# THESE

#### pr'esent'ee

#### DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

pour obtenir

#### LE GRADE DE DOCTEUR

#### ECOLE DOCTORALE DES SCIENCES POUR L'INGENIEUR DE LYON : MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE (M.E.G.A.) SPECIALITE : MECANIQUE

par

Bruno DAMIENS

Ingénieur I.N.S.A. de Lyon

## MODELISATION DE LA LUBRIFICATION SOUS-ALIMENTEE DANS LES CONTACTS ELASTOHYDRODYNAMIQUES ELLIPTIQUES

Soutenue le 8 septembre 2003 devant la commission d'examen :

Jury :	Dr.	P.M.E.	$\mathbf{Cann}$	
	Pr.	J.	Denape	Rapporteur
	Pr.	J.	Frêne	Rapporteur
	Dr.	C.J.	Hooke	
	Pr.	A.A.	Lubrecht	
	Pr.	D.	Mazuyer	Président

Invité : Dr. C.H. Venner

Cette thèse a été préparée au Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Solides de l'INSA de LYON

# Ecoles Doctorales et Diplômes d'Etudes Approfondies

ECOLES DOCTORALES n° code national	RESPONSABLE PRINCIPAL	CORRESPONDANT INSA	DEA INSA n° code national	RESPONSABLE DEA INSA
<u>CHIMIE DE LYON</u> (Chimie, Procédés, Environnement) EDA206	M. D. SINOU UCBL1 04.72.44.62.63 Sec 04.72.44.62.64 Fax 04.72.44.81.60	<b>M. R. GOURDON</b> 87.53 Sec 84.30 Fax 87.17	Chimie Inorganique 910643 Sciences et Stratégies Analytiques 910634	
			Sciences et Techniques du Déchet 910675	M. R. GOURDON Tél 87.53 Fax 87.17
ECONOMIE, ESPACE ET MODELISATION DES COMPORTEMENTS	M.A. BONNAFOUS LYON 2 04.72.72.64.38 Sec 04.72.72.64.03	Mme M. ZIMMERMANN 60.91 Fax 87.96	Villes et Sociétés 911218 Dimensions Cognitives et Modélisation 992678	Mme M. ZIMMERMANN Tél 60.91 Fax 87.96 M. L. FRECON Tél 82.39 Fax 85.18
(E-MC) EDA417	Fax 04.72.72.64.48			
ELECTRONIOUE, ELECTROTECHNIQUE,	<b>M. D. BARBIER</b> INSA DE LYON		Automatique Industrielle 910676	M. M. BETEMPS Tél 85.59 Fax 85.35
<u>AUTOMATIQUE</u> (E.E.A.)	85.47 Fax 60.82		Dispositifs de l'Electronique Intégrée 910696	M. D. BARBIER Tél 85.47 Fax 60.82
EDA160			Génie Electrique de Lyon 910065	M. J.P. CHANTE Tél 87.26 Fax 85.30 Mme I. MAGNIN
			992254	Tél 85.63 Fax 85.26
EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION (E2M2) EDA403	M. J.P FLANDROIS UCBL1 04.78.86.31.50 Sec 04.78.86.31.52 Fax 04.78.86.31.49	<b>M. S. GRENIER</b> 79.88 Fax 85.34	Analyse et Modélisation des Systèmes Biologiques 910509	M. S. GRENIER Tél 79.88 Fax 85.34
INFORMATIQUE ET INFORMATION POUR LA SOCIETE	<b>M. J.M. JOLION</b> INSA DE LYON		Documents Multimédia, Images et Systèmes d'Information Communicants 992774	M. A. FLORY Tél 84.66 Fax 85.97
(EDIIS)	87.59 Fax 80.97		Extraction des Connaissances à partir des Données 992099	M. J.F. BOULICAUT Tél 89.05 Fax 87.13
EDA 407			Informatique et Systèmes Coopératifs pour l'Entreprise 950131	M. A. GUINET Tél 85.94 Fax 85.38
INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES- SANTE (EDISS) EDA205	<b>M. A.J. COZZONE</b> UCBL1 04.72.72.26.72 Sec 04.72.72.26.75 Fax 04.72.72.26.01	<b>M. M. LAGARDE</b> 82.40 Fax 85.24	Biochimie 930032	M. M. LAGARDE Tél 82.40 Fax 85.24
<u>MATERIAUX DE LYON</u> UNIVERSITE LYON 1	M. J. JOSEPH ECL 04.72.18.62.44	M. J.M. PELLETIER 83.18 Fax 85.28	Génie des Matériaux : Microstructure, Comportement Mécanique, Durabilité 910527	M. J.M.PELLETIER Tél 83.18 Fax 85.28
EDA 034	Sec 04.72.18.62.51 Fax 04.72.18.60.90		Matériaux Polymères et Composites 910607	M. H. SAUTEREAU Tél 81.78 Fax 85.27
			Matière Condensée, Surfaces et Interfaces 910577	M. G. GUILLOT Tél 81.61 Fax 85.31
<u>MATHEMATIQUES ET</u> INFORMATIQUE FONDAMENTALE (Math IF) EDA 409	<b>M. F. WAGNER</b> UCBL1 04.72.43.27.86 Fax 04.72.43.00.35	<b>M. J. POUSIN</b> 88.36 Fax 85.29	Analyse Numérique, Equations aux dérivées partielles et Calcul Scientifique 910281	M. G. BAYADA Tél 83.12 Fax 85.29
MECANIQUE ENERGETIQUE CENTE	MIDATATIF	M C DALMAZ	Acoustique	M. J.L. GUYADER
MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE (MEGA)	м. <b>J. ВАТАНLLE</b> ECL 04.72.18.61.56 Sec 04.72.18.61.60	M. G.DALMAZ 83.03 Fax 04.72.89.09.80	910016 Génie Civil 992610	M. J.J.ROUX Tél 84 60 Fay 85 22
EDA163	Fax 04.78.64.71.45			10104.00 Fax 03.22
EDA102			Génie Mécanique 992111	M. G. DALMAZ Tél 83.03 Fax 04.78.89.09.80
			Thermique et Energétique 910018	M. J. F. SACADURA Tél 81.53 Fax 88.11

#### habilités pour la période 1999-2003

En grisé : Les Ecoles doctorales et DEA dont l'INSA est établissement principal

Directeur : STORCK A.

#### INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

**Professeurs** : AUDISIO S. BABOT D. BABOUX J.C. BALLAND B. BAPTISTE P. BARBIER D. BASTIDE J.P. BAYADA G. BENADDA B. BETEMPS M. **BIENNIER F.** BLANCHARD J.M. BOISSON C. BOIVIN M. (Prof. émérite) вотта н. BOTTA-ZIMMERMANN M. (Mme) BOULAYE G. (Prof. émérite) BOYER J.C. BRAU J. BREMOND G. BRISSAUD M. BRUNET M. BRUNIE L. BUREAU J.C. CAVAILLE J.Y. CHANTE J.P. CHOCAT B. COMBESCURE A. COUSIN M. DAUMAS F. (Mme) DOUTHEAU A. **DUFOUR R.** DUPUY J.C. EMPTOZ H. ESNOUF C. EYRAUD L. (Prof. émérite) FANTOZZI G. FAVREL J. FAYARD J.M. FAYET M. FERRARIS-BESSO G. FLAMAND L. FLORY A. FOUGERES R. FOUQUET F. FRECON L. GERARD J.F. GERMAIN P. GIMENEZ G. GOBIN P.F. (Prof. émérite) GONNARD P. GONTRAND M. GOUTTE R. (Prof. émérite) GOUJON L. GOURDON R. GRANGE G. GUENIN G. GUICHARDANT M. GUILLOT G. GUINET A. GUYADER J.L. GUYOMAR D. HEIBIG A. JACQUET-RICHARDET G. JAYET Y. JOLION J.M. JULLIEN J.F. JUTARD A. (Prof. émérite) KASTNER R. KOULOUMDJIAN J. LAGARDE M. LALANNE M. (Prof. émérite) LALLEMAND A. LALLEMAND M. (Mme) LAUGIER A.

PHYSICOCHIMIE INDUSTRIELLE CONT. NON DESTR. PAR RAYONNEMENTS IONISANTS GEMPPM\*\* PHYSIQUE DE LA MATIERE PRODUCTIQUE ET INFORMATIQUE DES SYSTEMES MANUFACTURIERS PHYSIQUE DE LA MATIERE LAEPSI\*\*\*\* MECANIQUE DES CONTACTS ET DES SOLIDES LAEPSI\*\* AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE PRODUCTIQUE ET INFORMATIQUE DES SYSTEMES MANUFACTURIERS LAEPSI\*\*\* VIBRATIONS-ACOUSTIQUE MECANIQUE DES SOLIDES UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Développement Urbain UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Développement Urbain INFORMATIQUE MECANIQUE DES SOLIDES CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Thermique du bâtiment PHYSIQUE DE LA MATIERE GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE MECANIQUE DES SOLIDES INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION CEGELY\* GEMPPM\*\*\* CEGELY\*- Composants de puissance et applications UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Hydrologie urbaine MECANIQUE DES CONTACTS ET DES SOLIDES UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Structures CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Energétique et Thermique CHIMIE ORGANIQUE MECANIQUE DES STRUCTURES PHYSIQUE DE LA MATIERE **RECONNAISSANCE DE FORMES ET VISION** GEMPPM\*\* GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE GEMPPM\*\*\* PRODUCTIQUE ET INFORMATIQUE DES SYSTEMES MANUFACTURIERS BIOLOGIE FONCTIONNELLE, INSECTES ET INTERACTIONS MECANIQUE DES SOLIDES MECANIQUE DES STRUCTURES MECANIQUE DES CONTACTS ET DES SOLIDES INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATIONS GEMPPM\*\*\* GEMPPM\*\*\* REGROUPEMENT DES ENSEIGNANTS CHERCHEURS ISOLES INGENIERIE DES MATERIAUX POLYMERES LAEPSI\*\*\* CREATIS\*\* GEMPPM\*\*\* GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE PHYSIQUE DE LA MATIERE CREATIS\*\* GEMPPM\*\*\* LAEPSI\*\*\*\* GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE GEMPPM\*\*\* BIOCHIMIE ET PHARMACOLOGIE PHYSIQUE DE LA MATIERE PRODUCTIQUE ET INFORMATIQUE DES SYSTEMES MANUFACTURIERS VIBRATIONS-ACOUSTIQUE GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE MATHEMATIQUE APPLIQUEES DE LYON MECANIQUE DES STRUCTURES GEMPPM\*\*\* RECONNAISSANCE DE FORMES ET VISION UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Structures AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Géotechnique INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION BIOCHIMIE ET PHARMACOLOGIE MECANIOUE DES STRUCTURES CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Energétique et thermique CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Energétique et thermique PHYSIQUE DE LA MATIERE

#### MAI 2003

LAUGIER C. LAURINI R. LEJEUNE P. LUBRECHT A. MASSARD N. MAZILLE H. MERLE P. MERLIN J. MIGNOTTE A. (Mle) MILLET J.P. MIRAMOND M. MOREL R. MOSZKOWICZ P. NARDON P. (Prof. émérite) NIEL E. NORTIER P. ODET C. OTTERBEIN M. (Prof. émérite) PARIZET E. PASCAULT J.P. PAVIC G. PELLETIER J.M. PERA J. PERRIAT P. PERRIN J. PINARD P. (Prof. émérite) PINON J.M. PONCET A. POUSIN J. PREVOT P. PROST R. RAYNAUD M. **REDARCE H. RETIF J-M. REYNOUARD J.M.** RIGAL J.F. **RIEUTORD E.** (Prof. émérite) ROBERT-BAUDOUY J. (Mme) (Prof. émérite) ROUBY D. ROUX J.J. RUBEL P. SACADURA J.F. SAUTEREAU H. SCAVARDA S. SOUIFI A. SOUROUILLE J.L. THOMASSET D. THUDEROZ C. UBEDA S. VELEX P. VIGIER G. VINCENT A. VRAY D. VUILLERMOZ P.L. (Prof. émérite) Directeurs de recherche C.N.R.S. :

BERTHIER Y. CONDEMINE G. COTTE-PATAT N. (Mme) ESCUDIE D. (Mme) FRANCIOSI P. MANDRAND M.A. (Mme) POUSIN G. ROCHE A. SEGUELA A. VERGNE P.

Directeurs de recherche I.N.R.A. : FEBVAY G. GRENIER S. RAHBE Y.

Directeurs de recherche I.N.S.E.R.M. : PRIGENT A.F. (Mme) MAGNIN I. (Mme)

BIOCHIMIE ET PHARMACOLOGIE INFORMATIQUE EN IMAGE ET SYSTEMES D'IMFORMATION UNITE MICROBIOLOGIE ET GENETIQUE MECANIQUE DES CONTACTS ET DES SOLIDES INTERACTION COLLABORATIVE TELEFORMATION TELEACTIVITE PHYSICOCHIMIE INDUSTRIELLE GEMPPM\*\*\* GEMPPM\*\*\* INGENIERIE, INFORMATIQUE INDUSTRIELLE PHYSICOCHIMIE INDUSTRIELLE UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Hydrologie urbaine MECANIQUE DES FLUIDES ET D'ACOUSTIQUES LAEPSI\*\* BIOLOGIE FONCTIONNELLE, INSECTES ET INTERACTIONS AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE DREP CREATIS\*\* LAEPSI\*\*\*\* VIBRATIONS-ACOUSTIQUE INGENIERIE DES MATERIAUX POLYMERES VIBRATIONS-ACOUSTIQUE GEMPPM\*\* UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Matériaux GEMPPM\*\* INTERACTION COLLABORATIVE TELEFORMATION TELEACTIVITE PHYSIQUE DE LA MATIERE INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION PHYSIQUE DE LA MATIERE MODELISATION MATHEMATIQUE ET CALCUL SCIENTIFIQUE INTERACTION COLLABORATIVE TELEFORMATION TELEACTIVITE CREATIS\*\* CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Transferts Interfaces et Matériaux AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE CEGELY\* UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Structures MECANIQUE DES SOLIDES MECANIOUE DES FLUIDES GENETIQUE MOLECULAIRE DES MICROORGANISMES GEMPPM\*\*\* CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Thermique de l'Habitat INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Transferts Interfaces et Matériaux INGENIERIE DES MATERIAUX POLYMERES AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE PHYSIQUE DE LA MATIERE INGENIERIE INFORMATIQUE INDUSTRIELLE AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE ESCHIL - Equipe Sciences Humaines de l'Insa de Lyon CENTRE D'INNOV. EN TELECOM ET INTEGRATION DE SERVICES MECANIQUE DES CONTACTS ET DES SOLIDES GEMPPM\*\* GEMPPM\*\*\* CREATIS\*\* PHYSIQUE DE LA MATIERE

MECANIQUE DES CONTACTS ET DES SOLIDES UNITE MICROBIOLOGIE ET GENETIQUE UNITE MICROBIOLOGIE ET GENETIQUE CENTRE DE THERMIQUE DE LYON GEMPPM\*\*\* UNITE MICROBIOLOGIE ET GENETIQUE BIOLOGIE ET PHARMACOLOGIE INGENIERIE DES MATERIAUX POLYMERES GEMPPM\*\*\* MECANIQUE DES CONTACTS ET DES SOLIDES

BIOLOGIE FONCTIONNELLE, INSECTES ET INTERACTIONS BIOLOGIE FONCTIONNELLE, INSECTES ET INTERACTIONS BIOLOGIE FONCTIONNELLE, INSECTES ET INTERACTIONS

BIOLOGIE ET PHARMACOLOGIE CREATIS\*\*

 \* CEGELY
 CENTRE DE GENIE ELECTRIQUE DE LYON

 \*\* CREATIS
 CENTRE DE RECHERCHE ET D'APPLICATIONS EN TRAITEMENT DE L'IMAGE ET DU SIGNAL

 \*\*\* GEMPPM
 GROUPE D' ETUDE METALLURGIE PHYSIQUE ET PHYSIQUE DES MATERIAUX

 \*\*\*\* LAEPSI
 LABORATOIRE D'ANALYSE ENVIRONNEMENTALE DES PROCEDES ET SYSTEMES INDUSTRIELS

# Résumé

Dans les mécanismes lubrifiés, la durée de vie des surfaces en contact est fonction de l'épaisseur du film de lubrifiant qui sépare les solides. La sous-alimentation en lubrifiant affecte cette épaisseur de film. Elle se manifeste par la réduction de la durée de vie des mécanismes et la variation du frottement dans le contact. La sous-alimentation concerne une proportion importante des contacts élastohydrodynamiques elliptiques.

Une modélisation mathématique du problème à frontières libres est adoptée. Elle utilise la distribution du lubrifiant à l'entrée du contact comme condition aux limites. Les techniques multigrilles et "Multi-Level Multi-Integral" utilisées pour résoudre le système d'équations sont sommairement exposées.

La résolution du système d'équations fournit les champs de pression et d'épaisseur de film de lubrifiant en tout point du plan de contact. Elle permet de valider un modèle analytique développé afin de mettre en évidence et de quantifier le débit d'éjection de lubrifiant, dans la couche limite qui entoure la zone de contact de Hertz. La largeur adimensionnée de la couche limite régit le débit d'éjection et, lorsqu'elle est associée à l'ellipticité du contact, elle permet de déterminer la réponse du contact à la sous-alimentation. La prédiction de la décroissance de l'épaisseur de film de lubrifiant au cours du temps est possible en l'absence de réalimentation, grâce au modèle analytique et à la largeur caractéristique.

La largeur adimensionnée de la couche limite peut aussi être utilisée pour prédire la persistance d'une sous-alimentation locale, au cours du fonctionnement d'un mécanisme.

Mots-clés : cage, contact elliptique, couche limite, engrenage, épaisseur de film, lubrification élastohydrodynamique, piezo-viscosité, longueur caractéristique adimensionnée, mécanisme, multigrilles, mesures et validation expérimentales, modélisation, prédiction, Reynolds, roulement, simulation numérique, sous-alimentation.

### Abstract

The life of lubricated mechanisms is a function of the lubricant film thickness separating the contacting solids. This film thickness is affected by the degree of lubricant starvation. The main effects induced by lubricant starvation are life reduction of the contacting surfaces and increase in friction. A large proportion of elliptical elastohydrodynamic contacts is concerned by lubricant starvation.

A free boundary model has been adopted. The lubricant distribution in the inlet of the contact is used as a boundary condition. The "multigrid" and "Multi-Level Multi-Integral" techniques, used to solve the equations describing the problem, are briefly exposed.

The pressure field and the deformed geometry of the surfaces are obtained on the entire computational domain. This solution allows the validation of an analytical model developed to study the ejection flow and to quantify this flow in the boundary layer surrounding the Hertz region. The flow is governed by the dimensionless width of the boundary layer. This dimensionless width, associated with the contact ellipticity, determines the contact response to a lubricant starvation. In the case of zero lubricant reflow, the decay of the lubricant film thickness can be predicted from the analytical model and the characteristic width.

The dimensionless width can also be used to predict the persistence of local lubricant starvation, in a particular mechanism.

# Avant propos

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Solides de l'I.N.S.A. de LYON. Je remercie les Professeurs Flamand puis Combescure de m'avoir accueilli dans leur établissement.

Je remercie les Professeurs Denape et Frêne d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse, ainsi que le Docteur Cann (Philippa), le Docteur Hooke, le Professeur Lubrecht (Ton) et le Professeur Mazuer, les autres membres du jury.

Pour leur aide, leur hospitalité et les nombreuses discussions que nous avons eues, j'adresse les plus vifs remerciements au Docteur Philippa Cann, pour le temps qu'elle a consacré pour m'apprendre à utiliser le dispositif expérimental, ainsi qu'au Docteur Kees Venner pour son aide concernant les aspects numériques et la modélisation.

Je ne remercierai jamais assez mon directeur de thèse, le Professeur Ton Lubrecht pour tout le temps qu'il m'a donné. J'espère utiliser au mieux, dans le futur, les nombreux enseignements que j'ai retirés de ce travail en commun. Je lui suis aussi très reconnaissant pour sa gentillesse et pour tous les bons moments que nous avons partagés.

Je remercie mes co-bureaux Benoit, Seb. et Pub. d'avoir toujours entretenu une atmosphère conviviale. Je souhaite associer à cette entreprise mes amis et compères Fabrice, Gab, Jérôme, VA et VDB qui pourraient se voir décerner la carte de membre quasi permanent du bureau.

Je remercie les doctorants Christophe, Eric, Fabienne, Malal, Mario, Rachelle, Sandrine, Yohann, Yasser et les autres pour la bonne ambiance qu'ils contribuent à entretenir dans le laboratoire, ainsi que les occupants du proche rez-de-chaussée pour leur bonne humeur Maurice, Michel, Miriam, Mondher, Olivier, les deux Philippe et Pierre.

Je suis très reconnaissant envers le Docteur François Collin qui a dépensé beaucoup d'énergie pour développer un outil informatique convivial de visualisation de champs de pression et d'autres résultats.

Je remercie Anne Marie Collin, pour son soutien logistique, Jean Michel et Christelle Dumont pour leur facilité à sauver le cyber-univers et tous les trois pour leur disponibilité et leur bonne humeur.

Je ne peux terminer ces quelques lignes sans adresser des remerciements particuliers à mon équipe de relecteurs qui, au risque d'y perdre son français, a osé s'attaquer à la correction du manuscrit : Dédé, Maman, Nelly, Papa, Pauline et Ton.

Enfin je souhaite une longue et trépidante vie à la non officielle F.I.S.A.L. (Fédération Internationale de Sport et autres Activités de Laboratoire).

Je dédie ce travail à ma Famille.

# Table des matières

Introduction         5           1.1         Préambule         5           1.1.1         Mécanique         5           1.1.2         Tribologie         6           1.1.3         Lubrification         7           1.2         Contexte et enjeux industriels         8           2         Evolution de l'ElastoHydroDynamique (EHD)         10           2.1         Introduction         10           2.2         Ecollement visqueux en film mince         10           2.2.1         Paliers et roulements         10           2.2.2         Modélisation par l'équation de Reynolds         10           2.3         Influence des fortes pressions         11           2.3.2         Propriétés du lubrification EHD         11           2.4         Modélisation de la lubrification EHD         11           2.5         Validation expérimentale         12           2.6         Techniques numériques de résolution         13           2.7.2         Dynamique des contacts         14           2.8.1         Coefficient de frottement         14           2.8.2         Courbe de Stribeck         15           2.9         Durée de vie         16           2.10	N	otatio	ons	1
1.1       Préambule       5         1.1.1       Mécanique       5         1.1.2       Tribologie       6         1.1.3       Lubrification       7         1.2       Contexte et enjeux industriels       8         2       Evolution de l'ElastoHydroDynamique (EHD)       10         2.1       Introduction       10         2.2       Ecoulement visqueux en film mince       10         2.2.1       Paliers et roulements       10         2.2.2       Modélisation par l'équation de Reynolds       10         2.3       Influence des fortes pressions       11         2.3.1       Déformations élastiques       11         2.3.2       Propriétés du lubrification EHD       11         2.4       Modélisation de la lubrification EHD       11         2.5       Validation expérimentale       12         2.6       Techniques numériques de résolution       13         2.7.2       Dynamique des contacts       14         2.8.1       Coefficient de frottement       14         2.8.2       Courbe de Stribeck       15         2.9       Durée de vie       16         2.10       Suesalimentation en lubrifiant       17      <	1	Intr	oduction	<b>5</b>
1.1.1       Mécanique       5         1.1.2       Tribologie       6         1.1.3       Lubrification       7         1.2       Contexte et enjeux industriels       8         2       Evolution de l'ElastoHydroDynamique (EHD)       10         2.1       Introduction       10         2.2       Ecoulement visqueux en film mince       10         2.2.1       Paliers et roulements       10         2.2.2       Modélisation par l'équation de Reynolds       10         2.3.1       Déformations élastiques       11         2.3.2       Modélisation par l'équation de Reynolds       10         2.3.3       Déformations élastiques       11         2.3.4       Modélisation de la lubrification EHD       11         2.4       Modélisation de la lubrification EHD       11         2.5       Validation expérimentale       12         2.6       Techniques numériques de résolution       13         2.7.1       Rugosités en contact lubrifié       13         2.7.2       Dynamique des contacts       14         2.8       Fortement       14         2.8.1       Coefficient de frottement       14         2.8.2       Courbe de Stribeck		1.1	Préambule	5
1.1.2       Tribologie       6         1.1.3       Lubrification       7         1.2       Contexte et enjeux industriels       8         2       Evolution de l'ElastoHydroDynamique (EHD)       10         2.1       Introduction       10         2.2       Ecoulement visqueux en film mince       10         2.2.1       Paliers et roulements       10         2.2.2       Modélisation par l'équation de Reynolds       10         2.3.1       Influence des fortes pressions       11         2.3.2       Propriétés du lubrifiant       11         2.3.2       Propriétés du lubrifiant       11         2.4       Modélisation get résolution       13         2.7       Phénomènes transitoires       13         2.7.1       Rugosités en contact lubrifié       13         2.7.2       Dynamique des contacts       14         2.8       Frottement       14         2.8.1       Coefficient de frottement       14         2.8.2       Courbe de Stribeck       15         2.9       Durée de vie       16         2.10       Sous-alimentation en lubrifiant       17         2.10.1       Observations expérimentales       17			1.1.1 Mécanique	5
1.1.3       Lubrification       7         1.2       Contexte et enjeux industriels       8         2       Evolution de l'ElastoHydroDynamique (EHD)       10         2.1       Introduction       10         2.2       Ecoulement visqueux en film mince       10         2.2.1       Paliers et roulements       10         2.2.1       Paliers et roulements       10         2.2.1       Modélisation par l'équation de Reynolds       10         2.3       Influence des fortes pressions       11         2.3.1       Déformations élastiques       11         2.3.2       Propriétés du lubrifiant       11         2.4       Modélisation de la lubrificion EHD       11         2.5       Validation expérimentale       12         2.6       Techniques numériques de résolution       13         2.7       Phénomènes transitoires       13         2.7.1       Rugosités en contact lubrifié       13         2.7.2       Dynamique des contacts       14         2.8       Frottement       14         2.8.1       Coefficient de frottement       14         2.8.2       Courbe de Stribeck       15         2.9       Durée de vie       17 <td></td> <td></td> <td>1.1.2 Tribologie</td> <td>6</td>			1.1.2 Tribologie	6
1.2       Contexte et enjeux industriels       8         2       Evolution de l'ElastoHydroDynamique (EHD)       10         2.1       Introduction       10         2.2       Ecoulement visqueux en film mince       10         2.2.1       Paliers et roulements       10         2.2.2       Modélisation par l'équation de Reynolds       10         2.3.1       Déformations élastiques       11         2.3.2       Modélisation de la lubrificant       11         2.4       Modélisation de la lubrification EHD       11         2.5       Validation expérimentale       12         2.6       Techniques numériques de résolution       13         2.7.1       Rugosités en contact lubrifié       13         2.7.2       Dynamique des contacts       14         2.8.1       Coefficient de frottement       14         2.8.2       Courbe de Stribeck       15         2.9       Durée de vie       16         2.10       Observations expérimentales       17         2.10.2       Contacts graissés       21         2.10       Durée de vie       15         2.9       Durée de vie       16         2.10       Dose-alimentation en lubrifiant			1.1.3 Lubrification	$\overline{7}$
2       Evolution de l'ElastoHydroDynamique (EHD)       10         2.1       Introduction       10         2.2       Ecoulement visqueux en film mince       10         2.2.1       Paliers et roulements       10         2.2.2       Modélisation par l'équation de Reynolds       10         2.3.1       Déformations élastiques       11         2.3.2       Modélisation de la lubrification EHD       11         2.3.1       Déformations élastiques       11         2.3.2       Fropriétés du lubrification EHD       11         2.4       Modélisation de la lubrification EHD       11         2.5       Validation expérimentale       12         2.6       Techniques numériques de résolution       13         2.7.1       Rugosités en contact lubrifié       13         2.7.2       Dynamique des contacts       14         2.8       Frottement       14         2.8.1       Coefficient de frottement       14         2.8.2       Courbe de Stribeck       15         2.9       Durée de vie       17         2.10.1       Observations expérimentales       17         2.10.2       Contacts graissés       21         2.10.3       Modélisation de		1.2	Contexte et enjeux industriels	8
2.1       Introduction       10         2.2       Ecoulement visqueux en film mince       10         2.2.1       Paliers et roulements       10         2.2.2       Modélisation par l'équation de Reynolds       10         2.3       Influence des fortes pressions       11         2.3.1       Déformations élastiques       11         2.3.2       Propriétés du lubrifiant       11         2.4       Modélisation de la lubrification EHD       11         2.5       Validation expérimentale       12         2.6       Techniques numériques de résolution       13         2.7       Phénomènes transitoires       13         2.7.2       Dynamique des contact       14         2.8       Frottement       14         2.8.1       Coefficient de frottement       14         2.8.2       Courbe de Stribeck       15         2.9       Durée de vie       16         2.10.1       Observations expérimentales       17         2.10.2       Contacts graissés       21         2.10.3       Modélisation de la sous-alimentation       23         2.11       Conclusion       24         3       Modélisation de la lubrification       26	<b>2</b>	Evo	lution de l'ElastoHydroDynamique (EHD)	10
2.2       Ecoulement visqueux en film mince       10         2.2.1       Paliers et roulements       10         2.2.2       Modélisation par l'équation de Reynolds       10         2.3       Influence des fortes pressions       11         2.3.1       Déformations élastiques       11         2.3.2       Propriétés du lubrifiant       11         2.4       Modélisation de la lubrification EHD       11         2.5       Validation expérimentale       12         2.6       Techniques numériques de résolution       13         2.7.1       Rugosités en contact lubrifié       13         2.7.2       Dynamique des contacts       14         2.8       Frottement       14         2.8.1       Coefficient de frottement       14         2.8.2       Courbe de Stribeck       15         2.9       Durée de vie       16         2.10       Sous-alimentation en lubrifiant       17         2.10.2       Contacts graissés       21         2.10.3       Modélisation de la sous-alimentation       23         2.11       Conclusion       24         3       Modélisation de la lubrification       26         3.1       Introduction <td< td=""><td></td><td>2.1</td><td>Introduction</td><td>10</td></td<>		2.1	Introduction	10
2.2.1       Paliers et roulements       10         2.2.2       Modélisation par l'équation de Reynolds       10         2.3       Influence des fortes pressions       11         2.3.1       Déformations élastiques       11         2.3.2       Propriétés du lubrification       11         2.3.2       Propriétés du lubrification EHD       11         2.4       Modélisation de la lubrification EHD       11         2.5       Validation expérimentale       12         2.6       Techniques numériques de résolution       13         2.7       Phénomènes transitoires       13         2.7.1       Rugosités en contact lubrifié       13         2.7.2       Dynamique des contacts       14         2.8       Frottement       14         2.8.1       Coefficient de frottement       14         2.8.2       Courbe de Stribeck       15         2.9       Durée de vie       17         2.10.1       Observations expérimentales       17         2.10.2       Contacts graissés       21         2.10.3       Modélisation de la sous-alimentation       23         2.11       Contacts graissés       21         2.10.3       Modélisation de la lubr		2.2	Ecoulement visqueux en film mince	10
2.2.2       Modélisation par l'équation de Reynolds       10         2.3       Influence des fortes pressions       11         2.3.1       Déformations élastiques       11         2.3.2       Propriétés du lubrifiant       11         2.3.2       Propriétés du lubrifiant       11         2.4       Modélisation de la lubrification EHD       11         2.5       Validation expérimentale       12         2.6       Techniques numériques de résolution       13         2.7.1       Rugosités en contact lubrifié       13         2.7.2       Dynamique des contacts       14         2.8       Frottement       14         2.8.1       Coefficient de frottement       14         2.8.2       Courbe de Stribeck       15         2.9       Durée de vie       16         2.10       Observations expérimentales       17         2.10.1       Observations expérimentales       21         2.10.2       Contacts graissés       21         2.10.3       Modélisation de la sous-alimentation       23         2.11       Conclusion       26         3.1       Introduction       26         3.2.1       Géométrie des corps en contact       2			2.2.1 Paliers et roulements	10
2.3       Influence des fortes pressions       11         2.3.1       Déformations élastiques       11         2.3.2       Propriétés du lubrifiant       11         2.3.2       Propriétés du lubrification EHD       11         2.4       Modélisation de la lubrification EHD       11         2.5       Validation expérimentale       12         2.6       Techniques numériques de résolution       13         2.7       Phénomènes transitoires       13         2.7.1       Rugosités en contact lubrifié       13         2.7.2       Dynamique des contacts       14         2.8       Frottement       14         2.8.1       Coefficient de frottement       14         2.8.2       Courbe de Stribeck       15         2.9       Durée de vie       16         2.10       Sous-alimentation en lubrifiant       17         2.10.2       Contacts graissés       21         2.10.3       Modélisation de la sous-alimentation       23         2.11       Conclusion       26         3.2       Contact sec, théorie de Hertz       26         3.2.1       Géométrie des corps en contact       26         3.2.2       Elasticité       27			2.2.2 Modélisation par l'équation de Reynolds	10
2.3.1       Déformations élastiques       11         2.3.2       Propriétés du lubrifiant       11         2.4       Modélisation de la lubrification EHD       11         2.5       Validation expérimentale       12         2.6       Techniques numériques de résolution       13         2.7       Phénomènes transitoires       13         2.7.1       Rugosités en contact lubrifié       13         2.7.2       Dynamique des contacts       14         2.8       Frottement       14         2.8.1       Coefficient de frottement       14         2.8.2       Courbe de Stribeck       15         2.9       Durée de vie       16         2.10       Sous-alimentation en lubrifiant       17         2.10.1       Observations expérimentales       21         2.10.2       Contacts graissés       21         2.10.3       Modélisation de la sous-alimentation       23         2.11       Conclusion       26         3.2       Contact sec, théorie de Hertz       26         3.2.1       Géométrie des corps en contact       26         3.2.2       Elasticité       27         3.2.3       Equation d'équilibre       28		2.3	Influence des fortes pressions	11
2.3.2       Propriétés du lubrifiant       11         2.4       Modélisation de la lubrification EHD       11         2.5       Validation expérimentale       12         2.6       Techniques numériques de résolution       13         2.7       Phénomènes transitoires       13         2.7.1       Rugosités en contact lubrifié       13         2.7.2       Dynamique des contacts       14         2.8       Frottement       14         2.8.1       Coefficient de frottement       14         2.8.2       Courbe de Stribeck       15         2.9       Durée de vie       16         2.10       Sous-alimentation en lubrifiant       17         2.10.1       Observations expérimentales       21         2.10.2       Contacts graissés       21         2.10.3       Modélisation de la sous-alimentation       23         2.11       Conclusion       26         3.2       Contact sec, théorie de Hertz       26         3.2.1       Géométrie des corps en contact       26         3.2.2       Elasticité       27         3.2.3       Equation d'équilibre       28			2.3.1 Déformations élastiques	11
2.4       Modélisation de la lubrification EHD       11         2.5       Validation expérimentale       12         2.6       Techniques numériques de résolution       13         2.7       Phénomènes transitoires       13         2.7.1       Rugosités en contact lubrifié       13         2.7.2       Dynamique des contacts       14         2.8       Frottement       14         2.8.1       Coefficient de frottement       14         2.8.2       Courbe de Stribeck       15         2.9       Durée de vie       15         2.9       Durée de vie       17         2.10.1       Observations expérimentales       17         2.10.2       Contacts graissés       21         2.10.3       Modélisation de la sous-alimentation       23         2.11       Conclusion       24         3       Modélisation de la lubrification       26         3.2.1       Géométrie des corps en contact       26         3.2.2       Elasticité       27         3.2.3       Equation d'équilibre       28			2.3.2 Propriétés du lubrifiant	11
2.5       Validation expérimentale       12         2.6       Techniques numériques de résolution       13         2.7       Phénomènes transitoires       13         2.7.1       Rugosités en contact lubrifié       13         2.7.2       Dynamique des contacts       14         2.8       Frottement       14         2.8.1       Coefficient de frottement       14         2.8.2       Courbe de Stribeck       15         2.9       Durée de vie       15         2.9       Durée de vie       16         2.10       Sous-alimentation en lubrifiant       17         2.10.1       Observations expérimentales       21         2.10.2       Contacts graissés       21         2.10.3       Modélisation de la sous-alimentation       23         2.11       Conclusion       24         3       Modélisation de la lubrification       26         3.2       Contact sec, théorie de Hertz       26         3.2.1       Géométrie des corps en contact       26         3.2.2       Elasticité       27         3.2.3       Equation d'équilibre       28		2.4	Modélisation de la lubrification EHD	11
2.6       Techniques numériques de résolution       13         2.7       Phénomènes transitoires       13         2.7.1       Rugosités en contact lubrifié       13         2.7.2       Dynamique des contacts       14         2.8       Frottement       14         2.8.1       Coefficient de frottement       14         2.8.2       Courbe de Stribeck       15         2.9       Durée de vie       16         2.10       Sous-alimentation en lubrifiant       17         2.10.1       Observations expérimentales       21         2.10.2       Contacts graissés       21         2.11       Conclusion       24         3       Modélisation de la lubrification       26         3.1       Introduction       26         3.2.1       Géométrie des corps en contact       26         3.2.1       Géométrie des corps en contact       26         3.2.2       Elasticité       27         3.3       Equation d'équilibre       28		2.5	Validation expérimentale	12
2.7       Phénomènes transitoires       13         2.7.1       Rugosités en contact lubrifié       13         2.7.2       Dynamique des contacts       14         2.8       Frottement       14         2.8.1       Coefficient de frottement       14         2.8.2       Courbe de Stribeck       15         2.9       Durée de vie       16         2.10       Sous-alimentation en lubrifiant       17         2.10.1       Observations expérimentales       17         2.10.2       Contacts graissés       21         2.10.3       Modélisation de la sous-alimentation       23         2.11       Conclusion       24         3       Modélisation de la lubrification       26         3.2.1       Introduction       26         3.2.1       Géométrie des corps en contact       26         3.2.2       Elasticité       27         3.2.3       Equation d'équilibre       28		2.6	Techniques numériques de résolution	13
2.7.1       Rugosités en contact lubrifié       13         2.7.2       Dynamique des contacts       14         2.8       Frottement       14         2.8.1       Coefficient de frottement       14         2.8.2       Courbe de Stribeck       15         2.9       Durée de vie       16         2.10       Sous-alimentation en lubrifiant       17         2.10.1       Observations expérimentales       17         2.10.2       Contacts graissés       21         2.10.3       Modélisation de la sous-alimentation       23         2.11       Conclusion       24         3       Modélisation de la lubrification       26         3.2       Contact sec, théorie de Hertz       26         3.2.1       Géométrie des corps en contact       26         3.2.2       Elasticité       27         3.2.3       Equation d'équilibre       28		2.7	Phénomènes transitoires	13
2.7.2       Dynamique des contacts       14         2.8       Frottement       14         2.8.1       Coefficient de frottement       14         2.8.2       Courbe de Stribeck       15         2.9       Durée de vie       16         2.10       Sous-alimentation en lubrifiant       17         2.10.1       Observations expérimentales       17         2.10.2       Contacts graissés       21         2.10.3       Modélisation de la sous-alimentation       23         2.11       Conclusion       24         3       Modélisation de la lubrification       26         3.2       Contact sec, théorie de Hertz       26         3.2.1       Géométrie des corps en contact       26         3.2.2       Elasticité       27         3.2.3       Equation d'équilibre       27			2.7.1 Rugosités en contact lubrifié	13
2.8       Frottement       14         2.8.1       Coefficient de frottement       14         2.8.2       Courbe de Stribeck       15         2.9       Durée de vie       16         2.10       Sous-alimentation en lubrifiant       17         2.10.1       Observations expérimentales       17         2.10.2       Contacts graissés       21         2.10.3       Modélisation de la sous-alimentation       23         2.11       Conclusion       24         3       Modélisation de la lubrification       26         3.2       Contact sec, théorie de Hertz       26         3.2.1       Géométrie des corps en contact       26         3.2.2       Elasticité       27         3.2.3       Equation d'équilibre       28			2.7.2 Dynamique des contacts	14
2.8.1       Coefficient de frottement       14         2.8.2       Courbe de Stribeck       15         2.9       Durée de vie       16         2.10       Sous-alimentation en lubrifiant       17         2.10.1       Observations expérimentales       17         2.10.2       Contacts graissés       17         2.10.3       Modélisation de la sous-alimentation       23         2.11       Conclusion       24         3       Modélisation de la lubrification       26         3.2       Contact sec, théorie de Hertz       26         3.2.1       Géométrie des corps en contact       26         3.2.2       Elasticité       27         3.2.3       Equation d'équilibre       28		2.8	Frottement	14
2.8.2       Courbe de Stribeck       15         2.9       Durée de vie       16         2.10       Sous-alimentation en lubrifiant       17         2.10.1       Observations expérimentales       17         2.10.2       Contacts graissés       21         2.10.3       Modélisation de la sous-alimentation       23         2.11       Conclusion       24         3       Modélisation de la lubrification       26         3.1       Introduction       26         3.2       Contact sec, théorie de Hertz       26         3.2.1       Géométrie des corps en contact       26         3.2.2       Elasticité       27         3.2.3       Equation d'équilibre       28			2.8.1 Coefficient de frottement	14
2.9       Durée de vie			2.8.2 Courbe de Stribeck	15
2.10       Sous-alimentation en lubrifiant       17         2.10.1       Observations expérimentales       17         2.10.2       Contacts graissés       21         2.10.3       Modélisation de la sous-alimentation       23         2.11       Conclusion       23         2.11       Conclusion       24         3       Modélisation de la lubrification       26         3.1       Introduction       26         3.2       Contact sec, théorie de Hertz       26         3.2.1       Géométrie des corps en contact       26         3.2.2       Elasticité       26         3.2.3       Equation d'équilibre       26		2.9	Durée de vie	16
2.10.1       Observations expérimentales       17         2.10.2       Contacts graissés       21         2.10.3       Modélisation de la sous-alimentation       23         2.11       Conclusion       23         3       Modélisation de la lubrification       26         3.1       Introduction       26         3.2       Contact sec, théorie de Hertz       26         3.2.1       Géométrie des corps en contact       26         3.2.2       Elasticité       27         3.2.3       Equation d'équilibre       27		2.10	Sous-alimentation en lubrifiant	17
2.10.2 Contacts graissés       21         2.10.3 Modélisation de la sous-alimentation       23         2.11 Conclusion       24         3 Modélisation de la lubrification       26         3.1 Introduction       26         3.2 Contact sec, théorie de Hertz       26         3.2.1 Géométrie des corps en contact       26         3.2.2 Elasticité       27         3.2.3 Equation d'équilibre       28			2.10.1 Observations expérimentales	17
2.10.3 Modélisation de la sous-alimentation       23         2.11 Conclusion       24         3 Modélisation de la lubrification       26         3.1 Introduction       26         3.2 Contact sec, théorie de Hertz       26         3.2.1 Géométrie des corps en contact       26         3.2.2 Elasticité       27         3.2.3 Equation d'équilibre       28			2.10.2 Contacts graissés	21
2.11 Conclusion       24         3 Modélisation de la lubrification       26         3.1 Introduction       26         3.2 Contact sec, théorie de Hertz       26         3.2.1 Géométrie des corps en contact       26         3.2.2 Elasticité       26         3.2.3 Equation d'équilibre       27         3.2.4 Elasticité       28			2.10.3 Modélisation de la sous-alimentation	23
3 Modélisation de la lubrification       26         3.1 Introduction       26         3.2 Contact sec, théorie de Hertz       26         3.2.1 Géométrie des corps en contact       26         3.2.2 Elasticité       27         3.2.3 Equation d'équilibre       28		2.11	Conclusion	24
3.1       Introduction       26         3.2       Contact sec, théorie de Hertz       26         3.2.1       Géométrie des corps en contact       26         3.2.2       Elasticité       26         3.2.3       Equation d'équilibre       27         3.2.4       Géométrie       28	3	Mod	délisation de la lubrification	26
3.2       Contact sec, théorie de Hertz       26         3.2.1       Géométrie des corps en contact       26         3.2.2       Elasticité       27         3.2.3       Equation d'équilibre       28	0	3.1	Introduction	- °
3.2.1       Géométrie des corps en contact       26         3.2.2       Elasticité       27         3.2.3       Equation d'équilibre       28		3.2	Contact sec. théorie de Hertz	26
3.2.2       Elasticité       27         3.2.3       Equation d'équilibre       28		0.4	3.2.1 Géométrie des corps en contact	26
3.2.2       Endstorte       21         3.2.3       Equation d'équilibre       28			322 Elasticité	$\frac{20}{27}$
			3.2.3 Equation d'équilibre	28
3.2.4 Solution du problème de Hertz 98			3.2.4 Solution du problème de Hertz	20

	3.3	Lubrification élastohydrodynamique	29
		3.3.1 Equation de Reynolds en régime élastohydrodynamique	29
		3.3.2 Loi de compressibilité	30
		3.3.3 Loi de piezo-viscosité	30
	3.4	Lubrification sous-alimentée	31
		3.4.1 Equation de Reynolds modifiée	32
	3.5	Adimensionnement du problème EHD	34
		3.5.1 Les variables	34
		3.5.2 Les équations	35
		3.5.3 Les paramètres	36
		3.5.4 Conclusion : mise en équations du problème EHD	37
4	$\mathbf{R}$ és	solution, techniques Multigrilles	38
	4.1	Introduction	38
	4.2	Techniques multigrilles et "ML-MI"	39
		4.2.1 Principe des multigrilles	39
		4.2.2 Maillage, structure des grilles et changements de grilles	40
		4.2.3 Principe de l'intégration rapide "ML-MI"	43
	4.3	Application des multigrilles au problème EHD	46
		4.3.1 Equations discrètes	47
		4.3.2 Relaxation de l'équation de Reynolds	48
		4.3.3 Résolution de l'équation d'équilibre des forces	53
		4.3.4 Algorithme de résolution	53
		4.3.5 Vitesse de convergence	54
		4.3.6 Précision de la solution	55
		4.3.7 Validation du code de calcul	56
	4.4	Conclusion	60
<b>5</b>	Phy	ysique de l'éjection de lubrifiant	61
5	<b>Phy</b> 5.1	ysique de l'éjection de lubrifiant Introduction	<b>61</b> 61
5	<b>Phy</b> 5.1 5.2	ysique de l'éjection de lubrifiant Introduction	<b>61</b> 61 61
5	Phy 5.1 5.2 5.3	ysique de l'éjection de lubrifiant Introduction	<b>61</b> 61 61 67
5	<b>Phy</b> 5.1 5.2 5.3	ysique de l'éjection de lubrifiantIntroductionPrédiction d'épaisseur de film en contact sous-alimentéPrédiction du paramètre $\gamma_c$ 5.3.1Prédiction d'épaisseur de film, théorie de Grübin modifiée	<b>61</b> 61 61 67 67
5	Phy 5.1 5.2 5.3	ysique de l'éjection de lubrifiantIntroductionPrédiction d'épaisseur de film en contact sous-alimentéPrédiction du paramètre $\gamma_c$ 5.3.1Prédiction d'épaisseur de film, théorie de Grübin modifiée5.3.2Théorie de Grübin modifiée : longueur d'entrée sur-alimentée $S_{ff}$	<b>61</b> 61 67 67 69
5	<b>Phy</b> 5.1 5.2 5.3	ysique de l'éjection de lubrifiantIntroductionPrédiction d'épaisseur de film en contact sous-alimentéPrédiction du paramètre $\gamma_c$ 5.3.1Prédiction d'épaisseur de film, théorie de Grübin modifiée5.3.2Théorie de Grübin modifiée : longueur d'entrée sur-alimentée $S_{ff}$ 5.3.3Ejection à l'entrée d'un contact sous-alimenté	<b>61</b> 61 67 67 69 71
5	<b>Phy</b> 5.1 5.2 5.3	ysique de l'éjection de lubrifiantIntroductionPrédiction d'épaisseur de film en contact sous-alimentéPrédiction du paramètre $\gamma_c$ 5.3.1Prédiction d'épaisseur de film, théorie de Grübin modifiée5.3.2Théorie de Grübin modifiée : longueur d'entrée sur-alimentée $S_{ff}$ 5.3.3Ejection à l'entrée d'un contact sous-alimenté5.3.4Prédiction du paramètre $\gamma_c$	<b>61</b> 61 67 67 69 71 73
5	<b>Phy</b> 5.1 5.2 5.3	ysique de l'éjection de lubrifiantIntroductionPrédiction d'épaisseur de film en contact sous-alimentéPrédiction du paramètre $\gamma_c$ 5.3.1Prédiction d'épaisseur de film, théorie de Grübin modifiée5.3.2Théorie de Grübin modifiée : longueur d'entrée sur-alimentée $S_{ff}$ 5.3.3Ejection à l'entrée d'un contact sous-alimenté5.3.4Prédiction du paramètre $\gamma_c$ 5.3.5Discussion	<b>61</b> 61 67 67 69 71 73 75
5	Phy 5.1 5.2 5.3	ysique de l'éjection de lubrifiantIntroductionPrédiction d'épaisseur de film en contact sous-alimentéPrédiction du paramètre $\gamma_c$ 5.3.1Prédiction d'épaisseur de film, théorie de Grübin modifiée5.3.2Théorie de Grübin modifiée : longueur d'entrée sur-alimentée $S_{ff}$ 5.3.3Ejection à l'entrée d'un contact sous-alimenté5.3.4Prédiction du paramètre $\gamma_c$ 5.3.5Discussion5.3.6Ejection circonférentielle du lubrifiant à la sortie du contact	<b>61</b> 61 67 67 69 71 73 75 75
5	Phy 5.1 5.2 5.3	ysique de l'éjection de lubrifiantIntroductionPrédiction d'épaisseur de film en contact sous-alimentéPrédiction du paramètre $\gamma_c$ S.3.1Prédiction d'épaisseur de film, théorie de Grübin modifiée5.3.2Théorie de Grübin modifiée : longueur d'entrée sur-alimentée $S_{ff}$ S.3.3Ejection à l'entrée d'un contact sous-alimentéS.3.4Prédiction du paramètre $\gamma_c$ S.3.5DiscussionS.3.6Ejection circonférentielle du lubrifiant à la sortie du contactS.3.7Ejection globale au cours d'un passage caractérisée par le paramètre $\gamma$	<b>61</b> 61 67 67 69 71 73 75 75 78
5	<b>Phy</b> 5.1 5.2 5.3	ysique de l'éjection de lubrifiantIntroductionPrédiction d'épaisseur de film en contact sous-alimentéPrédiction du paramètre $\gamma_c$ 5.3.1Prédiction d'épaisseur de film, théorie de Grübin modifiée5.3.2Théorie de Grübin modifiée : longueur d'entrée sur-alimentée $S_{ff}$ 5.3.3Ejection à l'entrée d'un contact sous-alimenté5.3.4Prédiction du paramètre $\gamma_c$ 5.3.5Discussion5.3.6Ejection circonférentielle du lubrifiant à la sortie du contact5.3.7Ejection globale au cours d'un passage caractérisée par le paramètre $\gamma$ Passages successifs	<ul> <li>61</li> <li>61</li> <li>67</li> <li>67</li> <li>69</li> <li>71</li> <li>73</li> <li>75</li> <li>75</li> <li>78</li> <li>79</li> </ul>
5	<b>Phy</b> 5.1 5.2 5.3 5.4 5.5	ysique de l'éjection de lubrifiantIntroductionPrédiction d'épaisseur de film en contact sous-alimentéPrédiction du paramètre $\gamma_c$ 5.3.1Prédiction d'épaisseur de film, théorie de Grübin modifiée5.3.2Théorie de Grübin modifiée : longueur d'entrée sur-alimentée $S_{ff}$ 5.3.3Ejection à l'entrée d'un contact sous-alimenté5.3.4Prédiction du paramètre $\gamma_c$ 5.3.5Discussion5.3.6Ejection circonférentielle du lubrifiant à la sortie du contact5.3.7Ejection globale au cours d'un passage caractérisée par le paramètre $\gamma$ Passages successifsPrécision des résultats numériques	<ul> <li>61</li> <li>61</li> <li>67</li> <li>67</li> <li>69</li> <li>71</li> <li>73</li> <li>75</li> <li>75</li> <li>78</li> <li>79</li> <li>82</li> </ul>
5	<b>Phy</b> 5.1 5.2 5.3 5.4 5.5	ysique de l'éjection de lubrifiantIntroductionPrédiction d'épaisseur de film en contact sous-alimentéPrédiction du paramètre $\gamma_c$ 5.3.1Prédiction d'épaisseur de film, théorie de Grübin modifiée5.3.2Théorie de Grübin modifiée : longueur d'entrée sur-alimentée $S_{ff}$ 5.3.3Ejection à l'entrée d'un contact sous-alimenté5.3.4Prédiction du paramètre $\gamma_c$ 5.3.5Discussion5.3.6Ejection circonférentielle du lubrifiant à la sortie du contact5.3.7Ejection globale au cours d'un passage caractérisée par le paramètre $\gamma$ Précision des résultats numériques5.3.1Influence du domaine de calcul $\overline{\Omega}$ sur l'épaisseur de film sur-alimentée	<ul> <li>61</li> <li>61</li> <li>67</li> <li>67</li> <li>69</li> <li>71</li> <li>73</li> <li>75</li> <li>75</li> <li>78</li> <li>79</li> <li>82</li> <li>82</li> </ul>
5	<b>Phy</b> 5.1 5.2 5.3 5.4 5.5	ysique de l'éjection de lubrifiantIntroductionPrédiction d'épaisseur de film en contact sous-alimentéPrédiction du paramètre $\gamma_c$ 5.3.1Prédiction d'épaisseur de film, théorie de Grübin modifiée5.3.2Théorie de Grübin modifiée : longueur d'entrée sur-alimentée $S_{ff}$ 5.3.3Ejection à l'entrée d'un contact sous-alimenté5.3.4Prédiction du paramètre $\gamma_c$ 5.3.5Discussion5.3.6Ejection circonférentielle du lubrifiant à la sortie du contact5.3.7Ejection globale au cours d'un passage caractérisée par le paramètre $\gamma$ Précision des résultats numériques5.5.1Influence du domaine de calcul $\overline{\Omega}$ sur l'épaisseur de film sur-alimentée5.2Finesse de la discrétisation	<ul> <li>61</li> <li>61</li> <li>67</li> <li>67</li> <li>69</li> <li>71</li> <li>73</li> <li>75</li> <li>75</li> <li>78</li> <li>79</li> <li>82</li> <li>82</li> <li>82</li> </ul>
5	<b>Phy</b> 5.1 5.2 5.3 5.4 5.5	ysique de l'éjection de lubrifiantIntroductionPrédiction d'épaisseur de film en contact sous-alimentéPrédiction du paramètre $\gamma_c$ 5.3.1Prédiction d'épaisseur de film, théorie de Grübin modifiée5.3.2Théorie de Grübin modifiée : longueur d'entrée sur-alimentée $S_{ff}$ 5.3.3Ejection à l'entrée d'un contact sous-alimenté5.3.4Prédiction du paramètre $\gamma_c$ 5.3.5Discussion5.3.6Ejection circonférentielle du lubrifiant à la sortie du contact5.3.7Ejection globale au cours d'un passage caractérisée par le paramètre $\gamma$ Passages successifs5.5.1Influence du domaine de calcul $\overline{\Omega}$ sur l'épaisseur de film sur-alimentée5.5.2Finesse de la discrétisation5.5.3Analyse de la précision de $\gamma_c$ et $\gamma$	<ul> <li>61</li> <li>61</li> <li>67</li> <li>67</li> <li>69</li> <li>71</li> <li>73</li> <li>75</li> <li>78</li> <li>79</li> <li>82</li> <li>82</li> <li>82</li> <li>84</li> </ul>
5	<b>Phy</b> 5.1 5.2 5.3 5.4 5.5 5.6	ysique de l'éjection de lubrifiantIntroductionPrédiction d'épaisseur de film en contact sous-alimentéPrédiction du paramètre $\gamma_c$ 5.3.1Prédiction d'épaisseur de film, théorie de Grübin modifiée5.3.2Théorie de Grübin modifiée : longueur d'entrée sur-alimentée $S_{ff}$ 5.3.3Ejection à l'entrée d'un contact sous-alimenté5.3.4Prédiction du paramètre $\gamma_c$ 5.3.5Discussion5.3.6Ejection circonférentielle du lubrifiant à la sortie du contact5.3.7Ejection globale au cours d'un passage caractérisée par le paramètre $\gamma$ Passages successifs5.5.1Influence du domaine de calcul $\overline{\Omega}$ sur l'épaisseur de film sur-alimentée5.5.2Finesse de la discrétisation5.5.3Analyse de la précision de $\gamma_c$ et $\gamma$ Sensibilité à la sous-alimentation locale	<b>61</b> 61 67 67 69 71 73 75 75 78 78 82 82 82 82 82 82 82 82 82
5	<b>Phy</b> 5.1 5.2 5.3 5.4 5.5 5.6	ysique de l'éjection de lubrifiantIntroductionPrédiction d'épaisseur de film en contact sous-alimentéPrédiction du paramètre $\gamma_c$ 5.3.1Prédiction d'épaisseur de film, théorie de Grübin modifiée5.3.2Théorie de Grübin modifiée : longueur d'entrée sur-alimentée $S_{ff}$ 5.3.3Ejection à l'entrée d'un contact sous-alimenté5.3.4Prédiction du paramètre $\gamma_c$ 5.3.5Discussion5.3.6Ejection circonférentielle du lubrifiant à la sortie du contact5.3.7Ejection globale au cours d'un passage caractérisée par le paramètre $\gamma$ Passages successifs5.5.1Influence du domaine de calcul $\overline{\Omega}$ sur l'épaisseur de film sur-alimentée5.5.2Finesse de la discrétisation5.5.3Analyse de la précision de $\gamma_c$ et $\gamma$ Sensibilité à la sous-alimentation locale5.6.1Conditions d'alimentation	<b>61</b> 61 67 69 71 73 75 75 78 79 82 82 82 82 82 82 84 87 88
5	<b>Phy</b> 5.1 5.2 5.3 5.4 5.5 5.6	ysique de l'éjection de lubrifiantIntroductionPrédiction d'épaisseur de film en contact sous-alimentéPrédiction du paramètre $\gamma_c$ 5.3.1Prédiction d'épaisseur de film, théorie de Grübin modifiée5.3.2Théorie de Grübin modifiée : longueur d'entrée sur-alimentée $S_{ff}$ 5.3.3Ejection à l'entrée d'un contact sous-alimenté5.3.4Prédiction du paramètre $\gamma_c$ 5.3.5Discussion5.3.6Ejection circonférentielle du lubrifiant à la sortie du contact5.3.7Ejection globale au cours d'un passage caractérisée par le paramètre $\gamma$ Passages successifs5.5.1Influence du domaine de calcul $\overline{\Omega}$ sur l'épaisseur de film sur-alimentée5.5.2Finesse de la discrétisation5.5.3Analyse de la précision de $\gamma_c$ et $\gamma$ Sensibilité à la sous-alimentation locale5.6.2Conclusion sur la sous-alimentation locale	<b>61</b> 61 67 69 71 73 75 75 78 82 82 82 82 82 82 84 87 88 94
5	Phy 5.1 5.2 5.3 5.4 5.5 5.6 5.6	ysique de l'éjection de lubrifiantIntroductionPrédiction d'épaisseur de film en contact sous-alimentéPrédiction du paramètre $\gamma_c$ 5.3.1Prédiction d'épaisseur de film, théorie de Grübin modifiée5.3.2Théorie de Grübin modifiée : longueur d'entrée sur-alimentée $S_{ff}$ 5.3.3Ejection à l'entrée d'un contact sous-alimenté5.3.4Prédiction du paramètre $\gamma_c$ 5.3.5Discussion5.3.6Ejection circonférentielle du lubrifiant à la sortie du contact5.3.7Ejection globale au cours d'un passage caractérisée par le paramètre $\gamma$ Passages successifsPrécision des résultats numériques5.5.1Influence du domaine de calcul $\overline{\Omega}$ sur l'épaisseur de film sur-alimentée5.5.2Finesse de la discrétisation5.5.3Analyse de la précision de $\gamma_c$ et $\gamma$ Sensibilité à la sous-alimentation locale5.6.1Conclusion sur la sous-alimentation localeComparaison des résultats numériques et expérimentaux	<b>61</b> 61 67 67 69 71 73 75 75 78 79 82 82 82 82 82 84 87 88 94 94
5	<b>Phy</b> 5.1 5.2 5.3 5.4 5.5 5.6 5.7	ysique de l'éjection de lubrifiantIntroductionPrédiction d'épaisseur de film en contact sous-alimentéPrédiction du paramètre $\gamma_c$ 5.3.1Prédiction d'épaisseur de film, théorie de Grübin modifiée5.3.2Théorie de Grübin modifiée : longueur d'entrée sur-alimentée $S_{ff}$ 5.3.3Ejection à l'entrée d'un contact sous-alimenté5.3.4Prédiction du paramètre $\gamma_c$ 5.3.5Discussion5.3.6Ejection circonférentielle du lubrifiant à la sortie du contact5.3.7Ejection globale au cours d'un passage caractérisée par le paramètre $\gamma$ Passages successifsS.5.1Influence du domaine de calcul $\overline{\Omega}$ sur l'épaisseur de film sur-alimentée5.5.2Finesse de la discrétisation5.5.3Analyse de la précision de $\gamma_c$ et $\gamma$ Sensibilité à la sous-alimentation locale5.6.1Condutions d'alimentation5.6.2Conclusion sur la sous-alimentation localeComparaison des résultats numériques et expérimentaux5.7.1Comparaison des valeurs de $\gamma$	<b>61</b> 61 67 69 71 73 75 75 78 79 82 82 82 82 82 82 84 87 88 94 94 95

	5.8	Conclusion	98	
Co	Conclusion générale 99			
$\mathbf{A}$	Etu	de expérimentale	103	
	A.1	Introduction	103	
	A.2	Dispositif expérimental	103	
		A.2.1 Principe	103	
		A.2.2 Mode opératoire	105	
		A.2.3 Limites de la machine	107	
		A.2.4 Influence de la longueur des pistes de roulement	108	
	A.3	Influence des cages sur la réalimentation en lubrifiant	110	
		A.3.1 Contact lubrifié avec une huile de base	113	
		A.3.2 Contact lubrifié avec une graisse	114	
		A.3.3 Conclusion sur l'influence des cages	115	
	A.4	Conclusion	115	
в	Lois	de prédiction d'épaisseur de film en régime sur-alimenté	117	
С	Don	nées expérimentales	119	
D	Réa	limentation capillaire	120	
Bi	Bibliographie 12			
Та	Table des figures   1			
Lis	Liste des tableaux 12			
In	$\mathbf{dex}$		130	

# Notations

a	demi-axe d'ellipse de contact dans la direction $\vec{x}$ ,	
	$a = (3 \mathrm{w} R / E')^{1/3} (2 \kappa \mathcal{E} / \pi)^{1/3}$	[m]
$a_1$	demi-largeur de Hertz en contact linéique	[m]
$A_e, A_s$	amplitude des oscillations du profil de lubrifiant	
	à l'entrée et à la sortie du contact	[m]
$A_{ik}^{j}$	matrice de relaxation de la ligne d'indice $j$	[.]
b	demi-axe d'ellipse de contact dans la direction $\vec{y}$ ,	
	$b = a/\kappa = (3\mathrm{w}R/E')^{1/3}(2\kappa\mathcal{E}/\pi)^{1/3}/\kappa$	[m]
cte	constante fonction de $\gamma$ et $n_2/n_1$ dans l'approximation	
	$\mathcal{R}_c = f(n_1) = cte \ n_1^{-1/\gamma}$	[.]
C	couplage adimensionné de la lubrification,	
	il gouverne la réduction d'amplitude des oscillations du profil de lubrifiant	[.]
$dq_e, dq_c$	débit massique à travers une section élémentaire sur la ligne $y = 0$	
	à l'entrée et au centre du contact	$[{\rm kg \ s^{-1}}]$
$dq_l$	débit massique d'éjection circonférentielle	
	dans la couche limite qui entoure le contact	$[{\rm kg \ s^{-1}}]$
dr	réalimentation adimensionnée en lubrifiant	
	entre deux passages successifs du corps roulant	[.]
$dS_e$	surface élémentaire à l'entrée du contact sur la ligne d'équation $y = 0$	$[m^2]$
D	paramètre géométrique, $D = R_x/R_y = \kappa^2 (\mathcal{K} - \mathcal{E})/(\mathcal{E} - \kappa^2 \mathcal{K})$	[.]
$ej_s$	proportion d'éjection intervenant à la sortie du contact	[.]
$\mathcal{E}(m)$	paramètre géométrique, $\mathcal{E}(m) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m^2 \sin^2(\psi)} d\psi$	[.]
E'	module d'Young équivalent, $2/E' = (1 - \nu_1^2)/E_1 + (1 - \nu_2^2)/E_2$	[Pa]
$E_1, E_2$	module d'Young des matériaux des surfaces $1$ et $2$	[Pa]
$ERR(L_1, L_2)$	norme de la différence entre les champs de pression adimensionnés	
	calculés sur les niveaux de discrétisation $L_1$ et $L_2$	[.]
$f_{\perp}$	second membre de l'équation différentielle	[.]
$f^h_{\cdot}$	second membre du problème différentiel discret	[.]
$\hat{f}^H$	second membre du problème différentiel discret	
	transféré sur une grille grossière $\hat{f}^H = \mathcal{L}^H(I_h^H \tilde{u}^h) + I_h^H r^h$	[.]
G	paramètre adimensionné de matériau, $G = \alpha E'$	[.]
h	séparation des surfaces	[m]
h	pas de discrétisation	[m]
$h^*$	épaisseur de film de lubrifiant de Ertel Grübin dans la zone de Hertz	[m]
$h_0$	déplacement de corps solide (permet de résoudre l'équation d'équilibre)	[m]
$h_c$	épaisseur centrale de film de lubrifiant	[m]
$h_{oil}$	épaisseur de la couche d'alimentation en lubrifiant $h_{oil} = h_{oil 1} + h_{oil 2}$	[m]
$h_{oil 1}, h_{oil 2}$	épaisseur de la couche d'alimentation en lubrifiant sur les surfaces 1 et 2	[m]
$h_{oil\ ff}(x,y)$	distribution du lubrifiant en contact sur-alimenté	[m]
$h_{sp}$	épaisseur de la cale optique "spacer layer"	[m]

$h_x, h_y$	pas de discrétisation dans les directions $\vec{x}$ et $\vec{y}$	[m]
H	séparation adimensionnée, $H = h(2R\mathcal{E})/(a^2\mathcal{K})$	[.]
$\hat{H}_0$	déplacement de corps solide adimensionné	[.]
$H_0$	valeur initiale du déplacement de corps solide adimensionné	[.]
$H_0$	déplacement de corps solide avant relaxation de l'équation d'équilibre	[.]
$H_0$	déplacement de corps solide après relaxation de l'équation d'équilibre	[.]
$H_c$	épaisseur de film centrale adimensionnée	[.]
$H_{cff}$	épaisseur de film centrale sur-alimentée adimensionnée	[.]
$H_{oil\ n}(x,y)$	distribution adimensionnée du lubrifiant dans le contact	
	après $n$ passages du corps roulant	[.]
$H_{oil}$	épaisseur adimensionnée de la couche de lubrifiant $H_{oil} = h_{oil}(2R\mathcal{E})/(a^2\mathcal{K})$	[.]
$i\;,j\;,I\;,J$	indices points du maillage sur une grille de niveaux $L$ et $L-1$	[.]
$I_h^H$	opérateur de restriction (injection ou restriction pondérée)	[.]
$I_H^h$	opérateur d'interpolation	[.]
$I\!\!I_h^H, I\!\!I_H^h$	opérateur de restriction et d'interpolation du noyau	[.]
$\mathcal{K}(m)$	paramètre géométrique $\mathcal{K}(m) = \int_{0}^{\pi/2} 1/\sqrt{1-m^2 \sin^2(\psi)} d\psi$	[.]
K(x, y)	noyau d'intégration continu	[.]
$K^{\dot{h},h}$	novau d'intégration discret exact	[.]
${ ilde K}^{i,j}_{h,h}$	novau d'intégration discret approché	[]
$\Gamma_{i,j}$	opératour différentiel	[•]
$\mathcal{L}$ $\mathcal{C}^h$	opérateur différentiel discrétisé sur la grille de pas $h$	[•]
	operateur unierentier discretise sur la grine de pas $\pi$	[•]
	parametre admensionne de charge (MOES), $L = G(2U)^{-1}$	[.]
	nombre de pointe de correction quivent une interpolation	[•] [1]
111	nombre de points de correction suivant une interpolation papareitre des intérmoles elliptiques $K$ et $\mathcal{L}$ res $(1 - u^2)^{1/2}$	[.]
m m	parametre des integrales empliques, $\mathcal{K}$ et $\mathcal{L}$ , $m = (1 - \kappa^{-})^{n/2}$	[•]
ms	masse surfacique de lubrinant $ms = \rho \sigma n$	[1, -2]
14	$ms_e, ms_c, ms_s$ a rentree, au centre et a la sortie du contact	[kg m -]
M	parametre admensionne de charge (Moes), $M = W(2U)^{-1}$	[•]
$n \neq 1$	nombre de passages du corps roulant	[.]
<i>n</i>	normale à la frontière ou (au menisque)	[.]
$n_1, n_2$	nombre de tours des surfaces 1 et 2	[.]
$n_{cycle}$	indice de réfraction du lubrificant et de la cale antique "anagen laver"	[.]
$n_{oil}, n_{sp}$	indice de refraction du lubrinant et de la cale optique "spacer layer"	[.]
$n_x, n_y$	nombre de points de discretisation dans les directions $x$ et $y$	[.]
IV N	ordre de la frange d'interference	[.]
N O	nombre total de points de discretisation	[.]
0	centre du contact, origine du repere $(O, x, y, z)$	[•] [D]
p	pression 1.0C 108	[Pa]
$p_0$	constante (Roelands), $p_0 = 1.96 \ 10^{\circ}$	[Pa]
$p_h$	pression maximate de Hertz, $p_h = (3w)/(2\pi a b)$	[Pa]
$\hat{P}$	pression admensionnee, $P = p/p_h$	[.]
$\Gamma$ $\tilde{D}$	champ de pression initial adimensionne	[.]
P	pression adimensionnee non mise à jour	
ō	pendant la relaxation courante	[.]
P	pression adimensionnée mise à jour	r 1
	pendant la relaxation courante (Gauss-Seidel)	[.]
q	pression reduite $q = [1 - \exp(-\alpha p)]/\alpha$	[.]
r	epaisseur relative de lubrifiant, $r = h_{oil}(x_e, y)/h_{oil\ ff}(x_s, 0)$	[.]
$r_c$	epaisseur relative centrale de lubrifiant, $r_c = h_{oil}/(\rho_{cff}h_{cff})$	[.]

$r^h$	résidu du problème différentiel discret $r^h = f^h - \mathcal{L}^h \tilde{u}^h$	[.]
$r_{moy}$	norme du résidu sur le domaine de calcul	[.]
$r_{\rm w}$	résidu de l'équation d'équilibre	[.]
R	rayon de courbure équivalent, $R = (R_x^{-1} + R_y^{-1})^{-1}$	[m]
$R_x$	rayon de courbure réduit dans la direction $\vec{x}, R_x = (R_{x1}^{-1} + R_{x2}^{-1})^{-1}$	[m]
$R_{x1}, R_{x2}$	rayon de courbure des surfaces 1 et 2, dans la direction $\vec{x}$	[m]
$R_{y}$	rayon de courbure réduit dans la direction $\vec{y}$ , $R_y = (R_{y1}^{-1} + R_{y2}^{-1})^{-1}$	[m]
$R_{u1}^{'}, R_{u2}^{'}$	rayon de courbure des surfaces 1 et 2, dans la direction $\vec{y}$	[m]
$\mathcal{R}_{c}^{g_{1}}$	épaisseur centrale adimensionnée de lubrifiant, $\mathcal{R}_c = \rho_c h_c / (\rho_{cff} h_{cff})$	[.]
$\mathcal{R}_n$ , $r_n$	épaisseur relative adimensionnée à l'entrée $(r_n)$	
10, 10	et à la sortie $(\mathcal{R}_n)$ du contact après <i>n</i> passages du corps roulant	[.]
S	paramètre géométrique, $\mathcal{S}(m) = (\mathcal{E} - \kappa^2 \mathcal{K})/(\mathcal{K} - \kappa^2 \mathcal{K})$	[.]
S	longueur d'entrée, $S \propto rS_{ff}$	[m]
$\overline{S}$	longueur d'entrée adimensionnée. $\overline{S} \propto r \overline{S}_{ff} \propto r (L/M)^{1/2}$	[.]
$S_{ff}$	longueur d'entrée sur-alimentée	[m]
$\frac{\overline{S}_{ff}}{\overline{S}_{ff}}$	longueur d'entrée sur-alimentée adimensionnée. $\overline{S}_{ff} = S_{ff}/a = (L/M)^{1/2}$	[.]
$\tilde{\bar{S}}_{r}$ , $\bar{S}_{r}$	distance adimensionnée entre le ménisque d'entrée et la zone de Hertz.	[•]
$\sim x, \sim y$	dans les directions $\vec{x}$ et $\vec{y}$	[.]
t	temps	[s]
u u	solution continue exacte du problème différentiel	[.]
$u^h$	solution exacte du problème différentiel discret	[.]
$u_c$	vitesse critique (marque le passage du régime sur à sous-alimenté)	$[m s^{-1}]$
u <sub>c</sub> c	vitesse critique (marque le passage du régime sur à sous-alimenté)	[ ~ ]
c,c	mesurée avec une cage	$[m \ s^{-1}]$
$\hat{u}^h$	solution initiale imposée avant la résolution du problème différentiel discret	[.]
$\hat{u}^H$	solution du problème différentiel	[-]
	transférée sur une grille grossière $\hat{u}^H = I_{\iota}^H \tilde{u}^h + v^H$	[.]
$\tilde{u}^h$	solution approchée du problème différentiel discret sur la grille de pas $h$	[.]
$\bar{u}^h$	solution convergée du problème différentiel discret sur la grille de pas $h$	[.]
$\vec{u}_{1}, \vec{u}_{2}$	vitesse des surfaces 1 et 2	$[m s^{-1}]$
$\vec{u_m}$	vitesse movenne. $\vec{u_m} = (\vec{u_1} + \vec{u_2})/2$	$[m s^{-1}]$
U	paramètre adimensionné de vitesse. $U = (n_0 u_m)/(E'R_r)$	[.]
$v^h$	erreur dans la solution du problème différentiel discret $v^h = u^h - \tilde{u}^h$	[.]
W	force normale appliquée au contact (charge)	[N]
w(x)	fonction intégrale	[.]
$w_i^{\hat{h}}$	fonction intégrale discrète exacte sur la grille de pas $h$	[.]
$ ilde{w}_{i}^{h}$	fonction intégrale discrète approchée sur la grille de pas $h$	[.]
$\bar{w}_i^h$	fonction intégrale discrète calculée sur la grille de pas $h$	[.]
Ŵ	paramètre adimensionné de charge, $W = w/(E'R_r^2)$	[.]
$\vec{x}$	direction de roulement	[.]
x, y, z	coordonnées dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$	[m]
$x_e, x_s$	abscisse des frontières d'entrée et de sortie du domaine de calcul $\Omega$	[m]
X, Y	coordonnées adimensionnées, $X = x/a, Y = y/b$	[.]
$X_i, Y_i$	coordonnées adimensionnées du point d'indices i et j	[.]
$X_e, X_s, Y_0$	domaine adimensionné, $X_e = x_e/a, X_s = x_s/a, Y_0 = y_0/b$	[.]
$\vec{y}$	direction perpendiculaire au roulement	[.]
$\pm y_0$	ordonnée des frontières d'entrée et de sortie du domaine de calcul $\Omega$	[m]
z	indice de piezo-viscosité (Roelands)	[.]
$\vec{z}$	direction de l'épaisseur du film de lubrifiant	
	(perpendiculaire au plan de contact)	[.]

# Symboles grecs

$\alpha$	coefficient de visco-pression	$[Pa^{-1}]$
$\bar{lpha}$	indice de visco-pression adimensionné,	
	$\bar{\alpha} = \alpha p_h = \bar{\alpha} = \frac{L}{2} \left( \frac{3M\pi^2 \kappa}{2} \frac{(1 + R_x/R_y)^2}{16\pi^2} \right)^{1/3}$	[.]
δ	déformation élastique maximale de Hertz $\delta = a^2 \mathcal{K}/2B\mathcal{E}$	[m]
$\delta_{\lambda}^{h_x,h_y}$	action appliquée à $P$ ou $A$ pondent le relevation	[111]
$o_{i,j}$	correction appinquee a 1 ou o pendant la relaxation	r 1
<u>,</u>	pour annuler le résidu $r_{i,j}^{a,j}$	[.]
$\delta ms$	variation de la masse surfacique :	r. 01
6	à la sortie $\delta ms_s = ms_c - ms_s$ , totale $\delta ms_t = ms_e - ms_s$	$[\text{kg m}^{-2}]$
$\delta\Omega$	frontière (ménisque) entre les deux sous-domaines $\Omega_1$ et $\Omega_2$	[m]
$\epsilon$	coefficient adimensionné de l'équation de Reynolds $\epsilon = \bar{\rho}H^3/(\bar{\eta}\lambda)$	[.]
$\gamma$	paramètre adimensionné de réduction d'épaisseur de film,	
	résistance à l'éjection circonférentielle de lubrifiant,	r 1
	défini entre l'entrée et la sortie du contact	[.]
$\gamma_c$	paramètre adimensionné de réduction d'épaisseur de film,	
	résistance à l'éjection circonférentielle de lubrifiant,	
	défini entre l'entrée et le centre du contact	[.]
$\kappa$	ellipticité, $\kappa = a/b$	[.]
λ	paramètre adimensionné, $\lambda = \pi \left(\frac{128}{2M4} \frac{16\pi \mathcal{E}^5}{\pi^4(1+D_c/D_c)^{5}\mathcal{E}^6}\right)^{1/3}$	[.]
λ	$(3M^* k^* (1+R_x/R_y)^\circ \mathcal{N}^\circ)$	[m]
$\overline{\lambda}$	longueur d'onde adimensionnée du profil de lubrifiant dans la direction $\vec{u}$	[111]
$\gamma_{oil}$	viscosité	[·] [Pas]
$n_0$	viscosité à la pression ambiante	[Pas]
$\bar{n}$	viscosité adimensionnée $\bar{n} - n/n_0$	[]
'  	coefficient de frottement	[•]
$\mu$	coefficient de Poisson des matériaux des surfaces 1 et 2	[•]
$\nu_1, \nu_2$	nombre de relayations sur chaque niveau de grille $\nu_0$ sur la grille grossière	[•]
$\nu_0, \nu_1, \nu_2$	$\nu_1$ à la descente et $\nu_2$ à la remontée d'un V-cycle	[]
(.)	facteur de sous-relaxation de $P$ ou $\theta$	[•]
( <i>W</i> ===	facteur de sous-relaxation de l'équation d'équilibre	[•]
$\omega_{\mathrm{w}}$	domaine de calcul $x_1 \le x \le x_2 - u_0 \le u \le u_0$	$[\mathbf{m}^2]$
$\frac{\overline{\Omega}}{\overline{\Omega}}$	domaine de calcul adimensionné $X \leq X \leq X = -Y_0 \leq Y \leq Y_0$	[]
$\Omega_1$	zone de film incomplet $(P = 0, \theta < 1)$	$[n^2]$
$\Omega_2$	zone de film complet $(P > 0, \theta = 1)$	$[m^2]$
Φ	déphasage dû aux réflexions des rayons lumineux	[rad]
0	densité du lubrifiant	$[k\sigma m^{-3}]$
P 00	densité du lubrifiant à la pression atmosphérique	$[kg m^{-3}]$
$\bar{\rho}_0$	densité adimensionnée du lubrifiant $\bar{\rho} = \rho/\rho_0$	[116] []
Р Ос	densité du lubrifiant, au centre d'un contact	$[kg m^{-3}]$
$\overline{\rho}_{c}$	densité adimensionnée du lubrifiant, au centre d'un contact	[.]
Peff	densité du lubrifiant au centre du contact sur-alimenté	$[kg m^{-3}]$
PCJJ Doff	densité adimensionnée du lubrifiant, au centre du contact sur-alimenté	[0 ]
$\theta$	taux de remplissage en lubrifiant	[]
Â	champ de remplissage initial	[]
Ã	remplissage non mig à jour pendant la relevation courante	[•] []
Ā	remplissage non mis à jour pendant la relaxation courante	[•] []
о Д.	angle d'incidence des revens luminour	[•] [red]
$\sigma_l$	angle a molacifice des rayons fumilieux	[rau]

# Chapitre 1

# Introduction

# 1.1 Préambule

## 1.1.1 Mécanique

Le régulateur de vitesse bloqué sur la limite en vigueur, l'automobiliste moderne, confortablement installé au volant de sa voiture, suit les instructions que lui donne l'ordinateur de bord. Il ne se soucie guère de la mécanique. Elle se fait tout simplement oublier. Les pré-requis au pilotage automobile ou à la conduite correcte d'une quelconque machine sont de moins en moins importants. Contrairement à l'époque des premiers pas de l'automobile ou de l'industrie, l'utilisation d'un appareil ne requiert plus la connaissance détaillée de son fonctionnement et de sa mécanique.

La maintenance et le réglage vont disparaître progressivement de la liste des tâches qui incombent à l'utilisateur d'un dispositif. Dans la plupart des cas, l'opérateur ne fournit déjà plus d'énergie à sa machine. Les servos moteurs et les boucles d'asservissement s'en chargent. Son rôle ne se limitera bientôt plus qu'à lui communiquer des informations.

Avant décollage, le contrôle visuel des organes vitaux d'un avion est toujours en vigueur. Mais avec l'avènement des capteurs, de l'électronique et de l'informatique, celui-ci ne sera bientôt plus nécessaire.

La fiabilité accrue des systèmes mécaniques, la réduction des niveaux de bruits, le confort d'utilisation et la propreté de fonctionnement rendent la mécanique invisible. Ainsi, la perception que l'homme moderne a de sa machine se résume à la fonction qu'elle remplit et à son interface informatique aussi réduite que possible.

Pourtant, la mécanique est omniprésente et les exigences des concepteurs à son égard sont croissantes. Alors que la puissance délivrée par les machines augmente de manière significative, leur volume et leur poids diminuent.

Les composants d'un système mécanique sont animés par des forces, généralement exercées sur les surfaces des pièces mobiles. Ces forces provoquent des déformations et des efforts de frottement. Elles donnent lieu à des pertes d'énergie et sont responsables de phénomènes de fatigue. Elles peuvent générer une usure, lorsque les efforts s'accompagnent de glissement. Les conditions extrêmes de température et de pression, auxquelles les contacts sont soumis, peuvent aussi entraîner le grippage des pièces. Lors de ce processus, l'élévation locale de la température entraîne des micro-soudures locales des surfaces, puis l'arrachement de petits volumes de matière.

### 1.1.2 Tribologie

L'étude scientifique et technologique des phénomènes liés aux frottements de surfaces et de la lubrification associée porte le nom de "tribologie". Cette discipline relève d'un grand nombre de domaines scientifiques, parmi lesquels figurent : la mécanique des solides et des fluides, la chimie, la thermique, ainsi que l'optique et l'électricité qui interviennent dans les techniques d'observation expérimentale. Elle traite aussi de problèmes médicaux soulevés par les contacts complexes que constituent les articulations du corps humain, en vue d'optimiser la qualité des prothèses implantées sur les patients. La tribologie pénètre profondément la vie quotidienne. De très nombreuses activités mettent en jeu des surfaces mobiles qui génèrent du frottement. C'est le cas de l'écriture, du vol des têtes de lecture sur un disque dur d'ordinateur, en passant par les divers paliers et autres roulements équipant les moyens de transport, appareils médicaux, industriels ou électroménagers...

La thèse exposée dans le présent mémoire s'inscrit dans le cadre des études tribologiques traitant de la lubrification. Son application la plus directe concerne les roulements. Les roulements sont utilisés dans l'industrie pour réaliser des liaisons pivot de haute qualité. Ils présentent la particularité d'autoriser la transmission de charges et de couples importants au prix de forces de frottement très faibles. La figure 1.1 donne une représentation schématique d'un roulement : généralement constitué de deux bagues concentriques (intérieure et extérieure) solidaires respectivement de l'arbre et de l'alésage dans lequel il est monté. Des corps roulants (présentant une géométrie de révolution : billes, rouleaux, galets...) sont placés entre les deux bagues. Ils leur permettent de tourner en sens inverse. Ils adaptent la vitesse entre les bagues et transmettent, d'une bague à l'autre, la charge appliquée au roulement. Cette charge est communiquée des bagues aux corps roulants par une pression qui se crée sur une surface appelée zone de contact.



FIG. 1.1 – Roulement à double rangée de rouleaux coniques[45].

### 1.1.3 Lubrification

Les contacts dans les roulements sont généralement lubrifiés avec une huile ou une graisse. Ce lubrifiant (comme l'ont montré Ertel et Grübin en 1939 [28]) crée un film entre les surfaces des éléments roulants et les bagues. Son premier rôle est d'adapter les vitesses entre les éléments roulants et les bagues. En effet, les vitesses tangentielles des surfaces des corps roulants et des bagues ne sont pas identiques. Il existe donc un glissement à l'interface entre ces deux solides. Le glissement (fonction de la cinématique du roulement) génère des forces de frottement. Le film, lorsqu'il est cisaillé, engendre des forces de frottement beaucoup plus faibles que celles développées par un contact non lubrifié (dit "sec" ou "hertzien"). Si un roulement opère en l'absence de lubrification, les forces de frottement sont élevées car elles sont créées par le cisaillement (dû au glissement) de la couche d'oxydes présente sur les surfaces. Elles entraînent un échauffement important des corps en contact et génèrent des contraintes dans la matière qui conduisent à sa rupture en fatigue. La durée de vie du mécanisme est alors très réduite. Lorsque la lubrification est assurée par un débit conséquent, le second rôle du lubrifiant est d'évacuer la chaleur dissipée par frottement.

Lorsque le volume compris entre les bagues et les éléments roulants est rempli de lubrifiant, le contact fonctionne en conditions "sur-alimentées". Ces conditions ont été étudiées depuis 1939 [28] et les épaisseurs de film correspondantes ont été modélisées physiquement grâce aux travaux de Hertz [43], Reynolds [73] et Barus [5]. Elles ont été calculées numériquement [72, 23, 39, 57] et mesurées avec précision [11, 51].

Les chapitres 3 à 5 sont consacrés à l'étude de la formation du film de lubrifiant. Ils abordent ce phénomène en se focalisant sur le cas où la quantité de lubrifiant disponible pour créer le film est faible. Dans ces conditions, l'épaisseur du film formé est inférieure à celle obtenue avec une grande quantité de lubrifiant. Le contact est alors dit "sous-alimenté". Pour des quantités de lubrifiant variant entre 0 et l'infini, le contact évolue entre la configuration de Hertz (contact "sec") et la configuration sur-alimentée. Ces deux configurations extrêmes peuvent être considérées comme deux asymptotes entre lesquelles se positionne le comportement réel d'un contact.

Les roulements et les engrenages alimentés par un débit de lubrifiant faible ou nul fonctionnent en régime "sous-alimenté". C'est le cas lorsqu'ils sont lubrifiés par une graisse, un brouillard ou une émulsion de lubrifiant. Les applications à haute vitesse, à faible température ou de grandes dimensions, sont aussi sujettes à la sous-alimentation.

Cette thèse a pour objectif la création de modèles représentant les phénomènes physiques qui interviennent dans les contacts elliptiques sous-alimentés. Ces modèles, construits à partir de résultats analytiques et numériques, sont validés expérimentalement. Ils ont pour but d'améliorer la prédiction du comportement des contacts elliptiques sous-alimentés. Ils constituent des outils nécessaires à l'optimisation de la lubrification et des mécanismes.

Le chapitre 2 retrace sommairement l'évolution de l'élastohydrodynamique.

Le chapitre 3 présente la modélisation des conditions d'alimentation du contact.

Le chapitre 4 contient les éléments essentiels de la technique numérique utilisée pour résoudre le système d'équations lié au modèle.

Le chapitre 5 présente une analyse des phénomènes physiques qui régissent la réduction des

épaisseurs de film. Les résultats ont été obtenus analytiquement et numériquement puis validés par une étude expérimentale. Ils mettent en évidence l'importance des débits latéraux dans la zone où coexistent gradients de pression significatifs et faibles pressions. Cette zone est modélisée par sa longueur caractéristique adimensionnée.

Dans un roulement, les corps roulants sont espacés régulièrement par une cage. Celle-ci empêche le contact direct entre deux éléments successifs et assure la répartition régulière de la charge entre les éléments roulants. En remplissant cette fonction principale, elle modifie les conditions de lubrification. Elle peut, suivant la configuration, favoriser ou limiter la sous-alimentation. Son influence a été étudiée expérimentalement. La démarche expérimentale et l'analyse des résultats sont présentées dans l'annexe A.

# 1.2 Contexte et enjeux industriels

Comme le montre Shurka [75], la hauteur des aspérités de surface comparée à l'épaisseur du film de lubrifiant affecte la durée de vie des contacts. La piezo-viscosité (loi de variation de la viscosité avec la pression) joue un rôle primordial dans la création du film de lubrifiant. De même, les additifs utilisés dans les formulations des lubrifiants conditionnent la durée de vie des roulements en agissant sur le contact entre aspérités sous haute pression. La viscosité et les propriétés des additifs employés sont fonction de la composition chimique du lubrifiant. Afin de réduire la perte d'énergie par frottement visqueux, la viscosité est réduite. Pour que la diminution de l'épaisseur de film induite ne pénalise pas trop la durée de vie des surfaces, des additifs contenant du phosphore et du soufre sont ajoutés dans le lubrifiant. Or les normes environnementales tendent à réduire, voire à interdire, l'utilisation de certains composants dont l'efficacité en termes de performances, mais aussi la nocivité pour les catalyseurs de rejets, ont été prouvées. Le plomb, le zinc et le soufre figurent parmi ces molécules en fin de carrière. Dans le but de conserver le même niveau de performances, il est nécessaire d'améliorer la compréhension de la lubrification et d'affiner les modèles de prédiction.

D'autre part, du point de vue industriel, la durée de vie constitue un argument commercial majeur pour la vente de roulements. Une durée de vie importante permet à l'acquéreur de réduire le coût de la maintenance en diminuant la main d'oeuvre et le temps d'immobilisation de la machine.

Enfin, la sécurité est l'un des enjeux importants de l'estimation correcte de la durée de vie car certaines applications comme la production d'énergie nucléaire, l'aéronautique ou les transports de manière générale mettent en jeu des vies humaines. Il est donc vital de prédire correctement la durée de vie de certaines pièces mécaniques et d'éliminer les défaillances catastrophiques. En ce qui concerne les roulements, cette étape dépend de la bonne estimation des épaisseurs de film de lubrifiant.

La lubrification des systèmes mécaniques exige fréquemment l'installation d'un circuit spécifique. Ce circuit comprend des tuyauteries, des pompes, des filtres et des injecteurs. Ces éléments coûtent à plusieurs niveaux. La somme des dépenses affectées à la lubrification est très élevée. Elle intègre les frais de : conception, fabrication, maintenance, consommation et recyclage de lubrifiant, alimentation des pompes en énergie. Dans le cas des avions, la masse de tout le système de lubrification embarqué dans la machine présente un inconvénient majeur : elle réduit leur charge utile. Une grande quantité de lubrifiant dans un roulement entraîne une dissipation importante d'énergie par cisaillement hydrodynamique. Une solution aux problèmes évoqués dans ce paragraphe consiste à réduire le débit de lubrifiant. Le rendement et la consommation sont ainsi améliorés. Une autre solution consiste, si possible, à supprimer le circuit de lubrification. La lubrification est alors assurée, souvent par une graisse, au moment de l'assemblage du système et lors des phases de maintenance. Dans certaines applications, comme les roulements de roues de voitures, la lubrification est effectuée uniquement au moment de leur production et pour toute leur durée de vie. Ces deux solutions entraînent la sous-alimentation du contact par réduction du volume de lubrifiant. La sous-alimentation a pour principal effet la diminution des épaisseurs de film de lubrifiant dans le contact.

La qualité de la finition des pièces en contact influence aussi leur durée de vie. Les surfaces présentent des rugosités, dont la hauteur est de l'ordre d'une fraction de micromètre. Elles sont produites lors de la phase de finition. L'amplitude de ces rugosités est parfois comparable à l'épaisseur du film de lubrifiant qui sépare les surfaces en contact. Ces irrégularités entraînent des surpressions locales dans le contact. Lorsqu'elles traversent le film de lubrifiant pour venir en contact direct avec la surface opposée, elles provoquent, dans la matière, des contraintes de cisaillement importantes qui réduisent la durée de vie des surfaces.

Les solutions envisagées pour répondre aux attentes des utilisateurs sont antagonistes à plusieurs titres. Ces derniers souhaitent voir évoluer certains paramètres dans une direction défavorable à la durée de vie et, en même temps, ils aimeraient l'accroître. Leurs principales exigences, basées sur des critères économiques ou environnementaux entraînant la réduction de la durée de vie, sont regroupées dans la liste suivante :

- réduction des émissions polluantes,
- augmentation de la charge transmise,
- réduction du coût de finition des surfaces,
- réduction de la quantité de lubrifiant consommée,
- réduction de l'enveloppe dimensionnelle du roulement,
- réduction des pertes par frottement visqueux,
- suppression des circuits de lubrification.

Dans le même temps, ils souhaitent atteindre les objectifs suivants :

- augmentation de la fiabilité,
- allongement des intervalles de service,
- augmentation de la durée de vie.

Il est donc nécessaire de mieux comprendre et de pouvoir prédire le fonctionnement de la sousalimentation dans les roulements, pour aboutir au meilleur compromis entre ces diverses attentes.

# Chapitre 2

# Evolution de l'ElastoHydroDynamique (EHD)

# 2.1 Introduction

La lubrification des contacts rencontrée dans les roulements est dite élastohydrodynamique. Les pressions générées sont suffisamment importantes pour entraîner la déformation élastique des surfaces. Cette déformation est grande devant l'épaisseur du film de lubrifiant. La forte pression entraîne aussi une augmentation significative de la viscosité du lubrifiant. L'analyse de ces phénomènes physiques couplés, dans un contact lubrifié, sert de fil conducteur à ce chapitre.

# 2.2 Ecoulement visqueux en film mince

#### 2.2.1 Paliers et roulements

Dans les paliers et les roulements, les surfaces en contact sont séparées par un film de lubrifiant. Son épaisseur est très petite comparée à sa longueur et à sa largeur. Le lubrifiant est visqueux et il adhère aux parois. La pression existant dans le film (mise en évidence par Tower en 1883 [77]) exerce sur les surfaces une force qui tend à les séparer. Cette force équilibre la charge supportée par le contact.

Dans les paliers hydrostatiques, la pression est amenée par des résistances hydroliques qui injectent du lubrifiant dans le contact. Le lubrifiant est mis en mouvement par la différence de pression existant entre les résistances et les frontières du palier où la pression est ambiante. Le débit de lubrifiant sépare les surfaces en permanence, même lorsque l'arbre du palier n'est pas en mouvement.

Dans les paliers hydrodynamiques et les roulements, le mécanisme est inversé. Lorsque les surfaces sont en mouvement, elles entraînent le lubrifiant dans le contact. Dans ce cas, c'est la combinaison de l'écoulement et des forces de viscosité qui va générer la pression qui sépare les surfaces.

#### 2.2.2 Modélisation par l'équation de Reynolds

En 1886, Reynolds [73] s'est intéressé à l'écoulement des films minces visqueux afin d'expliquer les résultats de Tower [77]. En introduisant les hypothèses simplificatrices, propres aux écoulements des films minces, dans les équations de la mécanique des fluides de Navier-Stokes, il a créé l'équation qui porte son nom. Cette équation traduit mathématiquement la conservation de la masse dans l'écoulement. Elle lie le champ de pression à la géométrie des surfaces connaissant leur cinématique.

# 2.3 Influence des fortes pressions

### 2.3.1 Déformations élastiques

Sous l'effet des fortes pressions, les surfaces se déforment élastiquement. Les déformations élastiques sont observables principalement dans les contacts non conformes (comme ceux rencontrés dans les roulements). Ce phénomène a été étudié par Hertz en 1881 [43] dans le cas du contact sec. Il a proposé une solution analytique du champ de pression pour le problème bidimensionnel correspondant au contact entre un tonneau et un plan. Le problème du contact linéique ou unidimensionnel (contact d'un cylindre sur un plan) est un cas particulier du problème bidimensionnel.

## 2.3.2 Propriétés du lubrifiant

#### Piezo-viscosité

La viscosité d'un lubrifiant est fonction de la pression. Elle peut varier de plusieurs ordres de grandeur lorsque le lubrifiant passe de la pression ambiante à la pression qui règne au coeur d'un contact. En 1893, Barus [5] a montré que la variation de pression dans le lubrifiant entraîne une variation exponentielle de la viscosité. Roelands [74] a proposé en 1966 une relation plus précise entre viscosité et pression.

#### Compressibilité

Sous l'effet de la pression, le volume spécifique du liquide est réduit. Cette réduction peut atteindre des valeurs de l'ordre de 30%. Cela correspond à une multiplication de la masse volumique par 1.3. Dowson et Higginson ont étudié en 1966 [24] la relation entre masse volumique et pression. Ils ont formulé mathématiquement une relation liant ces deux grandeurs en utilisant comme référence la masse volumique à la pression ambiante.

# 2.4 Modélisation de la lubrification EHD

La théorie de la lubrification EHD repose sur trois équations : l'équation de Reynolds, l'équation de la charge et les équations de l'élasticité. L'équation de Reynolds décrit l'écoulement du lubrifiant dans le contact et permet de calculer le champ de pression. L'équation de la charge traduit l'égalité entre la charge supportée par le contact et l'intégrale du champ de pression. Enfin, les équations de l'élasticité décrivent en chaque point la déformation des surfaces induite par le champ de pression.

En 1916, afin de calculer l'épaisseur du film de lubrifiant séparant les dentures d'un engrenage, Martin et Gümbel [62, 32] ont appliqué le modèle composé des équations précédentes, sans tenir compte des déformations élastiques. Ce modèle prédisait une épaisseur de film comparable à la hauteur des rugosités. Le résultat était irrecevable puisque le contact présentait une durée de vie importante, incompatible avec un film de lubrifiant aussi mince que les rugosités. Presque vingt-cinq ans plus tard, en 1939, Ertel et Grübin [28, 37] fournissent une expression analytique satisfaisante de l'épaisseur de film, dans un contact linéique. Il obtient une épaisseur de film bien supérieure à celle de Martin et Gümbel, dans des conditions comparables. La modélisation repose sur une approximation de la géométrie par la géométrie du contact de Hertz et l'utilisation d'une pression réduite, dérivée de l'expression de la piezo-viscosité de Barus. Ce n'est qu'en 1951, avec les travaux de Petrusevich [72], qu'apparaît la première solution numérique du champ de pression dans un contact élastohydrodynamique. Cette solution met en évidence le pic de pression caractéristique des contacts EHD. Dans les années 1960, Dowson et Higginson résolvent le problème élastohydrodynamique linéique, pour différentes conditions de contact. Ils en déduisent des fonctions décrivant les variations de l'épaisseur de film centrale et minimale dans le contact, en fonction des paramètres opérationnels. Dix ans plus tard, Hamrock et Dowson [39, 40] effectuent un travail similaire sur le contact ponctuel entre une bille ou un tonneau et un plan. Les calculs numériques étant extrêmement lourds, il est intéressant de réduire le nombre d'entrées du problème au minimum, afin de raccourcir et de simplifier l'étude paramétrique. Blok, Moes et Bosma [65, 66] ont contribué à cette simplification en proposant un adimensionnement du problème EHD. Ils ont combiné les paramètres de l'équation de Reynolds, pour ne finalement conserver que deux paramètres qui, avec un principe de similitude, suffisent à décrire le contact.

## 2.5 Validation expérimentale

Deux techniques sont utilisées pour mesurer l'épaisseur du film de lubrifiant dans un contact :

• Dans la première, les deux surfaces en regard, séparées par un milieu non conducteur, forment un condensateur. La capacité de ce condensateur permet l'évaluation de l'épaisseur moyenne du film. Cette mesure présente l'avantage d'être relativement simple de mise en oeuvre. La principale difficulté réside dans l'isolation des corps en contact. Cette technique comporte cependant deux inconvénients majeurs : elle ne fournit qu'une estimation globale de l'épaisseur du film et la mesure ne peut être effectuée que lorsque les corps en contact sont entièrement séparés. Il est donc impossible de mesurer l'épaisseur de film lorsqu'elle est voisine de l'épaisseur des rugosités dans le contact. En effet, lorsque les rugosités traversent le contact, les charges électriques passent d'une surface à l'autre, ce qui empêche la mesure d'une capacité.

• Gohar et Cameron [34] figurent parmi les premiers expérimentateurs à avoir mesuré l'épaisseur de film par interférométrie optique. Ils ont confirmé l'existence d'une zone d'épaisseur minimale à la sortie des contacts. Cette zone est caractéristique du régime EHD. Elle est très reconnaissable dans le cas des contacts ponctuels, grâce à sa forme en fer à cheval. Cette technique, détaillée dans l'annexe A, fournit une mesure du champ d'épaisseur dans le contact. Elle repose sur l'analyse des franges provenant de l'interférence de rayons lumineux présentant une différence de marche (égale à deux fois l'épaisseur de film mesurée). Les différences de phase sont créées par réflexion sur les deux surfaces en contact. En interférométrie conventionnelle, les plus faibles épaisseurs mesurables sont de l'ordre de 80 à 100 nanomètres. Elles peuvent jusqu'à 2 à 5 nanomètres avec les techniques de mesure interférométrique de films très minces [51]. Les mesures optiques exigent que l'un des matériaux en contact soit transparent.

# 2.6 Techniques numériques de résolution

La modélisation mathématique du problème, présentée en 2.4, repose sur trois équations non linéaires. Leur résolution numérique discrète se fait de manière directe ou itérative. La méthode directe, dont l'implémentation est relativement rapide, peut être utilisée lorsque le nombre de points de discrétisation n'excède pas 200. Au-delà, les temps de calcul et les besoins de stockage (mémoire vive) deviennent trop importants. Il faut alors faire appel aux méthodes itératives qui présentent des problèmes de stabilité et de vitesse de convergence. Lubrecht [57] les a améliorées en adaptant la technique multigrille, décrite par Brandt [8], à la résolution de l'équation de Reynolds dans le problème du contact EHD. Puis il a développé en 1990 la technique "Multi-Level Multi-Integral" ("ML-MI") qui accélère le calcul de la déformation élastique d'une surface soumise à un champ de pression [9]. En 1991, Venner [78] a écrit un algorithme de contact beaucoup plus stable en combinant les techniques multigrilles et "Multi-Intégral". L'association des techniques multigrille et "Multi-Level Multi-Integral" permet la résolution précise de problèmes de contact EHD. Elle étend le domaine d'exploration numérique aux problèmes transitoires et rugueux. Les détails de la technique sont regroupés dans le livre de Venner et Lubrecht [80]. Le chapitre 4 contient les grandes lignes de la méthode multigrille et les adaptations spécifiques à la sous-alimentation et aux contacts elliptiques.

# 2.7 Phénomènes transitoires

La progression des moyens de calcul, en termes de performance du matériel et d'optimisation des algorithmes de calcul (grâce notamment aux techniques multigrilles évoquées en 2.6), permet de traiter numériquement des problèmes EHD transitoires, en des temps raisonnables.

#### 2.7.1 Rugosités en contact lubrifié

Les contacts rugueux présentent un caractère transitoire. Les aspérités, étant discrètes et mobiles, rendent le problème de contact EHD non stationnaire.

L'influence des rugosités sur les surfaces a été initialement étudiée en contact sec. Des modèles simplifiés basés sur une analyse statistique des propriétés des surfaces ont été établis par Greenwood, Williamson et Tripp [35, 36] en considérant chaque aspérité comme un contact hertzien, indépendant des aspérités voisines.

Le film de lubrifiant ainsi que le champ de pression sont perturbés par les aspérités présentes sur les surfaces rugueuses. Sous l'effet de la pression, les aspérités se déforment et leur hauteur dans le contact est réduite. Lubrecht et Venner [59] se sont intéressés à ce problème en 1999. Ils ont déterminé la réduction de l'amplitude d'une rugosité modèle sinusoïdale, lorsqu'elle traverse un contact. Ils ont exprimé les résultats en fonction des conditions de fonctionnement et de la géométrie des surfaces. Leurs résultats s'appliquent aux contacts linéiques et ponctuels pourvus de rugosités isotropes, longitudinales ou transversales. En 2000, Hooke et Venner [44] ont identifié une longueur adimensionnée caractéristique de l'entrée du contact. Elle est déterminante dans la création du film lubrifiant et, rapportée à la longueur d'onde et à l'amplitude des rugosités, elle détermine leur écrasement dans le contact.

Venner et Lubrecht [79] ont considéré en 1994 le problème d'une strie transversale au contact ponctuel, en condition de roulement et de glissement. La modélisation dynamique transitoire

adoptée est en très bonne corrélation avec les résultats expérimentaux obtenus par Kaneta en 1992 [52].

### 2.7.2 Dynamique des contacts

En 1998, Wijnant [83] a publié ses résultats sur la dynamique des contacts EHD elliptiques transitoires sous-alimentés. Il a consacré son étude à l'amortissement et à la raideur des contacts qui jouent un rôle déterminant dans le comportement dynamique d'un roulement complet. Il a montré que la raideur de contact augmente avec la sévérité de la sous-alimentation alors que l'amortissement diminue.

Dans le but de réduire les pertes par frottement dans les moteurs, Messé [64] a mis en place une méthode d'approximation de l'épaisseur de film minimale en contact EHD linéique, dans le cadre de ses travaux sur les contacts came-poussoir.

# 2.8 Frottement

### 2.8.1 Coefficient de frottement

Lorsque les vitesses des surfaces en regard sont différentes, le contact s'effectue en présence de glissement et l'interface entre les surfaces est cisaillée. Le cisaillement de l'interface engendre des contraintes de cisaillement. Cette résistance au cisaillement se traduit à l'échelle macroscopique par une force qui s'oppose au glissement. Cette force est appelée force de frottement. D'autres forces, résultant de l'écrasement de l'interface, s'opposent au mouvement de roulement et sont appelées forces de frottement de roulement. Leur intensité est généralement plus faible que celle des forces de frottement de glissement.

Le contact est aussi soumis à une force normale à sa surface. Cette force est la charge supportée par le contact. Le rapport des forces de frottement et de la charge de contact est appelé coefficient de frottement. Il peut être défini de manière locale, s'il est évalué sur une fraction de la surface de contact, ou à l'échelle globale, si toute la surface est considérée.

La durée de vie constatée expérimentalement, en présence de glissement, est plus faible qu'en roulement pur. La variation du frottement local et global est la principale différence entre ces deux conditions de fonctionnement. L'évaluation correcte de la durée de vie repose donc partiellement sur la bonne estimation des frottements dans le contact.

Les contacts élastohydrodynamiques peuvent être répartis dans trois catégories, suivant leur régime de fonctionnement. Si le film est plus épais que les rugosités et s'il supporte à lui seul la charge, le contact fonctionne en film complet (régime hydrodynamique ou élastohydrodynamique). Si l'épaisseur de film est plus faible et si la charge est supportée en partie par le contact direct direct entre les aspérités et en partie par le fluide, le régime de lubrification est dit mixte. Le troisième régime est le régime de lubrification limite. Il concerne les contacts où la charge est supportée en totalité par le contact direct des aspérités. Les géométries correspondant à ces trois régimes sont représentées schématiquement sur la figure 2.1.



FIG. 2.1 – Schéma des régimes de lubrification et des profils de pression correspondants.

#### 2.8.2 Courbe de Stribeck

Dans son livre, Georges [31] s'est attaché à expliquer, à diverses échelles, les mécanismes liés au frottement. Il a considéré les frottements en contact sec et en contact lubrifié. Un contact dont la vitesse des surfaces serait croissante verrait l'épaisseur de son film croître. Il passerait successivement d'un régime de lubrification limite à un régime mixte puis à un régime de film complet. Le passage d'un régime à l'autre s'accompagne de variations du coefficient de frottement. Aux faibles vitesses, en régime limite, la valeur du coefficient de frottement est due au frottement direct entre les couches superficielles des matériaux. Elle est relativement élevée. Pour des aciers, une valeur proche de 0.15 est couramment admise. Dans le régime mixte, lorsque le lubrifiant supporte une partie de la charge, le coefficient de frottement chute pour atteindre un minimum au début du régime de film complet. Dans ce régime, le frottement (d'origine visqueuse) est croissant. Une représentation de l'évolution du coefficient de frottement en fonction de  $\mathcal{L}$  = vitesse × viscosité/(pression × rayon) est donnée en figure 2.2. Cette fonction est généralement nommée courbe de Stribeck [76].



FIG. 2.2 – Courbe de Stribeck schématique.

# 2.9 Durée de vie

Dans un grand nombre d'applications, une pièce mécanique n'a de valeur que si sa durée de vie, dans les conditions de fonctionnement, est connue avec une précision suffisante. L'évaluation de la durée de vie des mécanismes, évoquée dans le chapitre 1, est donc essentielle. Sous l'effet du chargement cyclique, des fissures s'initient à proximité des inclusions (impuretés contenues dans les aciers). Au cours du temps, ces fissures se propagent. Lorsqu'elles coalescent en surface, elles libèrent des écailles de matière qui empêchent le fonctionnement correct du mécanisme. L'écaillage peut conduire à la destruction rapide des pièces.

Les lois de durée de vie établies pour les roulements, dans les années 1950, par Lundberg et Palmgren [60, 61], sont toujours d'actualité. Ils ont construit leur théorie de durée de vie sur une analyse statistique de type Weibull sur une base de données importante de résultats expérimentaux. Ils expriment la probabilité de survie d'un contact, après un nombre donné de cycles, en fonction du matériau, de la contrainte de cisaillement maximum, du volume contraint et de la profondeur où s'exercent les contraintes.

Ioannides et Harris en 1985 [46] ont affiné le modèle, en incluant la notion de contrainte seuil. Pour des niveaux de contrainte inférieurs à la contrainte seuil, des durées de vie infinies sont atteintes. Ces durées de vie sont rendues possibles par l'amélioration de la qualité des aciers. L'amélioration du modèle porte également sur l'expression, sous forme d'intégrale, du volume contraint, pondéré par la profondeur à laquelle s'appliquent les contraintes. L'expression intégrale permet d'appréhender des problèmes où la forme du champ de pression n'est pas hertzienne.

En 1990, Lubrecht, Jacobson et Ioannides [58] ont apporté une compréhension plus fine du modèle de Lundberg et Palmgren, en éliminant certaines des constantes qu'il contenait. Ils ont notamment montré que la profondeur à laquelle les contraintes s'appliquent n'intervient pas dans le processus d'initiation de fissures par fatigue.

# 2.10 Sous-alimentation en lubrifiant

La connaissance de l'épaisseur du film de lubrifiant est indispensable, afin d'évaluer les pertes par frottement et la durée de vie du contact. Les expressions des épaisseurs de film établies par Dowson, Higginson et Hamrock [24, 39] constituent un résultat majeur de l'EHD. Elles ont été établies en régime sur-alimenté stationnaire pour le contact linéique et ponctuel.

#### 2.10.1 Observations expérimentales

Comme l'a montré expérimentalement Wedeven [81, 82], l'épaisseur de film d'un contact sousalimenté est plus faible que celle d'un contact sur-alimenté. Un contact est dit sur-alimenté lorsque l'épaisseur de film dans le contact est invariante lors de l'augmentation du volume de lubrifiant. Cette définition de la sur-alimentation est couramment utilisée. La figure 2.3 présente une coupe schématique de la distribution du lubrifiant sur les surfaces et de la pression, dans la direction de l'écoulement, pour les deux régimes de lubrification.



FIG. 2.3 – Coupe schématique dans la direction de l'écoulement de la distribution de lubrifiant entre les surfaces pour un contact sur-alimenté (image de gauche) et un contact sous-alimenté (image de droite). Sur les deux dessins, l'entrée du contact se situe à gauche et la sortie à droite.

La photographie de gauche de la figure 2.4, obtenue par interférométrie optique, permet d'observer la position du ménisque d'entrée du contact. En conditions sur-alimentées, le ménisque se trouve loin en amont de la zone de Hertz. Lorsque la quantité de lubrifiant qui alimente le contact est réduite, le ménisque de formation du film se rapproche de la frontière de la zone de Hertz. Ce phénomène est visible sur la photographie de droite de la figure 2.4. Le mécanisme générateur de pression, qui est responsable de la création d'un film de lubrifiant, se trouve concentré sur une plus petite longueur (voir figure 2.3). L'épaisseur de film qui en résulte est réduite. Wedeven a utilisé cette distance comme mesure de la sous-alimentation. Il a proposé un critère permettant de distinguer les régimes sur et sous-alimentés. D'après Wedeven, le contact est sur-alimenté lorsque la hauteur, au point de formation du film (ou ménisque d'entrée), est supérieure à neuf fois la hauteur du film au centre du contact. Il a exprimé ce critère en fonction d'une distance critique entre le ménisque d'entrée et la limite de la zone de Hertz. Il a ensuite utilisé le rapport de la distance critique et de la distance réelle, pour exprimer les épaisseurs de film sous-alimenté dans le contact.



FIG. 2.4 – Images interférométriques d'un contact sur-alimenté à gauche, sous-alimenté à droite. L'entrée du contact se trouve à gauche de l'image.

En 1974. Chiu [18] a mesuré l'évolution avec la vitesse de la distance entre le ménisque d'entrée du contact et la limite de la zone de Hertz. Il a également montré que la sévérité de la sousalimentation croît avec la vitesse et la viscosité. Il a observé l'existence d'un maximum dans la courbe d'épaisseur de film, en fonction du produit vitesse-viscosité. D'après la théorie suralimentée, cette fonction est monotone strictement croissante (trait continu de la figure 2.5). Pour des vitesses supérieures à la vitesse de transition, le comportement s'inverse et l'épaisseur de film décroît avec la vitesse. Il a obtenu la sous-alimentation expérimentale du contact, sans jouer sur le volume de lubrifiant, mais uniquement en variant le produit vitesse-viscosité, contrairement à Wedeven, qui variait le volume de lubrifiant pour déplacer le ménisque d'entrée. Chiu a inclus, dans son analyse de la sous-alimentation, des calculs de prédiction de retour de lubrifiant sur la piste de roulement. En effet, un fort gradient de pression perpendiculaire à la direction de roulement tend à éjecter le lubrifiant hors de la zone de contact. En lissant la distribution du lubrifiant au voisinage du contact, les forces de tension de surface induisent un débit qui réalimente le contact en lubrifiant. Chiu a décrit ce phénomène, dans le cas où l'épaisseur de film de lubrifiant, au voisinage du contact, est importante. Il s'est placé dans des conditions expérimentales correspondantes. Une bonne corrélation entre résultats théoriques et expérimentaux a été observée.

L'approche de Wedeven et Chiu utilise la distance entre le ménisque d'entrée et la zone de Hertz. Ceci constitue un obstacle à l'étude des contacts très sous-alimentés. En effet, dans ces contacts, le ménisque d'entrée vient se confondre avec la frontière de Hertz. L'erreur relative sur cette distance devient alors très importante. De plus, elle devient extrêmement difficile à mesurer. En outre, dans un roulement, les bagues n'étant pas transparentes, la distance adoptée par Wedeven et Chiu pour quantifier la sous-alimentation ne peut pas être mesurée, même pour des contacts faiblement sous-alimentés.

En 1973, Kingsbury [55] a évoqué l'équilibre entre deux débits, nécessaire au fonctionnement



FIG. 2.5 – Epaisseur centrale de film  $h_c$  en fonction de la vitesse moyenne  $u_m$  (à viscosité constante) [22]. La transition entre régime sur et sous-alimenté a lieu à 0.06 [m/s], trait continu  $h_c \propto u_m^{0.67}$ .

des roulements, sur de longues périodes. Lorsqu'il est entraîné dans le contact, le lubrifiant est soumis à un gradient de pression dont une composante est perpendiculaire à la direction de roulement. Ce gradient de pression va expulser une partie du lubrifiant sur les côtés de la piste de roulement. Pour atteindre une situation d'équilibre, ce débit d'éjection doit être compensé par un retour de lubrifiant. Ce retour peut être assuré par la gravité dans le cas des roulements lubrifiés par un bain. L'alimentation par des pompes permet aussi d'empêcher l'assèchement du contact. Les forces de tension de surface participent aussi à la réalimentation du contact. L'existence d'une réalimentation, par écrasement du bourrelet de lubrifiant, de part et d'autre de la piste de roulement a été évoquée par Wedeven puis confirmée par Pemberton et Cameron en 1976 [71]. Wedeven a aussi relevé une influence du pivotement des billes sur le retour du lubrifiant. Suivant les vitesses de rotation et le volume de lubrifiant considéré, les forces de volume sont dominées ou non par les forces de surface.

En 1985, Kingsbury [56] introduit le concept de "parched lubrication". Il désigne ainsi la lubrification des contacts ne présentant pas de réserves de lubrifiant pour les réalimenter ou dont les réserves sont immobiles, du fait de leur forte viscosité ou des faibles forces qui leur sont appliquées. Une image d'un contact en condition de "parched lubrication" est donnée en figure 2.6. C'est, par exemple, le cas des roulements lubrifiés par une graisse. Un contact lubrifié, dans ces conditions, présente une longue période transitoire où l'épaisseur de film décroît lentement. Pendant cette période, le débit d'éjection assèche progressivement la piste de roulement jusqu'à ce qu'il devienne comparable au débit de réalimentation. Un équilibre est alors établi. Kingsbury a observé, sur des roulements de gyroscopes, cette période transitoire suivie de l'équilibre. A chaque injection d'une goutte de lubrifiant dans le roulement, l'augmentation de l'épaisseur de film de lubrifiant entraîne une augmentation du couple moteur, due aux pertes par cisaillement visqueux. Cette phase transitoire dure jusqu'à ce que la goutte de lubrifiant soit éjectée et que l'équilibre entre débit d'éjection et de réalimentation soit de nouveau atteint.

Pemberton et Cameron [71] ont observé en 1976 les écoulements de lubrifiant dans l'entrée du contact afin d'identifier les mécanismes d'éjection et de réalimentation. Leur démarche expérimentale consistait à suivre la trajectoire des bulles d'air piégées dans le lubrifiant. Ils ont montré que le remplissage intervient dans le ménisque et non entre les passages. En retirant une bille de leur dispositif expérimental, ils ont doublé la distance qui sépare deux éléments roulants successifs. Le temps qui sépare deux passages d'éléments roulants est donc également doublé. Le temps offert au lubrifiant pour retourner sur la piste de roulement est donc doublé.



FIG. 2.6 – Image interférométrique d'un contact en sous-alimentation sévère ("parched lubrication"), l'entrée du contact se trouve à gauche de l'image, le ménisque se superpose avec la frontière de Hertz.

Ils ont, dans ces conditions, observé la forme du ménisque d'entrée et sa distance à la zone de Hertz. Ils n'ont distingué aucune variation par rapport au cas de référence comportant toutes les billes. Ceci prouve que le retour du lubrifiant ne s'effectue pas entre les passages des éléments roulants mais au voisinage du contact.

La forme de la courbe d'épaisseur de film en fonction du produit vitesse-viscosité résulte de l'équilibre entre les débits d'éjection et de réalimentation. Dans la première partie de la courbe, l'épaisseur de film est croissante (voir figure 2.5). Le contact est sur-alimenté. La position d'équilibre du ménisque est assez éloignée de la zone de Hertz. Dans la seconde partie, l'équilibre entre les débits qui régissent la sous-alimentation est différent et le ménisque se trouve plus proche de la frontière de Hertz. Cette inversion du comportement de l'épaisseur de film avec la vitesse a été confirmée à plusieurs reprises, notamment par Coy et Zaretsky en 1981 [19] et par Gadallah et Dalmaz en 1984 [30].

Guanteng [38] a montré expérimentalement l'influence du volume de lubrifiant et de sa viscosité sur le point de transition entre les régimes sur et sous-alimentés. Il a obtenu les différents volumes, en déposant une solution de lubrifiant de concentration variable sur les surfaces et en attendant l'évaporation du solvant. Cette technique lui a permis d'obtenir des films très minces d'épaisseur prédéfinie et relativement homogène. Il a observé la persistance d'un film de lubrifiant dans les conditions de sous-alimentation sévère "parched lubrication" décrites par Kingsbury.

Barker, Johnston et Spikes ont observé, en 1993, la sous-alimentation d'un contact EHD, par une émulsion d'huile dans de l'eau [4]. Ils ont confirmé l'existence d'un lien entre la position du ménisque d'entrée et l'épaisseur de film dans le contact. Ils ont observé que les courbes d'épaisseur de film en fonction de la vitesse étaient caractérisées par la même forme que dans le cas d'une sous-alimentation classique. Ils ont montré que le point de transition entre régimes sur et sousalimentés se déplace vers les hautes vitesses, lorsque la concentration en huile augmente. Les courbes se ressemblant beaucoup, ils laissent entendre que les mécanismes de sous-alimentation pourraient être identiques à ceux de la sous-alimentation classique.

### 2.10.2 Contacts graissés

Une graisse est composée à près de 90% d'une huile de base, près de 10% de savon qui lui confère ses propriétés de semi-solide, et le reste est constitué de stabilisateurs et d'additifs. Le savon, dont la structure est fibreuse, constitue un réseau tridimensionnel dont le rôle est de retenir l'huile de base, un peu à la manière d'une éponge qui contient un liquide (voir figure 2.7). Du fait que la graisse s'écoule très peu, son utilisation pour la lubrification est avantageuse. Elle reste confinée dans le contact. Il n'est donc pas nécessaire d'apporter un débit régulier de lubrifiant. Ceci permet de faire l'économie de pompes et de tuyauterie pour acheminer le lubrifiant jusque dans le contact. D'autre part, les épaules de graisse formées de part et d'autre du contact empêchent des particules de venir le polluer.



FIG. 2.7 – Images microscopiques de graisses au grossissement  $\times 140~000$ , de gauche à droite : lithium ester, lithium ester polymère, lithium minérale, lithium minérale polymère.

La réponse de la graisse aux sollicitations est celle du système composé par l'huile de base et le savon. Elle a donc un comportement plus complexe que celui d'une huile de base, seule. Ses propriétés évoluent au cours du temps. En fonctionnement, la graisse est cisaillée; les fibres du savon sont déformées, emmêlées et brisées. Les fibres agglomérées peuvent contenir un volume d'huile de base moins important que dans leur état initial. Une partie de l'huile de base est donc libérée. La mobilité de la graisse est ainsi modifiée.

Le modèle de Herschel-Bulkley donne la réponse d'une graisse à un cisaillement, en termes de contrainte. Il repose sur l'existence d'un seuil de contrainte en dessous duquel la graisse ne s'écoule pas.

En 1988, Zhu [84] observe qu'après un cisaillement suffisant de la graisse, ses propriétés tendent vers celles de son huile de base.

L'influence de la dégradation de la graisse sur la sous-alimentation a été mise en évidence par Bowden et Tabor en 1986 [7]. Leurs expériences illustrent le retour de lubrifiant autour du contact après l'arrêt de la bille. La viscosité du lubrifiant qui revient sur la piste de roulement est plus faible que celle de la graisse avec son savon. Ceci laisse supposer que les effets de tension de surface séparent l'huile de base de la matrice de savon ou bien que seule l'huile de base, qui aurait été séparée du savon par cisaillement de la graisse, peut être drainée par les forces de surface.

Deux ans plus tard, Zhu [84] étudie la sous-alimentation d'un contact graissé. Il met en évidence que le volume de lubrifiant disposé de part et d'autre de la piste de roulement constitue des réservoirs latéraux de lubrifiant. Ces réservoirs, sous l'effet du pivotement des billes, peuvent réalimenter le contact en lubrifiant. Ses expériences sur le contact linéique sous-alimenté montrent qu'après un petit nombre de cycles, l'épaisseur de film se stabilise à 0.8 fois l'épaisseur sur-alimentée.

En 1991, Åström [1] observe, avec une caméra, les fibres de savon entraînées dans le contact et les perturbations qu'elles provoquent sur l'épaisseur de film. Pour un contact graissé, il relève la réduction de l'épaisseur de film au cours du temps. Il note aussi l'existence d'un équilibre, après un nombre suffisant de cycles. Pour le même contact lubrifié, cette fois avec une huile de base, la situation d'équilibre est atteinte dès l'instant initial. Avec les conditions expérimentales qu'il a utilisées, le contact huilé fonctionne à une vitesse suffisamment faible pour opérer en conditions sur-alimentées.

En 1993, il propose un modèle [2] qui prédit la décroissance du film de lubrifiant au cours des cycles, en l'absence de réalimentation. Comme ses calculs donnent une décroissance plus rapide que celle observée expérimentalement, il en déduit qu'il existe une réalimentation qui compense une partie de l'éjection même dans le cas des contacts graissés. Après plusieurs jours, le sillage laissé par la bille dans le lubrifiant n'a pas évolué de manière significative. Cela confirme que la réalimentation d'un contact graissé s'opère uniquement au voisinage de la bille. La viscosité du lubrifiant qui revient alimenter le contact a été mesurée. Elle est plus faible que la viscosité nominale de la graisse.

En 1996, Cann et al. [12] distinguent trois zones dans la courbe de réduction d'épaisseur de film. La première est un plateau qui correspond à la constitution d'une couche de graisse sur la piste. Dans la seconde partie, la couche de graisse travaillée par le cisaillement, libère l'huile qu'elle contient. Le comportement est alors celui de l'huile de base (en termes de réduction d'épaisseur de film). Dans la troisième zone, l'épaisseur se stabilise de nouveau, sous l'effet de l'augmentation du volume d'huile libre et de la réduction du volume d'huile éjectée. Cann et al. estiment que cette épaisseur stabilisée détermine la durée de vie du contact.

Cann [13] a consacré en 1999 une étude à l'influence de la concentration en savon des graisses sur la sous-alimentation. Elle porte sur les effets conjugués des variations de l'épaisseur de film, de la température, de la viscosité de l'huile de base et de la vitesse. Elle a mis en évidence une corrélation entre le volume d'huile de base libéré par cisaillement de la graisse et la sévérité de la sous-alimentation. L'épaisseur de film croît avec la quantité d'huile de base libérée. Cela signifie que le volume d'huile de base libéré diminue la sévérité de la sous-alimentation.

Mérieux et al. [63] ont poursuivi les travaux, en proposant un modèle de prédiction des modifications de la graisse, au cours du temps, sous l'effet du cisaillement, sur le processus de réalimentation en lubrifiant du contact.

La prédiction de l'équilibre, entre débits d'éjection et de réalimentation en lubrifiant, passe par la compréhension des mécanismes à leur origine. Jacod [49] a montré, par une modélisation avec un lubrifiant newtonien (du type de l'huile de base), que les forces de surface ne suffisent pas à déplacer un volume significatif de lubrifiant hors du contact. Il a montré que les pressions capillaires, sur les épaules de lubrifiant le long de la piste de roulement, sont trop faibles devant les contraintes visqueuses, pour créer une réalimentation suffisante. Les rayons de courbure étant plus faibles au voisinage des corps roulants, la dépression capillaire y est plus importante. Associés aux mécanismes de tension de surface, ces rayons de courbure pourraient donc opérer un retour de lubrifiant. La comparaison des résultats obtenus avec des expériences souligne une bonne corrélation entre la modélisation et les expériences.

### 2.10.3 Modélisation de la sous-alimentation

Afin de modéliser le ménisque, sans en imposer la position, Elrod a utilisé l'équation de Reynolds qu'il a modifiée avec les conditions aux limites de Floberg [29]. Ces conditions aux limites avaient été établies pour des paliers hydrodynamiques. Elles étaient destinées à modéliser la rupture du film de lubrifiant par cavitation, à la sortie du contact. Elles traduisent une conservation du débit massique de lubrifiant. La modification de l'équation de Reynolds consiste à y introduire un paramètre  $\theta$  de densité de lubrifiant ou de remplissage et à diviser le domaine en deux sous-domaines. Dans le premier, le film est complet et l'équation classique de Reynolds s'applique. Dans le second, chacune des deux surfaces est couverte par un film de lubrifiant. Ces deux couches de lubrifiant, séparées par de l'air, sont transportées par les surfaces. Par conséquent, la position du ménisque qui sépare les deux domaines n'est pas fixée a priori. Elle résulte des épaisseurs de lubrifiant disposées sur les surfaces, aux frontières du domaine.

Ce modèle a été amplement utilisé pour décrire la cavitation et la sous-alimentation dans les paliers hydrodynamiques.

En 1996, Chevalier [14] l'a utilisé, pour étudier la sous-alimentation en contacts EHD. Il s'est attaché à décrire la sous-alimentation à partir de paramètres, les plus significatifs possibles. Pour cela, au lieu de considérer la distance (difficilement mesurable) entre le ménisque d'entrée et la frontière de Hertz, il a utilisé la hauteur de lubrifiant disponible sur la piste. Cette grandeur est une donnée d'entrée du modèle de Elrod. De plus, elle est égale à la somme de l'épaisseur de film laissée par le contact précédent et de l'épaisseur due aux débits de réalimentation. Son évaluation expérimentale est possible même dans les conditions très sous-alimentées. Il a calculé numériquement, pour différents contacts EHD circulaires, l'évolution de l'épaisseur de film au centre du contact, en fonction de l'épaisseur du film disposé sur les surfaces. Il a proposé une fonction à un paramètre,  $\gamma$ , pour décrire cette évolution. Une évaluation expérimentale de ce paramètre a été effectuée pour quelques cas [15]. Elle confirme les résultats numériques obtenus.

Chevalier [16] s'est également intéressé à l'influence de la disposition du lubrifiant à l'entrée du contact, dans le cas où elle n'est pas constante perpendiculairement à l'écoulement. Cette étude présente un intérêt pour l'analyse de l'influence des cages de roulement sur la lubrification. Sous certaines conditions, les cages peuvent retirer localement ou, au contraire, redistribuer le lubrifiant, sur la largeur de la piste de roulement. Il a observé numériquement et expérimentalement qu'un retrait local de lubrifiant peut entraîner une sous-alimentation locale et une réduction locale de l'épaisseur de film.

La sous-alimentation réduit l'épaisseur de film de lubrifiant. Cette réduction, due à la faible quantité de lubrifiant, est défavorable à la durée de vie. Dumont et al. [25] ont tenté, sous des conditions de sous-alimentation comparables, de réduire la sévérité de la sous-alimentation, en utilisant une géométrie de surface particulière. Ils ont traité numériquement le problème sous-alimenté transitoire. En prenant l'hypothèse d'une distribution de lubrifiant particulière et en raisonnant sur une alimentation stationnaire imposée, ils concluent que les creux d'une surface pourraient jouer le rôle de réservoir, en piégeant du lubrifiant. Ce réservoir améliorerait la lubrification, en libérant, à l'entrée du contact, une partie du lubrifiant qu'il contient.

# 2.11 Conclusion

La lubrification des contacts sur-alimentés est relativement bien connue. Lorsque les surfaces sont lisses, les champs d'épaisseurs et de pression sont connus par le calcul et l'expérience. Ils conduisent, d'après les travaux de Jacod [50], à une évaluation du coefficient de frottement, si les propriétés du lubrifiant sont bien identifiées. En présence de rugosités, l'épaisseur et l'amplitude des pics de pression sont connues pour des surfaces modèles. Leur estimation, pour une surface réelle, repose sur l'analyse statistique de ses propriétés topographiques. L'estimation du coefficient de frottement est alors beaucoup moins aisée.

La sous-alimentation modifie les champs de pression et d'épaisseur de film. En contact lisse, des expressions de l'épaisseur de film ont été proposées par approximation de résultats expérimentaux. Elles sont valables pour des contacts linéiques et circulaires sur et moyennement sous-alimentés. La position du ménisque d'entrée est un paramètre supposé connu. Des valeurs ont été tabulées pour le contact circulaire, connaissant l'épaisseur des films de lubrifiant disponible sur les surfaces.

Entre les régimes sur et sous-alimentés, une inversion de comportement s'opère. En régime suralimenté, une mobilité importante du lubrifiant ou une faible vitesse des surfaces entraîne une éjection importante de lubrifiant, hors de la zone de contact. Les épaisseurs de film qui en résultent sont faibles. Au contraire, en régime sous-alimenté, une forte mobilité de lubrifiant ou de faibles vitesses de surfaces sont propices à un retour de lubrifiant sur la piste de roulement. Elles favorisent donc la réalimentation qui augmente les épaisseurs de film (tout en restant inférieures aux valeurs sur-alimentées). Un industriel, qui souhaiterait voir augmenter l'épaisseur de film dans un contact, doit augmenter le produit vitesse-viscosité en régime sur-alimenté, alors qu'il doit le réduire en régime sous-alimenté. La figure 2.5 illustre l'inversion de la tendance, entre régimes sur et sous-alimentés.

Les chapitres 1 et 2 ont évoqué le couplage existant entre les phénomènes physiques qui interviennent dans un contact EHD. Ils ont établi un état de l'art succinct, au travers de citations ciblées qui constituent une base de réflexion pour les chapitres suivants.

Le chapitre 3 met en équations les lois qui décrivent le contact. Dans un premier temps, il présente les équations classiques de la lubrification EHD. La seconde partie de ce chapitre est consacrée à la modélisation mathématique de la sous-alimentation, avec les conditions de Elrod.

Dans le chapitre 4, les équations sont discrétisées et l'algorithme de résolution numérique "ML-MI" utilisé est sommairement exposé. Enfin, la précision des résultats est discutée.

La réponse d'un contact à la sous-alimentation, en termes d'épaisseur de film, peut être traduite par le paramètre sans dimension  $\gamma$ , introduit en 2.10.3. Le chapitre 5 présente les variations de  $\gamma$ , en fonction des conditions de contact, pour les contacts circulaires et elliptiques. Il fournit une justification physique de l'évolution de  $\gamma$ , en fonction des paramètres du contact (matériau, lubrifiant, charge, vitesse, rayon de contact, ellipticité). Cette justification s'appuie sur un modèle analytique dont les résultats ont été validés numériquement et expérimentalement.

Le chapitre 5 reprend l'analyse du mécanisme d'éjection du lubrifiant, pour étudier l'influence de la répartition du lubrifiant, à l'entrée d'un contact EHD. Lorsque cette répartition est nonuniforme, elle peut provoquer la sous-alimentation locale du contact.
L'annexe A présente la démarche expérimentale et elle aborde le problème de l'influence des cages de roulement sur la sous-alimentation.

# Chapitre 3

# Modélisation de la lubrification

# 3.1 Introduction

La lubrification en régime stationnaire sur-alimenté est décrite par trois équations, auxquelles sont associées des lois de comportement. Pour traiter la lubrification sous-alimentée, une quatrième équation est adjointe au système.

La première équation, dite de Reynolds, traduit la conservation du débit massique de lubrifiant, à travers un volume élémentaire. Sa résolution fournit le champ de pression, en fonction de la vitesse des surfaces et de leur forme. Sous l'effet de la pression, les surfaces en contact se déforment. Leur géométrie déformée est donnée par l'équation d'élasticité. La troisième équation est une équation d'équilibre. Elle exprime l'égalité entre la force appliquée au contact et l'intégrale du champ de pression. En contact sous-alimenté, deux zones sont distinguées : une zone de pression positive et une zone de pression nulle. Pour traduire le changement de nature de l'écoulement entre ces deux zones, l'équation de Reynolds est modifiée et une équation de complémentarité est ajoutée au système.

Les lois de comportement sont relatives au lubrifiant (loi de compressibilité et piezo-viscosité), ainsi qu'aux matériaux des surfaces en contact (loi d'élasticité). Elles interviennent respectivement dans l'équation de Reynolds et dans l'équation d'élasticité.

Ce chapitre présente le modèle de contact utilisé. La section 3.2 est consacrée au problème sec elliptique. Les équations du contact lubrifié, en régime stationnaire, sur et sous-alimenté, sont présentées en 3.3 et 3.4. Les grandeurs caractéristiques du contact sec servent de base à l'adimensionnement du problème EHD. La forme adimensionnée des variables et des équations est donnée en 3.5.

## 3.2 Contact sec, théorie de Hertz

### 3.2.1 Géométrie des corps en contact

Le contact elliptique désigne un contact dont la surface en pression est de forme elliptique. Il est obtenu entre deux surfaces, dont au moins une présente des rayons de courbure différents dans les deux directions. La géométrie des corps est approchée par des paraboloïdes elliptiques (voir figure 3.1). Les surfaces en contact 1 et 2 présentent respectivement des rayons de courbure  $R_{x1}$ ,  $R_{y1}$  et  $R_{x2}$ ,  $R_{y2}$ , dans les directions  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ . Par convention, l'axe  $(O, \vec{x})$  est fixé dans la direction et dans le sens du mouvement (roulement et/ou glissement),  $(O, \vec{y})$  est le deuxième axe appartenant au plan de contact. L'épaisseur du film de lubrifiant est mesurée selon l'axe  $(O, \vec{z})$ , perpendiculairement au plan de contact. Le repère  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , dont l'origine O se trouve au centre du contact, est orthonormé et direct.

D'après les travaux de Hertz [43], la pression, entre les surfaces 1 et 2, est identique à celle obtenue entre un paraboloïde elliptique de rayons  $R_x$ ,  $R_y$  et un plan (voir figure 3.1). Les rayons équivalents  $R_x$  et  $R_y$  étant définis selon (3.1).

$$R_x = \left(\frac{1}{R_{x1}} + \frac{1}{R_{x2}}\right)^{-1} \quad \text{et} \quad R_y = \left(\frac{1}{R_{y1}} + \frac{1}{R_{y2}}\right)^{-1} \quad (3.1)$$

A partir des rayons équivalents  $R_x$  et  $R_y$ , un rayon réduit R est défini par (3.2) :

$$R = \left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y}\right)^{-1} \tag{3.2}$$

Le module d'Young E' équivalent aux modules d'Young  $E_1$  et  $E_2$  des matériaux 1 et 2 est défini par la relation (3.3).



FIG. 3.1 - Géométrie des surfaces, en contact elliptique, à gauche : géométrie réelle, à droite : géométrie équivalente.

### 3.2.2 Elasticité

Les corps en contact sont considérés comme des massifs semi-infinis, élastiques, homogènes et isotropes. Sous l'effet du champ de pression p(x, y), les surfaces se déforment. La géométrie déformée est donnée par l'équation d'élasticité (3.4).

$$h(x,y) = h_0 + \frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y} + \frac{2}{\pi E'} \iint_{\Omega} \frac{p(x',y') \, dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \tag{3.4}$$

 $h_0$  est une constante d'intégration. La quantité  $-h_0$  correspond au déplacement relatif des corps solides, à partir de la mise en contact des deux solides, lors de l'application de l'effort sur le

contact. Elle peut aussi être considérée comme l'interpénétration des surfaces, au centre du contact, si elles n'étaient pas déformées.  $\Omega$  désigne le domaine d'intégration.  $\Omega$  doit être suffisamment grand, pour inclure les régions du contact où la pression est significative. Il est choisi rectangulaire et limité par les frontières d'entrée et de sortie, d'abscisses respectives  $x_e$  et  $x_s$ . Il est limité dans la direction transversale par les frontières  $y_0$  et  $-y_0$ .

#### 3.2.3 Equation d'équilibre

Le contact supporte une charge w. Ceci signifie que la force w, appliquée sur les solides en contact, est équilibrée par la pression p que les surfaces s'exercent mutuellement, soit :

$$w = \iint_{\Omega} p(x, y) \, dxdy \tag{3.5}$$

Au cours du processus itératif de résolution, le terme  $h_0$  de l'équation (3.4) est modifié de manière itérative pour satisfaire l'équation (3.5).

#### 3.2.4 Solution du problème de Hertz

Hertz [43] a montré que dans le domaine élastique, la forme du champ de pression est un ellipsoïde de révolution, d'équation (3.6).

$$p(x,y) = p_h \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{1/2} \quad \text{si} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1, \quad p = 0 \quad \text{sinon}$$
(3.6)

La pression maximale de Hertz  $p_h$  est définie par (3.7), lorsque le contact supporte la charge w :

$$p_h = \frac{3\mathbf{w}}{2\pi ab} \tag{3.7}$$

a et b désignent la longueur des deux axes de l'ellipse de contact. La résolution du problème de contact sec conduit à :

$$a = \left(\frac{3\mathrm{w}R}{E'}\right)^{1/3} \left(\frac{2\kappa\mathcal{E}}{\pi}\right)^{1/3} \tag{3.8}$$

Le rapport  $\kappa = a/b$  et la déformation  $\delta$  au centre du contact sont obtenus par les relations (3.9) à (3.14) d'après Hamrock et Brewe [42].

$$\kappa = \frac{a}{b} \tag{3.9}$$

$$\frac{R_x}{R_y} = \kappa^2 \frac{\mathcal{K} - \mathcal{E}}{\mathcal{E} - \kappa^2 \mathcal{K}} \tag{3.10}$$

$$m = \sqrt{1 - \kappa^2} \tag{3.11}$$

$$\mathcal{K}(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2(\psi)}} d\psi$$
(3.12)

$$\mathcal{E}(m) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m^2 \sin^2(\psi)} d\psi$$
 (3.13)

$$\delta = a^2 \mathcal{K} / 2R\mathcal{E} \tag{3.14}$$

Les variables  $\kappa$ ,  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{E}$  dépendent uniquement du rapport  $R_x/R_y$ . Leurs valeurs sont obtenues simplement par résolution du système formé des équations (3.10) à (3.13). L'évolution de l'allongement  $\kappa$  de l'ellipse de contact avec le rapport  $R_x/R_y$  est donnée en figure 3.2. Remarque :

Les contacts elliptiques présentent, dans la grande majorité des cas, un grand axe d'ellipse perpendiculaire à la direction de roulement. C'est le cas dans les roulements à gorge profonde, à rouleaux ou à galets. Ces ellipses correspondent à des valeurs de  $\kappa = a/b < 1$ .



FIG. 3.2 – Evolution de l'ellipticité  $\kappa$  avec le rapport des rayons de courbure  $R_x/R_y$ .

## 3.3 Lubrification élastohydrodynamique

#### 3.3.1 Equation de Reynolds en régime élastohydrodynamique

En contact lubrifié, les efforts sont transmis d'une surface à l'autre par le lubrifiant. L'équation de Reynolds (3.15) traduit la conservation de la masse dans l'écoulement entre les surfaces, séparées par une hauteur de lubrifiant h(x, y). Cette équation est obtenue par simplification des équations de Navier-Stokes, en y introduisant les hypothèses suivantes :

- le film de lubrifiant est mince  $(h/a \ll 1 \text{ et } h/b \ll 1)$ ,
- il est constitué d'un fluide newtonien, continu qui adhère aux parois,
- l'écoulement est laminaire,
- la pression est constante dans l'épaisseur du film,
- les forces de volume et de surface sont négligées devant les forces visqueuses.

La cinématique des surfaces est connue. Les surfaces 1 et 2 sont respectivement animées d'une vitesse  $\vec{u_1}$  et  $\vec{u_2}$  dans la direction  $\vec{x}$ . L'origine O du repère direct  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est fixée au centre du contact. Le repère est donc lié au contact et non aux surfaces. La direction et le sens de l'axe  $(O, \vec{x})$  sont donnés par la vitesse moyenne des surfaces  $\vec{u_m} = (\vec{u_1} + \vec{u_2})/2$ . L'axe  $(O, \vec{z})$ est orienté dans le sens de l'épaisseur du film. Loin du contact, la pression est supposée égale à la pression atmosphérique. La pression atmosphérique sert donc de référence. Elle est imposée comme condition aux limites, aux frontières du domaine de calcul  $\Omega$ .

La résolution de l'équation de Reynolds fournit le champ de pression p(x, y) dans le contact. En tout point de l'écoulement, de coordonnées (x, y), l'équation de Reynolds prend la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) - u_m \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} - \rho h \frac{\partial u_m}{\partial x} - \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = 0$$
(3.15)

Pour les besoins de la présente étude, deux simplifications peuvent être opérées dans l'équation de Reynolds (3.15).

• Les problèmes abordés étant considérés stationnaires, le terme transitoire  $-\partial(\rho h)/\partial t$  est nul. • Les surfaces ne se déforment pas dans le plan du contact  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ . Les vitesses des surfaces dans ce plan sont donc constantes. Le terme  $-\rho h \partial u_m/\partial x$  est donc nul également. L'expression simplifiée de l'équation de Reynolds est donnée par (3.16).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) - u_m \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} = 0$$
(3.16)

A la sortie du contact, le divergent entraîne la chute de la pression (voir figure 3.5). Aux faibles pressions, le lubrifiant est vaporisé. Ce phénomène, appelé cavitation par abus de langage, est mis en équation en ajoutant la condition de cavitation :  $p \ge 0$  à l'équation de Reynolds. La pression de cavitation étant très faible en valeur absolue devant la pression au centre du contact, elle est considérée nulle. Le domaine comporte donc deux régions distinctes (voir figure 3.6).

- Dans la première, la pression est positive et l'équation de Reynolds s'applique.
- Dans la seconde, la condition de cavitation s'applique et la pression est nulle.

En lubrification élastohydrodynamique, les propriétés des lubrifiants sont variables. La pression augmente couramment d'un facteur 5000 à 40000, lorsqu'elle passe de la pression atmosphérique à la pression au centre du contact. Les sections 3.3.2 et 3.3.3 sont consacrées à l'influence de la pression p, sur la masse volumique  $\rho$  et sur la viscosité  $\eta$  du lubrifiant.

#### 3.3.2 Loi de compressibilité

Les variations de la masse volumique des lubrifiants, en fonction de la pression, ont été étudiées par Dowson et Higginson. Ils ont proposé une relation empirique (3.17) qui lie la masse volumique  $\rho$  à la pression p. Cette loi de variation est illustrée en figure 3.3. Une augmentation de la masse volumique, de l'ordre de 15 à 30%, est observable entre la masse volumique  $\rho_0$  à la pression atmosphérique et la masse volumique au centre d'un contact EHD.

$$\rho = \rho_0 \frac{0.59 \ 10^9 + 1.34p}{0.59 \ 10^9 + p} \tag{3.17}$$



FIG. 3.3 – Evolution de la masse volumique  $\rho$  avec la pression p, ( $\rho_0$  est la masse volumique à la pression atmosphérique).

#### 3.3.3 Loi de piezo-viscosité

La variation de la viscosité avec la pression est beaucoup plus importante que celle de la masse volumique. Barus [5] modélise cette variation par la relation (3.18).

$$\eta = \eta_0 \exp(\alpha p) \tag{3.18}$$

Où  $\alpha$  est appelé coefficient de visco-pression.  $\eta_0$  est la viscosité du lubrifiant à la pression ambiante. Pour les huiles minérales  $\alpha$  varie de  $10^{-8}$  à  $2.10^{-8}$  Pa<sup>-1</sup>. Pour les fortes pressions, l'équation (3.18) surestime la valeur de la viscosité par rapport à la réalité.

Roelands [74] a élaboré une relation plus précise (3.19), valable pour des pressions inférieures à 1 GPa.

$$\eta(p) = \eta_0 \exp\left\{\frac{\alpha p_0}{z} \left[-1 + \left(1 + \frac{p}{p_0}\right)\right]^z\right\}$$
(3.19)

La constante  $p_0$  vaut 1.96 10<sup>8</sup> Pa, et 0.6 est une valeur couramment admise pour l'indice de piezo-viscosité z.

Les variations de la viscosité avec la pression, d'après Barus et Roelands, sont illustrées sur la figure (3.4).



FIG. 3.4 – Evolution de la viscosité  $\eta$  avec la pression p, ( $\eta_0$  est la viscosité à la pression atmosphérique).

Les travaux de Jacobson, Vinet et Bair [47, 48, 3] concernant la compressibilité et l'augmentation de la viscosité avec la pression ont été menés plus récemment. Ils sont plus précis, mais présentent l'inconvénient de contenir des constantes propres à chaque liquide, dont la mesure nécessite un équipement lourd.

## 3.4 Lubrification sous-alimentée

En lubrification sur-alimentée, le convergent, situé à l'entrée du contact, est rempli de lubrifiant, alors qu'en contact sous-alimenté, chaque surface est recouverte d'une couche de lubrifiant. Ces couches, qui alimentent le contact en lubrifiant, sont séparées par un volume d'air. A partir du ménisque d'entrée, défini par la ligne où les deux couches de lubrifiant se rencontrent et fusionnent, les surfaces sont séparées par un unique film de lubrifiant. Celui-ci se rompt à la sortie du contact, à la frontière de cavitation, pour former, de nouveau, deux couches de lubrifiant séparées par un volume d'air.

Lorsque les conditions de fonctionnement entraînent une réduction de l'épaisseur des couches d'alimentation, le ménisque d'entrée se rapproche de la zone de Hertz. Le champ de pression, qui s'étend du ménisque d'entrée à la frontière de cavitation, est alors concentré. L'épaisseur de film dans le contact est réduite et le champ de pression tend vers le champ de pression de Hertz. La figure 3.5 présente une coupe schématique de la distribution du lubrifiant sur les surfaces et de la pression dans le plan  $(O, \vec{x}, \vec{z})$ .



FIG. 3.5 – Coupe schématique dans le plan  $(O, \vec{x}, \vec{z})$  de la distribution de lubrifiant et de pression, entre les surfaces, pour un contact sur-alimenté (image de gauche) et un contact sous-alimenté (image de droite). Sur les deux dessins, l'entrée du contact se situe à gauche et la sortie à droite.

#### 3.4.1 Equation de Reynolds modifiée

Dans le contact, l'écoulement du lubrifiant peut être divisé en deux sous-domaines distincts.

• Dans le premier sous-domaine  $\Omega_1$ , le film de lubrifiant est incomplet : deux couches de lubrifiant adhèrent aux surfaces et sont séparées par un volume d'air. Ces couches d'alimentation sont soumises à la pression ambiante. La pression étant constante dans cette région, les forces volumiques et surfaciques étant négligées, chaque volume élémentaire de lubrifiant se trouve en équilibre. Le lubrifiant est entraîné par les surfaces, à vitesse constante. Si l'épaisseur des couches de lubrifiant sur les deux surfaces est égale ou si les vitesses des deux surfaces sont égales ( $\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \vec{u}_m$ ), le lubrifiant se déplace, en moyenne, à la vitesse moyenne des deux surfaces  $\vec{u}_m$ .

• Dans le second sous-domaine  $\Omega_2$ , le lubrifiant remplit le volume compris entre les deux surfaces. Cette configuration est identique à celle du contact sur-alimenté. Dans cette zone, une pression positive règne. L'écoulement y est décrit par l'équation de Reynolds.

Pour représenter l'épaisseur de lubrifiant sur les surfaces, le paramètre adimensionné  $\theta$  est introduit. Il est défini, en tout point du domaine de calcul  $\Omega$ , par le rapport entre l'épaisseur de lubrifiant  $h_{oil}$  et la distance h entre les deux surfaces :  $\theta = h_{oil}/h$ .

La figure 3.6 représente le domaine de calcul, contenant les deux sous-domaines, séparés par la frontière (ou le ménisque)  $\delta\Omega$ .

• Dans la zone de film incomplet  $\Omega_1$ , appelée par abus de langage zone cavitée :  $0 \leq \theta < 1$ , l'écoulement est décrit par l'équation de transport suivante :

$$u_m \frac{\partial(\rho \theta h)}{\partial x} = 0 \tag{3.20}$$

Dans la zone cavitée, la pression est nulle, donc la masse volumique  $\rho$  est constante. L'expression (3.20) se réduit donc à la forme suivante :

domaine  $\Omega$ 



FIG. 3.6 – Schéma des deux sous-domaines dans le domaine de calcule  $\Omega$ .

$$\frac{\partial(\theta h)}{\partial x} = 0 \tag{3.21}$$

• Dans la zone de film plein  $\Omega_2 : \theta = 1$ , l'écoulement est régi par l'équation de Reynolds classique (3.16).

Soit  $\vec{x}$ , le vecteur directeur unitaire de l'axe  $(O, \vec{x})$ . L'exposant "-" indique que le point considéré se trouve en amont du ménisque. L'exposant "+" est associé aux points situés en aval du ménisque. Le débit provenant de la zone cavitée, au travers du ménisque  $\delta\Omega$  orienté par sa normale sortante  $\vec{n}$ , vaut :  $\rho\theta^-hu_m\cos(\vec{x},\vec{n})$ . Celui provenant de la zone en pression vaut :  $\rho hu_m\cos(\vec{x},\vec{n}) - (\rho h^3/12\eta)\partial p^+/\partial n$ .

D'après Floberg [29] et Chevalier [14], la conservation de la masse, à travers la frontière  $\delta\Omega$ , et la continuité de la pression à la formation du film, impliquent :

• à la formation du film :

$$p = 0 \tag{3.22}$$

$$\rho u_m \cos(\vec{x}, \vec{n})(1 - \theta^-) = \frac{\rho h^2}{12\eta} \frac{\partial p^+}{\partial n}$$
(3.23)

• à la rupture du film :

$$p = 0, \qquad \frac{\partial p^-}{\partial n} = 0 \qquad \text{et} \qquad \theta^+ = 1$$
 (3.24)

D'après Elrod [26, 27] et Bayada et. al. [6], les expressions (3.16) et (3.21) de conservation de la masse dans l'écoulement, relatives à chacun des sous-domaines, peuvent être condensées en une équation unique associée à une condition de complémentarité. L'équation de Reynolds ainsi modifiée (3.25) est valide dans tout le domaine de calcul  $\Omega$ .

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) - u_m \frac{\partial(\rho \theta h)}{\partial x} = 0 \quad \text{avec} \quad p = 0 \Leftrightarrow 0 < \theta < 1 \quad \text{et} \quad p > 0 \Leftrightarrow \theta = 1 \tag{3.25}$$

L'épaisseur et la forme de la couche d'huile  $h_{oil}(x_e, y)$  qui alimente le contact sont des données d'entrée du problème. Elles sont imposées, mathématiquement, sous forme d'une condition aux limites sur la frontière  $x = x_e$ , en amont du contact, par la relation  $\theta(x_e, y) = h_{oil}(x_e, y)/h(x_e, y)$ .

Remarque :

L'équation (3.25) permet également de traiter le problème de contact sur-alimenté. Ce dernier est caractérisé par un convergent complètement rempli de lubrifiant. La condition aux limites correspondante est :  $\theta(x_e, y) = h_{oil}(x_e, y)/h(x_e, y) = 1$ .

## 3.5 Adimensionnement du problème EHD

La création et l'utilisation de variables adimensionnées présentent deux avantages majeurs.

• Les valeurs numériques des variables manipulées sont proches de l'unité. Le conditionnement des équations est donc amélioré et les erreurs numériques, qui apparaissent lors de la phase de résolution, sont réduites.

• La combinaison des variables physiques, pour former des groupes sans dimension, permet de réduire le nombre de paramètres d'entrée du problème. Les études expérimentales et numériques s'en trouvent simplifiées.

En contact EHD, l'épaisseur de film est faible devant les déformations élastiques des surfaces. Cela signifie que la géométrie et la distribution de pression sont proches de celles du problème du contact sec, dont la solution analytique est connue. Pour cette raison, les longueurs et pressions caractéristiques du contact sec sont utilisées comme références pour adimensionner le problème.

#### 3.5.1 Les variables

Les longueurs sont adimensionnées, dans le plan du contact  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ , avec la demi-longueur a et la demi-largeur b du contact de Hertz. La déformation élastique maximale de Hertz  $\delta = a^2 \mathcal{K}/2R\mathcal{E}$ , introduite en 3.2.4, est utilisée, dans l'adimensionnement des longueurs, dans la direction de l'épaisseur du contact :  $\vec{z}$ . La pression est adimensionnée avec la pression de Hertz  $p_h$ . La viscosité  $\eta$  et la masse volumique  $\rho$  sont adimensionnées par leurs valeurs à la pression ambiante (respectivement  $\eta_0$  et  $\rho_0$ ). Les variables adimensionnées, notées en caractères majuscules ou surlignées, sont données dans les relations (3.26) à (3.31).

$$X = \frac{x}{a} \tag{3.26}$$

$$Y = \frac{y}{b} \tag{3.27}$$

$$P = \frac{p}{p_h} = p \frac{2\pi ab}{3\mathbf{w}} \tag{3.28}$$

$$H = \frac{h}{\delta} = h \frac{2R\mathcal{E}}{a^2 \mathcal{K}} \tag{3.29}$$

$$\bar{\eta} = \frac{\eta}{\eta_0} \tag{3.30}$$

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} \tag{3.31}$$

Cet adimensionnement transforme l'ellipse de contact de Hertz, dans l'espace dimensionné, en un cercle, dans l'espace adimensionné (voir figure 3.7).



FIG. 3.7 – Contact elliptique dans le domaine adimensionné  $\overline{\Omega}$ .

#### 3.5.2 Les équations

Dans sa thèse sur la dynamique des contacts, Wijnant [83] a exprimé l'équation de Reynolds sous-alimentée (3.25) sous sa forme adimensionnée (3.32), pour les contacts elliptiques.

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\bar{\rho} H^3}{\bar{\eta} \lambda} \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \kappa^2 \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\bar{\rho} H^3}{\bar{\eta} \lambda} \frac{\partial P}{\partial Y} \right) - \frac{\partial(\bar{\rho} \theta H)}{\partial X} = 0$$
(3.32)

avec la condition de complémentarité :

$$P = 0 \Leftrightarrow 0 < \theta < 1 \quad \text{et} \quad P > 0 \Leftrightarrow \theta = 1 \tag{3.33}$$

Les équations (3.32) et (3.33) sont valables sur l'ensemble du domaine  $\overline{\Omega}$ .

$$\overline{\Omega} \left\{ \begin{array}{l} X_e \leqslant X \leqslant X_s \\ -Y_0 \leqslant Y \leqslant Y_0 \end{array} \right.$$

Le nombre a dimensionné  $\lambda$  est défini de la manière suivante :

$$\lambda = \frac{12u_m\eta_0 a}{\delta^2 p_h} \tag{3.34}$$

Aux frontières  $X_e$ ,  $X_s$ ,  $Y_0$  et  $-Y_0$  du domaine  $\overline{\Omega}$ , les conditions aux limites en pression et en épaisseur de film suivantes, sont imposées :

$$P(X_e, Y) = P(X_s, Y) = P(X, -Y_0) = P(X, Y_0) = 0$$
(3.35)

$$\theta(X_e, Y) = H_{oil}(X_e, Y) / H(X_e, Y)$$
(3.36)

La séparation adimensionnée des surfaces est donnée par :

$$H(X,Y) = H_0 + SX^2 + (1-S)Y^2 + \frac{1}{\pi \mathcal{K}} \iint_{\overline{\Omega}} \frac{P(X',Y') \ dX' dY'}{\sqrt{\kappa^2 (X-X')^2 + (Y-Y')^2}}$$
(3.37)

avec :

$$S = \frac{\mathcal{E} - \kappa^2 \mathcal{K}}{\mathcal{K} - \kappa^2 \mathcal{K}} \tag{3.38}$$

Le déplacement de corps rigide  $H_0$  est obtenu par itérations, afin de satisfaire l'équation d'équilibre des forces (3.5), qui prend la forme (3.39), lorsqu'elle est exprimée en fonction des variables adimensionnées.

$$\iint_{\overline{\Omega}} P(X,Y) \, dXdY = \frac{2\pi}{3} \tag{3.39}$$

La relation de piezo-viscosité, proposée par Barus, est utilisée en fonction de la pression adimensionnée P et du coefficient adimensionné de piezo-viscosité  $\bar{\alpha} = \alpha p_h$ :

$$\bar{\eta}(P) = \exp\left(\bar{\alpha}P\right) \tag{3.40}$$

Celle de Roelands, exprimée sous forme adimensionnée, devient :

$$\bar{\eta}(P) = \exp\left\{\frac{\alpha p_0}{z} \left[-1 + \left(1 + \frac{Pp_h}{p_0}\right)^z\right]\right\}$$
(3.41)

avec :

$$\frac{\alpha p_0}{z} = \ln \eta_0 + 9.67 \tag{3.42}$$

L'augmentation de la densité adimensionnée du lubrifiant avec la pression adimensionnée est traduite par la relation de Dowson et Higginson :

$$\bar{\rho}(P) = \frac{0.59\ 10^9 + 1.34Pp_h}{0.59\ 10^9 + Pp_h} \tag{3.43}$$

#### 3.5.3 Les paramètres

Afin de limiter les efforts portant sur les études paramétriques, expérimentales et numériques, en 1977, Hamrock et Dowson [39] ont créé les paramètres sans dimension U, W et G. Le nombre de paramètres d'entrée du problème a ainsi été réduit de 6 à 3. Ils sont définis de la manière suivante :

paramètre de vitesse :

$$U = \frac{\eta_0 u_m}{E' R_x} \tag{3.44}$$

paramètre de charge :

$$W = \frac{\mathbf{w}}{E'R_x^2} \tag{3.45}$$

paramètre de matériau :

$$G = \alpha E' \tag{3.46}$$

Moes [67] propose, en 1992, de conserver seulement les deux paramètres suivants :

paramètre de charge :

$$M = \frac{W}{(2U)^{3/4}} \tag{3.47}$$

paramètre de matériau :

$$L = G(2U)^{1/4} \tag{3.48}$$

Les expressions adimensionnées de la viscosité et de la masse volumique utilisent le paramètre  $\bar{\alpha}$ , qui peut être exprimé en fonction des paramètres M et L de Moes.

$$\bar{\alpha} = \frac{L}{\pi} \left[ \frac{3M\pi^2 \kappa}{2} \frac{(1 + R_x/R_y)^2}{16\mathcal{E}^2} \right]^{1/3}$$
(3.49)

De même, le paramètre adimensionné  $\lambda$  de l'équation de Reynolds peut être exprimé en fonction de M et L.

$$\lambda = \pi \left[ \frac{128}{3M^4} \frac{16\pi \mathcal{E}^5}{\kappa^4 (1 + R_x/R_y)^5 \mathcal{K}^6} \right]^{1/3}$$
(3.50)

## 3.5.4 Conclusion : mise en équations du problème EHD

Le problème de la lubrification EHD est modélisé mathématiquement par le système d'équations adimensionnées (3.51) à (3.56).

• équation de Reynolds modifiée :

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\bar{\rho} H^3}{\bar{\eta} \lambda} \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \kappa^2 \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\bar{\rho} H^3}{\bar{\eta} \lambda} \frac{\partial P}{\partial Y} \right) - \frac{\partial (\bar{\rho} \theta H)}{\partial X} = 0$$
(3.51)

• condition de complémentarité :

$$P = 0 \Leftrightarrow 0 < \theta < 1 \quad \text{et} \quad P > 0 \Leftrightarrow \theta = 1 \tag{3.52}$$

• équation d'élasticité :

$$H(X,Y) = H_0 + SX^2 + (1-S)Y^2 + \frac{1}{\pi \mathcal{K}} \iint_{\overline{\Omega}} \frac{P(X',Y') \ dX' dY'}{\sqrt{\kappa^2 (X-X')^2 + (Y-Y')^2}}$$
(3.53)

• équation d'équilibre :

$$\iint_{\overline{\Omega}} P(X,Y) \, dXdY = \frac{2\pi}{3} \tag{3.54}$$

Les conditions aux limites associées au système d'équations sont les suivantes :

$$P(X_e, Y) = P(X_s, Y) = P(X, -Y_0) = P(X, Y_0) = 0$$
(3.55)

$$\theta(X_e, Y) = H_{oil}(X_e, Y) / H(X_e, Y)$$
(3.56)

# Chapitre 4

# Résolution, techniques Multigrilles

## 4.1 Introduction

La modélisation du problème de contact EHD sous-alimenté est présentée dans le chapitre 3. L'évaluation de la déformation des surfaces en contact s'appuie sur l'intégrale (3.37) et le calcul du champ de pression dans l'écoulement repose sur l'équation de Reynolds (3.32). La solution analytique de l'équation de Reynolds (équation aux dérivées partielles) n'est pas connue. A défaut, une solution discrète est envisagée. L'intégrale s'applique sur le champ de pression discret, solution de l'équation de Reynolds. Les expressions discrètes des équations (3.37) et (3.32) sont détaillées en 4.3.

Le champ de pression dans l'écoulement est fonction de la forme des surfaces qui dépend du champ de pression. Le problème à résoudre est donc couplé et il présente plusieurs sources de forte non-linéarité. Il requiert donc un algorithme de résolution possédant de bonnes propriétés de stabilité.

Soit N le nombre de points de discrétisation. L'évaluation exacte de l'intégrale discrète sur tout le domaine de calcul, par une méthode classique, est de complexité  $N^2$ . Le temps de calcul augmente donc très rapidement avec N. La technique d'intégration rapide "Multi Level - Multi Integral", notée par la suite "ML-MI", présentée en 4.2.3, permet de réduire cette complexité à  $N \ln N$ . Le gain de temps de calcul est obtenu par des considérations sur la forme du "noyau", qui pondère la fonction à intégrer. En effet, dans les régions du domaine de calcul où le noyau est lisse, une valeur moyennée sur plusieurs points de discrétisation est utilisée. La perte de précision associée à cette approximation est négligeable. C'est la réduction du nombre de points d'intégration considérés qui accélère le processus de calcul.

La méthode "multigrille" est utilisée pour résoudre l'équation de Reynolds discrète. Elle est plus rapide qu'une méthode directe (d'inversion de matrice) de type Newton-Raphson ou pivot de Gauss. Elle est plus rapide (et plus stable lorsqu'elle est utilisée avec un algorithme "Full Multi Grid") qu'une méthode itérative de type Jacobi ou Gauss-Seidel. La performance de la méthode multigrille réside dans la combinaison :

• de discrétisations grossières, qui assurent la convergence de la solution vers sa forme générale (peu précise),

• avec des discrétisations plus fines dont la solution est suffisamment précise.

La rapidité de la méthode est due au faible nombre d'itérations nécessaires à la convergence de la solution, sur les grilles de discrétisation grossière, et au faible coût de chacune de ces itérations. Le processus itératif de résolution consiste en une succession de réductions d'erreurs. Il s'applique sur la solution initiale (imposée, avant la résolution, lors de l'initialisation des variables).

Cette solution évolue au cours des itérations, jusqu'à ce qu'elle ait convergé; l'erreur qu'elle comporte est alors négligeable devant l'erreur de discrétisation.

Plusieurs discrétisations uniformes du domaine de calcul sont utilisées. Elles sont appelées grilles et possèdent un pas de maillage différent les unes des autres. L'erreur contenue dans la solution peut être décomposée en séries de Fourier. Le processus itératif de résolution agit différemment sur chacune des longueurs d'onde qui composent l'erreur :

• Chacune des grilles est très performante pour réduire les erreurs dont la longueur d'onde est de l'ordre du pas de maillage.

• Au contraire, la réduction des erreurs de grande longueur d'onde (comparée au pas de discrétisation) nécessite un grand nombre d'itérations.

Les multigrilles utilisent les avantages des différentes grilles, de manière optimale, pour réduire efficacement l'amplitude de toutes les longueurs d'onde qui composent l'erreur. La combinaison des avantages des différentes grilles conduit à un algorithme de résolution basé sur des techniques classiques, mais dont la stabilité et la rapidité sont accrues dans des proportions importantes.

Le principe des techniques multigrilles et "ML-MI" est présenté en 4.2. Dans leur livre, Venner et Lubrecht [80] ont rassemblé les détails de ces méthodes et en proposent une application au problème EHD sur-alimenté circulaire.

# 4.2 Techniques multigrilles et "ML-MI"

## 4.2.1 Principe des multigrilles

Soit le problème modèle continu :

$$\mathcal{L}u = f \tag{4.1}$$

où :

 $\mathcal{L}$  désigne un opérateur différentiel. f est le second membre de l'équation. u est la solution du problème.

Le problème peut être discrétisé par différences finies sur un maillage uniforme de pas h. L'opérateur différentiel peut alors être exprimé sous sa forme matricielle  $\mathcal{L}^h$ . La solution et le second membre prennent la forme de vecteurs  $u^h$  et  $f^h$ . Ils contiennent les valeurs des variables aux noeuds du maillage.

$$\mathcal{L}^h u^h = f^h \tag{4.2}$$

La solution exacte du problème discret est différente de la solution du problème continu. La différence entre ces deux solutions est appelée erreur de discrétisation. Elle tend vers 0 lorsque le pas de discrétisation h tend vers 0. La précision exigée sur la solution détermine la valeur maximale de l'erreur de discrétisation, qui impose une valeur maximale au pas de discrétisation. Les techniques de Gauss-Seidel et de Jacobi sont utilisées pour résoudre le problème (4.2) sur chacune des grilles. Ces deux méthodes numériques de résolution sont itératives. Chaque itération d'une de ces méthodes, sur l'ensemble d'une grille, est appelée relaxation.

Une valeur initiale  $\hat{u}^h$  est imposée comme solution. Après plusieurs relaxations, la solution a évolué vers sa valeur approchée  $\tilde{u}^h$ . Cette solution, différente de la solution exacte  $u^h$  du problème discret, comporte une erreur numérique notée  $v^h$ .

$$v^h = u^h - \tilde{u}^h \tag{4.3}$$

L'équation discrète (4.2) n'est donc pas résolue exactement. La différence entre ses deux membres définit le résidu  $r^h$ .

$$f^h - \mathcal{L}^h \tilde{u}^h = r^h \tag{4.4}$$

Le processus de résolution sur une grille est achevé, lorsque l'erreur numérique  $v^h$  et le résidu  $r^h$  sont devenus suffisamment petits sur l'ensemble de la grille. Souvent, leur comparaison avec l'erreur de discrétisation est utilisée comme critère de convergence.

En substituant  $u^h$  et  $f^h$  par leurs expressions (4.3) et (4.4) dans l'équation du problème discret (4.2), il vient :

$$\mathcal{L}^{h}(\tilde{u}^{h} + v^{h}) = \mathcal{L}^{h}\tilde{u}^{h} + r^{h} \tag{4.5}$$

Si les relaxations du problème sont effectuées sur une grille de pas h, les erreurs numériques de longueur d'onde proche de h sont rapidement atténuées. Pour réduire rapidement les composantes d'erreur de plus grande longueur d'onde, il est nécessaire de procéder à des relaxations sur des grilles plus grossières, dont le pas de discrétisation est plus grand.

Le problème peut être transféré sur la grille de niveau inférieur, dont le pas H est défini par H = 2h. Il prend alors la forme suivante :

$$\mathcal{L}^H \hat{u}^H = \hat{f}^H \tag{4.6}$$

Les vecteurs  $\hat{u}^H$  et  $\hat{f}^H$  sont obtenus grâce à l'opérateur de restriction  $I_h^H$ , qui permet de transférer des variables de la grille fine de pas h à la grille grossière de pas H.

$$\hat{u}^{H} = I_{h}^{H}(\tilde{u}^{h} + v^{h}) = I_{h}^{H}\tilde{u}^{h} + v^{H}$$
(4.7)

$$\hat{f}^H = \mathcal{L}^H (I_h^H \tilde{u}^h) + I_h^H r^h \tag{4.8}$$

Après quelques relaxations, la solution approchée  $\tilde{u}^H$  du problème discret (4.6) est obtenue sur la grille grossière. Il est alors possible de transférer l'amélioration de la solution, vers la grille fine, grâce à l'opérateur d'interpolation  $I_H^h$ .

$$\bar{u}^h = \tilde{u}^h + I^h_H (\tilde{u}^H - \hat{u}^H) \tag{4.9}$$

Ainsi la solution convergée  $\bar{u}^h$  est obtenue sur la grille fine.

#### 4.2.2 Maillage, structure des grilles et changements de grilles

Les équations (4.2) à (4.9) présentent la résolution du problème discret par un "V-cycle", sur deux niveaux de grilles. Ce cycle doit son nom à la représentation graphique du parcours entre les grilles, au cours de la résolution (voir figure 4.1). En général, plusieurs "V-cycles" successifs sont nécessaires pour obtenir la convergence numérique de la solution.

L'utilisation du "V-cycle" sur deux niveaux de grilles, comme il est présenté dans la section précédente, permet la réduction efficace des erreurs de longueur d'onde de l'ordre de h et H. La réduction des erreurs de longueur d'onde supérieure à H est possible, sur ces deux niveaux, mais elle nécessite un nombre de cycles beaucoup plus important. Pour diminuer le coût de la

résolution du problème, qui consiste à réduire les erreurs de toutes les longueurs d'onde, il est nécessaire d'effectuer des relaxations sur les grilles de niveaux inférieurs (sur les grilles de pas 4h, 8h, 16h, etc). Ainsi, les erreurs de longueur d'onde correspondante (4h, 8h, 16h, etc) sont réduites à moindre coût, car :

• le nombre de relaxations nécessaire à la convergence est réduit

• et le coût de chacune des relaxations sur les grilles de niveau inférieur est plus faible que sur la grille de pas H.

L'opérateur de restriction du problème, appliqué plusieurs fois successivement, permet d'effectuer des relaxations sur les grilles de pas 4h, 8h, 16h, etc.

Les opérations de restriction et d'interpolation introduisent, dans la solution, des erreurs de longueur d'onde proche du pas de la grille de destination. Pour cette raison, chaque opération de changement de grille est succédée d'une ou plusieurs relaxations.  $\nu_1$  relaxations sont appliquées après une restriction et  $\nu_2$  relaxations sont appliquées après une interpolation. D'autre part, pour résoudre le problème,  $\nu_0$  relaxations sont appliquées sur le niveau le plus grossier. La représentation graphique d'un "V-cycle", sur quatre niveaux de grilles, est donnée en figure 4.1.

Remarque :

Les niveaux de grille sont numérotés par ordre croissant à partir du plus grossier, qui porte le numéro 1. Si le niveau 1 compte n points dans chaque dimension et son pas de maillage est  $h_1$ , la grille de niveau L compte  $2^{L-1}n - 1$  points dans chaque direction et son pas de maillage est  $h_1/(2^{L-1})$  (voir figure 4.2).



FIG. 4.1 – Représentation graphique d'un "V-cycle" sur quatre niveaux de grilles.

Dans l'exemple du "V-cycle" présenté, les premières relaxations (sur les niveaux 4, 3 puis 2) réduisent les erreurs de haute fréquence, alors que la forme générale de la solution n'est pas encore obtenue. La solution contient toujours les erreurs de grande longueur d'onde. Ces erreurs seront réduites sur le niveau le plus grossier. Puis il faudra de nouveau lisser la solution lors des opérations de raffinement de maillage sur les niveaux 2, 3 puis 4. L'opération de lissage de la solution est donc effectuée à deux reprises. Le bénéfice de la phase descendante du "V-cycle" est perdu lors du passage sur les grilles de pas plus grossier. Ce problème est contourné en utilisant la technique "FMG" ("Full Multi-Grid"). Elle consiste à réduire les erreurs de grande longueur d'onde, sur les grilles les plus grossières, en premier lieu. Les relaxations débutent sur le premier niveau. Lorsque la solution a convergé sur un niveau L, elle est interpolée sur le niveau supérieur L + 1 à partir duquel un ou plusieurs "V-cycles" sont effectués. Une fois la solution convergée sur le niveau L + 1, elle est interpolée vers le niveau L + 2 où le problème est de nouveau résolu en utilisant des "V-cycles". Ce schéma est répété jusqu'à atteindre la solution convergée sur



FIG. 4.2 – Exemple de structure de grilles en deux dimensions.

le niveau où le problème doit être résolu. La figure 4.3 représente graphiquement la méthode "FMG" utilisant un unique "V-cycle" pour résoudre le problème sur chaque niveau de grille. Les doubles cercles représentent une solution convergée sur le niveau considéré.

En assurant la convergence de la forme générale de la solution, la technique "FMG" améliore la stabilité de la résolution par rapport à la technique des "V-cycles". En utilisant moins de relaxations sur les grilles les plus fines (qui sont les plus coûteuses), elle réduit le temps de calcul.



FIG. 4.3 – Représentation graphique du "FMG", avec un "V-cycle", sur quatre niveaux de grilles, les doubles cercles représentent les solutions convergées sur le niveau considéré.

#### Changements de grilles

Les opérateurs de changement de grilles  $I_h^H$  et  $I_H^h$  sont utilisés respectivement pour les restrictions et les interpolations. Dans cette section, ils sont présentés dans le cas d'un problème bi-dimensionnel.

Deux types de restrictions sont utilisés pour transférer les variables, de la grille fine de niveau L, à la grille grossière de niveau L - 1 (voir figure 4.4).

• Le premier s'appelle l'injection. C'est le plus rapide et le plus simple. Tous les points de la grille grossière coïncident avec des points de la grille fine. L'injection consiste à affecter, aux noeuds de la grille grossière, les valeurs de la grille fine, aux noeuds coïncidants. Soient i et j les indices des points de la grille fine et I et J les indices de la grille grossière. En tout point de la grille, l'injection s'écrit :

$$u_{I,J}^{H} = [I_{h}^{H}u^{h}]_{I,J} = u_{2i,2j}^{h}$$
(4.10)

Sous forme matricielle, l'opérateur d'injection s'écrit :

$$I_h^H = \left[ \begin{array}{rrr} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

• Le second opérateur de restriction est plus complexe et d'exécution plus lente. Il consiste à affecter en un point de la grille grossière, une moyenne pondérée de sa valeur et de celle des points voisins, d'où son nom de restriction pondérée.

$$\begin{aligned} u_{I,J}^{H} &= [I_{h}^{H}u^{h}]_{I,J} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} u_{2I+1,2J+1}^{h} + u_{2I+1,2J-1}^{h} + u_{2I-1,2J+1}^{h} + u_{2I-1,2J-1}^{h} \\ &+ 2u_{2I+1,2J}^{h} + 2u_{2I,2J+1}^{h} + 2u_{2I-1,2J}^{h} + 2u_{2I,2J-1}^{h} \\ &+ 4u_{2I,2J}^{h} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sous forme matricielle, la restriction pondérée s'écrit :

$$I_h^H = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Par rapport à l'injection, elle présente deux avantages. Elle préserve une plus grande partie de l'information contenue dans la grille fine et elle conserve la valeur de l'intégrale discrète.

L'opérateur d'interpolation  $I_H^h$  est utilisé, pour interpoler les valeurs d'une grille grossière de pas H, vers une grille de niveau supérieur, de pas h = H/2. Dans le cas d'une interpolation linéaire, la représentation graphique de l'opérateur  $I_H^h$  est donnée en figure 4.5. Il prend la forme matricielle suivante :

$$I_h^H = \frac{1}{4} \left[ \begin{array}{rrr} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

### 4.2.3 Principe de l'intégration rapide "ML-MI"

La technique d'intégration rapide "ML-MI" permet d'accélérer le calcul de l'intégrale d'une fonction pondérée par un noyau. Dans le cas du problème de contact, cette intégrale doit être calculée en chaque point x du domaine. L'évaluation en chacun de ces points consiste à intégrer sur le domaine de calcul  $\Omega$  une variable u, pondérée par une fonction K, appelée noyau. Pour un problème à d dimensions, x et y sont des vecteurs à d dimensions et l'intégrale est du type (4.11).



FIG. 4.5 – Opérateur d'interpolation linéaire  $I_H^h$ .

$$w(x) = \int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy$$
(4.11)

Sous forme discrète, sur une grille uniforme de pas h, l'intégrale s'écrit :

$$w_{i}^{h} = h^{d} \sum_{j} K_{i,j}^{h,h} u_{j}^{h}$$
(4.12)

Où  $K_{i,j}^{h,h} = K(x_i, y_j).$ 

L'utilisation d'un noyau moyenné, dans les régions où il varie peu, permet de réduire le nombre de termes de la somme discrète car, dans cette région, elle peut être évaluée sur une grille grossière. Le nombre d'opérations contenues dans la somme est donc réduit ainsi que le temps de calcul.

L'évaluation de la variable  $w_i^h$  à partir de sa valeur sur la grille de niveau inférieur est donnée par l'opérateur d'interpolation  $I_H^h$ :

$$w_i^h = [I_H^h w_{\cdot}^H]_i \tag{4.13}$$

Dans le sens opposé, pour une restriction, le transfert de grille sera assuré par l'opérateur  $(I\!I_H^h)^T$ . Cet opérateur doit être choisi d'ordre supérieur à celui utilisé dans la résolution multigrille. Le noyau discret est défini sur la grille la plus fine. Sur les grilles plus grossières, il est obtenu en appliquant de manière récursive la relation suivante :

$$K_{i,J}^{h,H} = K_{i,2J}^{h,h} \tag{4.14}$$

L'opération d'interpolation (4.15), appliquée sur le noyau d'une grille grossière, conduit à une valeur approchée  $\tilde{K}_{i,j}^{h,h}$  du noyau  $K_{i,j}^{h,h}$ .

$$\tilde{K}_{i,j}^{h,h} = [I_H^h K_{i,.}^{h,H}]_j = K_{i,j}^{h,h} + O(\epsilon)$$
(4.15)

Où  $O(\epsilon)$  représente l'erreur dans l'approximation du noyau. Cette erreur est fonction de l'ordre de l'interpolation et des dérivées spatiales du noyau, au point considéré. L'opération similaire à (4.14) et (4.15) doit être menée par rapport à l'indice i; plus de détails sont disponibles dans [80].

L'approximation  $\tilde{w}_i^h$  de l'intégrale discrète  $w_i^h$  est calculée en un point i du domaine, grâce au noyau approché  $\tilde{K}_{i,j}^{h,h}$ .

$$\tilde{w}_{i}^{h} = h^{d} \sum_{j} \tilde{K}_{i,j}^{h,h} u_{j}^{h} = H^{d} \sum_{J} K_{I,J}^{H,H} u_{J}^{H}$$
(4.16)

avec :

$$u_J^H = 2^{-d} [(I_H^h)^T u_{.}^h]_J$$
(4.17)

L'approximation  $\tilde{w}_i^h$  de l'intégrale, obtenue par interpolation de la somme calculée, à moindre coût, sur la grille grossière, peut être améliorée en lui appliquant la correction suivante.

$$w_i^h = \tilde{w}_i^h + h^d \sum_j (K_{i,j}^{h,h} - \tilde{K}_{i,j}^{h,h}) u_i^j$$
(4.18)

Cette correction, appliquée sur l'ensemble de la grille, conduit à l'intégrale discrète exacte  $w_i^h$ . Le coût de cette correction rendrait nul le bénéfice de l'évaluation de l'intégrale sur la grille grossière. Or la forme du noyau devient de plus en plus lisse, lorsque les points d'intégration d'indice j s'éloignent du point d'indice i, où l'intégrale est calculée. Les dérivées spatiales du noyau sont très petites lorsque l'intégration porte sur des points éloignés du point où l'intégrale est calculée. Cela se traduit sous forme mathématique par la relation suivante :

$$\lim_{|i-j| \to \infty} (K_{i,j}^{h,h} - \tilde{K}_{i,j}^{h,h}) = 0$$
(4.19)

Pour les grandes valeurs de |i - j|, la correction (4.18) apportée à l'intégrale devient donc très petite. Elle peut être négligée. La correction n'est donc appliquée qu'au voisinage du point où l'intégrale est calculée :

$$\bar{w}_{i}^{h} \simeq \tilde{w}_{i}^{h} + h^{d} \sum_{|i-j| \leqslant m} (K_{i,j}^{h,h} - \tilde{K}_{i,j}^{h,h}) u_{i}^{j}$$
(4.20)

La perte de précision associée à cette approximation décroît, lorsque le nombre m de points de correction adopté augmente et lorsque l'ordre de l'interpolation augmente.

De même que pour la résolution multigrille d'un problème différentiel, l'utilisation de plusieurs niveaux de grilles accélère le calcul. L'évaluation de l'intégrale par la méthode "ML-MI" consiste donc, à partir de la grille la plus fine, à effectuer plusieurs restrictions pour transférer u vers la grille la plus grossière. Ensuite, vient le calcul de l'intégrale sur cette grille grossière qui est suivi d'interpolations et de corrections jusqu'à atteindre la grille de départ (la plus fine). L'enchaînement de ces opérations est schématisé en figure 4.6.

Venner et Lubrecht [80] donnent le détail du nombre optimum de points de correction m, des opérateurs d'interpolation et de l'implémentation de la correction. Ces opérations requièrent une attention particulière en ce qui concerne les problèmes d'effets de bord associés aux frontières du domaine de calcul. Venner et Lubrecht justifient aussi du temps de calcul, de l'ordre de  $N \ln N$  par la méthode "ML-MI", alors qu'il est de l'ordre de  $N^2$  par une méthode classique.



FIG. 4.6 – Schéma de l'algorithme "ML-MI" appliqué à un problème à une dimension, avec m=1.

## 4.3 Application des multigrilles au problème EHD

La méthode multigrille est utilisée pour résoudre la forme discrète de l'équation de Reynolds (3.32), introduite dans le chapitre 3.

L'intégration rapide "ML-MI" est appliquée sur la forme discrète de l'équation d'élasticité (3.37), afin de calculer la géométrie déformée des corps en contact. L'équation d'élasticité est une intégrale qui s'applique sur le champ de pression discret, solution de l'équation de Reynolds.

Pour cette raison, le domaine de calcul des déformations est identique au domaine de calcul du champ de pression. Le domaine de calcul adimensionné  $\overline{\Omega}$  choisi est carré :  $X_s - X_e = 2Y_0$ .

Les discrétisations des grilles utilisées pour résoudre l'équation de Reynolds et pour calculer les déformations sont identiques. Le pas du maillage adopté est homogène et isotrope.

Le système est résolu de manière itérative, jusqu'à la convergence du champ de pression, de la géométrie déformée et de l'équation d'équilibre.

Le développement a été effectué à partir du code de calcul de contact EHD circulaire sur-alimenté EHL2D.C présenté dans l'annexe H du livre de Venner et Lubrecht [80].

#### 4.3.1 Equations discrètes

#### Equation de Reynolds sous-alimentée discrète

La discrétisation du domaine  $\overline{\Omega}$  adoptée est la suivante :

$$X_i = X_e + ih_x \tag{4.21}$$

$$Y_j = -Y_0 + jh_y$$
 (4.22)

Où *i* et *j* sont respectivement les indices des points dans les directions  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ ;  $h_x$  et  $h_y$  les pas de discrétisation dans chacune de ces directions.

Les variables au point de coordonnées  $(X_i, Y_i)$  portent en indice i, j.

Soient :

$$\epsilon_{i,j} = \frac{\bar{\rho}_{i,j} H_{i,j}^3}{\bar{\eta}_{i,j} \lambda} \tag{4.23}$$

et :

$$\epsilon_{i+1/2,j} = \frac{\epsilon_{i+1,j} + \epsilon_{i,j}}{2} \tag{4.24}$$

$$\epsilon_{i-1/2,j} = \frac{\epsilon_{i-1,j} + \epsilon_{i,j}}{2} \tag{4.25}$$

$$\epsilon_{i,j+1/2} = \frac{\epsilon_{i,j+1} + \epsilon_{i,j}}{2} \tag{4.26}$$

$$\epsilon_{i,j-1/2} = \frac{\epsilon_{i,j-1} + \epsilon_{i,j}}{2} \tag{4.27}$$

En utilisant les différences finies au premier ordre, l'équation (3.32) peut être exprimée sous forme discrète.

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\bar{\rho}H^3}{\bar{\eta}\lambda} \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \kappa^2 \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\bar{\rho}H^3}{\bar{\eta}\lambda} \frac{\partial P}{\partial Y} \right) - \frac{\partial(\bar{\rho}\theta H)}{\partial X} = \frac{\epsilon_{i+1/2,j} (P_{i+1,j} - P_{i,j}) - \epsilon_{i-1/2,j} (P_{i,j} - P_{i-1,j})}{h_x^2} \\
+ \kappa^2 \frac{\epsilon_{i,j+1/2} (P_{i,j+1} - P_{i,j}) - \epsilon_{i,j-1/2} (P_{i,j} - P_{i,j-1})}{h_y^2} \\
- \frac{\bar{\rho}_{i,j} \theta_{i,j} H_{i,j} - \bar{\rho}_{i-1,j} \theta_{i-1,j} H_{i-1,j}}{h_x} \\
+ O(h_x)$$
(4.28)

 $O(h_x)$  désigne l'erreur de discrétisation.

Remarque 1 : L'ordre de la discrétisation de l'équation (4.28) est déterminé par la discrétisation au premier ordre des termes de Couette, alors que les termes de Poiseuille sont discrétisés au second ordre.

Remarque 2 : L'équation (4.28) contient deux équations, valides dans les deux sous-domaines. Dans le premier, la pression P est nulle et l'équation traduit la conservation de l'épaisseur  $\theta H$  de la couche d'alimentation dans la direction  $\vec{x}$ . Dans le second domaine,  $\theta = 1$  et l'équation (4.28) est sous sa forme classique relative aux films complets, utilisée en lubrification sur-alimentée.

#### Equation d'élasticité discrète

Exprimée sous forme discrète, l'équation (3.37) devient :

$$H_{i,j}^{h_x,h_y} = H_0 + SX_i^2 + (1 - S)Y_j^2 + \sum_{i'} \sum_{j'} K_{i,i',j,j'}^{h_x,h_y} P_{i',j'}^{h_x,h_y}$$
(4.29)

avec :

$$K_{i,i',j,j'}^{h_x,h_y} = \frac{1}{\pi\mathcal{K}} \int_{X_{i'}-h_x/2}^{X_{i'}+h_x/2} \int_{Y_{j'}-h_y/2}^{Y_{j'}+h_y/2} \frac{dX'dY'}{\sqrt{\kappa^2(X_i-X')^2 + (Y_j-Y')^2}}$$
(4.30)

$$K_{i,i',j,j'}^{h_x,h_y} = \frac{1}{\pi\mathcal{K}} \{ |X_p| \operatorname{arcsinh}\left(\frac{Y_p}{X_p}\right) + |Y_p| \operatorname{arcsinh}\left(\frac{X_p}{Y_p}\right) - |X_m| \operatorname{arcsinh}\left(\frac{Y_p}{X_m}\right) - |Y_p| \operatorname{arcsinh}\left(\frac{X_m}{Y_p}\right) - |X_p| \operatorname{arcsinh}\left(\frac{Y_m}{X_p}\right) - |Y_m| \operatorname{arcsinh}\left(\frac{X_p}{Y_m}\right) + |X_m| \operatorname{arcsinh}\left(\frac{Y_m}{X_m}\right) + |Y_m| \operatorname{arcsinh}\left(\frac{X_m}{Y_m}\right) \}$$
(4.31)

avec :

$$X_p = X_i - X_{i'} + h_x/2, \qquad X_m = X_i - X_{i'} - h_x/2, \qquad (4.32)$$

$$Y_p = (Y_j - Y_{j'} + h_y/2)/\kappa, \qquad Y_m = (Y_j - X_{j'} - h_y/2)/\kappa$$
(4.33)

#### Equation d'équilibre discrète

L'équation d'équilibre (3.39) est discrétisée en (4.34).

$$h_x h_y \sum_i \sum_j P_{i,j} = \frac{2\pi}{3}$$
(4.34)

#### 4.3.2 Relaxation de l'équation de Reynolds

La solution de l'équation de Reynolds discrète (4.28) est obtenue par applications successives d'un processus de résolution local. L'opération qui consiste à appliquer le processus local, une fois, en chacun des points de la grille, est appelée relaxation. Plusieurs relaxations sont nécessaires pour résoudre l'équation. La solution est considérée atteinte lorsque l'erreur numérique devient inférieure à l'erreur de discrétisation. Lors de la relaxation du point de coordonnées i, j, une variation  $\delta_{i,j}^{h_x,h_y}$  est appliquée à la variable générale  $u_{i,j}^{h_x,h_y}$  de manière à annuler localement le résidu de l'équation. La variable  $u_{i,j}^{h_x,h_y}$ désigne le remplissage  $\theta$  dans le sous-domaine  $\Omega_1$  et la pression P dans le sous-domaine  $\Omega_2$ . Ainsi, l'équation de Reynolds discrète est résolue exactement au point considéré.

Dans la zone cavitée  $\Omega_1$ , la pression est nulle et l'équation de Reynolds se résume à une équation de transport. La relaxation porte alors sur le paramètre  $\theta_{i,j}^{h_x,h_y}$  auquel la correction  $\delta_{i,j}^{h_x,h_y}$  est appliquée. Dans la région  $\Omega_2$  soumise à une pression positive, l'équation de Reynolds est sous sa forme classique et la correction est appliquée à la pression  $P_{i,j}^{h_x,h_y}$ .

Le parcours de la grille, pour les relaxations de Gauss-Seidel et Jacobi présentées dans les deux paragraphes suivants, s'effectue par ordre croissant d'indices i et j.

#### Relaxation de Gauss-Seidel

Soient  $\tilde{P}$  et  $\tilde{\theta}$  les variables avant relaxation et  $\mathcal{L}^{h_x,h_y}$ , l'opérateur discret qui représente l'équation de Reynolds. Le résidu  $r_{i,j}^{h_x,h_y}$  de l'équation discrète, au point de coordonnées i, j, est défini par l'équation (4.35).

$$\mathcal{L}_{i,j}^{h_x,h_y} = \frac{\epsilon_{i+1/2,j}(\tilde{P}_{i+1,j} - \tilde{P}_{i,j}) - \epsilon_{i-1/2,j}(\tilde{P}_{i,j} - \bar{P}_{i-1,j})}{h_x^2} \\
+ \kappa^2 \frac{\epsilon_{i,j+1/2}(\tilde{P}_{i,j+1} - \tilde{P}_{i,j}) - \epsilon_{i,j-1/2}(\tilde{P}_{i,j} - \bar{P}_{i,j-1})}{h_y^2} \\
- \frac{\bar{\rho}_{i,j}\tilde{\theta}_{i,j}H_{i,j} - \bar{\rho}_{i-1,j}\bar{\theta}_{i-1,j}H_{i-1,j}}{h_x} \\
= -r_{i,j}^{h_x,h_y}$$
(4.35)

La résolution locale de l'équation de Reynolds se résume à appliquer à la variable  $\tilde{u}_{i,j}^{h_x,h_y}$  la variation  $\delta_{i,j}^{h_x,h_y}$ , pour obtenir sa nouvelle valeur  $\bar{u}_{i,j}^{h_x,h_y}$ . Appliquée aux inconnues  $\tilde{P}$  et  $\tilde{\theta}$ , cette résolution locale conduit aux nouvelles valeurs des variables  $\bar{P}$  et  $\bar{\theta}$ . La relaxation de Gauss-Seidel utilise les valeurs actualisées aux points voisins  $\bar{P}_{i-1,j}^{h_x,h_y}$ ,  $\bar{P}_{i,j-1}^{h_x,h_y}$  et  $\bar{\theta}_{i-1,j}^{h_x,h_y}$  pour calculer le résidu  $r_{i,j}^{h_x,h_y}$  (4.35) de l'équation de Reynolds discrète.

• Dans la zone cavitée  $\Omega_1$  ( $0 < \theta < 1$  et P = 0), la correction (4.36) est appliquée à  $\tilde{\theta}_{i,j}^{h_x,h_y}$ :

$$\delta_{i,j}^{h_x,h_y} = r_{i,j}^{h_x,h_y} \left[ \frac{\partial (\mathcal{L}^{h_x,h_y})_{i,j}}{\partial \theta_{i,j}^{h_x,h_y}} \right]^{-1} = -r_{i,j}^{h_x,h_y} \left[ \frac{\bar{\rho}_{i,j}^{h_x,h_y} H_{i,j}^{h_x,h_y}}{h_x} \right]^{-1}$$
(4.36)

$$\bar{\theta}_{i,j}^{h_x,h_y} = \tilde{\theta}_{i,j}^{h_x,h_y} + \delta_{i,j}^{h_x,h_y}$$
(4.37)

• Dans la zone  $\Omega_2$  ( $\theta = 1$  et P > 0), la correction (4.39) est appliquée à  $\tilde{P}_{i,j}^{h_x,h_y}$ :

$$\delta_{i,j}^{h_x,h_y} = r_{i,j}^{h_x,h_y} \left[ \frac{\partial (\mathcal{L}^{h_x,h_y})_{i,j}}{\partial P_{i,j}^{h_x,h_y}} \right]^{-1}$$
(4.38)

$$\delta_{i,j}^{h_x,h_y} = -r_{i,j}^{h_x,h_y} \left[ \frac{\epsilon_{i+1/2,j} + \epsilon_{i-1/2,j}}{h_y^2} + \kappa^2 \frac{\epsilon_{i,j+1/2} + \epsilon_{i,j-1/2}}{h_y^2} + \frac{K_{0,0}^{h_x,h_y} - K_{1,0}^{h_x,h_y}}{h_x} \right]^{-1} (4.39)$$

$$\bar{P}_{i,j}^{h_x,h_y} = \tilde{P}_{i,j}^{h_x,h_y} + \omega \delta_{i,j}^{h_x,h_y}$$
(4.40)

Où  $\omega$  est un facteur d'amortissement compris entre 0 et 1. S'il est choisi inférieur à l'unité, il permet d'accroître la stabilité de la résolution (au détriment de la vitesse de convergence).

Les régions où la pression est faible sont caractérisées par des valeurs importantes de  $\epsilon$ . L'équation discrète de Reynolds est alors dominée par les termes de Poiseuille qui traduisent l'écoulement dû au gradient de pression. La relaxation de Gauss-Seidel, décrite par les équations (4.36) à (4.40), est alors utilisée.

#### Relaxation de Jacobi

La région où la pression est importante est caractérisée par des faibles valeurs de  $\epsilon$ . L'équation discrète de Reynolds est alors dominée par le terme de Couette qui traduit l'écoulement dû à l'entraînement du lubrifiant par les surfaces. Afin d'améliorer la stabilité de la résolution, le résidu est calculé par la méthode de Jacobi, c'est-à-dire, en fonction des valeurs, avant relaxation de la pression aux points voisins,  $\tilde{P}_{i-1,j}^{h_x,h_y}$  et  $\tilde{P}_{i,j-1}^{h_x,h_y}$ . Il prend alors la forme suivante :

$$\mathcal{L}_{i,j}^{h_x,h_y} = \frac{\epsilon_{i+1/2,j}(\tilde{P}_{i+1,j} - \tilde{P}_{i,j}) - \epsilon_{i-1/2,j}(\tilde{P}_{i,j} - \tilde{P}_{i-1,j})}{h_x^2} \\ + \kappa^2 \frac{\epsilon_{i,j+1/2}(\tilde{P}_{i,j+1} - \tilde{P}_{i,j}) - \epsilon_{i,j-1/2}(\tilde{P}_{i,j} - \tilde{P}_{i,j-1})}{h_y^2} \\ - \frac{\bar{\rho}_{i,j}\tilde{\theta}_{i,j}H_{i,j} - \bar{\rho}_{i-1,j}\tilde{\theta}_{i-1,j}H_{i-1,j}}{h_x} \\ = -r_{i,j}^{h_x,h_y}$$
(4.41)

La valeur limite  $\epsilon_l$  adoptée pour déterminer la relaxation à utiliser a été fixée à  $\epsilon_l = 0.3$ . Si au moins une des valeurs  $\epsilon_{i+1/2,j}^{h_x,h_y}$ ,  $\epsilon_{i,j+1/2}^{h_x,h_y}$ ,  $\epsilon_{i,j-1/2}^{h_x,h_y}$  est supérieure à  $\epsilon_l$ , alors la relaxation de Gauss-Seidel est adoptée.

#### Relaxation distributive et relaxation par ligne

• La relaxation distributive consiste à appliquer la correction  $\omega \delta_{i,j}^{h_x,h_y}$  à la pression  $\tilde{P}_{i,j}^{h_x,h_y}$  et à répartir la correction opposée sur les points voisins. La distribution de la correction  $\delta_{i,j}^{h_x,h_y}$ répond au schéma suivant.

$$\omega \delta_{i,j}^{h_x,h_y} \left[ \begin{array}{ccc} 0 & -\kappa/(2+2\kappa) & 0 \\ -1/(2+2\kappa) & 1 & -1/(2+2\kappa) \\ 0 & -\kappa/(2+2\kappa) & 0 \end{array} \right]$$

Cette relaxation conserve l'intégrale du champ de pression. Elle ne perturbe donc pas la résolution de l'équation d'équilibre (4.34). D'autre part, la perturbation induite par la correction sur la déformation élastique et donc sur l'épaisseur H est plus localisée et moins importante. Cette

propriété améliore la stabilité de la résolution du problème EHD, particulièrement dans la zone de forte pression. Pour cette raison, la relaxation distributive est couplée avec la relaxation de Jacobi.

• La relaxation peut être effectuée ligne par ligne. Ainsi, le vecteur correction  $\delta_j^{h_x,h_y}$ , qui sera appliqué à la ligne d'indice j, peut être exprimé comme l'inconnue du système matriciel linéaire (4.42). Si  $r_j^{h_x,h_y}$  est le vecteur contenant les résidus des points de la ligne d'indice j et si la matrice  $A^j$  est définie par (4.43), (4.44) et (4.46).

$$A_{i,k}^{j}(\delta_{j}^{h_{x},h_{y}})_{i} = (r_{j}^{h_{x},h_{y}})_{i}$$
(4.42)

Si le point d'indices i, j se trouve dans la zone cavitée  $\Omega_1$  ( $\theta < 1$  et P = 0), la relaxation porte sur  $\theta$ . Les termes  $A_{i,k}^j$  de la matrice sont alors définis par (4.43).

$$A_{i,k}^{j} = \frac{\partial (\mathcal{L}^{h_{x},h_{y}})_{i,j}}{\partial \theta_{k,j}^{h_{x},h_{y}}}$$
(4.43)

so<br/>it :

$$A_{i,i-1}^{j} = \frac{\bar{\rho}_{i-1,j}^{h_{x},h_{y}}H_{i-1,j}^{h_{x},h_{y}}}{h_{x}}$$
$$A_{i,i}^{j} = -\frac{\bar{\rho}_{i,j}^{h_{x},h_{y}}H_{i,j}^{h_{x},h_{y}}}{h_{x}}$$

Si le point d'indices i, j se trouve dans la zone de pression positive  $\Omega_2$  ( $\theta < 1$  et P = 0), la relaxation porte sur P. Les termes  $A_{i,k}^j$  de la matrice sont alors définis par (4.44).

$$A_{i,k}^{j} = \frac{\partial (\mathcal{L}^{h_x,h_y})_{i,j}}{\partial P_{k,j}^{h_x,h_y}}$$

$$(4.44)$$

soit :

$$\begin{split} A_{i,k}^{j} &= -\frac{\bar{\rho}_{i,j}K_{|i-k|,0} - \bar{\rho}_{i-1,j}K_{|i-k-1|,0}}{h_{x}} \qquad \text{si } |i-k| \geqslant 2\\ A_{i,i-1}^{j} &= -\frac{\bar{\rho}_{i,j}K_{1,0} - \bar{\rho}_{i-1,j}K_{0,0}}{h_{x}} + \frac{\epsilon_{i-1/2,j}}{h_{x}^{2}}\\ A_{i,i}^{j} &= -\frac{\bar{\rho}_{i,j}K_{0,0} - \bar{\rho}_{i-1,j}K_{1,0}}{h_{x}} - \Sigma\epsilon\\ A_{i,i+1}^{j} &= -\frac{\bar{\rho}_{i,j}K_{1,0} - \bar{\rho}_{i-1,j}K_{2,0}}{h_{x}} + \frac{\epsilon_{i+1/2,j}}{h_{x}^{2}} \end{split}$$

avec :

$$\Sigma \epsilon = \frac{\epsilon_{i+1/2,j} + \epsilon_{i-1/2,j}}{h_x^2} + \kappa^2 \frac{\epsilon_{i,j+1/2} + \epsilon_{i,j-1/2}}{h_y^2}$$
(4.45)

Si la pression exige d'utiliser la relaxation distributive de Jacobi ( $\epsilon < \epsilon_l$ ), les coefficients de la matrice A prennent alors la forme (4.46).

$$\begin{split} A_{i,k}^{j} &= \frac{\partial (\mathcal{L}^{h_{x},h_{y}})_{i,j}}{\partial P_{k,j}^{h_{x},h_{y}}} - \frac{1}{4} \left[ \frac{\partial (\mathcal{L}^{h_{x},h_{y}})_{i,j}}{\partial P_{k+1,j}^{h_{x},h_{y}}} + \frac{\partial (\mathcal{L}^{h_{x},h_{y}})_{i,j}}{\partial P_{k-1,j}^{h_{x},h_{y}}} + \frac{\partial (\mathcal{L}^{h_{x},h_{y}})_{i,j}}{\partial P_{k,j+1}^{h_{x},h_{y}}} \right] \quad (4.46) \\ \text{soti :} \\ A_{i,k}^{j} &= -\frac{\bar{\rho}_{i,j}[K_{|i-k|,0} - (K_{|i-k-1|,0} + K_{|i-k|,0} + 2K_{|i-k|,1})/4]}{h_{x}} \\ &+ \frac{\bar{\rho}_{i-1,j}[K_{|i-k-1|,0} - (K_{|i-k-2|,0} + K_{|i-k|,0} + 2K_{|i-k-1|,1})/4]}{h_{x}} \quad \text{si } |i-k| \ge 3 \\ A_{i,i-2}^{j} &= -\frac{\bar{\rho}_{i,j}[K_{2,0} - (K_{1,0} + K_{3,0} + 2K_{2,1})/4] - \bar{\rho}_{i-1,j}[K_{1,0} - (K_{0,0} + K_{2,0} + 2K_{1,1})/4]}{h_{x}} \\ &- \frac{\epsilon_{i-1/2,j}}{4h_{x}^{2}} \\ A_{i,i-1}^{j} &= -\frac{\bar{\rho}_{i,j}[K_{1,0} - (K_{0,0} + K_{2,0} + 2K_{1,1})/4] - \bar{\rho}_{i-1,j}[K_{0,0} - (2K_{1,0} + 2K_{0,1})/4]}{h_{x}} \\ &+ \frac{\Sigma\epsilon}{4} + \frac{\epsilon_{i-1/2,j}}{h_{x}^{2}} \\ A_{i,i+1}^{j} &= -\frac{\bar{\rho}_{i,j}[K_{1,0} - (K_{0,0} + K_{2,0} + 2K_{1,1})/4] - \bar{\rho}_{i-1,j}[K_{1,0} - (K_{2,0} + K_{0,0} + 2K_{1,1})/4]}{h_{x}} \\ &- \frac{5}{4}\Sigma\epsilon \\ A_{i,i+1}^{j} &= -\frac{\bar{\rho}_{i,j}[K_{1,0} - (K_{2,0} + K_{0,0} + 2K_{1,1})/4] - \bar{\rho}_{i-1,j}[K_{2,0} - (K_{3,0} + K_{1,0} + 2K_{2,1})/4]}{h_{x}} \\ &+ \frac{\Sigma\epsilon}{4} + \frac{\epsilon_{i+1/2,j}}{h_{x}^{2}} \\ A_{i,i+2}^{j} &= -\frac{\bar{\rho}_{i,j}[K_{1,0} - (K_{2,0} + K_{0,0} + 2K_{1,1})/4] - \bar{\rho}_{i-1,j}[K_{3,0} - (K_{4,0} + K_{2,0} + 2K_{3,1})/4]}{h_{x}} \\ &- \frac{\epsilon_{i+1/2,j}}{h_{x}^{2}} \end{aligned}$$

Le système (4.42) peut être résolu par une méthode d'inversion, du type du pivot de Gauss.

Si *n* désigne le nombre de points par ligne, alors la complexité de la résolution de (4.42) est de l'ordre de  $O(n^3)$ . Ce coût important peut être réduit. Les propriétés du noyau permettent de négliger les termes  $K_{i,i-k,j,j}^{h_x,h_y}$ , où |i-k| est grand. Seuls les termes  $A_{i,i-k}^j$  vérifiant  $-3 \le i-k \le 2$  ont été considérés. La matrice  $A^j$  correspondante est une matrice bande hexa-diagonale. Le temps de résolution de (4.42) par la méthode du pivot de Gauss devient alors de l'ordre de O(n).

La relaxation par ligne permet de prendre en compte l'évolution de la géométrie, induite par les corrections de pression  $\delta$ , apportées dans les points voisins. Un couplage important entre la pression et l'épaisseur de film existe dans la direction  $\vec{x}$ . Sa prise en compte, dans la zone de forte pression, grâce à la relaxation par lignes d'indice j, accélère la convergence et améliore la stabilité de la résolution du problème EHD.

#### 4.3.3 Résolution de l'équation d'équilibre des forces

L'équation d'équilibre (4.34) est satisfaite par modifications successives de la distance  $H_0$ , qui sépare les corps en contact. Les corrections portant sur  $H_0$  entraînent l'apparition d'erreurs de grande longueur d'onde. Pour cette raison, le paramètre  $H_0$  est mis à jour uniquement sur la grille la plus grossière. Soit  $r_w^{h_x,h_y}$  le résidu de l'équation d'équilibre des charges.

$$h_x h_y \sum_i \sum_j P_{i,j}^{h_x, h_y} - \frac{2\pi}{3} = r_{\rm w}^{h_x, h_y}$$
(4.47)

Soient  $\tilde{H}_0$  et  $\bar{H}_0$  les valeurs de  $H_0$ , avant et après correction.

$$\bar{H}_0 = \tilde{H}_0 + \omega_{\rm w} r_{\rm w}^{h_x, h_y} \tag{4.48}$$

Le paramètre  $\omega_w$  est un coefficient d'amortissement (compris entre 0 et 1), qui permet d'améliorer la stabilité de l'algorithme.

#### 4.3.4 Algorithme de résolution

La résolution du problème commence par l'initialisation des variables. Le champ de pression de Hertz est imposé comme solution initiale en pression  $\hat{P}(Y,Y)$ . Dans le sous-domaine  $\Omega_1$ , le champ de remplissage  $\theta$  est initialisé pour vérifier l'équation de transport de la couche de lubrifiant :

$$\theta(X,Y) = \min\left(\frac{H(X,Y)}{H_{oil}(X_e,Y)},1\right)$$
(4.49)

Dans le sous-domaine  $\Omega_2$ , le film de lubrifiant est complet et  $\theta$  vaut 1. Initialement, le sousdomaine  $\Omega_2$  est fixé identique à la zone de Hertz. Soit :  $\Omega_2 \Leftrightarrow X^2 + Y^2 \leq 1$ .

Le déplacement de corps solides est initialisé à  $\hat{H}_0 = -1 + H_c^M$ . Le terme -1 correspond au déplacement de corps solides observé en contact sec et  $H_c^M$  est l'épaisseur de film au centre d'un contact lubrifié, donnée par une formule approchée de Moes [68].

$$\hat{H}_0 = 1.67M^{-1/9} - 1.897 + \frac{0.2}{50}L \tag{4.50}$$

Cette approximation, bien qu'établie pour le contact circulaire, est utilisée sans modification pour le contact elliptique car la convergence du code est suffisamment stable, rapide et très peu sensible aux conditions initiales.

La forme de la couche de lubrifiant  $H_{oil}(X_e, Y)$  qui alimente le contact est imposée; c'est une donnée du problème.

Chaque calcul de la géométrie déformée des surfaces est suivi d'une actualisation (4.51) de la variable  $\theta$ , sur la frontière d'entrée du domaine  $(X = X_e)$  et du calcul du champ de pression et de remplissage sur toute la grille.

$$\theta(X_e, Y) = \min\left(\frac{H(X_e, Y)}{H_{oil}(X_e, Y)}, 1\right)$$
(4.51)

Une fois le problème initialisé,  $n_{cycle}$  cycles sont effectués sur chaque niveau, puis la solution est interpolée vers le niveau supérieur et ainsi de suite, jusqu'à ce que la solution ait été calculée sur le niveau le plus fin.

La figure 4.7 représente schématiquement l'algorithme de résolution du problème EHD sousalimenté elliptique.



FIG. 4.7 – Algorithme de résolution du problème EHD sous-alimenté par la méthode "FMG" avec  $n_{cycle}$  V-cycles.

### 4.3.5 Vitesse de convergence

En moyenne, à chaque cycle, l'erreur est divisée par une constante. Cette constante est fonction des coefficients de sous-relaxation  $\omega$  et  $\omega_w$  adoptés et du niveau de discrétisation. La figure 4.8 montre l'évolution, au cours des cycles, du résidu moyen  $r_{moy}$  et du résidu de l'équation d'équilibre  $r_w$ .

$$r_{moy} = \frac{1}{(n_x - 2)n_y} \sum_i \sum_j |r_{i,j}|$$
(4.52)



FIG. 4.8 – Evolution des résidus  $r_{moy}$  et  $r_w$  en fonction du nombre de cycles  $n_{cycle}$ .

#### Remarque :

Le temps de calcul nécessaire pour atteindre la convergence de la solution, sur une grille comptant  $(256+1)^2$  points de discrétisation, est de l'ordre de vingt minutes, avec un ordinateur équipé d'un processeur pentium III fonctionnant à 850 MHz.

#### 4.3.6 Précision de la solution

Soit ERR(L, L-1) l'écart moyen entre les solutions calculées sur les niveaux L et L-1.

$$ERR(L, L-1) = \frac{1}{(n_x - 2)(n_y - 2)} \sum_{i} \sum_{j} |P_{2i,2j}^{h_x,h_y} - P_{i,j}^{2h_x,2h_y}|$$
(4.53)

Où  $n_x$  et  $n_y$  sont respectivement le nombre de points dans les directions  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ .

Le rapport ERR(L, L-1)/ERR(L-1, L-2) indique la qualité de la convergence vers la solution continue, lorsque L croît. Pour un problème discrétisé à l'ordre 1, le rapport doit tendre vers 1/2. Pour un problème discrétisé à l'ordre 2, il doit tendre vers 1/4. La solution du problème EHD suralimenté elliptique a été calculée par l'équation de Reynolds discrétisée à l'ordre 1. L'évolution avec le niveau L du rapport ERR(L, L-1)/ERR(L-1, L-2) est donnée dans le tableau 4.1, avec l'évolution de l'épaisseur centrale  $H_{cff} = H(0,0)$ . Cette épaisseur adimensionnée est obtenue au centre du contact (au point de coordonnées (0,0)) en conditions sur-alimentées. L'indice c indique que la valeur est centrale et ff (ff = "fully flooded") signifie qu'elle a été obtenue en conditions sur-alimentées.

Le lubrifiant utilisé présente les caractéristiques de viscosité et de compressibilité suivantes :  $\eta_0 = 40 \ 10^{-3}$  Pa s,  $\alpha = 2.2 \ 10^{-8}$  Pa<sup>-1</sup>. Ces propriétés sont valides pour tous les calculs, sauf lorsque des propriétés différentes sont spécifiées.

Le calcul correspondant aux mêmes conditions de fonctionnement M, L,  $\kappa$  a été mené en conditions sous-alimentées. Le contact était alors alimenté par une couche d'huile uniforme d'épaisseur  $H_{oil}(X_e, Y) = \rho_{cff} H_{cff} = 0.11252$  (voir tableau 4.2).

niveau	ERR(L, L-1)	ERR(L, L-1)/	$H_{cff}$
L		ERR(L-1, L-2)	
1			$7.76 \ 10^{-2}$
2	$9.40 \ 10^{-3}$		$1.02 \ 10^{-1}$
3	$1.94 \ 10^{-3}$	$2.06 \ 10^{-1}$	$1.07 \ 10^{-1}$
4	$9.80 \ 10^{-4}$	$5.05 \ 10^{-1}$	$1.04 \ 10^{-1}$
5	$5.18 \ 10^{-4}$	$5.29 \ 10^{-1}$	$1.01 \ 10^{-1}$
6	$2.66 \ 10^{-4}$	$5.14 \ 10^{-1}$	$0.992 \ 10^{-1}$

TAB. 4.1 – Evaluation de la convergence du calcul sur-alimenté  $M = 100, L = 5, \kappa = 1$ .

niveau	ERR(L, L-1)	ERR(L, L-1)/	$H_c$
L		ERR(L-1, L-2)	
1			$6.95 \ 10^{-2}$
2	$1.27 \ 10^{-2}$		$7.94 \ 10^{-2}$
3	$3.73 \ 10^{-3}$	$2.94 \ 10^{-1}$	$8.29 \ 10^{-2}$
4	$8.57 \ 10^{-4}$	$2.31 \ 10^{-1}$	$8.27 \ 10^{-2}$
5	$4.30 \ 10^{-4}$	$5.03 \ 10^{-1}$	$8.15 \ 10^{-2}$
6	$2.22 \ 10^{-4}$	$5.16 \ 10^{-1}$	$8.06 \ 10^{-2}$

TAB. 4.2 – Evaluation de la convergence du calcul sous-alimenté  $M = 100, L = 5, \kappa = 1, H_{oil}(X_e, Y) = \rho_{cff}H_{cff} = 0.11252.$ 

Les distributions de pression P(X, Y), de hauteur H(X, Y) entre les surfaces, du remplissage  $\theta(X, Y)$  et d'épaisseur totale d'huile  $\theta(X, Y)H(X, Y)$  dans le domaine de calcul  $\overline{\Omega}$  sont données en figures 4.9 et 4.10.

## 4.3.7 Validation du code de calcul

#### Contact sur-alimenté

Les épaisseurs de film au centre du contact, obtenues avec des couches d'alimentation en lubrifiant très épaisses, correspondent aux valeurs sur-alimentées. Elles ont été calculées grâce au code de calcul sous-alimenté, puis comparées aux valeurs données par les approximations (B.2), (B.3) et (B.12) établies respectivement par Hamrock et Dowson [40], Chittenden et al. [17] et Nijenbanning et al. [69]. La figure 4.11 présente les épaisseurs de film obtenues par le calcul et par les différentes approximations, pour plusieurs conditions de fonctionnement M, L et D.

Les valeurs numériques de l'épaisseur centrale de film en contact sur-alimenté  $H_{cff}$  ont aussi été comparées pour le cas : M = 20, L = 10,  $\kappa = 1$ ,  $H_{oil} = \infty$ , avec les résultats numériques obtenus par Chevalier [14]. Les différences observées selon le niveau de grille où la solution est calculée sont très faibles. Le domaine adopté est :  $X_e = -4.5$ ,  $X_s = 1.5$ ,  $Y_0 = 3.0$ . Sur le niveau 6, qui compte  $(512+1)^*(512+1)$  points, la différence est inférieure à 0.2%. Les valeurs de  $H_{cff}$  sont présentées et comparées dans le tableau 4.3.

La comparaison entre les épaisseurs obtenues par Wijnant [83] dans le cas d'un contact elliptique sur-alimenté et celles fournies par le code de calcul en conditions sur-alimentées a été effectuée. Les valeurs sont présentées dans le tableau 4.4. La comparaison des épaisseurs centrales de film



FIG. 4.9 – Champs de pression, de remplissage et d'épaisseur de lubrifiant, dans le contact suralimenté  $M = 100, L = 5, \kappa = 1.$ 

discrétisation	$H_{cff}$	$H_{cff}$	$100(H_{cff} - H_{cff}$ chevalier)
$n_x * n_y$		chevalier	$/H_{cff}$
$17^{2}$	$4.398 \ 10^{-1}$	$4.433 \ 10^{-1}$	-0.78%
$33^{2}$	$4.616 \ 10^{-1}$	$4.665 \ 10^{-1}$	-1.06%
$65^{2}$	$4.508 \ 10^{-1}$	$4.572 \ 10^{-1}$	-1.40%
$129^{2}$	$4.398 \ 10^{-1}$	$4.467 \ 10^{-1}$	-1.56%
$257^{2}$	$4.328 \ 10^{-1}$	$4.330 \ 10^{-1}$	-0.03%
$513^{2}$	$4.289 \ 10^{-1}$	$4.296 \ 10^{-1}$	-0.14%

TAB. 4.3 – Comparaison de l'épaisseur centrale sur-alimentée  $H_{cff}$  calculée, avec celle obtenue par Chevalier [14], M = 20, L = 10,  $\kappa = 1$ ,  $H_{oil} = \infty$ ,  $\eta_0 = 8.9 \ 10^{-3}$  Pa s,  $\alpha = 1.7 \ 10^{-8}$  Pa<sup>-1</sup>.



FIG. 4.10 – Champs de pression, remplissage et épaisseur de lubrifiant, dans le contact sousalimenté  $M = 100, L = 5, \kappa = 1, H_{oil}(X_e, Y) = \rho_{cff}H_{cff} = 0.11252.$ 

met en évidence des différences plus importantes que dans le tableau 4.3. Ces différences sont dues à une discrétisation de l'équation de Reynolds modifiée à l'ordre 2 par Wijnant, alors que l'ordre 1 est utilisé dans le code de calcul. L'écart entre les épaisseurs de film tend vers 0 lorsque le nombre de points de discrétisation tend vers l'infini car les discrétisations à l'ordre 1 et à l'ordre 2 tendent toutes les deux vers la solution continue. Sur une grille comptant  $(512+1)^*(512+1)$ points de discrétisation, la différence est inférieure à 1%.

#### Contact sous-alimenté

De même que pour le contact sur-alimenté, l'épaisseur centrale de film  $H_c$  a été comparée, en contact sous-alimenté, à celle obtenue par Chevalier [14]. Les valeurs sont données dans le tableau 4.5. La différence observée sur le niveau 6 est inférieure à 0.2%.



FIG. 4.11 – Comparaison des résultats obtenus avec le code sous-alimenté en conditions suralimentées  $(H_{oil} = \infty)$ , avec des formulations provenant de la littérature, pour différentes ellipticités  $D = R_x/R_y$ .

discrétisation	$H_{cff}$	$H_{cff}$	$100(H_{cff} - H_{cff}$ wijnant)
$n_x * n_y$		wijnant	$/H_c$
$65^{2}$	$8.18 \ 10^{-1}$	$7.17 \ 10^{-1}$	12.3%
$129^{2}$	$7.82 \ 10^{-1}$	$7.43 \ 10^{-1}$	5.04%
$257^{2}$	$7.67 \ 10^{-1}$	$7.49 \ 10^{-1}$	2.34%
$513^2$	$7.58 \ 10^{-1}$	$7.51 \ 10^{-1}$	0.96%

TAB. 4.4 – Comparaison de l'épaisseur centrale  $H_{cff}$  calculée, avec celle obtenue par Wijnant [83],  $M = 500, L = 5, D = 0.05 \eta_0 = 40 \ 10^{-3} \ Pa \ s, \alpha = 2.2 \ 10^{-8} \ Pa^{-1}$ .

discrétisation	$H_c$	$H_c$	$100(H_c - H_c \text{chevalier})$
$n_x * n_y$		chevalier	$/H_c$
$17^{2}$	$3.005 \ 10^{-1}$	$2.987 \ 10^{-1}$	0.60%
$33^{2}$	$3.130 \ 10^{-1}$	$3.147 \ 10^{-1}$	-0.53%
$65^{2}$	$3.130 \ 10^{-1}$	$3.144 \ 10^{-1}$	-0.42%
$129^{2}$	$3.107 \ 10^{-1}$	$3.116 \ 10^{-1}$	-0.28%
$257^{2}$	$3.087 \ 10^{-1}$	$3.087 \ 10^{-1}$	0.01%
$513^2$	$3.074 \ 10^{-1}$	$3.079 \ 10^{-1}$	-0.14%

TAB. 4.5 – Comparaison de l'épaisseur centrale  $H_c$  calculée, avec celle obtenue par Chevalier [14],  $M = 20, L = 10, \kappa = 1, H_{oil}(X_e, Y) = 0.4296, \eta_0 = 8.9 \ 10^{-3} \ Pa \ s, \alpha = 1.7 \ 10^{-8} \ Pa^{-1}$ .

## 4.4 Conclusion

Ce chapitre présente le principe de l'algorithme de résolution du problème de contact EHD sousalimenté elliptique, par les techniques multigrilles.

Cet algorithme possède de bonnes propriétés de vitesse de convergence et de stabilité (notamment grâce à l'emploi de la relaxation par lignes). La complexité du calcul du contact EHD est seulement de l'ordre de  $N \ln N$  par la méthode multigrilles alors qu'elle est de l'ordre de  $N^3$  avec une méthode classique. Ces qualités rendent possible l'exécution d'un grand nombre de calculs dans un temps raisonnable.

Cela permet d'étudier les principaux paramètres qui influencent le problème. Les résultats fournis par le code de calcul ont été comparés, en contact circulaire sous-alimenté, à ceux obtenus par Chevalier [14] et à ceux de Wijnant [83], en contact elliptique sur-alimenté. Des différences inférieures à 1% ont été observées sur l'épaisseur centrale de film et sur l'épaisseur minimale sur un niveau de discrétisation comptant  $(512+1)^*(512+1)$  points. Ainsi, les modifications apportées au code de calcul de contact circulaire EHD, pour qu'il résolve les problèmes elliptiques sous-alimentés ont été validées.

Ce code est exploité dans le chapitre suivant pour évaluer les champs d'épaisseur de film de lubrifiant dans les contacts.
## Chapitre 5

# Physique de l'éjection de lubrifiant

## 5.1 Introduction

Le modèle de lubrification sous-alimentée, présenté dans le chapitre 3, est utilisé dans ce chapitre pour mettre en évidence le mécanisme d'éjection de lubrifiant qui conduit à la sous-alimentation des contacts. Le phénomène d'éjection est présenté de manière qualitative puis quantitative.

Le paramètre adimensionné  $\gamma_c$ , introduit par Chevalier et al. [14], sert à caractériser la réponse d'un contact à la sous-alimentation en lubrifiant. Il permet de quantifier l'épaisseur de film dans le contact et la proportion de lubrifiant éjectée hors de la zone de contact en fonction de l'alimentation en lubrifiant. La valeur de  $\gamma_c$  est calculée en fonction de l'ellipticité, de la charge, de la vitesse, des propriétés des matériaux et du lubrifiant. La précision des résultats numériques (épaisseur de film, valeurs de  $\gamma_c$ ) présentés est discutée.

La théorie de Grübin [37], modifiée pour prendre en compte la sous-alimentation, est couplée aux prédictions d'épaisseur de film de Moes, pour déterminer une longueur d'entrée adimensionnée  $\bar{S}_{ff}$ . Cette longueur d'entrée adimensionnée est caractéristique du régime piezo-visqueux élastique sur-alimenté et elle gouverne le comportement du paramètre  $\gamma_c$ .

Enfin, un paramètre adimensionné de couplage C est introduit pour quantifier et prédire la sensibilité d'un contact à une sous-alimentation locale. Il caractérise l'aptitude d'un contact à uniformiser l'épaisseur de la couche d'alimentation en lubrifiant, sur la largeur de la piste de roulement. Cette partie de l'étude est menée exclusivement à partir de résultats numériques et d'un modèle analytique.

Des expériences, sur un contact modèle, servent à vérifier les valeurs numériques de  $\gamma_c$  et confirment l'influence de la longueur d'entrée adimensionnée  $\bar{S}_{ff}$  sur  $\gamma_c$ .

## 5.2 Prédiction d'épaisseur de film en contact sous-alimenté

Chevalier [14] a observé numériquement l'évolution de l'épaisseur de film au centre du contact, en fonction de la quantité de lubrifiant  $H_{oil}(X_e, Y)$  présente à l'entrée d'un contact EHD sousalimenté circulaire. Il a constaté la croissance de l'épaisseur de film dans le contact avec la quantité de lubrifiant présente à l'entrée. L'épaisseur de film ne peut néanmoins dépasser sa valeur sur-alimentée, qui correspond à un contact lubrifié par une quantité "infinie" de lubrifiant. L'épaisseur de film sur-alimentée constitue donc une limite à l'épaisseur de film sous-alimentée, lorsque la quantité de lubrifiant augmente.

Chevalier a aussi étudié le comportement de l'épaisseur de film dans le contact, lorsque la quantité de lubrifiant devient très faible. Il a constaté que, lorsque l'épaisseur de la couche d'alimentation tend vers zéro, le lubrifiant a tendance à être entraîné totalement dans le contact. Le rapport entre l'épaisseur de film au centre du contact et l'épaisseur de la couche d'alimentation de lubrifiant est alors égal à l'inverse de la compressibilité  $\bar{\rho}_c$  au centre du contact.

Les deux asymptotes sur et sous-alimentées s'expriment de la manière suivante en termes d'épaisseur centrale de film, si l'alimentation en lubrifiant  $H_{oil}(X_e, Y)$  est indépendante de Y:

$$\lim_{H_{oil} \to \infty} H_c = H_{cff} \tag{5.1}$$

$$\lim_{H_{oil}\to 0} H_c = \frac{H_{oil}}{\bar{\rho}_c} \tag{5.2}$$

La figure 5.1 montre l'évolution de l'épaisseur de film  $H_c$ , au centre d'un contact elliptique D = 0.1, alimenté par une couche de lubrifiant d'épaisseur constante  $H_{oil}$ .



FIG. 5.1 – Evolution de l'épaisseur de film, au centre du contact, en fonction de la quantité de lubrifiant  $H_{oil}$ , pour le contact elliptique D = 0.1, M = 100, L = 10.

Afin de généraliser l'étude, Chevalier et al. [15] ont introduit les épaisseurs adimensionnées (5.3) et (5.4).

$$\mathcal{R}_c = \frac{\bar{\rho}_c H_c}{\bar{\rho}_{cff} H_{cff}} \tag{5.3}$$

$$r_c = \frac{H_{oil}}{\bar{\rho}_{cff}H_{cff}} \tag{5.4}$$

La position des deux asymptotes (sur et sous-alimentées) est connue quelles que soient les conditions de fonctionnement du contact, si les épaisseurs sont exprimées avec les paramètres adimensionnés  $\mathcal{R}_c$  et  $r_c$ . D'après les relations (5.1) à (5.4), l'asymptote sur-alimentée est d'équation  $\mathcal{R}_c = 1$  et l'asymptote sous-alimentée est décrite par l'équation  $\mathcal{R}_c = r_c$ . La figure 5.2 présente la relation entre la quantité de lubrifiant qui alimente le contact et l'épaisseur de film au centre du contact en utilisant les épaisseurs adimensionnées  $r_c$  et  $\mathcal{R}_c$ . Les asymptotes sur et sous-alimentées sont représentées par deux droites. Les points symbolisent les épaisseurs de film adimensionnées calculées  $\mathcal{R}_c = f(r_c)$ .



FIG. 5.2 – Epaisseur de film centrale adimensionnée  $\mathcal{R}_c$ , en fonction de la quantité adimensionnée de lubrifiant  $r_c$ , pour le contact circulaire D = 1.0, M = 100, L = 10.

La connaissance a priori des deux asymptotes a permis à Chevalier et al. [14] d'approcher les valeurs calculées par la fonction (5.5) qui comporte un paramètre unique. Ce paramètre adimensionné, appelé  $\gamma_c$ , traduit le comportement de l'épaisseur de film entre les asymptotes.

$$\mathcal{R}_c = \frac{r_c}{\frac{\gamma_c}{\sqrt{1 + r_c^{\gamma_c}}}} \tag{5.5}$$

Lorsque  $\gamma_c$  tend vers l'infini, le comportement de l'épaisseur de film dans le contact en fonction de la quantité de lubrifiant tend vers celui des asymptotes. Au contraire, plus  $\gamma_c$  est faible, plus l'épaisseur de film est petite comparée au comportement asymptotique. La figure 5.3 illustre l'évolution du comportement de l'épaisseur de film au centre d'un contact sous-alimenté avec la valeur de  $\gamma_c$ .



FIG. 5.3 – Evolution du comportement sous-alimenté avec la valeur de  $\gamma_c$ .

En contact lubrifié, le champ de pression est proche du champ de pression de Hertz (voir figure 5.4). Il présente un maximum au voisinage du centre du contact. La pression est décroissante depuis le point de pression maximale, vers la périphérie du contact. Elle s'annule, au niveau du ménisque d'entrée ou de la frontière de cavitation. Le gradient de pression tend donc à éjecter le lubrifiant, radialement du centre du contact vers sa périphérie.

En amont de la zone de Hertz  $(X^2 + Y^2 > 1 \text{ avec } |Y| < 1 \text{ et } X < 0)$ , le lubrifiant éjecté par le gradient de pression est entraîné de nouveau dans le contact par les surfaces mobiles. La compétition entre le débit d'éjection (de Poiseuille) et le débit d'entraînement (de Couette)



FIG. 5.4 – Coupes calculées du champ de pression dans les plans  $(O, \vec{x}, \vec{z})$  et  $(O, \vec{y}, \vec{z})$ , pour le contact D = 0.5, M = 300, L = 10,  $r_c = 1$ .

aboutit à un équilibre, où un volume de lubrifiant est accumulé en amont de la frontière de Hertz.

En aval du contact  $(X^2 + Y^2 > 1 \text{ et } X > 0)$ , le lubrifiant éjecté par le gradient de pression vers la sortie du contact est entraîné dans la direction  $\vec{x}$  vers l'aval du contact par les surfaces mobiles.

#### Remarque :

Dans un mécanisme, la quantité de lubrifiant entraînée en aval du contact alimente les contacts suivants.

La composante du gradient de pression orientée dans la direction  $\vec{y}$  déplace le lubrifiant vers les frontières  $Y_0$  et  $-Y_0$ . Les surfaces n'étant pas animées de vitesse dans la direction  $\vec{y}$ , le débit de Poiseuille est le seul responsable du déplacement du lubrifiant dans cette direction. Les forces de volume et de surface étant négligées, aucune force n'entraîne le retour d'un volume élémentaire de lubrifiant, écarté de la piste de roulement, vers sa position initiale.

La piste de roulement désigne la région du domaine de calcul couverte par la zone de Hertz au cours du mouvement. Les calculs mettent en évidence une modification de la distribution du lubrifiant sur les surfaces entre l'entrée  $X_e$  et la sortie  $X_s$  du contact. Une réduction de l'épaisseur de film de lubrifiant entre l'entrée et la sortie du contact est observée sur la piste de roulement. La réduction de l'épaisseur de la couche de lubrifiant sur la piste de roulement se traduit par la relation (5.6), au cours du passage d'un corps roulant. Cette observation a été menée dans le cas d'un contact alimenté par une couche de lubrifiant uniforme :  $H_{oil}(X_e, Y) = cte$ .

$$H_{oil}(X_s, Y) \leqslant H_{oil}(X_e, Y) \qquad \text{avec} : |Y| < 1 \tag{5.6}$$

La figure 5.5 présente des coupes calculées de la distribution de lubrifiant et de la géométrie des surfaces, dans les plans  $(O, \vec{x}, \vec{z})$  et  $(O, \vec{y}, \vec{z})$ . Sur cette figure, une couche de lubrifiant d'épaisseur constante définie par  $r_c = H_{oil}(X_e, Y)/(\bar{\rho}_{cff}H_{cff}) = 1$  alimente le contact.

Au centre du contact, la pression est proche du champ de pression de Hertz. En ce point, le gradient de pression est donc proche de zéro. De plus, plusieurs paramètres empêchent l'écoulement du lubrifiant sous l'effet d'un éventuel gradient de pression : les épaisseurs de film sont très minces et la viscosité du lubrifiant très importante, du fait de la forte pression. Au centre du contact, le lubrifiant est donc soumis uniquement au débit d'entraînement dû à la vitesse moyenne des surfaces  $\vec{u}_m$ .



FIG. 5.5 – Coupes calculées de la distribution de lubrifiant et de la géométrie des surfaces, dans les plans  $(O, \vec{x}, \vec{z})$  et  $(O, \vec{y}, \vec{z})$ , pour le contact D = 0.5, M = 300, L = 10,  $r_c = 1$ .

Au centre du contact, le débit massique  $dq_c$  au travers d'une section de largeur dy, dans la direction  $\vec{x}$ , vaut donc :

$$\rho_c h_c u_m dy = dq_c \tag{5.7}$$

A l'entrée du contact, dans la zone  $\Omega_1$ , le débit massique  $dq_e$  au travers d'une section de largeur dy, dans la direction  $\vec{x}$  vaut :

$$\rho_0 \theta h u_m dy = dq_e \tag{5.8}$$

La conservation de débit massique, exprimée sur la ligne d'équation y = 0, entre un point de la zone  $\Omega_1$  et le point au centre du contact, est donnée par l'équation (5.9).

$$\rho_0 \theta h(x_e, 0) u_m dy = \rho_c h_c u_m dy \tag{5.9}$$

La conservation du débit massique dans la direction  $\vec{x}$  n'est possible qu'en l'absence de débit dans la direction  $\vec{y}$ . Dans le cas d'un contact linéique infiniment long, alimenté par une couche de lubrifiant d'épaisseur constante, les dérivées des grandeurs dans la direction  $\vec{y}$  sont nulles. Il n'existe donc pas de gradient de pression ni de débit de lubrifiant, dans cette direction. La relation (5.9) s'applique donc et lie les épaisseurs de la couche de lubrifiant et du film au centre du contact par la relation :

$$\rho_0 \theta h(x_e, 0) = \rho_0 h_{oil}(x_e, 0) = \rho_c h_c \tag{5.10}$$

Cette relation signifie que la totalité de la couche d'alimentation de lubrifiant est entraînée dans le contact et que l'absence de débit selon  $\vec{y}$  empêche le lubrifiant de contourner la zone de Hertz. L'équation (5.10) exprimée en fonction des épaisseurs relatives adimensionnées devient :

$$r_c = \mathcal{R}_c \tag{5.11}$$

L'épaisseur de film au centre d'un contact linéique infiniment long, fonctionnant en régime permanent, suit donc l'asymptote sous-alimentée, de  $r_c = 0$  à  $r_c = 1$ . L'épaisseur centrale de film ne pouvant dépasser sa valeur sur-alimentée,  $\mathcal{R}_c$  vaudra 1 pour  $r_c \ge 1$ . Le comportement sous-alimenté d'un contact linéique infiniment long fonctionnant en régime permanent est donc purement asymptotique. Il est caractérisé par une valeur de  $\gamma_c$  infinie (voir figure 5.3).

Comme le montre la figure 5.3, lorsque  $\gamma_c$  décroît, l'épaisseur centrale de film décroît et s'écarte des asymptotes. La relation (5.11) n'est donc pas valide ainsi que (5.10). Cela signifie que

l'écoulement ne conserve pas le débit massique dans la direction  $\vec{x}$ , sur la ligne d'équation y = 0. Il existe alors un débit non nul dans la direction  $\vec{y}$  généré par un gradient de pression dans cette même direction. Ce débit détourne une part du débit massique de la direction  $\vec{x}$  vers la direction  $\vec{y}$  et il a pour effet la réduction de l'épaisseur centrale de film.

Le paramètre adimensionné  $\gamma_c$  peut donc être interprété physiquement comme une résistance que le contact oppose au lubrifiant qui tente de le contourner. Cette résistance de nature visqueuse est fonction de la viscosité du lubrifiant, du gradient de pression dans la direction  $\vec{y}$ , de l'épaisseur du film et de la distance que le lubrifiant doit parcourir pour être éjecté en dehors de la piste de roulement. Ces considérations physiques sur  $\gamma_c$  sont expliquées plus en détails dans les paragraphes 5.3 et 5.6.

Les valeurs de  $\gamma_c$  ont été évaluées numériquement en contact circulaire, pour plusieurs conditions de fonctionnement M et L. L'évaluation, effectuée par la méthode des moindres carrés, consiste à trouver la valeur de  $\gamma_c$  qui approche le mieux les couples de valeurs  $\mathcal{R}_c = f(r_c)$  par la fonction (5.5). L'approximation minimise la distance entre la fonction (5.5) et les points  $\mathcal{R}_c = f(r_c)$  calculés. Les valeurs de  $\gamma_c$  obtenues sont regroupées dans le tableau 5.1 et sont illustrées par la figure 5.6. Ces résultats proviennent de l'approximation portant sur les trois points  $r_c = 0.5$ ,  $r_c = 1$ et  $r_c = 1.5$ .

		L							
		2	5	10	20				
	10	2.73	2.73	2.66	2.6				
	30	3.05	2.86	2.73	2.64				
M	100	3.51	3.18	2.94	2.78				
	300	4.16	3.59	3.27	3.03				
	1000	5.03	4.22	3.74	3.41				

TAB. 5.1 – Evolution de  $\gamma_c$  avec les conditions de fonctionnement M et L pour un contact circulaire.



FIG. 5.6 – Evolution de  $\gamma_c$  avec les conditions de fonctionnement M et L pour un contact circulaire.

## 5.3 Prédiction du paramètre $\gamma_c$

#### 5.3.1 Prédiction d'épaisseur de film, théorie de Grübin modifiée

Le modèle de prédiction d'épaisseur de film de Ertel et Grübin [28, 37] s'applique aux contacts linéiques infiniment longs. Il est principalement construit à partir des deux hypothèses suivantes :

• La géométrie déformée des corps en contact est équivalente à celle du contact de Hertz. L'épaisseur de film  $h^*$  est donc constante dans la zone de Hertz.

• La pression tend vers "l'infini" sur la frontière de Hertz à l'entrée du contact :  $P(X = -1) = \infty$ .

En contact linéique infiniment long, l'équation de Reynolds prend la forme :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) - u_m \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \tag{5.12}$$

avec la relation de piezo-viscosité de Barus :  $\eta = \eta_0 \exp(\alpha p)$ .

Soit q, la pression réduite définie par :

$$q = \frac{1}{\alpha} [1 - \exp\left(-\alpha p\right)] \tag{5.13}$$

L'introduction de la relation (5.14), obtenue à partir de (5.13), dans l'équation de Reynolds (5.12) permet de la simplifier (5.15), puis de l'intégrer par rapport à x pour obtenir la relation (5.18).

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\eta}{\eta_0} \frac{\partial q}{\partial x} \tag{5.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial q}{\partial x} \right) - 12\eta_0 u_m \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \tag{5.15}$$

Dans le contact, l'augmentation de la pression dans des proportions très importantes réduit énormément la mobilité du lubrifiant. Ce phénomène, observable au voisinage de la frontière de Hertz, est modélisé par une viscosité "infinie" et donc par une pression "infinie" :

$$\lim_{x \to -a_1} \eta(x) = \infty \text{ donc } \lim_{x \to -a_1} p(x) = \infty \text{ d'où } \lim_{x \to -a_1} q(x) = \frac{1}{\alpha}$$
(5.16)

 $a_1$  désigne la demi-largeur du contact linéique infiniment long.

D'autre part, lorsque la pression p est nulle, la pression réduite q est nulle :

$$\lim_{p \to 0} q = p \to 0 \tag{5.17}$$

Au point  $x = -a_1$ , la pression réduite a atteint son asymptote  $1/\alpha$ . Le gradient de pression réduite  $\partial q/\partial x$  est nul en  $x = -a_1$ , car la viscosité  $\eta$  est "infinie". L'équation simplifiée de Reynolds (5.15) peut être intégrée entre un point quelconque d'épaisseur h situé à l'entrée du contact et le point situé sur la frontière de Hertz à l'entrée du contact. L'épaisseur, pour  $|x| \leq a_1$ , est égale à  $h^*$  d'après les hypothèses de Grübin.

$$h^{3}\frac{\partial q}{\partial x} - 12\eta_{0}u_{m}(h - h^{*}) = 0$$
(5.18)

La géométrie  $h(x) - h^*$  du contact de Hertz étant connue, l'épaisseur de film  $h^*$  peut être déterminée par la résolution de l'équation (5.19), en contact sur-alimenté. Cette équation est obtenue par intégration de l'équation (5.18) entre  $x = -\infty$  et  $x = -a_1$ .

$$q(-a_1) - q(-\infty) = q(-a_1) - 0 = \frac{1}{\alpha} = 12\eta_0 u_m \int_{-\infty}^{-a_1} \frac{h - h^*}{h^3} dx$$
(5.19)

Dans le cas d'un contact sous-alimenté, la génération de pression débute sur le ménisque d'entrée, à la frontière entre le sous-domaine  $\Omega_1$  et le sous-domaine  $\Omega_2$  (voir chapitre 3, figure 3.6). Soit S la distance entre le ménisque et la zone de Hertz. L'équation (5.19) exprimée pour le contact sous-alimenté devient donc :

$$\frac{1}{12\eta_0 u_m \alpha} = \int_{-a_1-S}^{-a_1} \frac{h-h^*}{h^3} dx \tag{5.20}$$

D'après (5.18), la dérivée seconde de la pression réduite est connue.

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 12\eta_0 u_m \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{h-h^*}{h^3}\right) \frac{\partial h}{\partial x} = 12\eta_0 u_m \left(\frac{-2h+3h^*}{h^4}\right) \frac{\partial h}{\partial x}$$
(5.21)

En amont du contact, pour  $h > 3h^*/2$ , la dérivée seconde de q est positive, elle s'annule lorsque  $h = 3h^*/2$ , puis elle est négative pour  $h < 3h^*/2$ . D'autre part, sur la frontière de la zone de Hertz (en  $x = -a_1$ ),  $h = h^*$ , donc d'après (5.18)  $\partial q/\partial x(-a_1) = 0$ . La distribution de la pression réduite q pour  $x < -a_1$  est schématisée en figure 5.7.



FIG. 5.7 – Evolution schématique de la pression réduite q(x) et de l'épaisseur de film h à l'entrée du contact.

L'écriture de la relation (5.18), au point d'inflexion de la pression réduite, conduit à l'expression de l'épaisseur de film dans le contact en fonction de la dérivée première de la pression réduite.

$$h^* = \frac{4}{3} \left( \frac{\eta_0 u_m}{\partial q / \partial x|_{h=3h^*/2}} \right)^{1/2}$$
(5.22)

Si la dérivée  $\partial q/\partial x|_{h=3h^*/2}$  de la pression réduite est approchée par sa valeur moyenne (5.23) entre le ménisque d'entrée et la frontière de Hertz, la valeur de  $h^*$  (5.22) est déterminée en fonction de S et elle est donnée par l'équation (5.24).

$$\frac{\partial q}{\partial x}|_{h=3h^*/2} \simeq \frac{1}{\alpha S} \tag{5.23}$$

$$h^* = \frac{4}{3} \left( \eta_0 u_m \alpha S \right)^{1/2} \tag{5.24}$$

Pour un contact sur-alimenté, le ménisque d'entrée se trouve à une distance "infinie" en amont de la zone de Hertz. L'approximation (5.23) est alors invalide, car elle prédit un gradient de pression nul au point d'inflexion, ce qui conduit à une épaisseur de film  $h^*$  infinie. Pour que l'approximation (5.23) soit valide, elle doit être appliquée dans une zone où la pression réduite participe de manière significative à la création du film de lubrifiant. En effet, pour les valeurs de  $x \ll -a_1$ , la pression est négligeable. Seule une zone au voisinage de la zone de Hertz est active. L'étendue de cette zone, qui se comporte comme une couche limite, peut être déterminée en égalant les épaisseurs centrales de film données par la littérature et l'équation (5.24). La longueur  $S_{ff}$  de la couche limite en contact sur-alimenté est l'inconnue de cette équation.

L'équation (5.12) est établie pour un contact dont le gradient de pression dans la direction  $\vec{y}$  est nul. Elle permet de formuler la relation (5.24), d'après les travaux de Wedeven [81]. L'équation (5.12) est valide si, aux points où elle est exprimée, les termes de Poiseuille de l'équation de Reynolds relatifs à la direction  $\vec{y}$  sont nuls ou négligeables. Cette propriété est utilisée dans le paragraphe suivant sur la ligne d'équation y = 0 pour déterminer la longueur de la couche limite en contact sur-alimenté.

## 5.3.2 Application de la théorie de Grübin modifiée au contact elliptique : évaluation de la longueur d'entrée sur-alimentée $S_{ff}$



FIG. 5.8 – Les deux graphiques représentent des coupes selon la droite d'équation Y = 0. Celui de gauche présente l'évolution de la pression adimensionnée P et celui de droite présente l'évolution du rapport entre le terme de Poiseuille de la direction  $\vec{y} (Q_y = \partial/\partial y (\rho h^3/12\eta_0 * \partial p/\partial y))$  et celui de la direction  $\vec{x} (Q_x = \partial/\partial x (\rho h^3/12\eta_0 * \partial p/\partial x))$ .

Sur la ligne centrale (d'équation Y = 0) d'un contact d'ellipticité  $D \leq 1$ , les dérivées premières et secondes de la pression et de l'épaisseur de film dans la direction  $\vec{y}$  sont faibles devant celles dans la direction  $\vec{x}$ . Le rapport des termes de Poiseuille de l'équation de Reynolds dans les directions  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  est présenté en figure 5.8. Sur cette figure il apparaît que le terme de Poiseuille dans la direction  $\vec{x}$  domine le comportement de l'équation de Reynolds. Ce caractère s'accentue lorsque l'ellipticité augmente (lorsque D diminue). La figure présente le rapport des termes de Poiseuille pour :

• des contacts fortement chargés fonctionnant à faible vitesse (M grand et L faible),

• des cas faiblement chargés fonctionnant à grande vitesse (M petit et L grand).

Ces conditions de contact ont été explorées pour un contact de géométrie circulaire (D = 1) et un contact de géométrie elliptique (D = 0.05). Le terme de Poiseuille de la direction  $\vec{y}$  a une importance relative plus grande pour le contact circulaire fortement chargé fonctionnant à faible vitesse. Dans ce cas, le terme de Poiseuille de la direction  $\vec{y}$  est inférieur à 50% de celui de la direction  $\vec{x}$ . Dans la région où la pression devient significative (X > -1.5), le terme de Poiseuille de la direction  $\vec{y}$  devient rapidement dix fois inférieur à celui de la direction  $\vec{x}$ . Pour le contact d'ellipticité plus importante (D = 0.05), le terme de Poiseuille de la direction  $\vec{y}$  est inférieur à 2% du terme de Poiseuille de la direction  $\vec{x}$ , quel que soit X < -1.

Sur la ligne d'équation Y = 0, si le terme de Poiseuille de la direction  $\vec{y}$  est négligé devant celui de la direction  $\vec{x}$ , l'écoulement est décrit par l'équation (5.12). Le développement qui conduit de l'équation (5.12) à l'équation (5.24) est alors applicable.

L'approche de type Grübin utilise la géométrie de Hertz pour décrire la géométrie déformée des corps en contact; elle n'est donc valide que pour des contacts présentant des déformations élastiques proches de celles de Hertz. D'autre part, l'équation (5.23) utilise les propriétés de piezo-viscosité de Barus pour définir la dérivée de la pression réduite. La détermination de la longueur de la zone active, à partir de l'équation (5.24) et des épaisseurs de film connues par la littérature, n'est donc valide qu'en régime piezo-visqueux élastique.

La longueur de la zone d'entrée  $S_{ff}$  peut donc être déterminée, en contact piezo-visqueux élastique, en égalant l'épaisseur de film (5.24) et l'épaisseur donnée par l'asymptote élastique piezo-visqueuse  $H_{EPc}$ , définie par Nijenbanning [69].

$$\frac{h^*}{R_x} = \frac{4}{3} \left(\frac{\alpha \eta_0 u_m}{R_x}\right)^{1/2} \left(\frac{S_{ff}}{R_x}\right)^{1/2} = C_{EPc} M^{-1/12} L^{3/4} = H_{EPc}$$
(5.25)

avec :

$$C_{EPc} = 2^{17/12} 3^{-35/24} \pi^{5/6} \kappa^{-1/12} \left(\frac{\mathcal{E}}{1+D}\right)^{5/12}$$
(5.26)

Le schéma de la figure 5.9 illustre l'approximation de  $\partial q/\partial x|_{h=3h^*/2}$  contenue dans l'équation (5.25) et la manière dont elle permet d'obtenir la longueur de la zone d'entrée  $S_{ff}$ .



FIG. 5.9 – Approximation de la pente de la pression réduite  $\partial q/\partial x|_{h=3h*/2}$  et détermination de la longueur de la zone d'entrée  $S_{ff}$ .

La résolution de (5.25) en fonction des paramètres a dimensionnés M et L de Moes conduit à la longueur d'entrée a dimensionnée caractéristique du régime EHD sur-alimenté  $\bar{S}_{ff} = S_{ff}/a$ .

$$\bar{S}_{ff} = \frac{S_{ff}}{a} = 2^{-3/2} 3^{-5/4} \pi^2 \kappa^{-1/2} \left(\frac{\mathcal{E}}{1+D}\right)^{1/2} \left(\frac{L}{M}\right)^{1/2}$$
(5.27)

La longueur d'entrée adimensionnée  $S_{ff}$  est obtenue à partir des épaisseurs centrales de film en conditions sur-alimentées. Ces épaisseurs ont été mesurées expérimentalement et calculées dans un domaine bi-dimensionnel. Elles incluent donc le comportement du lubrifiant dans la direction  $\vec{y}$  qui est absent de la modélisation du contact linéique (5.24). Dans un contact bi-dimensionnel, le lubrifiant est soumis au gradient de pression dans la direction  $\vec{y}$ . Ce gradient de pression entraîne un débit dans la direction  $\vec{y}$  qui est pris en compte dans l'expression de l'épaisseur de film  $H_{EPc}$  (5.25). La longueur d'entrée  $S_{ff}$  calculée par la relation (5.27) est donc bien relative à un contact bi-dimensionnel.

Dans la suite, les variations de la longueur d'entrée (5.27) sont étudiées en fonction de M et L. Le facteur  $[\mathcal{E}/(\kappa(1+D))]^{1/2}$  est considéré comme une constante multiplicative intervenant dans la longueur d'entrée, pour un contact d'ellipticité donnée. Pour cette raison, le terme d'ellipticité sera négligé dans les sections suivantes et la longueur d'entrée sur-alimentée adimensionnée sera définie par  $\bar{S}_{ff} = \sqrt{L/M}$ .

#### 5.3.3 Ejection à l'entrée d'un contact sous-alimenté

Soit  $dS_e$  la surface élémentaire de largeur dy et de hauteur h, dont la normale est dirigée et orientée par l'écoulement.  $dS_e$  est située sur la droite d'équation y = 0 et elle se trouve dans la zone de film incomplet, en amont d'un contact sous-alimenté, à l'abscisse x < -a - S. Le débit massique à travers cette section vaut :  $dq_e = \rho_0 \theta h u_m dy = \rho_0 h_{oil} u_m dy$ .

Au centre du contact, la surface élémentaire  $dS_c$ , dirigée et orientée de la même manière que  $dS_e$ , est traversée par un débit  $dq_c = \rho_c h_c u_m dy$ , si le débit de Poiseuille est négligé en ce point. Cette hypothèse est recevable en raison de la forte viscosité au centre du contact et de la faible épaisseur, qui tendent toutes deux à limiter le débit de Poiseuille. D'autre part, le gradient de pression qui génère le débit de Poiseuille est proche de zéro au centre du contact.

Une partie du débit  $dq_e$  est entrainée dans le contact et participe au débit  $dq_c$ . L'autre partie est "détournée" par le gradient de pression qui existe dans la direction  $\vec{y}$  à l'entrée du contact. La zone d'entrée peut être considérée comme un tube de section particulière (représentée en figure 5.10), de largeur S et de hauteur h(x) dans lequel une partie du débit de lubrifiant est détournée vers la périphérie du contact. Soit  $dq_l$  le débit latéral qui contourne le contact en empruntant le tube d'éjection circonférentiel représenté en figures 5.10 et 5.11. Ce débit est calculé par l'équation (5.28).

$$dq_l = \frac{1}{6l} \int_{-a-S}^{-a} \frac{\rho h^3}{\eta} \Delta p dx \tag{5.28}$$

 $\Delta p$  représente la différence de pression entre un point situé sur la ligne Y = 0 (à l'entrée du tube circonférentiel) et le point situé à l'autre extrémité du tube circonférentiel sur la ligne d'équation X = 0. La pression sur cette droite est très faible pour y > b. Si elle est négligée, alors  $\Delta p = p(x,0)$ , avec x < -a. *l* représente la longueur de l'arc d'ellipse décrit par le tube circonférentiel. L'équation (5.28) montre que lorsque la zone d'entrée est réduite (lorsque *S* diminue), toute chose restant égale par ailleurs, le débit latéral  $dq_l$  diminue pour les raisons suivantes :

- Le domaine d'intégration est réduit.
- $\bullet$  L'épaisseur h est plus faible.

• La pression  $\Delta P$  est plus faible pour x < -a, (cette propriété est observée par une réduction de la quantité de lubrifiant disposée à l'entrée du contact. Elle est illustrée en figure 5.12).

• La masse volumique  $\rho$  décroît.

• La viscosité  $\eta$  est elle aussi réduite, mais la fonction intégrée  $\rho h^3 \Delta p / \eta$  décroît lorsque S décroît (voir figure 5.13 où cette fonction est tracée sous forme adimensionnée en fonction de X).



FIG. 5.10 – Géométrie du tube d'éjection circonférentiel.



FIG. 5.11 – Géométrie du tube d'éjection circonférentiel dans le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ .



FIG. 5.12 – Evolution de la pression P(X,0) en fonction de la quantité de lubrifiant  $r_c$  pour le contact D = 0.2, M = 100, L = 5.

Le modèle du tube circonférentiel est très approximatif. Il a pour unique objectif d'illustrer la diminution du débit circonférentiel lorsque la longueur d'entrée S est réduite.

L'écriture de la conservation du débit massique dans l'écoulement décrit par le modèle du tube circonférentiel présenté au paragraphe précédent prend la forme :



FIG. 5.13 – Evolution, avec la quantité de lubrifiant  $r_c$ , de la forme adimensionnée  $\bar{\rho}H^3P/\bar{\eta}$  de la fonction intégrée sur la droite Y = 0, dans l'équation (5.28), pour le contact D = 0.2, M = 100, L = 5.

$$dq_e = dq_l + dq_c \tag{5.29}$$

d'où :

$$\rho_0 \theta h u_m(x_e, 0) dy = dq_l + \rho_c h_c u_m dy \tag{5.30}$$

$$\rho_0 \theta h(x_e, 0) = \frac{dq_l}{u_m dy} + \rho_c h_c \tag{5.31}$$

donc :

$$\bar{\rho}_c h_c = h_{oil}(x_e, 0) - \frac{dq_l}{\rho_0 u_m dy}$$
(5.32)

L'équation (5.32) met en évidence la relation entre l'épaisseur de film au centre du contact et l'épaisseur de la couche d'alimentation en lubrifiant  $h_{oil}(x_e, 0)$ . Lorsque le débit d'éjection  $dq_l$ est nul, le rapport  $h_{oil}(x_e, 0)/h_c$  est égal à la compressibilité  $\bar{\rho}_c$  au centre du contact. Ce comportement est observé sur l'asymptote sous-alimentée des figures 5.2 et 5.3.

Le paragraphe suivant analyse les variations de  $\gamma_c$  en fonction du débit latéral  $dq_l$ .

#### 5.3.4 Prédiction du paramètre $\gamma_c$

Si les quantités adimensionnées  $r_c$  et  $\mathcal{R}_c$  introduites en 5.2 sont utilisées pour représenter les épaisseurs de film de lubrifiant en amont et au centre du contact, il vient, d'après (5.32) :

$$\frac{\bar{\rho}_c h_c}{\bar{\rho}_{cff} h_{cff}} = \mathcal{R}_c = \frac{h_{oil}}{\bar{\rho}_c h_{cff}} - \frac{dq_l/(\rho_0 u_m dy)}{\bar{\rho}_{cff} h_{cff}} = r_c - \frac{dq_l}{\rho_{cff} h_{cff} u_m dy}$$
(5.33)

La différence entre les quantités  $r_c$  et  $\mathcal{R}_c$  augmente lorsque le débit  $dq_l$  augmente. L'analyse rapide à partir du modèle simplifié du tuyau circonférentiel montre que le débit  $dq_l$  croît avec la longueur de la zone d'entrée S. La différence entre  $r_c$  et  $\mathcal{R}_c$  croît donc avec S.

L'équation (5.33) qui lie  $\mathcal{R}_c$  à  $r_c$  est aussi décrite par la relation (5.5) à partir du paramètre  $\gamma_c$ . Le paramètre  $\gamma_c$  et le débit adimensionné déterminent tous deux la relation entre  $r_c$  et  $\mathcal{R}_c$ . Ils sont donc liés comme le montre la relation (5.34) établie d'après (5.5) et (5.33).

$$\mathcal{R}_c = \frac{r_c}{\frac{\gamma_c}{\sqrt{1 + r_c^{\gamma_c}}}} = r_c - \frac{dq_l}{\rho_{cff} h_{cff} u_m dy}$$
(5.34)

Les faibles valeurs de  $\gamma_c$  caractérisent des contacts présentant des grandes différences entre  $r_c$  et  $\mathcal{R}_c$ . De telles différences sont aussi caractérisées par un débit circonférentiel  $dq_l$  important. Le comportement de  $\gamma_c$  est donc lié à celui du débit circonférentiel qui est une fonction croissante de la longueur d'entrée S.  $\gamma_c$  est donc une fonction décroissante de la longueur d'entrée S et du débit circonférentiel  $dq_l$ .

Le débit circonférentiel dévie le lubrifiant dans la direction  $\vec{y}$  et lui fait contourner le contact. Le paramètre adimensionné  $\gamma_c$ , lorsqu'il est grand, traduit un faible débit circonférentiel. Il peut donc être interprété du point de vue physique comme une résistance que le contact oppose au lubrifiant qui tente de le contourner. Une telle résistance réduit le contournement du contact par le lubrifiant. Elle le force donc à traverser le contact. Cette analyse est en accord avec la figure 5.3 qui montre que lorsque  $\gamma_c$  tend vers l'infini, le comportement tend vers ses asymptotes et le débit d'éjection devient nul. L'asymptote sous-alimentée  $r_c = \mathcal{R}_c$  traduit le fait que la totalité du lubrifiant disposé à l'entrée du contact le traverse sans le contourner et participe à la création du film de lubrifiant au centre du contact.

Comme le montre, plus loin, le paragraphe 5.6.1, la longueur d'entrée adimensionnée  $\bar{S}$  évolue linéairement avec  $\bar{S}_{ff} = \sqrt{L/M}$ . Le sens de variation de  $\gamma_c$  étant opposé à celui de la longueur d'entrée S (et donc de  $\bar{S}_{ff}$ ), les valeurs de  $\gamma_c$  obtenues numériquement en contact circulaire sont portées sur la figure 5.14, en fonction de  $1/\bar{S}_{ff}$ . Les valeurs de  $\gamma_c$  qui forment un nuage sur la figure 5.6 sont rassemblées sur une droite unique lorsqu'elles sont représentées en fonction de  $1/\bar{S}_{ff}$ . Ceci met en évidence que le comportement de  $\gamma_c$  est gouverné par le débit d'éjection circonférentiel et donc par la longueur d'entrée  $\bar{S}_{ff}$ .



FIG. 5.14 –  $\gamma_c$  en fonction de  $1/\bar{S}_{ff} = \sqrt{M/L}$  pour le contact circulaire D = 1.0, M = 10, 30, 100, 300, 1000, L = 2, 5, 10, 20. (L'approximation de  $\gamma_c$  par la méthode des moindres carrés porte sur les points  $r_c = 0.5, 1.0, 1.5$ ).

La figure 5.15 présente les résultats obtenus dans des conditions similaires à celles de la figure 5.14 mais cette fois pour des contacts elliptiques ( $D \leq 1.0$ ). Pour chacune des ellipticités considérées, les valeurs de  $\gamma_c$  représentées en fonction de l'inverse de la longueur d'entrée  $\bar{S}_{ff}$  se trouvent sur une droite. Ceci confirme la pertinence de l'analyse du phénomène de contournement du lubrifiant basée sur la longueur de la couche limite à l'entrée du contact et l'influence du contournement sur le paramètre  $\gamma_c$ .



FIG. 5.15 –  $\gamma_c$  en fonction de  $\sqrt{M/L}$  pour différentes ellipticités : D = 0.05, 0.10, 0.20, 0.50, 1.00. et différentes conditions de charge et de vitesse : M = 10, 30, 100, 300, 1000, L = 2, 5, 10, 20. (L'approximation par la méthode des moindres carrés porte sur les points  $r_c = 0.5, 1.0, 1.5$ ).

## 5.3.5 Discussion

Les figures 5.14 et 5.15 présentent l'évolution de  $\gamma_c$  en fonction de l'inverse de la longueur d'entrée sur-alimentée adimensionnée. Les courbes obtenues sont des droites de pente positive. La valeur de  $\gamma_c$  croît donc lorsque la longueur d'entrée diminue. Cette propriété est observable dans le cas de contacts circulaires et elliptiques.

D'autre part, à longueur d'entrée adimensionnée  $\bar{S}_{ff}$  égale, la valeur du paramètre  $\gamma_c$  augmente lorsque l'ellipticité augmente (lorsque D diminue). La réduction du débit d'éjection circonférentiel s'explique par l'allongement de la distance parcourue par le lubrifiant pour atteindre les bords de la piste de roulement. Le gradient de pression diminue ou autrement dit la résistance du tube circonférentiel à l'écoulement augmente. Ainsi, le débit circonférentiel diminue et la valeur de  $\gamma_c$  augmente, lorsque l'ellipticité augmente.

Les résultats présentés dans cette section sont validés en sections 5.4 et 5.7 par une approche numérique considérant de multiples passages des corps roulants sur la piste de roulement et par des évaluations expérimentales de  $\gamma_c$ .

## 5.3.6 Ejection circonférentielle du lubrifiant à la sortie du contact

Le lubrifiant situé entre le ménisque d'entrée du contact et la frontière du contact de Hertz subit la compétition entre le débit de Poiseuille et le débit de Couette. Le débit de Poiseuille déplace le lubrifiant vers l'amont du contact (dans le sens opposé au gradient de pression). Il déplace donc le ménisque d'entrée vers l'amont du contact. Le débit de Couette au contraire entraîne le lubrifiant vers l'aval du contact, ce qui tend à vider le volume de lubrifiant piégé entre le ménisque d'entrée et la zone de Hertz. La compétition entre ces deux débits a pour conséquence l'accumulation d'un volume de lubrifiant à l'entrée du contact. L'équilibre entre les deux débits est observé numériquement grâce au modèle présenté dans le chapitre 3. Il se traduit par une discontinuité dans l'épaisseur du film de lubrifiant et donc par une discontinuité dans le champ de remplissage  $\theta$ , au niveau du ménisque (voir figure 5.5). A l'entrée du contact, entre le ménisque et la zone de Hertz, le phénomène de coin d'huile ou de convergent génère un gradient de pression dans la direction  $\vec{y}$ . Ce gradient de pression entraîne l'éjection du lubrifiant vers les bords de la piste de roulement. Comme le montre le paragraphe 5.3.3, le débit d'éjection de lubrifiant croît avec la longueur d'entrée adimensionnée  $\bar{S}$ .

A la sortie du contact, l'écoulement du lubrifiant a lieu dans un divergent, mais la configuration n'est pas anti-symétrique à la situation à l'entrée du contact pour plusieurs raisons :

• La géométrie diffère de celle de l'entrée à cause du pic de pression situé au voisinage de la frontière de cavitation.

• A la sortie du contact, les débits de Poiseuille et de Couette ne sont pas en compétition, au contraire, ils s'ajoutent. Ils tendent tous deux à déplacer le lubrifiant vers l'aval du contact.

• De ce fait, aucune accumulation de lubrifiant n'est observable à la sortie du contact.

• La pression diminue donc très rapidement à la sortie du contact.

• La frontière de cavitation, où le film se rompt, se trouve très proche de la frontière du contact de Hertz.

• Enfin, le gradient de pression à la rupture du film est nul alors qu'il ne l'est pas à sa formation (voir équations (3.23) et (3.24)).

Le raisonnement basé sur l'écoulement du lubrifiant dans un tube circonférentiel a été développé en 5.3.3 pour aborder le problème de l'éjection du lubrifiant à l'entrée du contact. Il peut être appliqué à la sortie du contact où une faible pression (donc une faible viscosité) coexiste avec un gradient de pression dans la direction  $\vec{y}$ . Le fait que la distance entre la frontière de Hertz et la frontière de cavitation soit beaucoup plus faible que la longueur de la couche limite à l'entrée permet de supposer que l'éjection à la sortie du contact sera moins importante que celle observée à l'entrée.

Afin d'évaluer la perte de débit massique due à l'éjection de lubrifiant, à l'entrée et à la sortie, trois points caractéristiques où le débit de Poiseuille est nul sont utilisés. En ces points, le débit massique est donné par la relation  $dq = \rho \theta h u_m dy$ . Les grandeurs  $u_m$  et dy étant constantes, la comparaison des débits massiques entre ces trois points est équivalente à la comparaison des épaisseurs de film multipliées par la densité du lubrifiant. Cette quantité  $ms = \rho \theta h$  correspond à la masse surfacique du lubrifiant.

Les trois points étudiés sont situés au milieu de la piste de roulement sur la droite d'équation y = 0.

• Le premier point se trouve à l'entrée du contact dans la zone  $\Omega_1$ . Les grandeurs qui s'y rapportent portent l'indice e.

• Le second point est au centre du contact, dans la zone  $\Omega_2$ , il est identifié par l'indice c.

• Le dernier, qui porte l'indice s, est situé à la sortie du contact, dans la zone  $\Omega_1$ .

La quantité de lubrifiant  $ms_e = \rho_e \theta_e h_e$  est déposée à l'entrée du contact. Au centre du contact, la masse surfacique est réduite car une partie du lubrifiant est éjectée entre l'amont et le centre du contact. La quantité de lubrifiant au centre vaut :  $ms_c = \rho_c h_c$ . Enfin entre le centre et l'aval du contact, une fraction du lubrifiant est éjectée de nouveau, vers les côtés de la piste de roulement. Il ne reste, à la sortie du contact, que la quantité  $ms_s = \rho_s \theta_s h_s$  (voir figure 5.16).

Au cours de l'écoulement, la réduction de la quantité de lubrifiant sur la piste de roulement est observable. Sur la ligne centrale, elle est quantifiée par la différence entre la masse surfacique disposée à l'entrée du contact et la masse surfacique observée à la sortie :  $\delta ms_t = ms_e - ms_s$ . Le débit d'éjection à la sortie du contact participe à la réduction totale  $\delta ms_t$  de la quantité de lubrifiant sur la piste de roulement. La réduction de la masse surfacique entre le centre et la sortie du contact, notée :  $\delta ms_s = ms_c - ms_s$ , permet de quantifier la part  $ej_s$  de cette éjection, en la rapportant à la réduction totale de la masse surfacique  $\delta ms_t$ .



FIG. 5.16 – Comparaison de la masse surfacique de lubrifiant en trois points particuliers de l'écoulement.

$$ej_s = \frac{\delta ms_s}{\delta ms_t} = \frac{ms_c - ms_s}{ms_e - ms_s} = \frac{\bar{\rho}_c H_c - \theta_s H_s}{\theta_e H_e - \theta_s H_s}$$
(5.35)

La figure 5.17 illustre, sous forme de pourcentage, l'évolution de l'éjection  $ej_s$  ayant lieu à la sortie du contact avec les conditions de fonctionnement. Ce pourcentage est exprimé, à titre d'exemple, pour le contact d'ellipticité D = 0.2, pour des quantités de lubrifiant  $r_c = 0.1$ , 0.3 et 1.0. Les résultats obtenus pour différentes valeurs de M et L sont représentés en fonction de  $1/\bar{S}_{ff}$ . Exceptionnellement, les calculs ont été menés sur un domaine de calcul comptant  $(512 + 1)^2$  points de discrétisation.



FIG. 5.17 – Pourcentage d'éjection de lubrifiant due à la sortie du contact d'ellipticité D = 0.2.

Il apparaît sur la figure 5.17 que l'importance relative  $ej_s$  de l'éjection de lubrifiant qui prend place à la sortie du contact augmente lorsque la sévérité de la sous-alimentation augmente (lorsque  $r_c$  diminue). Ce phénomène s'explique par l'évolution du champ de pression et de la longueur de la couche limite d'entrée lorsque la quantité de lubrifiant est réduite.

Lorsque l'alimentation en lubrifiant  $r_c$  diminue, le ménisque d'entrée se rapproche de la zone de Hertz. Le mécanisme de génération de pression est alors concentré sur une distance plus courte dans la direction  $\vec{x}$ . La longueur d'entrée S est alors réduite. Pour une quantité de lubrifiant qui tend vers zéro, le champ de pression tend asymptotiquement vers le champ de pression de Hertz, d'après Chevalier [14]. Les champs de pression présentés par la figure 5.18 illustrent l'évolution du champ de pression pour différentes quantités de lubrifiant  $r_c$ , dans le cas du contact D = 0.2, M = 100, L = 5. Chevalier [14] a aussi observé que le rapport de l'épaisseur minimale et de l'épaisseur centrale de film tend vers l'unité lorsque  $r_c$  tend vers zéro. La géométrie et le champ de pression évoluent vers la configuration de Hertz qui est symétrique de révolution. Cela permet de prédire que le débit de Poiseuille dans le contact évolue lui aussi vers une répartition symétrique. Lorsque la sévérité de la sous-alimentation augmente, l'éjection de lubrifiant prend la même importance à l'entrée et à la sortie du contact. Lorsque la quantité de lubrifiant  $r_c$ présente à l'entrée du contact tend vers zéro, le pourcentage d'éjection  $ej_s$  ayant lieu à la sortie du contact tend vers 50%.

La figure 5.17 présente des valeurs de  $e_{j_s}$  supérieures à 50%. Ce phénomène peut être attribué à la dissymétrie du champ de pression entre la formation et la rupture du film ou à une finesse insuffisante du pas de discrétisation du domaine de calcul. Pour  $r_c \simeq 0.1$ , l'éjection de lubrifiant est approximativement mille fois inférieure à l'épaisseur centrale de film. Or le calcul de  $e_{j_s}$  est basé sur la différence et le rapport de quantités très petites (les éjections). L'erreur numérique relative contenue dans  $e_{j_s}$  devient donc importante lorsque la quantité de lubrifiant tend vers zéro.



FIG. 5.18 – Evolution de la pression P(X,0) en fonction de la quantité de lubrifiant  $r_c$  pour le contact D = 0.2, M = 100, L = 5.

#### 5.3.7 Ejection globale au cours d'un passage caractérisée par le paramètre $\gamma$

Les quantités  $r_c$  et  $\mathcal{R}_c$  ont été définies avec, comme référence d'adimensionnement, l'épaisseur de film multipliée par la compressibilité au centre d'un contact sur-alimenté (voir équations (5.3) et (5.4)). De la même manière, il est possible de définir des quantités r et  $\mathcal{R}$  qui sont respectivement les épaisseurs adimensionnées de la couche d'alimentation en lubrifiant à l'entrée du contact et à la sortie du contact (voir (5.36) et (5.37)). Elles sont adimensionnées par la densité surfacique du lubrifiant au centre de la piste de roulement à la sortie du même contact, lubrifié en conditions sur-alimentées. Les quantités r et  $\mathcal{R}$  représentent la quantité de lubrifiant sur la piste de roulement avant et après le passage d'un corps roulant. Leur différence permet d'accéder à la réduction globale de la densité surfacique de lubrifiant sur la piste de roulement au cours d'un cycle.

$$r = \frac{h_{oil}(x_e, y)}{h_{oil\ ff}(x_s, 0)}$$
(5.36)

$$\mathcal{R} = \frac{h_{oil}(x_s, y)}{h_{oil\ ff}(x_s, 0)} \tag{5.37}$$

Chevalier et al. [15] ont proposé une analyse de la réduction de l'épaisseur de lubrifiant sur la piste de roulement au cours des passages des corps roulants. La description mathématique de la

réduction de l'épaisseur en fonction du nombre de passages les a conduits à la relation (5.5) entre la quantité de lubrifiant à l'entrée et au centre du contact. Ils ont considéré que le lubrifiant est éjecté exclusivement à l'entrée du contact. Comme le montre le paragraphe précédent, cette hypothèse n'est valide que pour les contacts peu sous-alimentés.

L'éjection totale de lubrifiant au cours d'un passage de corps roulant est obtenue par la différence entre l'épaisseur de lubrifiant à l'entrée et à la sortie du contact. Les paramètres r et  $\mathcal{R}$  sont donc adaptés à l'expression de la réduction globale de l'épaisseur de film (5.5) au cours d'un passage.

Le paramètre adimensionné  $\gamma$  de résistance globale à l'éjection circonférentielle est alors défini par la relation (5.38).

$$\mathcal{R} = \frac{r}{\sqrt[\gamma]{1+r^{\gamma}}} \tag{5.38}$$

Remarque : Comme la fonction (5.5), la fonction (5.38) admet les deux asymptotes sous et suralimentées (respectivement  $\mathcal{R} = r$  et  $\mathcal{R} = 1$ ).

## 5.4 Passages successifs

La durée de vie des roulements et des engrenages se compte en centaines de millions de tours, lorsqu'ils sont utilisés dans des conditions courantes ( $p_h \simeq 3.3G$  Pa). Un point situé sur la piste de roulement d'une des surfaces verra passer des centaines de millions de contacts au cours de la vie du mécanisme.

Comme le montre le paragraphe 5.3, au cours du passage d'un corps roulant sur la piste de roulement, l'épaisseur de lubrifiant présente sur les surfaces décroît entre l'entrée et la sortie du contact. Les forces de capillarité, de gravité ou d'accélération dues à d'éventuelles vibrations du mécanisme sont négligées. Le profil de lubrifiant est donc figé entre deux passages d'un corps roulant. En conséquence, l'épaisseur de film au point de la piste considéré est strictement décroissante au cours des cycles. Dans cette section, ce problème est étudié numériquement au cours des premiers cycles de fonctionnement. La simulation de la réduction des épaisseurs de film au cours des cycles est réalisée par des calculs successifs avec le code de calcul EHD elliptique sous-alimenté. Chaque contact est alimenté par le profil de lubrifiant  $H_{oil,n}(X_e, Y)$  que le contact précédent a laissé derrière lui  $H_{oil,n-1}(X_s, Y)$ . Si l'indice n désigne le numéro de passage d'un corps roulant, alors le profil de lubrifiant imposé comme condition aux limites à l'entrée du contact n est obtenu par la relation (5.39).

$$H_{oil,n}(X_e, Y) = H_{oil,n-1}(X_s, Y)$$
(5.39)

Lors du premier passage (n = 1), le contact est lubrifié en conditions sur-alimentées; l'épaisseur de la couche de lubrifiant à l'entrée du contact est égale à la séparation entre les surfaces soit :  $\theta(X_e, Y) = 1$  ou  $H_{oil,1}(X_e, Y) = H(X_e, Y)$ . L'épaisseur de film et la distribution du lubrifiant sont calculées grâce au code de calcul EHD elliptique sous-alimenté. L'alimentation en lubrifiant du contact suivant est donnée par la relation (5.39). L'utilisation du code de calcul et de la relation (5.39) de manière récursive fournit l'évolution du profil de lubrifiant  $H_{oil,n}$  au cours des passages du corps roulant.

Au cours des cycles, l'épaisseur du profil de lubrifiant qui alimente les contacts diminue significativement sur la piste de roulement (pour  $|Y| \leq 1$ ). D'autre part, la forme du profil de lubrifiant, qui après le premier passage évoque nettement la section de l'épaisseur de film d'un contact EHD dans le plan  $(O, \vec{y}, \vec{z})$ , évolue vers la géométrie du contact de Hertz. Les profils de lubrifiant à la sortie du contact  $H_{oil,n}(X_s, Y)$  obtenus après n = 1, 2, 5, 10, 20, 50 passages sont présentés sur la figure 5.19, pour les contacts D = 1, 0.1, M = 100, L = 20.



FIG. 5.19 – Profil de lubrifiant à la sortie du contact  $H_{oil,n}$  après n = 1, 2, 5, 10, 20, 50 passages, pour les contacts M = 100, L = 20, D = 1 (à gauche) et D = 0.1 (à droite).

Si le contact était alimenté par une épaisseur de lubrifiant constante et si la réduction de l'épaisseur de film au cours d'un passage était constante sur la largeur de la piste de roulement, alors le profil de lubrifiant observé à la sortie du contact serait plat. Le contact suivant serait aussi alimenté par une couche de lubrifiant d'épaisseur constante. Dans de telles conditions, la réduction de l'épaisseur de film au cours des cycles pourrait être prédite en utilisant la suite numérique (5.40) définie par les fonctions (5.38) et (5.39).

$$r_{n+1} = \frac{r_n}{\sqrt[\gamma]{1+r_n^{\gamma}}} \tag{5.40}$$

La représentation graphique de la réduction des épaisseurs de film (5.40) au cours des passages est donnée schématiquement sur la figure 5.20.



FIG. 5.20 – Evolution schématique de l'épaisseur de la couche de lubrifiant sur la piste de roulement au cours des cinq premiers passages du corps roulant.

La relation (5.41) entre les quantités de lubrifiant présentes à l'entrée du contact du passage n et à l'entrée du passage n + i, avec i entier positif ou nul, est obtenue à partir de l'écriture récursive de (5.40).

$$r_{n+i} = \frac{r_n}{\sqrt[\gamma]{1+i r_n^{\gamma}}} \tag{5.41}$$

Les termes de la suite numérique (5.40) peuvent donc être exprimés à partir de l'épaisseur de film à la sortie du premier passage ( $\mathcal{R}_1$ ) sous la forme (5.42).

$$r_{2+i} = \frac{r_2}{\sqrt[\gamma]{1+i} r_2^{\gamma}} = \frac{\mathcal{R}_1}{\sqrt[\gamma]{1+i} \mathcal{R}_1^{\gamma}}$$
(5.42)

Si, lors du premier passage, le contact est sur-alimenté, alors par définition,  $\mathcal{R}_1$  vaut 1.

$$r_{2+i} = \frac{1}{\sqrt[\gamma]{1+i}}$$
(5.43)

Cette expression conduit, pour un nombre de passages supérieur ou égal à deux, à la quantité de lubrifiant  $r_n$  à l'entrée du contact lors du  $n^{ieme}$  passage.

$$r_n = \frac{1}{\sqrt[\gamma]{n-1}} \tag{5.44}$$

Si la réduction de la quantité de lubrifiant à la sortie du contact  $\mathcal{R}$  est étudiée, alors la relation donnée par la suite (5.40) entre l'épaisseur de la couche de lubrifiant et le numéro du passage prend la forme (5.45) dès le premier passage.

$$\mathcal{R}_n = r_{n+1} = n^{-1/\gamma} \tag{5.45}$$

La figure 5.19 montre que le profil de lubrifiant varie peu au centre de la piste de roulement, au voisinage de Y = 0. Ainsi, l'hypothèse de profil de lubrifiant uniforme qui permet d'établir la relation (5.40) est considérée correcte en première approximation.

La figure 5.21 représente la réduction de l'épaisseur de la couche de lubrifiant sur la piste de roulement prédite par la suite (5.39) au cours des n passages des corps roulants. La courbe en trait continu est issue du calcul complet des passages successifs par le code EHD. La courbe en trait pointillé est donnée par la formule (5.45). La valeur de  $\gamma = 4.9$  est obtenue par une approximation de la courbe en trait continu calculée par le code EHD, par la méthode des moindres carrés avec la fonction (5.45).



FIG. 5.21 - Evolution de l'épaisseur de la couche d'alimentation en lubrifiant au centre de la piste de roulement au cours des n passages (la courbe pointillée est obtenue d'après (5.45), la courbe en trait continu est obtenue par le calcul numérique des valeurs de la suite (5.39)).

## 5.5 Précision des résultats numériques

## 5.5.1 Influence du domaine de calcul $\overline{\Omega}$ sur l'épaisseur de film sur-alimentée

Dans un contact modèle sur-alimenté, le domaine en pression est "infini" et la pression tend vers zéro, lorsque X ou Y tendent vers  $\pm \infty$ . Le système d'équations (3.51) à (3.54) qui modélise le contact est résolu numériquement sur le domaine de calcul adimensionné  $\overline{\Omega}$ , dont la longueur et la largeur sont finies.

La finesse du pas de maillage est imposée par la précision exigée sur le calcul des débits dans le contact. Le nombre de points de calcul est égal au rapport des dimensions du domaine de calcul et du pas de maillage. Le temps de calcul augmente presque linéairement avec le nombre de points de calcul. Afin de réduire ce temps de calcul, il est souhaitable d'utiliser le plus petit domaine de calcul possible.

Les conditions aux limites adoptées imposent une pression nulle sur les frontières du domaine. La réduction du domaine de calcul concentre la pression. Le calcul du contact sur-alimenté correspond donc à un contact où la position et la forme du ménisque d'entrée seraient imposées. L'effet de la réduction du domaine de calcul est comparable à la sous-alimentation car il entraîne la réduction de l'épaisseur de film au centre du contact. Cette forme de sous-alimentation est qualifiée par la suite de numérique. La taille du domaine de calcul influence la solution. Pour augmenter la précision du calcul, il est donc souhaitable d'adopter le domaine de calcul le plus grand possible.

Lorsque la taille du domaine de calcul augmente, la solution tend asymptotiquement vers la solution correspondant à un domaine de calcul "infini". Le tableau 5.2 contient le pourcentage de différence entre l'épaisseur centrale de film calculée sur trois domaines  $\overline{\Omega}$  de tailles différentes. Il ressort de ce tableau que les contacts en régime iso-visqueux nécessitent un domaine de calcul plus grand qu'en régime piezo-visqueux élastique pour atteindre la même précision. D'autre part, en régime piezo-visqueux élastique, le gain de précision obtenu en effectuant le calcul sur un domaine  $X \in [-9,3]$ ;  $Y \in [-6,6]$  au lieu de  $X \in [-4.5, 1.5]$ ;  $Y \in [-3,3]$  est inférieur à 5%.

Les dimensions du domaine de calcul adoptées sont un compromis entre la précision exigée sur la solution et le temps de calcul. En raison de ces résultats, les calculs sont effectués sur le domaine  $\overline{\Omega} X \in [-4.5, 1.5]; Y \in [-3, 3].$ 

Remarques :

• Noutary et Lubrecht [70] ont proposé une solution analytique au problème de lubrification sous-alimentée en contact hydrodynamique circulaire. Cette solution peut être utilisée pour déterminer les dimensions du domaine de calcul à utiliser en contact hydrodynamique.

• Avec la modélisation adoptée, le problème du contact sous-alimenté est un problème à frontières libres. Cela signifie que la position du ménisque dépend des conditions d'alimentation. Si la région  $\bar{\Omega}_2$  du contact soumise à une pression positive est entièrement incluse dans le domaine de calcul  $\bar{\Omega}$ , alors l'augmentation de la taille de  $\bar{\Omega}$  ne modifie pas la solution (si le pas de discrétisation est inchangé).

## 5.5.2 Finesse de la discrétisation

Les valeurs de  $\gamma_c$  en contact circulaire présentées dans le tableau 5.1 ont aussi été calculées par Chevalier en 1996 [14]. Le tableau 5.3 compare :

	%	diffé	erence	e sur $H_c$ entre $\overline{\Omega} =$	% différence sur $H_c$ entre $\bar{\Omega} =$								
			$X \in [-9,3]; Y \in [-6,6]$					$X \in [-9,3; Y \in [-6,6]$					
		et .	et $X \in [-4.5, 1.5]; Y \in [-3.0, 3.0]$				et $X \in [-2.75, 1.25]; Y \in [-1.5, 1.5]$						
	$M \setminus L$	2	5	10	20	2	5	10	20				
	10	1.1	2.1	3.3	4.6	3.4	5.1	8.9	14				
	30	1.1	2.0	2.5	2.8	0.6	1.8	3.7	6.8				
D = 1.0	100	1.3	1.9	1.9	1.7	0.8	0.3	0.5	1.9				
	300	1.5	1.8	1.6	1.2	1.4	1.1	0.6	0.1				
	1000												
	10	0.7	2.2	2.7	4.9	3.3	1.8	12	19				
	30	0.7	0.8	1.3	2.3	2.3	3.6	6.1	10				
D = 0.5	100	0.1	0.2	0.4	0.7	0.2	0.5	1.6	3.6				
	300	0.1	0.1	0.1	0.2	1.2	0.8	0.2	0.7				
	1000		0.0	0.1	0.1		0.9	0.5	0.1				
	10	14	9.7	1.5	0.1	22	14	6.9	19				
	30	1.1	2.1	2.8	4.4	4.4	8.0	11	16				
D = 0.2	100	0.4	0.5	0.9	1.6	1.0	2.1	3.9	7.1				
	300	0.1	0.1	0.3	0.5	0.6	0.1	0.8	2.3				
	1000	0.0	0.1	0.1	0.1	1.4	1.0	0.5	0.1				
	10	29	26	20	9.4	43	37	28	25				
	30	1.4	0.2	4.0	6.4	5.3	6.1	15	21				
D = 0.1	100	0.7	0.9	1.5	2.5	2.4	3.8	6.3	10				
	300	0.1	0.3	0.5	0.9	0.8	0.7	1.9	4.1				
	1000	0.0	0.1	0.1	0.2	1.2	0.8	0.2	0.7				
D = 0.05	10	40	38	34	26	58	54	48	40				
	30	5.6	2.3	0.2	7.1	12	7.6	11	25				
	100	1.2	1.7	2.3	3.7	4.1	6.3	9.1	14				
	300	0.3	0.4	0.8	1.4	0.6	1.6	3.3	6.3				
	1000	0.1	0.1	0.2	0.4	0.9	0.4	0.3	1.6				

TAB. 5.2 – Influence de la taille du domaine de calcul sur l'épaisseur centrale de film en régime sur-alimenté (pourcentage de différence entre les calculs menés sur les domaines  $X \in [-9,3]$ ;  $Y \in [-6,6]$  et  $X \in [-4.5,1.5]$ ;  $Y \in [-3,3]$ ).

		$\gamma_c$ (	Cheva	lier		$\gamma_c \ (256+1)^2$					$\gamma_c \ (512+1)^2$				
$M \setminus L$	0	2	5	10	20	0	2	5	10	20	0	2	5	10	20
10	2.3	2.6	2.6	2.6	2.3	2.5	2.7	2.7	2.7	2.7	2.5	2.7	2.7	2.7	2.7
30	3.1	2.9	2.8	2.7	2.4	3.2	3.1	2.9	2.7	2.7	2.3	3.0	2.9	2.7	2.6
100	4.0	3.5	3.2	3.1	2.7	4.0	3.5	3.2	3.0	2.8	4.0	3.5	3.2	2.9	2.8
300	5.0	4.2	3.6	3.4	3.1	4.9	4.1	3.6	3.3	3.0	5.0	4.2	3.6	3.3	3.0
1000	6.4	5.9	4.2	3.9	3.4		4.9	4.2	3.7	3.4		5.0	4.2	3.7	3.4

TAB. 5.3 – Valeurs du paramètre  $\gamma_c$  obtenues par Chevalier [14] et par le calcul sur les niveaux (256+1) \* (256+1) et (512+1) \* (512+1) en contact circulaire (D = 1).

	% d	iffére	nce e	ntre ⁄	$\gamma_c$ Chevalier	% différence entre $\gamma_c (256+1)^2$					
		et $\gamma_c$	nive	au ( $2$	$56+1)^2$	et $\gamma_c \ (512+1)^2$					
$M \setminus L$	0	2	5	10	20	0	2	5	10	20	
10	8.7	5.1	4.8	2.3	14	0.4	0.4	0.4	0.0	0.4	
30	1.9	4.9	2.4	1.1	9.4	0.6	0.3	0.3	0.4	0.4	
100	0.8	0.6	0.6	4.7	3.2	1.2	0.3	0.0	0.7	0.4	
300	2.5	2.4	8.6	4.0	2.6	1.6	1.4	0.0	0.0	0.3	
1000		20	1.2	5.4	1.2		2.6	1.7	1.1	1.5	

TAB. 5.4 – Pourcentage de différence entre les valeurs de  $\gamma_c$  obtenues par Chevalier [14] et celles obtenues sur le niveau (256 + 1) \* (256 + 1). Pourcentage de différence entre les valeurs de  $\gamma_c$  obtenues sur les niveaux (256 + 1) \* (256 + 1) et (512 + 1) \* (512 + 1).

 $\bullet$  les valeurs de  $\gamma_c$  obtenues avec celles de Chevalier,

• les résultats obtenus sur les niveaux de discrétisation comportant (256+1)\*(256+1) points et (512+1)\*(512+1) points. Les valeurs de  $\gamma_c$  sont obtenues par approximation des trois couples  $r_c$ ,  $\mathcal{R}_c$  pour r = 0.5, 1.0 et 1.5.

Le pourcentage de différence entre les valeurs de  $\gamma_c$  est porté dans le tableau 5.4. La différence entre les valeurs de  $\gamma_c$  calculées par Chevalier [14] et celles obtenues avec le code de calcul varie entre 0.6 et 20%. Ces variations peuvent s'expliquer par l'utilisation de domaines de calcul  $\overline{\Omega}$ différents. Dans ses calculs de  $\gamma_c$ , Chevalier [14] a utilisé des domaines dont les dimensions varient de  $X \in [-1.5, 1.5]$   $Y \in [-1.5, 1.5]$  à  $X \in [-4.5, 1.5]$   $Y \in [-3, 3]$ , alors qu'ici, tous les calculs (hormis ceux destinés à étudier l'influence des dimensions de  $\overline{\Omega}$ ) ont été réalisés sur le domaine  $\overline{\Omega} = X \in [-4.5, 1.5]$   $Y \in [-3, 3]$ .

Le pourcentage de variation de  $\gamma_c$  entre les valeurs calculées sur les niveaux  $(256+1)^2$  et  $(512+1)^2$  est inférieur à 2.6. Comme le montre le paragraphe suivant, la valeur de  $\gamma_c$  n'est pas unique pour un contact donné. L'imprécision due à l'utilisation d'un  $\gamma_c$  unique est supérieure à celle due à l'erreur de discrétisation. Ainsi, le nombre de points de discrétisation adopté est  $(256+1)^2$ .

#### 5.5.3 Analyse de la précision de $\gamma_c$ et $\gamma$

Lors de son introduction dans les sections 5.2 et 5.3, le paramètre  $\gamma$  est présenté comme unique pour un contact dont la charge, la vitesse, la géométrie, les matériaux et le lubrifiant sont fixés. Ainsi, connaissant la valeur de  $\gamma$ , la réponse de ce contact à une sous-alimentation est entièrement déterminée quelle que soit la quantité de lubrifiant r qui l'alimente. L'emploi du paramètre  $\gamma$  pour décrire la réponse d'un contact à une sous-alimentation n'est qu'un modèle. Il permet seulement d'approcher le comportement réel. Les fonctions (5.5) et (5.38) utilisées garantissent la convergence de l'épaisseur de film vers ses asymptotes (voir figure 5.3). Elles permettent aussi de décrire un comportement proche de celui obtenu numériquement entre les asymptotes. Mais la manière dont les fonctions (5.5) et (5.38) tendent vers leurs asymptotes est délicate à observer. Du point de vue numérique comme du point de vue expérimental, elle nécessite une précision très importante car les quantités mises en jeu pour sa détermination (la différence entre le comportement réel et le comportement asymptotique) tendent vers zéro lorsque la quantité de lubrifiant devient nulle ou infinie.

Pour décrire exactement le comportement d'un contact face à la sous-alimentation, autant de valeurs de  $\gamma$  sont nécessaires que de couples r,  $\mathcal{R}$ . Il serait aussi possible de décrire cette réponse avec une fonction du type de (5.38) possédant autant de paramètres que de couples r,  $\mathcal{R}$ . La précision relative de l'équation (5.38) pour prédire l'épaisseur de film  $\mathcal{R}$  en fonction de la quantité de lubrifiant r et à partir d'une valeur de  $\gamma$  unique est assez élevée. Mais son utilisation récursive, pour prédire la réduction de l'épaisseur de film après un grand nombre de passages, contient un cumul d'erreurs sur l'éjection du lubrifiant.

D'autre part, l'erreur relative sur l'éjection du lubrifiant  $r - \mathcal{R}$  est beaucoup plus importante que l'erreur relative sur l'épaisseur de film  $\mathcal{R}$ . Si l'erreur commise sur l'épaisseur de film  $\mathcal{R}$ est notée  $\Delta \mathcal{R}$ , alors l'erreur relative sur l'épaisseur de film vaut  $\Delta \mathcal{R}/\mathcal{R}$  et l'erreur relative sur l'éjection vaut  $\Delta \mathcal{R}/(r - \mathcal{R})$ . La figure 5.22 montre l'évolution de l'erreur relative sur l'éjection du lubrifiant en fonction de l'erreur relative sur l'épaisseur de film, de  $\gamma$  et de la quantité de lubrifiant r. Le rapport de l'erreur relative sur l'éjection et de l'erreur relative sur l'épaisseur de film croît lorsque la quantité de lubrifiant diminue ou lorsque  $\gamma$  augmente.



FIG. 5.22 – Erreur relative sur l'éjection de lubrifiant  $\Delta \mathcal{R}/(r-\mathcal{R})$  en fonction de r pour  $\gamma = 3$  sur le graphique de gauche et en fonction de  $\gamma$  pour  $\Delta \mathcal{R}/\mathcal{R} = 0.01$  sur le graphique de droite.

La sensibilité relative de l'épaisseur de film avec  $\gamma$  est mesurée par la fonction  $\partial \mathcal{R}/(\mathcal{R}\partial\gamma)$ représentée en figure 5.23. Cette sensibilité atteint un maximum lorsque r = 1. Lorsque  $\gamma$ est calculé par la méthode des moindres carrés par approximation des couples de valeurs  $(r, \mathcal{R})$ , le poids, dans l'approximation, des couples dont la quantité de lubrifiant r est proche de 1 est donc plus important.

Pour traduire finement le débit d'éjection en fonction de la quantité de lubrifiant à partir du paramètre  $\gamma$ , il est nécessaire de calculer la valeur de  $\gamma$  exclusivement avec des couples de valeurs



FIG. 5.23 – Sensibilité relative des variations de  $\mathcal{R}$  par rapport aux variations de  $\gamma$  en fonction de r.

 $(r, \mathcal{R})$  situés au voisinage de la quantité de lubrifiant étudiée. Lors du calcul de  $\gamma$ , les couples  $(r, \mathcal{R})$  pour lesquels  $|\ln(r-1)|$  est le plus petit dominent le comportement de  $\gamma$ . Si la quantité de lubrifiant r étudiée ne possède pas la plus petite valeur  $|\ln(r-1)|$ , la valeur de  $\gamma$  calculée sera représentative des couples de points dont le poids est plus important dans l'approximation des moindres carrés (voir figure 5.23).

La variation de  $\gamma$  avec la quantité de lubrifiant est illustrée par la courbe issue du calcul numérique complet sur la figure 5.21. Si la valeur de  $\gamma$  était unique pour un contact, conformément à l'hypothèse émise pour calculer la courbe en trait discontinu, la courbe de réduction d'épaisseur de film serait une droite de pente  $-1/\gamma$ . Or la courbe continue présente une pente non constante (ce n'est pas une droite). L'hypothèse d'une valeur unique de  $\gamma$  pour un contact donné n'est donc pas exacte.

La pente, qui est négative, décroît lorsque le nombre de passages augmente. Cela signifie que la valeur de  $\gamma$  décroît lorsque le nombre de cycles augmente. Du point de vue du mécanisme de sous-alimentation, ce phénomène se traduit, lors de la réduction de l'alimentation, par l'augmentation de la quantité d'éjection latérale de lubrifiant par rapport à l'éjection prédite par une valeur de  $\gamma$  unique, évaluée avec une quantité de lubrifiant r proche de 1.

La réduction de  $\gamma$  avec la quantité de lubrifiant est aussi observée si le calcul de  $\gamma$  est effectué numériquement par l'approximation de couples  $(r, \mathcal{R})$  avec r de plus en plus petit. La figure 5.24 montre l'évolution des valeurs de  $\gamma$  lorsqu'elles sont calculées avec une alimentation en lubrifiant de r = 0.1, 0.3 et 1.

La tendance globale montre la réduction de  $\gamma$  avec la quantité de lubrifiant. Ce comportement est observé par les deux méthodes d'évaluation numérique de  $\gamma$ . Il est visible sur la figure 5.24 et sur la figure 5.21 par la variation de la pente  $-1/\gamma$  de la courbe  $\mathcal{R}(n)$ . Il est aussi observé lorsque  $\gamma$  est déduit des courbes expérimentales (voir figure 5.38) de réduction d'épaisseur de film  $\mathcal{R}(n)$ . La réduction de  $\gamma$  avec la quantité de lubrifiant n'est donc pas un artéfact numérique. L'origine physique de cette réduction de  $\gamma$  est contenue dans le modèle de lubrification sous-alimentée présenté dans le chapitre 3.

#### Remarque :

La réduction du paramètre  $\gamma$  avec la quantité de lubrifiant dépend du débit d'éjection global dans le tube circonférentiel. Du fait que la discrétisation adoptée est un peu trop grossière pour



FIG. 5.24 –  $\gamma$  en fonction de  $\sqrt{M/L}$  pour différentes ellipticités : D = 0.05, 0.10, 0.20, 0.50, 1.00, l'approximation par la méthode des moindres carrés porte sur le point r = 0.1 à gauche, r = 0.3 au centre, r = 1 à droite.

les faibles quantités de lubrifiant, le débit est surévalué en certains points du tube alors qu'il est sous-évalué en d'autres. La pente de la courbe  $\gamma = f(\sqrt{M/L})$  n'apparaît pas monotone avec les variations de l'ellipticité sur la figure 5.24 pour les contacts faiblement alimentés (r = 0.1 et r = 0.3). Cela s'explique, lorsque r diminue, par un accroissement de la précision numérique requise dans le calcul de  $\mathcal{R}$ , nécessaire à l'évaluation de  $\gamma$ . En effet, la sensibilité  $\Delta \gamma / \Delta \mathcal{R}$  de  $\gamma$  avec  $\mathcal{R}$  tend vers l'infini lorsque r tend vers zéro. Le pas de discrétisation adopté devient alors trop grand pour représenter fidèlement les mécanismes intervenant dans la couche limite des contacts sévèrement sous-alimentés.

## 5.6 Sensibilité à la sous-alimentation locale

Dans les calculs d'épaisseur de film menés en sections 5.2 et 5.3, les contacts sont alimentés par un profil de lubrifiant d'épaisseur constante  $H_{oil}(X_e, Y) = cte$ , indépendant de la position Y. Dans une configuration réelle, l'alimentation en lubrifiant des contacts ne s'effectue pas nécessairement par une épaisseur de film constante.

Sous l'effet :

- d'une dynamique particulière
- ou sous l'influence de perturbations d'origines diverses telles que celle de la cage qui sépare les corps roulants d'un roulement
- ou simplement à cause du passage des éléments roulants
- ou pour une raison propre au mécanisme étudié,

le profil de lubrifiant peut être perturbé localement. Il est alors décrit par une fonction  $H_{oil}(X_e, Y) = f(Y)$ .

Des conditions de sous-alimentation locale peuvent être observées expérimentalement comme c'est le cas sur la photo interférométrique de la figure 5.25. Sur cette figure, la partie haute de la région de Hertz subit une sous-alimentation beaucoup moins sévère que la partie basse (de couleur plus sombre et plus uniforme).

L'étude de la sensibilité des contacts EHD elliptiques à une sous-alimentation locale est menée, dans cette section, du point de vue numérique. L'analyse des résultats repose sur l'utilisation de la couche limite présentée en 5.3.2, dans laquelle des débits circonférentiels ont lieu. Ces débits peuvent entraîner ou non la redistribution du lubrifiant dans le contact. La faculté qu'a un contact de redistribuer le lubrifiant présent en grande quantité dans certaines zones, alors qu'il fait défaut dans d'autres régions voisines, est désignée par le couplage C. Ce couplage traduit l'influence réciproque de la lubrification en deux points situés à deux positions Y distinctes. Le



FIG. 5.25 – Image interférométrique d'un contact elliptique sous-alimenté localement, à droite : profil schématique d'alimentation.

couplage C est un paramètre adimensionné créé à partir des grandeurs physiques significatives du problème de sous-alimentation locale.

#### 5.6.1 Conditions d'alimentation

Afin de conserver les notations utilisées précédemment, la quantité moyenne de lubrifiant sur le profil est désignée par  $r_c \bar{\rho}_{cff} H_{cff}$ . La forme arbitraire du profil de lubrifiant imposée pour étudier la sous-alimentation locale est sinusoïdale, d'amplitude  $r_c \bar{\rho}_{cff} H_{cff}$  et de longueur d'onde  $\lambda_{oil}$ . Si la longueur d'onde adimensionnée des oscillations du profil de lubrifiant est définie par  $\bar{\lambda}_{oil} = \lambda_{oil}/b$ , alors le profil de lubrifiant à l'entrée du contact est décrit par l'équation (5.46).

$$H_{oil}(X_e, Y) = r_c \bar{\rho}_{cff} H_{cff} \left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi Y}{\bar{\lambda}_{oil}}\right) \right]$$
(5.46)

Le rapport entre l'amplitude  $A_e$  de l'oscillation du profil à l'entrée du contact et l'amplitude  $A_s$ à la sortie est étudié. L'amplitude est définie comme la moitié de la différence entre le maximum et le minimum de l'épaisseur adimensionnée de lubrifiant  $H_{oil}$ , sur la largeur  $|Y| \leq 1.2\bar{\lambda}_{oil}$ .

$$A_e = \frac{1}{2} \left[ \max_{|Y| \leqslant 1.2\bar{\lambda}_{oil}} H_{oil}(X_e, Y) - \min_{|Y| \leqslant 1.2\bar{\lambda}_{oil}} H_{oil}(X_e, Y) \right]$$
(5.47)

$$A_{s} = \frac{1}{2} \left[ \max_{|Y| \leq 1.2\bar{\lambda}_{oil}} H_{oil}(X_{s}, Y) - \min_{|Y| \leq 1.2\bar{\lambda}_{oil}} H_{oil}(X_{s}, Y) \right]$$
(5.48)

La figure 5.26 présente un exemple de profil de lubrifiant calculé à l'entrée  $H_{oil}(X_e, Y)/r_c\bar{\rho}_{cff}H_{cff}$ et à la sortie du contact  $H_{oil}(X_s, Y)/r_c\bar{\rho}_{cff}H_{cff}$ , adimensionné par rapport à la quantité moyenne de lubrifiant.

Cette figure met en évidence la redistribution du lubrifiant dans le contact. Le déplacement du lubrifiant est particulièrement visible aux points où  $Y = i\bar{\lambda}_{oil}/2$  (avec *i* entier). La comparaison des profils à l'entrée et à la sortie du contact montre un déplacement du lubrifiant des zones les mieux lubrifiées ( $Y = i\bar{\lambda}_{oil}$ ) vers les zones initialement non lubrifiées ( $Y = (i + 1/2)\bar{\lambda}_{oil}$ ). Néanmoins, le profil de lubrifiant observé à la sortie du contact, sur la piste de roulement, n'est pas complètement lisse. Les oscillations imposées sur le profil à l'entrée du contact sont atténuées



FIG. 5.26 – Profil de lubrifiant dans la direction  $\vec{y}$ , adimensionné par la quantité moyenne de lubrifiant à l'entrée du contact (courbe en trait pointillé) et à la sortie (courbe en trait continu) pour le contact D = 0.2, M = 300, L = 5,  $r_c = 0.5$ ,  $\bar{\lambda}_{oil} = 0.2$ .

par le passage du corps roulant mais elles persistent. Sur la figure 5.26, l'amplitude des oscillations est réduite à  $A_s/A_e = 25\%$  de sa valeur initiale.

La réduction  $A_s/A_e$  de l'amplitude des oscillations entre l'entrée et la sortie du contact est différente, lorsque  $r_c$  et/ou  $\lambda_{oil}$  varient. Le rapport  $A_s/A_e$  évolue entre 0 et 1.

Lorsque  $A_s/A_e$  est proche de 1, le profil de lubrifiant est très peu modifié ; la redistribution est alors presque inexistante. Cela signifie que les vagues de lubrifiant ont déformé élastiquement les surfaces. Ce phénomène est visible sur le graphique de gauche de la figure 5.27. Au contraire, lorsque  $A_s/A_e = 0$ , le profil de lubrifiant est complètement écrasé par les surfaces qui, en redistribuant le lubrifiant, lui imposent une forme lisse (sans oscillation).

La longueur d'onde  $\bar{\lambda}_{oil}$  du profil de lubrifiant et la quantité moyenne de lubrifiant  $r_c$  influencent la réponse du contact à la sous-alimentation locale. Les graphiques de la figure 5.27 sont obtenus en variant l'une de ces deux grandeurs par rapport à la figure 5.26, toute chose restant égale par ailleurs.

• Le graphique de gauche résulte d'une alimentation en lubrifiant plus faible que pour la figure 5.26 ( $r_c = 0.1$  au lieu de  $r_c = 0.5$ ). La longueur de la couche limite est donc plus petite et la redistribution du lubrifiant moins importante. L'amplitude des oscillations à la sortie du contact semble identique à celle à l'entrée du contact. Le rapport  $A_s/A_e$  est alors de 100% au lieu de 25% sur la figure 5.26.

• Le graphique de droite de la figure 5.27 est obtenu en alimentant le contact de la figure 5.26 avec un profil de lubrifiant dont la longueur d'onde est différente ( $\bar{\lambda}_{oil} = 0.5$  au lieu de  $\bar{\lambda}_{oil} = 0.2$ ). La distance parcourue par le lubrifiant pour être redistribué est alors plus grande et la redistribution plus faible. Le rapport  $A_s/A_e$  est de 90% au lieu de 25% sur la figure 5.26.

La figure 5.28 présente la réduction de l'amplitude des oscillations du profil de lubrifiant entre l'entrée et la sortie du contact en fonction de la longueur d'entrée sur-alimentée adimensionnée  $\bar{S}_{ff} = \sqrt{L/M}$ .

Les calculs ont été menés pour les conditions suivantes :

- $r_c = 0.1, \ 0.3, \ 0.5$
- $\lambda_{oil} = 0.1, \ 0.2, \ 0.5$
- $M = 10, \ 30, \ 100, \ 300, \ 1000$
- L = 2, 5, 10, 20



FIG. 5.27 – Profil de lubrifiant adimensionné  $H_{oil}/r_c\bar{\rho}_cH_{cff}$  à l'entrée du contact (courbe en pointillés) et à la sortie (courbe continue) pour le contact D = 0.2, M = 300, L = 5,  $\bar{\lambda}_{oil} = 0.2$ . Graphique de gauche  $r_c = 0.1$ ,  $\bar{\lambda}_{oil} = 0.2$ , graphique de droite  $r_c = 0.5$ ,  $\bar{\lambda}_{oil} = 0.5$ .

• D = 0.05, 0.1, 0.2, 0.5, 1.0

Remarque : Certaines conditions parmi les 900 calculées n'ont pas convergé. Les valeurs de  $A_s/A_e$  correspondantes n'apparaissent pas sur la figure 5.28.



FIG. 5.28 – Rapport entre l'amplitude des oscillations du profil de lubrifiant à l'entrée et à la sortie du contact en fonction de  $\sqrt{L/M}$ .

La redistribution du lubrifiant qui entraı̂ne la réduction de l'amplitude des oscillations du profil est due aux gradients de pression qui déplacent le lubrifiant dans la direction  $\vec{y}$ .

• Si le contact est alimenté par une quantité importante de lubrifiant, alors le phénomène d'écrasement du profil intervient en amont de la couche limite sur-alimentée qui entoure le contact de Hertz. L'écrasement du profil de lubrifiant a donc lieu dans une région où l'épaisseur est relativement importante et où la viscosité est faible (du fait de la faible pression). Il entraîne une redistribution du lubrifiant sans générer une pression significative qui pourrait déformer les surfaces. La redistribution s'opère alors avant l'entrée dans la couche limite et le film généré par une quantité de lubrifiant conséquente sur toute la largeur du contact est proche du film sur-alimenté. Le couplage C est alors élevé. L'amplitude des oscillations du profil de lubrifiant imposé à l'entrée du contact est atténuée dans des proportions très importantes.

• Si, au contraire, le contact est faiblement lubrifié, l'écrasement du profil de lubrifiant a lieu dans la couche limite à l'entrée du contact. La redistribution de lubrifiant sera alors seulement

partielle, à cause de l'augmentation soudaine de la viscosité avec la pression. L'augmentation de la viscosité va "figer" le profil de lubrifiant qui va entraîner la déformation élastique des surfaces. Le couplage C est alors faible et l'amplitude des oscillations du profil est peu atténuée. Cela signifie qu'aux points du profil  $Y = i\bar{\lambda}_{oil}/2$ , les niveaux de sous-alimentation sont peu couplés ou partiellement indépendants.

Afin de pouvoir prédire le couplage entre la lubrification des différents points du profil, il est nécessaire de déterminer l'évolution de la position du ménisque et de la longueur d'entrée en contact sous-alimenté, avec la quantité de lubrifiant. Ces deux données permettent d'évaluer la mobilité du lubrifiant dans le tube d'écoulement circonférentiel. Ce problème est abordé numériquement dans le paragraphe suivant.

Remarques :

• Les points voisins des bords de la piste de roulement  $(|Y| \simeq 1)$  traversent le contact sans entrer dans la zone où règne une viscosité élevée. Ils restent plus longtemps dans la couche limite que les points situés au centre de la piste de roulement et ils sont exposés à un gradient de pression plus important dans la direction  $\vec{y}$ . La redistribution est donc accentuée dans cette région. Ce phénomène est clairement visible sur le graphique de droite de la figure 5.27 où la forme du maximum local au voisinage de |Y| = 1 subit une redistribution plus importante que celle observée au centre de la piste de roulement. Cette redistribution accentuée est aussi visible sur la figure 5.26 où la réduction de l'amplitude des oscillations est plus importante au voisinage de |Y| = 1.

• D'autre part, l'écoulement du lubrifiant dans le tube circonférentiel vers les frontières  $\pm Y_0$  du domaine de calcul est visible sur la figure 5.26. Il se manifeste entre l'entrée et la sortie du contact, par un décalage des maximums et minimums locaux du profil de lubrifiant. Les extrémums locaux situés en  $Y = i\bar{\lambda}_{oil}/2$  à l'entrée du contact se trouvent en  $Y = i\bar{\lambda}_{oil}/2 + \epsilon$  à la sortie du contact. Ce décalage est particulièrement visible en  $Y = \pm 0.9$  (voir détail présenté en figure 5.29).



FIG. 5.29 – Mise en évidence du débit d'éjection à partir du profil sinusoïdal. Le détail de la redistribution du lubrifiant de la figure 5.26 au voisinage de Y = 0.9 illustre le déplacement des extrémums locaux vers les côtés de la piste de roulement.

Les débits latéraux responsables de la redistribution du lubrifiant apparaissent principalement à l'entrée du contact, lorsqu'ils sont importants. De même que pour le débit d'éjection, lorsque le débit de redistribution est négligeable, il a lieu pour moitié à l'entrée du contact et pour la seconde moitié à la sortie du contact. La mobilité du lubrifiant dans le tube circonférentiel dépend de la longueur de l'entrée S du contact, par rapport à la longueur de la couche limite sur-alimentée  $S_{ff}$  présentée dans l'étude du débit d'éjection. Si la longueur d'entrée S est importante, la région de faible pression (et de faible viscosité) s'étend loin en amont de la zone de Hertz. Le convergent écrase alors les vagues de lubrifiant avant l'entrée dans la couche limite. Cela correspond à un déplacement du lubrifiant d'un maximum local des oscillations vers les deux minimums locaux voisins. Au contraire, si la longueur d'entrée S est très petite, la viscosité croît très rapidement entre le ménisque d'entrée et la frontière de Hertz. Ce sont alors les vagues de lubrifiant qui se "figent" et qui traversent le contact en déformant les surfaces. Les oscillations du profil de lubrifiant sont alors retrouvées à la sortie du contact.

Si le couplage C désigne l'influence de la lubrification d'un maximum local sur la lubrification des deux minimums locaux les plus proches, alors le couplage augmente lorsque la longueur d'entrée augmente.

La longueur d'entrée S en contact sous-alimenté évolue avec les paramètres  $\sqrt{L/M}$ , de la même manière que la longueur de la couche limite en contact sur-alimenté. Dans ces deux cas, l'augmentation de la vitesse entraîne la réduction de M et l'augmentation de L ainsi que du terme  $u_m \partial h/\partial x$  de l'équation de Reynolds. Cette augmentation a pour conséquence la génération anticipée (dans la direction  $\vec{x}$ ) de la pression de Poiseuille. La génération de pression débute donc plus en amont du contact sur-alimenté et elle déplace le ménisque d'entrée vers l'amont du contact sous-alimenté. Pour un contact sous-alimenté comme pour un contact sur-alimenté, l'augmentation de  $\sqrt{L/M}$  se traduit donc par l'augmentation de la longueur de la couche limite dans laquelle le débit latéral concurrence le débit générateur de film.

La figure 5.30 montre l'évolution de la longueur d'entrée  $\bar{S}$  calculée entre le ménisque d'entrée et la frontière de Hertz pour un contact alimenté par la quantité de lubrifiant  $r_c = 0.2$ . Les résultats sont présentés en fonction de  $\bar{S}_{ff} = \sqrt{L/M}$ . La relation entre  $\bar{S}$  et  $\bar{S}_{ff}$  semble linéaire.

Remarque :

L'incertitude sur  $\overline{S}$  est égale au pas de la grille de calcul, car la longueur d'entrée est égale à la distance entre le premier point de pression positive et la frontière de Hertz, en parcourant l'axe  $(O, \vec{x})$  dans le sens croissant. La dispersion de  $\overline{S}$  visible sur la figure 5.30 est égale au pas de la grille de calcul  $h_x = h_y = 0.0117$ .



FIG. 5.30 – Evolution de la longueur d'entrée adimensionnée  $\bar{S}$  avec la longueur d'entrée suralimentée adimensionnée  $\bar{S}_{ff} = \sqrt{L/M}$  pour les contacts circulaires D = 1, alimentés par la quantité de lubrifiant  $r_c = 0.2$ 

Pour un contact donné, la longueur d'entrée évolue aussi avec la quantité de lubrifiant qui l'alimente. La figure 5.31 montre que la relation qui lie la longueur d'entrée adimensionnée  $\bar{S}$  à la quantité de lubrifiant  $r_c$  qui alimente le contact semble proche d'une relation linéaire.



FIG. 5.31 – Evolution de la longueur d'entrée adimensionnée  $\overline{S}$  avec  $r_c$  pour le contact D = 1, M = 30, L = 20.

Si les relations qui lient  $\bar{S}$  à  $r_c$  et à  $\sqrt{L/M}$  sont considérées comme linéaires, alors  $\bar{S}$  croît avec  $r_c\sqrt{L/M}$ . La figure 5.32 représente l'évolution de la longueur d'entrée adimensionnée  $\bar{S}$  avec  $r_c\sqrt{L/M}$  obtenue par le calcul pour le contact circulaire.



FIG. 5.32 – Evolution de la longueur d'entrée adimensionnée  $\overline{S}$  avec  $r_c \sqrt{L/M}$  pour les conditions de fonctionnement suivantes : D = 1,  $r_c = 0.1, 0.3, 0.5, M = 10, 30, 100, 300, 1000$  et L = 2, 5, 10, 20.

Le couplage dans la direction  $\vec{y}$  augmente avec le débit latéral qui évolue comme la longueur d'entrée. D'autre part, pour une mobilité de lubrifiant donnée ou pour une longueur d'entrée donnée, plus la distance à parcourir est importante pour qu'il se déplace d'une région fortement lubrifiée à une région faiblement lubrifiée, plus le gradient de pression est faible. La redistribution et le couplage diminuent donc, lorsque la longueur d'onde du profil de lubrifiant  $\lambda_{oil}$  augmente. Ainsi la forme proposée pour le couplage C est la suivante :

$$C = \frac{S}{\lambda_{oil}} \propto ar_c \sqrt{\frac{L}{M}} \frac{1}{b\bar{\lambda}_{oil}} = \frac{r_c \kappa}{\bar{\lambda}_{oil}} \sqrt{\frac{L}{M}}$$
(5.49)

La figure 5.33 présente la réduction de l'amplitude des oscillations du lubrifiant entre l'entrée et la sortie du contact en fonction du paramètre de couplage adimensionné C. Les points qui

forment un nuage sur la figure 5.28 sont regroupés sur la figure 5.33 dans une enveloppe relativement étroite, lorsque le rapport  $A_s/A_e$  est exprimé en fonction de C. Le paramètre C représente donc bien l'aptitude d'un contact à lisser un profil de lubrifiant d'épaisseur moyenne  $r_c$  et dont la longueur d'onde adimensionnée des oscillations est  $\bar{\lambda}_{oil}$ .



FIG. 5.33 – Rapport entre l'amplitude des oscillations du profil de lubrifiant à l'entrée et à la sortie du contact en fonction du paramètre de couplage C.

## 5.6.2 Conclusion sur la sous-alimentation locale

Du point de vue quantitatif, il apparaît au travers de ces résultats numériques que le profil sinusoïdal de lubrifiant disposé à l'entrée d'un contact en ressort presque intact si  $C \leq 0.01$ , puisque son amplitude est réduite de moins de 0.5%. Au contraire, lorsque  $C \ge 1$ , le profil de lubrifiant est modifié de manière très importante et son amplitude est réduite de plus de 99.5%.

Lorsque le rapport des amplitudes des oscillations du profil de lubrifiant entre l'entrée et la sortie du contact est représenté en fonction du paramètre adimensionné C, toutes les valeurs de  $A_s/A_e$  calculées se trouvent sur une courbe unique. Le paramètre C traduit donc bien le couplage de la lubrification entre des points du profil distants l'un de l'autre dans la direction Y. Il quantifie aussi l'aptitude d'un contact à redistribuer le lubrifiant d'un point vers l'autre en cas de variation des conditions d'alimentation entre ces deux points.

La connaissance du couplage C permet de prédire si la sous-alimentation locale d'un mécanisme va être "amortie" rapidement ou si elle va persister pendant un grand nombre de cycles.

D'autre part, la longueur d'entrée adimensionnée  $\bar{S}_{ff}$  ainsi que le modèle d'éjection circonférentielle développés en 5.3 sont utilisés dans l'analyse qui conduit à la création du paramètre C. Le fait que le couplage C gouverne la redistribution de lubrifiant confirme, malgré sa simplicité, l'intérêt que présente le modèle d'éjection circonférentielle de lubrifiant couplé avec la longueur adimensionnée de la couche limite  $\bar{S}$  et  $\bar{S}_{ff}$ .

## 5.7 Comparaison des résultats numériques et expérimentaux

Dans ce chapitre, le paramètre  $\gamma$  est utilisé afin de caractériser la réponse des contacts elliptiques en termes d'épaisseur de film à une sous-alimentation en lubrifiant plus ou moins sévère. J'ai effectué des mesures d'épaisseur de film au centre du contact sur le dispositif présenté dans l'annexe A. En se plaçant dans des conditions expérimentales où le débit de réalimentation de la piste de roulement peut être négligé, l'observation de la réduction de l'épaisseur de film au cours des cycles permet l'évaluation du paramètre  $\gamma$ .

Dans cette section, les valeurs de  $\gamma$  obtenues numériquement sont comparées aux valeurs évaluées expérimentalement.

#### 5.7.1 Comparaison des valeurs de $\gamma$

La réduction de l'épaisseur de film au centre du contact au cours des n passages des corps roulants est mesurée expérimentalement. Cette mesure fournit la courbe  $\mathcal{R}_c = f(n)$  présentée à titre d'exemple sur la figure 5.34. L'approximation de la réduction de l'épaisseur de film  $\mathcal{R}_c(n)$ mesurée par l'équation (5.45)  $\mathcal{R}_n = n^{-1/\gamma}$  détermine la valeur expérimentale de  $\gamma$ . Le principe est identique à l'évaluation de  $\gamma$  à partir du calcul numérique complet des passages successifs (voir figure 5.21).



FIG. 5.34 – Courbe expérimentale de la réduction de l'épaisseur de film au cours des cycles pour le contact circulaire (D = 1, M = 67, L = 7).

Les valeurs de  $\gamma$  obtenues expérimentalement sont portées sur la figure 5.35 en fonction de  $\sqrt{M/L}$  pour un contact circulaire et un contact elliptique. Les variations de  $\gamma$  sont en accord avec les observations numériques. La valeur de  $\gamma$  croît avec l'inverse de la longueur d'entrée  $\bar{S}_{ff}$  et avec l'ellipticité (lorsque D diminue). D'autre part, pour chacune des géométries (circulaire et elliptique), la courbe formée par les valeurs de  $\gamma$  en fonction de  $\bar{S}_{ff}$  peut être assimilée à une droite.

La figure 5.36 présente les valeurs de  $\gamma$  obtenues par les différentes méthodes numériques et expérimentale pour le contact circulaire et pour un contact elliptique. Les droites représentent les valeurs de  $\gamma$  calculées numériquement par la fonction (5.38), pour les conditions d'alimentation en lubrifiant  $r \simeq 0.2$  et  $r \simeq 1$ . Les points schématisés par des symboles ouverts sont issus du calcul numérique complet par passages successifs en utilisant différentes régions de la courbe  $\mathcal{R} = f(n)$ . Enfin, les ronds pleins représentent les valeurs de  $\gamma$  mesurées au cours des premiers passages sur la courbe expérimentale de réduction d'épaisseur de film  $\mathcal{R} = f(n)$ . Les courbes  $\mathcal{R}(n)$  expérimentales utilisées pour calculer  $\gamma$  sont présentées en figure 5.37.



FIG. 5.35 –  $\gamma$  évalué expérimentalement en fonction de  $\sqrt{M/L}$ , pour le contact circulaire (D = 1) et elliptique (D = 0.136).



FIG. 5.36 –  $\gamma$  en fonction de  $\sqrt{M/L}$  pour le contact circulaire (D = 1) à gauche et pour un contact elliptique (D = 0.136) à droite. Les lignes et les symboles ouverts sont des prédictions numériques.



FIG. 5.37 – Réduction expérimentale de l'épaisseur de film en contact circulaire (D = 1) à gauche et en contact elliptique (D = 0.136) à droite.

#### 5.7.2 Comparaison de la réduction des épaisseurs de film

Au cours des 100 à 3000 premiers passages, l'épaisseur de la couche de lubrifiant sur la piste de roulement du dispositif expérimental atteint rapidement une valeur de l'ordre de r = 0.2. Pour cette raison, les décroissances de film de lubrifiant mesurées expérimentalement au cours des 100 à 3000 premiers passages sont comparées aux décroissances de film de lubrifiant prédites par les valeurs de  $\gamma$  calculées numériquement à partir de couples  $(r, \mathcal{R})$  avec r = 0.2.
La décroissance de film expérimentale et numérique est présentée sur la figure 5.38 pour des conditions où les valeurs de  $\gamma$  expérimentales et numériques sont les plus proches.

• Pour le contact circulaire, la meilleure corrélation entre les valeurs expérimentales et numériques de  $\gamma$  est obtenue pour  $\sqrt{M/L} = 2.46$ .

• Pour le contact elliptique, elle est obtenue pour  $\sqrt{M/L} = 2.84$  (voir figure 5.36).



FIG. 5.38 – Réduction de l'épaisseur de film en contact circulaire  $(D = 1, u_m = 95 \text{mm s}^{-1})$  à gauche et en contact elliptique  $(D = 0.136, u_m = 40 \text{mm s}^{-1})$  à droite.

Au contraire, sur la figure 5.39, la décroissance de film expérimentale et numérique est présentée pour les conditions où les valeurs de  $\gamma$  expérimentales et numériques sont les plus différentes. Elles correspondent à :

- $\sqrt{M/L} = 0.85$  pour le contact circulaire,
- $\sqrt{M/L} = 1.00$  pour le contact elliptique (voir figure 5.36).



FIG. 5.39 – Réduction de l'épaisseur de film en contact circulaire  $(D = 1, u_m = 800 \text{ mm s}^{-1})$  à gauche et en contact elliptique  $(D = 0.136, u_m = 321 \text{ mm s}^{-1})$  à droite.

Remarque :

Sur les figures 5.38 et 5.39, les courbes expérimentales  $\mathcal{R}_c = f(n)$  représentées sur des échelles logarithmiques apparaissent parallèles aux courbes théoriques mais non confondues. Les épaisseurs expérimentales semblent légèrement plus faibles que les épaisseurs théoriques. Le paragraphe A.2.4 explique ce phénomène en analysant l'influence sur la fonction  $\mathcal{R}(n)$  de la différence entre la longueur de piste de roulement de la bille et celle du disque. Il montre aussi que le calcul expérimental de  $\gamma$  consiste à approcher les courbes  $\mathcal{R}_c(n)$  par la fonction  $cte * n^{-1/\gamma}$  et non par  $n^{-1/\gamma}$  comme le suggère l'équation (5.45). Ainsi, en utilisant les échelles logarithmiques, deux courbes  $\mathcal{R}_c = f(n)$  parallèles et non confondues sont caractérisées par la même valeur de  $\gamma$ .

Les figures 5.38 et 5.39 illustrent la qualité de la prédiction de la réduction de l'épaisseur de film à partir d'une valeur de  $\gamma$ .

### 5.8 Conclusion

L'alimentation en lubrifiant désigne la quantité de lubrifiant et sa répartition à l'entrée d'un contact sous-alimenté. Ce chapitre est consacré à l'étude de l'influence de l'alimentation sur l'épaisseur de film dans les contacts elliptiques fonctionnant en régime piezo-visqueux élastique.

Les paramètres  $\gamma_c$  et  $\gamma$  sont utilisés pour quantifier l'influence de la quantité de lubrifiant sur l'épaisseur de film dans le contact. Les effets de l'alimentation sur l'épaisseur de film sont analysés grâce à l'étude des débits de Couette et de Poiseuille. L'utilisation de la théorie de Grübin, modifiée pour prendre en compte la sous-alimentation, permet d'identifier une longueur d'entrée adimensionnée  $\bar{S}_{ff}$ , caractéristique du problème d'éjection de lubrifiant. Cette longueur gouverne la compétition entre les débits de Couette et de Poiseuille, ainsi que le comportement des paramètres  $\gamma_c$  et  $\gamma$ .

Le paramètre  $\gamma$  permet de prédire la diminution de l'épaisseur de film  $\mathcal{R}(n)$  au cours des cycles *n*, lorsque le contact fonctionne en l'absence de réalimentation. Les prédictions de réduction d'épaisseur de film d'après les valeurs de  $\gamma$  calculées numériquement sont comparées aux résultats expérimentaux. Les figures 5.38 et 5.39 montrent une bonne corrélation entre théorie et expérience.

Dans certaines conditions, la répartition du lubrifiant sur les surfaces peut conduire à la sousalimentation locale d'un contact. La persistance de cette sous-alimentation à un grand nombre de cycles est quantifiée par le couplage adimensionné C de la lubrification. Ce couplage dépend de la longueur d'entrée adimensionnée  $\bar{S}$  et de la longueur d'onde caractéristique de la sousalimentation locale.

La longueur d'entrée sur-alimentée adimensionnée  $\bar{S}_{ff} = \sqrt{M/L}$ , associée à la quantité de lubrifiant et à la longueur d'onde du profil, détermine si la géométrie des oscillations imposées au profil de lubrifiant qui alimente le contact va déformer les corps roulants ou si, au contraire, les solides vont écraser et redistribuer le lubrifiant.

La longueur d'entrée  $\bar{S}_{ff}$  qui gouverne cette compétition entre élasticité et viscosité a aussi été identifiée par Hooke et Venner [44] en 2000, lorsqu'ils étudiaient la réduction de l'amplitude des rugosités des surfaces dans un contact EHD sur-alimenté. Dans ce problème, les oscillations sont imposées aux surfaces des solides et non au lubrifiant. Si les débits qui expulsent le lubrifiant sous l'effet des gradients de pression pour permettre à une aspérité de traverser le contact sont nuls, alors cette aspérité se déforme et son amplitude est réduite. Les phénomènes physiques qui régissent la réduction d'amplitude des rugosités longitudinales sont identiques à ceux qui interviennent dans la redistribution du lubrifiant dans les contacts localement sous-alimentés.

## Conclusion générale

La sous-alimentation en lubrifiant dans les contacts EHD elliptiques peut provoquer la dégradation anticipée des surfaces. L'endommagement de l'état de surface des pièces en contact évolue souvent vers la propagation rapide de fissures qui, à terme, empêchent le fonctionnement correct du mécanisme et aboutissent parfois à sa destruction. La sous-alimentation en lubrifiant se manifeste principalement par :

• la réduction de l'épaisseur de film de lubrifiant dans le contact,

• l'évolution du champ de pression et de déformation élastique des surfaces vers le champ de pression de Hertz.

Les contacts des mécanismes industriels lubrifiés par un fluide de faible mobilité ou de forte viscosité ainsi que ceux qui sont faiblement alimentés en lubrifiant sont sujets à la sous-alimentation. Le débit de réalimentation des contacts fonctionnant à haute vitesse est souvent insuffisant. La lubrification des mécanismes à haute vitesse est donc fréquemment sous-alimentée.

Le contact EHD comporte des régions où les gradients de pression, d'épaisseur de film et de déformation élastique sont très importants. Dans ces régions, pour être précise, la solution numérique des équations nécessite une discrétisation fine du domaine de calcul. Etant donnés les fortes non-linéarités du problème EHD et le grand nombre de points de discrétisation, un code de calcul en contact elliptique sous-alimenté a été développé. Il utilise les techniques multigrilles et "Multi-Level Multi-Integral", afin de réduire le temps de calcul. La relaxation par ligne a été implémentée afin d'accroître la stabilité du processus de résolution.

Les matériaux des corps en contact, les propriétés du lubrifiant, la géométrie des surfaces, la charge appliquée au contact et la vitesse des surfaces sont des données du problème. Ces paramètres de fonctionnement sont traduits par les nombres de Moes adimensionnés M et L. La quantité et la répartition du lubrifiant qui adhère aux surfaces mobiles jouent un rôle déterminant sur l'épaisseur et la forme du film dans le contact. La distribution du lubrifiant dans la direction perpendiculaire au roulement  $h_{oil}(y)$  est un paramètre d'entrée du modèle utilisé pour décrire le contact sous-alimenté. La position du ménisque d'entrée où le film de lubrifiant se forme étant inconnue a priori, une modélisation à frontières libres est adoptée. Les équations du modèle traduisent :

• la conservation du débit massique dans l'écoulement (en prenant en compte les propriétés de piezo-viscosité et de compressibilité du lubrifiant),

- l'équilibre entre l'effort appliqué sur le contact et l'intégrale de la pression dans le contact,
- l'élasticité des corps en contact.

Le code de calcul développé est utilisé pour évaluer l'épaisseur de film dans les contacts EHD elliptiques. Les épaisseurs de film, calculées en fonction de l'alimentation en lubrifiant, sont approchées par la méthode des moindres carrés afin de déterminer un paramètre adimensionné  $\gamma$  qui traduit la réponse d'un contact à la sous-alimentation.

Un modèle analytique décrit le mécanisme physique qui provoque l'éjection du lubrifiant vers la périphérie du contact. La distribution de pression, d'épaisseur de film et la loi de piezo-viscosité imposent à l'éjection de siéger uniquement en dehors de la zone de Hertz. L'analyse du débit d'éjection, à partir de la loi de Grübin adaptée au problème EHD sous-alimenté, met en évidence une longueur adimensionnée  $\bar{S}_{ff} = \sqrt{L/M}$ . Cette longueur est caractéristique de la couche limite qui entoure la zone de Hertz et du débit d'éjection.

Les résultats des calculs et l'expérience montrent que la longueur adimensionnée caractéristique  $\bar{S}_{ff}$  gouverne le débit d'éjection ainsi que le paramètre  $\gamma$ , qui lie l'épaisseur de film dans le contact à l'épaisseur de la couche d'alimentation.

Le modèle analytique du débit d'éjection de lubrifiant, dans la couche limite qui entoure le contact, permet d'expliquer l'augmentation de  $\gamma$  avec l'ellipticité des contacts.

Remarque :

L'observation fine des résultats numériques et expérimentaux montre la réduction de  $\gamma$  avec la quantité de lubrifiant.

L'étude numérique de la sous-alimentation locale met en évidence la redistribution du lubrifiant, des zones les plus alimentées vers les régions les moins lubrifiées. Les débits de redistribution apparaissent dans la même région (périphérique au contact) que le débit d'éjection. La largeur de la couche limite, caractéristique du débit d'éjection, associée à la longueur d'onde des oscillations du profil, détermine la redistribution du lubrifiant. Le rapport de la longueur caractéristique et de la longueur d'onde des oscillations quantifie le couplage C entre la lubrification des différentes régions du contact. Il permet de quantifier et de prédire la réduction de l'amplitude des oscillations du profil de lubrifiant qui sont à l'origine de la sous-alimentation locale.

Malgré sa simplicité et les approximations qu'il contient, le modèle d'éjection de lubrifiant dans la couche limite améliore la compréhension du mécanisme physique qui provoque la réduction des épaisseurs de film dans les contacts sous-alimentés elliptiques. De plus, il permet de quantifier et de prédire le comportement de  $\gamma$  et l'éjection de lubrifiant, sans effectuer le calcul numérique complet de la réponse d'un contact à la sous-alimentation.

### Perspectives

#### Modélisation

Les calculs et les expériences ont été menés en l'absence de glissement (les vitesses  $u_1$  et  $u_2$  des surfaces 1 et 2 sont identiques). Il serait intéressant de modéliser l'influence du glissement en introduisant la quantité de lubrifiant  $h_{oil}$  équivalente aux quantités de lubrifiant  $h_{oil,1}$  et  $h_{oil,2}$  présentes sur les surfaces 1 et 2, avec  $h_{oil}$  définie par :

$$h_{oil} = \frac{u_1 h_{oil,1} + u_2 h_{oil,2}}{u_1 + u_2} \tag{5.50}$$

En cas de fort glissement, il serait bien entendu nécessaire de prendre en compte les effets thermiques dus au dégagement d'énergie par cisaillement du lubrifiant, pour estimer précisément l'épaisseur de film de lubrifiant dans le contact. Dans la modélisation adoptée, la distribution du lubrifiant entre deux passages successifs des corps roulants est supposée statique (le lubrifiant est transporté par les surfaces et il ne s'écoule pas hors du contact). En réalité, le lubrifiant est soumis à des contraintes dues à sa tension de surface. Cette tension de surface provoque une surpression ou une dépression capillaire inversement proportionnelle au rayon de courbure de la surface libre du lubrifiant. Elle tend à lisser la distribution du lubrifiant sur les surfaces. Le rayon de courbure du ménisque étant très faible, aux points de formation et de rupture du film, il génère une dépression capillaire importante. La prise en compte de la réalimentation entraînée par la dépression capillaire (voir annexe D) pourrait permettre de prédire la courbe de sous-alimentation complète d'un contact, connaissant la valeur de son paramètre  $\gamma$ . La détermination du débit de réalimentation ne nécessite pas une grande précision car une erreur d'un facteur 100 sur la réalimentation n'entraîne qu'une erreur d'un facteur inférieur à 5 sur l'épaisseur de film en régime EHD sous-alimenté permanent.

D'autre part, comme le montre l'annexe A, la cage d'un roulement modifie le débit de réalimentation de la piste de roulement. Son influence sur le comportement sous-alimenté d'un contact est significative. La modélisation du comportement du lubrifiant entre les corps roulants et la cage en régime hydrodynamique sous-alimenté pourrait fournir une meilleure compréhension du mécanisme de redistribution du lubrifiant par la cage. Elle permettrait d'améliorer le comportement des roulements sensibles à la sous-alimentation en agissant sur les caractéristiques de leur cage.

Afin de quantifier l'influence de la sous-alimentation sur la durée de vie des surfaces en contact (et donc du mécanisme), il serait souhaitable d'établir la relation entre la durée de vie, l'épaisseur de film en régime sous-alimenté et les propriétés des rugosités des surfaces en contact.

Enfin, dans le but de réduire le temps de calcul et d'améliorer la précision des résultats numériques, la mise au point d'un maillage à pas de discrétisation variable serait intéressante, afin de discrétiser finement uniquement les régions du domaine de calcul où de forts gradients règnent.

### Perspectives expérimentales et industrielles

Pour valider les prédictions numériques concernant la sous-alimentation locale, il serait intéressant de pouvoir contrôler et/ou mesurer le profil de lubrifiant qui alimente un contact. Cela permettrait de confirmer expérimentalement l'influence du couplage C sur la redistribution et la réduction de l'amplitude des oscillations observées numériquement dans le chapitre 5, sur le profil de lubrifiant.

L'évaluation de l'influence des cages de roulement sur la sous-alimentation (voir annexe A) peut être conduite sur un contact modèle en évaluant la vitesse critique du contact. Elle peut aussi être réalisée sur des roulements en contrôlant la température de fonctionnement et en augmentant lentement la vitesse de rotation du roulement. Lorsque le film de lubrifiant qui sépare les surfaces en contact devient trop mince, les rugosités des surfaces interagissent et la quantité d'énergie libérée par frottement augmente. Un accroissement rapide de la température est alors notable. La vitesse à laquelle survient ce phénomène peut être utilisée pour quantifier et comparer l'influence de plusieurs cages différentes sur la sous-alimentation d'un roulement.

Du point de vue industriel, la sous-alimentation a pour principale conséquence la diminution de la durée de vie. Afin d'optimiser le fonctionnement des mécanismes par rapport à ce problème, les efforts doivent être concentrés sur la compréhension et la prédiction de la réalimentation du contact en lubrifiant. D'une part, cette meilleure prédiction du débit de réalimentation permet des choix technologiques qui augmentent la durée de vie des contacts et des mécanismes. D'autre part, dans certains cas, elle rend possible :

- la suppression des circuits de lubrification,
- la réduction de la consommation de lubrifiant,
- l'utilisation de lubrifiants plus respectueux de l'environnement.

Ces tendances sont imposées aux industriels par le durcissement des normes environnementales et elles risquent, dans le futur de soulever de plus en plus de problèmes de lubrification sous-alimentée.

## Annexe A

## Etude expérimentale

### A.1 Introduction

Cette annexe présente le dispositif expérimental de mesure d'épaisseur de film de lubrifiant du laboratoire de tribologie de l'Imperial College de Londres. J'ai utilisé ce dispositif afin de valider les prédictions numériques et le modèle analytique exposés dans le chapitre 5.

Fabriquée par "PCS Instruments", la machine basée sur la technique interférométrique développée par Gohar et Cameron [33, 34] est conçue pour mesurer les épaisseurs de film en contact suralimenté. Elle peut être utilisée pour observer l'influence de la sous-alimentation sur l'épaisseur de film dans les contacts, en réduisant la quantité de lubrifiant dans le mécanisme.

Deux types de mesures sont effectués :

• En régime permanent, l'épaisseur centrale de film  $h_c$  est constante au cours du temps. Elle est mesurée en fonction de la vitesse  $u_m$  des surfaces, de manière à obtenir la relation  $h_c = f(u_m)$ . La vitesse critique  $u_c$  (où la courbe  $h_c = f(u_m)$  atteint son maximum) est lue sur la courbe expérimentale (voir figure A.5).

• En régime transitoire, l'épaisseur de film décroît dans le temps. Elle est mesurée au cours des *n* passages pour déterminer la relation  $h_c = f(n)$ . Cette relation permet d'évaluer le paramètre  $\gamma$  caractéristique du débit d'éjection du contact.

Afin d'observer l'influence de la cage sur la lubrification des contacts dans les roulements, une alvéole de cage est ajoutée autour du corps roulant du contact modèle. L'analyse des résultats consiste à comparer la valeur de la vitesse critique  $u_c$  mesurée pour différents lubrifiants avec et sans la cage.

Ce chapitre est présenté sous forme d'annexe car son contenu est moins théorique que celui du chapitre 5. D'autre part, le développement portant sur l'analyse de l'influence des cages de roulement sur la lubrification sous-alimentée s'apparente plus à l'étude d'un problème industriel spécifique qu'à l'amélioration de la compréhension d'un mécanisme physique simple.

### A.2 Dispositif expérimental

#### A.2.1 Principe

Un contact modèle constitué d'un corps roulant sur un disque se trouve au cœur de la machine présentée sur les deux photographies de la figure A.1.



FIG. A.1 – La totalité du banc de mesure figure sur l'image de gauche. La photographie de droite montre la bille vue en transparence à travers le disque.

Le corps roulant repose sur trois roulements dans le cas d'une bille et sur quatre roulements dans le cas d'un tonneau (voir figure A.3). La charge du contact est contrôlée au moyen de ce support mobile selon l'axe vertical. Il permet d'appliquer une force verticale sur le corps roulant qui est disposé sous le disque. La rotation du disque de verre autour de son axe vertical est imposée par un moteur pas à pas. La distance entre le corps roulant et l'axe du disque (qui détermine le rayon de la piste de roulement sur le disque) est ajustée au moyen d'une vis micrométrique. Un thermocouple disposé à quelques millimètres du contact permet d'évaluer la température de l'environnement du contact.

Un faisceau de lumière blanche est acheminé depuis une source jusqu'au contact par un câble de fibre optique et un jeu de lentilles qui permet de focaliser le rayon lumineux sur le contact. Les lentilles ne sont pas représentées sur la figure A.3. L'incidence des rayons lumineux est normale à la surface du disque, qui est éclairé par le dessus. Il est revêtu sur sa face inférieure d'une couche de chrome semi-réfléchissante. Les rayons réfléchis respectivement par la couche chrome et par le corps roulant ont une différence de marche égale à deux fois l'épaisseur du film de lubrifiant. Les deux rayons provenant de la même source forment une image d'interférence (voir figure A.2 et les travaux de Johnston [51]).



FIG. A.2 – Image interférométrique expérimentale d'un contact EHD circulaire faiblement sousalimenté.

Ces interférences sont analysées par un spectromètre. La longueur d'onde et l'ordre N du maximum d'intensité associés à la frange d'interférence observée permettent de déterminer la différence de marche entre les deux rayons lumineux. L'épaisseur du film dans la zone de mesure considérée est déduite de la différence de marche par la relation :

$$n_{oil} h_{oil} + n_{sp} h_{sp} = \frac{(N - \Phi)\lambda}{2\cos(\theta_i)}$$
(A.1)

Où *n* désigne l'indice de réfraction du milieu,  $\theta_i$  l'angle d'incidence des rayons lumineux,  $\lambda$  leur longueur d'onde et  $\Phi$  le changement de phase dû aux réflexions.

Remarques :

• La couche semi-réfléchissante déposée sur le disque est elle-même recouverte d'une couche de  $SiO_2$  d'épaisseur contrôlée, de l'ordre de 500 nm (voir [51]). Elle est appelée "spacer layer" et elle forme une "cale optique" d'épaisseur  $h_{sp}$  et d'indice  $n_{sp}$ . Cette couche permet d'observer des images d'interférence même lorsque la séparation entre le disque et le corps roulant est nulle. Cette technique étend le domaine de mesure vers les faibles épaisseurs de film, jusqu'à quelques nanomètres.

• Il est possible d'asservir en rotation le corps roulant en le montant sur un arbre lié à un moteur pas à pas d'axe horizontal au moyen d'un joint de cardan.

Les caractéristiques de géométrie et de matériau des corps roulants sont rassemblées dans l'annexe C avec les propriétés des lubrifiants utilisés et les charges appliquées.

Les détails de la technique de mesure ont été présentés par Johnston [51].



FIG. A.3 – Schéma de principe du fonctionnement du dispositif expérimental.

#### A.2.2 Mode opératoire

Lors du fonctionnement, le corps roulant, le disque, les roulements du support du corps roulant et la base du support par laquelle la force de contact est transmise sont susceptibles d'entrer en contact avec le lubrifiant. Ces pièces sont donc nettoyées, afin de retirer la graisse qui les recouvre lors du stockage pour les protéger de l'oxydation. Elles sont nettoyées par ultra-sons dans un bain de toluène afin de décoller et de dissoudre la graisse, puis elles sont rincées avec de l'acétone qui élimine le toluène présent sur les surfaces. L'acétone s'évapore rapidement.

Les pièces sont ensuite montées dans la machine. La distance entre le corps roulant et l'axe du disque est fixée à l'aide de la vis micrométrique. Le contact est mis en charge. La position angulaire du disque est alors enregistrée. Toutes les mesures seront effectuées à cette même position angulaire. L'épaisseur de la "spacer layer" est mesurée par interférométrie au point de référence du disque. Le contact n'étant alors pas lubrifié, cette étape permet de déterminer l'épaisseur  $h_{sp}$  de la "spacer layer".

L'épaisseur de la "spacer layer" ayant été étalonnée au point de mesure, le contact est déchargé et le lubrifiant est réparti sur la piste de roulement. Pour cela il est déposé goutte par goutte au sommet du corps roulant. A chaque goutte, le disque est mis en rotation manuellement afin d'étaler le lubrifiant sur la piste de roulement du disque. Le contact est ensuite mis en charge puis le disque est mis en rotation à faible vitesse (10 mm s<sup>-1</sup>), afin de parfaire la répartition uniforme du lubrifiant sur la piste de roulement du disque et du corps roulant.

La phase de préparation du banc est alors terminée et la mesure peut débuter.

L'acquisition des courbes d'épaisseur de film en fonction de la vitesse  $h_c = f(u_m)$  est effectuée sur une plage de vitesse variant de 10 à 1000 mm s<sup>-1</sup>. A chaque vitesse, un temps suffisant est laissé à l'épaisseur de film pour atteindre une valeur stabilisée (un régime permanent). Lorsque la vitesse maximale de la plage explorée est atteinte, une nouvelle acquisition de la courbe est effectuée en diminuant la vitesse jusqu'à la vitesse minimale.

Les épaisseurs mesurées en régime permanent dépendent de l'équilibre entre les débits d'éjection et de réalimentation. Le temps nécessaire pour atteindre cet équilibre croît avec la vitesse et il est parfois de l'ordre de plusieurs minutes. Ainsi, certaines des mesures sont effectuées alors que le régime permanent n'est pas totalement atteint. La courbe  $h_c = f(u_m)$  obtenue en faisant varier la vitesse dans le sens croissant puis décroissant forme une boucle d'hystérésis (voir graphique de droite de la figure A.14). Cette boucle forme une enveloppe qui contient l'épaisseur de film sous-alimentée fonctionnant en régime permanent. Sa largeur permet d'évaluer si, lors des mesures, le régime permanent est atteint ou non.

Pour obtenir les courbes de réduction d'épaisseur de film, en fonction du nombre de passages  $h_c = f(n)$  ou  $\mathcal{R}_c = f(n)$ , la vitesse du disque est augmentée subitement après une période de fonctionnement importante à faible vitesse (10 mm s<sup>-1</sup>). Cette période permet aux forces de capillarité de "drainer" une grande proportion du lubrifiant sur la piste de roulement (voir Jacod et al. [49] et Damiens et al. [21]). Cette phase de la manipulation a pour but de répartir uniformément le faible volume de lubrifiant sur la piste de roulement. A l'instant du changement de la vitesse, la piste étant fortement alimentée en lubrifiant, le contact opère en conditions presque sur-alimentées. L'augmentation de la vitesse réduit la quantité de réalimentation en lubrifiant de la piste de roulement. Un déséquilibre entre les débits d'éjection et de réalimentation apparaît. Le débit d'éjection de lubrifiant étant très supérieur à celui de réalimentation, à chaque cycle, le bilan des débits sur la piste de roulement est négatif. Une réduction de l'épaisseur de film de lubrifiant est donc observée au cours des cycles jusqu'à ce qu'un équilibre soit de nouveau établi entre les débits d'éjection et de réalimentation.

L'évolution schématique de l'épaisseur de film et de la vitesse, au cours de la manipulation en



FIG. A.4 – Evolution de la vitesse et de l'épaisseur de film, lors des mesures en régime sousalimenté transitoire.

régime transitoire, est donnée sur la figure A.4. Le graphique de gauche de la figure A.5 situe l'évolution de la vitesse et de l'épaisseur de film par rapport aux courbes sur et sous-alimentées. Celui de droite représente la réduction transitoire de l'épaisseur de film théorique au cours des cycles pour un contact caractérisé par  $\gamma = 3.1$  qui subit une réalimentation  $dr = 10^{-4}$ . Un tel débit de réalimentation correspond à une augmentation d'un dix-millième de l'épaisseur de film sur-alimentée à chaque cycle. En présence de réalimentation, la relation 5.40, qui définit l'alimentation en lubrifiant au cours des passages, prend la forme (A.2).

$$r_{n+1} = \mathcal{R}_n + dr = \frac{r_n}{\sqrt[\gamma]{(1+r_n^{\gamma})}} + dr$$
(A.2)

Comme le montre le graphique de droite de la figure A.5, obtenue d'après (A.2) avec  $r_0 = \infty$ ,  $dr = 10^{-4}$  et  $\gamma = 3.1$ , la réduction de l'épaisseur de film dépend très peu de la réalimentation, au début du régime transitoire. Les courbes  $dr = 10^{-4}$  et dr = 0 sont confondues. Après une centaine de passages (n > 100), l'épaisseur de film sur la piste de roulement est réduite d'un facteur 5. Le débit d'éjection est alors plus faible. Le débit de réalimentation n'est plus négligeable devant le débit d'éjection et les deux courbes  $dr = 10^{-4}$  et dr = 0 se séparent. Lorsque le débit d'éjection devient égal au débit de réalimentation, l'épaisseur de film sur la piste et dans le contact devient stationnaire, car à chaque cycle, le bilan des débits d'éjection et de réalimentation est nul. La courbe  $dr = 10^{-4}$  rejoint alors son asymptote horizontale d'épaisseur de film sous-alimentée en régime permanent.

#### A.2.3 Limites de la machine

Le dispositif expérimental est simple de mise en œuvre et la précision des mesures, de l'ordre de quelques nanomètres, est suffisante pour déterminer le paramètre  $\gamma$  d'un contact où sa vitesse critique  $u_c$ . Il est néanmoins limité par plusieurs caractéristiques.

Le thermocouple qui permet de mesurer la température ne peut être plongé dans le lubrifiant sous peine de perturber sa distribution sur la piste de roulement. Il est donc placé dans l'air à quelques millimètres de la frontière de cavitation à la sortie du contact. La mesure de la température du lubrifiant est donc approximative (ainsi que l'évaluation de la viscosité et des paramètres M et L expérimentaux qui en dépendent).

Le disque et la "spacer layer" ne peuvent supporter des contraintes aussi élevées que l'acier. Afin de ne pas les détériorer, des pressions de Hertz de 0.34 GPa pour le contact elliptique et 0.51 GPa pour le contact circulaire sont utilisées. Ces valeurs sont relativement faibles comparées



FIG. A.5 – Schéma de principe des mesures de film en régime sous-alimenté transitoire. Seule la partie de la figure de droite où les courbes dr = 0 et  $dr = 10^{-4}$  se superposent est exploitée pour évaluer le paramètre  $\gamma$ .

aux pressions de l'ordre de 2 GPa couramment rencontrées dans les roulements.

Enfin, les contraintes de tension de surface du lubrifiant peuvent jouer un rôle important dans le processus de réalimentation de la piste de roulement. Il est délicat de modifier de manière significative la tension de surface d'un liquide sans modifier ses propriétés de viscosité. L'influence de la tension de surface sur la réalimentation est donc observée indirectement au travers des courbes de sous-alimentation en régime permanent.

#### A.2.4 Influence de la longueur des pistes de roulement

Dans le chapitre 5, la prédiction en régime transitoire de la réduction de l'épaisseur de film au cours des cycles est donnée par la relation (5.39). Cette relation suppose qu'un cycle pour le corps roulant correspond à un cycle pour le disque. Dans le dispositif expérimental, la longueur de la piste de roulement du corps roulant est différente de celle du disque. Le nombre de cycles du corps roulant est donc différent de celui du disque. La relation  $h_{oil,n}(x_e, y) = h_{oil,n-1}(x_s, y)$  qui permet d'établir les relations (5.40) et (5.42) n'a plus de sens puisque la valeur de n est différente pour chacune des surfaces.

Le contact est alimenté par les couches de lubrifiant d'épaisseur  $h_{oil}^{surf \ 1}$  et  $h_{oil}^{surf \ 2}$  présentes respectivement sur les surfaces du disque et du corps roulant. Du point de vue de la modélisation mathématique adoptée dans le chapitre 3, cette alimentation est équivalente à une couche unique de lubrifiant présente sur l'une des surfaces et dont l'épaisseur serait :

$$h_{oil} = h_{oil}^{surf \ 1} + h_{oil}^{surf \ 2} \tag{A.3}$$

d'où :

$$r = r^{surf \ 1} + r^{surf \ 2} \tag{A.4}$$

L'épaisseur de la couche unique équivalente  $\mathcal{R}$  laissée par le contact sur la piste de roulement est donnée par la relation (5.38) en fonction de  $\gamma$  et de r.

A la sortie du contact, si le film de lubrifiant se divise en deux couches de même épaisseur, lors de sa rupture, l'épaisseur de la couche de lubrifiant sur chacune des surfaces est donnée par (A.5).

$$\mathcal{R}^{surf\ 1} = \mathcal{R}^{surf\ 2} = \frac{\mathcal{R}}{2} \tag{A.5}$$

Si  $n_1$  et  $n_2$  sont les numéros des cycles pour les surfaces 1 et 2, la suite numérique qui décrit l'évolution de l'alimentation en lubrifiant au cours du temps est donnée par la relation :

$$h_{oil,n_1} = h_{oil,n_1-1}^{surf \ 1} + h_{oil,n_2-1}^{surf \ 2}$$
(A.6)

soit :

$$r_{n_1} = \mathcal{R}_{n_1-1}^{surf\ 1} + \mathcal{R}_{n_2-1}^{surf\ 2} \tag{A.7}$$

Remarques :

• Par convention et pour que les notations soient facilement applicables à l'expérience, le nombre de passages pour le système est représenté par le nombre de tours du disque  $n_1$ .

• Le rapport des nombres de cycles du corps roulant et du disque est égal à l'inverse du rapport des longueurs des pistes.

Dans le cas du dispositif expérimental, le rapport entre les longueurs des pistes de roulement évolue entre 3.7 et 4.7. A titre d'exemple, le calcul théorique des termes de la suite numérique définie par (A.7) a été mené avec une longueur de piste de disque quatre fois supérieure à celle du corps roulant. La figure A.6 montre la réduction théorique de l'épaisseur de film de lubrifiant au cours des cycles dans le cas où  $n_2/n_1 = 4$  et dans le cas où les deux longueurs de pistes sont identiques  $(n_2/n_1 = 1 \text{ et } \mathcal{R} = n^{-1/\gamma})$ .



FIG. A.6 – Réduction théorique des épaisseurs de film au cours des cycles, en l'absence de réalimentation, pour un contact caractérisé par  $\gamma = 3$  et  $n_2/n_1 = 1$  et  $n_2/n_1 = 4$ .

Il apparaît que, dans le cas où les longueurs des pistes du corps roulant et du disque ne sont pas identiques, la décroissance  $\mathcal{R}(n_1)$  de l'épaisseur de film tend vers *cte*  $n_1^{-1/\gamma}$  et non vers  $n_1^{-1/\gamma}$ , lorsque le nombre de cycles  $n_1$  tend vers l'infini. Pour cette raison, les valeurs de  $\gamma$  calculées expérimentalement sont obtenues en approchant les courbes de réduction d'épaisseur de film  $\mathcal{R}(n_1)$  par la fonction (A.8) et non par la fonction (5.45).

$$\mathcal{R} = cte \ n_1^{-1/\gamma} \tag{A.8}$$

A titre indicatif, les valeurs théoriques de la constante *cte* correspondantes aux courbes de la figure A.7 sont données dans le tableau A.1 pour différentes conditions  $\gamma$  et  $n_2/n_1$ .

		$n_2/n_1$					
		1	2	3	5	10	
	1	1.00	0.75	0.67	0.60	0.55	
	2	1.00	0.87	0.82	0.78	0.74	
$\gamma$	3	1.00	0.91	0.87	0.84	0.82	
	5	1.00	0.94	0.92	0.90	0.89	
	10	1.00	0.97	0.96	0.95	0.94	

TAB. A.1 – Evolution théorique de la constante cte avec  $\gamma$  et le rapport  $n_2/n_1$ .



FIG. A.7 – Réduction théorique des épaisseurs de film au cours des cycles (à gauche), et valeur de la constante cte (à droite), pour les contacts  $\gamma = 1, 2, 3, 5, 10$  et  $n_2/n_1 = 1, 2, 3, 5, 10$ .

Remarque :

Lors des premiers passages, la réduction de l'épaisseur de film à chaque cycle est relativement importante car les épaisseurs d'alimentation sont grandes (r est proche de 1). La différence entre l'épaisseur de lubrifiant sur le corps roulant et sur le disque qui se crée au cours d'un tour du disque est importante (de l'ordre de la réduction de l'épaisseur de la couche d'alimentation). Cette différence génère des oscillations au cours des premiers cycles sur la courbe  $\mathcal{R} = f(n_1)$ . La quantité d'éjection de lubrifiant relative et absolue diminue au cours des cycles et la couche de lubrifiant sur le disque devient plus uniforme. L'amplitude relative et absolue des oscillations diminue donc au cours de cycles et la courbe rejoint son asymptote.

### A.3 Influence des cages sur la réalimentation en lubrifiant

Dans les roulements, la cage empêche les corps roulants d'entrer en contact les uns avec les autres. Elle garantit leur position, de manière à répartir l'effort appliqué au roulement sur les corps roulants. Les cages, en forme de couronne, contiennent des alvéoles qui enveloppent partiellement les corps roulants (voir figure A.8).

Le positionnement de la cage dans le roulement résulte des efforts de contact qui interviennent entre les corps roulants et la cage. Les corps roulants transportent sur leur surface le lubrifiant qui alimente les contacts entre les bagues et les corps roulants. Si les contacts entre corps roulants et cage ont lieu sur la piste de roulement ou à proximité de la piste de roulement, ils modifient



FIG. A.8 – En haut : photographie d'un roulement (à gauche), de sa cage standard (au centre) et d'une alvéole sphérique (à droite). En bas : photographie d'une cage aéronautique (à gauche) et d'une alvéole cylindrique (à droite).

la distribution du lubrifiant.

Cette modification de la distribution du lubrifiant influence l'alimentation du contact entre les bagues et les corps roulants. La liste suivante regroupe plusieurs configurations classées de la moins favorable à la plus favorable (elles sont schématisées sur la figure A.9).

• La cage peut racler le lubrifiant et réduire l'épaisseur de la couche d'alimentation présente sur la piste de roulement. Ce retrait de lubrifiant peut induire une sous-alimentation locale (schéma de gauche) ou globale. La cage peut écrêter les épaules de lubrifiant présentes de part et d'autre de la piste de roulement et entraîner la sous-alimentation globale par la réduction de la quantité de lubrifiant qu'elle occasionne dans le mécanisme (schéma central).

• La cage peut modifier la forme du profil d'alimentation sans changer de manière significative la quantité de lubrifiant présente sur la piste de roulement. Dans ce cas, son influence est négligeable.

• Enfin, la cage peut écraser les épaules de lubrifiant présentes de part et d'autre de la piste de roulement et ainsi provoquer le retour sur la piste du lubrifiant éjecté par le contact (schéma de droite).

Suivant les conditions de fonctionnement, une cage peut donc être source de sous-alimentation ou au contraire, de réalimentation. L'influence positive ou négative de la cage sur la qualité de la lubrification dépend des paramètres de fonctionnement :

- la géométrie de la cage,
- la forme du volume qui sépare le corps roulant de la cage,
- la position de la piste de roulement dans ce volume,
- la cinématique du corps roulant (vitesse de roulement, pivotement),
- la nature du lubrifiant (huile, graisse...) et ses propriétés (viscosité, tension de surface, nature et concentration du savon, contrainte minimale d'écoulement...).

La figure A.10 montre l'évolution de l'épaisseur de film vers sa valeur en régime permanent, à



FIG. A.9 – Modification schématique du profil d'alimentation en lubrifiant par la cage. A gauche : retrait local (sous-alimentation locale), au centre : écrêtage des épaules de lubrifiant, à droite : réalimentation de la piste de roulement par écrasement des épaules de lubrifiant.

partir de la suite numérique (A.2), pour plusieurs réalimentations dr. Cette épaisseur de film est obtenue lorsque l'équilibre entre le débit d'éjection et le débit de réalimentation est atteint.



FIG. A.10 – Evolution de l'épaisseur de la couche d'alimentation en lubrifiant vers sa valeur en régime permanent pour différentes réalimentations dr, pour un contact dont l'éjection est caractérisée par  $\gamma = 3.1$ .

La modification du débit de réalimentation dr par la cage entraîne donc la variation de l'épaisseur de film en régime sous-alimenté permanent. En perturbant l'épaisseur de film de lubrifiant en régime permanent, la cage modifie la vitesse critique  $u_c$ . Cette vitesse critique correspond au point de fonctionnement où l'épaisseur de film au centre du contact  $h_c(u_m)$  atteint son maximum (voir graphique de gauche de la figure A.5). Elle marque la transition pour la fonction  $h_c(u_m)$ entre le régime sur-alimenté et le régime sous-alimenté. La vitesse critique  $u_c$  a donc été utilisée pour caractériser l'influence de la cage sur la sous-alimentation.

La figure A.11 présente schématiquement l'évolution de la courbe de sous-alimentation  $h_c = f(u_m)$ , pour une cage dont l'influence sur la qualité de la lubrification est positive et pour le cas où elle est négative. La vitesse critique en présence d'une cage est notée  $u_{c,c}$ . Cette vitesse critique avec la première cage  $(u_{c,c1})$  diminue par rapport à la vitesse critique sans cage  $u_c$ , lorsque la cage détériore les conditions de lubrification. Au contraire, la deuxième cage améliore

la lubrification en favorisant la réalimentation et la vitesse critique  $(u_{c,c2})$  augmente.



FIG. A.11 – Influence schématique de la cage sur la courbe de sous-alimentation  $h_c = f(u_m)$ .

Les expériences ont été menées sur des cages dont les alvéoles ont une géométrie sphérique (cage standard) ou cylindrique (cage aéronautique). Une graisse comportant 5 et 15% de savon (li-thium hydroxystearate) ainsi que son huile de base (minérale) ont été testées.

#### A.3.1 Contact lubrifié avec une huile de base

Le contact modèle (lubrifié par plusieurs grammes d'huile de base) fonctionnant sans cage n'atteint pas la vitesse critique  $u_c$ , dans l'intervalle de vitesses exploré (10 mm s<sup>-1</sup> <  $u_m$  < 1000 mm s<sup>-1</sup>). Après la mesure de cette courbe d'épaisseur de film sur-alimentée (voir le graphique de gauche de la figure A.12), une cage de géométrie sphérique est ajoutée autour du corps roulant sans modifier la quantité de lubrifiant sur les surfaces. La courbe  $h_c = f(u_m)$  est de nouveau mesurée et la vitesse critique  $u_c$  est atteinte dès 100 mm s<sup>-1</sup> (voir graphique de droite de la figure A.12). La cage, par son contact avec le corps roulant, racle le lubrifiant qui s'accumule sur la cage. L'ajout de la cage autour du corps roulant a un effet négatif sur la lubrification avec l'huile de base, car elle réduit la vitesse critique  $u_c$  dans des proportions importantes.

Après la mesure avec la cage, une nouvelle mesure de la courbe de sous-alimentation est effectuée sans cage. La quantité de lubrifiant sur les surfaces n'est pas modifiée. Comme le montre le graphique de gauche de la figure A.12, la première et la seconde courbes mesurées sans cage sont très différentes. Le retrait de la cage ne rend pas sa forme initiale à la courbe sans cage. La seconde mesure sans cage met en évidence la modification définitive de la quantité d'huile sur les surfaces. La quantité et la distribution d'huile sur les surfaces sont les seuls paramètres de fonctionnement qui varient entre la première et la seconde mesures de la courbe sous-alimentée sans cage (graphique de gauche de la figure A.12). La seconde mesure montre la perte d'une partie du volume de lubrifiant initial lors de l'essai avec la cage. Cette quantité d'huile, une fois déposée sur la cage, ne participe plus à la lubrification du contact entre la bille et le disque. Elle est perdue définitivement.

#### Remarque :

Dans un mécanisme réel, sous l'effet de vibrations ou d'accélérations importantes, le lubrifiant pourrait éventuellement être déplacé depuis la cage vers des zones où sa présence améliore la lubrification.



FIG. A.12 – Courbes de sous-alimentation  $h_c = f(u_m)$  mesurées avec une huile de base sans cage à gauche et avec cage à droite.

#### A.3.2 Contact lubrifié avec une graisse

Du fait de sa contrainte minimale d'écoulement non nulle, une graisse est moins mobile que son huile de base. La réalimentation d'un contact par les effets de capillarité est donc moins importante pour une graisse que pour son huile de base comme le montre la figure A.13. Pour obtenir les courbes de cette figure, les contacts sont alimentés par plusieurs grammes de lubrifiant. Le graphique de gauche montre que la vitesse critique  $u_c$  n'est pas atteinte à  $u_m = 1000$  mm s<sup>-1</sup> avec l'huile de base alors qu'avec la graisse contenant 15% de savon, sur le graphique de droite, la vitesse critique est de 25 mm s<sup>-1</sup>.



FIG. A.13 – Courbes de sous-alimentation pour un contact lubrifié avec une huile de base (à gauche) et avec une graisse contenant 15% de savon (à droite). Les contacts sont alimentés par plusieurs grammes de lubrifiant.

La figure A.14 présente les courbes de sous-alimentation obtenues avec et sans cage, pour un contact lubrifié par 0.1g de graisse contenant 5% de savon. Sur la courbe de gauche, obtenue

sans cage, la vitesse critique  $u_c$  est de l'ordre de 80 mm s<sup>-1</sup>. L'utilisation d'une cage, pour obtenir la courbe de droite, modifie sensiblement la vitesse critique qui devient supérieure à 250 mm s<sup>-1</sup>. Dans les conditions expérimentales de la figure A.14, la présence de la cage favorise la réalimentation du contact. La cage améliore donc la qualité de la lubrification.



FIG. A.14 – Courbes de sous-alimentation sans cage (à gauche) et avec cage (à droite) pour un contact lubrifié par 0.1g de graisse contenant 5% de savon.

#### A.3.3 Conclusion sur l'influence des cages

Les figures A.12 et A.14 montrent une influence respectivement négative et positive d'une cage en plastique avec des alvéoles sphériques sur la vitesse critique  $u_c$ . Une même cage peut donc avoir un effet bénéfique ou pénalisant, sur la qualité de la lubrification, suivant les conditions dans lesquelles elle est utilisée.

Le contact entre la cage et le corps roulant est conforme. D'autre part, le matériau constitutif de la cage est souvent de faible module d'élasticité. La pression qui intervient entre les corps roulants et la cage est donc faible. Par conséquent, ce sont les propriétés du lubrifiant soumis à une faible pression qui interviennent dans le mécanisme de redistribution du lubrifiant par la cage. Le contact entre corps roulant et cage opère donc en régime hydrodynamique. Le comportement d'une graisse soumise à une faible contrainte de cisaillement sous une faible pression est très différent de celui de son huile de base. Ceci explique le comportement opposé observé pour une même cage entre la graisse testée et son huile de base.

D'autre part, pour traduire fidèlement le comportement d'une graisse, il est nécessaire de considérer son vieillissement avec le cisaillement qu'elle subit (voir [63]).

Des courbes de sous-alimentation mesurées dans des conditions expérimentales identiques mais en utilisant une cage de géométrie différente ont mis en évidence l'influence de la géométrie de la cage sur la vitesse critique et donc sur la réalimentation en lubrifiant de la piste de roulement.

### A.4 Conclusion

Cette annexe présente brièvement le dispositif expérimental ainsi que le principe de la mesure d'épaisseur de film par interférométrie optique.

La machine est utilisée pour mesurer l'épaisseur de film de lubrifiant dans les contacts, en régime transitoire, afin de déterminer l'éjection de lubrifiant de la piste de roulement au cours des cycles et le paramètre  $\gamma$  qui caractérise cette éjection. Une modélisation simple basée sur l'hypothèse d'une répartition identique du lubrifiant sur les deux surfaces mobiles, à la rupture du film de lubrifiant, permet de montrer que la courbe de réduction d'épaisseur de film doit être approchée par la fonction  $\mathcal{R} = cte \ n^{-1/\gamma}$  pour déterminer  $\gamma$  expérimentalement.

La figure A.10 présente l'évolution de l'épaisseur de film au cours des cycles en présence d'un débit de réalimentation constant. Le bilan à chaque cycle de la réduction et de l'augmentation de l'épaisseur de film, dues respectivement aux débits d'éjection et de réalimentation, conduit à l'épaisseur de film en régime permanent. Il est donc possible de prédire l'épaisseur de film en régime permanent en connaissant  $\gamma$  et la réalimentation dr. Cette prédiction ne nécessite pas une grande précision dans l'estimation de la réalimentation dr. Comme le montre la figure A.10 pour un contact dont le débit d'éjection est caractérisé par  $\gamma = 3.1$ , une erreur d'un facteur  $\Delta dr/dr = 100$  dans l'estimation de dr n'entraîne qu'une erreur d'un facteur  $\Delta \mathcal{R}/\mathcal{R} = 3$  sur l'épaisseur de film. Le tableau A.2 montre l'évolution de l'erreur relative  $\Delta \mathcal{R}/\mathcal{R}$  avec  $\gamma$ , pour une erreur d'un facteur 100 sur la réalimentation.

$\gamma$	$\Delta \mathcal{R}/\mathcal{R}$
1	10
2	4.7
3	3.2
5	2.2
10	1.5

TAB. A.2 – Erreur relative  $\Delta \mathcal{R}/\mathcal{R}$  provoquée par une erreur  $\Delta dr/dr = 100$  sur la réalimentation.

Les courbes de sous-alimentation  $h_c = f(u_m)$  mesurées en régime permanent ont une forme caractéristique. Elles sont composées d'une première partie, où l'épaisseur de film croît avec la vitesse des surfaces, comme le prédit la théorie sur-alimentée, lorsque la vitesse  $u_m$  est inférieure à la vitesse critique  $u_c$ . Dans la seconde partie de la courbe (pour  $u_m > u_c$ ), l'épaisseur de film décroît rapidement avec la vitesse. La vitesse critique  $u_c$  marque la transition entre le fonctionnement en régime sur et sous-alimenté. Les variations de cette vitesse critique sont utilisées pour mettre en évidence l'influence des cages de roulement sur le débit de réalimentation.

Les expériences montrent que les cages modifient la vitesse critique de manière significative. Dans les conditions expérimentales testées, la vitesse critique peut être réduite d'un facteur supérieur à dix ou augmentée d'un facteur supérieur à quatre, par rapport à la vitesse critique sans cage. L'influence des cages sur la sous-alimentation dépend des propriétés du lubrifiant et de la géométrie de la cage. Des courbes de sous-alimentation en régime permanent mesurées dans des conditions expérimentales identiques, mais avec des cages de géométrie différentes ont montré des variations non négligeables de la vitesse critique  $u_c$ . Il est donc possible d'optimiser la géométrie des cages en fonction des paramètres de fonctionnement afin d'augmenter la vitesse critique des roulements sujets à la sous-alimentation.

### Annexe B

# Lois de prédiction d'épaisseur de film en régime sur-alimenté

Moes [68] a défini l'épaisseur de film adimensionnée :

$$\bar{h} = \frac{h}{R_x} \left(\frac{E'R_x}{\eta_0 U}\right)^{1/2} \tag{B.1}$$

Hamrock et Dowson [40] ont approché l'épaisseur de film au centre du contact en régime piezovisqueux élastique.

$$\bar{h}_c = 2.69 U^{0.67} G^{0.53} W^{-0.067} [1 - 0.61 \exp(-0.75 D^{-0.64})]$$
(B.2)

Chittenden [17] et al. ont proposé l'approximation suivante, valable exclusivement en régime élastique :

$$\bar{h}_c = 4.31 U^{0.68} G^{0.49} W^{-0.073} [1 - \exp(-1.23 D^{-2.0/3.0})]$$
(B.3)

L'évolution de l'épaisseur de film de lubrifiant  $\bar{h}_c$  au centre du contact, avec les paramètres M et L, peut être décrite par quatre asymptotes. Kapitza [54] et Brewe et al. [10] ont caractérisé l'asymptote rigide isovisqueuse (RI). L'asymptote élastique isovisqueuse (EI) a été étudiée par Hamrock et Dowson [41], Brewe [20] et Kanters [53]. Les asymptotes rigide piezo-visqueuse (RP) et élastique piezo-visqueuse (EP) ont été analysées par Grübin [37]. Le comportement sur chacune de ces asymptotes est donné ci-dessous :

$$\bar{h}_{BIc} = C_{BIc} M^{-2} \tag{B.4}$$

$$\bar{h}_{EIc} = C_{EIc} M^{-2/15} \tag{B.5}$$

$$\bar{h}_{RPc} = C_{RPc} L^{2/3} \tag{B.6}$$

$$\bar{h}_{EPc} = C_{EPc} M^{-1/12} L^{3/4} \tag{B.7}$$

Les coefficients de l'approximation sont donnés par les équations (B.8) à (B.11).

$$C_{RIc} \simeq 145(1+0.796D^{14/15})^{-15/7}D^{-1}$$
(B.8)

$$C_{EIc} \simeq 3.18(1 + 0.006 \ln D + 0.63D^{4/7})^{-14/25}D^{-1/15}$$
(B.9)

$$C_{EIc} \simeq 3.18(1 + 0.006 \ln D + 0.63D^{4/7})^{-14/25}D^{-1/15}$$

$$C_{RPc} \simeq 1.29(1 + 0.691D)^{-2/3}$$
(B.10)
(B.10)

$$C_{EPc} \simeq 1.48(1+0.006\ln D + 0.63D^{4/7})^{-7/20}D^{-1/24}$$
 (B.11)

En 1994, Nijenbanning et al. ont exprimé l'épaisseur centrale de film sur chacune des asymptotes en une formule unique valable quelles que soient les conditions de fonctionnement du contact sur-alimenté.

$$\overline{h}_{c} = \{ [\overline{h}_{RIc}^{3/2} + (\overline{h}_{EIc}^{-4} + \overline{h}_{00}^{-4})^{-3/8}]^{2s/3} + (\overline{h}_{RPc}^{-8} + \overline{h}_{EPc}^{-8})^{-s/8} \}^{1/s}$$
(B.12)

avec :

$$s = 1.5 \left[ 1 + \exp\left(-1.2\frac{\bar{h}_{EIc}}{\bar{h}_{RIc}}\right) \right]$$
(B.13)

et :

$$\bar{h}_{00} = 1.8D^{-1} \tag{B.14}$$

### Annexe C

## Données expérimentales

Les corps roulants utilisés dans le dispositif expérimental sont en acier. Leur module d'Young E est de 2.1 10<sup>11</sup> Pa et leur coefficient de poisson vaut  $\nu = 0.3$ . Le disque est en verre. Son module d'Young E est de 0.7 10<sup>11</sup> Pa et son coefficient de Poisson vaut  $\nu = 0.25$ . Le module d'Young équivalent au contact entre ces deux pièces (l'une en verre et l'autre en acier) est de  $E' = 1.13 \ 10^{11}$  Pa.

Les caractéristiques géométriques des corps roulants et les charges utilisées sont données dans le tableau C.1.

	$R_x [\mathrm{mm}]$	$R_y \; [\mathrm{mm}]$	$R \; [mm]$	$R_x/R_y$	$\kappa$	f [N]	$p_h$ [Pa]
bille	9.525	9.525	4.76	1.0	1.000	20	$5.14 \ 10^8$
tonneau	9.525	70.0	8.38	0.136	0.273	30	$3.35 \ 10^8$
bille esssais avec cage	7.11	7.11	3.56	1.0	1.000	10	$4.96 \ 10^8$

TAB. C.1 – Géométrie des différents corps roulants utilisés expérimentalement et charge de contact appliquée.

L'indice de réfraction des lubrifiants utilisés est 1.45.

Dans le chapitre 5, l'huile de base SHC401 a été utilisée, pour l'évaluation expérimentale de  $\gamma$ . Elle est caractérisée par son coefficient de visco-pression  $\alpha = 20 \ 10^{-9} \ \mathrm{Pa}^{-1}$  et par sa viscosité  $\eta_0 = 0.8 \ \mathrm{Pa} \ \mathrm{s}^{-1}$  à la température des mesures.

Dans l'annexe A, lors de l'observation de l'influence des cages sur la sous-alimentation, une graisse composée de 5 et 15 % de savon lithium hydroxystearate a été testée ainsi que son huile de base dont la viscosité à  $40^{\circ}$ C est de 200 cst.

### Annexe D

## **Réalimentation capillaire**

Le dispositif expérimental est mis en marche à une vitesse suffisamment élevée pour provoquer la sous-alimentation sévère du contact. Après une période de fonctionnement de plusieurs minutes, afin d'établir un régime stationnaire, l'épaisseur de lubrifiant sur la piste de roulement est de l'ordre de quelques nanomètres. La vitesse est alors réduite à une valeur légèrement inférieure à la vitesse critique  $u_c$  et le temps est mesuré à partir de ce changement de vitesse.

Le débit de réalimentation augmente à cause de la réduction de la vitesse et un déséquilibre entre les débits d'éjection et de réalimentation apparaît. A chaque cycle, le lubrifiant retourne progressivement sur la piste de roulement et l'épaisseur de film croît (voir schéma de la figure D.1). La figure D.2 montre la progression du ménisque vers le centre de la piste de roulement au cours du temps t.



FIG. D.1 – Evolution de la vitesse et de l'épaisseur de film, lors de l'observation expérimentale de la réalimentation.



 $\label{eq:FIG.D.2} FIG. \ D.2 \ - \ R\acute{e}alimentation \ capillaire \ d'un \ contact \ circulaire \ initialement \ fortement \ sous-aliment\acute{e}.$ 

## Bibliographie

- ASTRÖM H., ISAKSSON O. et HÖGLUND E. Video recording of an ehd point contact lubricated with grease. *Tribology International*, 1991, vol 24, p 179 – 184.
- [2] ASTRÖM H., ÖSTENSEN J.O. et HÖGLUND E. Lubricating grease replenishment in an elastohydrodynamic point contact. ASME, Journal of Lubrication Technology, 1993, vol 115, p 501 – 506.
- [3] BAIR S. Measurement of non-newtonian response for liquid lubricant under moderate pressure. *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, 2001, vol 215, p 223 – 233.
- [4] BARKER D. C., JOHNSTON G. J. et SPIKES H. A. Ehd film formation and starvation of oil-in-water emulsion. *STLE*, *Tribology Transactions*, 1993, vol 36, n°4, p 565 – 572.
- [5] BARUS C. Isothermals, isopiestics and isometrics relative to viscosity. Am. J. of Science, 1893, vol 45, p 87 - 96.
- [6] BAYADA G., CHAMBAT M. et EL ALAOUI M. Variational formulation and finite elements algorithm for cavitation problems. ASME, Journal of Tribology, 1990, vol 112, p 398 – 403.
- [7] BOWDEN F. P. et TABOR D. The friction and lubrication of solids. Oxford Science Publications, Great Britain, 1986, p 299 – 314.
- [8] BRANDT A. Multi-level adaptative solutions to boundary value problems. Mathematics of Computation, 1977, vol 31, p 333 – 390.
- [9] BRANDT A. et LUBRECHT A. A. Multilevel matrix multiplication and fast solution of integral equations. J. of Comp. Phys., 1990, vol 90, p 348 370.
- [10] BREWE D., HAMROCK B. J. et TAYLOR C. M. Effect of geometry on hydrodynamic film thickness. ASME, Journal of Tribology, 1979, vol 101, p 231 -239.
- [11] CAMERON A. et GOHAR R. Theoretical and experimental studies of the oil film in lubricated point contact. Proc. Roy. Soc. London, Series A, 1966, vol 291, p 520 – 536.
- [12] CANN P. M. E., CHEVALIER F. et LUBRECHT A. A. Track depletion and replenishement in a grease lubricated point contact : A quantitative analysis. *Proceedings of the 23rd Leeds-Lyon Symposium on Tribology*, 1997, vol 11, p 405 – 414.
- [13] CANN P. M. E. Starved grease lubrication of rolling contacts. STLE, Tribology Transactions, 1999, vol 42, p 867 – 873.
- [14] CHEVALIER F. Modélisation des Conditions d'Alimentation dans les Contacts EHD Ponctuels. Thèse : INSA-LYON, 1996.

- [15] CHEVALIER F., LUBRECHT A. A., CANN P. M. E., COLIN F. et DALMAZ G. Film thickness in starved ehl point contacts. ASME, Journal of Tribology, 1998, vol 120, p 126 – 133.
- [16] CHEVALIER F., LUBRECHT A. A., CANN P. M. E. et DALMAZ G. Evolution of lubricant film defects in the starved regime. *Proceedings of the 24th Leeds-Lyon Symposium on Tribology*, 1998, p 233 – 244.
- [17] CHITTENDEN R. J., DOWSON D., DUNN J. F. et TAYLOR C. M. A theoretical analysis of the isothermal elastohydrodynamic lubrication of concentrated contacts, II : General case with entrainment along either principal axis of the hertzian contact ellipse or at some intermediate angle. *Proc. Roy. Soc. London*, 1985, vol A 397, p 271 – 294.
- [18] CHIU Y. P. An analysis and prediction of lubricant starvation in following contact systems. ASLE Transactions, 1974, vol 16, p 276 – 280.
- [19] COY J. J. et ZARETSKY E. V. Some limitations in applying classical ehd film thickness formulas to a high-speed bearing. ASME, Journal of Lubrication Technology, 1981, vol 103, p 295 – 304.
- [20] CROOK A. W. The lubrication of rollers II film thickness with relation to viscosity and speed. *Philos. Trans. R. Soc. London, Series A*, 1961, vol 254, p 223 – 258.
- [21] DAMIENS B., CANN P. M. E. et LUBRECHT A. A. Lubrication regimes in rolling element bearings. *Proceedings of the 27th Leeds-Lyon Symposium on Tribology*, 2000, p 295 – 302.
- [22] DAMIENS B., VENNER C. H., CANN P. M. E. et LUBRECHT A. A. Starved lubrication of elliptical e.h.d. contacts. accepted at the ASME, Journal of Tribology, 2003.
- [23] DOWSON D. et HIGGINSON G. R. A numerical solution to the elastohydrodynamic problem. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 1959, vol 1, p 6 - 15.
- [24] DOWSON D. et HIGGINSON G. R. Elasto-hydrodynamic lubrication the fundamentals of roller and gear lubrication. *Pergamon Press, Oxford*, 1966.
- [25] DUMONT M.-L., LUGT P. M. et TRIPP J. H. Surface feature effects in starved circular ehl contacts. *Transactions of the ASME*, 2002, vol 124, p 358 – 366.
- [26] ELROD H. G. et ADAMS M. L. A computer program for cavitation and starvation problems. *Proceedings of the 1st Leeds-Lyon Symposium on Tribology*, 1974, p 37 – 41.
- [27] ELROD H. G. A cavitation algorithm. ASME, Journal of Lubrication Technology, 1981, vol 103, p 350 – 354.
- [28] ERTEL A. M. Hydrodynamic lubrication based on new principles. Akad. Nauk SSSR Prikadnaya Mathematica i Mekhanika, 1939, vol 3, 2, p 41 – 52.
- [29] FLOBERG L. Cavitation boundary conditions with regard to the number of streamers and tensile strength of the liquid. Proceedings of the 1st Leeds-Lyon Symposium on Tribology, 1974, p 31 – 35.
- [30] GADALLAH N. et DALMAZ G. Hydrodynamic lubrication of the rib-roller end contact of a tapered roller bearing. ASME, Journal of Tribology, 1984, vol 106, p 265 – 274.

- [31] GEORGES J. M. Frottement Usure et Lubrification. CNRS EDITIONS, ISBN 2-271-05668-3, 2000.
- [32] GÜMBEL L. Über geschmierte arbeitsräder. Z. ges. Turbinenwesen, 1916, vol 13, p 357.
- [33] GOHAR R. et CAMERON A. Optical measurement of oil film thickness under elastohydrodynamic lubrication. *Nature*, 1963, vol 200, p 458 – 459.
- [34] GOHAR R. et CAMERON A. The mapping of elastohydrodynamic contacts. ASLE Transactions, 1967, vol 10, p 215 – 225.
- [35] GREENWOOD J. A. et WILLIAMSON J. B. P. Contact of nominally flat surfaces. Proc. Roy. Soc. London, Series A, 1966, vol 295, p 300 – 319.
- [36] GREENWOOD J. A. et TRIPP J. H. The contact of two nominally flat rough surfaces. Proc. Instn. Mech. Engrs., 1971, vol 185, p 625 – 633.
- [37] GRUBIN A. N. Fundamentals of the Hydrodynamic Theory of Lubrication of Heavily Loaded Cylindrical Surfaces. Central Scientific Research Institute for Technology and Mechanical Engineering, Book no 30, Moscow, D.S.I.R. translations, 1949.
- [38] GUANGTENG G., CANN P. M. E. et SPIKES H. A. A study of parched lubrication. Wear, 1992, vol 153, p 91 – 105.
- [39] HAMROCK B. J. et DOWSON D. Isothermal elastohydrodynamic lubrication of point contacts, part I - theoretical formulation. ASME, Journal of Lubrication Technology, 1976, vol 98, p 223 – 229.
- [40] HAMROCK B. J. et DOWSON D. Isothermal elastohydrodynamic lubrication of point contacts, part III - fully flooded results. ASME, Journal of Lubrication Technology, 1977, vol 99, p 264 – 276.
- [41] HAMROCK B. J. et DOWSON D. Elastohydrodynamic lubrication of elliptical contacts for material of low elastic modulus I - fully flooded conjonction. ASME, Journal of Tribology, 1978, vol 100, p 236 – 245.
- [42] HAMROCK B. J. et BREWE D. Simplified solution for stresses and deformations. Transactions of the ASME, 1983, vol 105, p 171 – 177.
- [43] HERTZ H. Uber die berührung fester elastischer körper. J. Reine und Angew. Math., 1881, vol 92, p 156 – 171.
- [44] HOOKE C. J. et VENNER C. H. Surface roughness attenuation in line and point contacts. Proc. Instn. Mech. Engrs., 2000, vol 214, p 439 – 444.
- [45] HOWSTUFFWORKS . How bearings work [en ligne]. disponible sur : <a href="http://www.howstuffworks.com/bearing3.htm">http://www.howstuffworks.com/bearing3.htm</a>> (consulté le 23.05.03).
- [46] IOANNIDES E. et HARRIS T. A. A new fatigue life model for rolling bearings. ASME, Journal of Lubrication Technology, 1985, vol 107, p 367 – 378.
- [47] JACOBSON B. O. et VINET P. A model for the influence of pressure on the bulk modulus and the influence of the temperature on the solidification pressure of liquid lubricants. ASME, Journal of Tribology, 1987, vol 109, p 709 - 713.
- [48] JACOBSON B. O. Rheology and elastohydrodynamic lubrication. Elseviers Tribology Series, Ed. D. Dowson, ISBN 0444 88146 8, 1991.
- [49] JACOD B., PUBILIER F., CANN P. M. E. et LUBRECHT A. A. An analysis of track replenishment mechanisms in the starved regime. 25th Leeds Lyon symposium on Tribology, 1999, vol 36, p 483 – 492.

- [50] JACOD B. Friction in Elasto-Hydrodynamic Lubrication. Thèse : University of Twente, the Neitherlands, ISBN : 90-365-1782-6, 2002.
- [51] JOHNSTON G. J., WAYTE R. et SPIKES H. A. The measurement and study of very thin lubricant films in concentrated contacts. *STLE*, *Tribology Transactions*, 1991, vol 34, p 187 – 194.
- [52] KANETA M., SAKAI T. et NISHAKAWA H. Optical interferometric observations on the effects of a bumb on point contact ehl. ASME, Journal of Lubrication Technology, 1992, vol 114, p 779 – 784.
- [53] KANTERS A. F. C. On the Calculation of Leakage and Friction of Reciprocating Elastomeric Seals. Thèse : Technical University of Eindhoven, Eindhoven, The Neitherlands.
- [54] Hydrodynamic theory of lubrication during rolling. Zh. Tekh. Fiz., 1955, vol 25, p 747 – 162.
- [55] KINGSBURY E. Cross flow in a starved ehd contact. ASLE Transactions, 1973, vol 16, p 276 – 280.
- [56] KINGSBURY E. Parched elastohydrodynamic lubrication. ASME, Journal of Tribology, 1985, vol 107, p 227 – 236.
- [57] LUBRECHT A. A. Numerical Solution of the EHL Line and Point Contact Problem Using Multigrid Techniques. Thèse : University of Twente, Enschede, The Netherlands. ISBN 90-9001583-3., 1987.
- [58] LUBRECHT A. A., JACOBSON B. O. et IOANNIDES E. Lundberg Palmgren revisited. Rolling Element Bearings - Towards the 21<sup>st</sup> century, 1990, p 17 – 20.
- [59] LUBRECHT A. A. et VENNER C. H. Elastohydrodynamic lubrication of rough surfaces. Proc. Instn. Mech. Engrs., 1999, vol 213, p 397 – 404.
- [60] LUNDBERG G. et PALMGREN A. Dynamic capacity of rolling bearings. Acta Polytech. Mech. Eng., 1947, vol 1, p 7.
- [61] LUNDBERG G. et PALMGREN A. Dynamic capacity of rolling bearings. Acta Polytech. Mech. Eng., 1952, vol 2, p 96.
- [62] MARTIN H. M. Lubrication of gear teeth. *Engineering*, 1916, vol 102, p 119 121.
- [63] MÉRIEUX J. S., HURLEY S., LUBRECHT A. A. et CANN P. M. E. Sheardegradation of grease and base oil availability in starved ehl lubrication. *Pro*ceedings of the 26th Leeds-Lyon Symposium on Tribology, 2000, vol 38, p 581 – 588.
- [64] MESSÉ S. Analyse Transitoire de la Lubrification et du Frottement dans un Système de Distribution Automobile. Thèse : INSA-LYON, 2001.
- [65] MOES H. Discussion on a contribution by K. Jakobsen and H. Christensen, tribology convention, Gothenburg. Proc. Instn. Mech. Engrs., 1969, vol 183, p 205 – 206.
- [66] MOES H. et BOSMA R. Design charts for optimum bearing configuration, I the full journal bearing. *Transactions of the ASME*, 1971, vol 93, p 302 – 306.
- [67] MOES H. Optimum similarity analysis with applications to elastohydrodynamic lubrication. Wear, 1992, vol 159, p 398 – 407.

- [68] MOES H. Lubrication and Beyond, lecture notes. Rapport technique, University of Twente, code 115531, 2000.
- [69] NIJENBANNING G., VENNER C. H. et MOES H. Film thickness in elastohydrodynamically lubricated elliptic contacts. Wear, 1994, vol 176, p 217 – 229.
- [70] NOUTARY M. P. et LUBRECHT A. A. Starved lubrication of isoviscous rigid circular contacts. presented at the 29<sup>th</sup> Leeds Lyon symposium on Tribology.
- [71] PEMBERTON J. et CAMERON A. A mechanism of fluid replenishement in elastohydrodynamic contacts. *Wear*, 1976, vol 37, p 185 190.
- [72] PETRUSEVICH A. I. Fundamental conclusion from the hydrodynamic contact theory of lubrication. *Izv. Akad.*, *Nauk. SSSR (OTN)*, 1951, vol 2, p 209.
- [73] REYNOLDS O. On the theory of lubrication and its application to mr. beauchamps tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil. *Phil. Trans. Roy. Soc. of London*, 1886, vol 177, p 157 – 234.
- [74] ROELANDS C. J. A. Correlation aspects of the viscosity-temperature-pressure relationship of lubricating oils. Thèse : Technical University of Delft, The Netherlands, 1966.
- [75] SHURKA J. C. Elastohydrodynamic lubrication of roller bearings. ASME, Journal of Lubrication Technology, 1970, p 281 – 291.
- [76] STRIBECK R. Die wesentlichen eigenshaften der gleit- und rollenlager. VDI-Zeitschrift, 1902, vol 46, p 1341–1348, 1432 – 1438 and 1463 – 1470.
- [77] TOWER B. First report on friction experiments (friction of lubricated bearings). Proc. Instn. Mech. Engrs., 1883, p 632 – 659.
- [78] VENNER C. H. Multilevel Solution of the EHL Line and Point Contact Problems. Thèse : University of Twente, Enschede, The Netherlands. ISBN 90-9003974-0, 1991.
- [79] VENNER C. H. et LUBRECHT A. A. Numerical simulation of a transverse ridge in a circular ehl contact under rolling/sliding. ASME, Journal of Lubrication Technology, 1994, vol 116, n°4, p 751 – 761.
- [80] VENNER C. H. et LUBRECHT A. A. MultiLevel Methods in Lubrication. Elsevier, ISBN 0-444-50503-2, 2000.
- [81] WEDEVEN L. D. Optical Measurements in Elastohydrodynamic Rolling-Contact Bearings. Thèse : Imperial College, London, 1970.
- [82] WEDEVEN L. D., EVANS D. et CAMERON A. Optical analysis of ball bearing starvation. ASME, Journal of Lubrication Technology, 1971, vol 93, p 349 – 363.
- [83] WIJNANT YH. Contact Dynamics in the field of Elastohydrdynamic Lubrication. Thèse : University of Twente, Enschede, the Netherlands, ISBN : 90-36512239, 1998.
- [84] ZHU W. S. et NENG Y. T. A theoretical and experimental study of ehl lubricated with grease. *Transactions of the ASME*, 1988, vol 110, p 38 – 43.

# Table des figures

1.1	Roulement à double rangée de rouleaux coniques[45]	6
$2.1 \\ 2.2 \\ 2.3 \\ 2.4 \\ 2.5 \\ 2.6 \\ 2.7$	Schéma des régimes de lubrification et des profils de pression correspondants.       .         Courbe de Stribeck schématique.       .         Distribution du lubrifiant dans un contact.       .         Images interférométriques de contacts sur et sous-alimentés.       .         Epaisseur centrale de film en fonction de la vitesse.       .         Image interférométrique d'un contact en sous-alimentation sévère.       .         Images microscopiques de graisses.       .	15 16 17 18 19 20 21
3.1 3.2 3.3 3.4 3.5 3.6 3.7	Géométrie équivalente des surfaces en contact. $\dots \dots \dots$	27 29 30 31 32 33 35
$\begin{array}{c} 4.1 \\ 4.2 \\ 4.3 \\ 4.4 \\ 4.5 \\ 4.6 \\ 4.7 \\ 4.8 \\ 4.9 \\ 4.10 \\ 4.11 \end{array}$	Représentation graphique d'un "V-cycle" sur quatre niveaux de grilles Exemple de structure de grilles en deux dimensions	$\begin{array}{c} 41 \\ 42 \\ 42 \\ 44 \\ 46 \\ 54 \\ 55 \\ 57 \\ 58 \\ 59 \end{array}$
$5.1 \\ 5.2 \\ 5.3 \\ 5.4 \\ 5.5 \\ 5.6 \\ 5.7 \\ 5.8 \\ 5.9 \\ 5.10 \\ 5.11 $	Evolution de l'épaisseur centrale $H_c$ , en fonction de la quantité de lubrifiant $H_{oil}$ . Epaisseur de film centrale $\mathcal{R}_c$ , en fonction de la quantité de lubrifiant $r_c$ Evolution du comportement sous-alimenté avec la valeur de $\gamma_c$ Coupes calculées du champ de pression Coupes calculées de la distribution de lubrifiant et de la géométrie des surfaces. Evolution de $\gamma_c$ avec $M$ et $L$ pour un contact circulaire. Evolution schématique de la pression réduite $q(x)$ et de l'épaisseur de film $h$ . Coupe de la pression $P$ et du rapport entre les termes de Poiseuille selon $\vec{x}$ et $\vec{y}$ . Approximation de $\partial q/\partial x _{h=3h*/2}$ et détermination de la longueur d'entrée $S_{ff}$ . Géométrie du tube d'éjection circonférentiel. Géométrie du tube d'éjection circonférentiel dans le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$ .	62 63 64 65 66 68 69 70 72 72

5.12	Evolution de la pression $P(X,0)$ en fonction de la quantité de lubrifiant $r_c$	72
5.13	Evolution, avec la quantité de lubrifiant $r_c$ , de $\bar{\rho}H^3P/\bar{\eta}$ .	73
5.14	$\gamma_c$ en fonction de $1/\bar{S}_{ff} = \sqrt{M/L}$ pour le contact circulaire	74
5.15	$\gamma_c$ en fonction de $\sqrt{M/L}$ pour différentes ellipticités	75
5.16	Evolution de la masse surfacique de lubrifiant dans l'écoulement.	77
5.17	Pourcentage de l'éjection de lubrifiant due à la sortie d'un contact elliptique	77
5.18	Evolution de la pression $P(X,0)$ avec de la quantité de lubrifiant $r_c$ .	78
5.19	Profil de lubrifiant à la sortie du contact $H_{oil,n}$ après plusieurs passages	80
5.20	Réduction d'épaisseur de film, au cours des premiers passages du corps roulant.	80
5.21	Evolution de la couche d'alimentation en lubrifiant au cours des passages	81
5.22	Erreur relative sur l'éjection de lubrifiant $\Delta \mathcal{R}/(r-\mathcal{R})$ en fonction de r et de $\gamma$ .	85
5.23	Sensibilité relative des variations de $\mathcal{R}$ par rapport aux variations de $\gamma$	86
5.24	$\gamma$ en fonction de $\sqrt{M/L}$ pour différentes ellipticités	87
5.25	Image interférométrique d'un contact elliptique sous-alimenté localement	88
5.26	Profil sinusoïdal de lubrifiant dans la direction $\vec{y}$ , à l'entrée et à la sortie	89
5.27	Profil de lubrifiant sinusoïdal adimensionné à l'entrée et à la sortie du contact.	90
5.28	Réduction de l'amplitude des oscillations du profil de lubrifiant.	90
5.29	Mise en évidence du débit d'éjection à partir du profil sinusoïdal.	91
5.30	Longueur d'entrée sous-alimentée $\bar{S} = f(\bar{S}_{ff})$ .	92
5.31	Evolution de la longueur d'entrée adimensionnée $\bar{S}$ avec $r_c$	93
5.32	Evolution de la longueur d'entrée adimensionnée $\bar{S}$ avec $r_c \sqrt{L/M}$ .	93
5.33	Rapport $A_s/A_e$ en fonction du paramètre de couplage $C$ .	94
5.34	Courbe expérimentale de réduction d'épaisseur de film en contact circulaire	95
5.35	Valeurs expérimentales de $\gamma = f(\sqrt{M/L})$ , en contact circulaire et elliptique	96
5.36	$\gamma$ en fonction de $\sqrt{M/L}$	96
5.37	Réduction de l'épaisseur de film en contact circulaire et en contact elliptique.	96
5.38	Réduction de l'épaisseur de film en contact circulaire et en contact elliptique	97
5.39	Réduction de l'épaisseur de film en contact circulaire et en contact elliptique	97
A.1	Photographies du banc de mesure	104
A.2	Image interférométrique expérimentale d'un contact circulaire sous-alimenté	104
A.3	Schéma de principe du fonctionnement du dispositif expérimental	105
A.4	Evolution de la vitesse et de l'épaisseur, lors des mesures en régime transitoire	107
A.5	Schéma de principe des mesures de film en régime sous-alimenté transitoire	108
A.6	Influence de la longueur des pistes sur la réduction des épaisseurs de film	109
A.7	Réduction théorique des épaisseurs de film et valeur de la constante cte	110
A.8	Photographies de roulements et de cages	111
A.9	Modification schématique du profil d'alimentation en lubrifiant par la cage	112
A.10	Evolution de l'épaisseur de film vers sa valeur en régime permanent	112
A.11	Influence schématique de la cage sur la courbe de sous-alimentation $h_c = f(u_m)$ .	113
A.12	Courbes de sous-alimentation mesurées avec une huile de base avec et sans cage.	114
A.13	Courbes $h_c = f(u_m)$ pour un contact lubrifié avec une graisse et son huile de base.	114
A.14	Courbes $h_c = f(u_m)$ avec et sans cage pour un contact lubrifié avec une graisse.	115
D.1	Evolution théorique de l'épaisseur de film, liée à la réalimentation	120
D.2	Images interférométriques de la réalimentation capillaire d'un contact circulaire.	121

# Liste des tableaux

4.1	Evaluation de la convergence d'un calcul sur-alimenté	56
4.2	Evaluation de la convergence d'un calcul sous-alimenté.	56
4.3	Comparaison de l'épaisseur $H_{cff}$ calculée avec celle obtenue par Chevalier [14].	57
4.4	Comparaison de l'épaisseur $H_{cff}$ calculée, avec celle obtenue par Wijnant [83].	60
4.5	Comparaison de l'épaisseur $H_c$ calculée, avec celle obtenue par Chevalier [14]	60
5.1	Evolution de $\gamma_c$ avec M et L pour un contact circulaire	66
5.2	Influence de la taille du domaine de calcul sur l'épaisseur centrale de film	83
5.3	Comparaison entre les valeurs de $\gamma_c$ obtenues par Chevalier [14] et par le calcul.	84
5.4	Différence entre les valeurs de $\gamma_c$ calculées et celles obtenues par Chevalier [14].	84
A.1	Evolution théorique de la constante cte avec $\gamma$ et le rapport $n_2/n_1$	110
A.2	Erreur relative $\Delta \mathcal{R}/\mathcal{R}$ provoquée par une erreur $\Delta dr/dr = 100$	116
C.1	Conditions expérimentales.	119

## Index

 $\gamma$ , 23, 78, 84, 86, 94, 95, 98, 99  $\gamma_c, 61, 63, 66, 73, 74, 84, 98$ Åström, 22 additifs, 8, 21 adimensionnement, 26, 34 algorithme, 53 analyse statistique, 13, 16 aspérité, 8, 13, 14, 98 asymptote, 7, 62, 65, 85, 107, 110, 117 bagues, 6 Bair, 31 Barker, 20 Barus, 7, 11, 30, 36, 70 Bayada, 33 Block, 12 Bosma, 12 Bowden, 21 Brandt, 13 Brewe, 28, 117 brouillard, 7 cage, 8, 23, 25, 87, 101, 103, 110, 111, 113-116 Cameron, 7, 12, 19 Cann, 22 catalyseurs, 8 cavitation, 30-32, 76 changement de grille, 40, 42 Chevalier, 23, 33, 56, 58, 60, 61, 63, 77, 78, 82 Chittenden, 56, 117 Chiu, 18 circuit de lubrification, 9 cisaillement, 14, 21, 100, 115 coût, 8, 38, 40 code de calcul, 47 coefficient de frottement, 14, 16, 24 coefficient de Poisson, 119 complexité, 38, 52, 60 compressibilité, 11, 30 compromis, 9

conditionnement, 34 conditions aux limites, 23, 35, 37, 82 conservation de la masse, 11, 23, 26, 29, 33, 65.99contact came-poussoir, 14 contact hertzien, 7 contact sec, 7, 13, 26 convergence, 40, 47 corps roulants, 6 correction, 45, 46 couche limite, 76, 77, 87, 89, 90, 92, 94, 100 Couette, 47, 75, 76, 98 couplage, 87, 91–93, 98, 100, 101 Coy, 20 Dalmaz, 20 Damiens, 106 déformation élastique, 5, 10, 11, 13, 27, 91, 98, 99 dégradation de la graisse, 21, 22 différences finies, 39, 47 discrétisation, 38, 58 distribution du lubrifiant, 17, 23, 32, 64, 110 Dowson, 7, 11, 12, 17, 30, 36, 56, 117 durée de vie, 7, 8, 14, 16, 22, 101 dynamique, 14 écaille, 16 éjection circonférentielle, 71, 72, 74, 75, 91, 94 éjection de lubrifiant, 18-20, 22, 24, 61, 63, 71, 74–76, 78, 98, 100, 103, 106, 107, 110, 115, 116 éjection totale de lubrifiant, 79 élasticité, 11, 27, 99 élastohydrodynamique, 11 Elrod, 23, 24, 33 émulsion, 7, 20 engrenage, 11 environnement, 8, 9, 102 équation d'élasticité, 37, 46, 48 équation d'équilibre, 48, 53 équation de complémentarité, 26, 35, 37

équation discrète, 47 équilibre des charges, 11, 26, 28, 35, 37, 99 équilibre des débits, 18–20, 22, 64, 75, 106, 111 erreur, 85 erreur de discrétisation, 39 erreur numérique, 34, 39, 40, 48 Ertel, 7, 12, 67 expérimental, 7, 12, 17, 103, 108, 115, 116, 120fatigue, 5, 7, 17 fiabilité, 5, 9 film mince, 10, 29 finition, 9 fissures, 16, 99 Floberg, 23, 33 forces, 5 forces de surface, 19, 22, 29, 32, 64 forces de volume, 19, 29, 32, 64 formation du film, 33 frottement, 5, 6, 8, 14, 15 frottement de roulement, 14 Full Multi-Grid, FMG, 38, 41, 42 Gümbel, 11, 12 Gadallah, 20 Gauss, 38 Gauss-Seidel, 38, 39, 49 Georges, 15 glissement, 7, 14, 100 Gohar, 12 Grübin, 7, 12, 61, 67, 70, 98, 100, 117 graisse, 7, 9, 19, 21, 22, 114, 115, 119 gravité, 19 Greenwood, 13 grippage, 5 Guangteng, 20 Hamrock, 7, 12, 17, 28, 36, 56, 117 Herschel-Bulkley, 21 Hertz, 7, 11, 17, 18, 20, 23, 26-28, 63, 78 Higginson, 11, 12, 17, 30, 36 Hooke, 13, 98 huile de base, 21, 113, 115, 119 huile libérée, 21, 22 hydrodynamique, 82, 115 impureté, 16 inclusion, 16 injection, 43

interférence, 12, 104 interpolation, 40-43, 45, 46 Ioannides, 16 Jacobi, 38, 39, 50 Jacobson, 17, 31 Jacod, 22, 24, 106 Johnston, 7, 12, 20, 104, 105 Kaneta, 14 Kanters, 117 Kapitza, 117 Kingsbury, 18–20 laminaire, 29 lois de comportement, 26 longueur caractéristique, 8, 13, 61, 71, 74, 92, 98, 100 longueur de piste, 97, 109 Lubrecht, 7, 13, 17, 39, 46, 82 lubrification, 6 lubrification élastohydrodynamique, 14 lubrification hydrodynamique, 14 lubrification limite, 14 lubrification mixte, 14 Lundberg, 16, 17 maintenance, 5, 8 Martin, 11, 12 masse volumique, 30, 36 mécanique, 5 ménisque, 17, 20, 23, 31, 68, 75, 92, 101 Mérieux, 22 Messé, 14 ML-MI, 99 mobilité de la graisse, 21, 114 mobilité du lubrifiant, 24, 91, 99 module d'Young, 119 module d'Young équivalent, 27 Moes, 12, 36, 53, 99, 117 Multi Level-Multi Integral, ML-MI, 13, 24, 38, 43, 46 multigrille, 13, 38, 39 Navier-Stockes, 11, 29 Newton-Raphson, 38 newtonien, 29 Nijenbanning, 56, 70, 118 non-linéarité, 38 normes, 8 Noutary, 82 noyau, 38, 43-45, 52

optimisation, 7, 116 palier, 10, 23 Palmgren, 16, 17 parched lubrication, 19 pas de discrétisation, 39, 78, 82, 87, 101 passages successifs, 79, 81, 95, 97, 101, 107, 110Pemberton, 19 performance, 38 pertes, 5 Petrusevich, 7, 12 phosphore, 8 pic de pression, 12 piezo-viscosité, 8, 11, 12, 30, 36, 99, 119 pivotement, 19, 21 plomb, 8 Poiseuille, 47, 64, 69, 71, 75, 76, 78, 98 précision, 38, 46, 55, 82, 84, 85, 99, 101, 116 prédiction, 7, 8, 61, 67, 73, 100, 102, 117 pression capillaire, 22 pression réduite, 12, 67–69 produit vitesse-viscosité, 18, 20, 24 raideur, 14 rayons équivalents, 27 réalimentation, 18–23, 95, 98, 101, 106–108, 111, 114, 116, 120 redistribution du lubrifiant, 87-89, 91, 93, 94, 100, 101 réduction d'amplitude, 13 régime permanent, 106 régime transitoire, 103, 106 relaxation, 39-41, 48 relaxation distributive, 50 relaxation par ligne, 50, 60 rendement, 9 repère, 27, 29 réservoir, 21 résidu, 40, 49 résolution numérique, 13 restriction, 41, 42, 45 restriction pondérée, 43 retour de lubrifiant, 19, 21, 22, 64, 111 Reynolds, 7, 10–12, 23, 26, 29, 32, 33, 35, 37, 38.67 Roelands, 11, 31, 36 roulements, 6, 10 rugosité, 9, 13, 24, 98, 101 rupture du film, 33

savon, 21, 22 sécurité, 8 Shurka, 8 similitude, 12 soufre, 8 sous-alimentation locale, 23, 61, 87, 89, 98, 100sous-domaine, 23, 32, 33, 48, 49, 53 Spikes, 20 stabilité, 13, 38, 39, 42, 50, 60 stationnaire, 30 Stribeck, 15, 16 surfaces, 5, 99 Tabor, 21 techniques numériques, 13 température, 22 temps de calcul, 38, 42, 45, 46, 55, 101 tension de surface, 18, 19, 21, 22, 101, 108, 111 Tower, 10 transitoire, 13 tribologie, 6 Tripp, 13 tube circonférentiel, 71, 91 utilisateur, 5 V-cycle, 40, 41 Venner, 13, 39, 46, 98 Vinet, 31 viscosité, 8, 10, 18, 21, 22, 30, 36, 67, 111 vitesse critique, 101, 103, 112–116 vitesse de convergence, 13, 39, 54, 60 Wedeven, 17–19, 69 Wijnant, 14, 35, 56, 60 Williamson, 13 Zaretsky, 20 Zhu, 21 zinc, 8
## FOLIO ADMINISTRATIF

## THESE SOUTENUE DEVANT L' INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

NOM : DAMIENS	DATE de SOUTENANCE : 8 septembre 2003
Prénoms : Bruno Jean Marie	
TITRE :	
MODELISA	TION DE LA LUBRIFICATION
S	SOUS-ALIMENTEE
DANS LES CONTACTS EL	ASTOHYDRODYNAMIQUES ELLIPTIQUES
NATURE : Doctorat	Numéro d'ordre : 03 ISAL 0037
Formation doctorale : M.E.G.A. Spécialité : MEC	ANIQUE
Cote B.I.U Lyon : T 50/210/19 / et	bis CLASSE :
RESUME :	
Dans les mécanismes lubrifiés, la durée de vie des surfaces en contact est fonction de l'épaisseur du film de lubrifiant qui sépare les solides. La sous-alimentation en lubrifiant affecte cette épaisseur de film. Elle se manifeste par la réduction de la durée de vie des mécanismes et la variation du frottement dans le contact. La sous-alimentation concerne une proportion importante des contacts élastohydrodynamiques elliptiques.	
Une modélisation mathématique du problème à frontières libres est adoptée. Elle utilise la distribution du lubrifiant à l'entrée du contact comme condition aux limites. Les techniques multigrilles et « Multi-Level Multi-Integral » utilisées pour résoudre le système d'équations sont sommairement exposées.	
La résolution du système d' équations fournit les champs de pression et d'épaisseur de film de lubrifiant en tout point du plan de contact. Elle permet de valider un modèle analytique développé afin de mettre en évidence et de quantifier le débit d' éjection de lubrifiant, dans la couche limite qui entoure la zone de contact de Hertz. La largeur adimensionnée de la couche limite régit le débit d' éjection et, lorsqu' elle est associée à l' ellipticité du contact, elle permet de déterminer la réponse du contact à la sous-alimentation. La prédiction de la décroissance de l' épaisseur de film de lubrifiant au cours du temps est possible en l' absence de réalimentation, grâce au modèle analytique et à la largeur caractéristique.	
La largeur adimensionnée de la couche limite peut aussi être utilisée pour prédire la persistance d' une sous-alimentation locale au cours du fonctionnement d'un mécanisme.	
MOTS-CLES : cage, contact elliptique, couche limite, engrenage, épaisseur de film, lubrification élastohydrodynamique, piezo-viscosité, longueur caractéristique adimensionnée, mécanisme, multigrilles, mesures et validation expérimentales, modélisation, prédiction, Reynolds, roulement, simulation numérique, sous-alimentation.	
Laboratoire de recherches : Laboratoire de	Mécanique des Contacts et des Solides de l' INSA de LYON
Directeur de thèse : A.A. LUBRECHT	
Président de jury : D. MAZUYER	
Composition du jury : P.M.E. CANN, J. DENAPE, J. FRÊNE, C. J. HOOKE, A.A. LUBRECHT, C.H. VENNER	