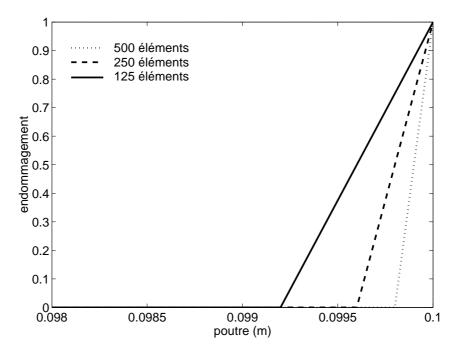


Fig. 2.3 – Profil d'endommagement le long de la poutre. Résultats pour différents maillages (zoom sur l'extrémité libre) pour le modèle classique. L'endommagement se localise dans un unique élément.

où k et n sont des paramètres définissant l'effet retard et où  $g\left(\varepsilon_{e}\right)$  correspond à la fonction permettant de définir l'endommagement (voir l'équation 2.6)  $^{3}$ . Afin de représenter de façon physiquement satisfaisante ce phénomène, les travaux qui ont suivi, menés notamment par Allix [Allix et al. , 1994, 1995] et par Deü [Deü , 1997], proposent d'utiliser une forme plus aboutie :

$$\begin{cases}
\dot{D} = \frac{1}{\tau^c} \left( 1 - \exp\left[ -a \left\langle g\left( \varepsilon_e \right) - D \right\rangle \right] \right) & \text{si } D \leq D^c \\
D = D^c & \text{sinon} 
\end{cases}$$
(2.10)

pour la quelle on introduit deux paramètres que sont le temps caractéristique  $\tau^c$  et la constante a.

Considérons dès à présent l'impact qualitatif de l'usage de ce dernier modèle sur des simulations identiques à celles décrites précédemment :

- le taux d'endommagement ne tend plus ici vers l'infini lorsque le maillage est raffiné. En effet, celui-ci est dorénavant borné par  $\frac{1}{\tau^c}$ . Physiquement, cela traduit le fait que le taux de croissance d'une cavité ne peut pas excéder un taux critique <sup>4</sup>.
- par conséquent, le temps à rupture est lui-aussi borné. La valeur minimale du temps à rupture est en effet égale quel que soit le maillage à  $D^c\tau^c$ .

 $<sup>^3</sup>$ Par la suite, nous serons amener à considérer cette quantité comme ce qu'on appellera l'endommagement non-corrigé et que l'on notera  $D^{nc}$ .

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>De la même manière, en mécanique de la fissuration, la vitesse de propagation d'une fissure est bornée.

- pour des chargements très lents impliquant des taux d'endommagement très faibles, le modèle est équivalent au modèle classique.
- le taux d'endommagement  $\dot{D}$  est trivialement positif. Comme le taux de restitution d'énergie -Y est une forme quadratique définie positive, le second principe de la thermodynamique est donc toujours vérifié puisque  $-Y\dot{D} \geq 0$ .

#### 2.2.2.1 Introduction de l'effet retard

Le modèle classique a été décrit dans le paragraphe 2.2.1.1. L'introduction de l'effet retard ne modifie que localement ces équations. En particulier, les relations entre la déformation, la contrainte usuelle et la contrainte effective (données par les équations 2.3 et 2.1) restent inchangées. De même, la fonction g (voir équation 2.6) est identique; celle-ci ne permet plus de déterminer l'endommagement D en utilisant l'équation 2.5 mais elle est égale à ce qu'on appelle l'endommagement non-corrigé (que l'on note  $D^{nc}$ ). Cet endommagement non-corrigé correspond (au sup près de l'équation 2.5) à l'endommagement du modèle classique. L'endommagement avec effet retard est alors déterminé en intégrant le taux d'endommagement déterminé avec l'équation fondamentale du modèle qui permet d'introduire le retard.

$$\begin{cases} D^{nc} = g\left(\varepsilon_{e}\right) \\ \dot{D} = \frac{1}{\tau^{c}} \exp\left[-a\left\langle D^{nc} - D\right\rangle\right] & si \ D \leq D^{c} \\ D = D^{c} & sinon \end{cases}$$
 (2.11)

De la même manière que dans le paragraphe 2.2.1.1, un élément unique est soumis à une rampe de déplacement . Les propriétés des matériaux sont identiques à celles du paragraphe 2.2.1.1 résumées dans le tableau 2.1 auxquelles s'ajoutent les valeurs des deux paramètres de l'effet retard  $\tau^c$  et a respectivement égaux à  $5\mu s$  et 10. L'endommagement retardé introduisant un effet temporel dans les équations, la simulation est réalisée pour différentes vitesses de sollicitation. Les résultats sont tracés sur la figure 2.4. Comme attendu, cette dépendance peut être interprétée comme une viscosité  $^5$ . La figure 2.5 permet de l'expliquer; la différence  $D^{nc} - D$  entre l'endommagement non-corrigé et l'endommagement (qui intervient dans la détermination du taux d'endommagement (voir l'équation 2.11)) croît avec la vitesse de sollicitation, ceci dû au retard introduit dans le modèle. Or cette différence est aussi l'image de la différence entre les résultats qui seraient obtenus avec un modèle classique (pour lequel la contrainte effective et la contrainte usuelle sont reliées par  $(1-D^{nc})$ ) et ceux obtenus avec l'effet retard (pour lequel elles sont reliées par (1-D)). La dernière figure permet également de retrouver le fait que pour

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Substituer un modèle visco-élastique endommageable au modèle à endommagement retardé ne permet cependant pas de résoudre le problème de dépendance au maillage, nous le verrons par la suite. La viscosité mise en évidence ici n'a d'ailleurs rien en commun avec la viscosité classique : l'influence de la vitesse de déformation est en général beaucoup plus faible et, surtout, le temps caractéristique de l'effet retard est beaucoup plus faible que le temps caractéristique associé aux modèles visqueux classiques.

des chargements quasi-statiques ( $1s^{-1}$  ici), le modèle à endommagement retardé est équivalent au modèle classique; la différence entre les deux modèles est inférieure à 0.01%.

Lors d'un calcul sur plusieurs éléments, lorsqu'une localisation de la déformation et de l'endommagement va s'initier dans l'un d'entre eux, la contrainte va donc localement être augmentée, permettant ainsi d'endommager les éléments voisins et d'éviter une localisation à l'échelle de l'élément. Cette étude est effectuée dans le paragraphe suivant.

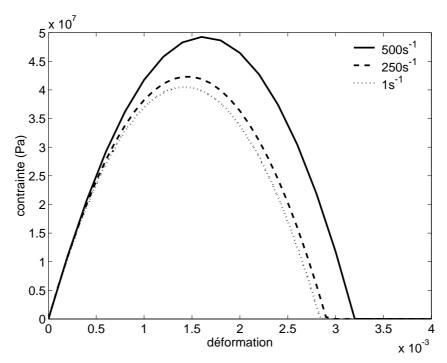


Fig. 2.4 – Courbe contrainte/déformation dans un élément unique soumis à différentes vitesses de sollicitation. L'effet retard introduit une dépendance à la vitesse de sollicitation. Les paramètres de l'effet retard choisis ici sont  $\tau^c = 5\mu s$  et a = 10.

#### 2.2.2.2 Exemple uni-dimensionnel

L'exemple uni-dimensionnel détaillé par la figure 2.2 est à nouveau étudié avec un déplacement imposé tel que la vitesse de déformation à l'extrémité libre de la poutre soit égale à  $250s^{-1}$ . Les paramètres du matériau élastique endommageable sont les mêmes que dans la partie 2.2.1.1 (c'est-à-dire les valeurs données dans le tableau 2.1, sauf la déformation élastique seuil  $\varepsilon_e^s$  qui est égale à 1.32e-3) auxquels s'ajoutent le temps caractéristique  $\tau^c$  égal à  $2\mu s$  et le paramètre a égal à 10. La simulation est effectuée pendant  $20\mu s$ , c'est-à-dire le temps au bout duquel il n'y a plus d'évolution de l'endommagement  $^6$ . Les profils d'endommagement le long de la

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>La longueur de la poutre a par ailleurs été choisie de telle sorte qu'il n'y ait pas de réflexion d'onde. Le temps de calcul correspond donc également au temps mis par une onde élastique pour traverser la barre intégralement.

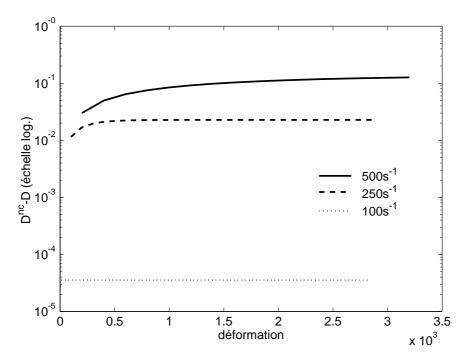


Fig. 2.5 – Evolution de  $D^{nc} - D$  en fonction de la déformation et de la vitesse de déformation. A déformation fixée, plus l'écart  $D^{nc} - D$  est important, plus la contrainte correspondante à cette déformation est importante.

poutre obtenus pour trois niveaux de maillages différents sont tracés sur la figure 2.6. On peut en déduire les conclusions suivantes :

- la zone complètement endommagée n'est pas réduite à un unique élément (qui est le phénomène caractéristique de la dépendance au maillage). Pour les maillages simulés dans cet exemple, la taille de cette zone, ainsi que le profil général de l'endommagement le long de la poutre, restent inchangés lorsque le maillage est modifié.
- l'énergie dissipée par endommagement au cours du calcul est constante quel que soit le maillage.

Ces résultats permettent a priori de conclure que le modèle d'endommagement retardé évite la localisation artificielle de l'endommagement dans un unique élément. Avant de poursuivre, le paragraphe suivant introduit la notion de longueur caractéristique souvent évoquée dans ce type de modèle.

## 2.2.2.3 Notion de longueur caractéristique

La longueur caractéristique  $\ell^{car}$  se définit comme la taille de la zone complètement endommagée. Cette notion n'a donc de sens que lorsqu'un modèle permettant d'éviter la localisation est utilisé <sup>7</sup>. Dans le cas de l'exemple du paragraphe précédent,  $\ell^{car}$  est environ égal à 9mm.

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>Pour un modèle classique, il a été montré que la zone complètement endommagée était toujours réduite à un élément. Ainsi, la taille de cette zone tend vers zéro lorsque le maillage est raffiné.

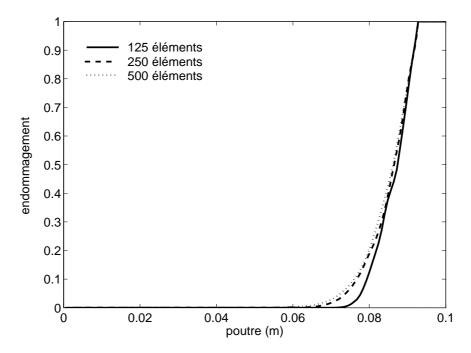


Fig. 2.6 – Profil d'endommagement le long de la poutre. Résultats pour différents maillages pour le modèle avec effet retard. La zone complètement endommagée a une longueur constante non-réduite à un élément.

Etudier cette longueur se révèle intéressant dans la mesure où les modèles classiquement utilisés pour éviter la dépendance l'introduisent directement comme paramètre. C'est le cas des modèles non-locaux consistant à intégrer ou moyenner la déformation sur une zone de longueur définie [Pijaudier-Cabot et Bazant , 1988, Belytschko et Lasry , 1988, De Borst et Mülhaus , 1992] ou des modèles dépendant du taux de déformation plastique [Needleman , 1988, De Borst et al. , 1990]. Dans le modèle d'endommagement retardé, aucune longueur n'est introduite ; c'est en effet un temps caractéristique qui est le principal paramètre. Par ailleurs, en simulant à nouveau l'exemple du paragraphe précédent (avec les mêmes paramètres et une poutre maillée avec 500 éléments) avec plusieurs vitesses de sollicitation (voir figure 2.7), on constate que la longueur caractéristique évolue avec la vitesse de sollicitation. Multiplier le temps caractéristique  $\tau^c$  du modèle par la célérité des ondes c n'est donc pas suffisant pour obtenir une longueur caractéristique au sens des modèles classiquement utilisés pour éviter la dépendance au maillage.

Avant d'étudier plus en avant la longueur caractéristique, il faut garantir que les résultats sont bien indépendants du maillage. La partie suivante propose donc une étude de l'ordre de convergence du modèle. Elle sera suivie d'une partie consacré à l'étude uni-dimensionnelle de la longueur caractéristique.

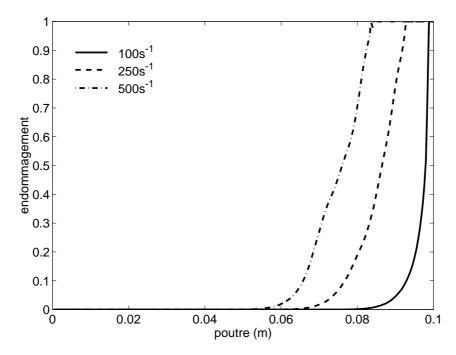


Fig. 2.7 – Profil d'endommagement le long de la poutre. Résultats pour différentes vitesses de sollicitation pour le modèle avec effet retard. La longueur caractéristique évolue avec l'intensité de la sollicitation.

# 2.3 Convergence numérique

Les principales équations du modèle d'endommagement retardé ainsi que ses propriétés ont été présentées brièvement dans la partie 2.2. Cependant, rien ne garantit pour l'instant que le modèle, même s'il semble donner des résultats indépendants du maillage, converge bien vers une solution fixe pour un maillage infiniment fin. L'objectif de cette partie est donc de présenter l'étude de la convergence numérique du modèle d'endommagement retardé dans le cas de la poutre uni-dimensionnelle [Suffis et al. , 2003a] présentée sur la figure 2.2 avec les paramètres donnés par le tableau 2.1 (sauf  $\varepsilon_e^s=1.32e-3$ ) auxquels s'ajoutent les valeurs des deux paramètres de l'effet retard  $\tau^c$  et a respectivement égaux à  $5\mu s$  et 5. L'idée principale est d'analyser numériquement l'ordre de convergence du modèle d'endommagement retardé. L'étude porte à la fois sur la convergence en temps, la convergence en espace et la convergence en temps et en espace simultanément.

Le schéma numérique qui permet d'intégrer l'équation d'équilibre est le schéma de Newmark aux différences centrées détaillé dans le chapitre 1. Celui-ci est conditionnellement stable, c'est-à-dire qu'il existe une contrainte sur le pas de temps qui est en fait limité par un pas de temps critique  $\Delta t^{crit}$  au-delà duquel le calcul devient instable. Celui-ci est donné par la condition de Courant [Hugues , 1987] et est égal au temps mis par l'onde élastique pour traverser l'élément de plus petite taille du maillage. Son expression est rappelée ici :

$$\Delta t^{crit} = \frac{\Delta x}{c} \tag{2.12}$$

où  $\Delta x$  est le pas d'espace <sup>8</sup>. Cette limitation implique par ailleurs un couplage entre le pas de temps  $\Delta t$  inférieur à  $\Delta t^{crit}$  et le pas d'espace  $\Delta x$  (c'est-à-dire la taille des éléments). Malgré ce couplage, il est possible d'étudier d'une part la convergence en temps et d'autre part la convergence en espace. Ainsi, la première analyse qui est menée est l'étude de la convergence en temps, puis celle de la convergence en espace. Les précautions à prendre dues au couplage seront détaillées dans les parties en question. Enfin, la convergence lorsque le temps et l'espace sont réduits de manière simultanée est étudiée.

La méthode utilisée pour définir numériquement l'ordre de convergence est détaillée pour la première analyse, c'est-à-dire pour la convergence en temps. Elle est ré-utilisée dans les deux analyses suivantes, pour la convergence en espace, puis celle en temps et en espace simultanément.

## 2.3.1 Convergence en temps

L'étude de la convergence en temps s'effectue à discrétisation en espace fixe. Il s'agit alors de déterminer la vitesse de convergence lorsque l'on diminue le pas de temps. De nombreuses études ont d'ores et déjà été effectuées dans le cadre des schémas numériques de Newmark pour les problèmes linéaires. Il a par exemple été démontré de manière analytique que la convergence du schéma explicite aux différences centrées est d'ordre 2 [Hugues , 1987]. On pourrait ici de la même manière tenter de déterminer analytiquement l'ordre de convergence en temps, mais il a été choisi, pour la convergence en temps comme pour celles qui suivront, de déterminer l'ordre de convergence à partir de résultats numériques. Une présentation de la méthode utilisée afin de déterminer l'ordre de convergence est exposée dans un premier temps, puis appliquée à la détermination de l'ordre de convergence en temps.

#### 2.3.1.1 Méthode de détermination de l'ordre de convergence

L'ordre de convergence est défini en évaluant l'évolution de l'erreur lorsque le pas de temps diminue. On définit l'erreur  $\tau(x,t)$  localement en un point d'abscisse x et à un temps t par :

$$\tau(x,t) = \chi_x^t - \chi(x,t) \tag{2.13}$$

où  $\chi_x^t$  est la solution 'élément fini' calculée au noeud de position x et au temps t et où  $\chi(x,t)$  est la solution exacte à l'abscisse x et à l'instant t. Cette erreur est majorée comme suit :

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup>Dans notre étude, la poutre uni-dimensionnelle est maillée avec des éléments de taille  $\Delta x$  constante; on a ainsi immédiatement que  $\Delta x = \Delta x^{min}$ .

$$|\tau(x,t)| \le c\Delta t^k, \forall t \in [0,T]$$
(2.14)

où c est une constante et où k est l'ordre de convergence.

Selon l'ordre de convergence, l'erreur va donc diminuer plus ou moins vite. Supposons par exemple que le pas de temps soit divisé par 2, un ordre de convergence égal à 1 induira une erreur divisée par 2, un ordre de convergence égal à 2 une erreur divisée par 4, ...un ordre de précision égal à i une erreur divisée par  $2^i$ . On appelle niveau 1 le calcul effectué avec un pas de temps  $\Delta t$  égal à la moitié du pas de temps critique  $\Delta t^{crit}$ . Le pas de temps des niveaux dits supérieurs (2 et plus) est alors égal à  $\frac{\Delta t^{crit}}{2^i}$  où i est le niveau correspondant; il n'y a donc aucune précaution particulière à prendre concernant le couplage imposé par la condition de Courant, celle-ci étant vérifiée trivialement. En considérant les équations 2.13 et 2.14, l'ordre de convergence peut être déterminé à l'aide de la solution numérique de deux calculs à deux niveaux successifs i et i+1 et de la solution exacte comme suit :

$$\frac{\chi_x^t|_i - \chi(x,t)}{\chi_x^t|_{i+1} - \chi(x,t)} = \frac{O((\frac{\Delta t}{2^i})^k)}{O((\frac{\Delta t}{2^{i+1}})^k)} = 2^k$$
(2.15)

où k est l'ordre de convergence. Classiquement, la solution  $\chi(x,t)$  n'est pas connue, il n'est donc pas possible de déterminer k de cette manière. Cependant, deux différences successives donnent le même résultat. En effet, on a :

$$\chi_x^t|_i - \chi(x,t) = O\left(\left(\frac{\Delta t}{2^i}\right)^k\right) \tag{2.16}$$

Ainsi:

$$\frac{\chi_x^t|_i - \chi_x^t|_{i+1}}{\chi_x^t|_{i+1} - \chi_x^t|_{i+2}} = \frac{(\chi_x^t|_i - \chi(x,t)) + (\chi(x,t) - \chi_x^t|_{i+1})}{(\chi_x^t|_{i+1} - \chi(x,t)) + (\chi(x,t) - \chi_x^t|_{i+2})} = 2^k$$
(2.17)

L'étude de la convergence qui est proposée ci-dessus s'applique indifféremment à n'importe quelle variable  $\chi$ . La convergence pourra donc être étudiée aussi bien en terme de déplacement qu'en terme d'endommagement.

#### 2.3.1.2 Détermination de l'ordre de convergence

Afin de déterminer l'ordre de convergence en temps, le maillage de la poutre uni-dimensionnelle est fixé pour l'ensemble des calculs qui vont être effectués. La poutre est donc composée de 32 éléments de taille égale à  $\Delta x$ . Comme détaillé dans le paragraphe précédent, le 'niveau 1' du calcul correspond à une simulation avec un pas de temps  $\Delta t$  égal à la moitié du pas de temps critique  $\Delta t^{crit}$  imposé par la condition de Courant. C'est a priori pour ce niveau que l'erreur doit être la plus importante.

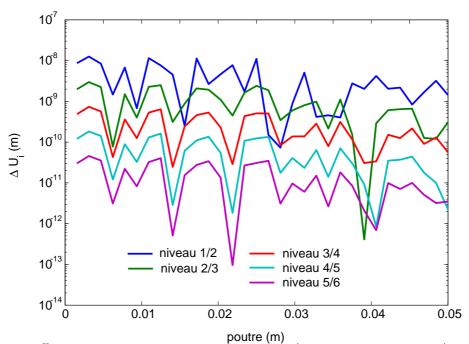


Fig. 2.8 – Différence des solutions en déplacement (échelle logarithmique) entre deux niveaux successifs pour la convergence en temps.

L'ordre de convergence est donc déterminé à partir du calcul de deux différences successives de la solution numérique. La variable  $\chi^t_x$  n'a pas pour le moment été explicitée. L'erreur est classiquement calculée à l'aide des déplacements  $U^t_x$  [Hugues , 1987], mais les dernières études réalisées avec le modèle d'endommagement à effet retard ont montré l'intérêt que pouvait avoir la convergence de l'endommagement, notamment en ce qui concerne la bonne détermination de la longueur caractéristique [Suffis et al. , 2003a, Suffis et Combescure , 2002b]. L'ordre de convergence sera donc déterminé pour chacune de ses deux variables.

Les figures 2.8 et 2.9 représentent respectivement les différences successives selon les niveaux en terme de déplacement et d'endommagement le long de la poutre. Ces courbes sont plus ou moins oscillantes, ainsi une intégrale de celle-ci le long de la barre doit permettre de mieux comparer les différences deux à deux; les résultats sont donnés dans les tableaux 2.2 et 2.3  $^9$ . La dernière colonne de ces tableaux correspond directement à  $2^k$  où k est l'ordre de convergence pour trois calculs à des niveaux successifs. La conclusion est donc que la convergence en temps aussi bien en terme de déplacement qu'en terme d'endommagement est d'ordre 2.

# 2.3.2 Convergence en espace

L'étude de la convergence en espace s'effectue à discrétisation en temps fixe. La condition de stabilité du calcul nous impose de choisir judicieusement le pas de

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup>Une intégrale temporelle peut également être effectuée. Les courbes étant relativement similaires quel que soit le pas de temps, ceci ne change pas les conclusions.

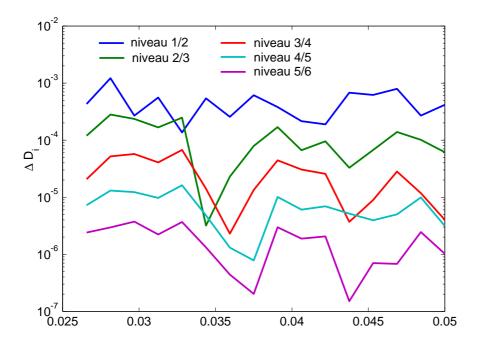


Fig. 2.9 – Différence des solutions en endommagement (échelle logarithmique) entre deux niveaux successifs pour la convergence en temps.

Niveau	Pas de temps	Déplacement (en $m$ )	
	(N=32)	$\Delta U_i =  U _i - U _{i+1} $	$\frac{\Delta U_i}{\Delta U_{i+1}}$
1	$\frac{\Delta t^{crit}}{2}$	$2.01^{e-10}$	3.85
2	$\frac{\Delta t^{crit}}{4}$	$5.22^{e-11}$	3.97
3	$\frac{\Delta t^{crit}}{8}$	$1.31^{e-11}$	4.17
4	$\frac{8}{\Delta t^{crit}}$	$3.15^{e-12}$	4.01
5	$\frac{\overline{\Delta t^{crit}}}{32}$	$7.87^{e-13}$	-
6	$\frac{32}{\Delta t^{crit}}$	-	-

Tab. 2.2 – Intégrale le long de la barre de la différence en terme de déplacement pour la convergence en temps et ordre de convergence correspondant.

Niveau	Pas de temps	Endommagement	
	(N=32)	$\Delta D_i =  D _i - D _{i+1} $	$\frac{\Delta D_i}{\Delta D_{i+1}}$
1	$\frac{\Delta t^{crit}}{2} \\ \frac{\Delta t^{crit}}{4} \\ \Delta t^{crit}$	$1.18^{e-5}$	4.01
2	$\frac{\Delta t^{crit}}{4}$	$2.95^{e-6}$	4.45
3	$\frac{\Delta t^{\bar{c}rit}}{8}$	$2.95^{e-6}$ $6.64^{e-7}$ $1.81^{e-7}$	3.67
4	$\frac{8}{\Delta t^{crit}}$		4.01
5	$\frac{16}{\Delta t^{crit}}$	$4.51^{e-8}$	_
6	$\frac{\Delta t^{crit}}{64}$	-	-

Tab. 2.3 – Intégrale le long de la barre de la différence en terme d'endommagement pour la convergence en temps et ordre de convergence correspondant.

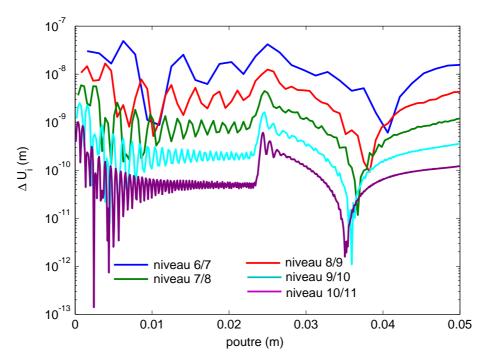


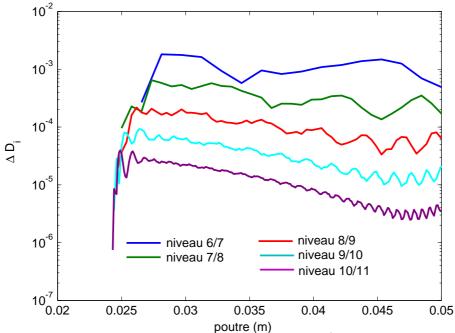
Fig. 2.10 – Différence des solutions en déplacement (échelle logarithmique) entre deux niveaux successifs pour la convergence en espace.

temps. Celui-ci doit être inférieur ou égal au plus petit pas de temps critique des maillages qui seront étudiés ici, c'est-à-dire le maillage le plus fin, correspondant au niveau le plus élevé. Le niveau 1 correspond ici à un maillage de 1 élément; l'étude a quant à elle été menée entre les niveaux 6 et 11 (soit de 32 à 1024 éléments). Le pas de temps fixe a donc été choisi égal au quart du pas de temps critique du niveau 11 (voir équation 2.18).

$$\Delta t^{fixe} = \frac{\Delta t^{crit}|_{niv.\ 11}}{4} = \frac{\Delta x|_{niv.\ 11}}{4c} = \frac{L}{4c * 2^{11}}$$
(2.18)

La démarche qui est ensuite utilisée pour déduire l'ordre de convergence est similaire à celle qui a été présentée dans le paragraphe 2.3.1.1. Les courbes de différences entre deux niveaux successifs sont donc tracées en terme de déplacement et d'endommagement sur les figures 2.10 et 2.11. Le temps auquel ces courbes sont tracées est le temps final du calcul. Par ailleurs, le maillage varie ici d'un niveau à l'autre. Ainsi, les déplacements sont uniquement comparés aux noeuds communs entre les deux niveaux (donc aux noeuds du niveau le plus faible). Pour l'endommagement, on compare la valeur d'un élément du niveau i avec la moyenne  $\overline{D}|_{i+1}$  de ses deux éléments 'fils' du niveau i+1. Comme dans le paragraphe 2.3.1.2, ces valeurs sont intégrées le long de la poutre; les résultats correspondants sont données pour le déplacement et l'endommagement dans les tableaux 2.4 et 2.5 respectivement.

Les résultats obtenus sont toujours très satisfaisants en terme de déplacement.



poutre (m)
Fig. 2.11 – Différence des solutions en endommagement (échelle logarithmique) entre deux niveaux successifs pour la convergence en espace.

Niveau	Déplacement (en $m$ )	
$\Delta t = \frac{\Delta t_{crit} _{11}}{4}$	$\Delta U_i =  U _i - U _{i+1} $	$\frac{\Delta U_i}{\Delta U_{i+1}}$
6	$3.64^{e-10}$	3.59
7	$1.01^{e-10}$	3.59
8	$2.82^{e-11}$	3.50
9	$8.07^{e-12}$	3.27
10	$2.46^{e-12}$	=
11	-	=

Tab. 2.4 – Intégrale le long de la barre de la différence en terme de déplacement pour la convergence en espace et ordre de convergence correspondant.

Niveau	Endommagement	
$\Delta t = \frac{\Delta t_{crit} _{11}}{4}$	$\Delta D_i =  D _i - \overline{D _{i+1}} $	$\frac{\Delta D_i}{\Delta D_{i+1}}$
6	$1.34^{e-5}$	3.14
7	$4.28^{e-6}$	3.22
8	$1.33^{e-6}$	2.93
9	$4.54^{e-7}$	2.74
10	$1.66^{e-7}$	_
11	-	=

Tab. 2.5 – Intégrale le long de la barre de la différence en terme d'endommagement pour la convergence en espace et ordre de convergence correspondant.

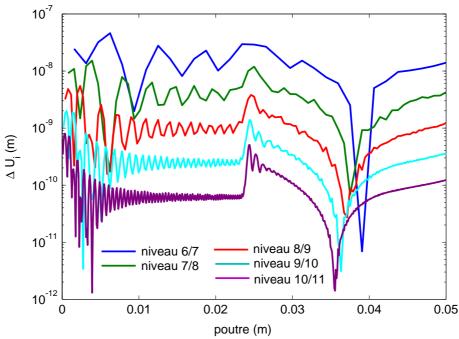


Fig. 2.12 – Différence des solutions en déplacement (échelle logarithmique) entre deux niveaux successifs pour la convergence en temps et en espace simultanément.

Cependant, les résultats en terme d'endommagement ne permettent pas de conclure à une convergence à l'ordre 2 pour cette variable. Ce problème peut notamment provenir du fait que l'on effectue la moyenne de l'endommagement sur les deux éléments 'fils'. On peut par ailleurs également remarquer la présence de bruit dans les résultats dont la période spatiale est proche de celle de la taille des éléments et dont l'amplitude décroît quand le niveau augmente.

## 2.3.3 Convergence en espace et en temps

Nous étudions ici la convergence par rapport à la discrétisation en temps et la discrétisation en espace simultanément. Il suffit pour cela de reprendre ce qui vient d'être fait dans la partie 2.3.2 entre les niveaux 6 et 11 en conservant cette fois-ci le rapport entre pas de temps et pas d'espace (équation 2.19).

$$\Delta t = \frac{\Delta t^{crit}}{2} = \frac{\Delta x}{2c} \tag{2.19}$$

En regard de ce qui a été fait précédemment, on devrait retrouver une convergence quasiment d'ordre 2. En effet, on sait d'ores et déjà que la convergence est (quasiment) d'ordre 2 en espace et en temps indépendamment. Pour cela, on emploie encore une fois la méthode présentée dans la partie 2.3.1.1. Les résultats obtenus sont présentés sur les figures 2.12 et 2.13 ainsi que dans les tableaux 2.6 et 2.7 en ce qui concerne l'intégrale le long de la barre.

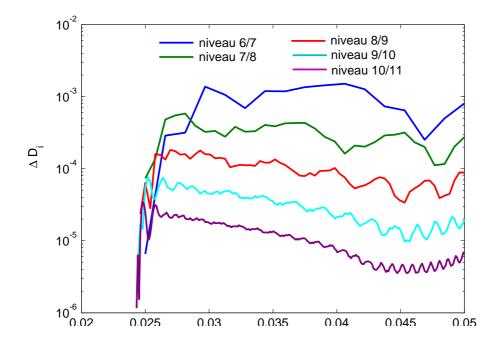


Fig. 2.13 – Différence des solutions en endommagement (échelle logarithmique) entre deux niveaux successifs pour la convergence en temps et en espace simultanément.

Niveau	Déplacement (en $m$ )	
$(\Delta t = \frac{\Delta t^{crit}}{2})$	$\Delta U_i =  U _i - U _{i+1}$	$\frac{\Delta U_i}{\Delta U_{i+1}}$
6	$3.73^{e-10}$	3.73
7	$1.00^{e-10}$	3.65
8	$2.74^{e-11}$	3.52
9	$7.78^{e-12}$	3.35
10	$2.32^{e-12}$	_
11	-	-

Tab. 2.6 – Intégrale le long de la barre de la différence en terme de déplacement pour la convergence en temps et en espace simultanément et ordre de convergence correspondant.

Niveau	Endommagement	
$(\Delta t = \frac{\Delta t^{crit}}{2})$	$\Delta D_i =  D _i - \overline{D}_{i+1} $	$\frac{\Delta D_i}{\Delta D_{i+1}}$
6	$1.14^{e-5}$	2.92
7	$3.91^{e-6}$	3.16
8	$1.24^{e-6}$	3.04
9	$4.07^{e-7} \\ 1.47^{e-7}$	2.76
10	$1.47^{e-7}$	-
11	-	-

Tab. 2.7 – Intégrale le long de la barre de la différence en terme d'endommagement pour la convergence en temps et en espace simultanément et ordre de convergence correspondant.

A la vue des résultats obtenus, il est clair que l'ordre de convergence est supérieur à 1. Cependant, la convergence à l'ordre 2 n'est pas aussi nette que lorsque l'on sépare l'influence de la discrétisation en temps et en espace, et ce plus particulièrement pour la variable d'endommagement, à l'image des résultat que l'on a pu obtenir sur cette même variable pour la convergence en espace. En effet, l'ordre de convergence serait plus proche de 1.8 si on calcule un ordre de convergence moyen à partir des résultats de convergence sur le déplacement, alors qu'il n'est que de environ 1.6 sur l'endommagement. Les phénomènes oscillatoires mis en évidence dans la partie précédente sur l'endommagement se retrouve intégralement ici que ce soit pour le déplacement ou l'endommagement. Il semblerait donc que l'on puisse déduire directement à partir des deux études séparées en temps et en espace la convergence globale d'un modèle. On peut toutefois conclure que l'ordre de convergence est tout de même relativement satisfaisant par rapport à ce que l'on obtient classiquement avec les modèles les plus simples (en général, l'ordre 1).

## 2.3.4 Conclusions

L'approche originale de cette partie a été de déterminer numériquement l'ordre de convergence du modèle à endommagement retardé, plutôt que de tenter de calculer cet ordre à partir d'une étude analytique qui peut se révéler fastidieuse dans le cas des modèles non-linéaires. On a donc étudié la convergence sous toutes ses formes; à la fois la convergence en temps, puis la convergence en espace et enfin la convergence en temps et en espace simultanément. Une méthode d'étude numérique de l'ordre de convergence a été mise en place dans un premier temps, puis, celle-ci a été appliquée. Si la convergence en temps est nettement d'ordre 2 (que ce soit pour le déplacement ou l'endommagement), il n'est pas du tout clair que la convergence en espace le soit également. Ceci apparaît en particulier sur l'étude de l'endommagement. Comme on pouvait s'y attendre à la vue des deux études qui ont été menées séparément sur le temps et l'espace, l'étude de la convergence en temps et en espace simultanément n'est pas totalement concluante dans la mesure où l'ordre de convergence est inférieur à 2 à l'image de ce que l'on a pu obtenir dans la partie 2.3.2. L'ordre de convergence global obtenu grace à cette méthode de détermination est in fine d'environ 1.6. Ce résultat est somme toute satisfaisant dans la mesure où il montre d'une part que le modèle converge bien vers une solution non-particulière et d'autre part que le modèle converge relativement vite par rapport aux modèles classiques qui sont généralement d'ordre 1.

Cette partie permet donc d'envisager à l'avenir l'usage de méthode multi-grille, en contrôlant par exemple le niveau d'erreur lors d'un calcul. En effet, un modèle convergeant rapidement (à l'ordre 2) requiert moins de niveaux de maillages <sup>10</sup>, donc un temps de calcul plus court.

<sup>&</sup>lt;sup>10</sup>La notion de niveau de maillage dans les méthodes multi-grille est analogue à celle que nous avons utilisée dans cette partie.

# 2.4 Détermination uni-dimensionnelle de la longueur caractéristique

Jusqu'à présent, seules les conséquences du modèle à endommagement retardé sur le temps à rupture avaient été étudiées [Deü , 1997]. Nous avons introduit dans la partie 2.2.2.3 la notion de longueur caractéristique  $\ell^{car}$  et l'importance de celle-ci. Cette longueur traduit, pour une sollicitation donnée, la taille de la zone complètement endommagée. Pour bien représenter cette zone lors d'une simulation dynamique, il est donc indispensable de choisir une taille d'éléments  $\Delta x$  plus petite que  $\ell^{car}$ . Il semble essentiel pour le numéricien de pouvoir connaître (ou du moins de pouvoir évaluer)  $\ell^{car}$  avant de construire le maillage, afin d'optimiser celui-ci par rapport au problème posé. De la même manière, dans la perspective de l'usage de techniques numériques adaptées (tel que les remailleurs automatiques ou la décomposition de domaines), la connaissance de  $\ell^{car}$  doit permettre d'optimiser au mieux le maillage dans les zones concernées par une évolution importante de l'endommagement.

Cette partie propose donc l'étude de la longueur caractéristique dans le cas dynamique uni-dimensionnel de la poutre élastique endommageable soumise à une traction (voir la figure 2.2). L'objectif est de donner une formulation analytique de la longueur caractéristique  $\ell^{car}$  [Suffis et Combescure , 2002a] uniquement fonction des paramètres du matériau, des paramètres du modèle et des paramètres du chargement imposé à la poutre. Le développement d'un modèle d'endommagement retardé simplifié s'est révélé nécessaire pour permettre de déterminer cette formule. Elle sera obtenue aussi bien dans le cas d'une modélisation discrète (similaire à ce qui est fait avec les éléments finis) que dans le cas d'une modélisation continue. A l'issue de ce développement, les résultats analytiques et numériques seront comparés pour valider la formule analytique de  $\ell^{car}$ .

Rappelons encore une fois ici que ces travaux sont effectués dans le cadre dynamique auquel nous avons restreint l'ensemble de notre étude. Une analyse quasi-statique de la longueur caractéristique a par ailleurs récemment été effectué par Allix et Al. [Allix et al., 2003a].

## 2.4.1 Détermination analytique de la longueur caractéristique

Les enjeux de cette détermination sont importants. En effet, elle permet de choisir a priori la taille des mailles.

Comme cela a été vu dans la partie 2.2, nous sommes en mesure d'écrire l'ensemble des équations qui régissent le problème. Toutefois, la résolution de celles-ci semble inabordable, même à l'aide d'un logiciel. Il convient donc dans un premier temps d'établir un modèle d'endommagement retardé simplifié; cette simplification va globalement conserver le fondement du modèle, à savoir limiter le taux d'endommagement par  $\frac{1}{\tau^c}$ , et modifier la loi d'évolution de l'endommagement. Dans un souci de simplification toujours plus grand, l'étude sera limitée à ce qu'il se passe au niveau du front de l'onde qui se propage dans la poutre. Cette simplification permet d'obtenir une formule analytique à partir d'une modélisation continue. A partir de la

même simplification de la loi d'évolution de l'endommagement, une étude avec un modèle discret a été effectuée [Suffis et Combescure , 2002a]; celle-ci, décrite dans l'annexe A, donne des résultats identiques à l'approche continue.

## 2.4.1.1 Modèle simplifié d'endommagement retardé

2.4.1.1.1 Propriété du modèle simplifié Le taux d'endommagement borné défini notamment par Allix [Allix et al., 1994, 1995] et par Deü [Deü, 1997] s'écrit dans le cas du matériau élastique endommageable décrit dans la partie 2.2 comme suit :

$$\begin{cases} D^{nc} = g\left(\varepsilon_{e}\right) \\ \dot{D} = \frac{1}{\tau^{c}} \left(1 - \exp\left[-a\left\langle D^{nc} - D\right\rangle\right]\right) & si \ D \leq D^{c} \\ D = D^{c} & sinon \end{cases}$$
 (2.20)

Pour résoudre le problème, nous nous plaçons au niveau du front d'onde. A cet endroit, l'endommagement s'initie, puisque, avant que l'onde passe, le matériau est vierge de tout endommagement (donc D=0). A ce moment, l'équation 2.20 peut donc s'écrire :

$$\dot{D} = \frac{1}{\tau^c} \left( 1 - \exp\left[ -a \left\langle D^{nc} \right\rangle \right] \right) = \frac{1}{\tau^c} h(D^{nc}) \tag{2.21}$$

La simplification du modèle consiste à remplacer la fonction  $h(D^{nc})$  suivante :

$$h(D^{nc}) = 1 - \exp\left[-a\langle D^{nc}\rangle\right] = \dot{D}\tau^c \tag{2.22}$$

par une fonction plus simple. L'approximation la plus simple de la fonction  $h(D^{nc})$  est une fonction Heavyside valant 0 pour un endommagement non-corrigé inférieur à un endommagement non-corrigé limite  $D^{nc} \leq D^{nc \ lim}$  puis 1 dans le cas où  $D^{nc} > D^{nc \ lim}$ . Cette simplification est représentée (en discontinu bleu) pour deux valeurs du paramètre a sur la figure 2.14. Sur cette figure, la valeur de l'endommagement non-corrigé limite,  $D^{nc \ lim}$ , est choisie de telle sorte que  $h\left(D^{nc \ lim}\right)$  vaille  $\frac{2}{3}$ .

Par ailleurs, les équations 2.6 et 2.20 traduisant la proportionnalité de l'endommagement non-corrigé  $D^{nc}$  à la déformation élastique  $\varepsilon_e$ , ainsi que l'équation 2.1 reliant déformation élastique et contrainte effective  $\tilde{\sigma}$  permettent de définir de manière totalement équivalente h en fonction de la contrainte effective.

$$h(\tilde{\sigma}) = 1 - \exp\left[-a\left\langle\frac{\frac{\tilde{\sigma}}{E} - \varepsilon_e^s}{\varepsilon_e^c - \varepsilon_e^s}\right\rangle\right] = \dot{D}\tau^c$$
 (2.23)

De la même manière que précédemment, le modèle simplifié qui transforme la fonction h en une fonction Heavyside introduit une contrainte limite  $\sigma^{lim}$ . Le choix

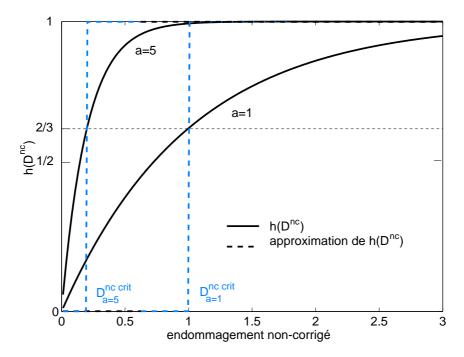


Fig. 2.14 – Modèle d'endommagement initial (continu noir) et simplifié (discontinu bleu) pour deux valeurs du paramètre a. Le  $D^{nc\ lim}$  de la fonction Heavyside fixé pour le moment correspond à  $aD^{nc\ crit}=1$ , c'est-à-dire  $h(D^{nc\ crit})\simeq \frac{2}{3}$ .

de cette contrainte est détaillé ultérieurement (voir paragraphe 2.4.1.1.2). On obtient finalement pour le modèle simplifié utilisant  $\sigma^{lim}$ :

$$\begin{cases} \dot{D} = 0 \ si \ \tilde{\sigma} < \sigma^{lim} \\ \dot{D} = \frac{1}{\tau^c} \ si \ \tilde{\sigma} \ge \sigma^{lim} \end{cases}$$
 (2.24)

La simplification de la fonction  $h(\tilde{\sigma})$  est représentée (en discontinu bleu) sur la figure 2.15 pour deux valeurs du paramètres a. Les valeurs des paramètres du matériau associé sont celles données dans le tableau 2.1 (excepté  $\varepsilon_e^s$  qui vaut 1.32e-3).

Rappelons ici que le modèle simplifié, ainsi que l'étude qui va suivre, ne s'intéressent qu'aux quantités au niveau du front d'onde. Lors de la propagation de l'onde, le modèle simplifié ne permet de distinguer que deux cas :

- <u>cas 1</u>: soit la contrainte effective au niveau du front d'onde <sup>11</sup> est inférieure à la contrainte limite et alors l'endommagement n'évolue pas. L'onde est alors purement élastique, elle se propage à la célérité c dans la poutre en conservant sa valeur.
- <u>cas 2</u>: soit la contrainte effective au niveau du front d'onde est supérieure à la contrainte limite et alors le taux d'endommagement est égal à  $\frac{1}{\tau^c}$ . Dans ce

 $<sup>^{11}{\</sup>rm Notons}$  qu'à ce moment, l'endommagement s'initiant, la contrainte effective est égale à la contrainte usuelle.

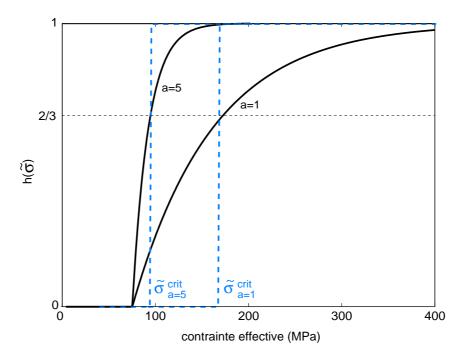


Fig. 2.15 – Modèle d'endommagement initial (continu noir) et simplifié (discontinu bleu) pour deux valeurs du paramètre a représenté en fonction de la contrainte effective. Le  $\sigma^{lim}$  de la fonction Heavyside fixé pour le moment correspond à  $h(\sigma^{lim}) \simeq \frac{2}{3}$ .

cas, la contrainte effective est affectée par l'évolution de l'endommagement, le niveau de contrainte de l'onde qui se propage diminue.

L'objectif est donc de déterminer la distance pendant laquelle "l'onde d'endommagement" se propage, c'est-à-dire la distance au bout de laquelle on passe du cas 2 (propagation de l'endommagement) au cas 1 (plus de propagation de l'endommagement). En fait, cela n'est pas tout à fait vrai, dans la mesure où ce modèle ne permet pas de dire qu'un élément qui commence à s'endommager lors du passage de l'onde de contrainte va atteindre un endommagement total égal à  $D^c$ . C'est l'hypothèse que nous faisons ici : un élément qui commence à s'endommager lors du passage de l'onde continuera donc jusqu'à endommagement total. Ainsi, la distance qui sera déterminée équivaudra directement à la longueur caractéristique  $\ell^{car}$ .

Pour résumer, le modèle simplifié s'écrit finalement en un point x de la barre et au moment  $\mathcal{T} = \frac{x}{c}$  (temps qui correspond à l'instant du passage de l'onde) :

$$\begin{cases} \dot{D} = 0 \ \forall t > \mathcal{T} \ si \ \tilde{\sigma} < \sigma^{lim} \\ \dot{D} = \frac{1}{\tau^c} \ jusqu'\grave{a} \ endommagement \ total \ si \ \tilde{\sigma} \ge \sigma^{lim} \end{cases}$$
 (2.25)

où  $\tilde{\sigma}$  est la contrainte effective en x au temps  $\mathcal{T}$ .

Reste pour totalement définir le modèle simplifié d'endommagement retardé à expliciter la notion de contrainte limite  $\sigma^{lim}$  que nous avons introduit.

2.4.1.1.2 Choix de la contrainte limite Comme nous venons de le voir, la contrainte limite  $\sigma^{lim}$  correspond à la contrainte au-delà de laquelle le taux d'endommagement vaut  $\frac{1}{\tau^c}$ . Il est bien évident que la simplification qui a été effectuée ne permet de représenter le modèle que partiellement. Deux valeurs extrêmes de  $\sigma^{lim}$  doivent cependant permettre d'encadrer les résultats qui seraient obtenus avec le modèle complet. Cet encadrement, ainsi que les hypothèses de la simplification, seront vérifiés par la suite en comparant les résultats analytiques à des résultats numériques.

On choisit donc deux valeurs afin de délimiter, une fois que la formulation analytique sera obtenue, un domaine dans lequel le résultat devra se trouver. La contrainte effective minimale qui correspond à l'initiation de l'endommagement est choisi par la formule suivante :

$$\sigma_{min}^{lim} = E\varepsilon_e^s \tag{2.26}$$

La contrainte limite maximale est par ailleurs choisie comme valant :

$$\sigma_{max}^{lim} = E\left(\varepsilon_e^s + 3\frac{\varepsilon_e^c - \varepsilon_e^s}{a}\right) \tag{2.27}$$

Ce niveau de contrainte en front d'onde entraı̂ne en effet, avec le modèle à endommagement retardé sans simplification, un taux d'endommagement  $\dot{D}$  égal environ à 95% de sa valeur maximale  $\frac{1}{\tau^c}$ . Les deux fonctions Heavyside correspondantes du modèle simplifié ainsi que le modèle complet sont représentés (en discontinu rouge) sur la figure 2.16 pour deux valeurs du paramètre a. On remarque en particulier que :

- la borne inférieure est indépendante de a. En effet, celle-ci est fixée par la contrainte effective correspondant à l'initiation de l'endommagement, qui est un paramètre du matériau indépendant des paramètres de l'effet retard.
- plus le paramètre a augmente, plus les bornes inférieure et supérieure sont proches.

Ceci nous permet d'interpréter différemment la borne inférieure du modèle simplifié mis en place : elle correspond en fait au modèle d'endommagement retardé classique avec une valeur de paramètre a infinie. En effet, la fonction  $h(\tilde{\sigma})$  de l'équation 2.23 tend bien vers une fonction Heavyside (délimité par  $\sigma_{min}^{lim} = E\varepsilon_e^s$ ) lorsque a tend vers  $+\infty$ .

- 2.4.1.1.3 Bilan pour le modèle simplifié d'endommagement retardé Le modèle simplifié est maintenant mis en place. Il est caractérisé uniquement par la donnée des :
  - paramètres a et  $\tau^c$  de l'endommagement retardé.
  - contraintes limites minimale et maximale  $\sigma_{min}^{lim}$  et  $\sigma_{min}^{lim}$  qui se déduisent simplement des données matériaux classiques.

En un point donné, il suffit donc de connaître le niveau de contrainte  $\Delta \sigma$  au moment du passage de l'onde en ce point, puis d'appliquer le modèle simplifié d'endommagement retardé, pour savoir si l'endommagement va évoluer ou non.

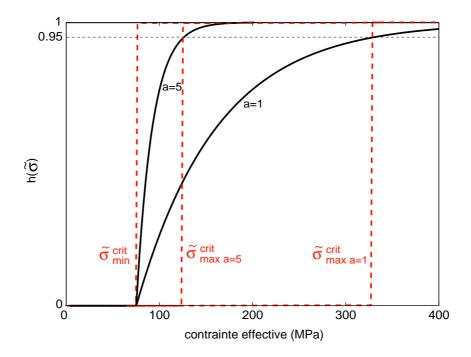


Fig. 2.16 – Modèle d'endommagement initial (continu noir) et simplifié (discontinu rouge) pour deux valeurs du paramètre a. Les fonctions Heavyside correspondent aux bornes du modèle, c'est-à-dire à une contrainte limite égale soit à  $\sigma_{min}^{lim}$  soit à  $\sigma_{max}^{lim}$ .

### 2.4.1.2 Détermination sur un modèle continu

L'objectif de cette partie est de déterminer une formule analytique de la longueur caractéristique  $\ell^{car}$ . Les principaux outils et hypothèses utilisés sont :

- les équations générales de la mécanique des milieux continus.
- le modèle d'endommagement retardé simplifié mis en place dans les paragraphes précédents.
- la limitation de l'étude au niveau du front de l'onde, c'est-à-dire en x = ct.
- la sollicitation caractérisée par le niveau de l'onde de contrainte qu'elle engendre, à savoir  $\Delta \sigma$ .

Les principales équations, à savoir la relation de comportement, l'expression de la déformation, le lien entre contrainte usuelle et contrainte effective, l'équation d'équilibre et la loi d'évolution simplifiée de l'endommagement retardé, qui vont servir sont rappelées ici. Les variables x et t correspondent respectivement à la variable en espace et à la variable en temps.

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}(x,t) = E\varepsilon_{e}(x,t) \\ \varepsilon_{e}(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \\ \sigma(x,t) = (1 - D(x,t))\tilde{\sigma}(x,t) \\ \frac{\partial \sigma(x,t)}{\partial x} = \rho \frac{\partial^{2} u(x,t)}{\partial t^{2}} \\ \dot{D} = 0 \ \forall t > \mathcal{T} \ si \ \tilde{\sigma} < \sigma^{lim} \\ \dot{D} = \frac{1}{\tau^{c}} \ jusqu'à \ rupture \ si \ \tilde{\sigma} \geq \sigma^{lim} \end{cases}$$

$$(2.28)$$

En recombinant ces équations, et notamment en injectant les trois premières équations dans l'équation d'équilibre, il est possible d'obtenir une équation différentielle du second degré uniquement fonction de la contrainte effective  $\tilde{\sigma}$  et de l'endommagement D.

$$\frac{\partial \left(\tilde{\sigma}(x,t)(1-D(x,t))\right)}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \tilde{\sigma}(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{\sigma}(x,t)}{\partial t^2}$$
(2.29)

En réécrivant les dérivées partielles sous la forme de limite, il est possible de réécrire l'équation différentielle 2.29 sous la forme de l'équation 2.30.

$$\lim_{dx\to 0} \left[ \frac{1}{dx^2} \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}(x+dx,t)(1-D(x+dx,t)) \\ -2\tilde{\sigma}(x,t)(1-D(x,t)) \\ +\tilde{\sigma}(x-dx,t)(1-D(x-dx,t)) \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{c^2} \lim_{dt\to 0} \left[ \frac{1}{dt^2} \left( \tilde{\sigma}(x,t+dt) - 2\tilde{\sigma}(x,t) + \tilde{\sigma}(x,t-dt) \right) \right]$$
(2.30)

Nous suivons le front de l'onde pour lequel les variables x et t sont donc liées par la célérité des ondes : x = ct. De même, on peut écrire que :

$$dx = cdt (2.31)$$

La poutre étant, avant le passage de l'onde, dans son état initial, il existe un certain nombre de simplifications <sup>12</sup>:

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}(x+dx,t) = 0\\ D(x+dx,t) = 0\\ \tilde{\sigma}(x,t-dt) = 0\\ D(x,t-dt) = 0 \end{cases}$$
(2.32)

De plus, vu le modèle d'endommagement simplifié considéré :

 $<sup>^{12}</sup>$ Ces simplifications découlent du fait que contrainte effective et endommagement sont nuls devant le front, c'est-à-dire pour les points de coordonnées (x + dx, t) et (x, t - dt).

$$\begin{cases} D(x,t) = 0\\ D(x - dx, t) = D(x - cdt, t) = \frac{dt}{\tau^c} \end{cases}$$
(2.33)

En prenant en compte l'ensemble des simplifications proposées par les équations 2.32 et 2.33 et en remplaçant dx grâce à l'équation 2.31, l'équation différentielle 2.30 écrite sous forme de limite peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\lim_{dt \to 0} \left[ \frac{\tilde{\sigma}(x - cdt, t) - \tilde{\sigma}(x, t + dt)}{dt} \right] - \frac{1}{\tau^c} \lim_{dt \to 0} \tilde{\sigma}(x - cdt, t)$$
 (2.34)

Si l'on note  $\check{\sigma}$  la contrainte effective au niveau du front de l'onde qui est uniquement fonction du temps t (ou uniquement de x) et en repassant sous la forme différentielle classique, on obtient finalement une nouvelle équation différentielle, mais du premier ordre cette fois, à laquelle on ajoute les conditions initiales, à savoir que la contrainte effective au début de la sollicitation, c'est-à-dire au niveau de l'extrémité libre, est égale à la contrainte  $\Delta \sigma$ :

$$\begin{cases} \frac{d\check{\sigma}(t)}{dt} + \frac{1}{\tau^c}\check{\sigma} = 0\\ \check{\sigma}(0) = \Delta\sigma \end{cases}$$
 (2.35)

La solution de cette équation différentielle s'obtient simplement et vaut :

$$\check{\sigma}(t) = \Delta \sigma \exp\left(-\frac{t}{\tau^c}\right) \tag{2.36}$$

Cette solution est valable tant que l'endommagement se propage dans la poutre, c'est-à-dire tant que  $\check{\sigma} \geq \sigma^{lim}$ . Ainsi, on peut en déduire un temps limite correspondant à l'arrêt de la propagation de l'endommagement; la longueur caractéristique  $\ell^{car}$  s'obtient en multipliant ce temps limite par la célérité des ondes c.

$$t^{lim} = \tau^c \ln \left( \frac{\Delta \sigma}{\sigma^{lim}} \right) \tag{2.37}$$

$$\ell^{car} = ct^{lim} = c\tau^c \ln\left(\frac{\Delta\sigma}{\sigma^{lim}}\right)$$
 (2.38)

Cette longueur caractéristique est donc proportionnelle à la vitesse des ondes élastiques c d'une part et au temps caractéristique  $\tau^c$  du modèle d'endommagement retardé d'autre part. Le niveau de la sollicitation  $\Delta\sigma$  intervient via l'intermédiaire d'un logarithme. C'est également dans le logarithme, au dénominateur, qu'intervient la contrainte limite  $\sigma^{lim}$ . Lorsque l'on considère la contrainte limite minimale  $\sigma^{lim}_{min}$ , on a donc un majorant de la longueur caractéristique et réciproquement un minorant si on considère  $\sigma^{lim}_{max}$ . Il est donc maintenant possible de comparer les bornes du modèle analytique à des résultats numériques.

## 2.4.2 Validation du modèle analytique

Cette partie présente la validation de l'expression analytique de la longueur caractéristique à partir d'études numériques. Il s'agit, d'une part, de valider dans la mesure du possible les hypothèses qui ont été faîtes pour construire le modèle d'endommagement retardé simplifié et, d'autre part, de montrer que les bornes analytiques encadrent effectivement les résultats numériques. A l'issue de cette validation, une analyse de l'influence des paramètres de l'effet retard a et  $\tau^c$  est effectuée. Dans ce paragraphe, l'exemple de la poutre encastrée soumise à une sollicitation (voir la figure 2.2) est repris une nouvelle fois. Comme cela a été vue sur la figure 2.7, selon la rampe du déplacement imposé (ou de manière équivalente, selon l'effort imposé), la longueur caractéristique varie et peut être déterminée. Il s'agit donc ici de déterminer numériquement cette évolution et de la comparer au résultats analytiques proposés. Les résultats présentés ici sont par ailleurs également commentés dans [Suffis et Combescure, 2002a, Suffis et al., 2003a, Suffis et Combescure, 2003c]. Les propriétés du matériau sont données dans le tableau 2.1 (sauf  $\varepsilon_e^s = 1.32e - 3$ ). La longueur de la poutre est choisie de telle sorte qu'il n'y ait aucune réflexion d'onde. Enfin, les paramètres a et  $\tau^c$  de l'effet retard sont respectivement égaux à 10 et  $5\mu s$ . L'étude de convergence effectuée dans la partie précédente garantie par ailleurs que les résultats numériques obtenus convergent rapidement; on se contentera donc ici de choisir un maillage suffisamment fin pour représenter correctement la zone endommagée.

## 2.4.2.1 Vérification des hypothèses

Un certain nombre d'hypothèses ont été faîtes lors de la mise en place du modèle d'endommagement retardé simplifié :

- 1. lorsque l'onde passe, le modèle d'endommagement retardé simplifié n'autorise que deux taux d'endommagement (correspondant à la fonction Heavyside) selon la valeur de la contrainte : 0 ou  $\frac{1}{\tau^c}$ .
- 2. une fois qu'une zone commence a s'endommager, elle s'endommage totalement (avec un taux d'endommagement de  $\frac{1}{\tau^c}$ ) permettant ainsi de limiter l'étude au niveau du front de l'onde.

Il est possible de vérifier que les résultats d'une simulation concordent, ou du moins restent proches, du domaine de validité de ces hypothèses. Une simulation est donc effectuée avec le matériau modèle décrit précédemment et une contrainte imposée à l'extrémité égale à 100MPa. Dans un graphique espace-temps, la figure 2.17 donne l'évolution de l'endommagement. Sont tracées en particulier les courbes d'iso-endommagement à 1%, 20%, 40%, 60%, 80% et 100% de l'endommagement critique  $D^c$  (ici égal à 1). Pour un temps donné, cette figure donne donc le profil d'endommagement le long de la poutre; pour un point donné, elle donne l'évolution de l'endommagement en ce point. La longueur caractéristique correspond alors à la distance atteinte par l'iso-endommagement à 100%. Apparaît également sur cette figure le résultat obtenu par le modèle analytique avec  $\sigma_{min}^{lim}$  pour contrainte critique. Fidèlement au modèle analytique, on a donc une onde d'endommagement

qui se propage avec l'onde de contrainte sur une distance  $\ell^{car}$  donnée par la formule 2.38. Après le passage de l'onde, le taux d'endommagement reste égal à  $\frac{1}{\tau^c}$  jusqu'à l'endommagement total, c'est-à-dire que les iso-endommagements sont des droites parallèles de pente la vitesse des ondes c.

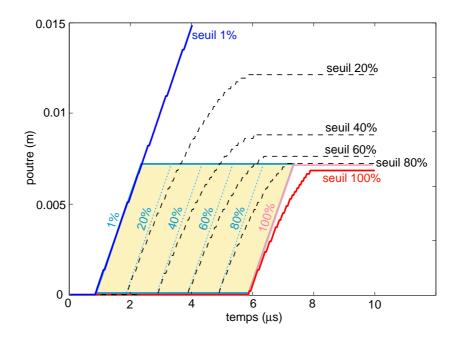


Fig. 2.17 – Isovaleurs d'endommagement pour un résultat numérique et pour le modèle analytique

La comparaison de ces deux résultats valide a posteriori les hypothèses effectuées pour obtenir la formulation analytique. La première constatation à faire est que l'iso-endommagement à 1% a une pente égale à c; il ne semble donc a priori pas impossible de limiter l'étude au niveau du front de l'onde. On note également que, pour les simulations, dans la zone qui va complètement s'endommager, le taux d'endommagement est proche de sa valeur maximale  $\frac{1}{\tau^c}$  qui n'est autre que celle du modèle simplifié. Les iso-endommagements obtenues numériquement ont effectivement des pentes proches de c dans cette zone. Feissel [Feissel , 2003a] a également montré que, pour des sollicitations dynamiques, le taux d'endommagement dans ces mêmes zones était très proche du taux d'endommagement maximum  $\frac{1}{\tau^c}$ . Les hypothèses 1 et 2 semblent assez raisonnables.

#### 2.4.2.2 Comparaison entre résultats analytiques et numériques

La figure 2.18 présente simultanément les longueurs caractéristiques numériques (un point par simulation) et analytiques (les deux droites limites du modèle) en fonction de  $\Delta \sigma$  qui est le niveau de contrainte imposé à l'extrémité. Les contraintes limites associées aux deux bornes analytiques sont choisies en appliquant les formules 2.26 et 2.27; numériquement, on obtient donc les valeurs suivantes :  $\sigma_{min}^{lim} = 75.24 MPa$  et  $\sigma_{max}^{lim} = 101.232 MPa$ . Sur la figure 2.18 pour laquelle on considère une

échelle logarithmique pour les contraintes, les bornes analytiques sont donc les deux droites de pente  $c\tau^c$  et coupant l'axe des abscisses en  $\sigma_{min}^{lim}$  et  $\sigma_{max}^{lim}$ .

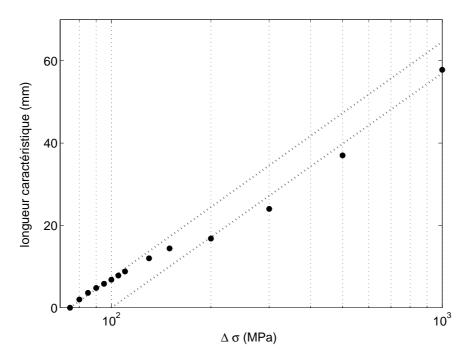


Fig. 2.18 – Evolution de la longueur caractéristique. Comparaison entre les résultats numériques (points) et les bornes analytiques (droites en pointillés). Dans l'ensemble, les résultats numériques sont bien compris entre les bornes obtenues grâce au modèle analytique.

On constate que pour des contraintes réalistes <sup>13</sup>, la longueur caractéristique est d'abord quasiment confondue avec la borne analytique supérieure (correspondant à la contrainte limite inférieure). Ensuite, elle se rapproche progressivement de la borne analytique inférieure. Ces résultats sont donc très satisfaisants; en effet, l'objectif était d'obtenir une approximation de la longueur caractéristique afin de choisir au mieux le raffinement du maillage en fonction de la taille de la zone endommagée.

D'autres séries de simulations utilisant différents couples de paramètres de l'effet retard ont été effectuées notamment dans [Suffis et Combescure , 2002a]. Elles ont permis, d'une part, de montrer que la qualité des résultats était conservée et, d'autre part, de déterminer l'influence de chacun des paramètres. Ces résultats sont résumés sur la figure 2.19 où ne sont présentées que les bornes analytiques. Les bornes présentant l'influence du temps caractéristique  $\tau^c$  sont en rouge, celles présentant l'influence du paramètre a en bleu. Les paramètres de référence (qui correspondent à ceux de la figure 2.18) restent en noir. Il est ainsi possible de constater que :

- plus le temps caractéristique est élevé, plus la longueur caractéristique est grande (à contrainte imposée égale). On retrouve en particulier, pour le cas

 $<sup>^{13}</sup>$ C'est-à-dire des contraintes du même ordre de grandeur que la contrainte correspondant à l'endommagement total pour le modèle classique (donc en quasi-statique). Dans notre cas, cette contrainte correspond à  $E\varepsilon_e^c$  et vaut environ 160MPa.

limite où le temps caractéristique  $\tau^c$  tend vers 0, le résultat du modèle d'endommagement classique sans effet retard, à savoir une longueur caractéristique nulle. Ceci s'interprète très facilement par la formule analytique de la longueur caractéristique  $\ell^{car}$  (voir équation 2.38);  $\ell^{car}$  est en effet proportionnelle à  $\tau^c$ .

- lorsque a diminue, l'intervalle entre les deux bornes augmente et la longueur caractéristique a tendance à diminuer. Pour le cas limite où a est très grand, les bornes analytiques inférieure et supérieure sont quasiment confondues. On retrouve donc les conclusions du paragraphe 2.4.1.1.2, c'est-à-dire que le modèle d'endommagement retardé est dans ce cas équivalent au modèle simplifié avec  $\sigma^{lim}_{min}$  comme contrainte limite.

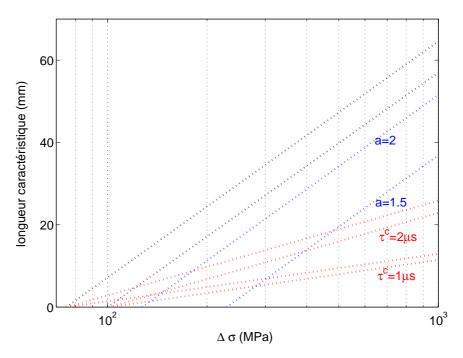


Fig. 2.19 – Influence des paramètres a et  $\tau^c$  sur la longueur caractéristique. Les bornes pour les paramètres de référence sont en noir. Celles où le temps caractéristique a été modifié apparaissent en rouge. Enfin, lorsque le paramètre a est modifié, seule la borne inférieure est modifiée; elle est tracée en bleu.

## 2.4.3 Conclusions

Dans un souci de pouvoir choisir judicieusement la finesse du maillage avant d'effectuer une simulation, la détermination approximative a priori de la longueur caractéristique  $\ell^{car}$  semble intéressante. Afin d'obtenir une formule analytique simple donnant  $\ell^{car}$  en fonction des différents paramètres, un modèle simplifié conservant la principale propriété du modèle d'endommagement retardé, à savoir la limitation du taux d'endommagement, a d'abord été mis en place. Ne nous intéressant qu'aux événements au niveau du front de l'onde, la formule analytique 2.38 a été obtenue, d'une part, comme la limite d'un modèle discret semblable aux éléments finis et,

d'autre part, directement à partir d'une étude sur un modèle continu. L'importance du choix de la contrainte limite a été mis en évidence; deux valeurs permettent d'encadrer correctement les résultats.

Le matériau support de l'étude effectuée ici, un matériau élastique endommageable, reste toutefois simple en regard des matériaux que nous serons amenés à étudier dans la suite de notre étude, des matériaux élasto-plastiques, voire visco-plastiques endommageables. Un autre étude [Suffis et Combescure , 2002a] a par ailleurs montré que, pour ce qu'on a appelé des contraintes réalistes, le modèle conservé tel quel donnait encore des résultats satisfaisants, c'est-à-dire que l'approximation de la longueur caractéristique  $\ell^{car}$  est correcte, pour ces types de matériaux plus complexes.

Ayant désormais à disposition un outil qui nous permet, connaissant le niveau de contrainte  $\Delta \sigma$ , de déterminer la taille des éléments  $\Delta x$  adéquate pour représenter au mieux la zone endommagée, une possibilité d'amélioration est d'utiliser des techniques de remaillage automatique en cours de calcul. C'est-à-dire que connaissant le niveau de contrainte  $\Delta \sigma$  à un instant t de la simulation, le code remaille automatiquement la zone concernée avec la taille d'élément adéquate.

Dans le même ordre d'idée, l'usage d'une méthode multi-grille est simplifié. Au lieu de comparer deux à deux les niveaux de maillages successifs jusqu'à satisfaction de la condition sur le niveau d'erreur, il est possible de choisir immédiatement comme niveau initial celui correspondant à la taille d'élément  $\Delta x$  donné par le modèle analytique.

Enfin, l'étude présentée dans cette partie est une étude uni-dimensionnelle. La notion de longueur caractéristique en deux dimensions, et donc a fortiori en trois dimensions, est plus délicate à appréhender. Il serait donc souhaitable, de manière analogue à ce qui a été fait en uni-dimensionnel, d'être capable de définir une surface caractéristique ou encore un volume caractéristique. Ces études sont laissées en perspective et nous nous contenterons dans la suite de l'étude d'utiliser la formule analytique de  $\ell^{car}$  dans les cas de chargement uni-dimensionnel ou dans les cas qui s'en rapprochent.

# 2.5 Implantation numérique

Dans le cadre des partenariats de la thèse, le CEA Saclay, la SNECMA, l'INSA de Lyon, et dans le cadre des matériaux visés par cette étude, les métaux élastoplastiques ou visco-plastiques endommageables, nous avons choisi d'implanter le modèle d'endommagement dans un code de calcul qualifié d'industriel, et ce pour un type de modèle correspondant aux diverses attentes. Ceci nous a amené naturellement à choisir le code de dynamique explicite Europlexus développé conjointement par le CEA Saclay et le Join Research Center, ainsi que le modèle de plasticité couplée à l'endommagement [Lemaître, 1996a, Lemaître et Chaboche, 1996b] développé dans ce code. Cette partie a donc pour objectif de présenter l'implantation numérique de l'endommagement retardé dans ce code, et plus précisément dans ce type de modèle.

Comme cela a été vu précédemment, l'introduction du retard ne bouleverse pas fondamentalement les équations du modèle. L'implantation du modèle a donc consisté à modifier l'implantation existante [Strub , 1991, 1998, Merelo et Strub , 1998] pour qu'elle puisse prendre en compte de manière optionnelle l'effet retard dans l'endommagement. Les équations du modèle de plasticité couplée à l'endommagement retardé sont donc présentées dans un premier temps. Leur implantation numérique est ensuite détaillée. Enfin, un exemple bi-dimensionnel utilisant ce modèle est simulé à l'issue de cette partie, notamment pour montrer à nouveau, mais en deux dimensions et en plasticité cette fois, les capacités du modèle d'endommagement retardé à résoudre les problèmes de la dépendance des résultats vis-à-vis du maillage.

## 2.5.1 Plasticité couplée à l'endommagement retardé

#### 2.5.1.1 Equations du modèle

Lorsque l'on introduit l'effet retard (tel qu'il est décrit précédemment dans la partie 2.2 ou dans les articles de la littérature qui s'y intéressent [Deü , 1997, Allix et al. , 1999, Suffis et Combescure , 2002b, Suffis et al. , 2003a]) dans un modèle élastique endommageable, nous avons vu que les équations du modèle n'étaient que peu modifiées. De la même façon, l'introduction de l'effet retard dans la plasticité de von Mises couplée à l'endommagement n'influe que de manière limitée sur les équations du modèle [Suffis , 2002c, Suffis et Combescure , 2003b]. Celles-ci, dans le cas classique de l'endommagement sans effet retard, ont notamment été écrites par Lemaître et Chaboche [Lemaître , 1996a, Lemaître et Chaboche , 1996b].

Ainsi, l'ensemble des équations sont conservées, l'endommagement qui était calculé classiquement auparavant (dit désormais "non-corrigé" et noté  $D^{nc}$ ) permet alors de déterminer le taux d'endommagement de l'endommagement D du nouveau modèle via l'équation fondatrice du modèle d'endommagement retardé 2.10.

Dans le cas de la plasticité de von Mises couplée à l'endommagement, la fonction de charge f est définie par l'équation 2.39 où  $\sigma^{vm}$  est la contrainte de von Mises et  $\sigma^y + R(\lambda)$  la limite élastique augmentée de l'écrouissage ( $\lambda$  est le multiplicateur plastique).

$$f = \frac{\sigma^{vm}}{1 - D} - R(\lambda) - \sigma^y = 0 \tag{2.39}$$

La loi d'écoulement associée, permettant de définir le taux de déformation plastique  $\dot{\varepsilon_p}$ , s'écrit comme suit :

$$\dot{\varepsilon_p} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\lambda}}{1 - D} \frac{\sigma^d}{\sigma^{vm}} \tag{2.40}$$

où  $\sigma^d$  est le déviateur du tenseur des contraintes. On en déduit facilement le taux de déformation plastique cumulée  $\dot{p}$  :

$$\dot{p} = \frac{\dot{\lambda}}{1 - D} \tag{2.41}$$

De la même manière, le taux d'endommagement sans effet retard que l'on note  $\dot{D}^{nc}$  peut être déduit du potentiel de dissipation par endommagement  $\varphi_D^*$  (équation 2.42).  $\varepsilon_p^s$  et  $\varepsilon_p^c$  représentent respectivement le seuil et la valeur critique de la déformation plastique. Le rapport de la pression hydrostatique  $\sigma^D$  par la contrainte de von Mises correspond au taux de triaxialité.

$$\begin{cases}
si \left[ \frac{2}{3} (1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left( \frac{\sigma^H}{\sigma^{vm}} \right)^2 \right] p > \varepsilon_p^s : \\
\dot{D}_{nc} = -\dot{\lambda} \frac{\partial \varphi_D^*}{\partial Y} = \frac{D^c}{\varepsilon_p^c - \varepsilon_p^s} \left[ \frac{2}{3} (1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left( \frac{\sigma^H}{\sigma^{vm}} \right)^2 \right] \frac{\dot{\lambda}}{1 - D} \\
sinon \dot{D}_{nc} = 0
\end{cases}$$
(2.42)

Enfin, la décomposition additive du tenseur de déformation en une partie élastique et un partie plastique ainsi que la loi de Hooke (le tenseur de Hooke est noté H) s'écrivent :

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \tag{2.43}$$

$$\sigma = (1 - D)H\varepsilon_e \tag{2.44}$$

Si on considère  $D=D^{nc}$ , ces équations définissent le comportement d'un matériau plastique endommageable sans effet retard. Introduire l'effet retard dans ces équations consiste seulement à déterminer l'endommagement non-corrigé  $D^{nc}$  à l'aide de l'équation 2.42, puis à calculer le taux d'endommagement (avec effet retard) à l'aide de l'équation fondamentale du modèle d'endommagement retardé que l'on rappelle ici :

$$\begin{cases}
\dot{D} = \frac{1}{\tau^c} \left( \exp\left[ -a \left\langle D^{nc} - D \right\rangle \right] \right) & \text{si } D \leq D^c \\
D = D^c & \text{sinon} 
\end{cases}$$
(2.45)

Que l'endommagement soit retardé ou non, on peut d'ores et déjà remarquer que, comme dans le cas élastique endommageable (voir partie 2.2), le second principe de la thermodynamique est satisfait. En effet, on vérifie toujours  $-Y\dot{D} \geq 0$  où -Y est le taux de restitution d'énergie. Dans le cas où l'endommagement n'est pas retardé, l'endommagement dérive du potentiel de dissipation par endommagement  $\varphi_D^*$  (voir équation 2.42). Lorsque l'endommagement est retardé,  $\varphi_D^*$  ne correspond plus à ce potentiel. Cependant, en utilisant la transformée de Legendre-Fenchel [Ladevèze , 1996], il doit être possible de remplacer les équations 2.42 et 2.45 par l'unique équation 2.46 où la fonction  $\tilde{\varphi}_D^*$  représente alors effectivement le potentiel

de dissipation par endommagement. L'existence de cette fonction sera ici supposée mais elle ne sera pas déterminée.

$$\begin{cases}
si \left[ \frac{2}{3} (1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left( \frac{\sigma^{H}}{\sigma^{vm}} \right)^{2} \right] p > \varepsilon_{p}^{s} : \\
\dot{D} = -\dot{\lambda} \frac{\partial \tilde{\varphi}_{D}^{s}}{\partial Y} \\
sinon \dot{D} = 0
\end{cases}$$
(2.46)

L'ensemble de ses équations permettent donc de modéliser la plasticité de von Mises couplée à l'endommagement retardé ou non. Il s'agit maintenant de voir comment ce modèle a été implanté dans le code de dynamique explicite Europlexus.

# 2.5.2 Integration numérique du modèle

Comme cela a été indiqué précédemment, le modèle de matériau avec plasticité de von Mises isotrope et endommagement est d'ores et déjà implanté dans Europlexus [Europlexus , 2002]. Cette implantation a été reprise des programmes existants sur les logiciels Castem2000 et Plexus [Strub , 1991, 1998, Merelo et Strub , 1998]. L'implantation telle qu'elle a été effectuée dans Europlexus pour la plasticité de von Mises couplée à l'endommagement a donc été modifiée pour permettre d'introduire un effet retard. Dans le souci, d'une part, de ne pas obliger l'utilisateur a utilisé l'endommagement retardé et, d'autre part, de permettre au code de continuer à effectuer les anciennes simulations sans changer le jeu de données, l'effet retard a été introduit comme une option au code existant. L'implantation numérique est cependant présentée dans son ensemble.

#### 2.5.2.1 Méthode générale utilisée

Le problème que l'on se pose est le suivant. Toutes les quantités sont supposées connues à un instant  $t_n$  et le but est de déterminer la valeur de ces quantités à l'instant  $t_n + \Delta t$  (où  $\Delta t$  est petit...) connaissant l'incrément des déformations totales  $\Delta \varepsilon$ . L'incrément des déformations totales  $\Delta \varepsilon$  a été déterminé à l'issue du pas de temps précédent grâce à l'écriture de l'équilibre et à un schéma de Newmark aux différences centrées (d'où le caractère explicite du code). L'objectif est donc de résoudre, en fait d'intégrer, les équations qui régissent le modèle (équations 2.39 à 2.46) pour une valeur de  $\dot{\varepsilon}$  fixée.

Les équations qui vont nous permettre de déterminer les quantités au temps  $t_n + \Delta t$  sont déduites des équations 2.43, 2.44, 2.40 et 2.46 en les mettant sous leurs formes différentielles.

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{e} + \dot{\varepsilon}_{p} \\ \dot{\sigma} = (1 - D)H\dot{\varepsilon}_{e} - \frac{\sigma}{1 - D}\dot{D} \\ \dot{\varepsilon}_{p} = \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \sigma} \\ \dot{D} = -\dot{\lambda}\frac{\partial \tilde{\varphi}_{D}^{*}}{\partial Y} \text{ si l'endommagement est } retard\acute{e}, = -\dot{\lambda}\frac{\partial \varphi_{D}^{*}}{\partial Y} \text{ sinon} \end{cases}$$

$$(2.47)$$

que l'on réécrit sous forme incremental :

$$\begin{cases} \Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon_{e} + \Delta \varepsilon_{p} \\ \Delta \sigma = (1 - D)H \Delta \varepsilon_{e} - \frac{\sigma}{1 - D} \\ \Delta \varepsilon_{p} = \Delta \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \\ \Delta D = -\Delta \lambda \frac{\partial \varphi_{D}^{*}}{\partial Y} \text{ si } l' endommagement est } retard\acute{e}, = -\Delta \lambda \frac{\partial \varphi_{D}^{*}}{\partial Y} \text{ sinon} \end{cases}$$

$$(2.48)$$

Ce système peut alors être décomposé en deux sous-systèmes; le premier élastique et l'autre plastique [Crisfield , 1991, 1997]. La décomposition du système conduit à la méthode d'intégration suivante :

Les équations du système élastique sont d'abord intégrées. On obtient ainsi une "estimation élastique" des variables du modèle. Celle-ci sert de condition initiale lors de l'intégration des équations du système plastique au cours de laquelle les contraintes calculées élastiquement sont ramenées sur la surface de charge.

### 2.5.2.2 Système élastique

Le système élastique est obtenu en reprenant le système d'équation 2.48 où l'on considère que seules les variables relatives à l'élasticité évoluent. C'est-à-dire que l'incrément de déformation plastique, l'incrément de multiplicateur plastique et l'incrément d'endommagement sont nuls dans ce système.

$$\begin{cases}
\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon_e + \Delta \varepsilon_p \\
\Delta \sigma = (1 - D)H\Delta \varepsilon_e \\
\Delta \varepsilon_p = 0 \\
\Delta \lambda = 0 \\
\Delta D = 0
\end{cases} (2.49)$$

Le taux de déformation élastique est directement égal au taux de déformation totale. On a alors simplement l'estimation élastique des contraintes. On détermine alors trivialement les estimations élastiques (indicées  $^{(0)}$ ) au temps  $t_{n+1}$ . Si, à ce niveau, la condition  $f_{n+1} \leq 0$  calculée à partir de l'équation 2.39 est vérifiée, les quantités calculées correspondent à celle du temps  $t_{n+1}$ , sinon, il faut résoudre le système plastique.

### 2.5.2.3 Système plastique

Partant de l'estimation élastique, le système plastique impose un incrément de déformation nulle (il a déjà été pris en compte lors du système élastique). Le système suivant est alors obtenu :

$$\begin{cases} \Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon_{e} + \Delta \varepsilon_{p} = 0 \\ \Delta \sigma = -(1 - D)H\Delta \varepsilon_{p} - \frac{\sigma}{1 - D}\Delta D \\ \Delta \varepsilon_{p} = \frac{3}{2} \frac{\Delta \lambda}{1 - D} \frac{\sigma^{d}}{\sigma^{vm}} \\ \Delta D = -\Delta \lambda \frac{\partial \varphi_{D}^{*}}{\partial Y} \text{ si } l'endommagement est } retard\acute{e}, = -\Delta \lambda \frac{\partial \varphi_{D}^{*}}{\partial Y} \text{ sinon} \end{cases}$$

$$(2.50)$$

En remplaçant  $\Delta \varepsilon_p$  et  $\Delta D$  par leurs expressions, on obtient un système où seul  $\Delta \lambda$  apparaît dans les termes de droite.

$$\begin{cases} \Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon_{e} + \Delta \varepsilon_{p} = 0 \\ \Delta \sigma = \Delta \lambda \left[ -(1 - D)H \frac{3}{2} \frac{1}{1 - D} \frac{\sigma^{d}}{\sigma^{vm}} + \frac{\sigma}{1 - D} \frac{\partial \tilde{\varphi}_{D}^{*}}{\partial Y} \right] si \ l'endommagement \ est \ retard\acute{e}, \\ \Delta \sigma = \Delta \lambda \left[ -(1 - D)H \frac{3}{2} \frac{1}{1 - D} \frac{\sigma^{d}}{\sigma^{vm}} + \frac{\sigma}{1 - D} \frac{\partial \varphi_{D}^{*}}{\partial Y} \right] sinon \\ \Delta \varepsilon_{p} = \frac{3}{2} \frac{\Delta \lambda}{1 - D} \frac{\sigma^{d}}{\sigma^{vm}} \\ \Delta D = -\Delta \lambda \frac{\partial \tilde{\varphi}_{D}^{*}}{\partial Y} \ si \ l'endommagement \ est \ retard\acute{e}, = -\Delta \lambda \frac{\partial \varphi_{D}^{*}}{\partial Y} \ sinon \end{cases}$$

$$(2.51)$$

L'objectif est de déterminer  $\Delta\lambda$  et donc, grâce au système ci-dessus, l'ensemble des variables au temps  $t_{n+1}$ . On procède ainsi par itérations successives jusqu'à ce que les contraintes soient sur la surface de charge; c'est-à-dire jusqu'à la  $i^{ème}$  itération pour laquelle  $f_{n+1}^{(i)} = 0$  (à une précision près). Les données initiales de cette boucle itérative sont les estimations élastiques que nous avons indicées  $^{(0)}$ .

La méthode itérative choisie pour déterminer l'incrément de multiplicateur plastique  $\Delta \lambda^{(0)}$  est mixte, on va en effet d'abord utiliser un algorithme de Newton-Raphson (basé sur le calcul de la dérivée de la fonction de charge) pour déterminer le premier incrément de multiplicateur plastique  $\Delta \lambda^{(1)}$ , puis on utilise ensuite un algorithme de la sécante jusqu'à convergence. Seule la première étape est détaillée ici <sup>14</sup>.

Pour déterminer la première itération, il s'agit donc de linéariser la fonction de charge autour des valeurs courantes (c'est-à-dire les estimations élastiques de la contrainte  $\sigma_{n+1}^{(0)}$ , de l'endommagement  $D_{n+1}^{(0)} = D_n$  et du multiplicateur plastique  $\lambda_{n+1}^{(0)} = \lambda_n$ ), on obtient alors l'équation suivante :

$$f = f(\sigma_{n+1}^{(0)}, D_{n+1}^{(0)}, \lambda_{n+1}^{(0)}) + \frac{\partial f}{\partial \sigma}(\sigma_{n+1}^{(0)}, D_{n+1}^{(0)}, \lambda_{n+1}^{(0)}) : \Delta \sigma + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\sigma_{n+1}^{(0)}, D_{n+1}^{(0)}, \lambda_{n+1}^{(0)}) : \Delta \lambda + \frac{\partial f}{\partial D}(\sigma_{n+1}^{(0)}, D_{n+1}^{(0)}, \lambda_{n+1}^{(0)}) : \Delta D$$

$$(2.52)$$

où:

 $<sup>^{14}\</sup>mathrm{La}$  seconde est rapidement présentée lorsque l'algorithme global est donné dans le paragraphe 2.5.2.4.

$$\begin{cases} si\ l'endommagement\ est\ retard\acute{e}: \\ \begin{cases} \Delta\sigma = \Delta\lambda[-(1-D_{n+1}^{(0)})H\frac{3}{2}\frac{1}{1-D_{n+1}^{(0)}}\frac{\sigma_{n+1}^{d(0)}}{\sigma_{n+1}^{vm}(0)} + \frac{\sigma_{n+1}^{(0)}}{1-D_{n+1}^{(0)}}(\frac{\partial\tilde{\varphi}_{D}^{*}}{\partial Y})^{(0)}] \\ \Delta D = -\Delta\lambda(\frac{\partial\tilde{\varphi}_{D}^{*}}{\partial Y})^{(0)} \\ sinon: \\ \begin{cases} \Delta\sigma = \Delta\lambda[-(1-D_{n+1}^{(0)})H\frac{3}{2}\frac{1}{1-D_{n+1}^{(0)}}\frac{\sigma_{n+1}^{d(0)}}{\sigma_{n+1}^{vm}(0)} + \frac{\sigma_{n+1}^{(0)}}{1-D_{n+1}^{(0)}}(\frac{\partial\varphi_{D}^{*}}{\partial Y})^{(0)}] \\ \Delta D = -\Delta\lambda(\frac{\partial\varphi_{D}^{*}}{\partial Y})^{(0)} \end{cases} \end{cases}$$
(2.53)

et

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \sigma}^{(0)} = \frac{3}{2} \frac{\sigma_{n+1}^{d}}{(1 - D_{n+1}^{(0)}) \sigma_{n+1}^{vm}}^{(0)} \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda}^{(0)} = -R'(\lambda_{n+1}^{(0)}) \\ \frac{\partial f}{\partial D}^{(0)} = \frac{\sigma_{n+1}^{vm}}{(1 - D_{n+1}^{(0)})^2} \end{cases}$$
(2.54)

L'objectif étant d'obtenir f=0, on obtient  $\Delta\lambda^{(0)}$  en utilisant l'équation 2.52 et les expressions ci-dessus  $^{15}$ :

$$\Delta \lambda^{(0)} = \frac{f_{n+1}^{(0)}}{\frac{9}{4(1-D_{n+1}^{(0)})} \frac{\sigma_{n+1}^{d} : H : \sigma_{n+1}^{d} (0)}{\sigma_{n+1}^{2 \ vm \ (0)}} + R'(\lambda_{n+1}^{(0)})}$$
(2.55)

On obtient ainsi le premier incrément de multiplicateur plastique  $\Delta\lambda^{(0)}$ . Il faut par ailleurs remarquer que celui-ci est déterminé indépendamment de la prise en compte ou non de l'effet retard; ni la fonction  $\varphi_D^*$ , ni la fonction  $\tilde{\varphi}_D^*$  n'apparaissent en effet dans ce calcul. L'algorithme ensuite utilisé pour converger est celui de la sécante, il est brièvement détaillé dans le prochain paragraphe. On itère alors jusqu'à ce que le critère de l'équation 2.56 soit vérifié. L'ensemble des variables sont alors déterminées au pas de temps n+1.

$$|f_{n+1}^{(i)}| \le pr\acute{e}cision * |f_{n+1}^{(0)}|$$
 (2.56)

#### 2.5.2.4 Algorithme global

L'ensemble des 2 modèles, c'est-à-dire le modèle de plasticité isotrope de von Mises couplée à l'endommagement respectivement sans et avec effet retard, ont été réunis dans une même sous-routine. L'algorithme global de cette sous-routine est donné ci-dessous.

On ne présente pas dans cette algorithme la situation où l'endommagement dépasse l'endommagement critique. Actuellement, avec le logiciel Europlexus, l'utilisateur a par ailleurs deux possibilités :

 $<sup>^{15}</sup>$  Pour obtenir ce résultat, il faut aussi penser que  $\frac{3\sigma^d \cdot \sigma}{2\sigma^{vm}} = \sigma^{vm}$  .

- la première est de ne rien faire. Le code continuera a effectué le calcul dans l'élément complètement endommagé. Dans ce cas, dès le début, on force les contraintes à zéro. Le risque est de voir apparaître assez rapidement des éléments croisés qui ne peuvent être calculés.
- la deuxième est de transformer les éléments complètement endommagés en éléments 'fantômes'. Dans ce cas, l'élément n'apparaît plus dans le calcul (ni dans les tests d'éléments croisés, etc...) et ne présente donc aucun problème pour la suite du calcul.
  - (I) Europlexus donne  $\Delta \varepsilon$

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta \varepsilon$$

 $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta \varepsilon$  (II) Estimations élastiques :

$$\varepsilon_{p \ n+1}^{(0)} = \varepsilon_{p \ n} 
D_{n+1}^{(0)} = D_{n} 
\lambda_{n+1}^{(0)} = \lambda_{n} 
\varepsilon_{e \ n+1}^{(0)} = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{p \ n+1}^{(0)} 
\sigma_{n+1}^{(0)} = \sigma_{n} + (1 - D_{n+1}^{(0)}) H \Delta \varepsilon$$

 $\sigma_{n+1}^{(0)} = \sigma_n + (1 - D_{n+1}^{(0)}) H \Delta \varepsilon$ (III) Vérification du critère :  $f_{n+1}^{(0)} \leq 0$ ? Si oui:

$$\varepsilon_{p \ n+1} = \varepsilon_{p \ n+1}^{(0)} 
D_{n+1} = D_{n+1}^{(0)} 
\lambda_{n+1} = \lambda_{n+1}^{(0)} 
\varepsilon_{e \ n+1} = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{p \ n+1} 
\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{(0)}$$

et fin du pas de temps... Sinon : i = 0

(IV) Calcul du multiplicateur plastique : Si i = 0:

$$\Delta \lambda^{(0)} = \frac{f_{n+1}^{(0)}}{\frac{9}{4(1-D_{n+1}^{(0)})} \frac{\sigma_{n+1}^{d} \cdot 0 : H : \sigma_{n+1}^{d} \cdot 0}{\sigma_{n+1}^{2 \text{ vm } (0)}} + R'(\lambda_{n+1}^{(0)})}$$
$$\Delta \lambda^{sup} = \Delta \lambda^{(0)}, \ \Delta \lambda^{inf} = 0, \ f^{inf} = f_{n+1}^{(0)}$$

Sinon (algorithme de la sécante):

$$\Delta \lambda^{(i)} = \frac{\Delta \lambda^{sup} f^{inf} - \Delta \lambda^{inf} f^{sup}}{f^{inf} - f^{sup}}$$

(V) Calcul de l'endommagement Si

$$\left[\frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)\left(\frac{\sigma^H}{\sigma^{vm}}\right)^2\right]p > \varepsilon_p^s$$

$$D_{n+1}^{nc\ (i+1)} = D_{nc\ n+1}^{(0)} - \Delta \lambda^{(i)} (\frac{\partial \varphi_D^*}{\partial Y})^{(0)}$$

Si l'endommagement n'est pas retardé :

$$D_{n+1}^{(i+1)} = D_{n+1}^{nc (i+1)}$$

$$\dot{D}_{n+1}^{(i+1)} = -\Delta \lambda^{(i)} (\frac{\partial \varphi_D^*}{\partial Y})^{(0)}$$

S'il est retardé :

$$\dot{D}_{n+1}^{(i+1)} = \frac{1}{\tau^c} \exp\left[-a \left\langle D_{n+1}^{nc}^{(i+1)} - D_n \right\rangle\right] 
D_{n+1}^{(i+1)} = D_n + \Delta t \dot{D}_{n+1}^{(i+1)}$$

Sinon

$$\dot{D}_{n+1}^{(i+1)} = 0 
D_{n+1}^{(i+1)} = D_n$$

$$\begin{split} \lambda_{n+1}^{(i+1)} &= \lambda_{n+1}^{(0)} + \Delta \lambda^{(i)} \\ \varepsilon_{p\ n+1}^{(i+1)} &= \varepsilon_{p\ n+1}^{(0)} + \frac{3}{2} \frac{\Delta \lambda^{(i)}}{1 - D_{n+1}^{(0)}} \frac{\sigma_{n+1}^{d\ (0)}}{\sigma_{n+1}^{vm\ (0)}} \\ \sigma_{n+1}^{(i+1)} &= \sigma_{n+1}^{(0)} (1 - \frac{\dot{D}_{n+1}^{(i+1)}}{1 - D_{n+1}^{(0)}}) - \Delta \lambda^{(i)} H \frac{3}{2} \frac{\sigma_{n+1}^{d\ (0)}}{\sigma_{n+1}^{vm\ (0)}} \end{split}$$

$$(\text{VII}) \text{ Test de convergence}: \frac{|f_{n+1}^{(i+1)}|}{\sigma_{n+1}^{y}} \leqslant e?$$
 Si oui : 
$$\varepsilon_{p\ n+1} = \varepsilon_{p\ n+1}^{(i+1)}$$
 
$$D_{n+1} = D_{n+1}^{(i+1)}$$
 
$$\lambda_{n+1} = \lambda_{n+1}^{(i+1)}$$
 
$$\varepsilon_{e\ n+1} = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{p\ n+1}^{(i+1)}$$
 
$$\varepsilon_{e\ n+1} = \sigma_{n+1}^{(i+1)}$$
 et fin du pas de temps... Sinon (algorithme de la sécante) : 
$$\text{Pour } i = 0:$$
 
$$f^{sup} = f_{n+1}^{(1)}$$
 Pour  $i \geq 1$  et  $\Delta \lambda^{(i)} \geq \Delta \lambda^{sup}$  
$$\Delta \lambda^{inf} = \Delta \lambda^{sup}, \ \Delta \lambda^{sup} = \Delta \lambda^{(i)}, \ f^{inf} = f^{sup}, \ f^{sup} = f_{n+1}^{(i+1)}$$
 Pour  $i \geq 1$  et  $\Delta \lambda^{sup} \geq \Delta \lambda^{(i)} \geq \Delta \lambda^{inf}$  
$$\Delta \lambda^{inf} = \Delta \lambda^{(i)}, \ f^{inf} = f_{n+1}^{(i+1)}$$

# 2.5.3 Exemple bi-dimensionnel

... puis i = i + 1 et retour au (IV)

Cette partie a une double vocation. D'une part, il s'agit de présenter des résultats obtenus avec l'algorithme de plasticité couplée à l'endommagement retardé présenté ci-dessus. D'autre part, cet exemple va permettre clairement la mise en évidence de l'influence du maillage dans un cas moins simple que la partie 2.2.

Le jeu de données Europlexus correspondant est par ailleurs donné et commenté dans l'annexe B.

### 2.5.3.1 Présentation de la simulation

Cette partie s'intéresse donc à la simulation d'un essai de cisaillement sur éprouvette dite 'chapeau' pour l'alliage d'aluminium Au4G1-T4 (voir la figure 2.20). Cet essai permet de développer du cisaillement dans une zone privilégiée suite à la mise en compression du spécimen grâce à un dispositif à barres de Hopkinson. Cet essai a généralement pour but l'étude de l'interaction matériau-outil en usinage par outil coupant où le matériau est cisaillé par l'outil pour en usiner la surface. L'objectif de cette partie n'étant pas de retrouver les résultats d'essais expérimentaux (que nous

n'avons d'ailleurs pas à disposition), mais de mettre en évidence les propriétés du modèle, les conditions aux limites du problème sont simplifiées; on se contente en effet de bloquer axialement la base du chapeau et d'imposer une rampe en déplacement au sommet de celui-ci (de pente 50m/s). L'ensemble des conditions aux limites est représenté sur la figure 2.20. La géométrie de l'éprouvette a été choisie identique à celle testée par Nemat-Nasser [Nemat-Nasser et al. , 1998]; les principales dimensions sont indiquées sur la schématisation de l'éprouvette.

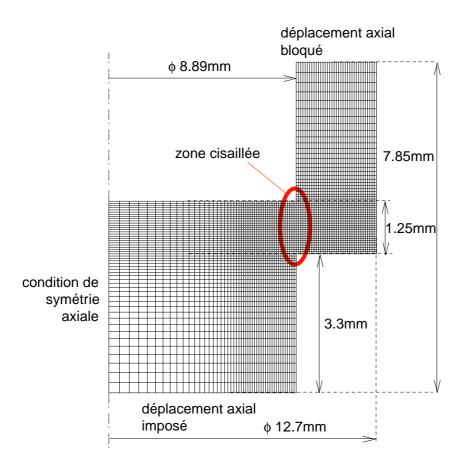


Fig. 2.20 – Maillage et condition aux limites de l'essai chapeau simulé avec Europlexus. Le maillage correspond au niveau 6.

L'identification des paramètres de la plasticité couplée à l'endommagement de l'Au4G1-T4 a été effectuée en quasi-statique par Dufailly [Dufailly , 1980]; c'est-à-dire que les paramètres relatifs à l'endommagement retardé a et  $\tau^c$  ne sont pas connus. L'ensemble des paramètres identifiés sont résumés dans le tableau 2.8, a et  $\tau^c$  sont pris égaux à 2 et  $0.1\mu s$ . La loi d'écrouissage (contrainte effective en fonction de la déformation) est tracée sur la figure 2.21 en trait continu, le trait discontinu correspond à la courbe de traction contrainte/déformation obtenue avec un taux de triaxialité de  $\frac{1}{3}$ . On adopte par ailleurs une légère modification du modèle de plasticité de von Mises couplée à l'endommagement retardé, à savoir qu'ici l'évolution de l'endommagement n'est pas identique en tension (taux de triaxialité positif) et

en compression (taux de triaxialité négatif) comme c'était le cas auparavant. Ainsi, l'équation 2.42 est remplacée par l'équation suivante :

$$\begin{cases}
si \left[ \frac{2}{3} (1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left( \frac{\sigma^H}{\sigma^{vm}} \right)^2 \right] p > \varepsilon_p^s : \\
\dot{D}_{nc} = \frac{D^c}{\varepsilon_p^c - \varepsilon_p^s} \left[ \frac{2}{3} (1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left\langle \frac{\sigma^H}{\sigma^{vm}} \right\rangle^2 \right] \frac{\dot{\lambda}}{1 - D} \\
sinon \dot{D}_{nc} = 0
\end{cases}$$
(2.57)

où seule la partie positive du taux de triaxialité (notée  $\left\langle \frac{\sigma^H}{\sigma^{vm}} \right\rangle$ ) est prise en compte.

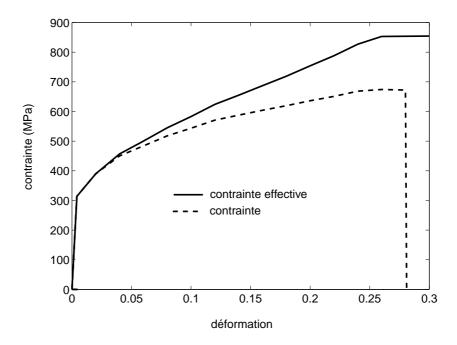


Fig. 2.21 – Evolution de la contrainte effective en fonction de la déformation (en trait continu) pour l'alliage d'aluminium Au4G1-T4. Le trait discontinu correspond à la courbe contrainte/déformation obtenue avec un taux de triaxialité égal à  $\frac{1}{3}$ .

Propriété	E	ρ	ν	$\sigma^y$	$\varepsilon_e^s$	$\varepsilon_e^c$	$D^c$
	GPa	$kg.m^{-3}$	MPa	-	=	=	=
Au4G1-T4	74	2780	0.3	314	0.03	0.25	0.23

Tab. 2.8 – Propriétés quasi-statiques de l'Au4G1-T4

#### 2.5.3.2 Choix du maillage

On souhaite appliquer la formule analytique 2.58 déterminée dans la partie 2.4 pour le cas de l'essai chapeau :

$$\ell^{car} = c\tau^c \ln\left(\frac{\Delta\sigma}{\sigma^{lim}}\right) \tag{2.58}$$

ceci pour choisir une taille de maille adéquate. Cette formule a été établie dans un cadre uni-dimensionnelle pour un matériau élastique endommageable. L'alliage d'aluminium Au4G1-T4 est modélisé par une loi élasto-plastique endommageable. Malgré tout, à défaut d'avoir un encadrement de la longueur caractéristique  $\ell^{car}$ , la formule devrait donner une approximation satisfaisante de la longueur caractéristique numérique et donc servir de base pour le choix du maillage (comme cela a déjà pu être montré [Suffis et Combescure, 2002a]). Il faut également définir un problème uni-dimensionnel équivalent à l'essai chapeau; celui-ci est proposé sur la figure 2.22. On suppose que l'essai est assimilable au cisaillement d'un plan infini; la condition à la limite étant une vitesse de cisaillement imposée égal à  $V^{impact}$  (qui correspond à condition à la limite de l'essai chapeau). Cette vision est très simpliste puisque elle ne tient compte d'aucune dimension; elle permet malgré tout de tirer des conclusions intéressantes. Il reste encore, avant de déterminer la longueur caractéristique correspondante, à transformer la formule 2.58 valable pour une traction de poutre uni-dimensionnelle en une formule valable pour le cisaillement. Sans rentrer dans les détails, on obtient de la même façon que dans la partie 2.4 la formule 2.59:

$$\ell^{car} = c^T \tau^c \ln \left( \frac{\Delta \tau}{\tau^{lim}} \right) \tag{2.59}$$

où  $c^T$  est la vitesse des ondes de cisaillement et où  $\tau^{lim}$  correspond à la contrainte de cisaillement limite.

$$\begin{cases} c^T = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}} \\ \tau^{lim} = \frac{\sigma^{lim}}{\sqrt{3}} \end{cases}$$
 (2.60)

Le niveau de la sollicitation  $\Delta \tau$  est, quant à lui, égal à :

$$\Delta \tau = G \frac{V^{impact}}{c^T} = \sqrt{\frac{E\rho}{2(1+\nu)}} V^{impact}$$
 (2.61)

Par application des formules 2.26 et 2.27, on obtient enfin la valeur des contraintes effectives maximales et minimales pour l'alliage d'aluminium Au4G1-T4 :

$$\begin{cases} \sigma_{min}^{lim} = 401MPa \\ \sigma_{max}^{lim} = 1079MPa \end{cases}$$
 (2.62)

On obtient finalement:

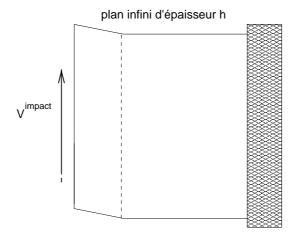


Fig. 2.22 – Modèle uni-dimensionnel équivalent à la perforation

$$\begin{cases} \ell_{max}^{car} = 0.2mm \\ \ell_{min}^{car} = -0.1mm \end{cases}$$
 (2.63)

Le signe négatif de la longueur caractéristique minimale signifie que le modèle choisi est trop grossier.

Ce résultat, même s'il ne donne a priori qu'une approximation de la longueur caractéristique, fournit des informations très intéressantes. En effet,  $\ell^{car}$  est de l'ordre du dixième de millimètre. Cela nous indique qu'un maillage, dont la taille des éléments sera supérieure à cet ordre de grandeur, sera incapable de représenter correctement la zone complètement endommagée.

### 2.5.3.3 Simulations

Un certain nombre de simulations ont été effectuées. Différents niveaux de maillages ont été testés (le maillage présenté sur la figure 2.20 correspond au niveau 6) : les niveaux 2, 6, 10 et 20 qui comportent respectivement 512, 4608, 51200 et 204800 éléments et qui correspondent à une taille d'éléments dans la zone endommagée respectivement égale à 0.156mm, 0.0521mm, 0.0312mm et 0.0156mm. L'éprouvette est maillée à l'aide d'éléments quadrangulaires à un point de Gauss.

Une première série sans effet retard dont le profil d'endommagement est donné à l'issue du calcul sur la figure 2.23 permet de mettre en évidence le problème de dépendance au maillage. On constate en effet deux phénomènes :

- une dépendance de la position de la zone endommagée vis-à-vis de la finesse du maillage. Plus le maillage est fin, plus l'endommagement se propage d'abord radialement, puis axialement. Pour le maillage de niveau 20, on constate même la présence de deux 'fissures', chacune partant d'un angle du chapeau.
- la localisation de la zone endommagée dans une zone restreinte à un unique (ou éventuellement deux ou trois) élément. On constate en effet lors du raffinement

du maillage que la largeur de la zone endommagée est confinée dans quelques éléments. Lorsque l'évolution est brutale (notamment pour la rupture finale où la zone endommagée traverse l'éprouvette), elle est restreinte à une ligne d'éléments.

Par rapport à l'exemple uni-dimensionnel, on retrouve la dépendance au maillage tel qu'elle a été décrite jusqu'à maintenant, c'est-à-dire un localisation de la zone complètement endommagée dans un unique élément. Mais il apparaît un phénomène supplémentaire qui est la dépendance de la position spatiale de la zone endommagée <sup>16</sup> vis-à-vis du maillage. Suivant la finesse du maillage, il faut donc s'attendre à ce que la zone complètement endommagée change de position. Des constatations similaires ont été faîtes dans le cadre d'une simulation de flexion de poutre élastique endommageable [Suffis et al. , 2003a] (utilisant le modèle élastique endommageable présenté au début du chapitre).

Une seconde série a été effectuée avec un endommagement retardé. Le profil d'endommagement dans l'éprouvette est donné sur la figure 2.24 pour les mêmes niveaux que précédemment. Ces résultats mènent à diverses constatations :

- la localisation spatiale de la zone endommagée reste inchangée suite au raffinement du maillage.
- la largeur de la zone complètement endommagée se stabilise dès lors que la taille des éléments est plus petite que la largeur de celle-ci. Le profil d'endommagement dans son ensemble est même complètement identique une fois que cette condition est vérifiée; les niveaux 10 et 20 ne présentent en effet aucune différence significative.

#### 2.5.3.4 Bilan

Même si ces simulations ne sont pas comparées à des résultats expérimentaux, elles ont permis de montrer qu'un modèle classique aboutit à des résultats qualifiés de dépendants au maillage, alors que l'introduction de retard dans l'endommagement rend les résultats objectifs vis-à-vis du maillage. Il est également intéressant d'observer qu'au niveau 2, avec ou sans retard, les résultats sont identiques. A ce niveau, le maillage est en fait trop grossier pour représenter correctement le profil de la zone endommagée ; c'est la conclusion à laquelle nous étions arrivé à l'issue de l'étude de la longueur caractéristique. Ceci permet en outre de rappeler l'importance et l'intérêt de connaître une approximation de la taille caractéristique relative à cette zone. Il a donc fallu raffiner le maillage pour s'apercevoir que la taille de la zone endommagée était beaucoup plus petite (un peu moins de 0.1mm). A posteriori, on constate que, si nous nous étions fixé immédiatement une taille de maille de l'ordre de 10% de la longueur caractéristique maximale obtenue, le résultat aurait été immédiatement satisfaisant.

Les résultats obtenus sont sommes toutes satisfaisants compte tenu de l'objectif fixé initialement.

A ce niveau de l'étude subsiste encore une inconnue. Jusqu'à maintenant, aucune

<sup>&</sup>lt;sup>16</sup>Dans l'exemple uni-dimensionnel décrit au début du chapitre, la zone endommagée ne pouvait se localiser qu'à l'extrémité de la poutre.

identification fiable des paramètres liés à l'endommagement retardé a et  $\tau^c$  n'a été effectuée. C'est l'objectif du chapitre à venir.

# 2.6 Conclusions et perspectives

L'endommagement à effet retard constitue globalement le thème de ce chapitre. Visant l'objectif d'une application pratique, nous avons adopté une démarche pragmatique ayant pour but, d'une part, la mise en place d'un outil analytique simple permettant de construire judicieusement le maillage connaissant la sollicitation et, d'autre part, la développement du modèle dans un code de dynamique explicite industriel. Après un rappel succinct des principales équations et caractéristiques du modèle d'endommagement retardé, nous nous sommes d'abord attacher à garantir la bonne convergence numérique du modèle. Puis, une formulation analytique permettant, à partir de connaissance sur le chargement et le matériau, de déterminer la taille optimale du maillage pour représenter correctement la zone complètement endommagée a été mise en place. Même si l'application de la formule obtenue peut sembler être limitée à un cadre restreint (élastique endommageable uni-dimensionnel), nous avons vu dans le cas de l'essai chapeau, et nous reverrons ultérieurement, qu'elle permet dans des cas plus généraux de modèles de matériaux d'obtenir tout de même un bonne approximation de la longueur caractéristique. Enfin, en vue d'un usage industriel et après en avoir détaillé l'algorithme, le modèle a été implanté dans le code de dynamique explicite Europlexus. Une première simulation bi-dimensionnelle fût alors réalisée.

Un certain nombre de développements sont cependant encore envisageables et notamment en ce qui concerne la longueur caractéristique. L'étude effectuée ici s'est en effet limitée au cas uni-dimensionnel et nous verrons par la suite que, pour chaque simulation, nous sommes obligés de nous définir une situation uni-dimensionnelle équivalente. Cette étape ne sera pas toujours forcément triviale à effectuer. Dans le cas bi-dimensionnel et tri-dimensionnel, il serait quelques fois souhaitable d'avoir un équivalent à la longueur caractéristique uni-dimensionnelle.

Dans un autre registre, le modèle de matériau qui a été ici implanté dans Europlexus est un modèle de plasticité de von Mises couplée à l'endommagement retardé. Nous verrons, dans la suite, de l'étude qu'il a été allègrement modifié afin de modéliser différents types de matériaux (plastique dépendant de la vitesse de déformation).

# 2.7 Synthèse

En résumé, dans cette partie, ont été abordés successivement les thèmes suivants :

- la description générale du modèle d'endommagement à effet retard, puis plus précisément de sa capacité à résoudre le problème de dépendance au maillage.
- l'étude numérique de la convergence de l'algorithme associé à l'endommagement retardé par une approche numérique originale.

- la mise en place, à partir d'un modèle d'endommagement simplifié et d'une étude sur un modèle continu, d'une formule analytique de la longueur caractéristique. La validation de celle-ci est effectuée ensuite.
- l'implantation numérique du modèle plus général de la plasticité de von Mises couplée à l'endommagement retardé dans le code Europlexus. Un premier exemple est finalement proposé.

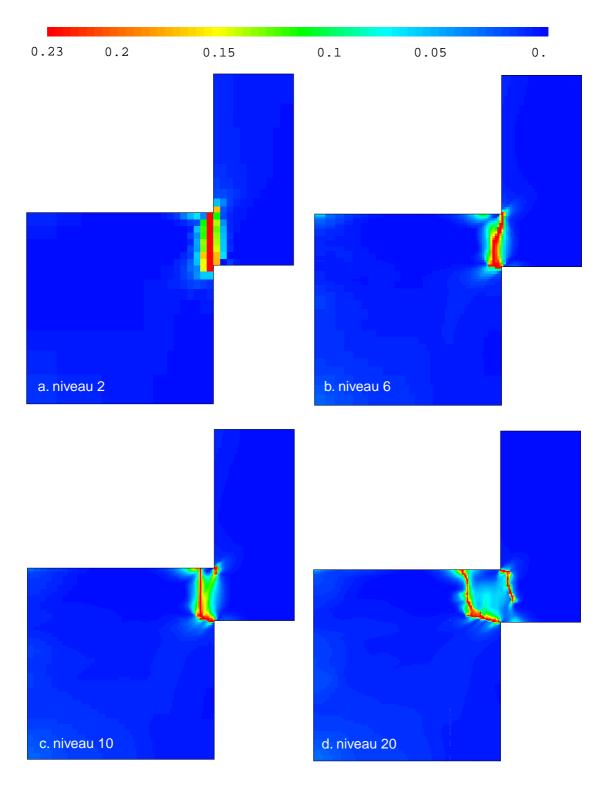


Fig. 2.23 – Profil de l'endommagement obtenu à 20ms pour l'essai chapeau. Différents niveaux de maillages sont testés : le niveau 2 (a), le niveau 6 (b), le niveau 10 (c) et le niveau 20 (d). Une dépendance évidente des résultats vis-à-vis du maillage apparaît.

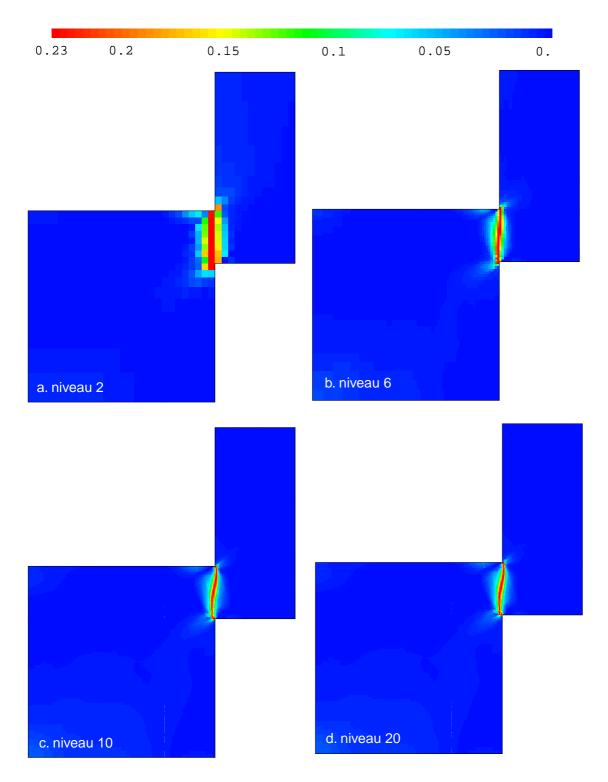


Fig. 2.24 – Profil de l'endommagement retardé obtenu à 20ms pour l'essai chapeau. Différents niveaux de maillages sont testés : le niveau 2 (a), le niveau 6 (b), le niveau 10 (c) et le niveau 20 (d). Aucune dépendance évidente des résultats vis-à-vis du maillage n'apparaît.

# Chapitre 3

# Identification des paramètres : méthodologie et applications

Dans ce troisième chapitre, nous abordons le problème de l'identification des paramètres. Les essais d'impact de plaques que nous utilisons sont tout d'abord détaillés. Puis, suite à une étude approfondie du cas théorique de l'alliage d'aluminium Au4G1-T4 qui permet de dégager différentes méthodes d'identification, les cas pratiques de l'alliage d'aluminium 7020-T6 et de l'alliage de titane Ta6V sont traités.

## Sommaire

		_
3.1	Problématique	
3.2	Description des essais plaque/plaque	
	3.2.1 Caractéristiques générales	
	3.2.2 Mise en place expérimentale	
	3.2.3 Courbe d'écaillage	
3.3	Etude théorique : cas de l'Au4G1-T4	
	3.3.1 Etude d'une simulation	
	3.3.2 Identification par la méthode Chevrier	
	3.3.3 Identification par la vitesse de face arrière	
	3.3.4 Conclusion	
3.4	Etudes pratiques : le 7020-T6 et le Ta6V	
	3.4.1 Cas de l'alliage d'aluminium 7020-T6	

	3.4.2 Cas de l'alliage de titane Ta6V	115
3.5	Conclusions et perspectives	118
3.6	Synthèse	119

L'objectif de ce chapitre est de mettre en place une démarche d'identification globale des paramètres d'un matériau modélisé par une loi élastique, plastique ou plastique dépendant de la vitesse de déformation, puis du modèle d'endommagement retardé. Dans le détail, la méthode utilisée se découpe en plusieurs étapes systématiques :

- 1. la détermination des principales caractéristiques du matériau telles que la masse volumique, le module d'Young, le coefficient de Poisson.
- 2. l'identification de la loi relative à la plasticité. Cette étape ne concerne bien sur pas les matériaux élastiques. Il s'agit sinon de déterminer la courbe d'écrouis-sage, cette courbe pouvant éventuellement dépendre du taux de déformation plastique, de la température ou d'autres variables. Cette étape se réduit à l'identification d'un nombre limité de paramètres lorsque des lois dédiées (Johnson-Cook, Zerilli-Armstrong, Klepaczko, etc...) sont utilisées.
- 3. l'identification en quasi-statique de la loi relative à l'endommagement. Généralement, différents essais sont effectués afin notamment de déterminer l'influence du taux de triaxialité.
- 4. en dernier lieu, l'identification *a fortiori* à l'aide d'essais dynamiques des paramètres liés au retard.

Généralement, les trois premières étapes sont bien connues. Nous nous limitons donc dans ce chapitre à l'étude originale de l'identification des paramètres a et  $\tau^c$  liés à l'effet retard.

# 3.1 Problématique

Il s'agit dans ce chapitre de mettre en place un protocole expérimental, ou du moins d'exploiter des résultats expérimentaux, afin de déterminer de manière systématique les deux paramètres relatifs à l'endommagement retardé, à savoir la constante a et le temps caractéristique  $\tau^c$ .

La première question est de savoir quelle manifestation physique sensible et mesurable peut être étudiée pour déterminer les paramètres.

Le chapitre précédent s'est notamment focalisé sur la notion de longueur caractéristique, que nous avons réussi à relier analytiquement aux paramètres de l'endommagement retardé et du chargement. Il serait même envisageable, sans utiliser le modèle analytique, d'optimiser les paramètres à partir d'essais quelconques en faisant correspondre la taille de la zone endommagée expérimentale et celle numérique. Cependant, il s'avère que cette longueur est difficile à appréhender expérimentalement  $^1$ ; une identification utilisant cette grandeur ne semble donc pas envisageable. Par ailleurs, comme Deü et al. [Deü , 1997, Allix et al. , 1999] l'ont mis en évidence dans le cas de l'élasticité endommageable, il semble possible d'identifier les paramètres en étudiant le temps à rupture  $t^r$ . La méthode proposée s'inspire en particulier de résultats expérimentaux détaillés dans [Goeke et McClintock , 1975] à l'aide

 $<sup>^{1}</sup>$ Cette longueur a d'ailleurs un intérêt plus numérique qu'expérimental, puisque sa connaissance a priori a pour but de choisir la taille du maillage la plus adéquate.

d'essais plaque/plaque qui mettent en évidence une dépendance de la contrainte à appliquer pour atteindre l'écaillage de l'éprouvette au temps d'application de la sollicitation. Les simulations effectuées par Deü pour un matériau élastique endommageable en uni-dimensionnel ont montré qu'il était possible de retrouver une influence similaire à celle mise en évidence expérimentalement grâce à l'introduction du retard dans l'endommagement.

Il a donc été choisi de tenter de déterminer les paramètres a et  $\tau^c$  de l'endommagement retardé à partir de l'étude du temps à rupture  $t^r$ . A la vue de l'équation fondamentale 2.10, le temps à rupture minimum peut être déterminer et est égal à  $D^c\tau^c$ . C'est-à-dire que, pour mettre en exergue les paramètres, des essais impliquant des temps à rupture de l'ordre de grandeur de  $D^c\tau^c$  et des contraintes importantes permettant d'endommager complètement l'éprouvette en ce temps très court sont indispensables. A la vue de la figure 3.1 (donnée notamment par Curran et al. [Curran et al., 1987] et Chevrier [Chevrier, 1998]) qui définit les domaines de contraintes, déformations et vitesses de déformation atteints par différents dispositifs expérimentaux, les essais de type plaque/plaque s'imposent immédiatement étant données les vitesses de déformation auxquelles ils sont effectués (autour de  $10^5 s^{-1}$ et les contraintes qu'ils permettent d'atteindre (plusieurs fois la limite élastique  $\sigma^y$ ). Feissel [Feissel, 2003a,b, Allix et al., 2003b] a, pour sa part, proposé d'identifier les paramètres de l'endommagement retardé pour des matériaux composites à l'aide d'essais réalisés avec des barres d'Hopskinson, ceci en prenant en compte les incertitudes de mesure.

La suite de ce chapitre décrit donc dans un premier temps la méthodologie des essais plaque/plaque, un protocole expérimental ainsi que le principal résultat de ce type d'essai, à savoir une courbe d'écaillage. Avant la détermination pratique des paramètres a et  $\tau^c$  dans le cas d'un alliage d'aluminium et d'un alliage de titane, une étude théorique est menée sur l'Au4G1-T4. Celle-ci permettra en outre de dégager les différentes méthodes possibles pour identifier les paramètres selon les moyens expérimentaux (et notamment de mesure) à disposition.

# 3.2 Description des essais plaque/plaque

Les parties suivantes décrivent tout d'abord le principe général d'un essai d'impact de plaques et décrivent également les différents phénomènes qui apparaissent au cours de l'essai [Roy, 2003]. Ensuite, le montage expérimental est détaillé et les principales mesures qui peuvent être effectuées sont décrites. Enfin, des résultats expérimentaux classiques, à savoir une courbe d'écaillage et des profils de vitesse de face arrière, sont donnés.

# 3.2.1 Caractéristiques générales

L'idée principale des essais plaque/plaque est de projeter une plaque mince, appelée impacteur, d'épaisseur  $L^i$  et de diamètre d, avec une vitesse donnée  $V^{impact}$  sur une plaque plus épaisse sans vitesse appelée cible, d'épaisseur  $L^c$  et de diamètre

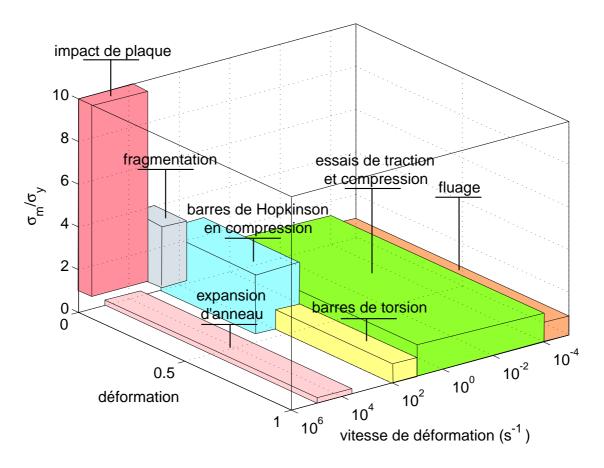


Fig. 3.1 – Domaine de contrainte, déformation et vitesse de déformation atteint par les différents dispositifs expérimentaux [Curran et al. , 1987, Chevrier , 1998]

égal à celui de l'impacteur (voir figure 3.2). Dans le cas le plus fréquent, les épaisseurs sont choisies de telle sorte que :

$$L^i = \frac{L^c}{2} \tag{3.1}$$

Généralement, le matériau de la cible et de l'impacteur sont identiques, on dit alors que l'impact est symétrique.

Lorsque l'impact se produit, une onde incidente de compression se forme et se propage dans la cible et le projectile. Afin de comprendre le déroulement des événements qui se produisent ensuite, le cas d'un matériau parfaitement élastique, puis le cas d'un matériau élastique avec rupture et enfin le cas d'un matériau plastique avec rupture sont étudiés successivement. Cette progression va permettre d'introduire par étape les principales notions et grandeurs relatives aux essais plaque/plaque.

## 3.2.1.1 Cas élastique parfait

Considérons tout d'abord le cas simple d'un matériau parfaitement élastique (qui ne subit donc aucun endommagement et aucune rupture). Dans un souci de

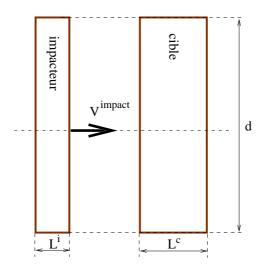


Fig. 3.2 – Schéma simplifié d'un impact plaque/plaque

compréhension, on considère un impact de plaques semi-infinies afin de s'abstenir de prendre en compte les effets de bords; on peut alors réduire le problème à un problème uni-dimensionnel de propagation d'onde. Deux représentations des événements sont alors proposées :

- le premier est un diagramme de Lagrange (voir figure 3.3) qui décrit dans le plan (x,t) la propagation des ondes. Sont également données sur ce diagramme le déplacement des surfaces libres de l'impacteur et de la cible desquels on peut notamment déduire la vitesse de la face arrière de la cible qui est également tracée. Pour information, sur ce diagramme, les flèches noires correspondent à l'onde de choc initiale, les flèches bleues à des faisceaux de détente et les flèches rouges à des faisceaux de compression. La vitesse de ses ondes est dans tous les cas égale à la célérité longitudinale des ondes élastiques (voir équation 3.2) que l'on note ici c<sup>L</sup>. Les différents états (pression, vitesse matérielle) sont numérotés de 0 à 2.

$$c^{L} = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}$$
 (3.2)

- le second (voir figure 3.4) représente le trajet de chargement dans le plan (p, u) où l'on retrouve notamment les trois états du diagramme de Lagrange.

Lorsque l'impact a lieu, une onde de choc se propage donc dans la cible et dans l'impacteur. Du temps  $t_0$  au temps  $t_2$ , elle fait passer progressivement toute l'épaisseur de la cible d'un état initial au repos (état 0) à l'état 1 (compression à la pression  $p^{choc}$  et vitesse égale à la moitié de la vitesse d'impact  $V^{impact}$ ). Ces ondes se réfléchissent sur les surfaces libres des plaques (à  $t_1$  pour l'impacteur et à  $t_2$  pour la cible) en ondes de détente ramenant progressivement la cible à une pression nulle

(état 0 ou 0'). Les deux ondes de détente se croisent au centre de la cible à  $t_3$  ² faisant alors subitement passer le centre de la cible de l'état 1 à l'état 2; c'est-à-dire d'un état comprimé (pression  $p^{choc}$ ) à un état en tension (pression  $-p^{choc}$ ). Les ondes de détente continuent de se propager jusqu'aux surfaces libres de la cible. Elles se réfléchissent à nouveau au temps  $t_4$  en onde de compression cette fois; la cible et l'impacteur ne sont alors plus en contact. Les deux ondes de compression se croisent à nouveau à  $t_5$  au centre de la cible... et ainsi de suite. Si on s'intéresse à la vitesse de face arrière, celle-ci est nulle tant que l'onde de choc ne s'y est pas réfléchie. Elle passe alors subitement de 0 à la vitesse d'impact  $V^{impact}$ . Ensuite, dès qu'une onde de détente arrive sur la face arrière, la vitesse de celle-ci passe instantanément de  $V^{impact}$  à 0; c'est l'inverse lorsque c'est une onde de compression. La vitesse de face arrière est donc similaire à un créneau variant entre les valeurs 0 et  $V^{impact}$  de période  $2\frac{L^c}{c^L}$  qui correspond au temps mis par une onde élastique pour parcourir deux fois l'épaisseur de la cible.

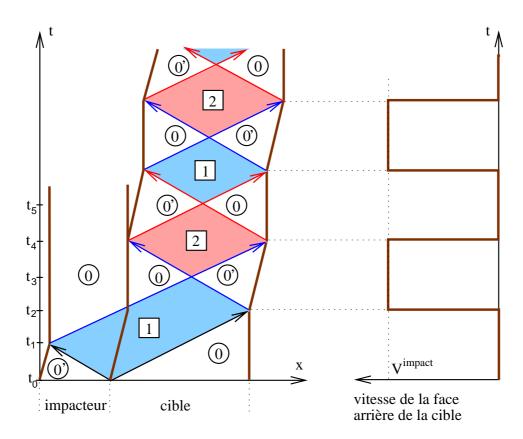


Fig. 3.3 – Diagramme de lagrange dans le cas d'un matériau élastique et sans écaillage. Les flèches noires correspondent à l'onde de choc qui suit l'impact, les flèches rouges à des ondes de compression et les bleues à des ondes de détente. Le diagramme de droite donne l'évolution au cours du temps de la vitesse de face arrière.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Ceci est seulement vrai dans le cas des impacts symétriques vérifiant la relation 3.1 sur les épaisseurs ou pour un impact non-symétrique mais utilisant des épaisseurs choisies judicieusement.

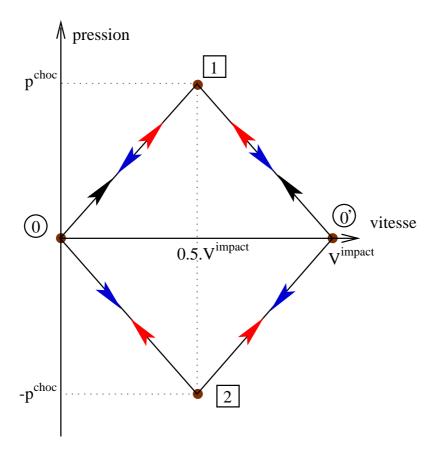


Fig. 3.4 – Diagramme (p, u) dans le cas d'un matériau élastique et sans écaillage.

Ce type d'essai permet donc de mettre sous tension une zone définie pendant un temps défini, à savoir le centre de l'éprouvette pendant  $\frac{L^c}{c^L}$ . Pour des éprouvettes avec des épaisseurs de l'ordre du millimètres, les temps de chargement sont de l'ordre de la micro-seconde qui correspond également à l'ordre de grandeur du temps minimale à rupture  $D^c\tau^c$  que nous cherchons à mettre en évidence.

Par ailleurs, le temps de chargement  $t^c$  est directement lié à l'épaisseur  $L^c$  de la cible (voir équation 3.3). De la même manière, la pression de choc  $p^{choc}$  est directement liée à la vitesse d'impact  $V^{impact}$ .

$$t^c = \frac{L^c}{c^L} \tag{3.3}$$

$$p^{choc} = \frac{1}{2} \rho c^L V^{impact} \tag{3.4}$$

Une configuration expérimentale donnée sera donc définie uniquement par deux paramètres que sont l'épaisseur de la cible  $L^c$  et la vitesse d'impact  $V^{impact}$ .

### 3.2.1.2 Cas élastique avec rupture

Considérons maintenant le cas d'un matériau élastique qui peut, sous réserve de vérifier quelques conditions, mener à la formation d'une écaille. La condition principale est de considérer que le matériau ne supporte pas en tension une pression supérieure à la pression d'écaillage  $p^{ecaillage}$ . Dans ce cas, les figures 3.3 et 3.4 sont remplacées par les figures 3.5 et 3.6.

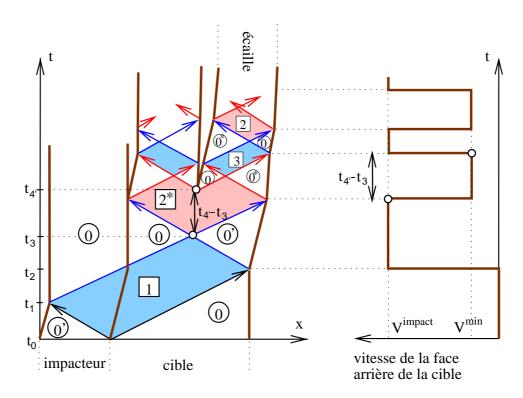


Fig. 3.5 – Diagramme de lagrange dans le cas d'un matériau élastique et avec écaillage. Les flèches noires correspondent à l'onde de choc qui suit l'impact, les flèches rouges à des ondes de compression et les bleues à des ondes de détente. Le diagramme de droite donne l'évolution au cours du temps de la vitesse de face arrière.

Rien ne change jusqu'au croisement des ondes de détente au centre de la cible. Lorsque le centre de la cible est mis en tension (au temps  $t_3$ ), la pression est cette fois limitée à la pression d'écaillage  $p^{ecaillage}$  (état  $2^*$ ). L'écaillage de la cible n'est cependant pas immédiat, il faut en effet attendre un "certain" temps (jusqu'à  $t_{4'}$ ) avant que l'écaille se forme. Dès que l'écaille se forme, des ondes de compression partent de cette nouvelle surface libre (ceci dû à la condition de contrainte nulle sur la surface libre). On retrouve ensuite dans chacune des deux parties de la cible une succession de croisements d'ondes de compression et de détente.

Sur le diagramme (p, u) (tracé pour un point appartenant à l'écaille, c'est-à-dire à la partie droite de la cible), la limitation de la pression en tension ainsi que la formation de l'écaille entraı̂ne l'apparition d'un nouveau cycle  $0-2^*-0^*-3$  dont les bornes sont  $+/-p^{ecaillage}$  et  $V^{min}/V^{impact}$ . Une fois l'écaille formée, la vitesse de face arrière

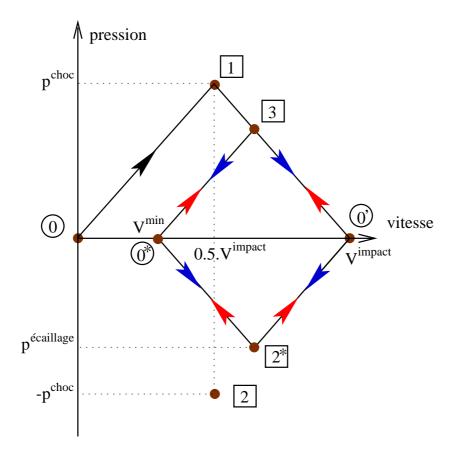


Fig. 3.6 – Diagramme (p, u) dans le cas d'un matériau élastique et avec écaillage pour un point se situant dans la partie de l'écaille.

est encore une fois semblable à un signal créneau mais de période  $\frac{L^c}{c^L}$  (c'est-à-dire au temps mis par une onde élastique pour parcourir deux fois l'épaisseur de l'écaille) et variant entre  $V^{min}$  et  $V^{impact}$ .

Il est d'ores et déjà possible à ce niveau d'introduire la notion de contrainte d'écaillage et de temps de chargement :

- la contrainte d'écaillage  $\sigma^{ec}$  est liée à la pression d'écaillage  $p^{ecaillage}$ . Elle correspond à la contrainte pour laquelle l'écaillage apparaît pour une configuration expérimentale donnée.
- le temps de chargement correspond au temps entre le début de la première mise en tension du centre de la cible à  $t_3$  et le moment de l'apparition de l'écaille à ce même endroit à  $t_{4'}$ . Il est au plus égal à  $\frac{L^c}{c^L}$ , sans quoi il n'y a pas d'écaillage.

Dans le cas simplifié considéré ici, à savoir la propagation et l'interaction d'ondes élastiques, ces deux quantités se déduisent facilement à partir de la vitesse de face arrière. La contrainte d'écaillage s'obtient à partir de la différence entre la vitesse d'impact  $V^{impact}$  et la vitesse minimale  $V^{min}$  en utilisant la formule communément appelée formule de Taylor [Speight et Taylor , 1986] :

$$\sigma^{ec} = \frac{1}{2} \rho c^L |V^{impact} - V^{min}| \tag{3.5}$$

La durée totale de chargement en tension correspond directement à la différence entre le temps de la fin du premier plateau à  $V^{impact}$  et la fin du premier plateau à  $V^{min}$  comme indiqué sur la figure 3.5.

### 3.2.1.3 Cas plastique avec rupture

Jusque là, seul le cas d'un matériau élastique pour lequel une seule onde se propage a été étudié. Dans le cas plus général de la plasticité, l'onde élastique est suivie d'ondes plastiques plus lentes; le diagramme de Lagrange est modifié comme sur la figure 3.7.

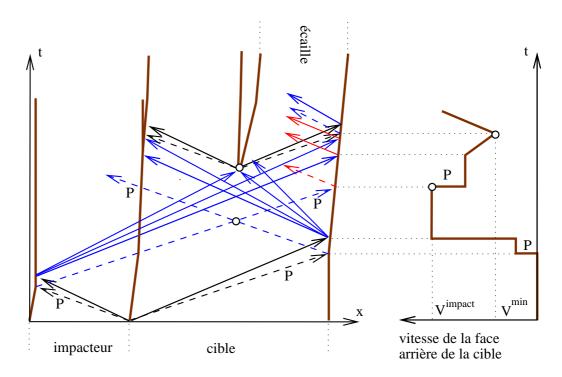


Fig. 3.7 – Diagramme de lagrange dans le cas d'un matériau plastique et avec écaillage. Les flèches noires correspondent à l'onde de choc qui suit l'impact, les flèches rouges à des ondes de compression et les bleues à des ondes de détente. Le diagramme de droite donne l'évolution au cours du temps de la vitesse de face arrière. L'onde de choc se décompose en une onde élastique à la célérité c (trait pointillé) et en un faisceau d'ondes plastiques plus lentes (trait continu).

Par rapport au cas élastique simple, chaque onde est ici précédée par un précurseur élastique  $^3$  (l'onde élastique étant plus rapide) noté P sur la figure 3.7. D'autre part, les ondes plastiques n'évoluant pas toutes à la même vitesse, la contrainte (ou

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Le niveau de ce précurseur est égal à la limite élastique d'Hugoniot noté  $\sigma^{HEL}$ .

la pression) au centre de la cible augmente lentement au fur et à mesure que les ondes se croisent. On retrouve cette lente évolution en observant la vitesse de face arrière.

L'évolution de la vitesse de face arrière est donc en réalité plus complexe que dans le paragraphe précédent, la formule de Taylor ne s'applique donc plus ici. Dans le cas de la propagation et de l'interaction entre des ondes élasto-plastiques, divers auteurs [Romanchenko et Stepanov , 1980, Razonerov et al. , 1995, Bushman et al. , 1993], dont Romanchenko et Stepanov, ont proposés des formules permettant de retrouver la contrainte d'écaillage  $\sigma^{ec}$  et le temps de chargement  $t^c$ ; celles-ci sont détaillées dans la partie 3.2.3.2.

# 3.2.2 Mise en place expérimentale

Le montage expérimental détaillé dans ce paragraphe est celui qui a été effectué au Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux de Metz notamment par Chevrier et Klepaczko [Chevrier et Funfrock , 1994, Chevrier , 1998]  $^{4\ 5}$  . Sont donc détaillés brièvement ici le fonctionnement global du canon ainsi que les principales mesures réalisables.

Le LPMM a donc à disposition un lanceur a gaz de diamètre 57mm destiné à l'étude des impacts plaque/plaque dont une coupe 2D et une vue 3D extérieure sont données sur les figures 3.8 et 3.9 respectivement. Il est capable d'atteindre des vitesses de projectile de l'ordre de 600m/s (environ 1000m/s pour le lanceur du CEA Valduc).

Le montage est équipé d'un certain nombre de capteurs. Trois lasers espacés de 50mm chacun permettent de mesurer la vitesse d'impact du projectile. Un interfèromètre laser (dont le canon du CEA est équipé mais pas celui du LPMM) permet de suivre l'évolution de la vitesse de la surface libre de la cible qu'on a appelée vitesse de face arrière (pour la mise en place expérimentale de ce dispositif, voir entre autres [Barker et Hollenbach , 1972, Espinosa , 1996]). Un système de récupération du projectile placé au fond du canon permet de récupérer la cible après l'essai sans endommagement secondaire. Enfin, afin d'assurer la planéité de l'impact, il est possible de faire pivoter autour de 2 axes le support de cible.

# 3.2.3 Courbe d'écaillage

L'objectif des essais plaque/plaque est généralement de tracer pour un matériau donné une courbe donnant l'évolution de la contrainte d'écaillage en fonction du temps de chargement (ou assimilé); cette courbe est généralement appelée courbe d'écaillage. Selon les moyens expérimentaux à disposition, différentes méthodes sont

 $<sup>^4\</sup>mathrm{Le}$  lecteur intéressé pourra d'ailleurs obtenir le descriptif complet du montage dans [Chevrier , 1998].

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Les résultats de l'alliage d'aluminium 7020-T6 utilisés dans la suite de ce chapitre ont été obtenu avec ce montage. Ceux du titane ont été obtenu avec un canon du CEA Valduc que nous ne détaillons pas.

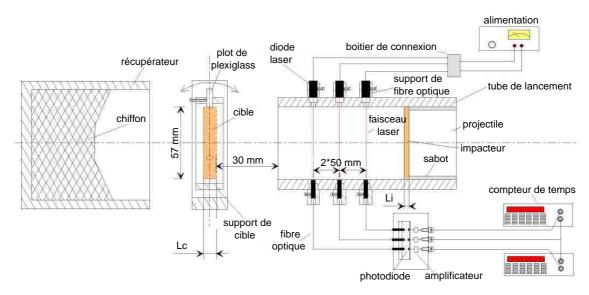


Fig. 3.8 – Coupe 2D du lanceur à gaz développé au LPMM de Metz. Détail du système optique de mesure de vitesse de projectile.

envisageables pour obtenir cette courbe.

Dans ce paragraphe, deux méthodes distinctes sont étudiées :

- la première est celle utilisée au LPMM qu'on appellera "méthode Chevrier" [Chevrier, 1998] qui n'utilise que les paramètres de l'essai  $L^c$  et  $V^{impact}$  et une analyse des éprouvettes après essai.
- la deuxième, la méthode par analyse de la vitesse de face arrière (utilisée notamment au CEA Valduc), construit la courbe à partir des paramètres de l'essai et de mesures effectuées sur le relevé de l'évolution de la vitesse de face arrière.

### 3.2.3.1 Méthode Chevrier

La méthode utilisée par Chevrier pour obtenir une courbe d'écaillage est adaptée aux moyens expérimentaux disponibles. Comme le banc expérimental du LPMM ne permet pas d'obtenir la vitesse de face arrière, elle s'appuie uniquement sur les deux paramètres de l'essai et sur une étude de l'éprouvette après essai.

Cette méthode utilise l'hypothèse simplificatrice proposée par Speight et Taylor [Speight et Taylor , 1986]; c'est-à-dire que l'on suppose que tout se passe comme dans le cas élastique détaillé dans les paragraphes 3.2.1.1 et 3.2.1.2. En fixant tout d'abord une épaisseur de cible  $L^c$ , on impose un temps de chargement en tension  $t^c$  du centre de la cible donnée par l'équation 3.3. Il s'agit alors de réaliser plusieurs essais à épaisseur constante en faisant varier la vitesse d'impact  $V^{impact}$ , donc la pression de choc  $p^{choc}$  donnée par l'équation 3.4. Ainsi, pour chaque essai, connaissant l'épaisseur  $L^c$  et la vitesse d'impact  $V^{impact}$ , la pression de choc  $p^{choc}$  et le temps de chargement  $t^c$  peuvent être déterminés. D'un autre côté, après chaque essai, la plaque impactée est coupée selon un axe perpendiculaire à l'impact. Les surfaces sont alors polies, gravées et observées au microscope afin de déterminer le niveau d'écaillage

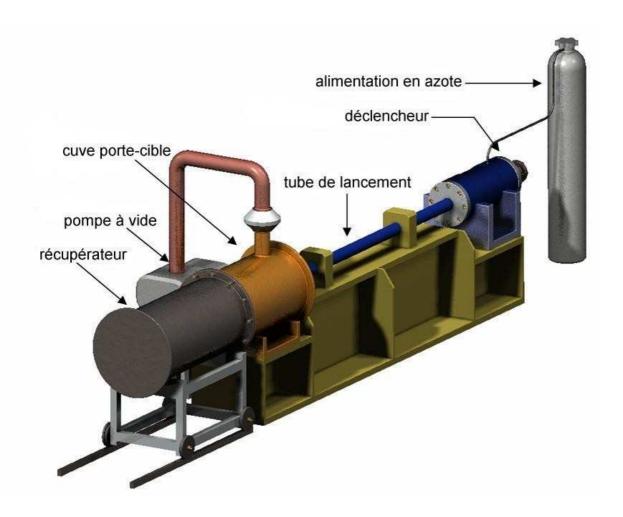


Fig. 3.9 – Vue 3D extérieure du lanceur à gaz développé au LPMM de Metz

[Chevrier , 1998] qui va de "pas d'écaillage" pour un matériau sans micro-cavités et sans micro-fissures visibles avec un grossissement  $\times 1000$  jusqu'à "écaillage avancé" pour un spécimen avec une nouvelle surface. En fixant  $L^c$  et en faisant varier  $V^{impact}$ , il est donc possible de déterminer la vitesse d'impact limite, et donc la pression de choc, pour laquelle l'écaillage a lieu. La contrainte d'écaillage  $\sigma^{ec}$  est alors égale à la pression de choc correspondante. En répétant l'opération pour plusieurs épaisseurs, il est finalement possible de tracer l'évolution de la contrainte d'écaillage  $\sigma^{ec}$  en fonction du temps de chargement  $t^c$ .

Dans le cas de l'alliage d'aluminium 7020-T6, la figure 3.10 montre la coupe de cibles récupérées après essais pour différents niveaux d'écaillage. La figure 3.11 présente la courbe d'écaillage obtenue à l'issue des essais ainsi que la courbe optimisée obtenue par le critère de Klepaczko. L'augmentation de la contrainte d'écaillage lorsque le temps de chargement diminue apparaît clairement.

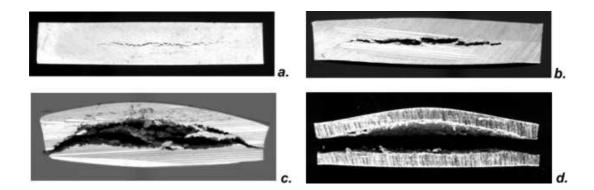


Fig. 3.10 – Cibles en alliage d'aluminium 7020-T6 récupérées après essais à différents niveaux d'écaillage (a.  $V^{impact} = 150m/s$ ,  $L^c = 10mm$ , b.  $V^{impact} = 256m/s$ ,  $L^c = 10mm$ 10mm, c.  $V^{impact} = 270m/s$ ,  $L^c = 10mm$ , d.  $V^{impact} = 294m/s$ ,  $L^c = 6mm$ ).

#### 3.2.3.2 Méthode par analyse de la vitesse de face arrière

Il s'agit dans ce cas de construire la courbe d'écaillage à partir de mesures effectuées sur l'évolution de la vitesse de la face arrière. La méthode détaillée ici est celle de Romanchenko et Stepanov [Romanchenko et Stepanov, 1980].

Les différentes mesures effectuées sont détaillées sur la figure 3.12; il s'agit généralement de déterminer :

- la différence entre la vitesse atteinte lors du premier plateau  $V^{max}$  et celle atteinte dans le premier creux  $V^{min}$ .
- le temps  $t^{c exp}$  entre la fin du premier plateau et le premier creux.

Cette même figure comparée à la figure 3.12 permet de relier certaines quantités mesurées expérimentalement et les quantités que nous avons pu évoquer précédemment. Ainsi:

$$\Delta t \simeq \frac{2L^c}{c^L}$$

$$V^{max} \simeq V^{impact}$$
(3.6)

$$V^{max} \simeq V^{impact} \tag{3.7}$$

$$t^{c exp} \simeq t^c \tag{3.8}$$

De ces mesures, Romanchenko et Stepanov [Romanchenko et Stepanov, 1980] proposent une formule donnant la contrainte d'écaillage.

$$\tilde{\sigma}^{ec} = \rho \left( \frac{c^L V}{c^L + V} \right) (V^{max} - V^{min}) \tag{3.9}$$

où la célérité de l'onde de choc V s'écrit [Meyers, 1994, Thouvenin, 1997] :

$$V = \sqrt{\frac{E}{\rho}} + su \tag{3.10}$$

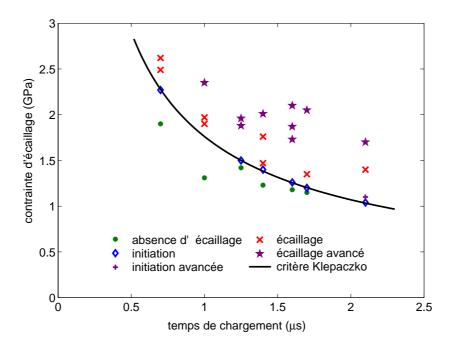


Fig. 3.11 – Résultats expérimentaux obtenus par Chevrier [Chevrier, 1998] pour l'alliage d'aluminium 7020-T6 et critère de Klepaczko associé [Chevrier et Klepaczko, 1997, 1999].

avec s une constante caractéristique du matériau et u le saut de vitesse matérielle. La relation 3.9 suppose que toutes les ondes du faisceau de tension arrivant en surface libre se sont propagées en moyenne à la même vitesse V. Afin de prendre en compte la portion du faisceau de détente ayant effectivement atteint le plan d'écaillage, mais rattrapé avant la surface libre, car plus lente, par la recompression créée par la rupture au plan d'écaillage (ce qu'on peut voir notamment sur la figure 3.7), un terme correctif est ajouté pour donner finalement l'équation 3.11 :

$$\sigma^{ec} = \tilde{\sigma}^{ec} \left( 1 + \frac{\delta}{t^{c \ exp}} \left( \frac{1}{V} - \frac{1}{c^L} \right) \right) \tag{3.11}$$

Dans ces équations,  $V^{max}$ ,  $V^{min}$  et  $t^{c\ exp}$  sont donc déduits de la vitesse de face arrière et  $\delta$  est égal à l'épaisseur de l'écaille, c'est-à-dire à  $\frac{L^c}{2}$  dans le cas d'un impact symétrique vérifiant la relation 3.1.

Avec plusieurs simulations pour différentes épaisseurs, il est alors possible de tracer la courbe d'écaillage qui, dans le cas développé par Romanchenko et Stepanov [Romanchenko et Stepanov , 1980], correspond à la courbe donnant  $\sigma^{ec}$  en fonction de  $\Delta t$  <sup>6</sup>.

Dans le cas de l'alliage de titane Ta6V, la figure 3.13 donne l'évolution de la vitesse de face arrière pour trois épaisseurs distinctes  $(1mm, 2mm \text{ et } 4mm \text{ pour } L^c)$ .

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>Pour retrouver une courbe analogue à celle obtenue avec la méthode Chevrier, il faudrait tracer ici  $\sigma^{ec}$  en fonction de  $t^{c-exp}$ .

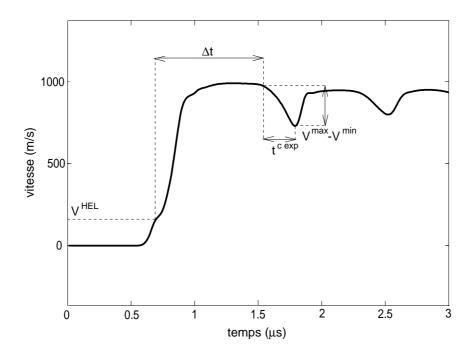


Fig. 3.12 – Exemple d'évolution de vitesse de face arrière obtenu numériquement dans le cas du titane Ta6V (impacté par une plaque de cuivre) pour une plaque d'épaisseur 4mm et un vitesse d'impact de 815m/s. Les mesures classiquement effectuées sont indiquées.

L'enregistrement des données par l'interféromètre débute dès la détection du précurseur élastique; ceci explique notamment que la première onde de choc est détectée au même moment pour les trois relevés. En considérant la formule de Romanchenko et Stepanov [Romanchenko et Stepanov , 1980] qui s'applique à la différence de vitesse entre les points indiqués sur la figure, on constate une augmentation lorsque l'épaisseur de la cible est plus petite.

# 3.3 Etude théorique : cas de l'Au4G1-T4

L'objectif de cette partie est de poser les bases d'une méthodologie d'identification des paramètres en étudiant le cas théorique de l'alliage d'aluminium Au4G1-T4. Selon la méthode utilisée, l'influence de chacun des paramètres est explicitée, permettant ainsi de faciliter l'identification ultérieure de ceux-ci pour un cas réel.

Avant d'envisager l'identification des paramètres de l'endommagement retardé, il est cependant important de rappeler ici qu'un certain nombre de prérequis sont nécessaires dans la connaissance du matériau. Il s'agit d'avoir identifier au préalable :

 les paramètres généraux relatifs au matériau (masse volumique, paramètres de l'élasticité, etc...),

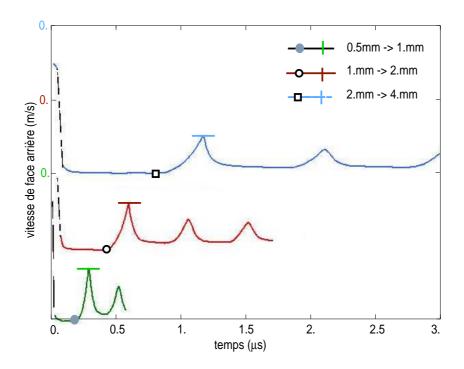


Fig. 3.13 – Vitesse de face arrière expérimentale (Ta6V, adimensionnée)

- la loi d'écrouissage du matériau incluant potentiellement des dépendances à la vitesse de déformation, à la température, etc...
- la loi d'endommagement pour des sollicitations quasi-statiques (c'est-à-dire des sollicitations pour lesquelles l'effet retard n'a pas d'influence).

En ce qui concerne l'alliage d'aluminium Au4G1-T4, le modèle ainsi que les paramètres associés au matériau ont été détaillés dans la partie 2.5 et plus précisément dans le paragraphe 2.5.3 en ce qui concerne les paramètres. Rappelons juste qu'il a été identifié avec une loi de plasticité de von Mises couplé à l'endommagement en quasi-statique par Dufailly [Dufailly , 1980, Lemaître et Chaboche , 1996b].

Avant toutes choses, l'étude complète d'une simulation est effectuée, depuis le choix du maillage à l'aide de la formule analytique de la longueur caractéristique  $\ell^{car}$  jusqu'aux résultats numériques (profils d'endommagement, déformation, etc...).

### 3.3.1 Etude d'une simulation

Cette étude se divise en deux parties. La première s'attache à décrire le choix de la finesse du maillage, choix qui a été optimisé grâce à la formulation analytique mise en place dans la partie 2.4. Dans la seconde, une simulation avec un endommagement retardé est effectuée. L'examen des résultats (profils d'endommagement, de contrainte, déformation, etc...) permet, en complément des modèles simples (élastique, élastique avec rupture, plastique avec rupture) exposés précédemment, de mieux percevoir les différents phénomènes se produisant au cours d'un impact de plaques.

Le matériau étudié est donc l'alliage d'aluminium Au4G1-T4 auquel on ajoute un

effet retard dans l'endommagement. Les paramètres de l'endommagement retardé a et  $\tau^c$ , choisis empiriquement, sont respectivement égaux à 2 et  $0.1\mu s$ . Le calcul simule pendant  $3\mu s$  un impact symétrique de plaques de diamètre 40mm, les épaisseurs de l'impacteur  $L^i$  et de la cible  $L^c$  étant respectivement égales à 2mm et 4mm. La vitesse d'impact est de 500m/s.

### 3.3.1.1 Choix du maillage

Afin de choisir une taille de maille adéquate pour le calcul que nous souhaitons effectuer, nous nous proposons d'appliquer la formule analytique 2.38 déterminée dans la partie 2.4 :

$$\ell^{car} = c\tau^c \ln\left(\frac{\Delta\sigma}{\sigma^{lim}}\right) \tag{3.12}$$

Cette formule a été établie dans un cadre uni-dimensionnel pour un matériau élastique endommageable. L'étude des essais plaque/plaque implique quant à elle un cadre tri-dimensionnel, ou plutôt bi-dimensionnel axi-symètrique. Néanmoins, lors de l'impact, seules des ondes planes, perturbées par des effets de bords, se propagent dans les plaques. Par conséquent, on peut raisonnablement admettre que le problème d'impact de plaques est équivalent, au moins près de l'axe des plaques, à un problème uni-dimensionnel  $^7$ . Malgré la nature élasto-plastique endommageable de l'Au4G1-T4, la formule va permettre d'avoir un ordre de grandeur de  $\ell^{car}$ , comme cela a été montré dans [Suffis et Combescure , 2002a] et dans la partie 2.5.3.

Dans l'équation 3.12, quasiment tous les paramètres sont connus : la célérité longitudinale des ondes est égale à 5990m/s, le temps caractéristique  $\tau^c$  à  $0.1\mu s$  et les contraintes limites minimale  $\sigma_{min}^{lim}$  et maximale  $\sigma_{max}^{lim}$  respectivement à 401MPa et 1079MPa (voir les équations 2.26 et 2.27). Reste à déterminer le niveau de contrainte  $\Delta \sigma$ 

Deux méthodes sont ici suggérées :

- 1. la première consiste à utiliser la formule de Taylor (c'est-à-dire à supposer que l'onde qui se propage est élastique) donnée par l'équation 3.5. On obtient de cette manière un niveau de contrainte effective  $\Delta \sigma$  égal à 4.1GPa.
- 2. la seconde consiste à effectuer un calcul identique à celui que l'on souhaite réaliser mais sans introduire d'endommagement. Le niveau de la contrainte axiale relevé au centre de la cible lorsque les ondes se croisent sert alors d'approximation du niveau de contrainte  $\Delta \sigma$ . Avec cette méthode,  $\Delta \sigma$  a été évaluée à 2.93GPa.

Le tableau 3.1 récapitule les différentes longueurs caractéristiques. En réalité, comme deux ondes se croisent et se propagent ensuite de part et autre du centre de la cible, il convient de multiplier la longueur obtenue par deux pour obtenir en définitive la largeur de la zone complètement endommagée. L'ordre de grandeur obtenu

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>Cette restriction est d'ailleurs faîte par nombre d'auteurs pour simplifier les simulations d'impact de plaques [Deü , 1997, Bonora et Gentile , 2001, Ruggiero et Bonora , 2002].

est le millimètre. Plus précisément, la largeur de la zone complètement endommagée devrait être comprise entre 1.2mm et 2.8mm. Par suite, il a été décidé pour ce calcul de mailler l'épaisseur de la cible avec 36 éléments de telle sorte que la zone complètement endommagée comprennent au moins dix éléments. Afin d'avoir un maillage relativement homogène, l'épaisseur de l'impacteur comprend 18 éléments et le rayon 90 éléments. Au total, le maillage est composé de 4860 éléments quadrangulaires (voir figure 3.14).

	Méthode 1	Méthode 2
$2\ell_{min}^{car}$	1.60mm	1.20mm
$2\ell_{max}^{car}$	2.78mm	2.38mm

Tab. 3.1 – Approximation de la largeur de la zone complètement endommagée au centre de la cible (correspondant à  $2\ell^{car}$ ) selon la méthode utilisée.

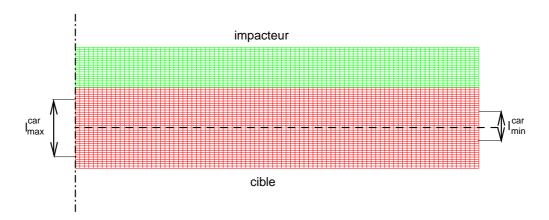


Fig. 3.14 – Maillage optimisé des plaques.

#### 3.3.1.2 Présentation des résultats

Le calcul effectué simule un impact de plaques pendant  $3\mu s$ . C'est un calcul en axi-symétrique; seule la moitié des plaques est maillée avec des éléments quadrangulaires à un noeud d'intégration (noté CAR1 dans la terminologie d'Europlexus). Ce type d'élément est dit sous-intégré; il permet d'éviter le problème de 'Pressure locking' qui apparaît avec des quadrangles à 4 noeuds d'intégration [Galon et Izquierdo , 2000].

Le contact entre la cible et l'impacteur est géré avec la méthode des pénalités [Hallquist et al., 1985]. Aucun frottement n'est pris en compte. La peau de la cible correspond à la surface maître, celle de l'impacteur à la surface esclave.

Une méthode d'érosion est utilisée afin de représenter l'endommagement total des éléments. Ainsi, lorsque l'endommagement d'un élément atteint l'endommagement critique  $D^c$ , il est transformé en élément 'fantôme', c'est-à-dire que sa rigidité est

#### annulée <sup>8</sup>.

Enfin, un amortissement (avec un coefficient  $\xi$  de 0.2) est introduit. Combiné à un pas de temps  $\Delta t$  égal à la moitié du pas de temps critique  $\Delta t^{crit}$ , cela permet d'éviter les instabilités au cours du calcul et, en particulier, au début de l'impact. De façon à éviter le croisement des éléments CAR1 sur un mode d'hourglass, un anti-hourglass visqueux est également introduit avec un coefficient égal à 0.5.

Dans ces conditions, le temps de calcul est de l'ordre de la minute.

Les résultats du calcul sont donnés sur les figures 3.15, 3.16 et 3.17. La première donne le profil de la contrainte axiale à différents instants clefs dans la cible et dans l'impacteur sur la configuration non-déformée. De la même manière, la seconde donne le profil d'endommagement. Enfin, la dernière donne la déformée avec une amplitude unitaire du maillage à la fin de la simulation. Les éléments transformés en éléments fantômes y sont également représentés. Comme les noeuds de ces éléments évoluent avec leur dernière vitesse avant leur endommagement total, il est fréquent qu'ils traversent d'autres éléments, mais cela n'a aucune conséquence particulière. Le profil de la vitesse de face arrière correspondant à cette simulation n'est pas donnée dans cette partie, il est cependant visible sur la figure 3.23 où il sera étudié. En utilisant la figure 3.7 et, plus généralement l'ensemble des informations de la partie 3.2.1, une interprétation des figures 3.15 et 3.16 est proposée :

- au temps  $0.6\mu s$ , l'onde de choc d'environ -3GPa s'est déjà réfléchie sur la surface libre du projectile en onde de détente et se propage encore dans la cible. Le front de l'onde est linéaire dans toute la partie centrale des plaques (validant l'hypothèse d'uni-dimensionnalité des contraintes dans cette zone). Les effets de bords (qui sont des ondes de détente) sont déjà sensibles et se propagent radialement vers le centre des plaques.
- au temps  $0.95\mu s$ , l'onde de choc s'est réfléchie sur la surface libre de la cible. On a donc deux ondes de détente qui ramènent progressivement les deux plaques à un niveau de contrainte nulle. Les effets de bords continuent de se propager radialement en détendant les plaques.
- au temps  $1.3\mu s$ , les ondes de détente (ou du moins leurs parties élastiques) ont commencées à se croiser au centre de la cible. A cet instant, l'endommagement des plaques est négligeable puisque seule de la compression a eu lieu jusqu'à maintenant. L'interaction des ondes de détente venant du bord et des ondes axiales créent une zone de tension légèrement supérieure au centre de la cible près du bord.
- au temps  $1.42\mu s$ , la contrainte au centre de la cible augmente progressivement suite à l'arrivée progressive des ondes plastiques. Conjointement, l'endommagement augmente dans cette zone. A la périphérie, une zone complètement endommagée commence à apparaître  $^9$ .

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup>En fait, dans Europlexus, les éléments fantômes permettent d'éviter l'arrêt du calcul par crissement des éléments. En effet, lorsqu'un élément est complètement endommagé, il n'est pas retiré du maillage mais, étant fantôme, il n'est plus contraint de vérifier la non-interpénétration et le non-croisement des noeuds.

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup>Expérimentalement, pour certains essais n'amenant pas à un écaillage total, il arrive que seule cette zone présente un début d'écaillage.

- au temps  $1.54\mu s$ , l'ensemble du centre de la cible s'est brutalement complètement endommagé.
- ensuite, et en particulier au temps  $1.66\mu s$ , la zone complètement endommagée s'étend (notamment grâce au retard qui a été introduit) et une onde de détente qui part de l'écaille relaxe progressivement la cible.

A posteriori, on obtient une zone complètement endommagée de l'ordre de 1mm qui est finalement bien approximée par la formule analytique du paragraphe précédent. La formule analytique surestime cependant la valeur numérique, mais le résultat est somme toute correct vu la différence entre le modèle choisi pour l'Au4G1-T4 et les hypothèses nécessaires à l'application de la formule analytique (en particulier en ce qui concerne la plasticité).

### 3.3.2 Identification par la méthode Chevrier

La méthode utilisée par Chevrier pour obtenir une courbe d'écaillage a été détaillée dans la partie 3.2.3.1. Nous proposons maintenant de poser les bases de l'identification des paramètres de l'endommagement retardé à partir de résultats obtenus par cette méthode (illustrés notamment par la courbe 3.11). Il s'agit de reproduire numériquement les essais qui ont été effectués expérimentalement; c'est-à-dire que l'on va suivre le même protocole pour obtenir la courbe d'écaillage. Des séries de simulations vont donc être effectuées, chaque série donnant un point sur la courbe d'écaillage. Ainsi :

- pour une série donnée, une épaisseur de cible  $L^c$ , et donc un temps de chargement en tension  $t^c$ , sont fixés.
- à chaque simulation, la vitesse d'impact  $V^{impact}$  est progressivement augmentée afin de déterminer la vitesse limite, et donc la contrainte d'écaillage  $\sigma^{ec}$ , pour laquelle l'écaillage apparaît.

En fait, de façon analogue à la figure 3.11 qui présente les résultats expérimentaux, les résultats sont donnés sous la forme d'un graphique contrainte / temps de chargement sur lequel chaque point correspondant à une simulation donne le niveau d'endommagement obtenu à la fin du calcul.

L'ensemble des résultats présentés dans cette partie sont par ailleurs rappelés sous forme de tableaux dans l'annexe C.

### 3.3.2.1 Simulations sans limitation du taux d'endommagement

La première étude effectuée donne les résultats numériques obtenus avec le modèle classique, c'est-à-dire sans limiter le taux d'endommagement. Ces résultats sont présentés sur la figure 3.18. On s'aperçoit sans difficulté qu'aucune dépendance de la contrainte d'écaillage au temps de chargement en tension n'est mise en évidence. Les isovaleurs de l'endommagement sont en effet assimilables à des droites horizontales. Le modèle classique semble donc incapable de représenter correctement des résultats d'essais plaque/plaque.

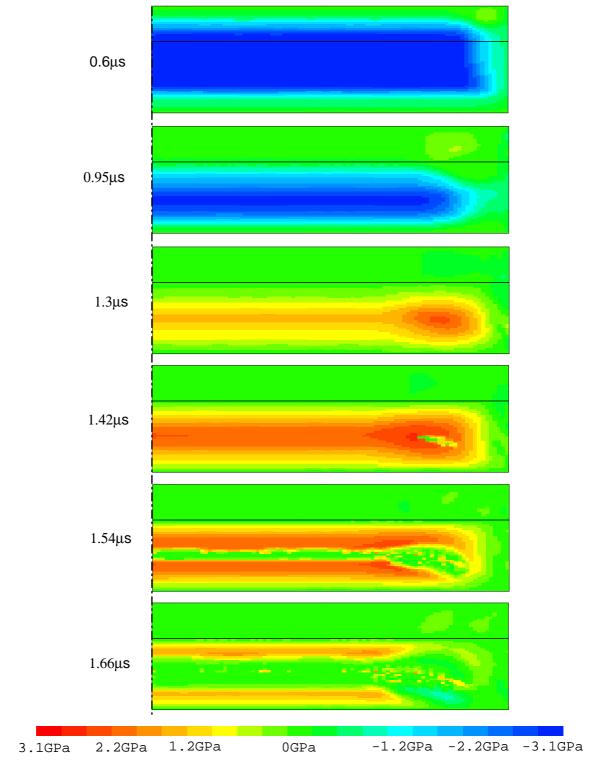


Fig. 3.15 – Profil de la contrainte axiale pour différents temps dans la cible et l'impacteur.

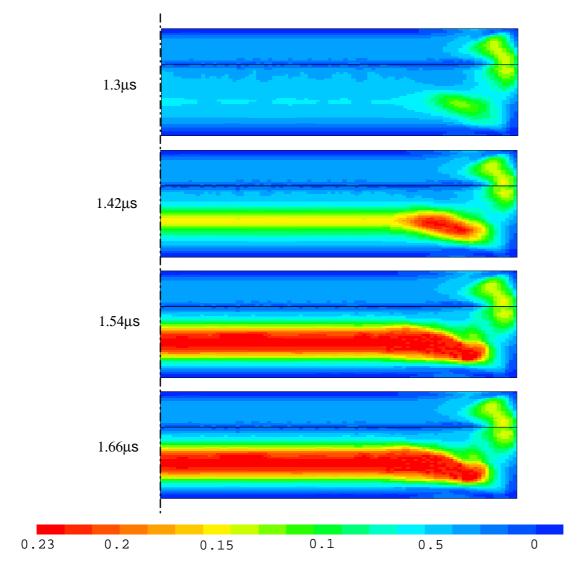


Fig. 3.16 – Profil de l'endommagement pour différents temps dans la cible et l'impacteur.

### 3.3.2.2 Simulations avec endommagement retardé

La deuxième étude utilise le modèle d'endommagement retardé. Des paramètres de référence ont été choisis :  $a^{ref}=10$  et  $\tau^{c}$   $^{ref}=0.2\mu s$ . Les résultats numériques obtenus avec ces paramètres sont donnés sur la figure 3.19.

Comme pour les résultats expérimentaux, on constate ici, à endommagement égal, une augmentation de la contrainte lorsque le temps de chargement diminue. Les isovaleurs sont maintenant semblables à des hyperboles. Cette forme est assez intuitive vue la nature du modèle. La limitation du taux d'endommagement implique en effet la présence d'une asymptote verticale correspondant au temps minimal pour atteindre l'endommagement total. Ce temps est ici égal à  $D^c\tau^c = 0.044\mu s$ . Il est, dans les faits, assez difficile de mettre en évidence numériquement cette asymp-

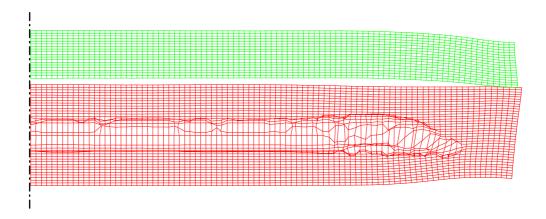


Fig. 3.17 – Déformée de la plaque à la fin du calcul.

tote. En effet, les contraintes correspondantes sont tellement élevées que la part de l'endommagement en compression (lors du premier passage de l'onde) n'est plus négligeable devant l'endommagement en tension. Il a donc été choisi, pour pouvoir négliger cette participation, de n'effectuer que des simulations avec des pressions de choc inférieures à 4.5GPa, correspondant environ à des vitesses d'impact inférieures à 550m/s. Ceci explique l'absence de simulations présentant un endommagement total pour le temps de chargement de  $0.17\mu s$ .

Sachant qu'il est possible d'obtenir des résultats numériques qualitativement satisfaisants avec un modèle d'endommagement retardé, il s'agit maintenant de montrer qu'il est possible, en optimisant les paramètres a et  $\tau^c$ , d'obtenir des résultats numériques quantitativement satisfaisants quel que soit le temps de chargement  $t^c$ . Deux nouvelles études sont donc menées, la première en gardant le temps caractéristique de référence  $\tau^{c\ ref}$  et en choisissant a égal à  $2a^{ref}=20$  et la seconde en gardant le paramètre a de référence  $a^{ref}$  et en choisissant  $\tau^c$  égal à  $\frac{\tau^{c\ ref}}{2}=0.1\mu s$ . Ces résultats sont présentés sur les figures 3.20 et 3.21. Les sensibilités mises en évidence sont les suivantes :

– la courbure des isovaleurs diminue lorsque a augmente. On le constate en particulier en comparant, sur les figures 3.19 (référence) et 3.20, la contrainte correspondant à un endommagement total obtenue pour les temps de chargement  $t^c$  de  $0.33\mu s$  et  $0.42\mu s$ . Ceci s'interprète facilement si on considère à nouveau la loi d'évolution de l'endommagement retardé :

$$\dot{D} = \frac{1}{\tau^c} \left( 1 - \exp\left[ -a \left\langle D^{nc} - D \right\rangle \right] \right) \tag{3.13}$$

où l'on voit que a accentue l'influence d'un écart entre D et  $D^{nc}$ . A la limite, nous avons vu que lorsque a augmente, le modèle d'endommagement retardé tend progressivement vers le modèle d'endommagement retardé simplifié mis en place dans la partie 2.4.1.1; c'est-à-dire vers un modèle à seuil. L'écaillage apparaîtrait dans ce cas dès lors que la contrainte dépasserait une

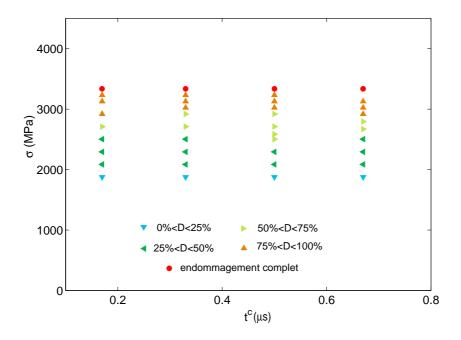


Fig. 3.18 – Résultats numériques obtenus avec la méthode Chevrier pour l'Au4G1-T4 modélisé sans limitation du taux d'endommagement.

contrainte limite (droite horizontale dans le graphique  $\sigma/t^c$ ) et que le temps de chargement serait supérieur au temps minimal  $D^c\tau^c$  (droite verticale dans le graphique  $\sigma/t^c$ ). Ce cas limite correspond à un rayon de courbure nul (angle droit entre les deux droites).

– la courbe (comme l'asymptote verticale en  $D^c\tau^c$ ) est globalement translatée selon l'axe des temps de chargement lorsque l'on modifie le temps caractéristique  $\tau^c$ . Les figures 3.19 (référence) et 3.21 permettent de constater ce phénomène.

On schématise les isovaleurs d'endommagement par des hyperboles à trois paramètres  $A,\,B$  et C comme suit :

$$\sigma = A + \frac{B}{t^c - C} \tag{3.14}$$

En conséquence, augmenter le paramètre a est équivalent à diminuer le paramètre B et augmenter le temps caractéristique  $\tau^c$  est équivalent à augmenter C. Deü [Deü , 1997] avait par ailleurs deja étudié, dans le cadre d'une poutre unidimensionnelle élastique endommageable, l'influence de ces paramètres. Les mêmes caractéristiques avaient été mises en évidence, mais beaucoup plus nettement que dans notre analyse. Trois éléments de l'étude de Deü permettent d'expliquer cette différence. Tout d'abord, le cadre de l'élasticité endommageable dans lequel il se place permet d'éviter le problème des ondes plastiques plus lentes qui interagissent entre elles. L'endommagement de son matériau n'a lieu qu'en tension, contrairement à notre étude où il est possible d'avoir un endommagement mineur en compression. Enfin, le cadre uni-dimensionnel qu'il considère affranchit de la prise en compte des

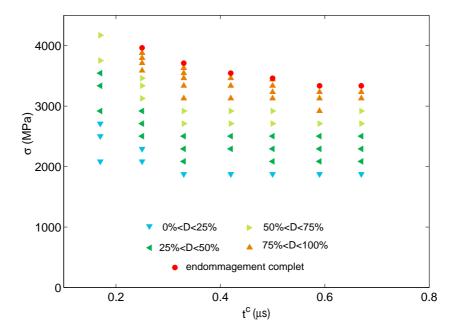


Fig. 3.19 – Résultats numériques obtenus avec la méthode Chevrier pour l'Au4G1-T4 modélisé avec limitation du taux d'endommagement et les paramètres de référence  $a^{ref} = 10$  et  $\tau^{c \ ref} = 0.2 \mu s$ .

effets de bords. Quoi qu'il en soit, la présente étude, comme celle effectuée par Deü, corrobore les différentes influences détaillées précédemment.

Ainsi, il semble dorénavant possible de reproduire qualitativement et quantitativement des résultats expérimentaux d'essais plaque/plaque obtenus par la méthode Chevrier en optimisant a et  $\tau^c$ . L'identification de ces deux paramètres est donc envisageable par cette méthode.

### 3.3.3 Identification par la vitesse de face arrière

La méthode permettant d'obtenir une courbe d'écaillage à partir de mesures de vitesse de face arrière a été détaillée dans la partie 3.2.3.2. A partir de mesures effectuées sur le profil de vitesse de face arrière (et en particulier de la différence entre la vitesse maximale  $V^{max}$  et la vitesse minimale  $V^{min}$ ), il est possible d'en déduire la contrainte d'écaillage. Pour ce faire, l'usage d'une formule est nécessaire, que ce soit celle de Taylor [Speight et Taylor , 1986], celle de Romanchenko et Stepanov [Romanchenko et Stepanov , 1980] ou une autre. Plutôt que d'utiliser une formule (ou une autre) afin de tracer une courbe d'écaillage, il est choisi d'étudier numériquement ce problème directement en terme de vitesse de face arrière.

Le protocole, analogue à celui qui a permis d'obtenir les profils pour le Ta6V présentés sur la figure 3.13, consiste donc à :

– se fixer une vitesse d'impact pour toutes les simulations suffisamment élevée pour que l'écaillage ait lieu. On choisit pour les simulations avec l'Au4G1- T4 une vitesse d'impact  $V^{impact}$  égale à 500m/s qui se révèle généralement

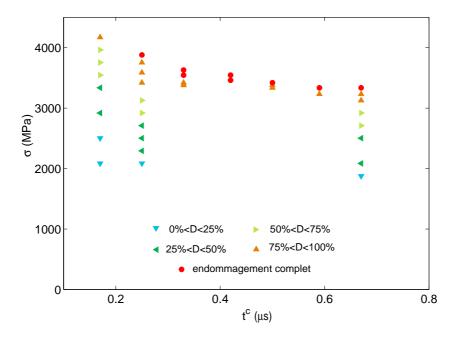


Fig. 3.20 – Résultats numériques obtenus avec la méthode Chevrier pour l'Au4G1-T4 modélisé sans limitation du taux d'endommagement et les paramètres a=20 et  $\tau^c=\tau^c$   $ref=0.2\mu s$ .

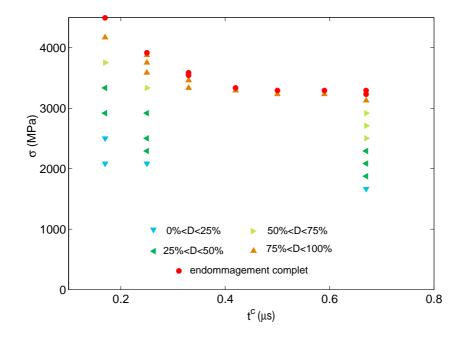


Fig. 3.21 – Résultats numériques obtenus avec la méthode Chevrier pour l'Au4G1-T4 modélisé sans limitation du taux d'endommagement et les paramètres  $a=a^{ref}=10$  et  $\tau^c=0.1\mu s$ .

suffisante.

- effectuer des simulations avec trois épaisseurs de cible différentes (qui correspondent à trois temps de chargement différents). Dans notre cas,  $L^c$  est choisi successivement égal à 1, 2 puis 4mm.
- dégager des profils de vitesse de face arrière les principales caractéristiques, en particulier la quantité  $|V^{max} V^{min}|$ , et les comparer à celles classiquement obtenues expérimentalement.

L'ensemble des résultats présentés dans cette partie sont par ailleurs résumés dans le tableau 3.2.

#### 3.3.3.1 Simulations sans limitation du taux d'endommagement

La première étude effectuée donne les résultats numériques obtenus avec le modèle classique, c'est-à-dire sans limiter le taux d'endommagement. Ces résultats sont présentés sur la figure 3.22. On constate sans mal que l'écart de vitesse  $|V^{max}-V^{min}|$  reste inchangé lorsque l'épaisseur de la cible est modifiée. Ces résultats sont totalement cohérents avec ceux obtenus dans le paragraphe 3.3.2.1 où aucune influence du temps de chargement sur la contrainte d'écaillage n'avait été mise en évidence.

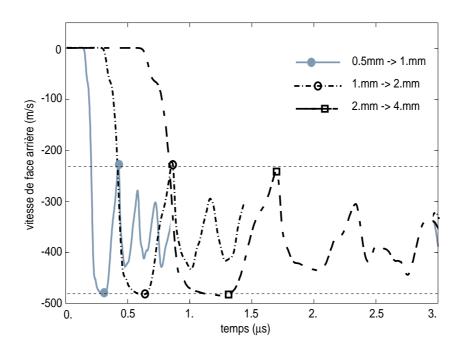


Fig. 3.22 – Vitesse de face arrière pour trois épaisseurs  $(1mm, 2mm \text{ et } 4mm \text{ pour } L^c)$  pour l'alliage d'aluminium Au4G1-T4. La vitesse d'impact est de 500m/s. Résultats numériques obtenus sans effet retard. Les points correspondent aux mesures expérimentales effectuées classiquement (en particulier  $V^{max} - V^{min}$ ).

#### 3.3.3.2 Simulations avec endommagement retardé

De la même manière que dans le paragraphe 3.3.2.2, on choisit tout d'abord des paramètres de référence :  $a^{ref} = 2$  et  $\tau^{c}$   $^{ref} = 0.1 \mu s$ . Les profils de vitesses de face arrière obtenus sont représentés sur la figure 3.23.

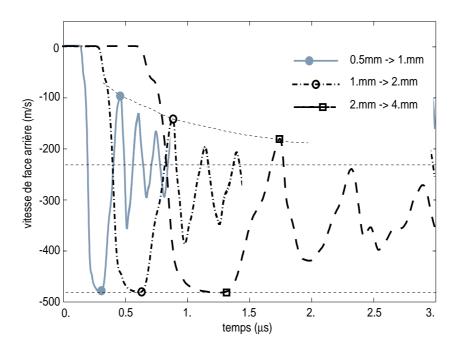


Fig. 3.23 – Vitesse de face arrière pour trois épaisseurs  $(1mm, 2mm \text{ et } 4mm \text{ pour } L^c)$  pour l'alliage d'aluminium Au4G1-T4. La vitesse d'impact est de 500m/s. Résultats numériques obtenus avec les paramètres  $a^{ref}$  et  $\tau^{c}$  ref.

Comme pour les résultats expérimentaux du Ta6V de la figure 3.13, on retrouve une influence nette de l'épaisseur de la cible sur l'écart de vitesse. Ainsi, lorsque l'épaisseur de la cible diminue, le delta de vitesse augmente. On constate par ailleurs que, comme cela a été détaillé lors de la présentation des essais plaque/plaque dans la partie 3.2,  $V^{max}$  est quasiment égal pour toutes les épaisseurs à la vitesse d'impact  $V^{impact} = 500 m/s$ . En reliant les points correspondant à  $V^{min}$ , on peut donc avoir une idée de la courbe d'écaillage associée <sup>10</sup>. Cette courbe est tracée en pointillé sur la figure 3.23.

Encore une fois, des résultats numériques qualitativement satisfaisants sont trouvés. Reste à voir si l'optimisation des paramètres a et  $\tau^c$  permet de trouver des résultats numériques quantitativement satisfaisants. Différentes simulations sont donc effectuées :

- trois simulations avec le temps caractéristique de référence  $\tau^{c ref}$  et trois valeurs distinctes pour le paramètre  $a: 0.4, a^{ref} = 2$  et 10.
- trois simulations avec le paramètre a de référence  $a^{ref}$  et trois valeurs distinctes pour le temps caractéristique :  $0.05\mu s$ ,  $\tau^{c}$   $^{ref} = 0.1\mu s$  et  $0.2\mu s$ .

<sup>&</sup>lt;sup>10</sup>Le temps en abscisse est en effet relativement proportionnel au temps de chargement.

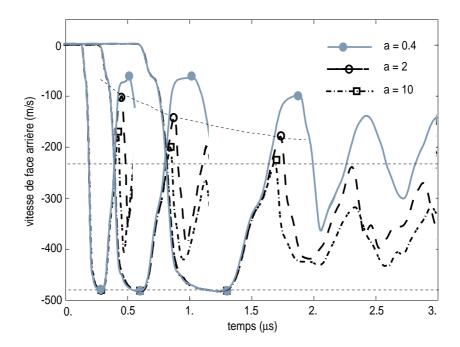


Fig. 3.24 – Vitesse de face arrière pour trois épaisseurs (1mm, 2mm et 4mm pour  $L^c$ ) pour l'alliage d'aluminium Au4G1-T4. La vitesse d'impact est de 500m/s. Synthèse des résultats numériques obtenus avec le paramètre  $\tau^{c ref}$  et différents paramètres a.

Ces résultats sont présentés sur les figures 3.24 et 3.25. Deux simulations n'ont pas données d'écaillage de la cible ; il s'agit à chaque fois d'une cible de 1mm d'épaisseur pour les couples  $(a, \tau^c)$  suivants :  $(a^{ref}, 0.2\mu s)$  et  $(0.4, \tau^{c})$ . On peut toutefois, en considérant les courbes passant par les points correspondant à  $V^{min}$ , dégager diverses influences. De la même manière que pour l'étude avec la méthode Chevrier et pour les mêmes raisons, on a globalement :

- une augmentation de la courbure avec le paramètre a. Ceci est particulièrement visible sur la figure 3.24 en comparant les courbes pour a=2 et a=10.
- une déplacement de la courbe sans modification de la courbure lorsque le temps caractéristique  $\tau^c$  est modifié <sup>11</sup>.

Ces deux influences doivent permettre de reproduire aussi bien qualitativement que quantitativement les résultats expérimentaux. L'identification est donc encore envisageable par cette méthode.

### 3.3.4 Conclusion

Deux méthodes d'identification ont donc été proposées selon les moyens expérimentaux utilisés pour réaliser les essais plaque/plaque. Il est en effet fondamental de

 $<sup>^{11}</sup>$ Il est difficile ici de dégager proprement dans quelle direction est la translation puisque une augmentation du temps caractéristique  $\tau^c$  déplace, d'une part, la courbe vers la droite selon l'axe des temps dû à l'augmentation du temps à rupture et, d'autre part, vers le haut selon l'axe des vitesses dû à l'augmentation de la contrainte d'écaillage.

$L^c$	$V^{max}$ -	$-V^{min} \mid (m/s)$	·)			
(mm)	pas de	$a = a^{ref}$	$a = a^{ref}$	$a = a^{ref}$	a = 10	a = 0.4
	$\operatorname{retard}$	$\tau^c = \tau^{c \ ref}$	$\tau^c = 0.2$	$\tau^c = 0.05$	$\tau^c = \tau^{c \ ref}$	$\tau^c = \tau^{c \ ref}$
1	253	385	(423)	346	310	(424)
2	254	343	382	311	282	419
4	246	302	343	274	254	384

Tab. 3.2 – Résumé de la différence entre  $V^{max}$  et  $V^{min}$  pour les différentes simulations présentées.  $a^{ref}=2$ ,  $\tau^{c}$   $^{ref}=0.1\mu s$  et  $V^{impact}=500m/s$ . Une valeur entre parenthèses signifie que l'écaillage n'a pas eu lieu pour cette simulation.

se rapprocher au plus de la méthode expérimentale qui a été utilisée pour ne pas trouver des résultats erronés. Il est par exemple dangereux, dans le cas de l'analyse de la vitesse de face arrière, d'utiliser pour les simulations des vitesses d'impact différentes de celles utiliser lors des essais. Hanim [Hanim et Klepaczko , 1999] a en effet montré (au moins numériquement) que l'écart de vitesse  $|V^{max}-V^{min}|$  dépendait fortement de la vitesse d'impact choisie. Hanim [Hanim et Klepaczko , 1999] a également mis en évidence des différences de plus d'un GPa selon la formule utilisée pour construire la courbe d'écaillage (comme celles proposées dans [Romanchenko et Stepanov , 1980, Speight et Taylor , 1986, Bushman et al. , 1993] entre autres).

Intéressons-nous par exemple au cas de l'Au4G1-T4 avec des paramètres a et  $\tau^c$  respectivement égaux à 10 et  $0.1\mu s$ . Ce cas a été traité à la fois avec la méthode Chevrier (voir figure 3.21) et avec la méthode par analyse de la vitesse de face arrière

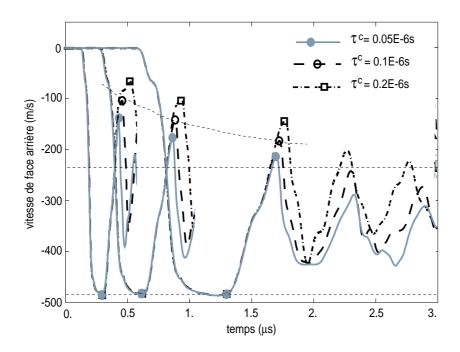


Fig. 3.25 – Vitesse de face arrière pour trois épaisseurs  $(1mm, 2mm \text{ et } 4mm \text{ pour } L^c)$  pour l'alliage d'aluminium Au4G1-T4. La vitesse d'impact est de 500m/s. Synthèse des résultats numériques obtenus avec le paramètre  $a^{ref}$  et différents paramètres  $\tau^c$ .

(voir figure 3.24). Pour la première méthode, les contraintes d'écaillage  $\sigma^{eq}$  sont supérieures à 3GPa quel que soit le temps de chargement  $t^c$ . Pour la seconde méthode, en appliquant par exemple la formule de Taylor (voir équation 3.5), on obtient des valeurs de contrainte d'écaillage comprise entre 2 et 2.5GPa, inférieures de plus de 1GPa à celles obtenues par la première méthode.

De manière générale, l'utilisation d'une courbe d'écaillage sans savoir comment elle a été construite est fortement déconseillée. C'est pourquoi les deux méthodes d'identification proposées reproduisent numériquement le plus fidèlement possible le protocole expérimental présenté dans le paragraphe 3.2.3.1 pour la méthode Chevrier et dans le paragraphe 3.2.3.2 pour la méthode par analyse de vitesse de face arrière.

# 3.4 Etudes pratiques : cas de l'alliage d'aluminium 7020-T6 et de l'alliage de titane Ta6V

Dans cette partie est proposée l'identification des paramètres de l'endommagement retardé pour un alliage d'aluminium 7020-T6 et pour un alliage de titane Ta6V. Dans le cas du premier, les essais ont été effectués par Chevrier [Chevrier, 1998] au LPMM avec la méthode éponyme; nous utiliserons donc la méthode présentée dans la partie 3.3.2. Dans le cas du second, ils ont été réalisés au CEA Valduc où un interféromètre est disponible pour effectuer des mesures de vitesse de face arrière permettant ainsi d'utiliser la méthode d'identification proposée dans la partie 3.3.3. Les deux paragraphes qui suivent détaillent :

- les principales propriétés du matériaux et les modèles associés (écrouissage, endommagement identifié en quasi-statique, dépendance à la vitesse de déformation).
- infine, l'identification de leurs paramètres d'endommagement retardé à l'aide des méthodes détaillées précédemment.

### 3.4.1 Cas de l'alliage d'aluminium 7020-T6

### 3.4.1.1 Description du matériau

Est étudié dans cette partie un alliage d'aluminium Al-Zn-Mg 7020 (Mn 0.05%, Mg 1%, Cr 0.1%, Zn 4%) avec un traitement thermique T6. Plusieurs essais de traction et de compression ont été réalisés pour déterminer les caractéristiques mécaniques [Chevrier , 1998, Chevrier et Klepaczko , 1999, Hanim et Klepaczko , 1999] (voir le tableau 3.3). Une dépendance limitée à la vitesse de déformation a été trouvée avec un écrouissage relativement faible. L'endommagement et la rupture sont modélisés par l'introduction d'une variable d'endommagement isotrope D.

3.4.1.1.1 Equations générales L'aluminium 7020-T6 obéit à une loi d'écoulement plastique avec un écrouissage isotrope couplée à l'endommagement. Les équations d'évolution sont donc globalement semblables à celles qui ont été présentées dans la

	ρ	$\sigma^y$	$\sigma^{HEL}$	E	$c^L$
	$kg.m^{-3}$	MPa	MPa	MPa	$m.s^{-1}$
7020-T6	2780	320	720	71500	6400

Tab. 3.3 – Caractéristiques mécaniques de l'alliage d'aluminium 7020-T6

partie 2.5. Les seules différences entre le modèle de plasticité de von Mises détaillé précédemment et la modélisation faîte ici de l'aluminium 7020-T6 sont :

- la loi d'évolution de l'endommagement (non-retardé pour le moment) qui est ici spécifique.
- la fonction de charge f qui ajoute à l'équation 2.39 une dépendance à la vitesse de déformation et à la température.

Les principales équations d'évolution du modèle se résument à  $^{12}$ :

$$\begin{cases}
\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_p \\
\dot{\sigma} = (1 - D)H\dot{\varepsilon}_e - \frac{\sigma}{1 - D}\dot{D} \\
\dot{\varepsilon}_p = \frac{3}{2}\frac{\dot{\lambda}}{1 - D}\frac{\sigma^d}{\sigma^{vm}} \\
\dot{D}^{nc} = h\left(\frac{\sigma^H}{\sigma^{vm}}, \dot{\lambda}, D\right)
\end{cases}$$
(3.15)

où, par rapport à la partie 2.5, la fonction h du taux de triaxialité  $\frac{\sigma^H}{\sigma^{vm}}$ , du multiplicateur plastique  $\lambda$  et de l'endommagement D remplace l'évolution donnée par Lemaître et Chaboche [Lemaître , 1996a, Lemaître et Chaboche , 1996b]. Par ailleurs, la fonction de charge s'écrit :

$$f(\sigma, D, \bar{\varepsilon}_p, \dot{\varepsilon}_p, T) = \frac{\sigma^{vm}}{1 - D} - \sigma^e(\bar{\varepsilon}_p, \dot{\varepsilon}_p, T)$$
(3.16)

$$\bar{\varepsilon}_p = \int_0^t \dot{\bar{\varepsilon}}_p dt, \ \dot{\bar{\varepsilon}}_p = \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}_p : \dot{\varepsilon}_p}$$
 (3.17)

où la fonction  $\sigma^e$  traduit la dépendance de la limite d'élasticité à la déformation plastique équivalente, au taux de déformation plastique équivalente et à la température.

Les deux paragraphes suivants détaillent pour le premier (paragraphe 3.4.1.1.2) la fonction  $\sigma^e$  et pour le second (paragraphe 3.4.1.1.3) la fonction h.

3.4.1.1.2 Dépendance à la vitesse de déformation La fonction de charge f pour l'aluminium 7020-T6 a été identifiée grâce à des essais de traction et de compression pour différentes vitesses de déformation. Il a été considéré que la contrainte d'écoulement suivait une loi puissance de la forme donnée par les équations 3.18 à 3.21; modèle qui a été proposé par Klepaczko [Klepaczko , 1987].

<sup>&</sup>lt;sup>12</sup>De la même manière que dans la partie 2.5, il faut vérifier une condition supplémentaire pour que l'endommagement puisse évoluer. Celle-ci est détaillée ultérieurement.

$$\sigma^{e}(\bar{\varepsilon}_{p}, \dot{\bar{\varepsilon}}_{p}, T) = \sigma^{0}(\bar{\varepsilon}_{p}, T) \left( 1 + \left( \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}_{p}}{\dot{\varepsilon}^{0}} \right)^{m(T)} \right)$$
(3.18)

avec

$$\sigma^{0}(\bar{\varepsilon_{p}}, T) = B^{0} \left( 1 - q \frac{T}{T_{m}} \right) (\bar{\varepsilon_{p}} + \varepsilon^{0})^{n(T)}$$
(3.19)

et

$$n(T) = n^0 \left( 1 - \frac{T}{T_m} \right) \tag{3.20}$$

$$m(T) = m^0 \left(\frac{T}{T_m}\right) \tag{3.21}$$

 $\sigma^0(\bar{\varepsilon_p},T)$  représente la contrainte d'écoulement sous conditions quasi-statiques, elle dépend uniquement d'une puissance de la déformation plastique équivalente  $\bar{\varepsilon_p}$  et varie linéairement par rapport à la température absolue  $T.~B^0$  est le module plastique,  $\varepsilon^0$  la déformation plastique de référence et  $n^0$  l'exposant d'écrouissage. Sous des conditions dynamiques, la contrainte d'écoulement quasi-statique est multipliée par une fonction puissance du taux de déformation plastique équivalent  $\dot{\bar{\varepsilon_p}}$ .  $\dot{\bar{\varepsilon^0}}$  est le taux de déformation de référence et  $m^0$  traduit la sensibilité à la vitesse de déformation. Enfin, q est un coefficient traduisant la sensibilité à la température et  $T_m$  la température de fusion.

Les constantes matériaux  $B^0$ , q,  $\varepsilon^0$  et n ont été déterminées par Hanim et Klepaczko [Hanim et Klepaczko , 1999] à l'aide d'une courbe de traction à  $11.3s^{-1}$ . Les autres coefficients  $m^0$  et  $\dot{\varepsilon^0}$  permettant de prendre en compte la sensibilité à la vitesse ont été déterminés par les mêmes auteurs grâce à une forme linéaire de l'équation 3.18. Toutes les constantes du modèle de Klepaczko sont données pour l'alliage d'aluminium 7020-T6 dans le tableau 3.4.

Coefficient	$B_0$	$\overline{q}$	$T_m$	$n_0$	$m_0$	$\dot{arepsilon_0}$	$\varepsilon_0$
	MPa	_	K	_	_	$s^{-1}$	_
7020-T6	1352	1.118	1877	0.289	0.2248	$1.88\mathrm{e}{+12}$	0.007

Tab. 3.4 – Valeurs des constantes du modèles de Klepaczko pour le 7020-T6

3.4.1.1.3 Endommagement La loi d'évolution de l'endommagement  $h\left(\frac{\sigma^H}{\sigma^{vm}},\dot{\lambda},D\right)$  choisie pour l'alliage d'aluminium 7020-T6 est inspiré de l'endommagement couplé à la plasticité [Lemaître , 1996a, Lemaître et Chaboche , 1996b] décrit dans le chapitre précédent qui s'écrit :

$$\dot{D}^{nc} = \frac{D^c}{\varepsilon_p^c - \varepsilon_p^s} \left[ \frac{2}{3} (1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left( \frac{\sigma^H}{\sigma^{vm}} \right)^2 \right] \frac{\dot{\lambda}}{1 - D}$$
(3.22)

seulement si 
$$\left[\frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)\left(\frac{\sigma^H}{\sigma^{vm}}\right)^2\right] p \ge \varepsilon_p^s$$
 (3.23)

Dans notre cas, elle s'écrit :

$$\dot{D^{nc}} = \frac{D^c}{\varepsilon_p^c - \varepsilon_p^s} \Omega\left(\frac{\sigma^H}{\sigma^{vm}}\right) \frac{\dot{\lambda}}{1 - D}$$
 (3.24)

seulement si 
$$\Omega\left(\frac{\sigma^H}{\sigma^{vm}}\right) p \ge \varepsilon_p^s$$
 (3.25)

Pour la loi considérée ici, lorsque le taux de triaxialité est contant (c'est-à-dire  $\Omega\left(\frac{\sigma^H}{\sigma^{vm}}\right)$  constant), l'endommagement évolue linéairement de 0 jusqu'à sa valeur critique  $D^c$  correspondant à un endommagement total, ceci sous réserve que la condition 3.25 soit satisfaite. La loi de Lemaître et Chaboche impose l'influence du taux de triaxialité alors que la fonction  $\Omega$  peut être choisie en fonction des résultats expérimentaux. Ce travail et la détermination des autres paramètres gouvernant la loi d'évolution sont présentés ci-après.

Comme cela a été dit précédemment, lorsque le taux de triaxialité est constant, l'endommagement évolue linéairement de 0 à  $D^c$ . En particulier, si  $\Omega\left(\frac{\sigma^H}{\sigma^{vm}}\right)$  est égal à 1, D croît linéairement à partir d'une déformation plastique équivalente égal à la déformation plastique seuil  $\varepsilon_p^s$  jusqu'à une déformation plastique équivalente égale à la déformation plastique critique  $\varepsilon_p^c$ . C'est le cas lorsque  $\frac{\sigma^H}{\sigma^{vm}} = \frac{1}{3}$  (voir le choix de la fonction  $\Omega$  ensuite), par exemple pour une traction d'éprouvette cylindrique. On peut donc conclure immédiatement que la déformation plastique critique correspond à celle obtenue lors d'un tel essai. Chevrier [Chevrier, 1998] a montré que la déformation totale à rupture pour l'alliage d'aluminium 7020-T6 est sensiblement égale à 12%, ce qui correspond à une déformation plastique équivalente de 11.5%. La physique qui gouverne l'évolution de l'endommagement est liée à la croissance et à la coalescence des microcavités. Selon Lemaître et Chaboche [Lemaître, 1996a, Lemaître et Chaboche, 1996b], l'étude de ces cavités nous donne des informations au sujet de l'initiation de l'endommagement (c'est-à-dire la valeur du seuil de déformation plastique  $\varepsilon_n^s$ ) et au sujet de la détérioration des propriétés du matériau (c'est-à-dire la valeur de  $D^c$ ). Achon [Achon, 1994] a montré en particulier que, pour les alliages d'aluminium de la série 7000, la croissance des cavités débute dès que la plasticité apparaît. Ainsi, l'endommagement s'initie dès que la déformation plastique équivalente est positive (quel que soit le taux de triaxialité). En prenant en considération la condition 3.25, on peut ainsi conclure que le seuil de déformation plastique  $\varepsilon_p^s$  est égal à zéro. D'un autre côté, Achon [Achon , 1994] a mis en évidence le fait que la fraction volumique de vides amenant à la rupture est de quelques pourcents

de déformation plastique pour cette même famille d'alliages. Les essais de traction simple réalisés par Chevrier [Chevrier et Klepaczko , 1999] sur l'alliage d'aluminium 7020-T6 montre également que l'endommagement n'a qu'une influence limitée sur les caractéristiques du matériau. L'endommagement critique est donc choisi égal à 0.05.

Tous les coefficients relatifs à l'évolution de l'endommagement sont résumés dans le tableau 3.5.

Paramètre	$D^c$	$\varepsilon_p^s$	$\varepsilon_p^c$
7020-T6	0.05	0	0.115

Tab. 3.5 – Valeurs des constantes de la loi d'évolution de l'endommagement

Le taux d'endommagement dépend de la triaxialité via la fonction  $\Omega$ . Cette fonction est généralement telle que :

$$\Omega\left(\frac{1}{3}\right) = 1\tag{3.26}$$

Lemaître et Chaboche [Lemaître, 1996a, Lemaître et Chaboche, 1996b] proposent une loi puissance pour cette fonction (voir l'équation 3.22).

$$\Omega_{Lem.\&Cha.}\left(\frac{\sigma^H}{\sigma^{vm}}\right) = \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)\left(\frac{\sigma^H}{\sigma^{vm}}\right)^2$$
(3.27)

Ceci implique un certain nombre de limitations. L'influence du taux de triaxialité est complètement imposée et il n'y a pas de distinction faîte entre la tension et la compression. Nous proposons ici une nouvelle fonction  $\Omega$  (voir l'équation 3.28 où  $\langle x \rangle$  représente la partie positive de x) qui doit permettre de retrouver les résultats expérimentaux en optimisant les coefficients A et B. En particulier, cette fonction permet de retrouver  $\varepsilon_p^{fracture} = 11.5\%$  lorsque le taux de triaxialité est égal à  $\frac{1}{3}$  et  $\varepsilon_p^{fracture} = 0.13\%$  lorsqu'il est égal à 1.15 (résultat issus d'un essai plaque/plaque, voir également la partie 3.4.1.2). Les coefficients A et B pour l'alliage d'aluminium 7020-T6 sont donnés dans le tableau 3.6.

$$\Omega\left(\frac{\sigma^H}{\sigma^{vm}}\right) = A + B\left(\exp\left[\left\langle\frac{\sigma^H}{\sigma^{vm}}\right\rangle^3\right] - 1\right)$$
(3.28)

On peut alors déduire pour un taux de triaxialité donné la déformation plastique équivalente à rupture correspondante. Cette évolution est donnée sur la figure 3.26. L'aspect de cette courbe rappelle celle obtenue par le modèle de Gurson [Gurson , 1977] pour les matériaux poreux et plus particulièrement celle obtenue par Achon [Achon , 1994] avec le modèle de Rice et Tracey [Rice et Tracey , 1969] sur les alliages d'aluminium de la famille 7000.

Coefficient	A	В
7020-T6	0.0674	24.7

Tab. 3.6 – Valeurs des constantes de la fonction  $\Omega$ 

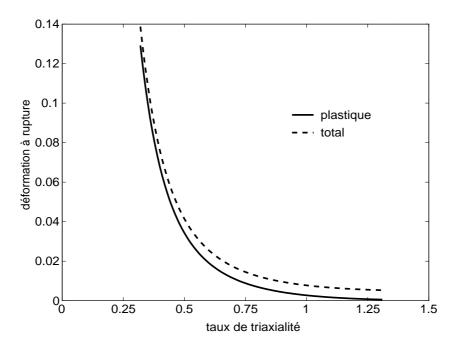


Fig. 3.26 – Evolution de la déformation à rupture, totale et élastique (en quasistatique) en fonction du taux de triaxialité

Le comportement de l'alliage d'aluminium 7020-T6 suit donc une loi plastique endommageable dépendant de la vitesse de déformation. La figure 3.27 représente la contrainte en fonction de la déformation totale pour trois vitesses de chargement :  $1e-5s^{-1}$ ,  $1s^{-1}$  et  $1e+5s^{-1}$  et pour un taux de triaxialité égal à  $\frac{1}{3}$  durant toute la simulation.

### 3.4.1.2 Identification des paramètres a et $\tau^c$ du 7020-T6

L'identification des paramètres de l'alliage d'aluminium 7020-T6 se base sur des résultats expérimentaux obtenus avec la méthode Chevrier (voir parties 3.2.3.1 et 3.3).

Dans un premier temps, les résultats expérimentaux sont donnés. L'étude numérique [Suffis et al. , 2004a,c] qui suit donne d'abord des résultats de simulations sans effet retard. Comme celles-ci seront incapables de représenter correctement la courbe expérimentale, et ce malgré le fait que la modélisation de l'alliage d'aluminium 7020-T6 soit visco-plastique (en comparaison de celle de l'Au4G qui n'était que plastique), nous introduirons l'effet retard dans l'endommagement. D'un côté, ce retard va permettre de représenter l'influence du temps de chargement sur la contrainte d'écaillage et, d'un autre côté, grâce à l'influence des paramètres mise en évidence dans la partie 3.3, les résultats expérimentaux vont permettre l'identification des paramètres du

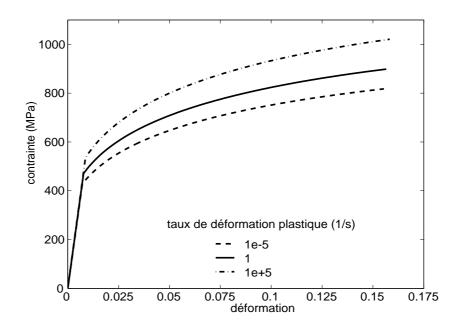


Fig. 3.27 – Evolution de la contrainte en fonction de la déformation pour différents taux de déformation

modèle à effet retard.

3.4.1.2.1 Résultats expérimentaux Chevrier a étudié en profondeur les aspects expérimentaux des essais plaque/plaque et ceci dans le cas particulier de l'alliage d'aluminium 7020-T6 et d'un acier à blindage. Grâce à un certain nombre d'essais pour différentes vitesses  $V^{impact}$  réalisés pour différentes épaisseurs  $L^c$ , il a pu tracer, en utilisant la méthode dite Chevrier décrite dans la partie 3.2.3.1, la courbe d'écaillage pour ces deux matériaux [Chevrier , 1998, Chevrier et Klepaczko , 1999]. La figure 3.11 donne cette courbe dans le cas de l'alliage d'aluminium 7020-T6.

3.4.1.2.2 Analyse numérique Afin de simuler les essais plaque/plaque avec le code de dynamique explicite Europlexus, l'algorithme détaillé dans la partie 2.5 a été modifié afin de prendre en compte, d'une part, la dépendance au taux de déformation plastique et, d'autre part, la modification de l'évolution de l'endommagement. La température est choisie constante et égale à la température ambiante; des simulations, effectuées également par Hanim [Hanim et Klepaczko , 1999] avec un autre code de calcul, ont en effet montré que la variation de température est très limitée pendant la simulation, à savoir de l'ordre de  $30^{\circ}C$ . La démarche utilisé pour tracer la courbe d'écaillage numérique est la même que celle détaillée dans la partie 2.5; chaque point à épaisseur donnée est obtenu avec plusieurs simulations à vitesses différentes.

En considérant tout d'abord que  $D = D^{nc}$ , c'est-à-dire en n'introduisant pas de retard dans l'endommagement, les premières simulations ne font apparaître aucune influence du temps de chargement sur la contrainte d'écaillage. Les résultats

numériques sont comparés aux résultats expérimentaux sur la figure 3.28 (ligne discontinue). On obtient, comparativement à ce qui avait été obtenu dans la partie 2.5, des résultats du même type; le fait que le comportement soit ici visco-plastique n'a donc pas solutionné (comme on aurait éventuellement pu s'y attendre) le problème de la modélisation de la dépendance de la contrainte d'écaillage au temps de chargement.

En introduisant un retard dans l'endommagement, et ce en utilisant l'équation fondamentale rappelée ci-dessous, la partie 3.3.2 a montré qu'il était possible d'identifier les paramètres a et  $\tau^c$ .

$$\dot{D} = \frac{1}{\tau^c} \left( 1 - \exp\left[ -a(D^{nc} - D) \right] \right) \tag{3.29}$$

Connaissant l'influence des deux paramètres du modèle à endommagement retardé, à savoir globalement un déplacement de l'asymptote verticale pour une modification du temps caractéristique  $\tau^c$  et une variation de la courbure pour une modification de la constante a, il est possible de les choisir de telle sorte que courbes numérique et expérimentale concordent. Après optimisation, les paramètres a et  $\tau^c$  sont donnés par le tableau 3.7. La courbe d'écaillage numérique correspondante est tracée sur la figure 3.28 (ligne continue).

Paramètre	a	$ au^c$
	-	$\mu s$
7020-T6	2.25	2

Tab. 3.7 – Valeurs des paramètres de l'endommagement retardé pour le 7020-T6

### 3.4.1.3 Bilan pour le 7020-T6

Cette partie a permis de mener à bien l'identification des paramètres de l'endommagement retardé pour l'alliage d'aluminium 7020-T6. Les résultats des premières étapes de l'identification, étapes qui ont été décrites en prélude de ce chapitre, ont été présentées dans un premier temps et ont abouti à l'usage d'un modèle de matériau plastique dépendant de la vitesse de déformation et de la température couplé à l'endommagement. En dernier lieu, l'identification des paramètres a et  $\tau^c$  grâce à la méthode originale (dite 'Chevrier') décrite dans la partie 3.3.2 a pu être effectuée. Les résultats obtenus sont très satisfaisants; résultats numériques et expérimentaux sont en effet en très bon accord. Enfin, de manière concomitante à cette identification, il a été montré que la nature visqueuse d'un matériau n'est pas suffisante pour résoudre les problèmes de localisation et pour répondre au problème de modélisation des essais d'impact de plaques.

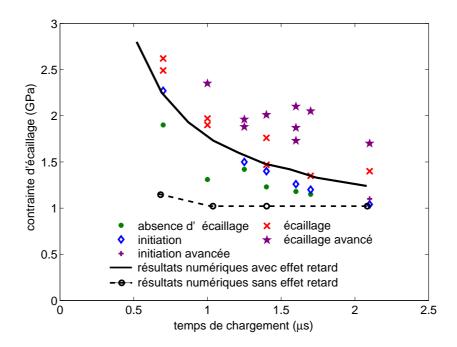


Fig. 3.28 – Courbes d'écaillages expérimentale et numérique dans le cas de l'alliage d'aluminium 7020-T6. La courbe en pointillé donne les résultats numériques sans retard, la courbe continue les résultats numériques avec l'endommagement retardé et les paramètres optimisés. Les points donnent les résultats expérimentaux de Chevrier [Chevrier , 1998].

### 3.4.2 Cas de l'alliage de titane Ta6V

#### 3.4.2.1 Description du matériau

Nous nous intéressons maintenant à l'étude d'un alliage de titane Ti-6Al-4V (Al 6.1%, V 4.3%, Fe 0.16%, C 0.01%, H 0.015%, N 0.06%, O 0.12%, Ti 89.235% selon Filip [Filip et al. , 2003]). C'est un élément allotropique ; c'est-à-dire qu'il existe dans plus d'une forme cristallographique. A température ambiante et pour l'alliage de titane étudié, il a une structure hexagonale compacte, appelée phase  $\alpha^{-13}$ . Ses principales caractéristiques élastiques ont été identifiées ; le tableau 3.8 les résume. Un certain nombre d'essais incluant :

- des essais quasi-statiques de traction,
- des essais dynamiques de barres d'Hopkinson en compression,
- des essais quasi-statiques sur éprouvettes entaillées,

réalisés en collaboration avec le CEA Valduc ont permis de mettre en évidence un comportement plastique endommageable avec une sensibilité importante à la vitesse de déformation. Dans ce cas, les équations générales sont identiques à celles décrites dans le paragraphe 3.4.1.1.1. Le reste de la description du matériau est effectué dans un rapport confidentiel réservé à la SNECMA.

 $<sup>^{13} {\</sup>rm La}$  structure se transforme en effet en une structure cristalline cubique centrée, appelée phase  $\beta$  à  $882^oC$  .

Propriété	ρ	$\sigma^y$	E	ν	$c^L$	$C_p$
	$kg.m^{-3}$	MPa	MPa	1	$m.s^{-1}$	$J.kg^{-1}.K^{-1}$
Ta6V	4420	253	116000	0.32	6130	521

Tab. 3.8 – Caractéristiques mécaniques de l'alliage de titane Ta6V

### 3.4.2.2 Identification des paramètres a et $\tau^c$ du Ta6V

L'identification des paramètres de l'alliage de titane Ta6V utilisé la méthode d'analyse de la vitesse de face arrière détaillée dans la partie 3.2.3.2.

Comme pour l'alliage d'aluminium 7020-T6, les résultats expérimentaux sont d'abords donnés. Ensuite, une étude numérique sans limitation du taux d'endommagement est effectuée afin de montrer une nouvelle fois l'incapacité (malgré la forte dépendance à la vitesse de déformation) du modèle d'endommagement classique à représenter correctement l'influence de l'épaisseur de la cible  $L^c$  sur l'écart de vitesse  $|V^{max}-V^{min}|$ . Enfin, l'endommagement retardé est introduit et les paramètres a et  $\tau^c$  identifiés de telle sorte que les résultats numériques et expérimentaux coincident au mieux.

3.4.2.2.1 Résultats expérimentaux Trois impacts de plaques ont été réalisés au CEA Valduc pour une même vitesse d'impact  $V^{impact}$  (à quelques m/s près). Les moyens expérimentaux disponibles ont permis d'obtenir la vitesse de face arrière pour chacun de ces essais. Les épaisseurs de la cible (respectivement de l'impacteur) sont de 1mm, 2mm et 4mm (0.5mm, 1mm et 2mm). La cible est constituée du titane objet de l'étude, l'impacteur est en cuivre; l'impact n'est donc pas symétrique. Les principales propriétés du cuivre sont données dans le tableau 3.9. Contrairement à ce qui a été présenté dans la partie 3.2, l'écaillage n'aura pas lieu au centre de la cible puisque les ondes dans le cuivre et dans le titane n'ont pas la même vitesse. Cela n'a en fait que peu de conséquences, d'autant plus que l'étude va être effectuée avec la méthode par analyse de la vitesse de face arrière.

La figure 3.13 donne les profils de vitesse de face arrière pour les trois essais de l'alliage de titane Ta6V sur un graphique adimensionné. Le début de l'enregistrement des données par l'interféromètre débutant au moment de la détection du précurseur élastique; la mise en vitesse de la face arrière débute à la même abscisse sur le graphique pour les trois essais.

Propriété	ρ	$\sigma^y$	E	ν	$c^L$
	$kg.m^{-3}$	MPa	MPa	1	$m.s^{-1}$
Cu	8930	96.5	130000	0.343	4757

Tab. 3.9 – Caractéristiques mécaniques du cuivre

3.4.2.2.2 Analyse numérique Une nouvelle fois, l'algorithme de plasticité de von Mises couplée à l'endommagement retardé a été modifié dans Europlexus afin de prendre en compte les lois particulières de dépendance au taux de déformation plastique et d'endommagement non-corrigé relatives à l'alliage de titane. L'influence de

la température étant négligeable, elle n'est pas prise en compte dans les simulations qui suivent.

Trois simulations analogues aux trois essais sont d'abord effectuées sans limitation du taux d'endommagement, c'est-à-dire en imposant dans l'algorithme  $D=D^{nc}$ . Les profils correspondant de vitesse de face arrière sont donnés sur la figure 3.29. Sur cette figure où l'échelle des vitesses n'apparaît pas, l'ordonnée des profils est volontairement décalée de telle sorte que la comparaison entre l'expérimental et le numérique soit simplifiée. Le trait discontinu indique les résultats numériques. Pour ceux-ci, l'écart de vitesse  $|V^{max}-V^{min}|$  ne varie quasiment pas contrairement aux résultats expérimentaux.

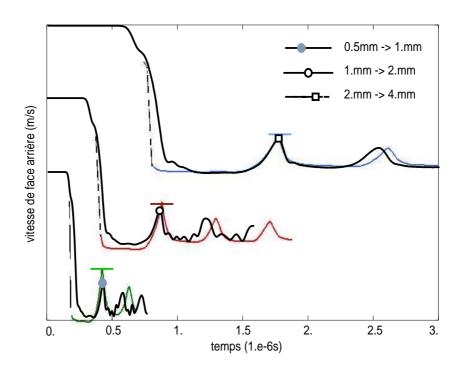


Fig. 3.29 – Profils de face arrière du Ta6V et résultats numériques sans effet retard.

En introduisant un retard dans l'endommagement et en utilisant la méthode détaillée dans la partie 3.3.3, il est possible, d'une part, de retrouver aussi bien qualitativement que quantitativement l'influence de l'épaisseur des plaques sur l'écart de vitesse  $|V^{max}-V^{min}|$  mis en évidence expérimentalement et, d'autre part, d'identifier du même coup les paramètres de l'endommagement retardé. Les paramètres a et  $\tau^c$  optimisés ne sont pas donnés dans ce document, mais dans un rapport confidentiel réservé à la SNECMA. Précisons ici seulement qu'ils sont globalement du même ordre de grandeur que ceux obtenus pour l'alliage d'aluminium 7020-T6. La figure 3.30 compare (avec des ordonnées décalées) les résultats expérimentaux avec les résultats numériques obtenus. Désormais, les vitesses minimales expérimentale et numérique obtenues dans le premier creux coincident exactement. Le reste du profil est également bien représenté par la simulation.

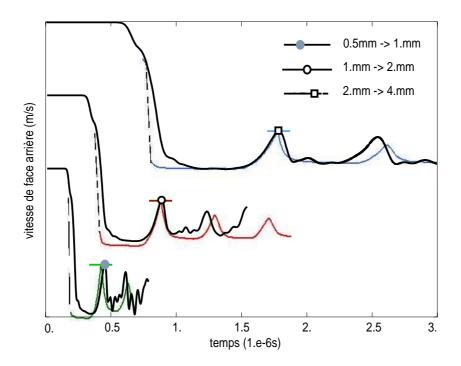


Fig. 3.30 – Profils de face arrière du Ta6V et résultats numériques avec effet retard.

### 3.4.2.3 Bilan pour le Ta6V

L'identification globale du matériau (hors retard) n'a pas été présentée ici pour cause de confidentialité. Nous nous sommes concentrés exclusivement sur l'identification des paramètres de l'effet retard à partir de trois résultats d'essais, et en particulier de trois mesures de vitesse de face arrière. L'utilisation de la méthode proposée dans la partie 3.3.3 a abouti à des résultats satisfaisants. Parallèlement, il a encore une fois été montré que la viscosité du matériau n'apportait pas, à elle seule, de solution au problème de représentation des essais d'impact de plaque.

### 3.5 Conclusions et perspectives

La question de l'identification des paramètres a et  $\tau^c$  relatifs à l'effet retard avait été posée en préambule. A l'issue de ce chapitre, deux méthodes d'identification s'appuyant sur des résultats d'essais d'impact de plaques ont été proposées, étudiées et appliquées à deux matériaux distincts. Pour ce faire, une étude approfondie des essais d'impact de plaques a d'abord été proposée. Selon les moyens de mesure disponibles, deux méthodes d'identification différentes ont été établies et, pour chacune d'entre elles, une étude de l'influence des paramètres a été effectuée. Les résultats obtenus sont globalement satisfaisants et semblent valider le protocole d'identification mis en place.

Un certain nombre de commentaires peuvent en outre être faits. Le premier concerne les valeurs obtenues pour les paramètres a et  $\tau^c$  qui sont égaux à 2.25 et  $2\mu s$  pour l'alliage d'aluminium 7020-T6. Pour les deux matériaux étudiés, ces valeurs sont globalement du même ordre de grandeur (quelques unités pour a et quelques  $\mu s$  pour  $\tau^c$ ) alors que les matériaux étaient sensiblement différents. D'un côté, cela nous indique que l'ensemble des résultats théoriques qui ont été présentés jusqu'ici sont cohérents avec la réalité puisque les paramètres choisis sont généralement de cet ordre de grandeur. D'un autre côté, cela nous permet à l'avenir d'avoir une bonne première approximation des paramètres pour un matériau pour lequel l'identification n'a pas été effectuée.

Le deuxième concerne la viscosité du matériau. Pour le 7020-T6 comme pour le Ta6V, il est ici indéniable qu'elle ne permet pas de résoudre le problème de dépendance au maillage comme cela avait été évoqué brièvement auparavant.

La troisième concerne le choix d'utiliser telle ou telle méthode. Lorsque un interféromètre est disponible, la méthode par analyse de la vitesse de face arrière est incontestablement moins coûteuse, puisque qu'elle ne nécessite qu'un nombre très limité d'essais (3 dans notre cas), alors que, avec la méthode Chevrier, chaque point sur la courbe correspond à plusieurs essais (entre 4 et 5 pour chaque point sachant qu'au moins 3 points sont nécessaires).

Le dernier commentaire amène d'ailleurs à une perspective du travail qui a été effectué. Il serait en effet intéressant de confronter, pour un même matériau, les valeurs des paramètres de l'endommagement retardé obtenus avec les deux méthodes. Cette étude, même si elle requiert un investissement expérimental important et un examen approfondi des essais d'impact de plaques, permettrait de confirmer simultanément l'efficacité des deux méthodes.

### 3.6 Synthèse

En résumé, dans cette partie, ont été abordés successivement les thèmes suivants :

- la description des essais d'impact de plaques aussi bien d'un point de vue théorique qu'expérimental.
- la mise en place, dans le cas de l'alliage d'aluminium Au4G1-T4, de deux méthodes d'identification des paramètres de l'endommagement retardé. La première dite 'Chevrier' s'appuie sur des courbes d'écaillage, la seconde dite 'par analyse de la vitesse de face arrière'. Pour l'une et l'autre, une étude de l'influence des paramètres afin d'en faciliter l'identification ultérieure est effectuée.
- l'identification, par application des deux méthodes, des paramètres a et  $\tau^c$  pour deux matériaux distincts.

3.	Identificati	ion des para	mètres : mét	hodologie et	applications	

## Chapitre 4

Application : perforation d'une plaque en acier

L'objet de ce quatrième chapitre est de présenter les comparaisons entre des calculs de perforations de plaques en acier inoxydable 304L effectuées avec le code de dynamique rapide Europlexus et des résultats expérimentaux obtenus avec la tour de chute de l'installation Orion du CEA Saclay. Il s'agit en particulier ici de mettre en évidence un problème de dépendance au maillage et de le résoudre par l'introduction de notre modèle d'endommagement retardé.

### Sommaire

4.1	Descri	ption du matériau
4.2	Descri	ption et résultats des expériences
	4.2.1	Protocole expérimental
	4.2.2	Résultats des essais
4.3	Simula	ations des essais
	4.3.1	Description de la simulation
	4.3.2	Simulations des essais sans effet retard
	4.3.3	Simulations des essais avec effet retard
	4.3.4	Bilan
4.4	Simula	ations d'un essai fictif à $100m/s$
	4.4.1	Simulations sans effet retard
	4.4.2	Simulations avec effet retard

	4.4.3 Bilan	139
4.5	Conclusions	139
4.6	Synthèse	141

Des essais de perforation de plaques en acier inoxydable 304L ont été réalisés avec la tour de chute Orion du CEA Saclay [Izquierdo et Grünenwald, 1999]. Un certain nombre de simulations effectuées avec le code de dynamique rapide Europlexus [Galon et Izquierdo, 2000] ont déjà été confrontées aux résultats expérimentaux, mais l'étude de l'influence du maillage n'a pas été faite de manière approfondie. Il s'agit donc dans ce chapitre d'étudier la dépendance au maillage des simulations de perforation de plaques et d'analyser les apports de l'introduction du modèle d'endommagement retardé. Après avoir décrit rapidement le protocole expérimental, deux études numériques, l'une sans effet retard, l'autre avec, sont menées en parallèles. Un essai fictif avec une vitesse d'impact plus élevée est finalement simulé afin d'accroître les conséquences de la localisation permettant ainsi d'observer les apports du modèle d'endommagement retardé.

### 4.1 Description du matériau

La loi de comportement de l'acier inoxydable 304L est élasto-plastique de type von Mises isotrope. L'endommagement a été modélisé en utilisant la loi d'endommagement de Lemaître et Chaboche que nous avons notamment décrit dans la partie 2.5. La loi d'évolution de l'endommagement (non-corrigé) est ici légèrement différente [Lemaître et Chaboche , 1996b] de celle utilisée jusqu'alors :

$$\dot{D}^{nc} = \frac{\left(\sigma^e(\bar{\varepsilon}_p)\right)^2}{S_0} \left[ \frac{2}{3} (1+\nu) + 3(1-2\nu) \left(\frac{\sigma^H}{\sigma^{vm}}\right)^2 \right] \frac{\dot{\lambda}}{1-D}$$
(4.1)

seulement si 
$$\left[\frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)\left(\frac{\sigma^H}{\sigma^{vm}}\right)^2\right] p \ge \varepsilon_p^s$$
 (4.2)

Dans ce cas, les paramètres à identifier sont  $D^c$ ,  $\varepsilon_p^s$  et  $S_0$ . L'identification complète <sup>1</sup> du matériau a été faîte par Yuritzinn [Yuritzinn , 1999a,b]. Elle inclue :

- les principales propriétés mécaniques (résumées dans le tableau 4.1).
- les paramètres relatifs à l'endommagement (résumés dans le tableau 4.2).
- la loi d'écrouissage du matériau (résumée par la figure 4.1).

Propriété	ρ	$\sigma^y$	E	ν
	$kg.m^{-3}$	MPa	MPa	-
inox 304L	7850	166	174400	0.3

Tab. 4.1 – Caractéristiques mécaniques de l'inox 304L

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Malheureusement incomplète en fait, puisque les paramètres a et  $\tau^c$  relatifs à l'endommagement retardé ne sont pas connus.

Paramètre	$D^c$ -	$\varepsilon_p^s$	$S_0$ $Pa^2$
inox 304L	0.2	0	16390295e + 12

Tab. 4.2 – Valeurs des constantes de la loi d'évolution de l'endommagement de l'inox 304L

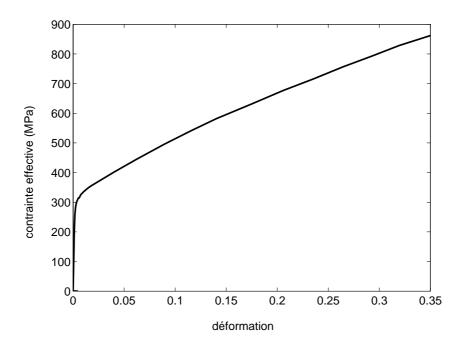


Fig. 4.1 – Evolution de la contrainte effective en fonction de la déformation pour l'acier inoxydable 304L.

### 4.2 Description et résultats des expériences

### 4.2.1 Protocole expérimental

L'étude expérimentale a été effectuée sur la tour de chute Orion du CEA Saclay que l'on peut voir sur la figure 4.2. C'est une tour de chute gravitaire de 7.5m de hauteur permettant d'atteindre des vitesses de choc de l'ordre de 12m/s. Ces principales caractéristiques sont résumées dans le tableau 4.3.

hauteur	7.5m
masse nominale	500kg
vitesse nominale	12m/s
énergie cinétique max. (projectile de $320kg$ )	23KGJ
énergie cinétique max.	68KJ
temps d'ouverture de vanne	1ms

Tab. 4.3 – Caractéristiques de la tour de chute Orion

Les plaques en acier inoxydable 304L ont un diamètre hors encastrement de





Fig. 4.2 – Photo de la tour de chute Orion et du poinçon plat utilisé

450mm et une épaisseur de 6mm. Elles sont encastrées dans un montage très rigide par un cerclage bridé par 24 vis M24. Le montage lui-même est fixé au massif de réaction de la tour de chute.

Les projectiles utilisés ont une masse de 496kg. Ils comportent un poinçon à embout plat de diamètre 48mm, comportant un rayon de raccordement de 3mm (voir figure 4.2).

Différentes mesures sont effectuées pendant et après la manipulation :

- un accéléromètre piézorésistif permet la mesure de l'accélération du projectile.
   En supposant ce dernier rigide, on peut ensuite en déduire la force d'impact du projectile sur la plaque.
- une caméra permet de mesurer le déplacement pendant la chute du projectile.
- la vitesse du projectile s'obtient par intégration de l'accélération. Pour cela, il est nécessaire d'avoir une bonne connaissance de la vitesse initiale. Elle est donc mesurée précisément à l'aide d'un peigne coupé par une barrière laser lors du choc.

### 4.2.2 Résultats des essais

Les résultats des essais sont résumés dans les tableaux 4.4 et 4.5. Le premier donne les principales caractéristiques de chaque essai et précise si la perforation a eu lieu ou non. Le second fait la synthèse des principales mesures effectuées. On trouvera par ailleurs lors de la comparaison entre essais et simulations dans le paragraphe 4.3 l'ensemble de l'évolution des quantités mesurées (déplacement, vitesse, accélération) sur diverses figures.

$\operatorname{Essai}$	Masse	Perforation	$V^{impact}$	Energie initiale
	kg		m/s	KJ
P7	496	oui	-7.68	14.63
P8	496	non	-4.38	4.76
P9	496	non	-5.63	7.75
P11	496	oui	-6.39	10.13

Tab. 4.4 – Essais de perforation avec embout plat

Essai	$t^{choc}$	$F^{max}$	$F^{moy}$	$V^{resid}$	$E^{resid}$
	ms	KN	KN	m/s	KJ
P7	7.5	349	151	-5.38	7.18
P8	18.6	304	184	+2.52	1.58
P9	18.4	429	218	+2.49	1.54
P11	9.9	356	198	-2.45	1.49

Tab. 4.5 – Résultats des essais de perforation à embout plat. Relevés du temps de choc  $(t^{choc})$ , de la force maximale  $(F^{max})$ , de la force moyenne  $(F^{moy})$ , de la vitesse résiduelle  $(V^{resid})$  et de l'énergie résiduelle  $(E^{resid})$ .

### 4.3 Simulations des essais

### 4.3.1 Description de la simulation

Les calculs qui suivent ont tous été effectués avec le code de dynamique explicite Europlexus. Sont décrits ici l'ensemble des données, paramètres et options nécessaires au bon déroulement d'une simulation.

#### 4.3.1.1 Matériaux

Le matériau de la plaque est modélisé avec la loi de plasticité de von Mises couplée à l'endommagement qui pourra être retardé le cas échéant. Les coefficients relatifs à ce modèle ont déjà été évoqués précédemment. Le poinçon est supposé indéformable vis-à-vis de la plaque. Il est modélisé directement avec l'option PMAT (Point MATériel) d'Europlexus qui ne nécessite que l'entrée du rayon et de la masse du poinçon.

### 4.3.1.2 Maillage

Le maillage de base (correspondant au niveau 2 de raffinement) de la plaque correspond à celui proposé dans [Galon et Izquierdo , 2000], c'est-à-dire un maillage en 2D axi-symétrique constitué de 3228 quadrangles à un noeud d'integration CAR1 (soit 3511 noeuds à deux degrés de liberté). L'épaisseur est maillée avec 12 éléments. Selon le rayon, la densité d'éléments peut être fine dans les zones sensibles (dans la zone de cisaillement intense sous l'angle du poinçon, au bord de l'encastrement) ou plus grossière dans les zones moins essentielles. Afin d'étudier les problèmes

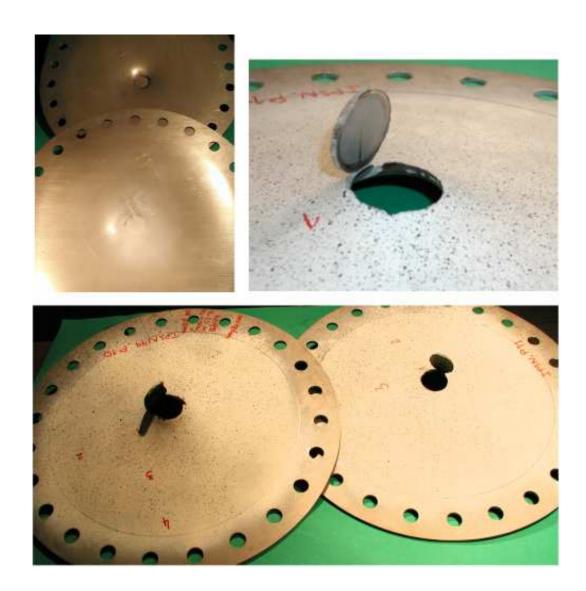


Fig. 4.3 – Photos des plaques après essais. En haut à gauche, vue du dessus des plaques pour les essais P8 (en bas) et P9 (en haut). En bas, vue du dessous des plaques perforées pour les essais P7 (à droite) et P11 (à gauche). En haut à droite, détails de la perforation pour l'essai P7.

de dépendance au maillage, le maillage est raffiné là où l'endommagement a lieu, le maillage de la plaque restant inchangé ailleurs. Dans la zone endommagée, le niveau i de raffinement correspond alors à un maillage constitué de 6i éléments dans l'épaisseur. L'élément forme un carré, on a donc radialement pour le niveau i  $\frac{i}{2}$  fois plus d'éléments qu'au niveau 2. Le poinçon est réduit à un élément de type point matériel. Cela signifie en particulier que les spécificités géométriques du poinçon autre que le rayon (telle que le rayon de raccordement au bord du poinçon) ne sont pas prises en compte. Le maillage est tracé sur la figure 4.4 dans le cas d'un raffinement de niveau 6, un zoom du maillage sous le poinçon permet de distinguer

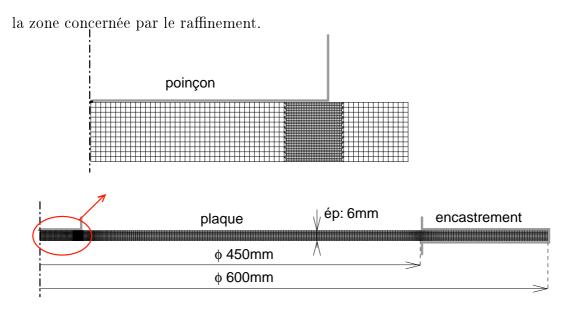


Fig. 4.4 – Maillage (niveau 6) de la plaque. Les conditions aux limites et initiales sont également spécifiées.

### 4.3.1.3 Options du calcul

Le calcul est généralement effectué jusqu'à perforation ou rebond du projectile, c'est-à-dire pour un temps qui est généralement compris entre 10ms et 20ms. Le pas de temps  $\Delta t$  est choisi égal à  $\frac{1}{2}\Delta t^{crit}$ , qui est automatiquement déterminé par le code en appliquant la condition de Courant. Enfin, un amortissement linéaire de coefficient 0.2 ainsi qu'un anti-hourglass visqueux de coefficient 0.1 sont introduits de sorte à éviter les problèmes d'instabilités de sablier pouvant apparaître sur les éléments CAR1 lors de tels chocs. Enfin, afin de modéliser l'endommagement total des éléments, l'algorithme d'érosion 'FANTOME' est utilisé.

#### 4.3.1.4 Conditions aux limites et conditions initiales

Le calcul axi-symétrique implique un blocage des déplacements radiaux sur l'axe de symétrie. Pour représenter au mieux le blocage par le cerclage bridé par 24 vis, les déplacements axiaux des faces inférieure et supérieure de la plaque sont bloqués pour les points dont le rayon est compris entre 225 et 300mm. Enfin, les déplacements radiaux sur le bord extérieur de la plaque sont également bloqués. La seule condition initiale à imposer est la vitesse du poinçon au début de l'impact qui a été enregistrée par le dispositif expérimental. L'ensemble de ses conditions apparaissent sur le maillage de la plaque de la figure 4.4.

Le contact entre le poinçon et la plaque est géré avec la méthode des pénalités [Hallquist et al., 1985]. La peau externe de la plaque pouvant être modifiée suite à l'érosion d'éléments, l'ensemble des noeuds situés sous le poinçon est considéré comme potentiellement en contact.

### 4.3.2 Simulations des essais sans effet retard

### 4.3.2.1 Essais avec rebond P8 et P9

Les simulations relatives aux essais P8 et P9 donnant des résultats et des conclusions globalement similaires, seul le cas P9 est envisagé dans ce paragraphe. Les essais P8 et P9 ont mis en évidence l'absence de perforation et le rebond du projectile. Une première simulation est effectuée avec le niveau 2 de maillage. Les résultats numériques en terme de déplacement du poinçon sont comparés aux résultats expérimentaux sur la figure 4.5. Le calcul Europlexus reproduit de manière très satisfaisante l'essai  $^2$ . La figure 4.6 donne par ailleurs la déformation plastique équivalente après le rebond du projectile sur la configuration déformée. Une deuxième simulation effectuée au niveau 4 donne des résultats identiques à la première. Dans les deux cas, l'endommagement maximum de l'ordre de 0.05 (à comparer au  $D^c$  égal à 0.2) se situe sous l'extrémité du poinçon.

Cette simulation nous apprend également que l'identification de l'acier inoxydable 304L (hors endommagement) semble correcte et que le niveau 2 de maillage semble suffisant pour reproduire un rebond du poinçon.

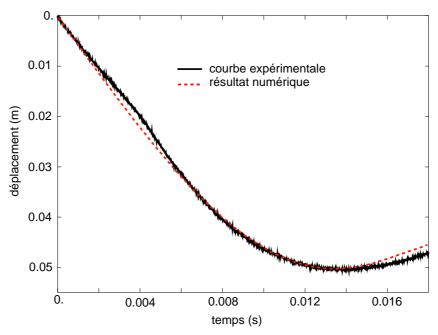


Fig. 4.5 – Comparaison du déplacement pour l'essai P9 : simulation sans effet retard et résultat expérimental

#### 4.3.2.2 Essais avec perforation P7 et P11

L'étude numérique détaillée dans cette partie se concentre sur l'essai P7 (l'essai P11 sera brièvement évoqué) pour lequel une perforation nette apparaît (voir

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Ceci est particulièrement vrai pour le déplacement. Concernant la vitesse (respectivement l'accélération) obtenue par intégration du déplacement (respectivement de la vitesse), le calcul donne un résultat légèrement inférieur à l'essai sans toutefois remettre en cause leur qualité.

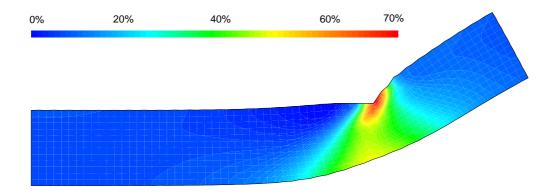


Fig. 4.6 – Déformation plastique cumulée après impact pour l'essai P9

notamment la figure 4.3). Il ne fait alors aucun doute que certains éléments vont complètement s'endommager au cours du calcul, permettant ainsi d'éventuellement mettre en exergue une dépendance au maillage. Afin d'estimer la qualité des résultats, deux critères sont choisis; il s'agit :

- du temps auquel le poinçon transperce la plaque (que nous appellerons temps à rupture). Expérimentalement, il est égal à 7.5ms. Numériquement, il est déterminé sur le tracé de la vitesse du poinçon (ou respectivement de l'accélération du poinçon) où il correspond à la stabilisation de la vitesse (ou respectivement à l'annulation de l'accélération).
- de la vitesse finale du poinçon après perforation. Expérimentalement, cette valeur est égale à -5.38m/s. Numériquement, elle sera directement lue sur le tracé de la vitesse.

Une série de simulations pour des maillages de niveaux de plus en plus élevés (2, 4, 6, 8, 10 puis 12) est donc effectuée. L'évolution de la vitesse est tracée sur la figure 4.7 où apparaît également le résultat expérimental. Si on ne s'intéresse qu'aux résultats des niveaux 10 et 12, on peut les considérer très satisfaisants d'autant plus que la courbe expérimentale est probablement décalée de quelques dixièmes de mètre par seconde suite à un problème de filtrage des données. Ce décalage se voit notamment au moment de l'impact où la vitesse du poinçon commence à augmenter. En observant l'ensemble des résultats numériques, une dépendance évidente au maillage apparaît. Elle se traduit globalement <sup>3</sup> par une décroissance du temps à rupture et par une croissance de la vitesse finale du poinçon sans pour autant converger de manière claire (voir notamment le graphique a. de la figure 4.9 où est donnée l'évolution de la vitesse finale du poinçon en fonction du niveau). Identiquement aux essais chapeaux présentés dans la partie 2.5.3, deux phénomènes peuvent expliquer cette dépendance :

- le maillage, lorsqu'il est trop grossier, ne peut représenter correctement la zone complètement endommagée.
- les maillages plus fins que la taille caractéristique de cette zone sont quant à

 $<sup>^3</sup>$ Localement, d'un niveau à l'autre, on peut en effet constater des stabilisations qui n'ont pas d'explications claires.

eux victimes de la localisation qui fait suite à l'usage de l'endommagement.

Il est difficile dans les faits de distinguer lequel de ces deux phénomènes agit, mais on constate qu'il n'est pas permis de conclure l'étude numérique vu qu'aucune garantie n'existe sur la bonne convergence des calculs.

Pour l'essai P11, qui est à la limite du rebond du poinçon, l'interprétation des résultats est encore plus délicate puisque, pour des maillages de niveaux 2 ou 4, le projectile rebondit alors qu'il perfore la plaque pour des maillages plus fins.

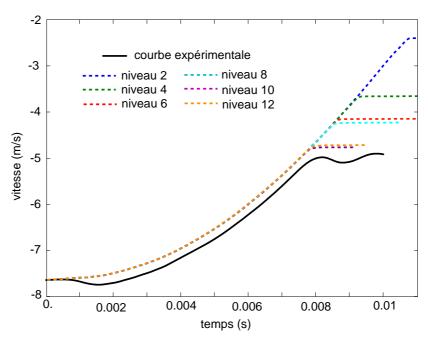


Fig. 4.7 – Comparaison de la vitesse pour l'essai P7 : simulations sans effet retard pour différents niveaux et résultat expérimental

## 4.3.3 Simulations des essais avec effet retard

Une limitation du taux d'endommagement est ici introduite pour tenter de résoudre le problème de convergence. Nous choisissons les paramètres a et  $\tau^c$  respectivement égaux à 2 et  $10\mu s$ . Ce choix est explicité ultérieurement.

### 4.3.3.1 De la pertinence de la détermination de $\ell^{car}$

Avant toutes choses, on pourrait être tenté d'appliquer la formule analytique 4.3 déterminée dans la partie 2.4:

$$\ell^{car} = c\tau^c \ln \left( \frac{\Delta \sigma}{\sigma^{lim}} \right) \tag{4.3}$$

ceci pour choisir une taille de maille adéquate. L'application de cette formule est limitée au cadre uni-dimensionnel pour un matériau élastique endommageable.

Dans les parties 2.5.3 et 3.3.1, nous avons cependant montré que la formule pouvait donner une approximation satisfaisante de la longueur caractéristique numérique et donc servir de base pour le choix du maillage. Nous allons voir que nous ne pouvons pas appliquer cette formule dans notre cas.

Comme cela a été vu dans la partie 2.4, la formule 4.3 donne en fait un encadrement de la longueur caractéristique à partir de deux valeurs limites données par les formules 2.26 et 2.27. L'écart  $\Delta \ell^{car}$  entre la longueur caractéristique maximale et la longueur caractéristique minimale peut alors s'écrire indépendamment du chargement  $^4$ :

$$\begin{cases}
\ell_{min}^{car} = c\tau^{c} \ln \left( \frac{\Delta \sigma}{\sigma_{max}^{lim}} \right) \\
\ell_{max}^{car} = c\tau^{c} \ln \left( \frac{\Delta \sigma}{\sigma_{min}^{lim}} \right) \\
\Rightarrow \Delta \ell^{car} = c\tau^{c} \ln \left( \frac{\sigma_{max}^{lim}}{\sigma_{min}^{lim}} \right)
\end{cases} (4.4)$$

On peut convenir qu'il n'est pertinent d'utiliser la formule 4.3 que lorsque  $\Delta \ell^{car}$  reste relativement petit devant les valeurs de  $\ell^{car}$  possibles et devant la taille caractéristique du problème <sup>5</sup>.

Dans le cas de l'acier inoxydable 304L, nous obtenons une valeur de  $\ell_{min}^{car}$  égale à -59mm et de  $\ell_{max}^{car}$  égale à 17mm, soit un écart  $\Delta \ell^{car}$  de 76mm, à comparer au diamètre utile de la plaque qui est de 450mm. Les calculs associés à ses valeurs ne sont pas détaillés ici. A titre indicatif, ils sont obtenus à partir d'un modèle uni-dimensionnel simpliste en cisaillement équivalent à celui utilisé pour modéliser les essais chapeaux (voir la partie 2.5.3).

On constate alors, pour l'essai P7, trois points :

- les valeurs obtenues ne vérifient pas la condition que nous sommes fixés  $(\Delta \ell^{car})$  est beaucoup trop grande par rapport aux autres grandeurs).
- la valeur de  $\ell_{min}^{car}$  est négative.
- la valeur de  $\Delta \ell^{car}$  est très grande devant les dimensions du problème. Ceci est du à la très grande ductilité du matériau qui atteint des déformations plastiques équivalentes de plus de 150% au moment de la rupture.

Il ne semble donc pas approprié d'appliquer la formulation analytique dans cette situation.

Le signe négatif de la longueur caractéristique minimale (pour l'essai P7) n'a par ailleurs rien de surprenant. Il signifie juste que la contrainte n'est pas suffisamment intense pour rompre la structure. Si la perforation a finalement lieu, c'est grâce aux allers-retours successifs des ondes entre le poinçon et l'encastrement. Pour illustrer simplement ce phénomène, considérons à nouveau le problème de la poutre uni-dimensionnelle en traction présenté sur la figure 2.2 et supposons que la sollicitation soit une vitesse imposée à l'extrémité. Le niveau de cette vitesse est telle qu'elle

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Sur la courbe 2.18, il correspond à l'écart vertical entre les deux bornes analytiques. Ces deux courbes étant parallèles,  $\Delta \ell^{car}$  est bien indépendant du chargement.

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Pour l'exemple de la plaque traité dans la partie 3.3.1.1, cette condition est bien vérifiée pour les deux méthodes. En effet, pour la méthode 1 :  $\Delta \ell^{car} = 1.18mm$  et  $\ell^{car}_{max} = 2.78mm$  et pour la méthode 2 :  $\Delta \ell^{car} = 1.18mm$  et  $\ell^{car}_{max} = 2.38mm$ .

entraîne une onde de contrainte de niveau  $\Delta \sigma$  inférieure à la contrainte correspondant à l'initiation de l'endommagement (en l'occurrence  $\sigma_{min}^{lim}$ ). Il ne fait aucun doute que la poutre ne s'endommage pas au premier passage de l'onde et que, par application de la formule 4.3, la longueur caractéristique analytique est négative. Pourtant, si la sollicitation est maintenue, suite aux allers-retours de l'onde dans la poutre entre l'encastrement et l'extrémité soumise à la vitesse imposée, la contrainte augmente progressivement et finit par entraîner la rupture. Une longueur caractéristique négative signifie donc juste que, sans être quasi-statique, la sollicitation n'est pas suffisamment brutale pour rompre la structure immédiatement suite à l'impact. L'ordre de grandeur du temps à rupture (quelques ms) est d'ailleurs, dans le cas de la présente étude, significatif puisqu'il correspond à plusieurs dizaines d'allers-retours d'onde entre le poinçon et l'encastrement. Ce scénario n'est pas compatible avec les hypothèses du modèle analytique pour lequel la rupture a lieu immédiatement après l'impact.

La grande ductilité du matériau ainsi que la trop faible vitesse d'impact rendent impossible la détermination de la longueur caractéristique pour l'étude des essais de perforations.

#### 4.3.3.2 Essais avec rebond P8 et P9

Dans ce cas, comme cela a été mis en évidence avec les simulations sans effet retard, l'endommagement reste faible et joue un rôle secondaire. Il y a en effet rebond du poinçon et aucun élément ne s'endommagement au-delà de 0.05. Les résultats coincident exactement avec ceux obtenus sans effet retard et sont donc en bon accord avec l'expérience.

#### 4.3.3.3 Essais avec perforation P7 et P11

Sans connaissance particulière sur le maillage, nous pratiquons ici comme pour les simulations sans effet retard, c'est-à-dire effectuer une série de simulations pour des maillages de niveaux de plus en plus élevés (de 2 à 12) sans les choisir sciemment. Les paramètres de l'endommagement retardé a et  $\tau^c$  sont toujours empiriquement égaux à 2 et  $10\mu s$ . Les évolutions de la vitesse expérimentale et de celles obtenues avec les calculs sont tracées sur la figure 4.8 (l'évolution de la vitesse finale du poinçon en fonction du niveau est également tracée sur le graphique a. de la figure 4.9). En observant cette figure, on constate que :

- pour les maillages les plus grossiers (niveaux 2 et 4), les résultats (accélération comme profil d'endommagement) sont proches de ceux obtenus avec le modèle classique. Il prévoit en fait une vitesse finale légèrement plus faible et un temps à rupture légèrement plus élevé.
- pour les maillages plus fins, le temps à rupture comme la vitesse maximale tendent à se stabiliser à 10.25ms et 2.8m/s respectivement (valeurs qui sont différentes de celles obtenues pour l'essai).

Ce type de résultat est caractéristique du modèle d'endommagement retardé. Sans nous intéresser pour le moment à la solution expérimentale, les résultats, qui convergent (aussi bien en terme de temps à rupture que de vitesse maximale du poinçon) vers une solution indépendante du maillage, peuvent être jugés satisfaisants.

Le fait de ne pas converger vers la solution expérimentale est directement imputable au choix arbitraire des paramètres du retard. Nous avons en effet choisi un temps caractéristique  $\tau^c$ , environ cinq fois plus élevé que ceux que nous avions rencontrés jusqu'à maintenant, à savoir  $2\mu s$  pour l'alliage d'aluminium 7020-T6 et enfin  $10\mu s$  pour cette étude. Ce choix n'est pas anodin, mais correspond à la volonté de mettre en évidence l'objectivité des calculs vis-à-vis du maillage sans avoir pour autant à trop les raffiner. Cette volonté est quant à elle directement motivée par les temps de calcul qui deviennent rapidement exorbitants, de l'ordre de quatre jours pour le niveau 10. C'est également pour cette raison qu'il n'a pas été envisagé d'identifier les paramètres de l'endommagement retardé à l'aide d'une approche inverse  $^6$ .

La simulation de l'essai P11 n'a ici plus d'intérêt. En effet, elle prévoit systématiquement un rebond du projectile, ceci pour les mêmes raisons que celles évoquées ci-dessus.

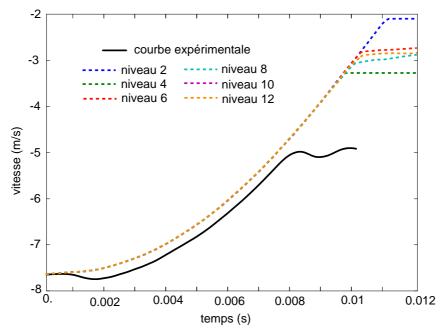


Fig. 4.8 – Comparaison de la vitesse pour l'essai P7 : simulations avec effet retard pour différents niveaux et résultat expérimental

#### 4.3.4 Bilan

L'étude numérique effectuée dans cette partie a montré que les calculs effectués avec le modèle classique sans limitation du taux d'endommagement donnaient

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>D'autant plus que cette approche est ici délicate à employer vu que les paramètres a et  $\tau^c$  agissent tout deux sur les résultats.

des résultats très satisfaisants (comme cela avait déjà été montré dans l'étude présentée dans [Galon et Izquierdo , 2000]), du moins tant que le poinçon rebondissait traduisant l'absence d'un endommagement majeur dans la structure. Lorsque la perforation a lieu, une dépendance nette au maillage a été mise en évidence, rendant impossible la moindre conclusion quant à l'exactitude des résultats numériques. Les résultats que l'on peut obtenir en simulant l'essai P11 sont d'ailleurs révélateurs de ce problème : pour des maillages grossiers, le poinçon rebondit alors que, pour des maillages plus fins, le poinçon perfore la plaque. Cette influence est par ailleurs bien visible sur le graphique a. de la figure 4.9 <sup>7</sup>.

En utilisant l'endommagement retardé, le problème de dépendance au maillage a été résolu sans pour autant altérer la qualité des résultats lorsqu'il y a rebond. Les simulations des essais P7 et P11 où un fort endommagement a lieu convergent bien (voir le graphique a. de la figure 4.9). Cependant, elles ne donnent pas des résultats concordant avec l'expérience; ceci pour deux raisons :

- les paramètres a et  $\tau^c$  n'ont pas été identifiés expérimentalement et ne correspondent donc pas à ceux du matériau étudié.
- afin de mettre en évidence clairement la convergence des calculs sans pour autant effectuer des calculs de plusieurs jours, le temps caractéristique a volontairement été augmenté.

Le graphique a. de la figure 4.9 résume les résultats qui ont permis d'effectuer les remarques précédentes.

Pour mener l'étude à son terme, il serait donc nécessaire :

- d'identifier les paramètres a et  $\tau^c$  de l'acier inoxydable 304L.
- d'utiliser des techniques de calcul (comme les méthodes de décomposition de domaine en cours d'implantation dans Europlexus et notamment détaillées dans [Combescure et Gravouil , 2001, 2003, Faucher et Combescure , 2003]) et permettre ainsi de simuler dans un temps raisonnable la perforation. L'étude de la longueur caractéristique, si elle n'a pas permis de prévoir explicitement celle-ci, a en effet montré que la sollicitation était relativement lente, présageant d'une zone endommagée de très petite taille. De telles techniques de calcul permettraient donc, d'un côté, de mettre en évidence de manière beaucoup plus claire la dépendance des résultats vis-à-vis du maillage et, de l'autre, de montrer les capacités du modèle d'endommagement retardé à résoudre ce problème.

L'objectif de déterminer numériquement l'énergie minimale de la perforation n'est donc pas accessible dans le cadre de notre étude. L'usage d'un modèle permettant d'éviter la dépendance au maillage s'est par ailleurs révélé essentiel pour obtenir des résultats convergés. Dans ce domaine, l'intérêt du modèle d'endommagement retardé a, en outre, pu être mis en évidence.

Cependant, cette étude reste inaboutie. Les faibles vitesses d'impact et la très grande ductilité de l'acier inoxydable 304L ne sont en effet pas les éléments les plus

 $<sup>^7{</sup>m On}$  y retrouve en effet la croissance de la vitesse finale du poinçon lorsque le niveau de maillage augmente.

enviables pour révéler les avantages du modèle d'endommagement retardé  $^8$ . Il y a par ailleurs un moyen de contourner en partie les difficultés qui ont été évoquées : il suffit d'augmenter la vitesse d'impact du poinçon. D'une part, le temps des simulations sera diminué permettant ainsi d'effectuer des calculs avec des maillages plus fins et, d'autre part, la contrainte plus intense aura tendance à exacerber la dépendance au maillage. Nous proposons donc maintenant l'étude d'un essai de perforation fictif (noté P12) pour lequel la vitesse d'impact du poinçon atteint 100m/s.

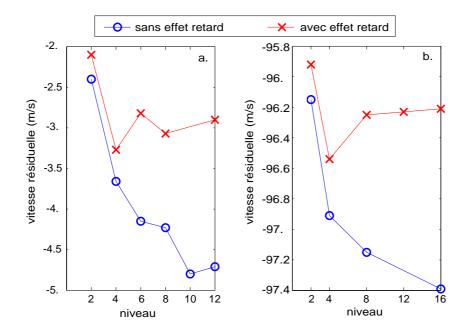


Fig. 4.9 – Vitesses résiduelles pour les simulations des essais P7 et P12 à différents niveaux avec et sans effet retard

## 4.4 Simulations d'un essai fictif à 100m/s

Le cadre vu précédemment de la perforation de plaque avec un poinçon plat de 48mm de diamètre est repris. La vitesse du poinçon au moment de l'impact est considérée égale à 100m/s. La détermination de la longueur caractéristique n'en est pas pour autant envisageable; la démarche adoptée est donc celle classiquement utilisée, à savoir simuler des calculs sans et avec effet retard pour des niveaux de maillages augmentant progressivement (niveaux 2, 4, 8, et 16 correspondant à une multiplication par deux de la finesse du maillage d'une simulation à l'autre).

#### 4.4.1 Simulations sans effet retard

Sont détaillés ici les résultats obtenus sans effet retard. Comme pour l'essai P7, les évolutions de la vitesse du poinçon sont tracées sur la figure 4.10. La figure 4.11

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup>Au-delà de la seule convergence des résultats, la dépendance du profil d'endommagement au maillage n'a pas pu être mise en évidence clairement dans le cadre de cette étude.

propose également un zoom du profil d'endommagement dans la zone cisaillée au temps 7ms pour chacune des simulations.

On retrouve pour le profil de la vitesse une influence similaire à celle qui a été mise en évidence dans le cas de l'essai P7, à savoir une décroissance continue du temps à rupture et, inversement, une augmentation de la vitesse finale de poinçon après perforation. Cette dernière apparaît clairement sur le graphique b. de la figure 4.9. C'est plus en terme de profil d'endommagement que les conclusions sont cette fois intéressantes <sup>9</sup>. Il semble que, initialement, pour les niveaux 2 et 4, le maillage soit trop grossier pour représenter correctement la perforation. Pour les maillages plus fins (niveaux 8 et 16), on observe une dépendance nette du profil qui n'est pas sans rappeler celle qui avait déjà été mise en lumière dans le cas de l'essai chapeau (voir la partie 2.5.3). Immédiatement sous le poinçon, une nouvelle direction d'endommagement perpendiculaire à la première apparaît pour le niveau 16. Si le profil semble relativement stable au milieu de la plaque, on retrouve une influence du maillage près de la surface inférieure de la plaque où l'endommagement doit évoluer très rapidement (cette zone est en effet la dernière à résister juste avant la perforation).

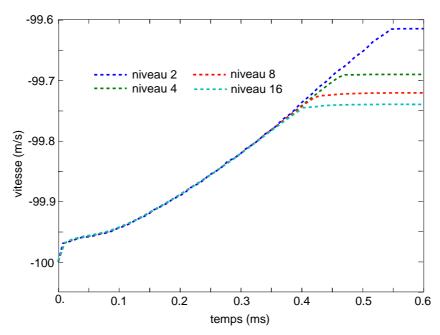


Fig. 4.10 – Comparaison de la vitesse pour l'essai P12 : simulations sans effet retard pour différents niveaux

### 4.4.2 Simulations avec effet retard

Identiquement à la partie précédente, sont tracées sur les figures 4.12 et 4.13 respectivement les évolutions de la vitesse du poinçon et un zoom du profil d'endommagement dans la zone cisaillée au temps 7ms.

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup>Pour l'essai P7, aucune influence notable n'a pu être mise en évidence.

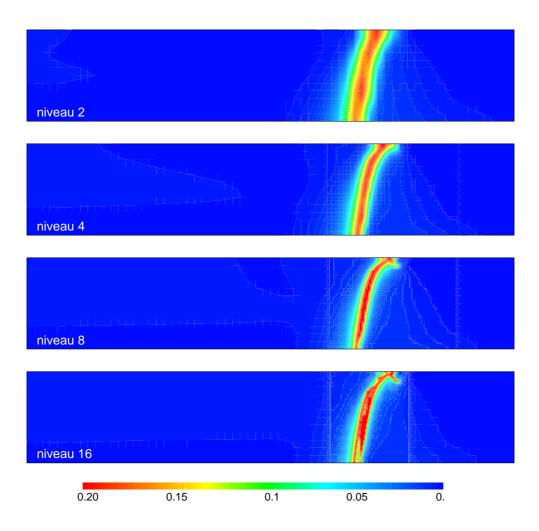


Fig. 4.11 – Comparaison de l'endommagement pour l'essai P12 : simulations sans effet retard pour différents niveaux

Concernant l'évolution de la vitesse du poinçon, cette étude confirme le bon comportement du modèle à endommagement retardé. Le temps à rupture, comme la vitesse finale du poinçon, convergent assez rapidement vers une valeur finie respectivement égale à 0.54ms et 96.25m/s (voir le graphique b. de la figure 4.9). Le résultat correspondant au niveau 2 est par ailleurs très similaire à celui obtenu pour le même niveau sans effet retard, accréditant la thèse d'un maillage trop grossier, à ce niveau, pour représenter correctement la zone endommagée. On retrouve cette similarité pour le niveau 2 en terme d'endommagement sur la figure  $4.13^{-10}$ . Comparativement à la figure 4.11, les profils d'endommagement semblent ici converger vers une forme géométrique stable. On pourra observer par ailleurs le profil de l'endommagement ainsi que celui de la déformée à différents temps de calcul dans l'annexe D.

<sup>&</sup>lt;sup>10</sup>Notons par ailleurs que, sur cette dernière figure, apparaît le résultat au niveau 12 à la place de celui au niveau 16. Le calcul au niveau 16 s'est en effet arrêté au moment de la perforation suite au croisement d'un élément.

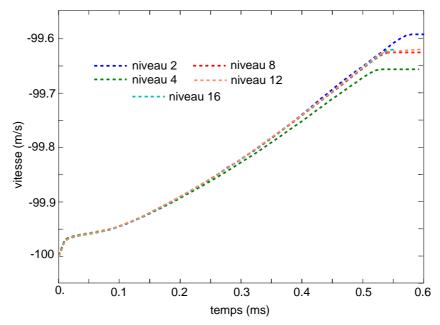


Fig. 4.12 – Comparaison de la vitesse pour l'essai P12 : simulations avec effet retard pour différents niveaux

#### 4.4.3 Bilan

Par rapport aux essais P7, P8, P9 et P11, l'étude de l'essai fictif à la vitesse d'impact de 100m/s a permis de mettre en évidence, en plus de la bonne convergence des résultats numériques avec retard en terme de vitesse du poinçon que l'on peut constater sur le graphique b. de la figure 4.9, une dépendance claire des résultats au maillage lorsque aucun retard n'est introduit dans le modèle (partie 4.4.1). Cette dépendance rappelle celle qui avait pu être observée sur les simulations d'essai chapeau dans la partie 2.5.3 et qui avait, de la manière analogue à la perforation, été résolue par l'introduction d'une limitation du taux d'endommagement.

En gardant à l'esprit que le temps caractéristique de l'effet retard  $\tau^c$  a été ici choisi environ cinq fois supérieur à ceux que nous avions identifiés précédemment, on remarquera tout de même la forte influence de la grande ductilité du matériau. En effet, il est encore une fois très difficile de mettre proprement en évidence le phénomène de localisation. Sans pour autant limiter l'usage du modèle d'endommagement à effet retard à des matériaux de ductilité moyenne, on ne peut que conseiller de ne pas utiliser un matériau trop ductile si on veut mettre en évidence clairement le phénomène de localisation. Le fait de ne pas pouvoir comparer nos résultats à des résultats expérimentaux dans ce cadre des hautes vitesses d'impact constitue également un regret à l'issue de cette étude.

## 4.5 Conclusions

Nous avons tenté dans ce chapitre d'appliquer le modèle d'endommagement à effet retard à la simulation d'essais de perforation réalisés au CEA Saclay. Après

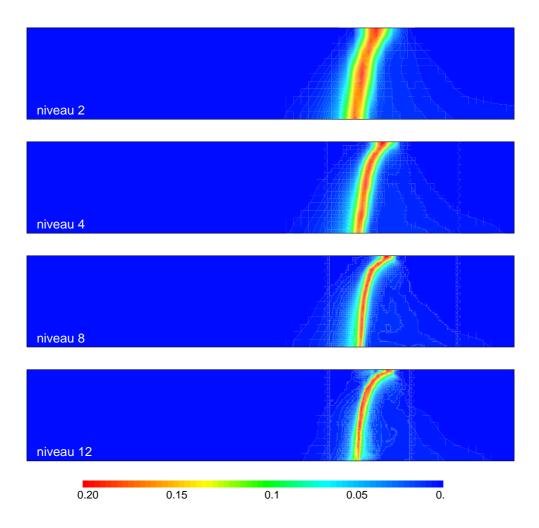


Fig. 4.13 – Comparaison de l'endommagement pour l'essai P12 : simulations avec effet retard pour différents niveaux

avoir décrit brièvement le protocole expérimental, une première série de simulations a été effectuée sans effet retard. Elle a permis de mettre en évidence la qualité de la modélisation lorsqu'il n'y a pas perforation et une première dépendance au maillage est apparue, notamment sur les simulations de l'essai P7. En introduisant pour la seconde série de simulations un effet retard dont les paramètres ont été choisis empiriquement, le problème a pu être résolu. Cependant, suite aux limitations dûes au temps de calcul, la résolution du problème n'a pas pu être nettement mise en avant. Parallèlement, la grande ductilité de l'acier inoxydable 304L rend impossible une quelconque prévision de la longueur caractéristique avec le modèle analytique développé.

En adoptant une démarche analogue à la simulations des essais effectivement réalisés, l'essai fictif P12 a été, à son tour, simulé sans et avec effet retard. La plus grande vitesse d'impact a permis de surcroît de visualiser directement sur le profil d'endommagement la dépendance au maillage (comme cela avait déjà pu être fait pour les simulations d'essai chapeau).

On peut également regretter que les paramètres de l'effet retard n'aient pas pu être identifiés au préalable pour le 304L, impliquant de facto l'impossibilité de faire converger les simulations avec effet retard vers la solution expérimentale. Si ceux-ci avaient été disponibles, il est par ailleurs fort probable que nous eûmes été limités par les temps de calcul excessifs liés à la finesse du maillage nécessaire. A terme, afin d'obtenir des résultats effectivement convergés lorsqu'il y a perforation, il semble indispensable d'utiliser des méthodes numériques ad hoc (comme les méthodes de décomposition de domaines qui ont été évoquées dans la partie 4.3.4 et qui sont partiellement implantées dans le code Europlexus).

Dans un dernier temps et de manière analogue au travail qui avait pu être effectué dans la partie 2.5.3, l'essai fictif P12 a été simulé sans et avec effet retard. En plus des remarques faîtes pour les précédentes simulations, cette dernière étude a permis d'exhiber sur le profil d'endommagement, dans le cas non-retardé, la dépendance au maillage. Cela permet en outre d'illustrer les phénomènes auxquelles nous pourrions être confrontés lors de la simulations des essais P7 et P11 avec des maillages beaucoup plus fins.

Il ressort cependant assez clairement de ce travail que le type de modèle proposé est bien plus adapté aux comportements de matériaux sollicités à grande vitesse. Son apport pour simuler des ruptures sous faible vitesse de sollicitation reste limité.

## 4.6 Synthèse

En résumé, dans cette partie, ont été abordés successivement les thèmes suivants :

- la description des essais de perforation de plaques effectués au CEA.
- la simulation des essais avec et sans effet retard.
- la simulation d'un essai de perforation fictif avec une vitesse d'impact de 100m/s.

4. Application: per	foration d'une	plaque en acie	er	

## Conclusions et perspectives

Deux objectifs avaient été fixés initialement lors de cette étude :

- le premier concernait l'intégration dans un code de dynamique explicite d'un modèle permettant d'éviter la localisation, en l'occurrence le modèle d'endommagement à taux de croissance limité. Il s'agissait également de préparer l'intégration future de méthodes numériques comme le remaillage ou la décomposition de domaines en garantissant notamment la convergence du modèle et en étant capable de prédire la longueur caractéristique  $\ell^{car}$ .
- le second était relatif à l'identification des deux paramètres a et  $\tau^c$  du modèle. Connaissant a priori pour le matériau considéré la loi d'écrouissage et la loi d'évolution quasi-statique de l'endommagement, il était question de mettre en place, à partir de résultats d'essais de type plaque/plaque, un ou plusieurs protocoles d'identification et éventuellement de les appliquer.

Après un rapide état de l'art et afin de répondre au premier objectif, une étude du modèle d'endommagement retardé a été effectuée dans le chapitre 2. Les principaux fondements du modèle ont d'abord été rappelés et la capacité de celui-ci à résoudre le problème de localisation artificielle mise en avant. Dans le souci de mettre en place à l'avenir des méthodes ad hoc (remaillage automatique, décomposition de domaines, ...) pour la résolution rapide et efficace des problèmes, différentes analyses ont alors été effectuées. La première s'attachait à la détermination de l'ordre de convergence de l'algorithme. Pour ce faire, une méthode numérique originale a été utilisée et a permis de démontrer la convergence rapide des résultats numériques obtenus vers une solution finie, garantissant ainsi leur qualité pour la suite de l'étude. La seconde répond au besoin essentiel d'avoir un ordre d'idée de la taille de la zone complètement endommagée pour, d'une part, savoir quand les résultats ont effectivement convergé vers une solution stable indépendante du maillage et, d'autre part, de choisir judicieusement la finesse du maillage (que ce soit avant le calcul ou, à l'avenir, en cours de calcul en utilisant une des techniques numériques évoquées précédemment). Sur un cas simple de traction de poutre uni-dimensionnelle élastique endommageable et en utilisant une modélisation simplifiée, une formulation analytique approximant cette longueur caractéristique  $\ell^{car}$ , qui fait d'ailleurs echo à celles des modèles non-locaux ou à gradient évoqués dans le chapitre 1, a été mise en place et validée ensuite par une étude numérique.

Les études menées jusque là étaient effectuées avec un programme spécifique, mais il s'est avéré indispensable pour la suite de l'étude et pour l'application future dans des cas plus généraux d'implanter le modèle dans un code de dynamique explicite comme Europlexus. Le modèle d'endommagement à taux de croissance limité a alors été intégré dans la loi de plasticité de von Mises couplée à l'endommagement déjà existante dans Europlexus. Cette implantation a été par la suite modifiée au gré des matériaux étudiés afin de prendre en compte les éventuelles dépendances au taux de déformation plastique ou à la température.

S'appuyant sur l'implantation du modèle dans Europlexus, la suite de l'étude (chapitre 3) s'est intéressée à répondre au second objectif, à savoir celui de l'identification des paramètres relatifs à la limitation du taux d'endommagement. Selon le protocole qui a été mis en place, cette étape doit s'appuyer sur différents éléments :

- tout d'abord, sur la connaissance de la loi d'écrouissage du matériau; cette loi pouvant, selon les cas, dépendre du taux de déformation plastique ou de la température.
- sur la connaissance de la loi d'endommagement obtenue avec des sollicitations quasi-statiques.
- sur des résultats d'essais d'impact de plaques. Suivant les expériences réalisées, ces résultats pourront prendre la forme d'une courbe d'écaillage ou de profils de vitesse de face arrière.

Selon la méthode expérimentale utilisée, une méthode spécifique d'identification de a et de  $\tau^c$  a été proposée, puis détaillée sur le cas théorique d'un alliage d'aluminium Au4G1-T4 élasto-plastique endommageable. Les deux méthodes finalement mises en place ont alors été appliquées avec succès à des matériaux élasto-plastiques endommageables dépendant du taux de déformation, en l'occurrence l'alliage d'aluminium 7020-T6 et l'alliage de titane Ta6V. Dans chacun de ces deux cas en effet, l'analyse menée a permis de faire coïncider de manière très satisfaisante les résultats expérimentaux avec les résultats numériques, permettant ainsi d'identifier les paramètres a et  $\tau^c$ .

L'analyse d'identification s'est révélée d'autant plus intéressante qu'elle a permis dans le même temps de tirer divers enseignements :

- la formule analytique mise en place dans le chapitre 2 a pu être appliquée de manière satisfaisante au cas quasi-uni-dimensionnel de l'impact de plaques.
   La prévision a priori de la longueur caractéristique, couplée à la garantie de convergence du modèle, a permis de choisir efficacement le maillage.
- les diverses simulations ont montré que la seule viscosité du matériau n'était pas suffisante pour résoudre le problème de localisation.
- enfin, si les résultats d'essais plaque/plaque permettent d'identifier les paramètres du retard, nous avons également montré, à l'inverse, que le modèle à endommagement retardé était capable de représenter correctement les essais, ce qui n'est a priori pas le cas pour une modélisation classique.

Une fois les objectifs initiaux atteints, une première application à la perforation de plaques en acier 304L a été effectuée. A l'aide de paramètres a et  $\tau^c$  choisis empiriquement, une étude numérique a été réalisée et comparée aux résultats expérimentaux. Celle-ci a permis de mettre en évidence plusieurs phénomènes comme le problème de dépendance au maillage et la capacité du modèle d'endommagement retardé à le résoudre. Elle a également mis en exergue un certain nombre de limites, comme l'impossibilité d'utiliser la formulation analytique de  $\ell^{car}$  dans ce cas particulier ou encore les temps de calculs excessifs.

Les limites évoquées à l'instant nous amènent justement à proposer quelques perspectives et améliorations au travail effectué.

Les premières se rapportent à la longueur caractéristique analytique  $\ell^{car}$ . Dans le cas des exemples qui ont été traités (essais chapeau, plaque/plaque ou de perforation), nous avons été contraint, d'une part, de construire un modèle uni-dimensionnel équivalent et, d'autre part, de faire abstraction de la plasticité. Dans les cas les plus propices, comme l'essai plaque/plaque pour lequel le modèle équivalent est quasi-uni-dimensionnel, le matériau peu ductile et la sollicitation très dynamique, la formule s'applique alors très bien. Cela n'est pas le cas dans la situation inverse, comme pour la perforation. De nouvelles pistes sont alors possibles. Il serait par exemple intéressant d'établir, de manière analogue au cas uni-dimensionnel, une formule analytique donnant une approximation de la taille de la zone complètement endommagée en deux et trois dimensions afin d'éviter d'avoir à construire systématiquement un modèle équivalent. L'adaptation de la formulation existante à la nature élasto-plastique ou élasto-plastique dépendant du taux de déformation du matériau constituerait également un progrès.

Par ailleurs, nous avons également vu au cours de cette étude que le développement de techniques numériques adéquates était une condition sine qua non de l'application du modèle d'endommagement retardé à des cas industriel dans des temps de calcul raisonnables. L'intégration de la méthode de décomposition de domaines est actuellement en voie d'achèvement dans Europlexus rendant vraisemblablement possible son usage à plus ou moins court terme. Cela représentera déjà un progrès considérable, puisqu'il sera dès lors possible d'effectuer un calcul avec un maillage très fin dans la zone fortement endommagée sans pour autant diminuer abusivement le pas de temps sur le reste de la structure. Subsistera tout de même le problème de savoir où il faut mailler finement et inversement. A plus long terme, on peut imaginer coupler une technique de remaillage automatique des zones endommagées, la taille des éléments du nouveau maillage pouvant être donnée par la formule analytique calculée à chaque instant. Dans un thème voisin, des travaux ont été amorcés au laboratoire sur une technique de calcul multi-grille basé sur l'erreur en déplacement qui, semble-t-il, pourra apporter, au prix de quelques adaptations, une réponse possible à ce nouveau problème.

## Bibliographie

[Achon (1994)] Achon P. Comportement et tenacité d'alliages d'aluminium à haute résistance. Thèse, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Centre des Matériaux, Paris, 1994.

[Aifantis (1984)] Aifantis E.C. On the microstructural origin of certain inelastic models. Trans. ASME J. of Engng Mat. and Tech., 1984, vol. 106, pp. 323-330.

[Allix et al. (1994)] Allix O., Bras F. et Deü J.F. A first damage modelling of SiC-SiC laminates under dynamic loading. Journal de Physique IV, colloque C8, 1994, pp. 527-537.

[Allix et al. (1995)] Allix O., Bras F., Deü J.F., Dommanget M. et Gratton M. Comportement dynamique des composites à fibres longues : modélisation des endommagements et prévision de la rupture. In : Actes du 2ème Colloque National en Calcul des Structures, Giens, France. 1995, pp. 745-750.

[Allix et Deü (1997)] Allix O. et Deü J.F. Delayed-damage modelling for fracture prediction of laminated composites under dynamic loading. vol. 45, n° 1, pp. 29-46.

[Allix et al. (1999)] Allix O., Deü J.F. et Ladevèze P. A delay damage meso-model for prediction of localisation and fracture of laminates subjected to high rates loading. ECCM'99, Munich, Allemagne. 1999.

[Allix et al. (2003a)] Allix O., Feissel P. et Thévenet P. A delay damage mesomodel of laminates under dynamic loading: basic aspects and identification issues. Comp. and Stru., 2003, vol. 81, pp. 1177-1191.

[Allix et al. (2003b)] Allix O., Feissel P. et Thévenet P. A new identification strategy for dynamic problems with uncertain measurements. In: E. Onate and D.R.J. Owen Eds., 7th International Conference on Computational Plasticity (CDROM COMPLAS'03), Barcelone, Espagne. 2003.

[Andrieux et al. (2004)] Andrieux S., Badel P., Cano V., Godard V. et Lorentz E. Analyse de modèles non-locaux d'endommagement. In : P. Babin, R. Dendievel, S. Forest, J.F. Ganghoffer, A. Zeghadi, M.H. Zoberman Eds., Colloque National MECAMAT, Aussois 2004, France. 2004, pp. 199-206.

[Barker et Hollenbach (1972)] Barker L.M. et Hollenbach R.E. Laser interferometer for measuring high velocities of any reflecting surface. J. of Appl. Phys., 1972, vol. 43, pp. 4669-4675.

[Bazant (1976)] Bazant Z.P.. Instability, ductility and size effect in strain softening concrete. J. Engng. Mech. ASCE, 1976, vol. 102, pp. 331-344.

[Bazant et Belytschko (1985)] Bazant Z.P. et Belytschko T.B. Wave propagation in strain-softening bar: exact solution. J. Engng. Mech. ASCE, 1985, vol. 111, pp. 381-389.

[Belytschko et Lasry (1988)] T. Belytschko et D. Lasry. Localization limiters and numerical strategies for strain-softening materials. In: Elsevier Applied Science Eds., Cracking and damage, Cachan, France. 1988, pp. 349-362.

[Benallal et al. (1988)] Benallal A., Billardon R. et Geymonat G. Some mathematical aspects of the damage softening problem. In: Elsevier Applied Science Eds., Cracking and damage, Cachan, France. 1988, pp. 247-258.

[Bonora et Gentile (2001)] Bonora N. et Gentile D. Flaying plate impact test: simulazione numerica del processo di 'spalling' nei metalli. In: Atti del XXX Convegno Nazionale AIAS, Alghero, Italie. 2001, pp. 667-676.

[Bushman et al. (1993)] Bushman A.V., Kanel G.I., Ni A.L. et Fortov V.E. Intense dynamic loading of condensed matter. London: Taylor and Francis, 1993.

[Chevrier et Funfrock (1994)] Chevrier P. et Funfrock F. Automatisation et informatisation du fonctionnement d'un canon à gaz haute performance, et étude de l'endommagement dynamique d'un alliage d'aluminium soumis à une onde plate induite par un impact plaque sur plaque. Final Eng. Report, Université de Metz, 1994.

[Chevrier et Klepaczko (1997)] Chevrier P. et Klepaczko J.R. Discussion of fracture criteria in spall mechanics. Engng. Trans., 1997, vol. 45, pp. 47-70.

[Chevrier (1998)] Chevrier P. Mécanique et méso-mécanique de l'écaillage, essais expérimentaux et critères de rupture : étude d'un alliage d'aluminium et d'un acier de blindage. Thèse, Université de Metz, Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux de Metz, 1998.

[Chevrier et Klepaczko (1999)] Chevrier P. et Klepaczko J.R. Spall fracture: mechanical and microstructural aspects. Eng. Fract. Mech., 1999, vol. 63, pp. 273-294.

[Combescure et Gravouil (2001)] Combescure A. et Gravouil A. A time-space multiscale algorithm for transient structural nonlinear problems. Mécanique et Industrie, vol.1,  $n^{\circ}$  2, pp. 43-55.

[Combescure et Gravouil (2003)] Combescure A. et Gravouil A. A numerical scheme to couple subdomains with different time-steps for predominantly linear transient analysis. Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng., 2003, vol. 191, n° 11-12, pp. 1129-1157.

[Crisfield (1991)] Crisfield M.A. Non-linear finite element analysis of solids and structures, volume 1: essentials. John Wiley and Sons, 1991.

[Crisfield (1997)] Crisfield M.A. Non-linear finite element analysis of solids and structures, volume 2: advanced topics. John Wiley and Sons, 1997.

[Curran et al. (1987)] Curran D.R., Seaman L. et Shockey L. Dynamic failure of solids. Physics reports, 1987, vol. 5 Amsterdam, North-Holland,  $n^{\circ}$  147, pp. 253-388.

[De Borst et al. (1990)] De Borst R., Mülhaus H.B., Pamin J. et Sluys L.J. Computational modelling of localisation of deformation. In: D.R.J. Owen, E. Onate and E. Hinton Eds., 3rd International Conference on Computational Plasticity (COMPLAS'90), Barcelone, Espagne. 1990, pp. 483-508.

[De Borst et Mülhaus (1992)] De Borst R. et Mülhaus H.B. Gradient-dependent plasticity: formulation and algorithmic aspects. Int. J. of Num. Meth. in Engng, 1992, vol. 35, pp. 521-539.

[De Borst et al. (1993)] De Borst R., Mülhaus H.B., Pamin J. et Sluys L.J. Fundamental issues in finite element analyses of strain localisation. Engng. Comput., 1993, vol. 10, pp. 99-121.

[De Borst (2004)] De Borst R. Damage, material instabilities and failure. In: Erwin Stein, René de Borst and Thomas J.R. Hugues. Encyclopedia of computational mechanics. John Wileys & Sons, Ltd. 2004.

[Deü (1997)] Deü J.F. Rupture des composites stratifiés sous chargement dynamique : apports des méso-modèles avec endommagment retardé. Thèse, Ecole Normale Supérieure de Cachan, LMT Cachan, 1997.

[Dufailly (1980)] Dufailly J. Modélisation mécanique et identification de l'endommagement plastique des métaux. Thèse de 3ème cycle, Paris VI, 1980.

[Dureisseix (2003)] Dureisseix D. Méthodes numériques appliquées à la modélisation par éléments finis [en ligne]. Disponible sur : <a href="http://www.librecours.org/documents/5/532.pdf">http://www.librecours.org/documents/5/532.pdf</a>> (consulté le 01.02.2004).

[Espinosa (1996)] Espinosa H.D. Dynamic compression-shear loading with inmaterial interferometric measurements. Rev. Sci. Instrum., 1996, vol. 67, n° 11, pp. 3931-3939.

[Europlexus (2002)] Europlexus A computer program for the finite element simulation of fluid-structure systems under transient dynamic loading, version 1.0. CEA/DEN/SEMT/DYN, CEA Saclay, 2002.

[Faucher et Combescure (2003)] Faucher V. et Combescure A. A time and space mortar method for coupling linear modal subdomains and non-linear subdomains in explicit structural dynamics. Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng., 2003, vol. 192, n° 5-6, pp. 509-533.

[Feissel (2003a)] Feissel P. Vers une stratégie d'identification en dynamiques rapides pour des données incertaines. Thèse, Ecole Normale Supérieure de Cachan, LMT Cachan, 2003.

[Feissel et al. (2003a)] Feissel P., Allix O. et Thévenet P. Stratégie d'identification basée sur l'erreur en relation de comportement dans le cas d'essais aux conditions aux limites incertaines en dynamique transitoire. In : Potier-Ferry, Bonnet M. et Pignonnet Eds., Actes du 6ème Colloque National en Calcul des Structures, Giens, France. 2003, vol.1, pp. 137-144.

[Feissel (2003b)] Feissel P. Vers une stratégie d'identification en dynamiques rapides pour des données incertaines. Thèse, Ecole Normale Supérieure de Cachan, LMT Cachan, 2003.

[Filip et al. (2003)] Filip R., Kubiak K., Ziaja W. et Sieniawski J.The effect of microstructure on the mechanical properties of two-phase titanium alloys. J. of Mat. Processing Technology, 2003, vol. 133, pp. 84-89.

[Galon et Izquierdo (2000)] Galon P. et Izquierdo P. Modélisation de la perforation de plaques en acier inoxydable 304L avec le modèle d'endommagement de Lemaitre et Chaboche : comparaisons avec les résultats expérimentaux. Rapport DMT, SEMT/DYN/RT/00-018/A, CEA Saclay, 2000.

[Gérardin et Rixen (1993)] Gérardin M. et Rixen D. Théorie des vibrations. Applications à la dynamique des structures. Masson Eds., 1993.

[Goeke et McClintock (1975)] Goeke E.C. et McClintock F.A. Fracture of graphite composites under shock loading. J. of Appl. Phys., vol. 46, n° 11, pp. 4671-4673.

[Goudreau et Taylor (1972)] G.L. Goudreau G.L. et Taylor R.L. Evaluation of numerical integration methods in elastodynamics. Comp. Meth. in App. Mech. and Eng., 1972, vol. 2, pp. 69-97.

[Gravouil (2000)] Gravouil A. Méthode multi-échelles en temps et en espace avec décomposition de domaines pour la dynamique non-linéaire des structures. Thèse, Ecole Normale Supérieure de Cachan, LMT Cachan, 2000.

[Gurson (1977)] Gurson A.L. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I - Yied criteria and flow rules for porous ductile media. J. of the Mech. and Phys. of Sol., 1977, vol. 17, pp. 201-217.

[Hadamard (1903)] Hadamard J.J. Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique. Paris, librairie scientifique A. Hermann, 1903.

[Hallquist et al. (1985)] Hallquist J.O., Goudreau G.L. et Benson D.J. Slinding interfaces with contact-impact in large-scale lagrangian computations. Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng., 1985, vol. 51, pp. 107-137.

[Hanim et Klepaczko (1999)] Hanim S. et Klepaczko J.R. Numerical study of spalling in an aluminium alloy 7020-T6. Int. J. of Imp. Eng., 1999, vol. 22, pp. 649-673.

[Hill (1962)] Hill R. Acceleration waves in solids. J. Mech. Phys. Sol., 1962, vol. 10, pp. 1-16.

[Hugues (1987)] Hugues T.J.R. The finite element method, linear static and dynamic finite element analysis. Prentice-Hall International Editions, 1987.

[Izquierdo et Grünenwald (1999)] Izquierdo P. et Grünenwald T. Essais de perforation de plaques en acier inoxydable 304L d'épaisseur 6mm - poinçons plat et hémisphérique. Rapport DMT, SEMT/DYN/RT/99-024/A, CEA Saclay, 1999.

[Kachanov (1958)] Kachanov L.M. On the Creep Rupture Time. Izv. AN SSSR, Otd. Tekn. Nauk., 1958, vol. 8, pp. 26-31.

[Klepaczko (1987)] Klepaczko J.R. A practical stress-strain-strain rate-temperature constitutive relation of the power form. J. Mech. Working Technology, 1987, vol. 15, pp. 143-166.

[Kratochvil (1988)] Kratochvil J. Dislocation pattern formation in metals. Rev. Phys. Appl., 1988, vol. 23, pp. 419-429.

[Ladevèze (1986)] Ladevèze P. Sur la mécanique de l'endommagement des composites. In : Bathias C. & Menkès D. Eds., Comptes rendus des 5ème Journées Nationales sur les Composites, 1986, pp. 667-683.

[Ladevèze (1991)] Ladevèze P. About a damage mechanics approach. In: Batiptiste D., Mechanics and Mechanisms of Damage in Composites and Multi-materials. London, 1991, pp. 119-141.

[Ladevèze (1992)] Ladevèze P. A damage computational method for composite structures. Comp. and Stru., 1992, vol. 44, pp. 79-87.

[Ladevèze (1996)] Ladevèze P. Mécanique non linéaire des structures. Paris, Hermès, 1996.

[Lasry et Belytschko (1988)] Lasry D. et Belytschko T. Localization limiters in transient problem. Int. J. of Sol. and Stru., 1988, vol. 24, pp. 581-597.

[Lemaître (1996a)] Lemaître J. A course on damage mechanics. Paris : Springer, 1996.

[Lemaître et Chaboche (1996b)] Lemaître J. et Chaboche J.L. Mécanique des matériaux solides. Paris : Dunod, 1996.

[Merelo et Strub (1998)] Merelo M. et Strub C. Développement dans Plexus d'un modèle de comportement plastique couplé à l'endommagement sensible à la vitesse de déformation. Rapport DMT, SEMT/DYN/RT/98-036/A, CEA Saclay, 1998.

[Meyers (1994)] Meyers M.A. Dynamic behavior of materials. New York: John Wiley & Sons, 1994.

[Needleman (1988)] Needleman A. Material dependance and mesh sensitivity in localization problems. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 1988, vol. 67, pp. 69-86.

[Nemat-Nasser et al. (1998)] Nemat-Nasser S., Isaacs J.B. et Liu M. Microstructure of high-strain, high-strain-rate deformed tantalum. Acta Mater., 1998, vol. 46, n $^{\circ}$  4, pp. 1307-1325.

[Newmark (1959)] Newmark W. A method of computation for strutural dynamics. J. Engng. Mech. Div. ASCEI, 1959, vol. 85, pp. 67-94.

[Olivier et al. (1999)] Olivier J., Cervera M. et Manzoli O. Strong discontinuities and continuum plasticity models: the strong discontinuity approach. Int. J. of Plas., 1999, vol. 15, pp. 319-351.

[Pijaudier-Cabot et Bazant (1988)] G. Pijaudier-Cabot et Z.P. Bazant. Local and non-local models for strain-softening, and their comparison based on dynamics analysis. In: Elsevier Applied Science Eds., Cracking and damage, Cachan, France, 1988, pp. 379-390.

[Rabotnov (1963)] Rabotnov Y. On the equations of state for creep. P. in Appl. Mech., 1963, Prager Aniversary vol., pp. 307-.

[Razonerov et al. (1995)] Razorenov S.V., Utkin A.V., Kanel G.I., Fortov V.E., Yarunichev A.S., Baumung K. et Karow H.U. Dynamic deformation and fracture of high purity titanium. In: L.E. Murr, K.P. Staudhammer and M.A. Meyers Eds., Metallurgical and Materials Applications of Shock-Wave and High-Strain-Rate Phenomena, 1995, pp. 235-242.

[Rice et Tracey (1969)] Rice J.R. et Tracey D.M. On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. J. of the Mech. and Phys. of Sol., 1969, vol. 58, pp. 201-217.

[Romanchenko et Stepanov (1980)] Romanchenko V.I. et Stepanov G.V. Dependance of the critical stresses on the loading time parameters during spall in copper, aluminium and steel. Zhurnal Prikladnoi Mekhaniki i Tekhnicheskoi Fiziki (translated from), 1980, vol. 4, pp. 141-.

[Roy (2003)] Roy G. Vers une modélisation appronfondie de l'endommagement ductile dynamique. Investigation expérimentale d'une nuance de tantale et développements théoriques. Thèse, Université de Poitiers, 2003.

[Ruggiero et Bonora (2002)] Ruggiero A. et Bonora N. Previsione di cedimento per frammentazione nei metalli in condizioni di impatto veloce. In : Atti del XXXI Convegno Nazionale AIAS, Parma, Italie, 2002.

[Sluys (1992)] Sluys L.J. Wave propagation, localisation and dispersion in softening solids. Thèse, Delft University of Technology, Delft, 1992.

[Speight et Taylor (1986)] Speight C.S. et Taylor P.F.Metallurgical applications of shock-wave and high-strain rate phenomena. In: Murr L.E., Standhammer K.P., Taylor P.F. Eds., International Conference Portland, USA, 1986.

[Strub (1991)] Strub C. Introduction dans CASTEM2000 d'un modèle de matériaux élasto-plastiques à écrouissage et endommagement isotropes. Rapport DMT, 91-178, CEA Saclay, 1991.

[Strub (1998)] Strub C. Introduction dans Plexus d'un modèle de comportement de matériaux élasto-plastiques endommageables. Rapport DMT, SEMT/DYN/RT/98-026/A, CEA Saclay, 1998.

[Suffis et Combescure (2002a)] Suffis A. et Combescure A. Modèle d'endommagement à effet retard, étude numérique et analytique de l'évolution de la longueur caractéristique. Revue Européenne des Eléments Finis, 2002, vol. 11, n° 5, pp. 593-620.

[Suffis et Combescure (2002b)] Suffis A. et Combescure A. Modèle d'Endommagement à Effet Retard, Etude Numérique et Analytique de l'Evolution de la Longueur Caractéristique. Rapport Interne 03, LMSo, INSA de Lyon, 2002.

[Suffis (2002c)] Suffis A. Introduction dans Europlexus d'un modèle de matériaux élasto-plastiques endommageables avec effet retard. Rapport Interne 05, LMSo, INSA de Lyon, 2002.

[Suffis et al. (2003a)] Suffis A., Lubrecht A. et Combescure A. Damage Model with Delay Effect: Analytical and Numerical Studies of the evolution of the characteristics length. Int. J. of Sol. and Stru., 2003, vol. 40, pp. 3463-3476.

[Suffis et Combescure (2003b)] Suffis A. et Combescure A. Von Mises plasticity coupled with delayed damage. In: E. Onate and D.R.J. Owen Eds., 7th International Conference on Computational Plasticity (CDROM COMPLAS'03), Barcelone, Espagne. 2003.

[Suffis et Combescure (2003c)] Suffis A. et Combescure A. Modèle d'endommagement à effet retard, étude de l'évolution de la longueur caractéristique. In : Potier-Ferry, Bonnet M. et Pignonnet Eds., Actes du 6ème Colloque National en Calcul des Structures, Giens, France. 2003, vol.1, pp. 341-348.

[Suffis et al. (2004a)] Suffis A., Combescure A. et Chevrier P. Is the delayed damage model adequate for the prediction of spall fracture experiment: application to aluminium 7020-T6. Comp. and Stru., 2004, sousmis.

[Suffis et Combescure (2004b)] Suffis A. et Combescure A.Damage model with delay effect : description and identification using plate impact experiments. Comp. Mat. Sci., 2004, sousmis.

[Suffis et al. (2004c)] Suffis A., Combescure A. et Bung H. Modèle d'endommagement à effet retard. Identification des paramètres. In: P. Babin, R. Dendievel, S. Forest, J.F. Ganghoffer, A. Zeghadi, M.H. Zoberman Eds., Colloque National MECAMAT, Aussois 2004, France. 2004, pp. 501-504.

[Thouvenin (1997)] Thouvenin J. Détonique. Paris : Eyrolles, Collection du Commissariat à l'Energie Atomique, Série Synthèses, 1997.

[Walgraef et Aifantis (1985)] Walgraef D. et Aifantis E.C. On the formation and stability of dislocation patterns. Int. J. Engng. Sci., 1985, pp. 1351-1372.

[Wu et Freund (1984)] Wu F.H. et Freund L.B. Deformation trapping due to thermoplastic instability in one-dimensional wave propagation. J. Mech. Phys. Sol., 1984, vol. 32, pp. 119-132.

[Yuritzinn (1999a)] Yuritzinn T. Identification des paramètres de modèle d'endommagement de Lemaitre Chaboche couplé pour un inox 304L à une vitesse de déformation quasi-statique. Rapport DMT, SEMT/DYN/RT/99-080/A, CEA saclay, 1999.

[Yuritzinn (1999b)] Yuritzinn T. Identification des paramètres de modèle d'endommagement de Lemaitre Chaboche couplé pour un inox 304L à des vitesses de déformation comprises entre 5 et 200s-1. Rapport DMT, SEMT/DYN/RT/99-091/A, CEA saclay, 1999.

[Zbib et Aifantis (1988)] Zbib H.M. et Aifantis E.C. On the localization and post-localization behavior of plastic deformation, I, II, III. Res. Mechanica, 1988, vol. 23, pp. 261-305.

# Annexe A : détermination analytique de $\ell^{car}$ sur un modèle discret

L'objectif de cette annexe est de déterminer à l'aide d'un modèle discret unidimensionnel semblable aux éléments finis une formulation analytique de la longueur caractéristique fonction des paramètres du modèle, du matériau et du chargement, mais indépendant du maillage. L'exemple de la figure 2.2 est donc à nouveau considéré. La poutre est maillée avec des éléments uni-dimensionnels de longueur égale à  $\Delta x$ . De la même manière que les simulations sur cet exemple, le schéma numérique permettant l'intégration des équations est le schéma de Newmark aux différences centrés, le pas de temps  $\Delta t$  est choisi égal au pas de temps critique  $\Delta t^{crit} = \frac{\Delta x}{c}$ (le chapitre 1 donne plus de détail sur ce pas de temps critique). Enfin, le modèle matériau utilisé correspond au modèle simplifié exposé dans la partie 2.4.1.1; ainsi, seuls seront étudiés les éléments et les noeuds au niveau du front de l'onde.

Avant de s'intéresser précisément à la détermination de  $\ell^{car}$ , les deux paragraphes suivants détaillent l'évolution d'une onde dans la poutre, onde purement élastique pour le premier et onde élastique endommageable pour le second.

## A.1 Propagation d'une onde purement élastique

Ce paragraphe s'intéresse donc à la situation détaillée par la figure A-1 (l'onde se propage de droite à gauche) où nous avons appelé  $\sigma_I^t$  la contrainte de l'élément I à l'instant t. Les conditions initiales supposent que  $\sigma_I^t$  est égal à  $\Delta\sigma$  (qui est inférieure dans ce cas à  $\sigma^{lim}$ ) alors que la contrainte au même instant pour l'élément I+1 est nulle. Le front de l'onde se situe donc au niveau du noeud i, c'est-à-dire que le temps depuis le début de la sollicitation est égal à  $t=I\Delta t=Ic\Delta x$ . Il s'agit de déterminer au temps  $t+\Delta t=(I+1)\Delta t$  la contrainte au niveau du front de l'onde, c'est-à-dire dans l'élément I+1 à cet instant.

Pour ce faire, les différentes étapes effectuées lors d'une simulation classique sont résumées :

– la première étape est d'écrire l'équation d'équilibre qui permet de déterminer l'accélération du noeud au niveau du front de l'onde  $\ddot{U}_i^t$ .

$$\rho \Delta x \ddot{U}_i^t = -F_{int}^t = \left(\sigma_I^t - \sigma_{I+1}^t\right) S$$

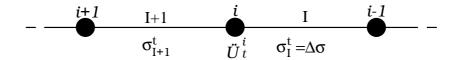


Fig. A-1 - Modélisation discrétisée, cas d'une onde purement élastique (sans endommagement)

La section étant unitaire et la contrainte  $\sigma_{I+1}^t$  nulle, l'accélération du noeud i est égale à :

$$\ddot{U}_i^t = \frac{\Delta \sigma}{\rho \Delta x}$$

– le déplacement du noeud i au temps  $t+\Delta t$  se déduit alors du schéma de Newmark aux différences centrés.

$$U_i^{t+\Delta t} = \Delta t^2 \ddot{U}_i^t$$

– la déformation, puis la contrainte, de l'élément I+1 peuvent alors être déterminées au pas de temps  $t+\Delta t$ .

$$\varepsilon_{I+1}^{t+\Delta t} = \frac{U_i^{t+\Delta t} - U_{i+1}^{t+\Delta t}}{\Delta x} = \frac{U_i^{t+\Delta t}}{\Delta x}$$

En remplaçant le déplacement  $U_i^{t+\Delta t}$  par son expression,

$$\varepsilon_{I+1}^{t+\Delta t} = \frac{\Delta t^2}{\Delta x} \ddot{U}_i^t$$

puis l'accélération  $\ddot{U}_i^t$  par son expression,

$$\varepsilon_{I+1}^{t+\Delta t} = \frac{\Delta t^2}{\Delta x} \frac{\sigma_I^t}{\rho \Delta x} = \frac{\Delta t^2}{\rho \Delta x^2} \Delta \sigma$$

et enfin,  $\frac{\Delta t}{\Delta x}$  par  $\frac{1}{c} = \sqrt{\frac{\rho}{E}}$ , on obtient finalement :

$$\begin{cases} \varepsilon_{I+1}^{t+\Delta t} = \frac{\Delta \sigma}{E} = \varepsilon_{I}^{t} \\ \sigma_{I+1}^{t+\Delta t} = \Delta \sigma \end{cases}$$

Les quantités au niveau du front de l'onde (dans l'élément I+1) ont donc été déterminées au pas de temps suivant; on trouve une onde de contrainte  $\Delta \sigma$  qui se propage d'élément en élément. Remarquons que le niveau  $\Delta \sigma$  de cette onde étant inférieur à la contrainte limite  $\sigma^{lim}$ , l'endommagement est bien nul en tout instant et en tout point.

## A.2 Propagation d'une onde élastique endommageable

Ce paragraphe s'intéresse pour sa part à la situation détaillée par la figure A-2 où la contrainte de l'élément I à l'instant t  $\sigma_I^t$  est égale  $\Delta \sigma$  et son endommagement à  $D_I^t$  alors que les mêmes quantités au même instant pour l'élément I+1 sont nulles. Remarquons dès à présent que, si on considère le modèle simplifié, l'endommagement  $D_I^t$  correspond à une évolution de l'endommagement pendant un pas de temps. Cela suppose également que la contrainte effective  $\tilde{\sigma}_I^t = \frac{\sigma_I^t}{1-D_I^t}$  est supérieure à la contrainte limite  $\sigma^{lim}.$  De la même manière que dans le paragraphe précédent, il s'agit de déterminer au temps  $t + \Delta t = (I+1)\Delta t$  la contrainte et l'endommagement au niveau du front de l'onde, c'est-à-dire dans l'élément I+1.

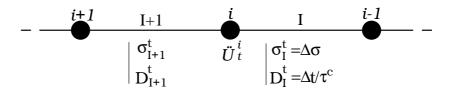


Fig. A-2 - Modélisation discrétisée, cas d'une onde élastique avec endommagement

Une fois encore, les différentes étapes sont détaillées :

- la première étape est inchangée par rapport au paragraphe précédent. L'accélération  $\ddot{U}_i^t$  est égale à  $\frac{\Delta \sigma}{\rho \Delta x}$ .

  – le déplacement du noeud i au temps  $t+\Delta t$  est lui aussi inchangé et égal à
- la déformation, la contrainte et l'endommagement de l'élément I+1 peuvent alors être déterminées au pas de temps  $t + \Delta t$ . On détermine dans un premier temps la déformation qui est égale à :

$$\varepsilon_{I+1}^{t+\Delta t} = \frac{\Delta \sigma}{E}$$

La contrainte effective est alors égale à :

$$\tilde{\sigma}_{I+1}^{t+\Delta t} = \Delta \sigma$$

Deux cas sont alors possibles selon la valeur de la contrainte effective  $\tilde{\sigma}_{I+1}^{t+\Delta t}$ . Le premier est un arrêt de la propagation de l'endommagement si celle-ci est inférieure à la contrainte limite  $\sigma^{lim}$ ; on a alors tout simplement :

$$\sigma_{I+1}^{t+\Delta t} = \tilde{\sigma}_{I+1}^{t+\Delta t} = \Delta \sigma$$

Le second correspond à une poursuite de la propagation de l'endommagement si  $\Delta \sigma$  est supérieure à la contrainte limite  $\sigma^{lim}$ . Le taux d'endommagement  $\dot{D}_{I+1}^{t+\Delta t}$  est alors égal à  $\frac{1}{\tau^c}$ . L'endommagement et la contrainte valent alors :

$$\begin{cases} D_{I+1}^{t+\Delta t} = \Delta t \dot{D}_{I+1}^{t+\Delta t} = \frac{\Delta t}{\tau^c} \\ \sigma_{I+1}^{t+\Delta t} = \tilde{\sigma}_{I+1}^{t+\Delta t} \left( 1 - D_{I+1}^{t+\Delta t} \right) = \Delta \sigma \left( 1 - \frac{\Delta t}{\tau^c} \right) \end{cases}$$

En résumé, il existe deux situations possibles :

- La première correspond à un arrêt de l'évolution de l'endommagement. C'est-à-dire que, alors que la contrainte effective de l'élément I à l'instant t  $\tilde{\sigma}_I^t = \frac{\sigma_I^t}{1-\frac{\Delta t}{\tau^c}}$  était supérieure à la contrainte limite  $\sigma^{lim}$ , la contrainte effective de l'élément I+1 à l'instant  $t+\Delta t$   $\sigma_{I+1}^{t+\Delta t}$  ne l'est plus. Par conséquent, à partir de cette instant, l'endommagement ne s'étend plus et l'onde qui se propage vers la gauche est purement élastique et on retrouve la situation exposée dans le paragraphe précédent.
- la deuxième correspond à une poursuite de l'extension de la zone endommagée. On reste donc dans la même situation. On remarque par ailleurs qu'entre l'instant t et l'instant  $t + \Delta t$ , le niveau de la contrainte sur le front d'onde diminue. La zone endommagée va donc s'étendre jusqu'à ce que la contrainte au niveau du front de l'onde soit inférieure à la contrainte limite  $\sigma^{lim}$  (c'est-à-dire jusqu'au moment où la première situation se présentera).

## A.3 Détermination de la longueur caractéristique

On revient maintenant au problème initial de la poutre encastrée à gauche sollicitée à droite. La nature de la sollicitation n'a pas d'importance; que ce soit un déplacement imposé ou un effort imposé, nous conviendrons qu'elle entraîne la propagation d'une onde de contrainte dans la poutre dont le niveau est initialement égal à  $\Delta \sigma$ . Si  $\Delta \sigma$  est inférieure à la contrainte limite  $\sigma^{lim}$ , aucun endommagement n'apparaît; la longueur caractéristique  $\ell^{car}$  est donc nulle. Lorsque  $\Delta \sigma$  est supérieure à  $\sigma^{lim}$ , on applique la méthode présentée dans le paragraphe précédent.

La figure A-3 résume le résultats obtenus pour une propagation de l'endommagement sur au moins les trois premiers éléments. Tant que l'endommagement se propage, la valeur de la contrainte effective au niveau de front de l'onde pour n'importe quel temps t (c'est-à-dire dans l'élément I à l'instant  $I\Delta t$ ) est alors trivialement égale à :

$$\tilde{\sigma}_I^{I\Delta t} = \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau^c}\right)^I \Delta \sigma$$

L'endommagement se propagera donc dans la poutre tant que la condition donnée par l'équation suivante sera vérifiée.

$$\tilde{\sigma}_I^{I\Delta t} \geq \sigma^{lim}$$

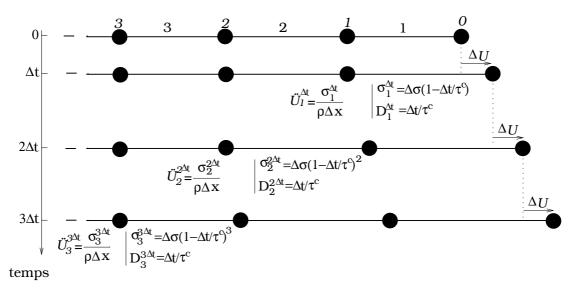


Fig. A-3 - Modélisation discrétisée, cas d'une onde élastique avec endommagement

Ceci est vrai jusqu'à l'élément I tel que :

$$I = \frac{\ln\left(\frac{\sigma^{lim}}{\Delta\sigma}\right)}{\ln\left(1 - \frac{\Delta t}{\tau^c}\right)}$$

En multipliant cette dernière équation par  $\Delta x$  et en remplaçant le pas de temps  $\Delta t$  par  $\frac{\Delta x}{c}$ , on obtient finalement :

$$\ell^{car} = \ell \frac{\ln \left(\frac{\sigma^{lim}}{\Delta \sigma}\right)}{\ln \left(1 - \frac{\Delta x}{c\tau^c}\right)}$$

A ce niveau, le résultat obtenu dépend encore du maillage. En effet, la taille de l'élément  $\Delta x$  intervient dans la formule analytique obtenue. Cependant, le passage à la limite lorsque le maillage devient infiniment fin (c'est-à-dire  $\Delta x \to 0$ ) permet d'obtenir une formule analytique de la longueur caractéristique indépendante du maillage cette fois.

$$\ell^{car} = c\tau^c \ln \left( \frac{\Delta \sigma}{\sigma^{lim}} \right)$$

Cette longueur caractéristique est égale à celle déterminée avec le modèle continu et présentée dans le paragraphe 2.4.1.2.

Annexe A : détermination analytique de $\ell^{car}$ sur un mo	odèle discret

# Annexe B : exemple de jeu de données Europlexus

Cette annexe présente un jeu de données Europlexus type. Il s'agit du fichier '.epx' correspondant à un essai chapeau effectué avec effet retard sur le niveau 2 de maillage. Pour mémoire, celui-ci, ainsi que les conditions aux limites du modèle, sont à nouveau tracés sur la figure B-1 (pour un niveau 6 de maillage). Nous convenons d'écrire les lignes utiles du jeu de données décalées de la marge, les commentaires n'étant pas décalés et écrits dans une police plus petite.

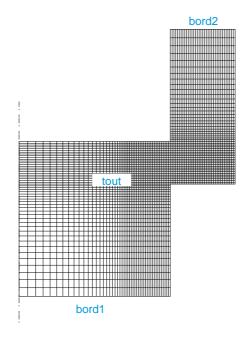


Fig. B-1 - Maillage (niveau 6) du chapeau

Le jeu de données est dans ce cas le suivant :

Titre du jeu de données

— Titre 'Essai chapeau - niveau 2 - avec effet retard'

Fichiers d'impression des sorties destinés au post-traitement ECHO OPNF 11 'hatER2.alice' OPNF FORMAT 12 'hatER2.k2000'

```
Lecture du maillage (de nom 'tout')
     GIBI tout
Options de la simulation
      AXIS NONL
     LAGC GHOST
Allocation de mémoire pour la simulation
     DIMENSION
           PT2L 50000 ZONE 1 CAR1 50000
           TRAC 1 141
           BLOQ 800 GLIS 1 4000
           DEPL 1000
           MTPO 100000 MTEL 100000
           ECRO 3000000
     TERM
Définition de la géométrie
     GEOM
           CAR1 tout
      TERM
Définition des propriétés du matériau et de sa courbe d'écrouissage
      MATERIAU
           LEM1 RO 2780 YOUN 74000E+6 NU 0.3 ELAS 313.76E+6
           EPSD 0.03 S0 0.25 DC 0.23 CSTA 2.0 TAUC 0.5E-6
           TRAC 141
           3.1376E + 0084.24E - 003
           3.43E + 0087.14E - 003
           3.62E + 0089.89E - 003
           1.06E + 009 \ 3.59E - 001
           1.07E + 009 \ 3.62E - 001
           1.07E + 009 \ 3.64E - 001
     LECT tout TERM
Définition des liaisons
     LIAI
           BLOQ 1 LECT bord2 TERM
           BLOQ 2 LECT bord2 TERM
Définition des chargements imposés
     CHAR 1 FACTO 2
```

DEPL 2 1. LECT bord1 TERM

```
TABL 2
          0.0 \,\, 0.0
          1. 50.
Options de l'écriture des données pour le post-traitement
     ECRITURE FREQ 100 NOPOIN NOELEM
          FICHIER alic TEMPS 11 FREQ 5
          POINT LECT bord1 TERM NOELEM
          FICHIER FORMAT k2000 12 FREQ 100 POINT LECT TOUS CHA-
\operatorname{MELEM}
Options du calcul
     OPTION
          AMORT LINE 0.2
          PAS AUTOMATIQUE
          STEP IO
          CSTAB 0.5
     CALCUL TINI 0 TFIN 7.E-06
```

FIN

# Annexe C : résumé des simulations effectuées avec l'Au4G1-T4

Cet annexe résume les résultats de l'ensemble des simulations qui ont été effectuées avec l'alliage d'aluminium Au4G1-T4. Les essais caractérisés par l'épaisseur  $L^c$  de la cible et par la vitesse d'impact  $V^{impact}$ , desquels on déduit le temps  $t^c$  et la pression de choc  $p^{choc}$ . La dernière colonne notée 'level' permet de donner le niveau d'endommagement atteint dans le plan d'écaillage. Les niveaux vont de 0 à 4 pour un endommagement total. Les niveaux 0, 1, 2 et 3 correspondent respectivement à un endommagement compris entre 0% et 25%, entre 25% et 50%, entre 50% et 75% et entre 75% et 100%. L'indice  $^+$  ou  $^-$  indique encore plus précisément à quel niveau se situe l'endommagement.

Le tableau C-1 présente les résultats pour les simulations sans effet retard, les tableaux C-2, C-3 et C-4 les résultats pour les simulations avec un effet retard dont les couples  $(a, \tau^c)$  de paramètres sont respectivement  $(10, 0.2\mu s)$ ,  $(2, 0.2\mu s)$  et  $(10, 0.4\mu s)$ .

$L^c$	$t^c$	$V^{impact}$	$\sigma$	level	•	$L^c$	$t^c$	$V^{impact}$	$\sigma$	level
mm	$\mu s$	m/s	MPa			mm	$\mu s$	m/s	MPa	
4	0.67	225	1876	0		3	0.50	225	1876	0+
		250	2085	1				250	2085	$1^-$
		275	2293	1				275	2293	1
		300	2502	$1^+$				300	2502	$2^{-}$
		320	2669	2				310	2585	2
		335	2794	2				325	2710	2
		350	2919	3				350	2919	$2^{+}$
		362.5	3023	3				362.5	3023	3
		375	3127	$3^+$				375	3127	$3^+$
		400	3336	4				387.5	3232	$3^+$
2	0.33	225	1876	0+				400	3336	4
		250	2085	$1^1$	•	1	0.17	225	1876	0+
		275	2293	1				250	2085	1
		300	2502	$1^+$				275	2293	1
		325	2710	2				300	2502	$1^+$
		350	2919	$2^+$				325	2710	2
		362.5	3023	3				350	2919	$3^{-}$
		375	3127	3				375	3127	3
		387.5	3232	$3^+$				387.5	3232	$3^+$
		400	3336	4				400	3336	4

Tab. C-1 - Résumé des résultats des simulations sans endommagement retardé

$L^c$	$t^c$	$V^{impact}$	σ	level	•	$L^c$	$t^c$	$V^{impact}$	$\sigma$	level
mm	$\mu s$	m/s	MPa			mm	$\mu s$	m/s	MPa	
4	0.67	225	1876	0	•	2	0.33	225	1876	0
		250	2085	1 -				250	2085	$1^{-}$
		275	2293	1				275	2293	1
		300	2502	$1^{+}$				300	2502	1
		325	2710	2				325	2710	$2^{-}$
		350	2919	$2^+$				350	2919	2
		375	3127	3				375	3127	$3^{-}$
		387.5	3232	$3^+$				400	3336	3
		400	3336	4				415	3461	3
3.5	0.59	225	1876	$0_{+}$	<u>-</u> '			425	3544	3
		250	2085	1				435	3628	$3^+$
		275	2293	1				445	3711	1
		300	2502	$1^{+}$		1.5	0.25	250	2085	0
		325	2710	2				275	2293	0+
		350	2919	$3^{-}$				300	2502	1
		375	3127	3				325	2710	1
		387.5	3232	$3^+$				350	2919	1+
		400	3336	4				375	3127	2
3	0.50	225	1876	0	•			400	3336	2
		250	2085	1 -				415	3461	$2^+$
		275	2293	1				430	3586	3
		300	2502	1				445	3711	3
		325	2710	$2^{-}$				455	3795	3
		350	2919	$^2$				465	3878	3
		375	3127	$3^{-}$				475	3961	4
		387.5	3232	3		1	0.17	250	2085	0
		400	3336	3				300	2502	0
		412.5	3440	$3^+$				325	2710	0
		415	3461	4				350	2919	1-
2.5	0.42	225	1876	0				400	3336	1
		250	2085	1 -				425	3544	1
		275	2293	1				450	3753	$2^{-}$
		300	2502	1				500	4170	2
		325	2710	$2^{-}$					· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
		350	2919	2						
		375	3127	$3^{-}$						
		400	3336	3						
		415	3461	$3^+$						
		425	3544	4						

Tab. C-2 - Résumé des résultats des simulations avec des paramètres d'endommagement retardé a et  $\tau^c$  respectivement égaux à 10 et  $0.2\mu s$ 

$L^c$	$t^c$	Vimpact	σ	level	-	$L^c$	$t^c$	$V^{impact}$	$\sigma$	level
mm	$\mu s$	m/s	MPa			mm	$\mu s$	m/s	MPa	
4	0.67	225	1876	0		1.5	0.25	250	2085	0
		250	2085	$1^-$				275	2293	1-
		300	2502	1				300	2502	1
		325	2710	2				325	2710	1
		350	2919	$2^{+}$				350	2919	2
		375	3127	3				375	3127	2
		387.5	3232	$3^+$				410	3419	$3^{-}$
		400	3336	4				430	3586	3
3.5	0.59	387.5	3336	$3^{+}$	-			450	3753	3
		400	3378	4				465	3878	4
3	0.50	400	3336	3	-	1	0.17	250	2085	0
		405	3378	$3^+$				300	2502	$0_{+}$
		410	3419	4				350	2919	1
2.5	0.42	405	3378	3	•			400	3336	$1^{+}$
		410	3419	$3^+$				425	3544	$2^{-}$
		415	3461	4				450	3753	2
		425	3544	4				475	3961	$2^{+}$
2	0.33	415	3461	3	-			500	4170	3
		420	3503	$3^{+}$						
		425	3544	4						
		435	3627	4						

Tab. C-3 - Résumé des résultats des simulations avec des paramètres d'endommagement retardé a et  $\tau^c$  respectivement égaux à 2 et  $0.2\mu s$ 

$L^c$	$t^c$	$V^{impact}$	$\sigma$	level	•	$L^c$	$t^c$	$V^{impact}$	$\sigma$	level
mm	$\mu s$	m/s	MPa			mm	$\mu s$	m/s	MPa	
4	0.67	200	1668	$0_{+}$	_1	1.5	0.25	250	2085	$0_{+}$
		225	1876	1-				275	2293	1-
		250	2085	1				300	2502	1
		300	2502	$2^{-}$				350	2919	1+
		325	2710	2				400	3336	2
		350	2919	$2^{+}$				430	3586	$3^{-}$
		375	3127	3				450	3753	3
		387.5	3232	4				465	3875	$3^+$
		395	3294	4				470	3917	4
3.5	0.59	387.5	3232	3+		1	0.17	250	2085	0
		395	3294	4				300	2502	0+
3	0.50	387.5	3232	$3^{+}$	-"			350	2919	1
		395	3294	4				400	3336	$1^+$
2.5	0.42	395	3294	3+				450	3753	2
		400	3336	4				500	4170	$3^{-}$
2	0.33	400	3336	3				540	4495	4
		415	3461	$3^+$						
		425	3544	4						
		430	3586	4	-					

Tab. C-4 - Résumé des résultats des simulations avec des paramètres d'endommagement retardé a et  $\tau^c$  respectivement égaux à 10 et  $0.4 \mu s$ 

# Annexe D : évolution du profil d'endommagement pour l'essai P12

Cette annexe présente en partie les résultats numériques obtenus avec l'essai P12. Sont donc tracés ici les profils d'endommagement à quatre temps distincts. Ces profils sont tracés sur la configuration déformée, le coefficient d'amplification de la visualisation est égal à 1. Il est à noter que les éléments s'endommageant complètement ne sont pas retirés du maillage, expliquant les distorsions du maillage une fois les éléments endommagés.

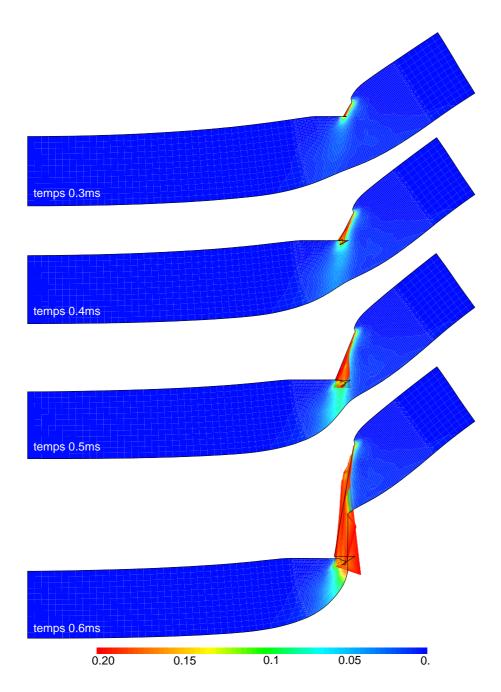


Fig. D-1 - Evolution du profil d'endommagement sur la configuration déformée pour l'essai  $\mathrm{P}12$