

THESE

présentée

DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR

FORMATION DOCTORALE : MECANIQUE

ECOLE DOCTORALE DES SCIENCES POUR L'INGENIEUR DE LYON :

Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique (MEGA)

PAR

Mohamed Nizar BETTAIEB

(Ingénieur ENIS)

**MODELISATION DU COMPORTEMENT MECANIQUE
D'ENGRENAGES. COUPLAGES ENTRE ENGRENEMENT ET
ELEMENTS DE STRUCTURES FLEXIBLES**

Soutenue le 16 juin 2006 devant la commission d'Examen

Jury

MM. N. HAMZAOU

M. AJMI

M. PORTIER-FERRY

Rapporteur

M. HADDAR

Rapporteur

P. VELEX

Directeur

Cette thèse a été préparée au Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Solides de l'INSA de LYON

Résumé

Ce travail vise à prédire le comportement dynamique de réducteurs à engrenages comportant des éléments de structures flexibles. Le modèle développé est une approche hybride qui consiste à combiner des éléments finis de poutre classiques, des fondations élastiques pour les contacts entre dents et, pour les parties structurelles flexibles des sous-structures issues de modèles éléments finis tridimensionnels. L'arbre et le corps du pignon (denture exclue) sont modélisés par des éléments poutres en flexion, torsion et traction-compression. Le contact entre deux dents est assimilé à deux fondations élastiques de Pasternak de caractéristiques différentes liées par des raideurs de contact indépendantes. Pour intégrer un corps de roue à voile mince (denture exclue), un maillage éléments finis tridimensionnel de type brique est construit. L'introduction de ce maillage dans les équations du mouvement impose une réduction de la taille de ce modèle basée sur une méthode de réduction modale. Les résultats montrent une influence certaine de la flexibilité de la roue à voile mince sur le comportement statique (distribution de charge) et dynamique (coefficient dynamique globale) des réducteurs [11]

Abstract

The present work is aimed at predicting the static and dynamic behavior of geared transmissions comprising flexible components. The proposed model adopts a hybrid approach, combining classical beam elements, elastic foundations for the simulation of tooth contacts, and sub-structures derived from 3D finite element grids for flexible parts. The pinion shaft and body are modeled via beam elements which simulate bending, torsion and traction. Tooth contact deflections are described using time-varying elastic foundations (Pasternak foundations) connected by independent contact stiffness. In order to account for thin-rimmed gears, a 3D finite element model of the gear (excluding teeth) is set up and a pseudo-modal reduction technique is used prior to solving the equations of motion. Depending on the gear structure, the results reveal a potentially significant influence of thin rims on both quasi-static and dynamic behavior, i.e., load distributions and dynamic factors [11].

Table des matières

Résumé

Abstract

Principales notations

Introduction générale

CHAPITRE 1 : Introduction bibliographique

1 INTRODUCTION	19
2 SOURCES DE VIBRATIONS DANS LES TRANSMISSIONS PAR ENGRENAGE.....	19
2.1 LA RAIDEUR D'ENGRENEMENT	21
2.2 ECARTS GEOMETRIQUES	30
2.3 ERREUR DE TRANSMISSION	33
3 DYNAMIQUE DES TRANSMISSIONS PAR ENGRENAGE	38
3.1 INTRODUCTION	38
3.2 INFLUENCE DE SOUS-ENSEMBLES FLEXIBLES.....	39
4 CONCLUSION.....	49

CHAPITRE 2 : Modélisation de l'élément engrenage – Comparaisons entre différents modèles

1 INTRODUCTION	53
2 MODELISATION DE L'ELEMENT D'ENGRENAGE	54
2.1 MODELISATION DU CORPS DU PIGNON	54
2.2 MODELISATION DU CORPS DE LA ROUE FLEXIBLE.....	59
2.3 MODELISATION DE L'ENGRENEMENT	61
2.4 MODELISATION GLOBALE	66
2.5 EXPRESSION DU RAPPROCHEMENT NORMAL	67
2.6 MISE EN PLACE ET RESOLUTION DES EQUATIONS DE MOUVEMENT	78

3 ELEMENTS DE VALIDATION	84
4 CONCLUSION.....	92

CHAPITRE 3 : Applications quasi-statiques

1 INTRODUCTION.....	95
2 EXEMPLE ACADEMIQUE.....	95
2.1 DESCRIPTION DU MODELE	95
2.2 MODELISATION DE LA PARTIE MOTRICE DU REDUCTEUR.....	96
2.3 MODELISATION DE LA PARTIE RECEPTRICE DU REDUCTEUR.....	97
2.4 COMPORTEMENT QUASI-STATIQUE DU REDUCTEUR	101
3 EXEMPLE INDUSTRIEL	127
3.1 DESCRIPTION DU MODELE	127
3.2 MODELISATION DE LA PARTIE MOTRICE	127
3.3 MODELISATION DE LA PARTIE RECEPTRICE.....	127
3.4 COMPORTEMENT QUASI-STATIQUE DU REDUCTEUR	128
4 CONCLUSION.....	136

CHAPITRE 4 : Applications dynamiques

1 INTRODUCTION.....	139
2 EXEMPLE ACADEMIQUE.....	139
2.1 COEFFICIENT DYNAMIQUE.....	139
2.2 ANALYSE DU DEPLACEMENT D'UN NŒUD DE LA ROUE.....	144
3 EXEMPLE INDUSTRIEL	153
4 CONCLUSION.....	155

Conclusion générale

Références bibliographiques

Principales notations

m	: indice du mobile ($m=1$: pignon, $m=2$: roue).
i	: indice d'une ligne de contact.
j	: indice d'une tranche mince du corps de l'engrenage.
Ω_1	: vitesse de rotation du pignon.
R_{bm}	: rayon de base du solide m .
β_b	: angle d'hélice de base.
α_t	: angle de pression apparent de fonctionnement.
Z_m	: nombre de dents du mobile m .
b_m	: largeur de la denture du mobile m .
m_n	: module réel.
ε_1, γ_1	: amplitude et phase de l'excentricité du pignon.
$\delta e(M_{ij})$	: écart relatif au point de contact M_{ij} .
E_1	: module d'Young du pignon.
G_1	: module de cisaillement du pignon.
ν_m	: coefficient de Poisson du mobile m .
S_1	: section du pignon.
J_1	: moment d'inertie diamétrale du corps du pignon.
J_{01}	: moment d'inertie polaire du corps du pignon.
m_{1j}	: masse de la tranche j du pignon ou du corps du pignon.
G_{1j}	: représente le centre de gravité de la tranche j du pignon.
O_{mj}	: représente le centre de la tranche j de la roue m de l'engrenage.
$R_{1j}(\vec{S}_{1j}, \vec{T}_{1j}, \vec{Z})$	: repère associé à la j -ème tranche du pignon.
$R_{2j}(\vec{S}_{2j}, \vec{T}_{2j}, \vec{Z})$	: repère associé à la j -ème tranche de la roue.
$\underline{\underline{I_{1j}}}$	: tenseur d'inertie de la tranche j du pignon exprimé dans le repère $R_{1j}(\vec{S}_{1j}, \vec{T}_{1j}, \vec{Z})$.
U_{c1}	: énergie de déformation du corps du pignon.
T_{c1}	: énergie cinétique du corps du pignon.
$\{q_{cl}\}$	: vecteur des déplacements généralisés attribués au corps de pignon.
$[K_{cl}]$	: matrice raideur constante du corps du pignon.
$[M_{cl}]$	: matrice masse constante du corps du pignon.

$\{F_q^1(t)\}$	: vecteur second membre induit par les excitations externes du corps du pignon.
x_{mj}	: distance entre le centre de la ligne de contact contenant M_{ij} et le point T_m .
T_m	: point de tangence du plan d'action avec le cylindre de base du mobile m .
$T_1 T_2$	: longueur du plan d'action.
$[K_{ss}], [M_{ss}]$	: matrices raideur et masse complète d'une sous-structure.
$\{X_{ss}\}$	: vecteur des degrés de liberté totaux d'une sous-structure.
$[K_{red}], [M_{red}]$	: matrices raideur et masse réduite d'une sous-structure.
$[\phi_N]$	: matrice modale tronquée.
$\{q\}$	: vecteur des degrés de liberté modaux.
k_{ij}^{dm}	: raideur d'un ressort de la fondation élastique du mobile m au point M_{ij} .
G_{ij}^{dm}	: module de cisaillement de la fondation élastique du mobile m au point M_{ij} .
D_{ij}^{dm}	: module de flexion de la fondation élastique du mobile m au point M_{ij} .
$\omega_m(M_{ij})$	: champ de déplacements normaux au point M_{ij} de la fondation élastique du solide m .
$\Delta(M_{ij})$	: écrasement élastique au point de contact M_{ij} .
k_{ij}^c	: raideur de contact au point M_{ij} .
$k^c(t, \Delta)$	: raideur globale instantanée du contact (dépend de l'écrasement).
$\{V_1(M_{ij})\}$	: vecteur de structure du pignon dépendant du point de contact M_{ij} .
$\{X_1\}$	: vecteur de structure du pignon dépendant du point de contact M_{ij} .
$\delta_m(M_{ij})$	: rapprochement ou éloignement du mobile m au point de contact M_{ij} .
M_{pij}	: point du maillage de la roue (modèle EF3D) correspondant au point de contact M_{ij} .
$\{V_{M_{pij}}(M_{ij})\}$	: vecteur de structure associé au point M_{pij} de la roue (modèle EF3D) et au point de contact M_{ij} .
Q_s	: fonction de forme associée au nœud s .
$[Q(M_{pij})]$	: matrice de forme associée au point M_{pij} .
ξ_j	: facteur d'amortissement modal relatif au mode j .

Introduction générale

Les transmissions par engrenages sont des organes mécaniques couramment utilisés pour transformer et transmettre à un organe récepteur le couple et le mouvement de rotation générés par un moteur. En fonctionnement, ces systèmes se déforment, vibrent et génèrent du bruit. Dans le domaine des transports ou des machines, ces phénomènes peuvent être à l'origine d'émissions acoustiques importantes que l'on cherche à minimiser. A ce titre, les engrenages sont reconnus comme des sources internes de vibrations significatives et comme des points clés dans les mécanismes de transfert et d'amplification de ces vibrations. Le comportement statique et dynamique des engrenages est étudié depuis plus de 60 ans mais la problématique demeure toujours d'actualité.

Dans la littérature, les analyses du comportement statique et dynamique de systèmes d'engrenages peuvent être regroupées sous deux thématiques principales : a) l'étude des phénomènes localisés au niveau des contacts entre dentures (conditions de chargement instantanées, influence des corrections de forme, séparations des dents et chocs, etc...) et b) les approches plus globales à l'échelle du système mécanique, qui traitent des couplages induits par les engrènements, des phénomènes de vitesses critiques par exemple. Peu de travaux ont été mené sur des modèles couplant ces deux échelles d'analyse bien que la nécessité d'intégration de ces différents aspects ait été soulignée à plusieurs reprises. Ce besoin apparaît encore plus clairement lorsqu'il s'agit de considérer des ensembles présentant des parties flexibles comme des roues allégées ou à voiles minces pour lesquels les couplages élastiques entre ces parties structurelles et les contacts entre dents sont susceptibles d'être de première importance. C'est le cas notamment des applications navales et aéronautiques pour lesquelles le gain de masse est un facteur crucial dans la conception des boîtes de transmission. Les engrenages utilisés ont alors fréquemment des géométries complexes composées par exemple de jantes et de voiles souvent minces et souples et ne pouvant pas être représentées simplement par des modèles à paramètres concentrés.

Les développements présentés dans ce texte s'inscrivent dans la perspective de prédiction du comportement statique et dynamique d'engrenages ayant des structures déformables. Dans ce mémoire, nous proposons un modèle d'engrenage original intégrant à la fois une description précise des excitations d'engrènement et une modélisation plus réaliste des corps d'engrenages et d'arbres déformables.

Le texte se décompose en quatre parties. Dans le premier chapitre, le comportement dynamique des réducteurs à engrenages et les paramètres qui sont à la source des vibrations dans les engrenages (la raideur d'engrènement et les écarts de forme) sont explicités en s'appuyant sur une analyse exhaustive de la littérature existante. Le deuxième chapitre introduit un modèle hybride d'engrenages qui consiste à combiner des éléments finis de poutre classiques (partie motrice), des fondations élastiques pour les contacts entre dents et, pour les parties structurelles flexibles, des sous structures issues de modèles éléments finis tridimensionnels introduites dans le modèle via une condensation pseudo-modale. Les développements théoriques nécessaires à la simulation de l'engrènement et des évolutions des conditions de contact au cours du mouvement sont décrits. Dans la continuité de travaux antérieurs [78] [134], les équations du mouvement et le problème de contact normal entre denture sont résolus simultanément de manière itérative. Enfin des résultats du modèle développé sont comparés à ceux d'un travail antérieur [5] et d'un modèle issu de la littérature [70]. Dans le troisième chapitre, le modèle développé est appliqué à l'analyse du comportement statique et quasi-statique d'exemples académiques et industriels de réducteurs ayant comme structures flexibles des roues à voiles minces. Les principaux paramètres de fonctionnement sont examinés et les résultats sont comparés à ceux obtenus pour des systèmes avec des corps massifs. Enfin, le dernier chapitre est consacré aux simulations en dynamique avec la prédiction des efforts instantanés sur les contacts entre dentures et les vibrations de corps d'engrenages. Différentes architectures avec roues allégées et roues massives sont comparées en termes de réponse dynamique.

Chapitre 1 :

Introduction bibliographique

1 Introduction

Un réducteur est un ensemble d'organes mécaniques comprenant un générateur de puissance (moteur), des engrenages, des mécanismes entraînés (accouplements, frein), des structures servant de support (arbres, paliers) généralement incorporés dans un carter. Chacun des composants influe sur le comportement dynamique du réducteur, mais il est généralement admis que l'engrenage qui est l'organe de transmission par excellence, constitue une des sources principales d'excitations. S'il répond parfaitement aux exigences de rendement, de précision et de puissance spécifique imposées dans les architectures modernes, les critères de confort acoustique, de tenue vibratoire et de gain du poids sont à l'origine d'une nouvelle pression technologique sur ce composant.

Ce chapitre a pour but, dans un premier temps, d'introduire les notions relatives au comportement dynamique d'un réducteur et expliciter les phénomènes qui sont à la source des vibrations dans les engrenages. Enfin, une synthèse bibliographique des travaux considérant des sous ensembles flexibles dans des modélisations de réducteurs à engrenages sera présentée.

2 Sources de vibrations dans les transmissions par engrenage

Il est bien connu qu'une transmission par engrenages participe de manière notoire à la production de vibration et de bruit par des excitations associées aux conditions de contact entre dentures. De nombreuses études ont été menées sur le comportement dynamique des engrenages et, suivant leurs objectifs, elles peuvent être classées en :

- a) des analyses globales : la représentation de l'environnement mécanique des engrenages est précise, tandis que la modélisation du contact entre dentures reste généralement succincte. Ce type de travaux relève de la dynamique des rotors, de la simulation du comportement des mécanismes, Furukawa [28] (Figure I-1), Rieger [103], Lalanne et al. [67], Kahraman et al. [54], Bourdon [14].
- b) des analyses locales : la modélisation du contact entre dentures est plus fine mais la représentation de l'environnement mécanique est simplifiée Gregory et al. [31],

Umezawa et al. [123] à [131], Küçükay [66] (Figure I-2), Kasuba et al. [59], Kohler [63], Kubo [65] et Velez [134]. Ce type d'étude relève de la mécanique des contacts et de la dynamique de l'engrenage.

Pour des raisons de simplicité, la plupart des travaux de modélisation du comportement dynamique d'engrenages se sont orientés vers des modélisations masses-ressorts. Les engrenages sont assimilés à des cylindres rigides liés par une raideur qui représente la liaison élastique entre dentures (raideur d'engrènement) Gregory et al. [32], Strauch [115], Tuplin [120] et Zeman [148]. Les premiers travaux de modélisation du comportement dynamique d'engrenages considèrent une raideur d'engrènement constante. Différentes excitations induites par les erreurs de forme et de montage des engrenages sont introduites directement dans les équations du mouvement comme des termes forcés, Pearce et al. [96], Remmers [98], Reswick [101] et Tuplin [120] à [122]. Cette famille d'études ne tient pas directement compte de l'excitation par la variation de la raideur d'engrènement et les erreurs géométriques sont introduites de façon approximative. Il est actuellement admis, Kassai et al. [58], Kohler et al. [63], Remmers [98], Umezawa [122], Welbourn [146], etc... que les sources d'excitations internes les plus importantes sont celles a) associées aux fluctuations de raideur d'engrènement due à la variation de la longueur de contact au cours du temps et b) celles générées produites par les écarts de forme sur les dentures. Ces deux phénomènes de base en dynamique de l'engrenage sont explicités ci-dessous.

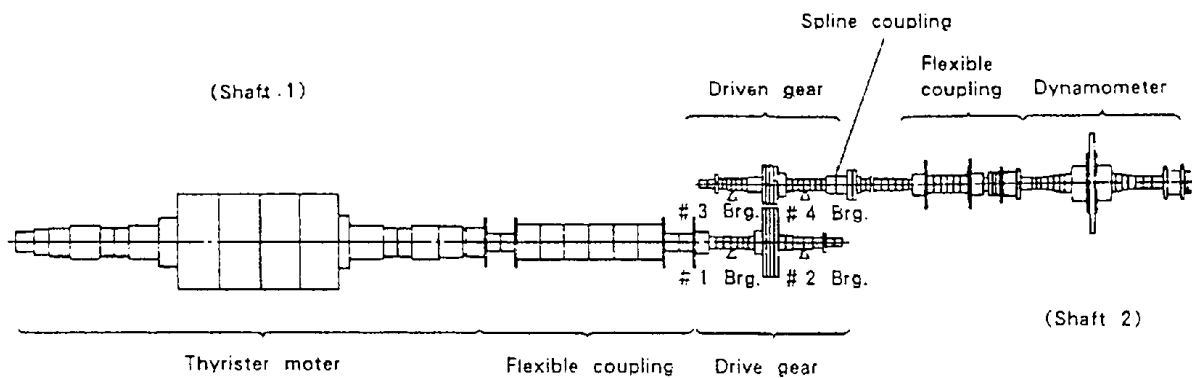


Figure I-1 : *Procédure éléments finis pour le calcul vibratoire d'engrenages et d'arbres (d'après Furukawa [28]).*

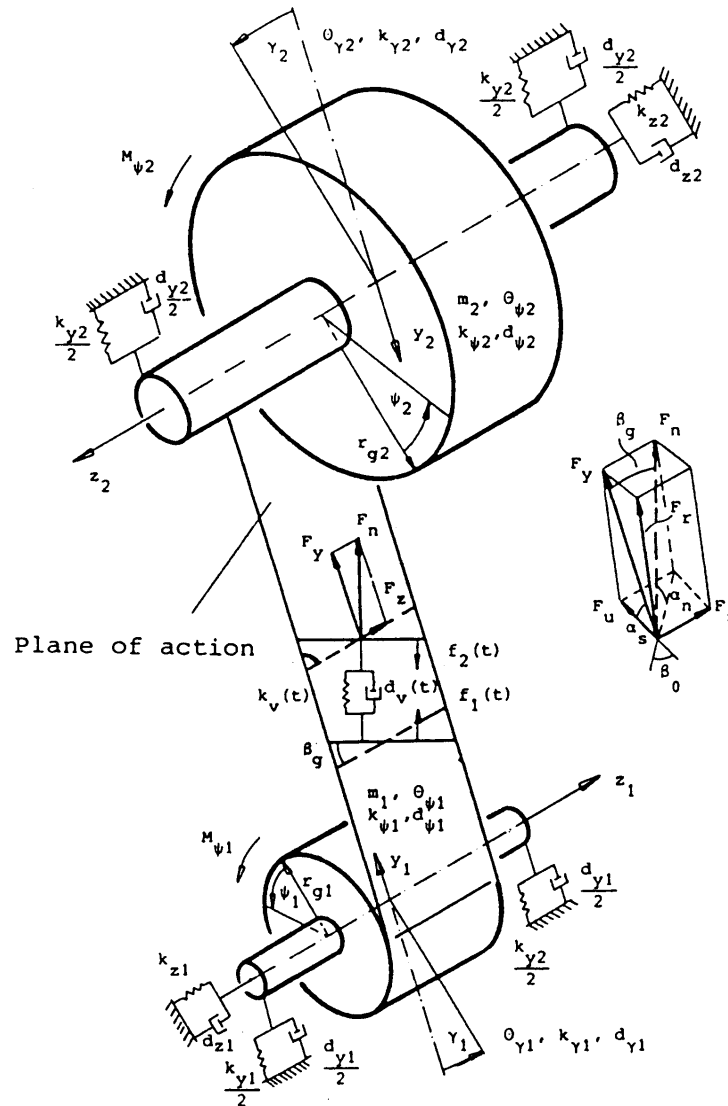


Figure I-2 : Modèle d'un train simple étage d'engrenages hélicoïdaux
(d'après Küçükay [66]).

2.1 La raideur d'engrènement

La raideur globale d'engrènement caractérise les déformations élastiques qui gèrent les positions relatives des deux roues d'un engrenage, sous l'action des efforts transmis. Cette liaison élastique, sur laquelle repose largement la problématique de la dynamique de l'engrenage, est assurée par les contacts entre dentures conjuguées des deux roues au cours de l'engrènement. Elle témoigne donc des conditions d'engrènement et met en évidence les fonctionnements non-linéaires, synonymes de pertes de contact partielles, voire totales, entre

des dents théoriquement en prises. Par hypothèse, la majorité des études considère que cette liaison agit sur le plan d'action théorique (Figure I-3).

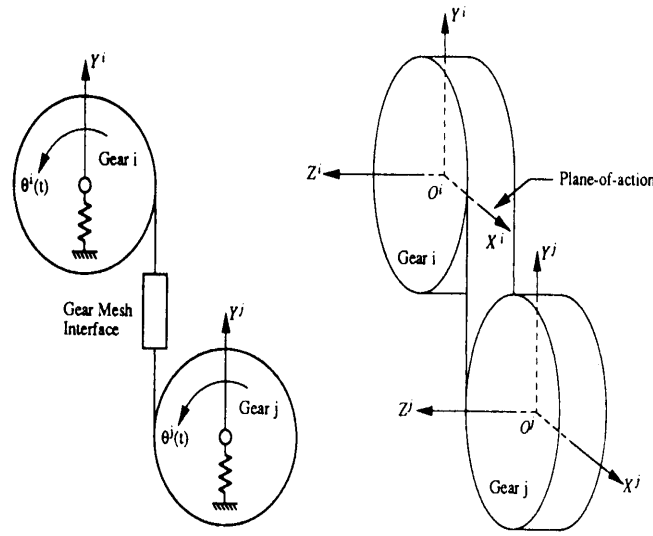


Figure I-3 : Définition de la liaison élastique d'engrenage (Blankenship et al. [13]).

Il existe néanmoins quelques travaux (Kasuba et Evans [59], Honda [47]) qui tentent de prendre en compte les variations instantanées de la position de ce plan d'action, et cherchent à inclure dans leurs modèles les points de contact situés en dehors du plan d'action théorique (Velex et al. [136]).

Les premières modélisations représentaient cette liaison élastique de façon très simplifiée ; Tuplin [120], par exemple, la matérialise par un simple ressort à raideur constante, et modélise les écarts de forme des profils par des coins de géométries données, insérés entre la raideur et une partie indéformable (Figure I-4).

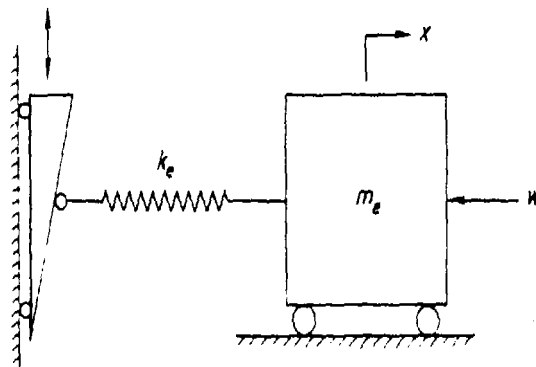


Figure I-4 : Modèle de Tuplin (d'après Özgüven [93]).

Des études ultérieures, notamment expérimentales, ont montré que ce type d'approche était relativement limité et ne traduisait que de façon partielle le comportement dynamique réel d'un engrenage, en particulier au voisinage des régimes critiques. Strauch [115] et Harris [39] ont mis en évidence le rôle prépondérant joué par la variation temporelle de la longueur de contact entre dentures, caractérisée notamment par le rapport de conduite. Paramètre intrinsèque à la géométrie nominale de l'engrenage, le rapport de conduite dépend à la fois des conditions de chargement et des éventuels écarts de géométrie ou de montage (Houser et Seireg [47], [111]). Pour déterminer la raideur globale d'engrènement, il est nécessaire de connaître à priori les propriétés de rigidité (ou de compliance) caractérisant un couple de dents en prise.

2.1.1 Raideur d'un couple de dents

Weber [144], Weber et Banaschek [145], Attia [7], puis plus tard Steward [113] décomposent les déformations élastiques d'un couple de dents en prise en des contributions :

- locales avec les déflexions de type hertziennes localisées au niveau des contacts,
- globales avec les déformées structurelles de dentures comme la flexion et le pivotement par rapport à la jante.

Les déformations liées au contact sont généralement traitées par la théorie de Hertz et ses variantes, on peut citer parmi les approches classiques utilisées la solution analytique de Boussinesq [75] qui repose sur l'hypothèse des massifs semi-infinis, la formulation bidimensionnelle de Weber et Banashek [145], la formulation tridimensionnelle de Lundberg [76], [77] et la variante proposée par Ajmi [3] à [5] permettant de tenir compte de bords libres.

En ce qui concerne les déformations de structure d'une dent, il est important, d'un point de vue fonctionnel, de déterminer la répartition des efforts entre les dents au cours de l'engrènement ce qui nécessite de connaître la relation entre la charge appliquée à la surface d'une dent d'engrenage et la distribution des déplacements en tout point de contact potentiel. La géométrie particulière des dentures (profils en développante de cercle, trochoïdes de raccordement en fond de dent) rend délicate la détermination théorique des rigidités de denture. Bien que de nombreuses études aient été conduites sur le sujet, une formule complète et exacte de la déflexion d'une dent couvrant l'ensemble des paramètres significatifs n'a pas

été trouvée à ce jour. De nombreux auteurs se sont intéressés à ce problème complexe et ont proposé des modélisations bidimensionnelles, basées sur des représentations de plaques ou de poutres, conduisant à des approches analytiques ou quasi-analytiques. Baud et Peterson [8], Weber et Banaschek [145], Attia [7], Tavakoli et Houser [118], Lin et al. [74] (Figure I-5) ont développé des équations reposant sur la théorie des poutres de sections variables.

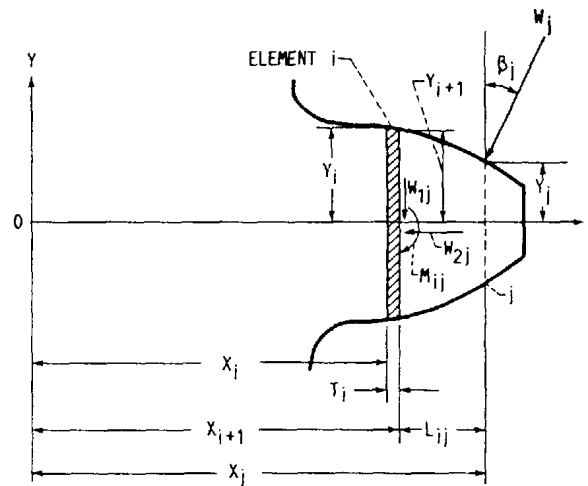


Figure I-5 : *Modèle de poutre encastrée à section variable (d'après Lin et al. [74]).*

Walker [143], après une étude expérimentale portant sur une dent fixée dans un bâti beaucoup plus rigide que la denture, a introduit une expression de la déformée de dentures droites. Wellauer et Seireg [147] ont présenté une étude de la flexion des dents d'engrenage basée sur le comportement d'une plaque en porte à faux. Une solution approchée, basée sur la méthode du moment-image, est donnée pour la plaque finie en porte à faux sous des charges transversales. En utilisant la théorie des potentiels complexes et les transformations conformes d'un demi-plan élastique, Cardou et Tordion [16] ont déterminé les déflexions et contraintes exactes pour le problème bidimensionnel d'une dent sur une embase élastique. Plus récemment, une formulation analytique permettant de calculer les déflexions associées aux déformations des corps d'engrenages a été proposée par Sainsot et al. [106].

Les problèmes tridimensionnels ne peuvent généralement être traités que de manière numérique et les résultats sont obtenus par les méthodes de différences finies, des éléments finis ou des éléments frontières Vedmar [133], Steward [113], Haddad [34] [35] (Figure I-6), Sainsot [101], Gagnon [29]

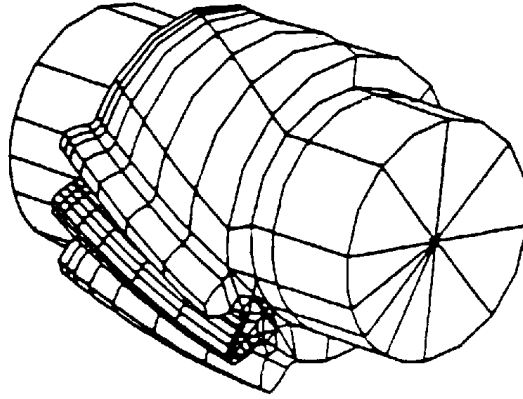


Figure I-6 : Maillage éléments finis d'une roue par Haddad et Pennell [35].

De tels modèles tridimensionnels sont généralement assez lourds et ne se prêtent pas facilement à des simulations du comportement dynamique. Dans ce contexte, l'approche originale basée sur la théorie des fondations élastiques de Pasternak [60] développée par Ajmi et Velez ([3] à [5]) apparaît comme une alternative intéressante. Cette méthode permet de tenir compte des couplages élastiques sur la denture et se prête bien aux calculs vibratoires. Une dent est assimilée à une fondation élastique de Pasternak [60] qui est constituée par des éléments de flexion et des éléments de cisaillement transversal posés sur des ressorts indépendants reliés à un bâti (Figure I-7).

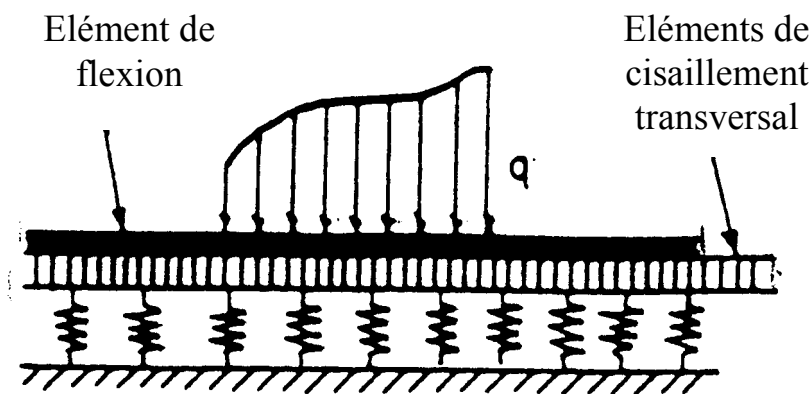


Figure I-7 : Fondation élastique de type Pasternak [60].

Les éléments de flexion et de cisaillement permettent de lier les ressorts et de simuler (au moins qualitativement) les couplages élastiques entre points voisins (Figure I-8).

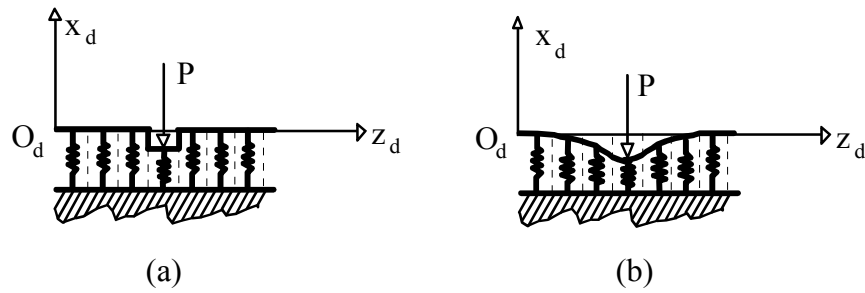


Figure I-8 : Déformée d'une fondation élastique par une charge concentrée normale
(a) Modèle sans couplage (b) Modèle avec couplage [60].

En s'inspirant des travaux en quasi-statique de Seager [110], Schmidt et al. [108], les fondations élastiques de Pasternak [60] sont rapportées sur le plan d'action de l'engrenage (plan tangent aux deux cylindres de bases). La dent et son embase sont découpées en tranches minces, chacune d'elles étant matérialisée par un ressort k_{ij}^m lié à des éléments de dimensions variables travaillant en flexion (D_{ij}^{dm}) et en cisaillement (G_{ij}^{dm}) pour assurer le couplage entre les tranches (Figure I-9). Le déplacement relatif des flancs de denture (ou le mouvement des lignes de contact sur chaque flanc) est simulé en réajustant les paramètres de raideurs au cours du temps.

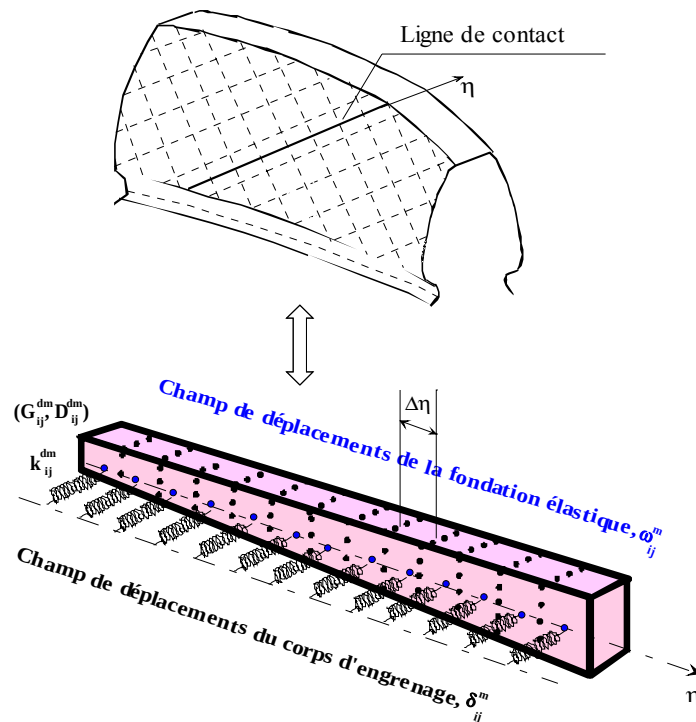


Figure I-9 : Modélisation d'une dent par une fondation élastique [3].

Après de nombreux tests numériques comparant les déflexions obtenues par des modèles éléments finis 3D et les valeurs fournies par des fondations élastiques, les valeurs de k_{ij}^m , D_{ij}^{dm} et G_{ij}^{dm} ont pu être approchées par les formules semi empiriques suivantes:

$$\begin{aligned} k_{ij}^m &= C_f k_{0ij}^{dm} \\ G_{ij}^{dm} &= C_f f_m(z) f_0(Z_m) \left(\frac{m_n}{4} \right)^2 k_{0ij}^{dm} \\ D_{ij}^{dm} &= C_f f_m(z) f_0(Z_m) \left(\frac{m_n}{4} \right)^4 k_{0ij}^{dm} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 1-1})$$

avec :

$C_f = 0.80$ pour des engrenages massifs (en s'inspirant des résultats de la norme ISO 6336[49]).

k_{0ij}^{dm} : raideur de Weber et Banachek [145]

$f_m(z) = 1$ si la denture est droite.

$f_m(z) = A f_1(\alpha) + B f_2(Z_m) f_3\left(\frac{b_m}{m_n}\right) e^{-C\bar{z}}$ si la denture est hélicoïdale.

A, B et C : des constantes à déterminer.

$\bar{z} = \frac{z}{m_n}$: coordonnée adimensionnée du point M_{ij} selon la largeur.

Z_m : nombre de dents du mobile.

f_0 , f_1 , f_2 et f_3 : fonctions qui dépendent de la géométrie de la denture.

Dans le cas des dentures hélicoïdales, la fonction $f_m(z)$ est introduite afin de tenir compte de la dissymétrie axiale des déplacements sur les bords pour une charge concentrée appliquée à rayon constant. Les coefficients A, B et C sont ajustés en utilisant les résultats des Eléments Finis tridimensionnels. La raideur d'un couple de dents est alors recomposée à

partir des déplacements issus des déformations de contact et de structure de la dent. On constate généralement que la raideur d'engrènement varie sensiblement avec la position du point d'application de la charge sur les profils de denture, la Figure I-10 illustre ce type de variation.

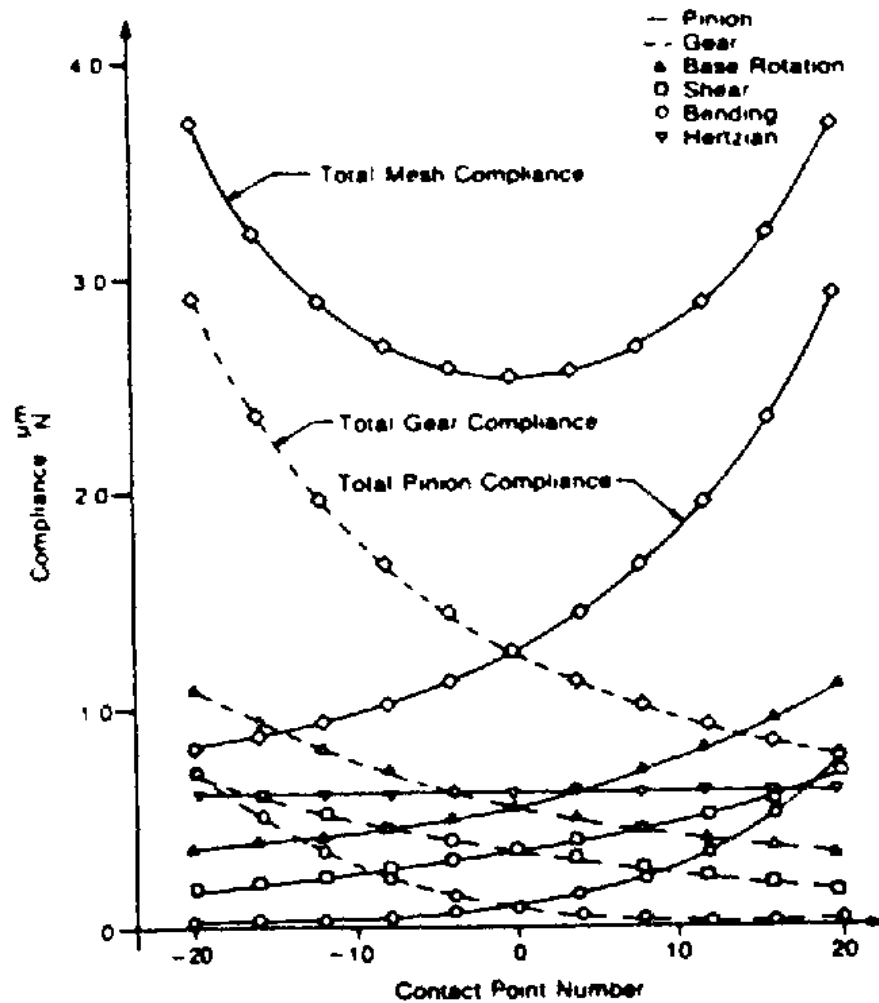


Figure I-10 : Diagramme de compliance d'après Tavakoli et Houser [118].

2.1.2 Raideur globale d'engrènement

A partir de la connaissance de la raideur d'un couple de dents en tout point du profil actif, la raideur globale d'engrènement peut être calculée par addition de l'ensemble des contributions individuelles par paire de dents. Gregory et al. [31] [32], Seireg et Houser [111], Küçükay [66] (Figure I-11), Iwatsubo et Arai [50] (Figure I-12), Cai et Hayashi [15], Velez et al. [134] [135] [140] représentent la raideur globale d'engrènement d'engrenages à dentures droites par une fonction en créneaux et en trapèze pour les dentures hélicoïdales.

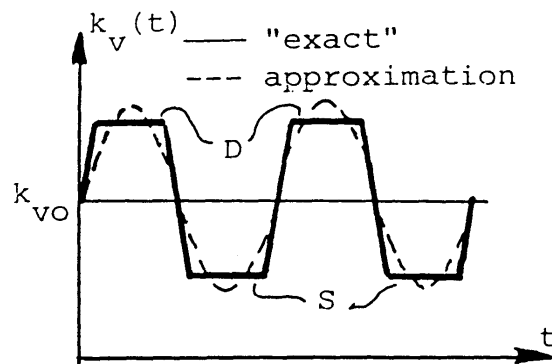


Figure I-11 : Variation de la raideur d'engrènement en fonction du temps
(d'après Küçükay [66]).

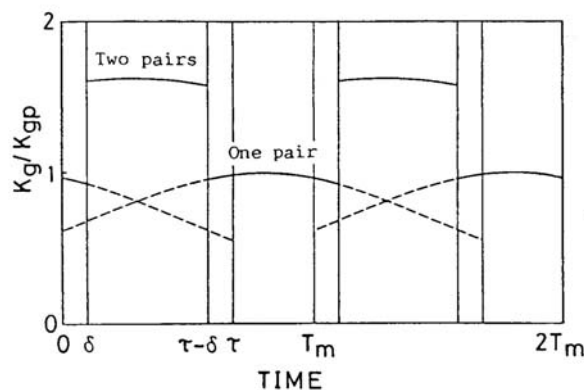


Figure I-12 : Raideur d'engrènement globale en denture droite
(d'après Iwatsubo et al. [50]).

En régime linéaire (pas de perte de contact), la raideur d'engrènement est directement reliée à la longueur de contact instantanée et devient une fonction

périodique. La période d'engrènement correspond à l'apparition d'un couple de dents en prise supplémentaire, c'est-à-dire à l'entrée d'une nouvelle ligne de contact dans le plan d'action. Même pour des géométries parfaites, un engrenage est donc générateur de vibrations puisque la rigidité d'engrènement varie au cours du temps et génère par conséquent des excitations paramétriques.

2.2 Ecart géométriques

La fabrication et le montage des engrenages ne sont généralement pas sans défaut et l'approche du problème dynamique par le concept d'engrenages parfait ne peut, dans le meilleur des cas (engrenages de haute précision), qu'approcher le cas réel, Munro [87] [88] et Welbourn [146]. Il est également accepté (Kassaï et col [58], Kohler et al. [63], Remmers [98], ...) que l'excitation par la raideur d'engrènement n'est pas capable, à elle seule, d'expliquer le comportement vibratoire des engrenages et que les écarts géométriques représentent une source excitatrice interne importante du système d'engrenages.

Les principaux écarts géométriques considérés pour les transmissions par engrenages sont [40], [78] :

- les écarts de formes :
 - erreurs de profil,
 - erreurs de distorsion,
 - erreurs de division.
- les défauts de montage :
 - défauts d'alignement ou de parallélisme,
 - excentricités

En ce qui concerne les écarts de formes sur les dentures, ils proviennent essentiellement du processus de fabrication. On note qu'ils se divisent en trois types : erreurs de profil, erreurs de distorsion et erreurs de division. Les erreurs de profil (écart entre le profil réel et théorique (Figure I-13-a)) et de distorsion (écart entre la trace de l'hélice réelle et idéale (Figure I-13-b)) sont généralement consécutives à des défauts de taillage et/ou de rectification.

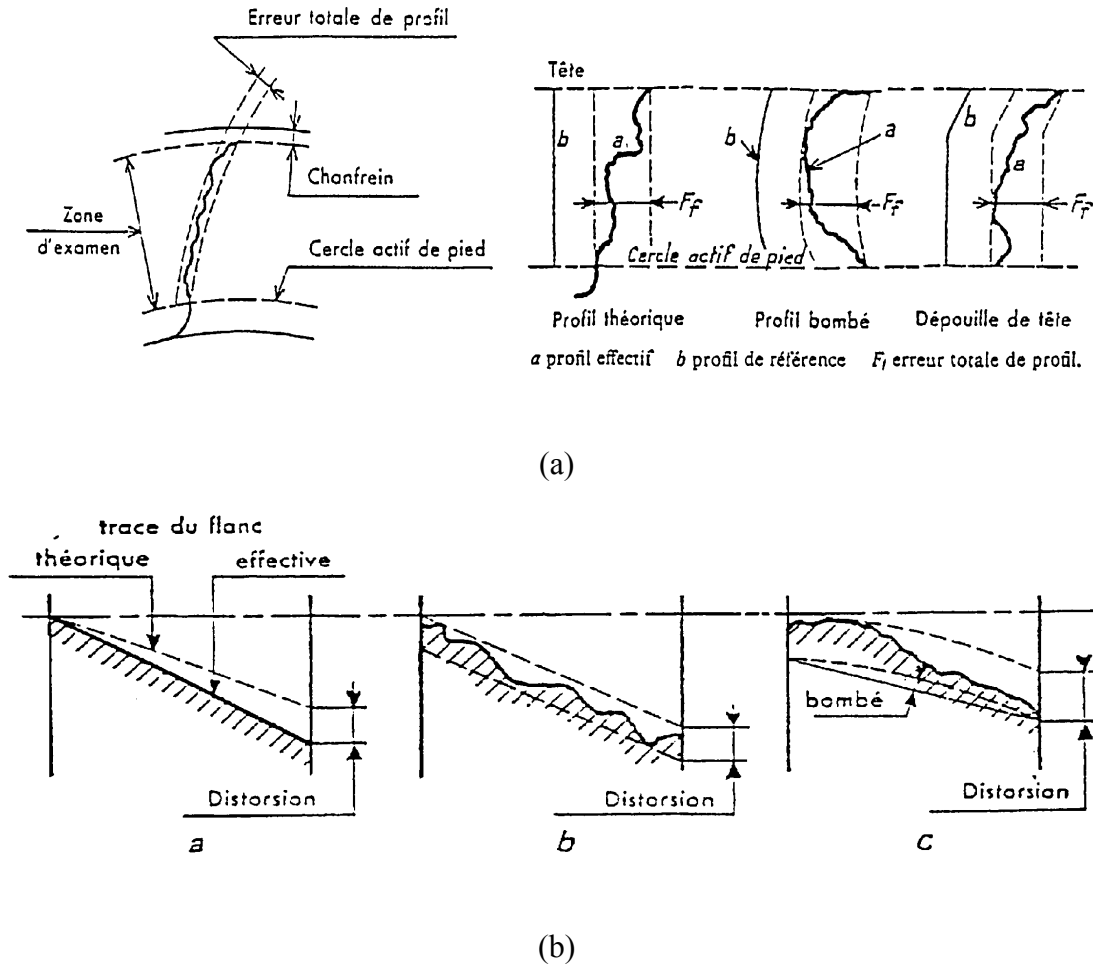


Figure I-13 : Erreurs de profil (a) et de distorsion (b) (d'après Henriot [40]).

Les écarts de forme peuvent également provenir de modifications volontaires de géométrie. Il s'agit alors de corrections de forme dont le but est d'améliorer les conditions de chargement sur les flancs de denture et éventuellement le comportement vibratoire de la transmission. On distingue habituellement :

- les corrections de profils (dépouille de tête, de pied) : (Figure I-13-a),
- les corrections longitudinales selon l'hélice (bombé, correction linéaire, etc...) : (Figure I-13-b).

L'erreur individuelle de pas ou erreur de division est définie comme l'écart entre la valeur réelle du pas considéré (pas circulaire, apparent ou réel, pas de base réel) et sa valeur théorique (Figure I-14). On donne généralement pour chaque classe d'engrenage l'erreur totale de division admissible.

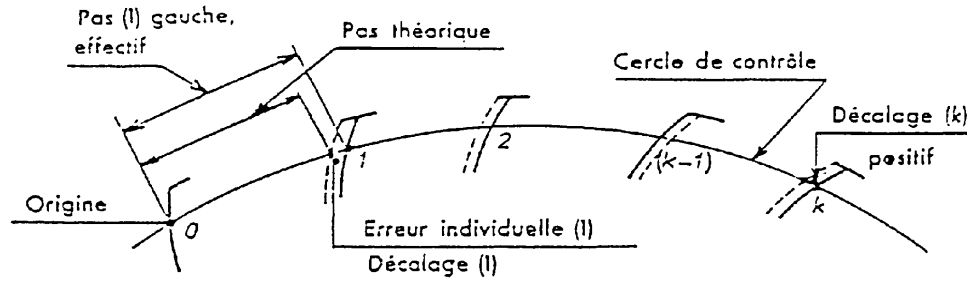


Figure I-14 : Erreurs de division (d'après Henriot [40]).

Les écarts de montage sont liés à l'assemblage des divers composants du réducteur. Ils regroupent essentiellement les deux types de défauts suivants :

- le défaut d'alignement caractérisant le non parallélisme des axes supportant les engrenages. Il peut être défini par deux angles : l'angle d'inclinaison θ_i , qui correspond à un écart angulaire dans le plan des deux axes de rotation des engrenages et l'angle de déviation θ_d dans le plan normal au précédent et parallèle aux axes (Figure I-15).
- le défaut d'excentricité représentant l'écart théorique entre l'axe de rotation et l'axe principal d'inertie polaire de l'engrenage.

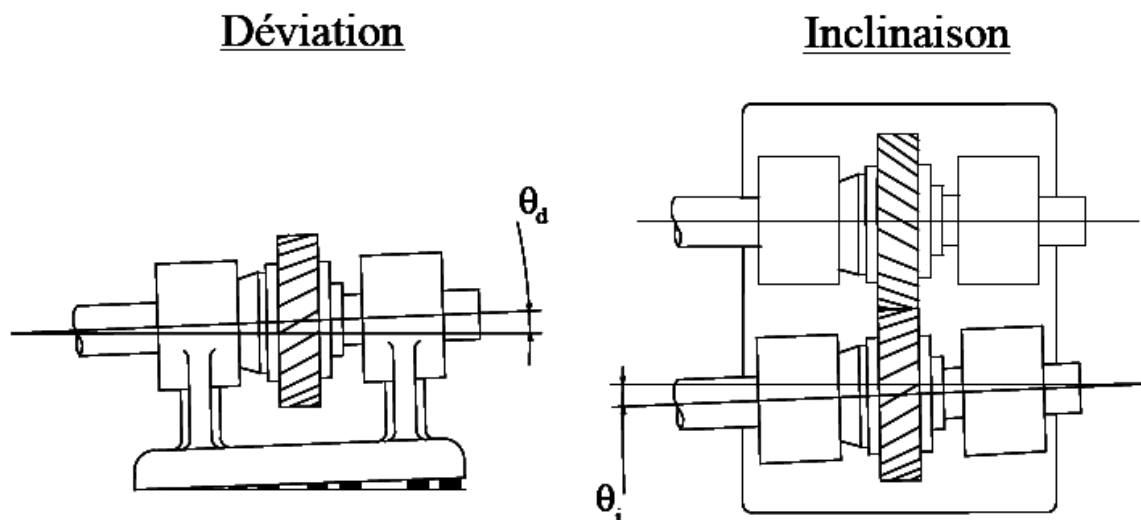


Figure I-15 : Définition des angles de déviation et d'inclinaison (d'après Umezawa[132]).

2.3 Erreur de transmission

La notion d'erreur de transmission, introduite pour la première fois par Harris [39], est définie comme l'écart de position de la roue menée, pour une position donnée du pignon par rapport à la position qu'elle devrait occuper si les engrenages étaient rigides et géométriquement parfaits (Figure I-16).

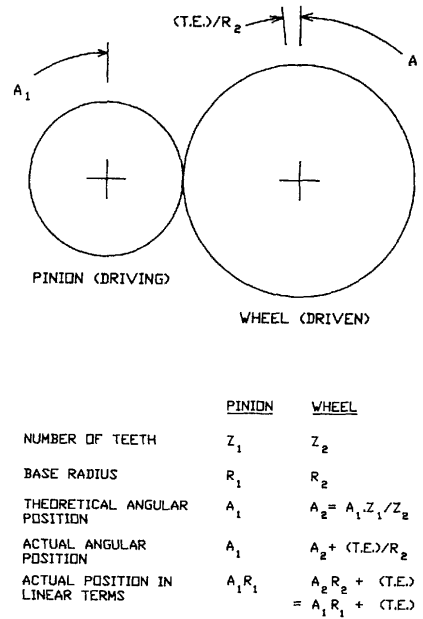


Figure I-16 : Définition de l'erreur de transmission (d'après Munro [88]).

Par commodité, Welbourn [146], Mark [82] à [84] et Ozgüven [94] rapportent l'erreur de transmission sous forme d'un déplacement relatif dans le plan d'action théorique (Eq. 1-2), telle que :

$$\xi = R_b \cdot \delta\theta \quad (\text{Eq. 1-2})$$

où :

R_b : rayon de base de la roue

$\delta\theta$: variation de la position angulaire de la roue

On distingue habituellement:

- l'erreur de transmission quasi-statique sans charge (ou erreur cinématique).
- l'erreur de transmission quasi-statique et dynamique sous charge selon les vitesses de rotation considérées.

D'un point de vue expérimental, l'erreur de transmission peut être déterminée par des systèmes à base d'accéléromètres (Blankenship et Kahraman [12]), par des codeurs optiques à haute résolution (Rémond [99]) ou par le système interférométrique initialement développé par Munro [88] et étendu par Rosinski et al. [104] (Figure I-17).

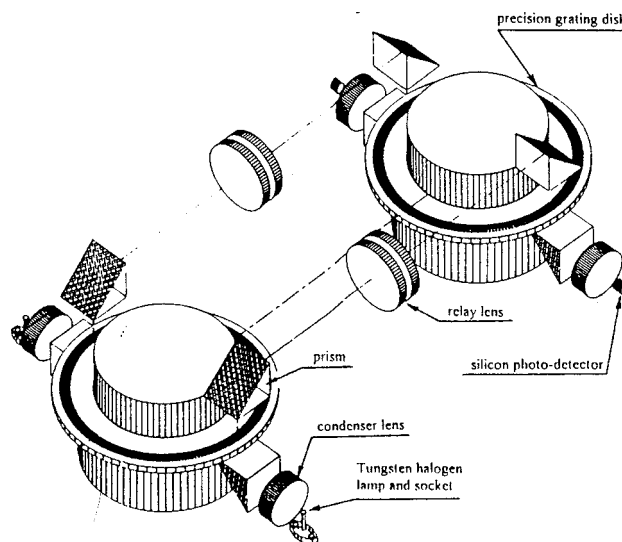


Figure I-17 : Système optique de mesure (d'après Rosinski et al. [104]).

2.3.1 Erreur cinématique

Lorsque la charge transmise est nulle, les déformations sont négligeables. L'erreur de transmission correspond alors aux déviations de position causées uniquement par des écarts de géométrie ou de montage. Cette erreur cinématique relève de la métrologie des engrenages (Drago [26] (Figure I-18), Rémond et al. [100]) et permet de caractériser des défauts globaux tels que les excentricités, les faux ronds ou les erreurs de pas, mais aussi des défauts locaux tels que les modifications ou erreur de profil ou d'hélice. L'erreur cinématique constitue donc un bon indicateur de la géométrie et de la métrologie d'un engrenage.

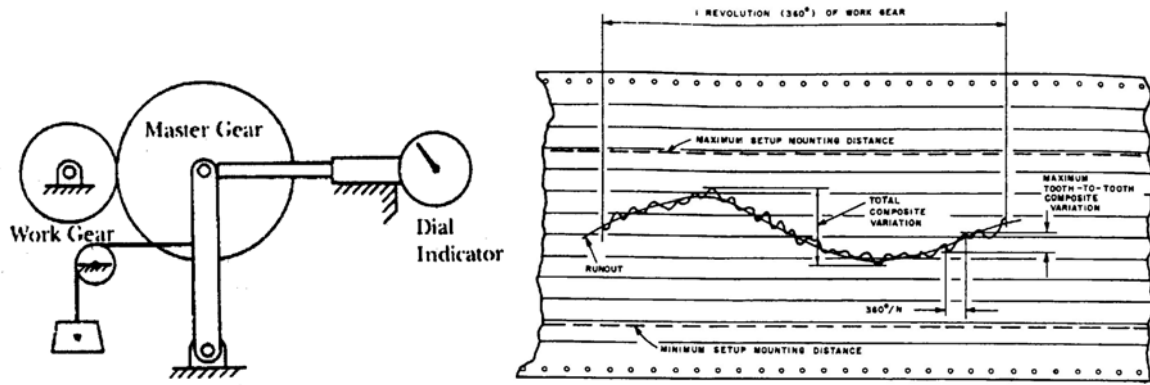


Figure I-18 : *Erreur de transmission quasi-statique sans charge (d'après Drago [26]).*

2.3.2 Erreur de transmission sous charge

La littérature distingue deux sortes d'erreurs de transmission sous charge :

- l'erreur quasi-statique sous charge, qui caractérise le comportement d'un engrenage à des vitesses de rotation suffisamment faibles pour que les effets d'inertie puissent être négligés; ce paramètre est fréquemment considéré comme une donnée du problème dynamique.
- l'erreur dynamique qui correspond au fonctionnement sous charge à des vitesses de rotation plus élevées.

2.3.2.1 Erreur de transmission quasi-statique

Les travaux de Tavakoli et Houser [118], ainsi que Lin et al. [74] montrent que, dans le cas d'engrenages géométriquement parfaits, la courbe de l'erreur de transmission quasi-statique sous charge présente une forme périodique, inverse de celle de la raideur globale d'engrènement (Figure I-19). En effet, la différence par rapport à l'erreur cinématique réside dans la prise en compte des déformations des dentures en contact qui contribuent, en plus des écarts de géométrie, aux variations de positions relatives des deux roues de l'engrenage.

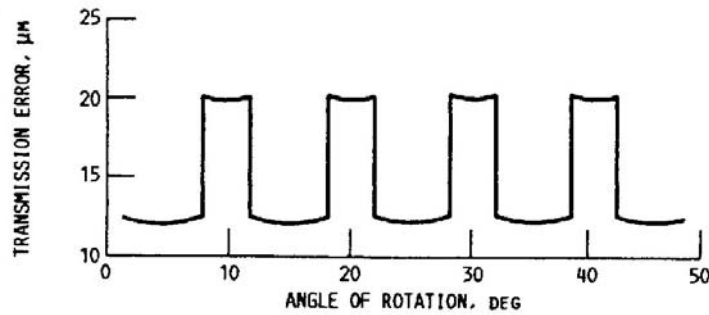


Figure I-19 : Erreur de transmission quasi-statique sous charge d'engrenage droit sans écart de géométrie (d'après Lin et al. [74]).

L'erreur de transmission quasi-statique sous charge est un paramètre très couramment rencontré dans la littérature et, suivant l'objectif de l'étude, son utilisation peut être de deux natures différentes. Le premier type d'utilisation consiste à caractériser le comportement dynamique d'un engrenage et/ou l'influence des écarts de géométrie, par le biais des fluctuations de l'erreur de transmission quasi-statique sous charge. Gregory et al. [31] [32], Lin et al. [73] [74], Tavakoli et Houser [118]... ont ainsi étudié l'influence de modifications des profils de dentures (corrections linéaires et paraboliques) en montrant que les corrections de profil permettent de compenser les déflexions des dentures, d'éviter les chocs à l'engagement et de réduire le niveau vibratoire général. Le second type d'analyse consiste à considérer l'erreur de transmission quasi-statique sous charge comme source d'excitation potentielle du système mécanique, et à l'introduire comme terme d'excitation forcée dans le second membre des équations du mouvement. En effet, de nombreux auteurs Kohler et al. [63], Ozguven et Houser [94], Mark [82] [83], Munro [87], Pearce et al. [96] et Remmers [98], considèrent l'erreur de transmission comme la source d'excitation principale dans un engrenage. Par cette technique, Takatsu [116], Küçükay [66], Kahraman et al. [51] [52] [54] [56] prennent en compte la variation temporelle de la raideur d'engrènement, tout en conservant un système d'équations différentielles du second degré linéaire à coefficients constants dont la solution peut être obtenue analytiquement.

2.3.2.2 Erreur de transmission dynamique

L'erreur de transmission dynamique constitue le résultat du problème dynamique et sert généralement à caractériser le comportement vibratoire (et acoustique) d'un réducteur à

engrenage. Gregory et al. [31] [32], Munro [89] ont mesuré à l'aide d'un système optique l'évolution de son amplitude crête à crête à différents niveaux de chargement. Les auteurs ont ainsi mis en évidence des phénomènes de séparations de dentures à faibles charges aux abords de vitesses potentiellement critiques pour les dentures (Figure I-20). Kharaman et Singh [55] [56] ont validé leurs modèles non-linéaires à partir de ces résultats expérimentaux.

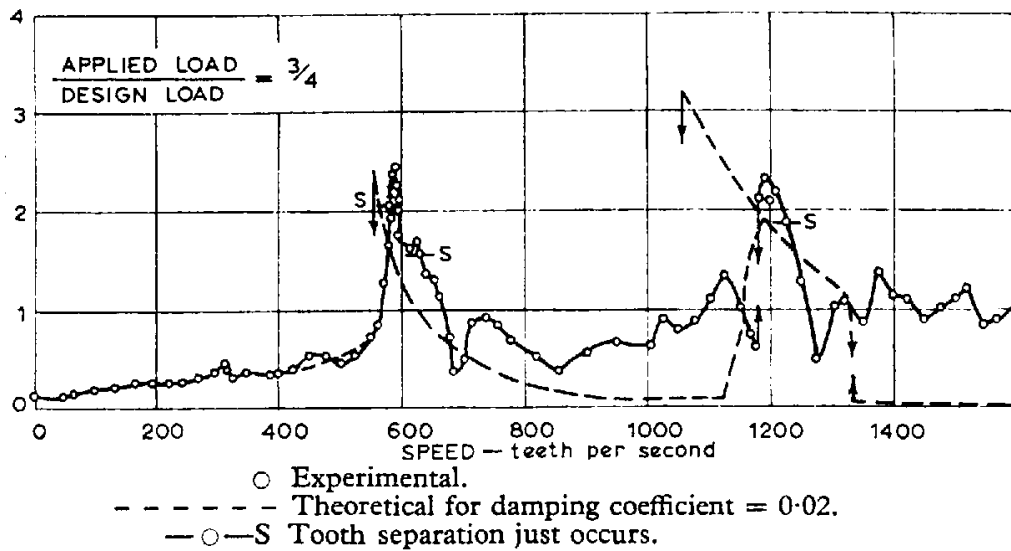


Figure I-20 : Courbes de réponse expérimentales de Gregory et al. [31].

Par ailleurs, Velez et al. [134] à [141] puis Maatar et al. [78] à [81] ont proposé une méthodologie originale basée sur la description locale des conditions de contact entre dentures, pour laquelle l'erreur de transmission n'est plus une variable d'entrée mais un des résultats de la simulation dynamique.

Pour conclure, il est généralement admis que l'erreur de transmission donne une image intéressante du comportement dynamique et acoustique d'un engrenage. Cependant les mesures d'erreurs de transmission dans les conditions réelles de fonctionnement sont souvent délicates compte tenu des limites mécaniques et électroniques imposées par les divers composants du système de mesure même si elles peuvent s'insérer dans un contexte industriel. Le concept d'erreur de transmission masque toutefois un certain nombre de caractéristiques propres à l'engrènement mais aussi propre à l'environnement mécanique des roues dentées; en particulier, les flexibilités des arbres, paliers et carters qui peuvent contrôler assez largement les conditions d'engrènement et modifier ainsi les caractéristiques de l'engrènement déterminées en isolant les roues d'engrenages du reste du mécanisme.

3 Dynamique des transmissions par engrenage

3.1 Introduction

En s'appuyant sur les approches traditionnelles de type masses-ressorts (Tuplin [120] à [122], Zeman [148], Strauch [115],...), les mouvements instantanés de chaque mobile ne peuvent être décrits que par 6 paramètres au maximum (3 translations et 3 rotations). Les angles associés à la torsion des axes sont généralement les paramètres privilégiés et les modèles de base associés sont des modélisations en torsion proches de celle présentée Figure I-21. Toutefois, la liaison par contact entre roues dentées lie l'ensemble des degrés de liberté et introduit en particulier des couplages entre les vibrations de flexion et de torsion des arbres. Seireg [109], Hamad et Seireg [37] [38], se sont intéressés au phénomène de frottement arbre dans palier dans un système arbres-engrenages-paliers hydrodynamiques, et ont mis en évidence l'influence de ces couplages flexion-torsion. Mitchell et Mellen [85] ont conforté cette position et souligné les carences de modèles négligeant les mouvements de flexion, les travaux expérimentaux de Hagiwara et al. [36] ont également confirmé ces tendances.

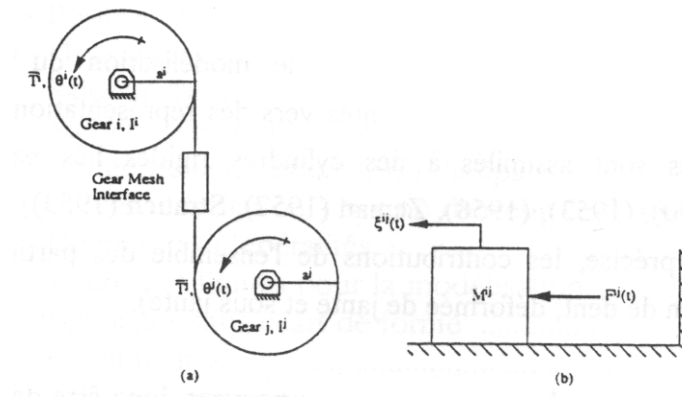


Figure I-21 : *Modèle torsionnel de base.*

D'un point de vue théorique, la représentation de type paramètres concentrés n'est représentative que des premiers modes d'un système, et ne tient compte des contributions des corps d'engrenages que d'une manière approximative. Ce type d'approche n'a toutefois jamais été réellement mis en cause pour les géométries conventionnelles et a été largement confirmé par l'expérimentation avec en particulier, Gregory et al. [32], Retig [102], Kubo

[65], Kucukay [66], Umezawa et al. [131] pour des trains à axes fixes simple étage, Cunliffe [20] [21], Hidaka et al. [44], pour les trains planétaires.

Parmi les limites des modèles à paramètres concentrés évoqués ci-dessus, le cas particulier des dentures larges est à considérer. Pour ces architectures particulières, il n'est en effet plus possible de représenter la torsion d'une roue par un seul angle puisqu'il y a variation de l'angle de torsion selon la largeur de denture ce qui, en pratique, peut imposer des corrections d'hélice afin de rétablir des portées uniformes. Dans ce contexte, Ajmi [3] à [5] a proposé un modèle à paramètres distribués où les corps du pignon et de la roue sont modélisés par des poutres.

Concernant les applications aéronautiques et d'une manière générale les structures allégées avec, en particulier, des roues à voiles minces, une certaine prudence s'impose quant à l'emploi aveugle des modélisations évoquées plus haut. Drago et al. [27], Stockton [114], ont étudié les modes propres des corps d'engrenages grâce aux techniques numériques et expérimentales développées pour l'étude des disques d'aubes (structures périodiques, visualisation des modes par holographie, ...). Dans le même esprit, Belhanèche et Conte [10], ont appliqué l'interférométrie holographique en temps moyenné sur deux engrenages chargés à l'arrêt excités par un pot vibrant, les mobiles étant monoblocs mais de faibles largeurs (module 3.175 mm, 60 dents, largeur 6.25 mm). Les résultats indiquent la possibilité de rencontrer des modes liés au corps même de l'engrenage pour des fréquences d'excitation susceptibles d'être atteintes par l'engrènement, (de l'ordre de 2 KHz). Ceci implique la nécessité d'une modélisation assez précise des corps d'engrenage, surtout dans le cas des engrenages flexibles.

3.2 Influence de sous-ensembles flexibles

Dans les domaines d'activités où les impératifs de masse peuvent être primordiaux (aéronautique, construction navale,...), il est essentiel de gagner du poids sur chaque composante de la transmission et de recourir à des structures amincies et donc éminemment déformables telles que les couronnes de trains planétaires, les roues à voiles minces ou ajourées. Dans ce contexte, les modèles classiques de la littérature modélisant les élasticités par des raideurs concentrées entre corps rigides doivent être manipulés avec précautions.

Récemment, certains auteurs ont proposés des modèles intégrant des composants flexibles que ce soit pour un réducteur à engrenages extérieurs ou bien pour les trains planétaires.

3.2.1 Réducteur à engrenages extérieurs

La structure flexible présente dans ce type de réducteur à engrenages extérieurs est généralement une roue à voile mince c'est-à-dire les dentures reposent sur une jante fine raccordée à un voile situé ou non dans le plan médian et qui assure la transition entre la zone de portée des dentures et celle de fixation de l'engrenage sur l'axe (voir Figure I-22).

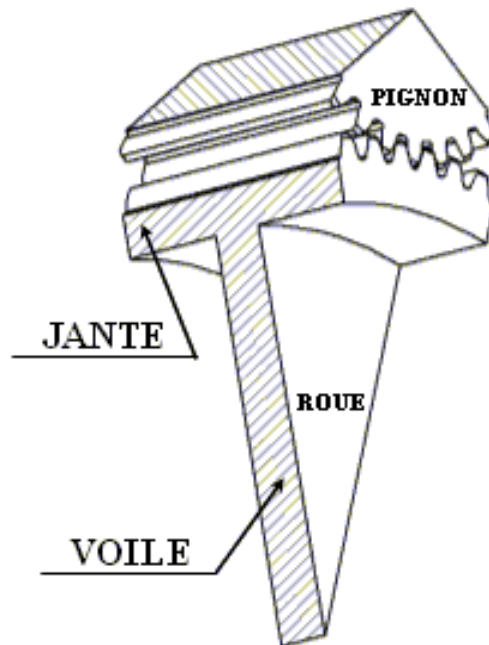


Figure I-22 : *Géométrie d'une roue à voile mince.*

Les déformations importantes d'une jante fine peuvent se répercuter sur la distribution des contraintes en creux de dents et un tel engrenage va être soumis à des contraintes non uniformes suivant la largeur de denture car la rigidité du corps sera plus importante au centre que sur les extrémités. Au niveau des contraintes en pied de dent, l'influence de la jante et du voile mince sur des engrenages extérieurs a été analysée à partir de modèles bidimensionnels, Gulliot [33], Miyashika [86], Lewicki [69]. D'autres auteurs proposent des modèles reposant sur des éléments finis tridimensionnels, Balzakis et Houser [9], Kim [62], Sayama [107], Li [70] à [72], Graziano [30], Tessema

[119], Oda [90] [91].... Balzakis et Houser [9] présentent des résultats concernant le comportement des champs de contraintes en creux de dents et la propagation des fissures associée à la fatigue (Figure I-23).

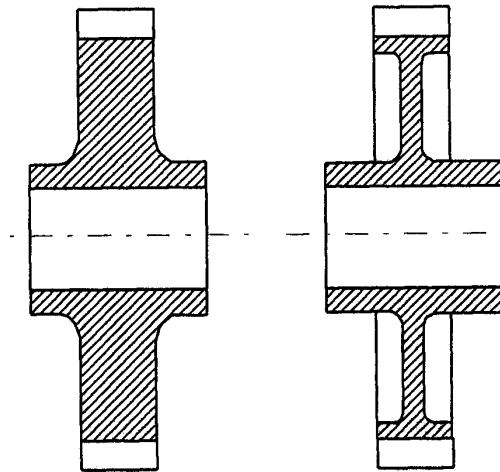


Figure I-23 : Denture extérieure avec et sans voile [9].

Cette étude est basée sur des calculs éléments finis et des mesures expérimentales (jauge de déformation) et montre que les contraintes de traction sont maximales au niveau du voile. La répartition du chargement sur le flanc des dents en contact peut être également modifiée par la présence d'un voile, Parabhu [95], par exemple, montre que les pressions de contact sont plus élevées vers le centre de la denture au droit du voile (Figure I-24).

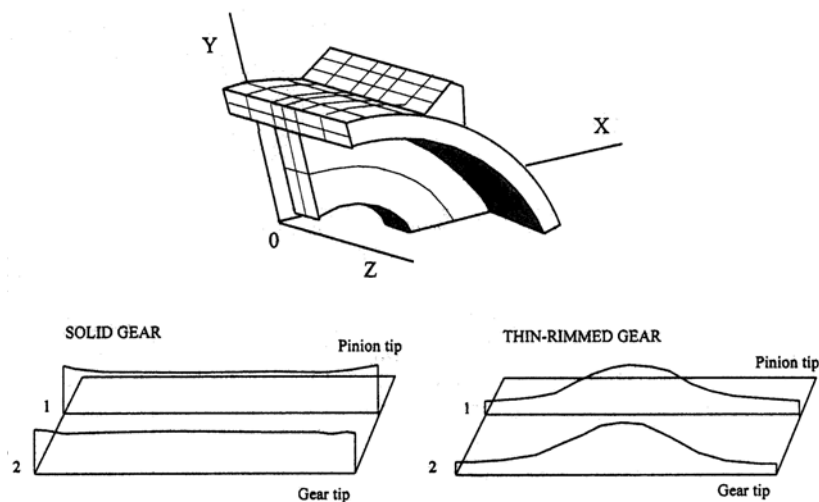


Figure I-24 : Répartition de la pression de contact sur deux flancs actifs [95].

A l'aide de la méthode des prismes finis (Cheung [17] et Olakorede [92]), Kim [62] ont étudié la répartition des pressions instantanée de contact pour des engrenages extérieurs à jante fine avec un voile et sont parvenus aux mêmes conclusions. Ces tendances ont été vérifiées par Oda [90] [91] qui a mesuré les contraintes en fond de dent à l'aide de jauges implantées suivant la largeur de denture, soit au creux de dent (3, 4, 5), soit au raccordement du profil en développante (1, 2) (Figure I-25). Les résultats montrent que le niveau de contrainte est plus grand vers le centre de la denture, c'est-à-dire au voisinage du voile, et que les contraintes sur les bords augmentent lorsque l'épaisseur de jante diminue.

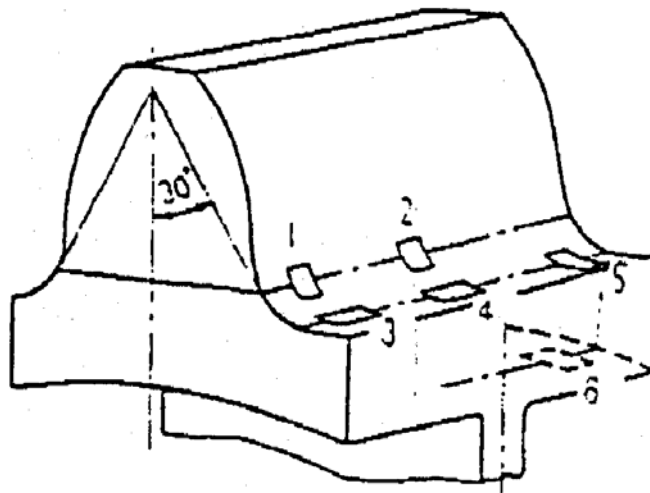


Figure I-25 : Positions de jauges (Oda [91]).

Kirshnamurthy [64] a mis en évidence que l'effet du voile combiné à celui de la jante modifie la répartition de charge sur les dents. Sur la Figure I-26, l'aire de contact qui correspond à la zone de portée durant l'engrènement, varie en fonction des charges F_n appliquées et aussi en fonction de l'épaisseur de voile.

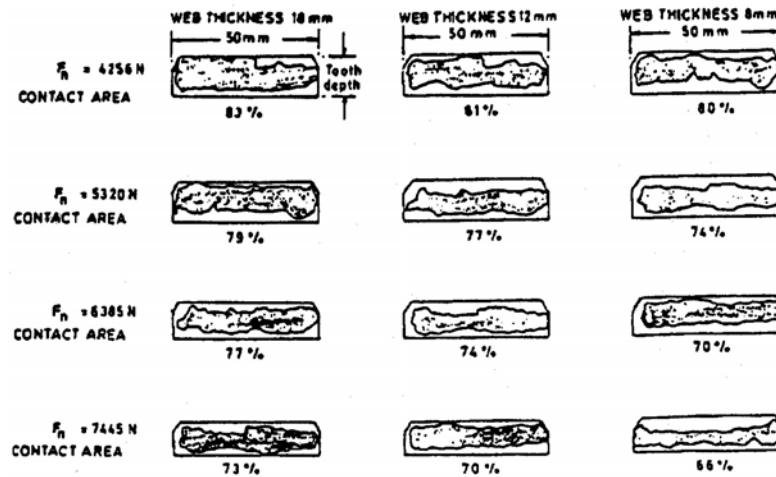


Figure I-26 : Zone de contact en fonction de l'épaisseur du voile (Kirshnamurthy [64]).

Li [70] à [72] a proposé un modèle combinant une solution analytique pour le problème de contact et un maillage éléments finis tridimensionnels (3DFEM) appliqué à un engrenage ayant un voile mince non centré (décalé du plan médian) (Figure I-27). L'auteur montre que la présence du voile et de la jante modifie le déplacement radial le long de la largeur de la denture, la répartition de charge statique sur les dents, l'erreur de transmission et les contraintes au pied du dent par rapport à un cas d'engrenage massif.

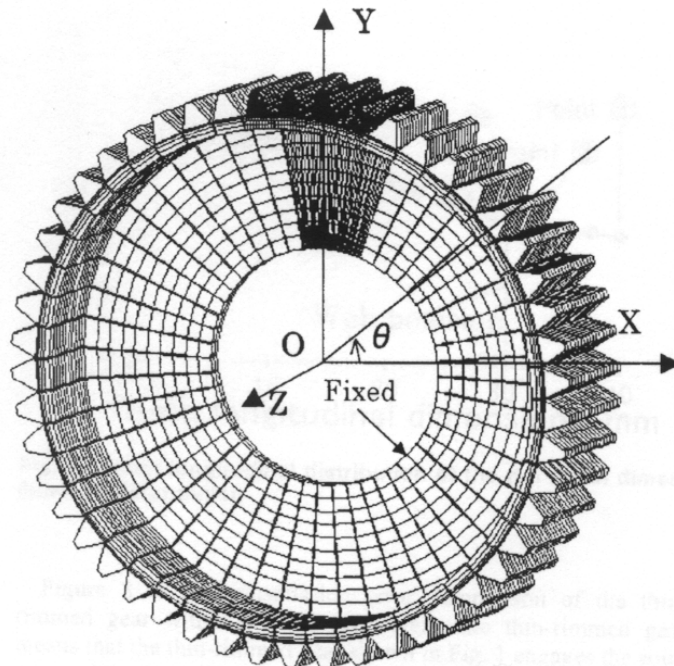


Figure I-27 : modèle éléments finis d'une roue à voile mince [70].

3.2.2 Train planétaire

Dans ce type de réducteur, la présence de composants flexibles a rapidement incité à introduire des modélisations éléments finis pour simuler ces flexibilités (Stockton [114], Chiang et Badgley [18], Antony [6], Tanna et Lim [117]). Par exemple, Antony [6] a, dans un premier temps, déterminé la raideur du châssis porte-satellites au moyen d'un maillage éléments finis tridimensionnel (Figure I-28) puis à injecter des raideurs réduites dans un modèle à paramètres concentrés.

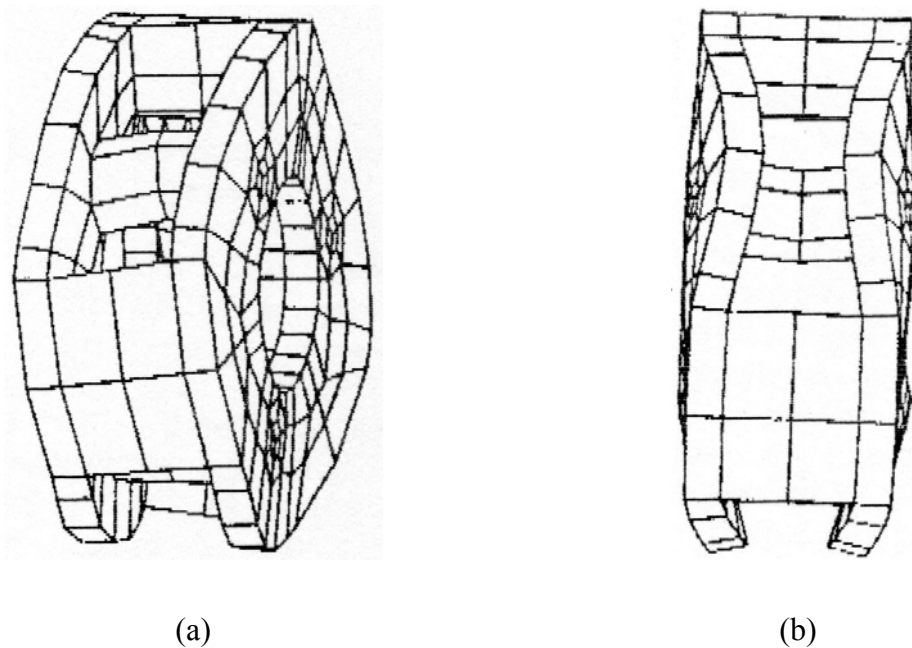


Figure I-28 : *Déformée du châssis sous un chargement tangentiel (a) et radial (b)*
(d'après Antony [6]).

Les approches décrites ci-dessus tendent généralement à découpler les résolutions des problèmes de contact entre dentures et de déformées de structure des composants les plus flexibles. Depuis peu, des modèles couplant l'analyse des conditions de contact instantanées à une description fine de l'environnement mécanique du réducteur ont été introduits mais ils demeurent, pour l'heure, limités à des approches bidimensionnelles. Une modélisation bidimensionnelle semi-analytique / éléments finis (Figure I-29-a) combinant une analyse des conditions de contact et une discrétisation de la structure du réducteur a été proposée par Vijayakar [142] et appliquée au cas des réducteurs planétaires par Kahraman et al. [53] [57], afin d'étudier l'influence de l'épaisseur de la couronne sur le comportement quasi-statique de ce type des réducteurs. Les auteurs

montrent qu'une couronne flexible améliore la répartition de charges entre satellites en présence d'un défaut de positionnement tangentiel d'un satellite (Figure I-29-b). Ils suggèrent également qu'une plus grande souplesse de couronne serait à même de réduire les excitations provenant d'erreurs de fabrication et de montage.

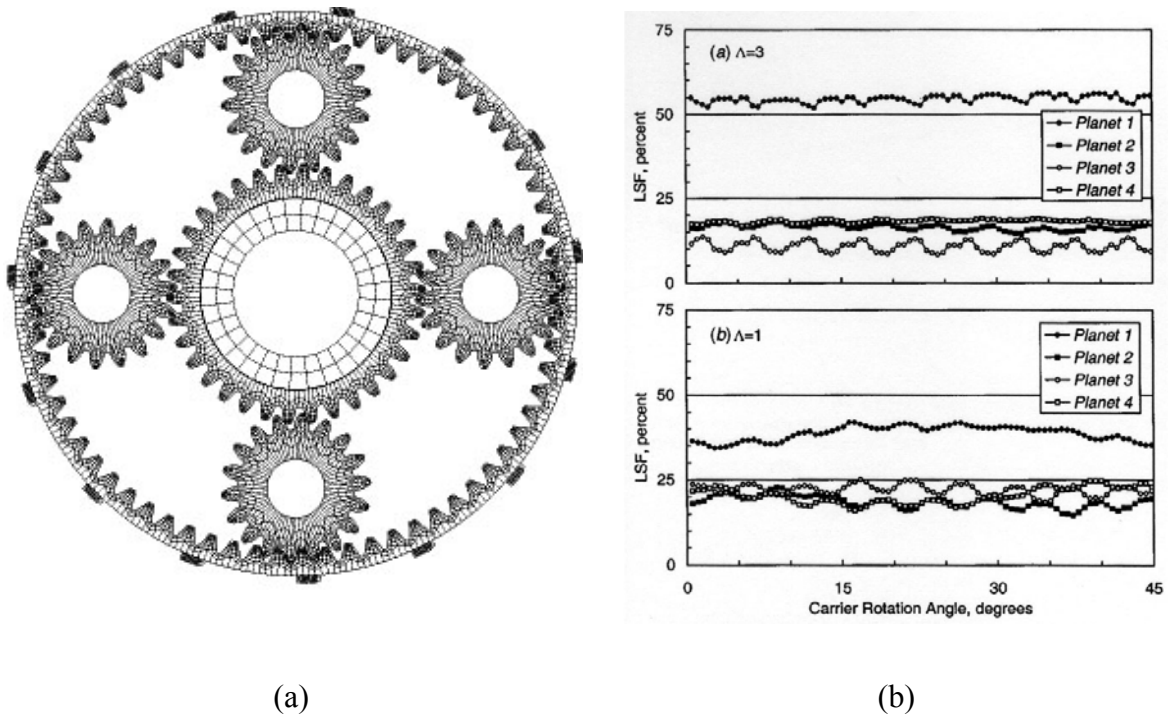


Figure I-29 : *Modèle de train planétaire (a) et facteur de répartition de charges entre satellites pour deux épaisseurs de couronne (b) (d'après Kahraman et al. [57]).*

Kahraman et al. [53] ont étendu l'approche précédente aux conditions dynamiques et ont mis en évidence que le passage d'une couronne rigide à une couronne flexible modifie notablement les courbes de réponse (Figure I-30). Cette approche qui semble prometteuse reste cependant limitée par des temps de calculs très importants.

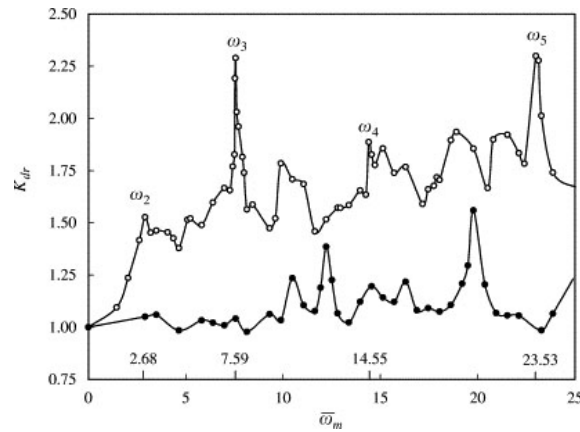


Figure I-30 : Courbes de réponse dynamique pour des couronnes flexible et rigide (d'après Kahraman et al. [53]).

Hidaka et al. [41] à [46], ont également étudié l'influence d'une couronne déformable sur le comportement dynamique de trains planétaires. Les auteurs ont déterminé la déflexion de la couronne dans la direction de la ligne d'action en utilisant un modèle éléments finis bidimensionnel [46] et ont souligné son rôle significatif dans le chargement local des dentures et la répartition des efforts entre satellites [43]. Les déformations de couronne peuvent rapprocher de façon non négligeable les dents et provoquer ainsi des contacts entre dents hors du plan d'action théorique. Les conséquences peuvent être alors une augmentation du rapport de conduite réel (Figure I-31) et des risques d'interférences et de chocs.

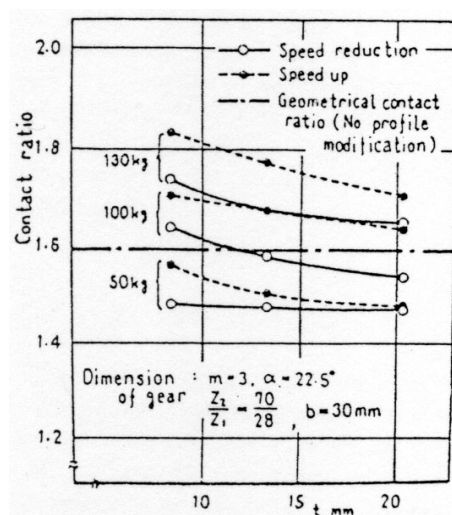


Figure I-31 : Variation du rapport de conduite en fonction de l'épaisseur de la couronne (d'après Hidaka [46]).

De Vaujany et al. [22] à [24] ont étudié le comportement quasi-statique d'engrenages cylindriques intérieurs avec voile (pression de contact, erreur de transmission, contraintes en creux de dents...) en utilisant la méthode des prismes finis. Une analyse paramétrique en fonction de la position du voile a été menée [22] et montre que des pics de pression sur le flanc des dents sont situés au niveau de la position du voile (Figure I-32).

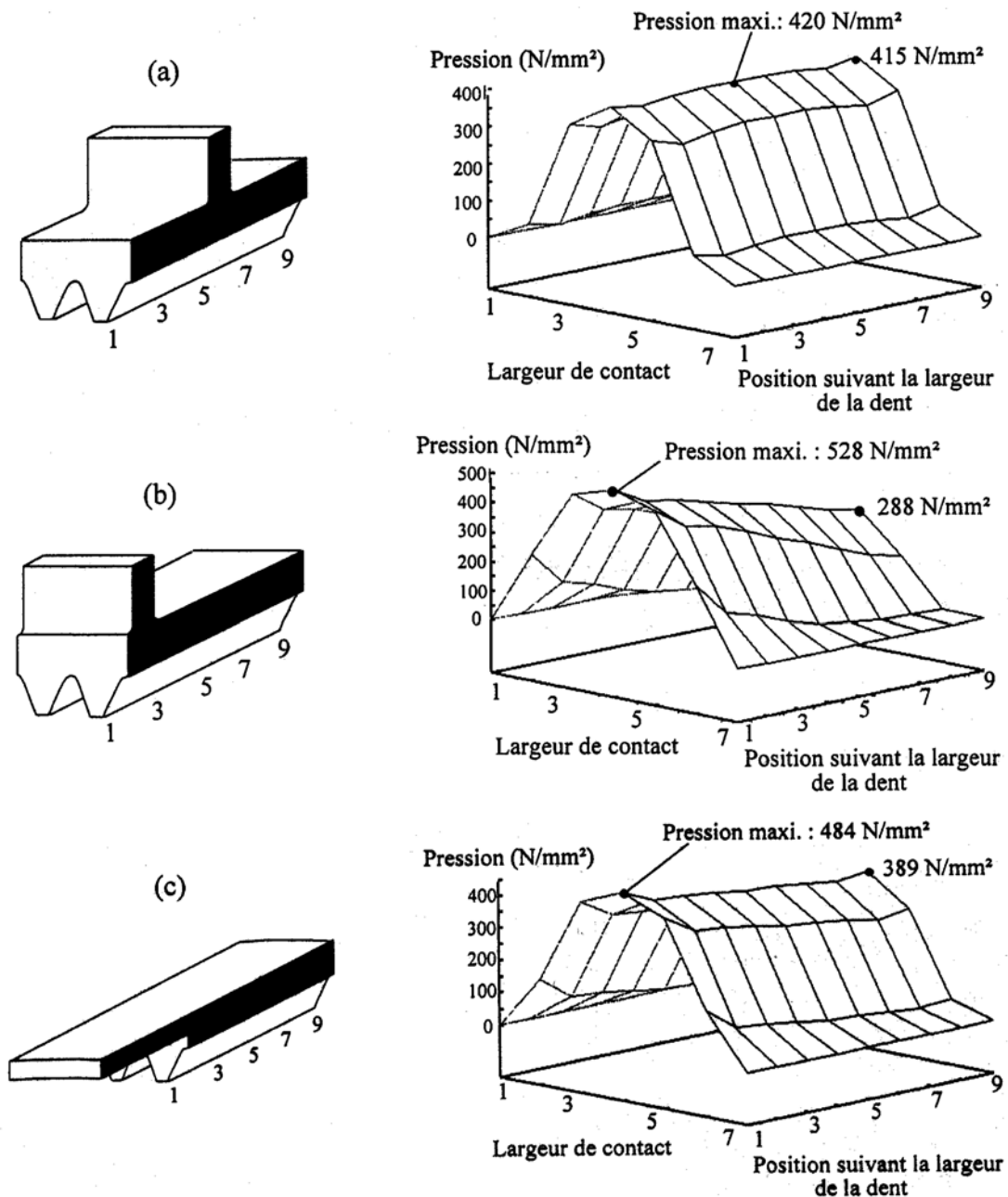


Figure I-32 : Répartition de la pression de contact pour trois types de voile
(d'après De Vaujany [22]).

Abousleiman [1] Abousleiman et Velez [2] ont introduit un modèle hybride original destiné à simuler les comportements statique et dynamique de trains planétaires et épicycloïdaux comportant des parties particulièrement déformables. Le modèle développé combine des représentations de type paramètres concentrés (solaire, satellites) et des modèles éléments finis tridimensionnels pour les composants les plus flexibles (couronne, châssis porte-satellites). Ces sous-structures sont condensées par une méthode modale pour la couronne et une méthode de modes contraints pour le châssis porte-satellites. La contribution des liaisons par engrenage est prise en compte via des éléments d'engrenages avec rigidités d'engrènement dépendantes du temps et éventuellement non-linéaires. Les résultats montrent une influence certaine de la flexibilité de la couronne et du châssis sur le comportement statique (déformée statique (Figure I-33), distribution de charge) et dynamique (vitesses critiques) des réducteurs.

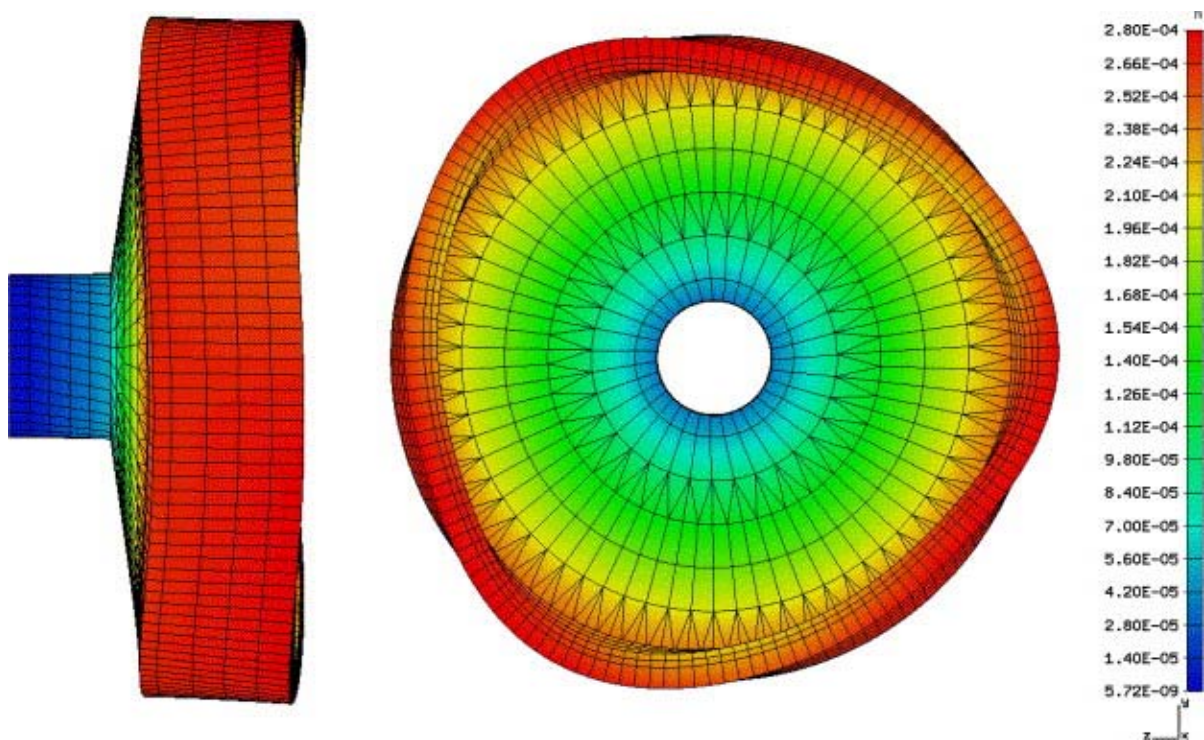


Figure I-33 : *Déformée statique de l'arbre de sortie lié à la couronne*
(d'après Abousleiman [2]).

4 Conclusion

Au terme de cette synthèse bibliographique, nous pouvons dégager quelques grandes tendances quant à la modélisation du comportement dynamique et vibratoire des réducteurs d'engrenages.

Tout d'abord, les principales sources d'excitations d'un engrenage sont identifiées et comprennent les fluctuations de raideur d'engrènement, les erreurs géométriques et de montage qui, parfois, sont regroupées sous le concept d'erreurs de transmission. D'autre part, la littérature montre que la modélisation du comportement dynamique d'un engrenage repose essentiellement sur la représentation des propriétés de déformations élastiques (locales et globales) des engrenages au cours de mouvement. Autrement dit, c'est la modélisation de la rigidité à l'engrènement qui constitue le principal critère de classification des différents modèles proposés dans la littérature.

En effet, la grande majorité des contributions s'appuie sur des modèles masses-ressorts à paramètres concentrés (Valex [134], Maatar [78]) ou sur quelques modèles à paramètres distribués adaptés à des engrenages massifs et de fortes largeurs [5]. Il existe donc un besoin d'intégration à la fois de l'élasticité des composants et de descriptions précises des excitations (raideurs d'engrènement variables, écarts de forme, défauts de montage) dans un même modèle traitant les aspects statiques et dynamiques d'un réducteur d'engrenages.

La présence de composants flexibles dans certains mécanismes (réducteurs à engrenages extérieurs, trains planétaire, ...) a poussé à l'introduction de modélisations éléments finis. On peut distinguer a) des modèles importants Vijayakar [142], Kahraman et al. [50] [57] possédant un nombre impressionnant de degrés de liberté mais limités pour l'heure à des applications en régime quasi-statique et, b) des modèles plus légers, sans doute moins précis sur certains paramètres (les contraintes en particulier), mais qui permettent des simulations en dynamique et des exploitations paramétriques plus aisées, Abousleiman [1] [2]. C'est cette dernière approche que nous avons choisi de privilégier et d'appliquer à des roues à jantes minces.

Chapitre 2 :

Modélisation de l'élément engrenage

Comparaisons entre différents modèles

1 Introduction

Il ressort de l'analyse de la littérature que les modèles de comportement dynamique d'engrenages intégrant l'influence de parties déformables sont relativement rares et parcellaires (Vijayakar. [142], Kahraman et al. [57]). Il existe donc clairement un besoin d'intégration à la fois de l'élasticité des composants et de descriptions précises des excitations (raideurs d'engrènement variables, écarts de forme, défauts de montage) dans un même modèle tridimensionnel du comportement dynamique. Des modèles éléments finis complets, comme celui représenté sur la Figure II-1, sont possibles mais limités pour l'heure à des simulations en fonctionnement quasi-statique.

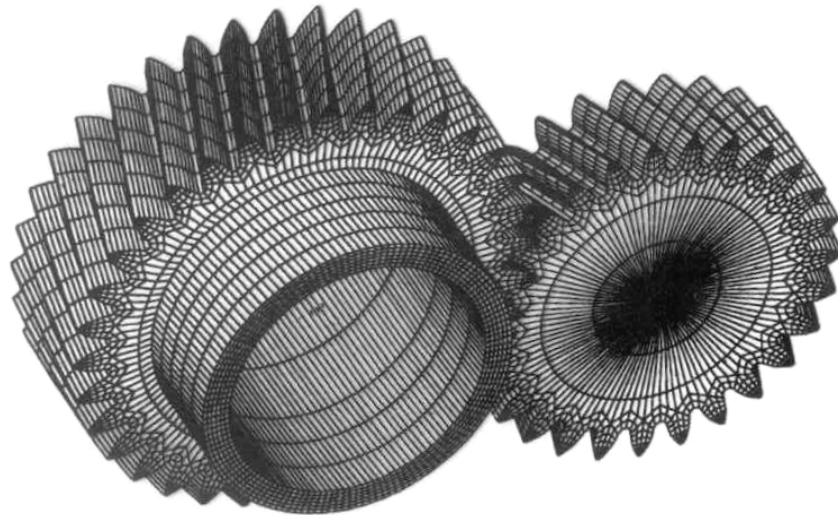


Figure II-1 : *Modèles éléments finis tridimensionnels pignon et d'une roue.*

En effet, les déformations des engrenages mettent en jeu des phénomènes à des échelles très différentes avec, en particulier, des déflexions très localisées au voisinage des contacts qui nécessitent une grande finesse de maillage. A une échelle plus globale, il faut, de plus, souvent intégrer un environnement mécanique complexe comme les paliers, le carter et les arbres. Il faudrait également introduire des écarts de forme sur les dentures et des défauts de montage. Et enfin, le système doit être mis en rotation et l'ensemble des contacts doit être réactualiser à chaque incrément de temps et ceci que ce soit en quasi-statique ou en dynamique.

L'ensemble de ces considérations, nous a incité à nous orienter vers un modèle simplifié par rapport au modèle éléments finis tridimensionnels et qui demeure cependant suffisamment précis sur les élasticités d'un système d'engrenages et permette d'intégrer des géométries de roues déformables relativement complexes.

2 Modélisation de l'élément d'engrenage

2.1 Modélisation du corps du pignon

2.1.1 Introduction

Les modèles du comportement dynamique d'engrenages trouvés dans la littérature sont très majoritairement de type paramètres concentrés (Ozguven et Houser. [93] [94], Velex. [134], Maatar. [78]). Entre autres limitations, ces modélisations ne sont pas adaptées aux engrenages de fortes largeurs puisque les déformations du corps des mobiles en flexion, torsion ne sont pas prises en compte. En s'inspirant des approches utilisées en statique (Sigg. [112]), le modèle le plus simple intégrant les déformées des corps d'engrenages massifs consiste à assimiler le corps du pignon (denture exclue) à une poutre modélisée par un élément à deux nœuds et six degrés de liberté par nœud intégrant les effets de flexion, traction-compression et torsion (Figure II-2). Les degrés de liberté considérés sont respectivement :

- 2 d.d.l. en traction-compression : u_{me} et u_{ms} .
- 8 d.d.l. de flexion : v_{me} et v_{ms} , w_{me} et w_{ms} , ϕ_{me} et ϕ_{ms} , ψ_{me} et ψ_{ms} .
- 2 d.d.l. en torsion : θ_{me} et θ_{ms} .

Les effets secondaires de cisaillement ont été introduits pour traiter au mieux le cas où le diamètre du corps est supérieur à sa largeur.

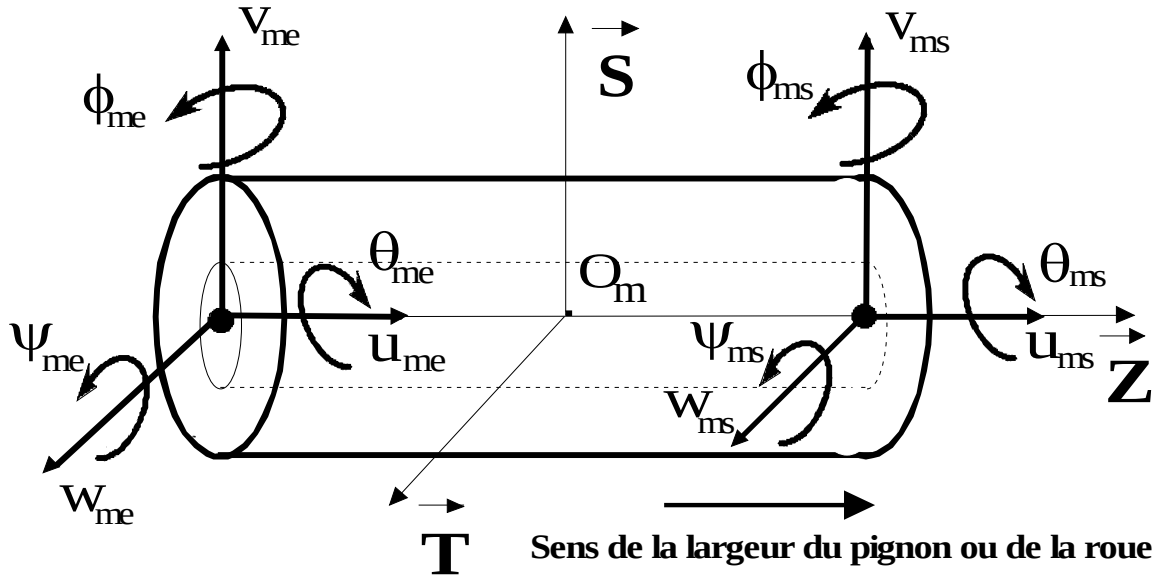


Figure II-2 : Eléments de poutre à deux nœuds et six degrés de liberté par nœud.

En isolant une tranche mince sur le pignon (Figure II-3), les déplacements généralisés de la $j^{\text{ème}}$ tranche infinitésimale qui seront utilisés par la suite pour caractériser les déformations au niveau des dents, s'expriment donc en fonction des degrés de liberté sous la forme :

$$\begin{aligned}
 u_{mj} &= N_{mj}^1 \cdot u_{me} + N_{mj}^2 \cdot u_{ms}, \theta_{mj} = N_{mj}^1 \cdot \theta_{me} + N_{mj}^2 \cdot \theta_{ms}, \\
 v_{mj} &= M_{mj}^1 \cdot v_{me} + M_{mj}^2 \cdot \psi_{me} + M_{mj}^3 \cdot v_{ms} + M_{mj}^4 \cdot \psi_{ms}, \\
 w_{mj} &= M_{mj}^1 \cdot w_{me} - M_{mj}^2 \cdot \phi_{me} + M_{mj}^3 \cdot w_{ms} - M_{mj}^4 \cdot \phi_{ms}, \\
 u_{mj} &= N_{mj}^1 \cdot u_{me} + N_{mj}^2 \cdot u_{ms}, \theta_{mj} = N_{mj}^1 \cdot \theta_{me} + N_{mj}^2 \cdot \theta_{ms}, \\
 \psi_{mj} &= \frac{dv_{mj}}{dz_j} \text{ et } \phi_{mj} = -\frac{dw_{mj}}{dz_j}
 \end{aligned} \tag{Eq.2-1}$$

avec :

z_j : coordonnées selon $\vec{Z}$ de la j -ème tranche élémentaire.

$$\begin{aligned}
 N_{mj}^1 &= \frac{1}{2} - \frac{z_j}{L_m}, N_{mj}^2 = \frac{1}{2} + \frac{z_j}{L_m} \\
 M_{mj}^1 &= \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{z_j}{L_m} + 2 \cdot \frac{z_j^3}{L_m^3}, M_{mj}^2 = \frac{L_m}{8} - \frac{z_j}{4} - \frac{z_j^2}{2L_m} + \frac{z_j^3}{L_m^2} \\
 M_{mj}^3 &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{z_j}{L_m} - 2 \cdot \frac{z_j^3}{L_m^3}, M_{mj}^4 = -\frac{L_m}{8} - \frac{z_j}{4} + \frac{z_j^2}{2L_m} + \frac{z_j^3}{L_m^2}
 \end{aligned} \tag{Eq.2-2}$$

qui sont les fonctions de forme de l'élément de poutre.

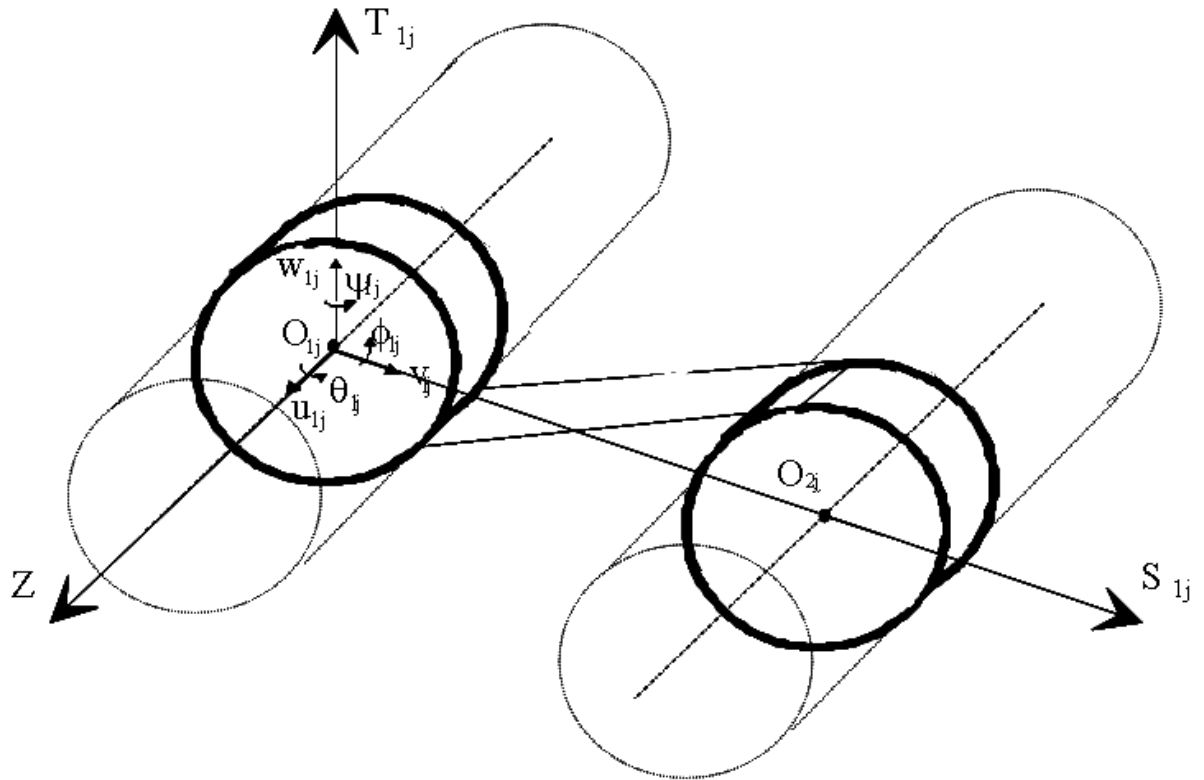


Figure II-3 : Modélisation d'une tranche mince j du pignon et de la roue.

2.1.2 Energie de déformation - Energie cinétique

En isolant une tranche j du corps du pignon, l'énergie de déformation et l'énergie cinétique galiléenne associées s'écrivent :

$$U_{clj} = \frac{1}{2} E_1 S_1 \left(\frac{\partial u_{lj}}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} G_1 J_{01} \left(\frac{\partial \theta_{lj}}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} E_1 J_1 \left[\left(\frac{\partial^2 v_{lj}}{\partial z^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_{lj}}{\partial z^2} \right)^2 \right] \quad (\text{Eq.2-3})$$

où

E_1, G_1 : modules d'Young et de cisaillement du pignon.

S_1 : section (supposée constante) du pignon.

J_1, J_{01} : moment d'inertie diamétrale et moment d'inertie polaire du corps m.

et

$$T_{clj} = \frac{1}{2} m_{lj} \left[\vec{V}_1^{R_j} (G_{lj}) \right]^2 + \frac{1}{2} \left(\vec{\Omega}_1^{R_j} \right)^t \underline{\underline{I_{lj}}} \vec{\Omega}_1^{R_j} \quad (\text{Eq.2-4})$$

avec

Ω_1 : vitesse de rotation du pignon.

$\underline{\underline{I_{lj}}}$: tenseurs d'inertie aux centres d'inertie G_{lj} de la tranche j du pignon exprimé dans le repère $R_{lj}(O_{lj}, \vec{S}_{lj}, \vec{T}_{lj}, \vec{Z})$.

Le vecteur vitesse $\vec{V}_1^{R_{lj}}(G_{lj})$ est donné par la relation :

$$\vec{V}_1^{R_{lj}}(G_{lj}) = \frac{d^{R_{lj}} O_{lj} \vec{G}_{lj}}{dt} = (\dot{v}_{lj} + C_{s1}) \cdot \vec{S}_{lj} + (\dot{w}_{lj} + C_{t1}) \cdot \vec{T}_{lj} + \dot{u}_{lj} \cdot \vec{Z} \quad (\text{Eq.2-5})$$

avec :

$$C_{s1} = -\varepsilon_1 \Omega_1 \sin(\Omega_1 t - \gamma_1)$$

$$C_{t1} = +\varepsilon_1 \Omega_1 \cos(\Omega_1 t - \gamma_1)$$

Les termes C_{s1} et C_{t1} proviennent d'une éventuelle erreur d'excentricité du pignon caractérisé par ϵ_1 , la distance entre l'axe de rotation et l'axe d'inertie principal du pignon, et γ_1 qui représente la phase par rapport à un axe de référence arbitraire (Figure II-4).

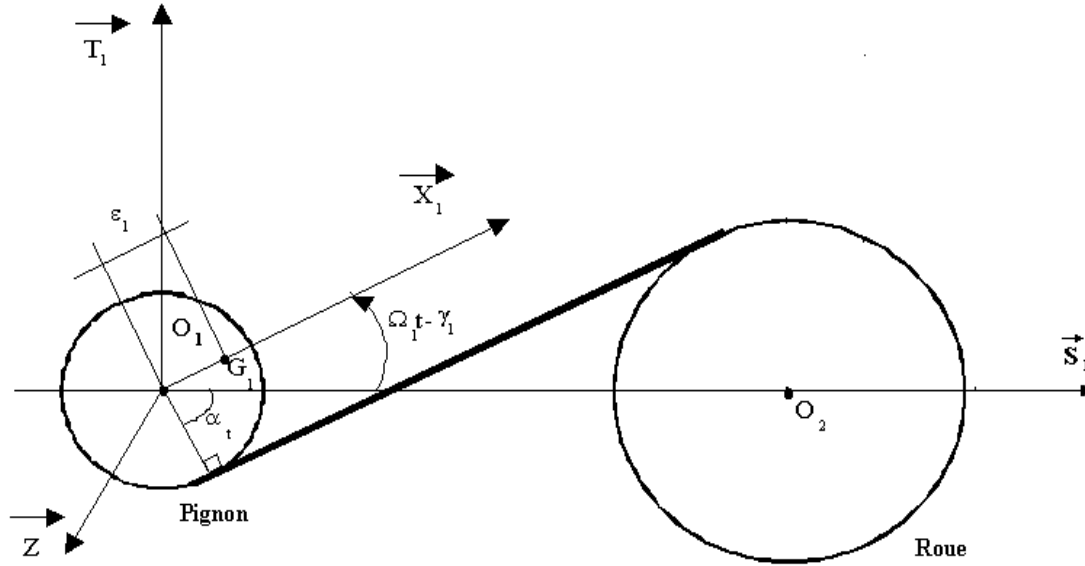


Figure II-4 : Définition des paramètres d'excentricité du pignon.

Après intégration sur la longueur de l'élément (c'est-à-dire la largeur du pignon), l'énergie de déformation et l'énergie cinétique (les termes gyroscopiques étant négligés) s'écrivent respectivement :

$$U_{cl} = \frac{1}{2} \{q_{cl}\}^t [K_{cl}] \{q_{cl}\} \quad (\text{Eq.2-6})$$

et

$$T_{cl} = \frac{1}{2} \{\dot{q}_{cl}\}^t [M_{cl}] \{\dot{q}_{cl}\} + \{F_q^1(t)\}^t \{q_{cl}\} + (\text{des termes indépendants du temps}) \quad (\text{Eq.2-7})$$

Avec :

$\{q_{cl}\}$: vecteur des déplacements généralisés attribués au corps du pignon.

$[K_{cl}]$: matrice raideur du corps du pignon.

$[M_{cl}]$: matrice masse du corps du pignon.

$$\{F_q^1(t)\} = f(\dot{C}_{s1}, \dot{C}_{t1}).$$

2.2 Modélisation du corps de la roue flexible

Compte tenu de la distribution de flexibilités pour une roue amincie, la modélisation par des éléments de poutre n'est plus pertinente. Afin de représenter de façon précise les géométries et les conditions aux limites (arbre et paliers), une approche basée sur un modèle éléments finis tridimensionnel est proposée. Les éléments utilisés sont des hexaèdres (ou briques) isoparamétriques à 20 nœuds dont l'approximation sur les déplacements est quadratique (Dhatt et al. [25]). Il faut noter que le nombre d'éléments sur l'épaisseur et la périphérie du corps de la roue sont indépendants du nombre de dents et que, par conséquent, la finesse du maillage peut être adaptée au cas par cas en fonction de la géométrie de la structure à modéliser. La Figure II-5 présente un exemple simple du maillage d'un corps d'une roue à voile mince.

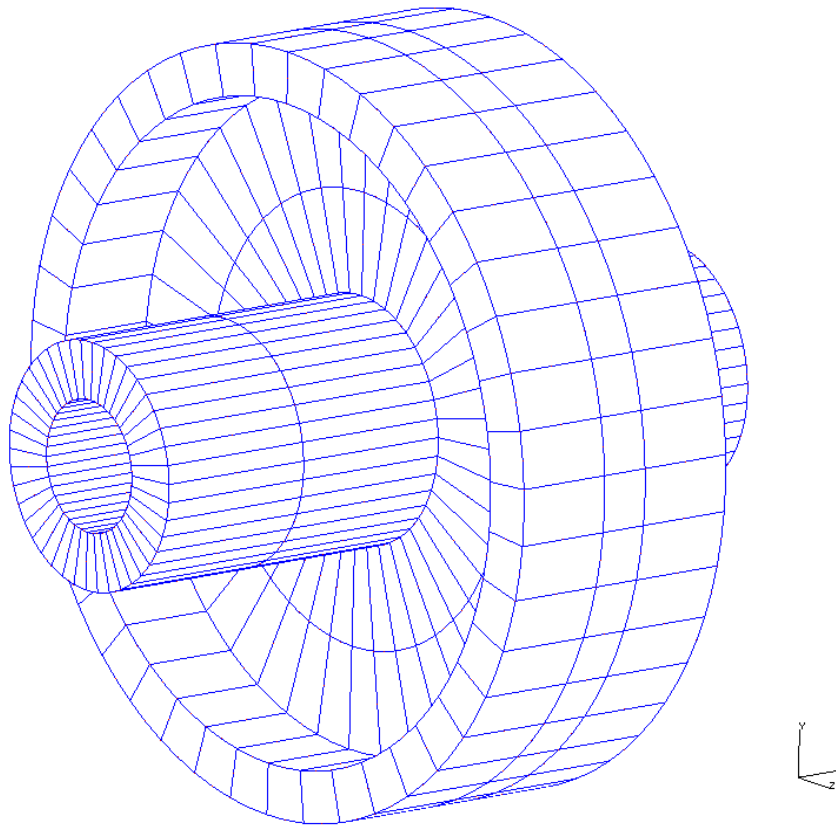


Figure II-5 : Maillage d'un corps d'une roue à voile mince.

2.2.1 SOUS-STRUCTURATION DU CORPS DE LA ROUE

Afin de tenir compte des conditions de suspension de la structure, des éléments concentrés de raideur ont été ajoutés en bouts d'arbre. La masse des dents est introduite au moyen de masses concentrées sur le cylindre de pied de dent. L'introduction du maillage de la roue et de ses conditions de support (arbre et palier) dans la résolution temporelle des équations du mouvement impose cependant une réduction de la taille de ce modèle. Nous avons opté pour une méthode pseudo-modale (Lalanne et al. [68]) ou méthode de Ritz dont les fonctions de forme sont les modes propres de la structure non amortie. Le maillage du corps de la roue à voile mince est réalisé au moyen du préprocesseur *Ideas* d'où sont exportées les données (coordonnées des nœuds et table de connectivité) dans un fichier texte. Ce dernier est lu par le code de calcul éléments finis *Code_Aster* qui effectue la procédure de sous-structuration modale.

On a alors la relation suivante liant les degrés de liberté dans la base physique aux degrés de liberté modaux de la sous-structure :

$$\{X_{ss}\} = [\phi_N] \{q\} \quad (\text{Eq.2-8})$$

avec

$\{X_{ss}\}$: vecteur des degrés de liberté de la sous-structure

$[\phi_N]$: matrice modale tronquée.

$\{q\}$: vecteur des degrés de liberté modaux

Les modes propres étant orthogonaux entre eux par rapport aux matrices masse $[M_{ss}]$ et raideur $[K_{ss}]$ complètes de la sous-structure, les matrices masse $[M_{red}]$ et raideur $[K_{red}]$ réduites sont diagonales et données par :

$$[M_{red}] = [\phi_n]^T \cdot [M_{ss}] \cdot [\phi_n] \quad (\text{Eq.2-9})$$

$$[K_{red}] = [\phi_n]^T \cdot [K_{ss}] \cdot [\phi_n] \quad (\text{Eq.2-10})$$

Cette procédure de sous-structuration est basée uniquement sur des modes dynamiques et il est clair que la qualité de la solution statique est grandement conditionnée par la capacité des modes dynamiques à décrire la déformée statique. Afin de pallier à ce problème, un nombre important de modes dynamiques peut être requis pour des structures à géométries complexes. Le résultat du calcul, constitué des matrices réduites $[M_{red}]$ et $[K_{red}]$ et de la matrice de passage $[\phi_N]$ du macro-élément, est écrit dans un fichier qui sera utilisé dans le code de calcul du comportement dynamique des réducteurs d'engrenages.

2.3 Modélisation de l'engrènement

2.3.1 Modélisation d'une dent

2.3.1.1 Modèle adopté [5]

Pour une position donnée d'une ligne de contact sur le flanc actif de denture, les élasticités de la denture sont décrites par des fondations élastiques de Pasternak (Kerr. [60]) rapportées sur le plan d'action de l'engrenage (plan tangent aux deux cylindres de bases). La dent et son embase sont ainsi découpées en tranches minces j , le point d'intersection M_{ij} entre la ligne de contact d'indice i et la tranche mince j (Figure II-6 et Figure II-7) est matérialisé par un ressort caractérisé par le terme k_{ij}^{dm} lié à des éléments de dimensions variables travaillant en flexion et en cisaillement caractérisé respectivement par le terme G_{ij}^{dm} et D_{ij}^{dm} pour assurer le couplage entre les tranches (Figure II-7).

Où :

k_{ij}^{dm} : élément de raideur associé au j -ème élément de la i -ème ligne de contact pour le corps m ($m = 1$ pignon, $m = 2$ roue).

G_{ij}^{dm} et D_{ij}^{dm} : représentent respectivement la rigidité des éléments de cisaillement et la rigidité de l'élément de flexion pour le même élément de discrétisation. Les valeurs de G_{ij}^{dm} et

D_{ij}^{dm} sont déterminées par des formules semi-empiriques qui seront par la suite ajustées en utilisant les résultats Eléments Finis tridimensionnels (voir chapitre1) (Ajmi [5]).

$\Delta\eta$: dimension de l'élément de discrétisation selon la direction $\vec{\eta}$ (ligne de contact).

ω_{ij}^m : champ de déplacements au point de discrétisation M_{ij} d'une fondation élastique associée au corps m.

δ_{ij}^m : champ de déplacements au point M_{ij} induit par les déformées du corps m (le corps est modélisé par un ou plusieurs éléments finis de poutre).

NB : les déplacements δ_{ij}^m s'appliquent aux extrémités libres des ressorts de la fondation élastique (Figure II-7).

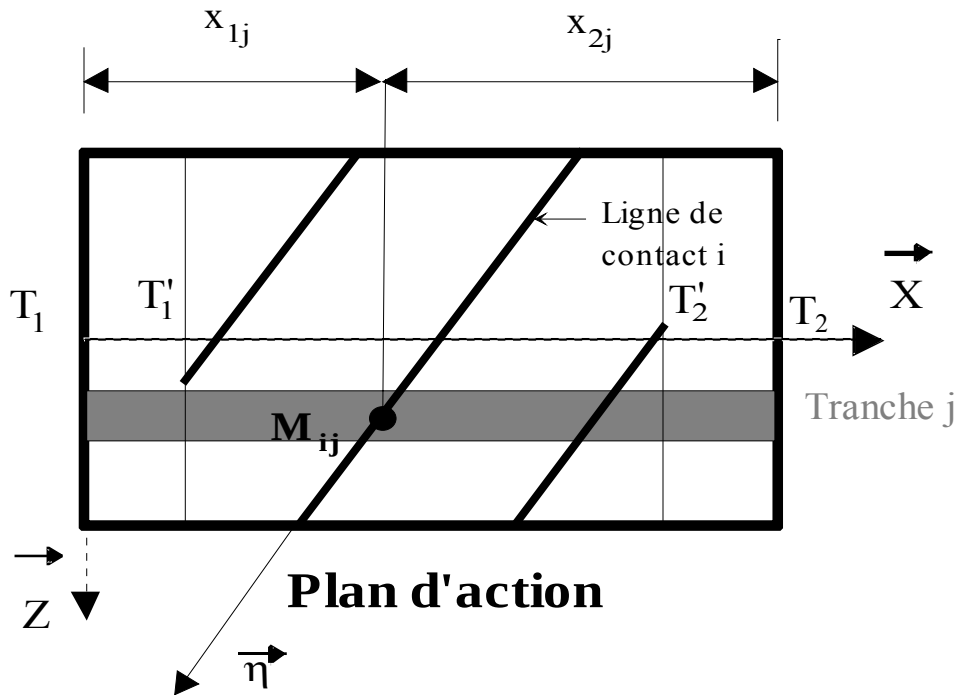


Figure II-6 : Discrétisation des lignes de contact sur le plan d'action.

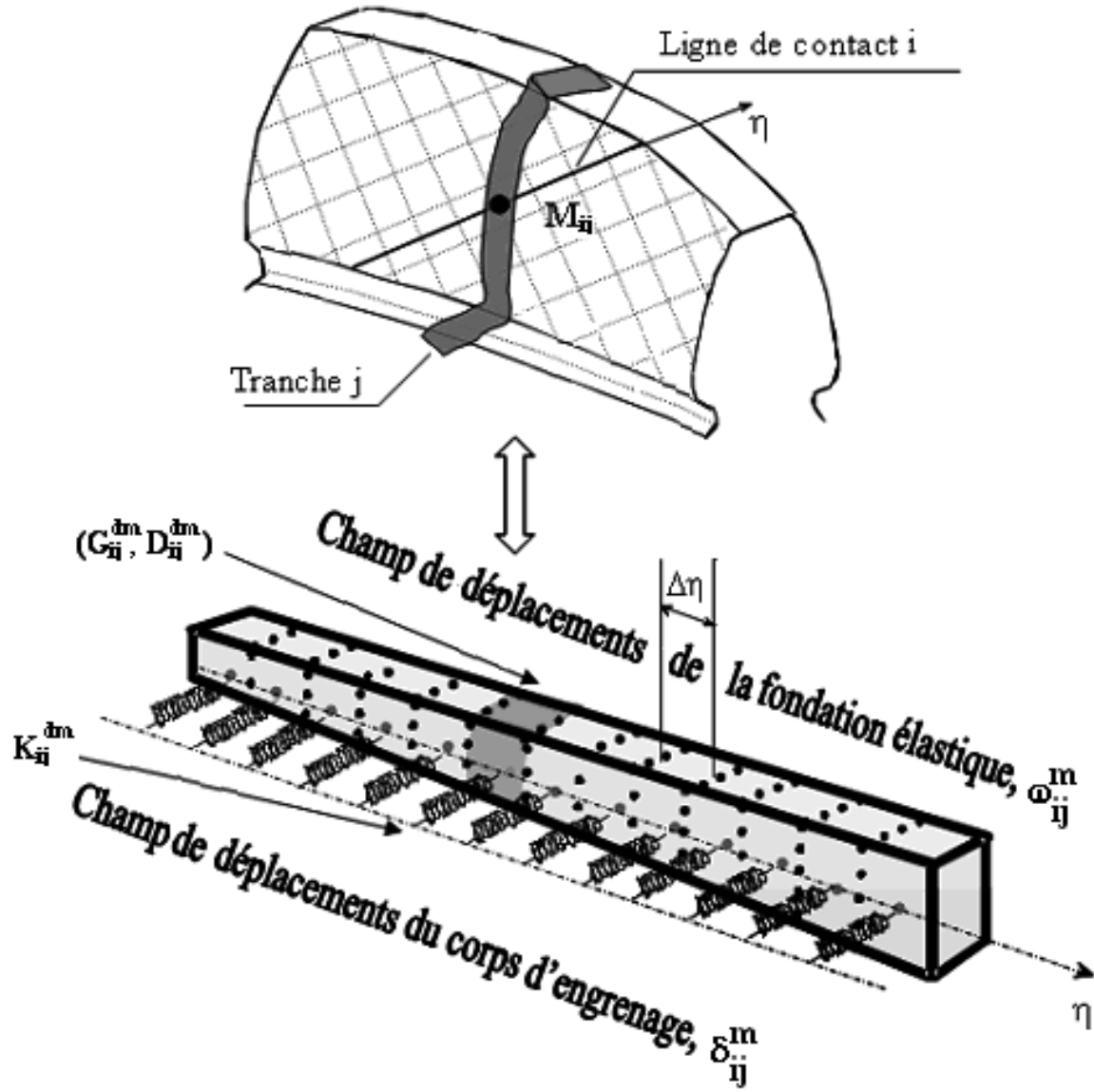


Figure II-7 : Modélisation d'une dent par une fondation élastique.

2.3.1.2 Energie de déformation

Pour une fondation élastique associée au corps m , l'expression de l'énergie de déformation des ressorts et des éléments de flexion et de cisaillement U_{dm} s'écrit (Figure II-7) :

$$U_{dm} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_{cm}} k_{ij}^{dm} (\omega_{ij}^m - \delta_{ij}^m)^2 \Delta\eta + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_{cm}} D_{ij}^{dm} \left(\frac{\Delta^2 \omega_{ij}^m}{\Delta\eta^2} \right)^2 \Delta\eta + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_{cm}} G_{ij}^{dm} \left(\frac{\Delta \omega_{ij}^m}{\Delta\eta} \right)^2 \Delta\eta \quad (\text{Eq.2-11})$$

Avec :

N_{cm} : nombre de segment dans la fenêtre d'engrènement.

En appliquant les différences finies centrées, les dérivées première et seconde du déplacement ω_{ij}^m par rapport à z s'expriment :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta \omega_{ij}^m}{\Delta \eta} \right) &= \frac{\omega_{i,j+1}^m - \omega_{i,j-1}^m}{2\Delta \eta} \\ \left(\frac{\Delta^2 \omega_{ij}^m}{\Delta \eta^2} \right) &= \frac{\omega_{i,j+1}^m - 2\omega_{i,j}^m + \omega_{i,j-1}^m}{\Delta \eta^2} \end{aligned} \quad (\text{Eq.2-12})$$

En considérant que le chargement est nul aux deux extrémités de la fondation, il vient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\omega_m}{d\eta} \right)_{\eta=0} &= \left(\frac{d\omega_m}{d\eta} \right)_{\eta=L_{Cm}} = 0 \\ \left(\frac{d^2 \omega_m}{d\eta^2} \right)_{\eta=0} &= \left(\frac{d^2 \omega_m}{d\eta^2} \right)_{\eta=L_{Cm}} = 0 \end{aligned} \quad (\text{Eq.2-13})$$

avec :

L_{Cm} : longueur de la fondation (dépendante du temps pour un engrenage hélicoïdal).

L'énergie totale de déformation emmagasinée dans la fondation d'un mobile m s'écrit alors :

$$\begin{aligned} U_{dm} &= \frac{1}{2\Delta \eta^3} \sum_{j=2}^{N_{cm}-1} D_{ij}^{dm} [\omega_{i,j+1}^m - 2\omega_{i,j}^m + \omega_{i,j-1}^m]^2 \\ &+ \frac{1}{8\Delta \eta} \sum_{j=2}^{N_{cm}-1} G_{ij}^{dm} [\omega_{i,j+1}^m - \omega_{i,j-1}^m]^2 \\ &+ \frac{\Delta \eta}{2} \sum_{j=1}^{N_{cm}} k_{ij}^{dm} (\omega_{ij}^m - \delta_{ij}^m)^2 \end{aligned} \quad (\text{Eq.2-14})$$

La relation (II-14) est exprimée en fonction des déplacements normaux ω_{ij}^m , l'assemblage avec les éléments des corps du pignon et de la roue ne pose aucun problème.

2.3.2 Conditions de contact entre dents

2.3.2.1 Modélisation

Le contact entre deux dents est assimilé à deux fondations élastiques de caractéristiques différentes liées par des raideurs de contact indépendantes. Elles sont calculées à partir des formules de Lundberg combinées à des fonctions correctrices afin de tenir compte des effets de bord (Ajmi. [3] [5]) (voir Figure II-8).

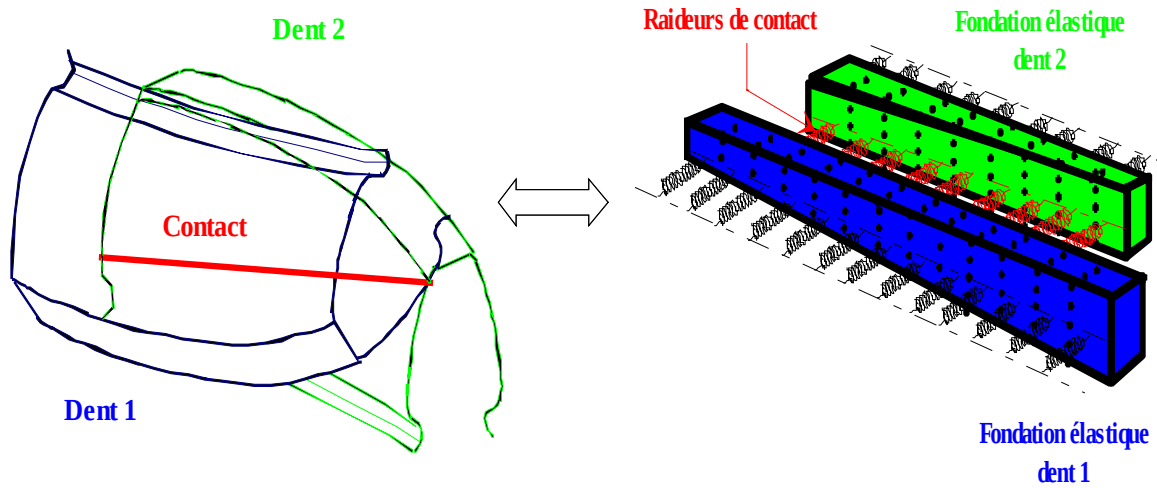


Figure II-8 : *Modèle de contact.*

2.3.2.2 Formulation des conditions de contact

Compte tenu des écarts de forme éventuels, l'écrasement au point de contact potentiel M_{ij} (i se rapporte au numéro de ligne de contact à un instant donné dans le plan d'action) s'écrit :

$$\Delta(M_{ij}) = \omega_2(M_{ij}) - \omega_1(M_{ij}) + \delta e(M_{ij}) \quad (\text{Eq.2-15})$$

où $\delta e(M_{ij})$ représente l'écart relatif en M_{ij} et $\omega_m(M_{ij})$, le champ de déplacements normaux au point M_{ij} de la fondation élastique du solide m ($m=1$ correspond au pignon, $m=2$ à la roue).

$$\Delta(M_{ij}) > 0 \rightarrow \text{contact au point } M_{ij} \text{ } (k_{ij}^c \neq 0).$$

$$\Delta(M_{ij}) \leq 0 \rightarrow \text{perte de contact au point } M_{ij} \text{ } (k_{ij}^c = 0).$$

Les conditions de contact ci-dessus sont testées à chaque instant pour toutes les cellules se trouvant à l'intérieur de la fenêtre d'engrènement, c'est à dire pour tous les points de contact potentiels. La raideur globale instantanée du contact est alors définie comme la somme de toutes les raideurs k_{ij}^c actives à l'instant considéré :

$$k^c(t, \Delta) = \sum_{i,j=1}^{N^c} k_{ij}^c \quad (\text{Eq.2-16})$$

La raideur globale du contact dépend à la fois du temps, puisque la longueur potentielle de contact varie au cours de l'engrènement, mais également de l'écrasement et possède donc un caractère non-linéaire.

2.4 Modélisation globale

L'assemblage des différents modèles élémentaires présentés précédemment permet de construire une modélisation d'un réducteur simple étage présenté Figure II-9 telle que :

- La partie motrice constituée par le corps du pignon (denture exclue) considéré massif et l'arbre moteur est modélisée par des éléments finis d'arbres à deux nœuds et six degrés de liberté par nœud, soit dans ce cas un total de 24 degrés de liberté.
- La partie réceptrice constituée par le corps de la roue flexible (denture exclue) et l'arbre récepteur est modélisée par des éléments finis tridimensionnels condensés par une méthode pseudo modale.

- Le contact entre dentures est assimilé à deux fondations élastiques de caractéristiques différentes liées par des raideurs de contact indépendantes. Dans un souci de clarté, un seul couple de dent est matérialisé sur la Figure II-9 ci-dessous.

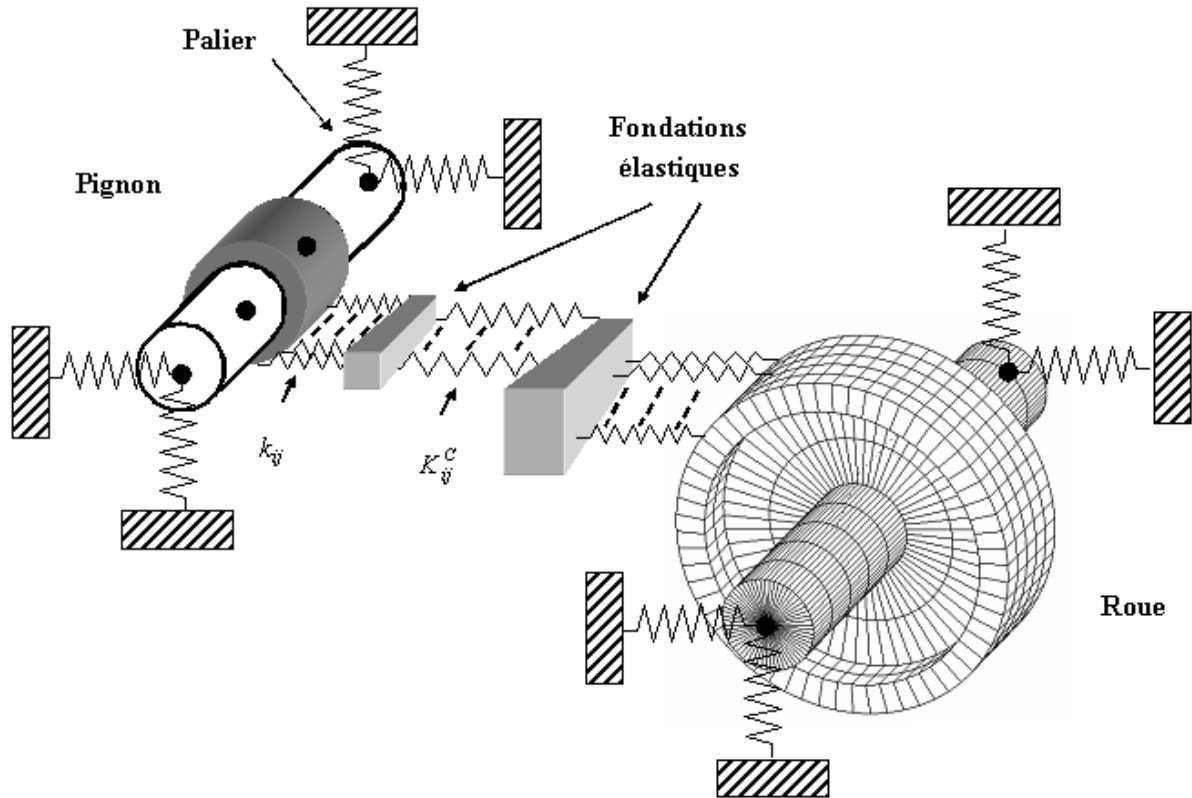
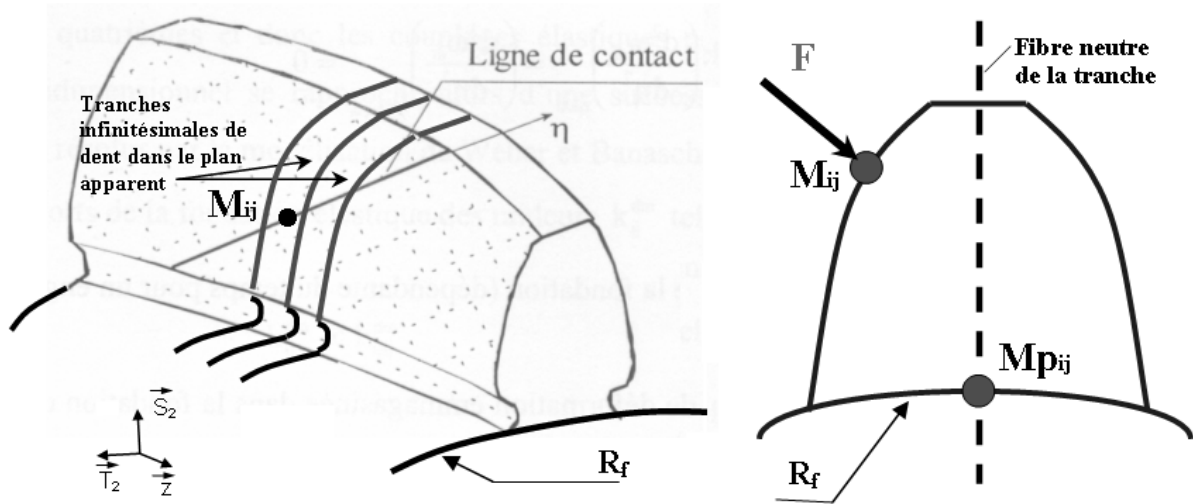


Figure II-9 : *Présentation du modèle d'engrenage* (une seule paire de dents représentée).

2.5 Expression du rapprochement normal

Afin d'établir la connexion entre les points de contact potentiels et la sous structure, chaque dent de la roue est assimilée à une série de tranches minces indéformables dans le plan apparent, de sorte que la rigidité de cette tranche puisse être rapportée sur le plan d'action. Les déplacements de la tranche de dent contenant le point de contact M_{ij} sont calculés en fonction des déplacements d'un point $M_{p_{ij}}$ appartenant à cette tranche et situé sur le cylindre de pied de dent (voir Figure II-10).


 Figure II-10 : Localisation des points M_{ij} et $M_{p_{ij}}$.

Ce point, qui ne coïncide pas nécessairement avec un nœud du maillage de la sous-structure, est situé sur la fibre neutre de la tranche infinitésimale de dent (Figure II-10). Le champ de déplacements résultant des petites perturbations autour de l'état de référence de la tranche de dent de la roue contenant les points M_{ij} et $M_{p_{ij}}$ peut ainsi s'exprimer au moyen du torseur de déplacements infinitésimaux $\{\tau_{M_{p_{ij}}}\}$:

$$\left\{ \tau_{M_{p_{ij}}} \right\}_{R_{2j}} : \begin{cases} \vec{u}_{2j}(M_{p_{ij}}) = v_{M_{p_{ij}}} \cdot \vec{S}_{2j} + w_{M_{p_{ij}}} \cdot \vec{T}_{2j} + u_{M_{p_{ij}}} \cdot \vec{Z} \\ \vec{\omega} = \varphi_{M_{p_{ij}}} \cdot \vec{S}_{2j} + \psi_{M_{p_{ij}}} \cdot \vec{T}_{2j} + \theta_{M_{p_{ij}}} \cdot \vec{Z} \end{cases} \quad (\text{Eq.2-17})$$

Le nombre d'éléments utilisés sur la circonférence du corps de la roue étant de plus suffisamment important pour que la face supérieure des éléments de brique soit considérée confondue avec le cylindre de pied de dent de la roue, le point $M_{p_{ij}}$ est supposé appartenir également à la face supérieure d'un élément de brique.

La position des points $M_{p_{ij}}$ peut alors être repérée sur le maillage par trois paramètres, $r_{M_{p_{ij}}}$, $v_{M_{p_{ij}}}$ et $Z_{M_{p_{ij}}}$ (Figure II-11).

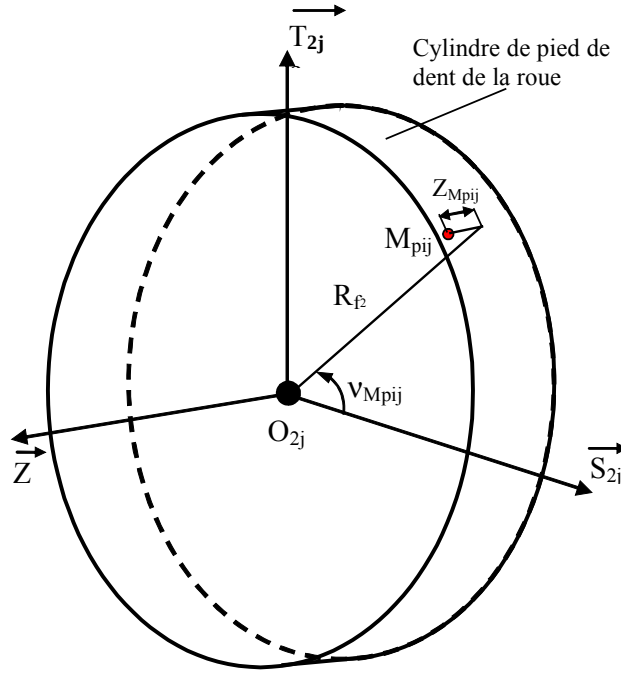


Figure II-11 : Repérage du point M_{pij} sur le cylindre de pied de dent de la roue.

M_{pij} étant par définition sur le cylindre de pied de dent, r_{Mpij} est égal au rayon de pied de dent R_{f2} de la roue.

M_{pij} appartient à la tranche infinitésimale de dent dans le plan apparent contenant le point M_{ij} , leurs cotes axiales sont par conséquent identiques (Figure II-10) :

$$z_{Mpij} = z_{Mij} = \eta \cdot \cos \beta_b \quad (\text{Eq.2-18})$$

La position angulaire v_{Mpij} du premier point M_{pij} de la première ligne de contact du premier engrènement est fixée arbitrairement à v_0 à $t=0$. Les coordonnées des points M_{pij} associés à tous les points de contact potentiels sont ensuite déduites par application des relations géométriques suivantes :

- deux points M_{p1} et M_{p2} situés à la même cote Z et associés à deux lignes de contact successives sont déphasés d'un pas angulaire :

$$v_{Mp1} = v_{Mp2} \pm \frac{2\pi}{Z2} \quad (\text{Eq.2-19})$$

- deux points M_{i1} et M_{i2} appartenant à la même ligne de contact i et décalés d'une distance η_d suivant l'hélice sont déphasés d'un angle v_d (propriétés des profils en développante de cercle):

$$v_d = \pm \frac{\eta_d \cdot \sin \beta_b}{R_{b2}} \quad (\text{Eq.2-20})$$

Le rapprochement normal au point de contact M_{ij} consécutif à l'ensemble des déplacements issus de $\{\tau_{1j}\}$ qui est le torseur de déplacements infinitésimaux associés à la j -ème tranche du pignon désigné par $\delta_1(M_{ij})$ et de $\{\tau_{Mp_{ij}}\}$ désigné par $\delta_2(M_{ij})$ est :

$$\begin{aligned} \delta(M_{ij}) &= \delta_1(M_{ij}) - \delta_2(M_{ij}) \\ &= \overrightarrow{u_{1j}^{R_{1j}}(M_{ij})} \cdot \overrightarrow{n_{1j}} - \overrightarrow{u_{2j}^{R_{2j}}(M_{ij})} \cdot \overrightarrow{n_{2j}} \\ &= \left\{ \overrightarrow{u_{1j}^{R_{1j}}(O_{1j})} + \overrightarrow{M_{ij}O_{1j}} \wedge \overrightarrow{\omega_{1j}^{R_{1j}}} \right\} \cdot \overrightarrow{n_{1j}} - \left\{ \overrightarrow{u_{2j}^{R_{2j}}(M_{p_{ij}})} - \overrightarrow{M_{ij}M_{p_{ij}}} \wedge \overrightarrow{\omega_{2j}^{R_{2j}}} \right\} \cdot \overrightarrow{n_{2j}} \end{aligned} \quad (\text{Eq.2-21})$$

avec

$\overrightarrow{n_{1j}}$ et $\overrightarrow{n_{2j}}$: vecteurs unitaires normaux au profil en M_{ij} orientés sortants par rapport au flanc menant et exprimés respectivement dans les repères $R_{1j}(\vec{S}_{1j}, \vec{T}_{1j}, \vec{Z})$ et $R_{2j}(\vec{S}_{2j}, \vec{T}_{2j}, \vec{Z})$ sachant que :

$R_{1j}(\vec{S}_{1j}, \vec{T}_{1j}, \vec{Z})$ repère associé à la j -ème tranche du pignon tel que $\vec{S}_{1j}$ est colinéaire à la ligne des centres des deux tranches du pignon et de la roue $\overrightarrow{O_{1j}O_{2j}}$.

$R_{2j}(\vec{S}_{2j}, \vec{T}_{2j}, \vec{Z})$ repère lié à la j -ème tranche de la roue faisant un mouvement relatif par rapport à $R_{1j}(\vec{S}_{1j}, \vec{T}_{1j}, \vec{Z})$ décrit par l'angle de rotation rigide $\theta = (\vec{S}_{1j}, \vec{S}_{2j})$ variable avec le temps comme le montre la Figure II-12.

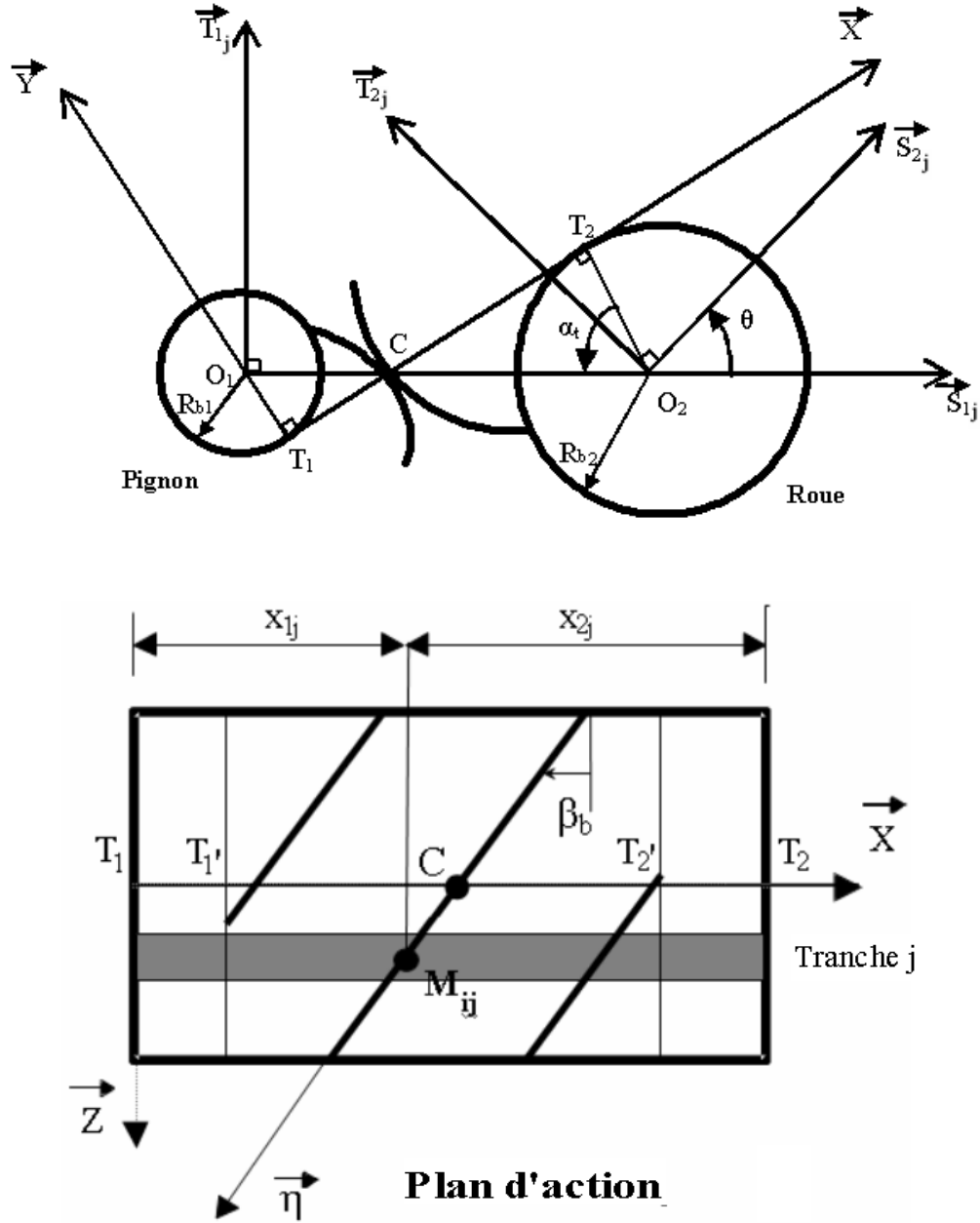


Figure II-12 : Paramètres de modélisation d'un élément d'engrenage extérieur.

$\overrightarrow{u_{1j}^{R_{1j}}(M_{ij})}$ et $\overrightarrow{u_{2j}^{R_{2j}}(M_{ij})}$: déplacement par rapport à l'état de référence du point M_{ij} appartenant à la j -ème tranche du pignon et à la j -ème tranche de la roue.

En réécrivant (Eq.2-21) sous forme matricielle, $\delta_1(M_{ij})$ s'exprime sous forme :

$$\delta_1(M_{ij}) = \{V_1(M_{ij})\}^t [P_1(M_{ij})] \{X_1\} \quad (\text{Eq.2-22})$$

Avec

$$\{V_1(M_{ij})\} = \begin{Bmatrix} \sin \beta_b \\ \cos \beta_b \sin \alpha_t \\ \varepsilon \cos \beta_b \cos \alpha_t \\ -\varepsilon \sin \beta_b (R_{b1} \sin \alpha_t - x_{1j} \cos \alpha_t) \\ -\sin \beta_b (R_{b1} \cos \alpha_t + x_{1j} \sin \alpha_t) \\ \varepsilon R_{b1} \cos \beta_b \end{Bmatrix}, \quad \{X_1\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \phi_1 \\ \psi_1 \\ \theta_{1j} \end{Bmatrix} \quad (\text{Eq.2-23})$$

$\varepsilon = +1$: pour un pignon menant tournant dans le sens positif.

$\varepsilon = -1$: pour un pignon menant tournant dans le sens négatif.

$[P_1(M_{ij})]$: Sous matrices permettant d'exprimer les déplacement généralisés du centre de la tranche j du pignon en fonction des déplacements des deux nœuds extrêmes du pignon $\{X_1\}$ par l'intermédiaire des fonctions de forme des éléments finis de poutre

Les sous matrices $[P_1(M_{ij})]$ sont explicitées ci dessous:

$$[P_m(M_{ij})] = \begin{bmatrix} N_{mj}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{mj}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{mj}^1 & 0 & 0 & M_{mj}^2 & 0 & 0 & M_{mj}^3 & 0 & 0 & M_{mj}^4 & 0 \\ 0 & 0 & M_{mj}^1 & -M_{mj}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{mj}^3 & -M_{mj}^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{dM_{mj}^1}{dz_j} & \frac{dM_{mj}^2}{dz_j} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{dM_{mj}^3}{dz_j} & \frac{dM_{mj}^4}{dz_j} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{dM_{mj}^1}{dz_j} & 0 & 0 & \frac{dM_{mj}^2}{dz_j} & 0 & 0 & \frac{dM_{mj}^3}{dz_j} & 0 & 0 & \frac{dM_{mj}^4}{dz_j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{mj}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{mj}^2 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq.2-24})$$

Les fonctions de forme M_{mj}^1 , M_{mj}^2 , M_{mj}^3 , M_{mj}^4 , N_{mj}^1 et N_{mj}^2 sont définies par les relations (Eq.2-2).

Le rapprochement $\delta_2(M_{ij})$ de la tranche j de la roue au point M_{ij} s'écrit :

$$\delta_2(M_{ij}) = \{V_{M_{pij}}(M_{ij})\}^t \{X_{M_{pij}}\} \quad (\text{Eq.2-25})$$

Avec :

$$\{V_{M_{pij}}(M_{ij})\} = \begin{Bmatrix} -\sin\beta_b \\ -\cos\beta_b \cdot \sin\gamma \\ -\varepsilon \cdot \cos\beta_b \cdot \cos\gamma \\ \varepsilon \cdot \sin\beta_b \cdot \left[(T_1 T_2 - x_{2j}) \cdot \cos\gamma - R_{b_2} \cdot \sin\gamma + \varepsilon \cdot y_{M_{pij}} \right] \\ -\sin\beta_b \cdot \left[(T_1 T_2 - x_{2j}) \cdot \sin\gamma + R_{b_2} \cdot \cos\gamma + x_{M_{pij}} \right] \\ \varepsilon \cdot \cos\beta_b \cdot \left[R_{b_2} - \varepsilon \cdot y_{M_{pij}} \cdot \sin\gamma + x_{M_{pij}} \cdot \cos\gamma \right] \end{Bmatrix} \quad \{X_{M_{pij}}\} = \begin{Bmatrix} u_{M_{pij}} \\ v_{M_{pij}} \\ w_{M_{pij}} \\ \phi_{M_{pij}} \\ \psi_{M_{pij}} \\ \theta_{M_{pij}} \end{Bmatrix} \quad (\text{Eq.2-26})$$

où $\gamma = \alpha_t + \theta$.

$x_{M_{pij}}$, $y_{M_{pij}}$ sont les coordonnées du point M_{pij} dans le repère $R_{2j}(\bar{S}_{2j}, \bar{T}_{2j}, \bar{Z})$ lié à la roue.

Les déplacements du point M_{pij} , qui ne coïncide pas nécessairement avec un nœud du maillage éléments finis, ne sont pas des degrés de liberté de la sous-structure (Figure II-13).

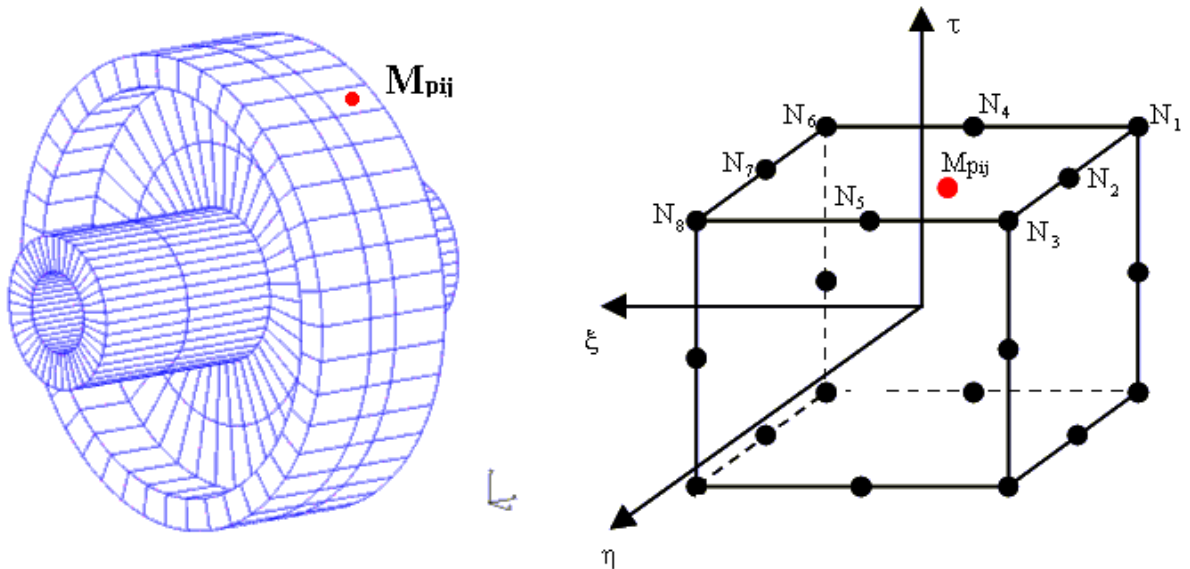


Figure II-13 : Localisation du point M_{pij} sur le maillage.

La relation entre les déplacements du point M_{pij} et les degrés de liberté des nœuds de l'élément associé est établie au moyen des fonctions de forme des éléments finis à 20 nœuds. Dans la méthode éléments finis, ces fonctions définissent la loi d'interpolation du champ de déplacements à l'intérieur d'un élément (Dhatt et al. [25]). Pour les éléments de type brique isoparamétriques à 20 nœuds, les déplacements en translation d'un point quelconque de l'élément sont alors donnés par :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{s=1}^{20} Q_s \cdot u_s \\ \sum_{s=1}^{20} Q_s \cdot v_s \\ \sum_{s=1}^{20} Q_s \cdot w_s \end{Bmatrix} \quad (\text{Eq.2-27})$$

Q_s , u_s , v_s et w_s sont respectivement les fonctions de forme et les déplacements associés au nœud s .

La condition de continuité du déplacement entre des éléments adjacents impose que le déplacement d'un point appartenant à une face de l'élément ne s'exprime qu'en fonction des déplacements des nœuds de cette face. Dans notre cas d'étude, M_{pij} est situé par hypothèse sur la face supérieure de l'élément et pour ce point, (Eq.2-27) peut se réduire à :

$$\begin{Bmatrix} u_{M_{pij}} \\ v_{M_{pij}} \\ w_{M_{pij}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{s=1}^8 Q_s \cdot u_s \\ \sum_{s=1}^8 Q_s \cdot v_s \\ \sum_{s=1}^8 Q_s \cdot w_s \end{Bmatrix} \quad (\text{Eq.2-28})$$

Les fonctions de forme correspondant aux nœuds et au système d'axe de la Figure II-13 sont telles que :

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \frac{1}{8} * (1 - \xi) * (1 - \eta) * (1 - \tau) * (-2 - \xi - \eta - \tau) \\
 Q_2 &= \frac{1}{4} * (1 - \xi) * (1 - \eta^2) * (1 - \tau) \\
 Q_3 &= \frac{1}{8} * (1 - \xi) * (1 + \eta) * (1 - \tau) * (-2 - \xi + \eta - \tau) \\
 Q_4 &= \frac{1}{4} * (1 - \xi^2) * (1 - \eta) * (1 - \tau) \\
 Q_5 &= \frac{1}{4} * (1 - \xi^2) * (1 + \eta) * (1 - \tau) \\
 Q_6 &= \frac{1}{8} * (1 + \xi) * (1 - \eta) * (1 - \tau) * (-2 + \xi - \eta - \tau) \\
 Q_7 &= \frac{1}{4} * (1 + \xi) * (1 - \eta^2) * (1 - \tau) \\
 Q_8 &= \frac{1}{8} * (1 + \xi) * (1 + \eta) * (1 - \tau) * (-2 + \xi + \eta - \tau)
 \end{aligned}
 \tag{Eq.2-29}$$

où ξ , η et τ sont les coordonnées dans l'espace parent (variant de -1 à 1) d'un point quelconque de l'élément (cf. Dhatt et al. [25]).

Les nœuds des éléments finis de brique tridimensionnels ne comportent pas de degrés de liberté en rotation. Le calcul des trois rotations en M_{pij} nécessite donc d'introduire une relation entre rotations et déplacements en translation afin de remonter aux degrés de liberté des nœuds de l'élément. Cette relation s'appuie sur l'expression des rotations en fonction des dérivées partielles des translations:

$$\begin{cases}
 \phi_{M_{pij}} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial y}(M_{pij}) - \frac{\partial w}{\partial z}(M_{pij}) \right\} \\
 \psi_{M_{pij}} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial v}{\partial z}(M_{pij}) - \frac{\partial u}{\partial x}(M_{pij}) \right\} \\
 \theta_{M_{pij}} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x}(M_{pij}) - \frac{\partial v}{\partial y}(M_{pij}) \right\}
 \end{cases}
 \tag{Eq.2-30}$$

où x , y et z sont les dimensions suivant $(\vec{S}_{2j}, \vec{T}_{2j}, \vec{Z})$.

La matrice de forme $[Q(M_{p_{ij}})]$ permet alors de connecter les six degrés de liberté du point $M_{p_{ij}}$ (trois translations, trois rotations) aux vingt-quatre degrés de liberté des huit nœuds de la face supérieure de l'élément :

$$\begin{Bmatrix} u_{M_{p_{ij}}} \\ v_{M_{p_{ij}}} \\ w_{M_{p_{ij}}} \\ \phi_{M_{p_{ij}}} \\ \psi_{M_{p_{ij}}} \\ \theta_{M_{p_{ij}}} \end{Bmatrix} = [Q(M_{p_{ij}})] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ \dots \\ w_8 \end{Bmatrix} \quad (\text{Eq.2-31})$$

Avec

$$[Q(M_{p_{ij}})] = [[\kappa_1] \quad [\kappa_2] \quad [\kappa_3] \quad [\kappa_4] \quad [\kappa_5] \quad [\kappa_6] \quad [\kappa_7] \quad [\kappa_8]] \quad (\text{Eq.2-32})$$

$$[\kappa_j] = \begin{bmatrix} Q_j & 0 & 0 \\ 0 & Q_j & 0 \\ 0 & 0 & Q_j \\ \frac{\partial Q_j}{\partial y} & 0 & -\frac{\partial Q_j}{\partial z} \\ -\frac{\partial Q_j}{\partial x} & \frac{\partial Q_j}{\partial z} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial Q_j}{\partial y} & \frac{\partial Q_j}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{Eq.2-33})$$

L'expression dans l'espace parent des dérivées partielles des fonctions de forme est bien connue analytiquement (Dhatt et al. [25]). Le calcul de ces dérivées partielles dans l'espace physique nécessite l'évaluation puis l'inversion de la matrice jacobienne pour chaque point $M_{p_{ij}}$.

Connaissant la matrice $[Q(M_{p_{ij}})]$, le rapprochement normal au niveau de la denture peut maintenant être exprimé en fonction des degrés de liberté du pignon et des nœuds de la roue

associés à l'élément contenant le point $M_{p_{ij}}$. Le modèle du corps de la roue étant réduit par condensation modale (voir 2.2.1), les degrés de liberté associés à la sous-structure ne sont pas les degrés de liberté physiques attachés à chaque nœud mais des variables modales. Le passage des degrés de liberté d'un nœud quelconque N_k de la roue (denture exclue) à ceux de la sous-structure s'effectue au moyen de la matrice modale tronquée suivante :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{Nk} \\ \mathbf{v}_{Nk} \\ \mathbf{w}_{Nk} \end{Bmatrix} = [\phi_N(N_k)] \cdot \{q\} \quad (\text{Eq.2-34})$$

où $[\phi_N(N_k)]$ contient les lignes de la matrice $[\phi_N]$ correspondant aux trois degrés de liberté du nœud N_k . L'expression du rapprochement normal pour un élément d'engrenage extérieur devient alors :

$$\delta(M_{ij}) = \{V_G(M_{ij})\}^T \cdot \{X\} \quad (\text{Eq.2-35})$$

Avec

$\{V_G(M_{ij})\}$: Vecteur de structure global donné par :

$$\{V_G(M_{ij})\}^T = \left\{ \begin{array}{c} \{V_1(M_{ij})\}^t [P_1(M_{ij})] \\ V_{Mp_{ij}}(M_{ij}) \cdot [Q(M_{p_{ij}})] \cdot \begin{bmatrix} \phi_N(N_1) \\ \dots \\ \phi_N(N_8) \end{bmatrix} \end{array} \right\}^T \quad (\text{Eq.2-36})$$

$\{X\}$: Vecteur des degrés de liberté global, il contient les 12 degrés de liberté du pignon $\{X_1\}$ et les degrés de liberté modaux $\{q\}$ et s'écrit sous la forme :

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} \{X_1\} \\ \{q\} \end{Bmatrix} \quad (\text{Eq.2-37})$$

2.6 Mise en place et résolution des équations de mouvement

2.6.1 Equation de mouvement

2.6.1.1 Assemblage des matrices élémentaires

Par hypothèse, l'énergie cinétique des dents est négligée devant celle du corps de l'engrenage et seules les contributions statiques des fondations de Pasternak [60] seront prises en considération. Cette hypothèse classique en dynamique de l'engrenage revient à négliger l'influence des modes propres à chaque dent (qui sont à très hautes fréquences) devant les modes plus globaux mettant en jeu les arbres, paliers et corps d'engrenages à plus basses fréquences. L'application des équations de Lagrange sur les différents éléments de notre modélisation définis dans ce chapitre conduit aux équations du mouvement de l'ensemble du système mécanique qui peuvent s'exprimer sous la forme :

$$\begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [M_{xq}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{\omega}_1\} \\ \{\dot{\omega}_2\} \\ \{\ddot{x}\} \\ \{\ddot{q}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [C_{xq}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{\omega}_1\} \\ \{\dot{\omega}_2\} \\ \{\dot{x}\} \\ \{\dot{q}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{\omega_1\omega_2}] & [K_{\omega_1\omega_2 xq}] \\ [K_{qx\omega_2\omega_1}] & [K_{xq}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\omega_1\} \\ \{\omega_2\} \\ \{x\} \\ \{q\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_{\omega_1\omega_2}\} \\ \{F_{xq}\} \end{Bmatrix} \quad (\text{Eq.2-38})$$

En notant n , le nombre de degrés de liberté du système amputé des fondations de Pasternak, N nombre de mode choisi pour notre réduction modale de sous structure et N_1 , N_2 , le nombre de segments de discrétisation à l'instant t sur les fondations du pignon et de la roue respectivement, les quantités suivantes sont définies :

$[M_{xq}]$: matrice masse globale (dimension $[n, n]$). définie par :

$$[M_{xq}] = \begin{bmatrix} [M_x] & [0] \\ [0] & [M_{red}] \end{bmatrix} \quad (\text{Eq.2-39})$$

Avec :

$[M_x]$: matrice masse de la partie motrice composée du pignon et de ses conditions de support (arbre et moteur) (dimension $[24, 24]$).

$[M_{red}]$: matrice masse modale réduites de notre sous-structure qui représente toute la partie réceptrice de la transmission (dimension $[N, N]$) définie au 2.2.1.

$\begin{bmatrix} [K_{\omega_1 \omega_2}] & [K_{\omega_1 \omega_2 xq}] \\ [K_{qx \omega_2 \omega_1}] & [K_{xq}] \end{bmatrix}$: matrice raideur globale dépendante du temps, des déplacements attribués aux dents et des coordonnées généralisées du système (dimension $[N_1+N_2+n, N_1+N_2+n]$).

$\{F_{xq}\}$: vecteur des efforts extérieurs généralisés, dépendant du temps et regroupant les termes des efforts statiques ainsi que les termes d'excitations introduits par les erreurs de montage (dimension $[n, 1]$).

$\{F_{\omega_1 \omega_2}\}$: vecteur dépendant du temps introduisant l'effet des écarts géométriques (dimension $[N_1+N_2, 1]$).

$\{x\}$: vecteur des variables d'état constitué par les coordonnées généralisées de la partie motrice de notre réducteur modélisé par 4 nœuds ayant chacune six degrés de liberté (dimension $[24, 1]$).

$\{q\}$: vecteur constitué par les degrés de liberté modaux de notre sous structure qui constitue la partie réceptrice de notre réducteur (dimension $[N, 1]$).

$\{\omega_1\}$ et $\{\omega_2\}$ sont respectivement les déplacements attribués aux fondations élastiques du pignon (dimension $[N_1, 1]$) et de la roue (dimension $[N_2, 1]$).

$[C_{xq}]$: matrice amortissement globale (dimension $[n, n]$), construite à partir de la matrice masse globale $[M_{xq}]$ et de la matrice de rigidité globale du réducteur moyennée sur le temps et l'espace $[\bar{K}_{xq}]$. En supposant que la matrice amortissement est orthogonale par rapport aux modes propres du système avec raideurs moyennées, il vient :

$$c_{jk}^{\phi} = 2\xi_j \sqrt{k_{jk}^{\phi} m_{jk}^{\phi}} \quad \text{avec} \quad c_{jk}^{\phi} = 0 \quad \text{pour} \quad j \neq k \quad (\text{Eq.2-40})$$

où

c_{jk}^ϕ : composante de la matrice $[C_\phi]$.

k_{jk}^ϕ : composante diagonale de la matrice raideur modale $[K_\phi] = [\phi] \cdot [\bar{K}_{qq}] \cdot [\phi]$.

m_{ij}^ϕ : composante diagonale de la matrice masse modale $[M_\phi] = [\phi] \cdot [M_{qq}] \cdot [\phi]$.

$[\phi]$: matrice des modes propres pour le système avec raideur moyennée.

ξ_j : facteur d'amortissement modal relatif au mode j.

Pour des raisons de simplicité, une valeur de ξ_j commune à l'ensemble de tous les modes est fréquemment retenue. Compte tenu du grand nombre et de la diversité des modes mis en jeu dans le modèle, nous proposons d'estimer les facteurs d'amortissement modaux par une moyenne pondérée basée sur les pourcentages d'énergie de déformation affectés à la denture d'une part et au reste de la structure d'autre part, soit :

$$\xi_j = \xi_{\text{engrenage}} \rho_j + (1 - \rho_j) \xi_{\text{structure}} \quad (\text{Eq.2-41})$$

avec :

ρ_j : pourcentage de déformation modal de la denture relatif au mode j.

$\xi_{\text{engrenage}}$ prend une valeur typique du facteur d'amortissement pour les dentures qui, en s'appuyant sur les travaux expérimentaux d'Umezawa et al. [123] à [133], se situe entre 0.03 et 0.07. $\xi_{\text{structure}}$ est, quant à lui, représentatif de l'amortissement dans les parties structurelles pour lesquelles une valeur de l'ordre de 0.01 semble raisonnable.

La matrice d'amortissement est alors exprimée dans la base physique par la transformation inverse :

$$[C_{qq}] = [\phi] \cdot [C_\phi] \cdot [\phi]^{-1} \quad (\text{Eq.2-42})$$

2.6.1.2 Condensation statique des équations du mouvement

Afin de réduire le nombre d'inconnues pour la résolution des équations du mouvement, l'équation II-38 est décomposée sous la forme suivante :

$$\begin{cases} [K_{\omega_1\omega_2}] \begin{Bmatrix} \{\omega_1\} \\ \{\omega_2\} \end{Bmatrix} + [K_{\omega_1\omega_2 xq}] \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{q\} \end{Bmatrix} = \{F_{\omega_1\omega_2}\} \\ [M_{xq}] \begin{Bmatrix} \{\ddot{x}\} \\ \{\ddot{q}\} \end{Bmatrix} + [C_{xq}] \begin{Bmatrix} \{\dot{x}\} \\ \{\dot{q}\} \end{Bmatrix} + [K_{xq\omega_1\omega_2}] \begin{Bmatrix} \{\omega_1\} \\ \{\omega_2\} \end{Bmatrix} + [K_{xq}] \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{q\} \end{Bmatrix} = \{F_{xq}\} \end{cases} \quad (\text{Eq.2-43})$$

La première équation de ce système conduit à :

$$\begin{Bmatrix} \{\omega_1\} \\ \{\omega_2\} \end{Bmatrix} = [K_{\omega_1\omega_2}]^{-1} \left(\{F_{\omega_1\omega_2}\} - [K_{\omega_1\omega_2 xq}] \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{q\} \end{Bmatrix} \right) \quad (\text{Eq.2-44})$$

(Eq.2-44) introduite dans le 2^{ème} système différentiel donne finalement :

$$[M_{xq}] \begin{Bmatrix} \{\dot{x}\} \\ \{\dot{q}\} \end{Bmatrix} + [C_{xq}] \begin{Bmatrix} \{\dot{x}\} \\ \{\dot{q}\} \end{Bmatrix} + [K(t, \omega_1, \omega_2, x, q)] \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{q\} \end{Bmatrix} = \{F(t, \omega_1, \omega_2, x, q)\} \quad (\text{Eq.2-45})$$

avec :

$$\begin{aligned} [K(t, \omega_1, \omega_2, x, q)] &= [K_{xq}] - [K_{xq\omega_1\omega_2}] [K_{\omega_1\omega_2}]^{-1} [K_{\omega_1\omega_2 xq}] \\ \{F(t, \omega_1, \omega_2, x, q)\} &= \{F_{xq}\} - [K_{xq\omega_1\omega_2}] [K_{\omega_1\omega_2}]^{-1} \{F_{\omega_1\omega_2}\} \end{aligned} \quad (\text{Eq.2-46})$$

Il s'agit d'un système d'équations différentielles du second ordre à excitations paramétriques éventuellement non-linéaires.

2.6.2 Résolution numérique

La forme explicite de la dépendance entre les raideurs de contact, les variables d'état et les écarts géométriques est bien sûr inconnue. C'est la raison pour laquelle, toute étude analytique des équations du mouvement est rejetée. L'une des idées directrices dans nos développements a consisté à tenir compte des conditions de contact normal au sein du processus d'intégration pas à pas (Valex. [134], Maatar. [78]). Le schéma implicite de Newmark a été retenu et a été couplé à un algorithme de contact normal unilatéral. Le principe de résolution et l'interdépendance entre les équations du mouvement et les conditions de contact sont explicités dans la Figure II-14.

Il s'agit, en résumé, de travailler, à chaque pas de temps, sur deux boucles complémentaires, la première vérifie qu'il n'existe pas d'efforts de contact négatifs et détermine une longueur de contact potentielle L_c , tandis que la seconde vérifie qu'en tout point extérieur à L_c il n'y a pas d'écrasement. Après convergence des deux boucles, le système est résolu selon le même procédé au pas de temps suivant.

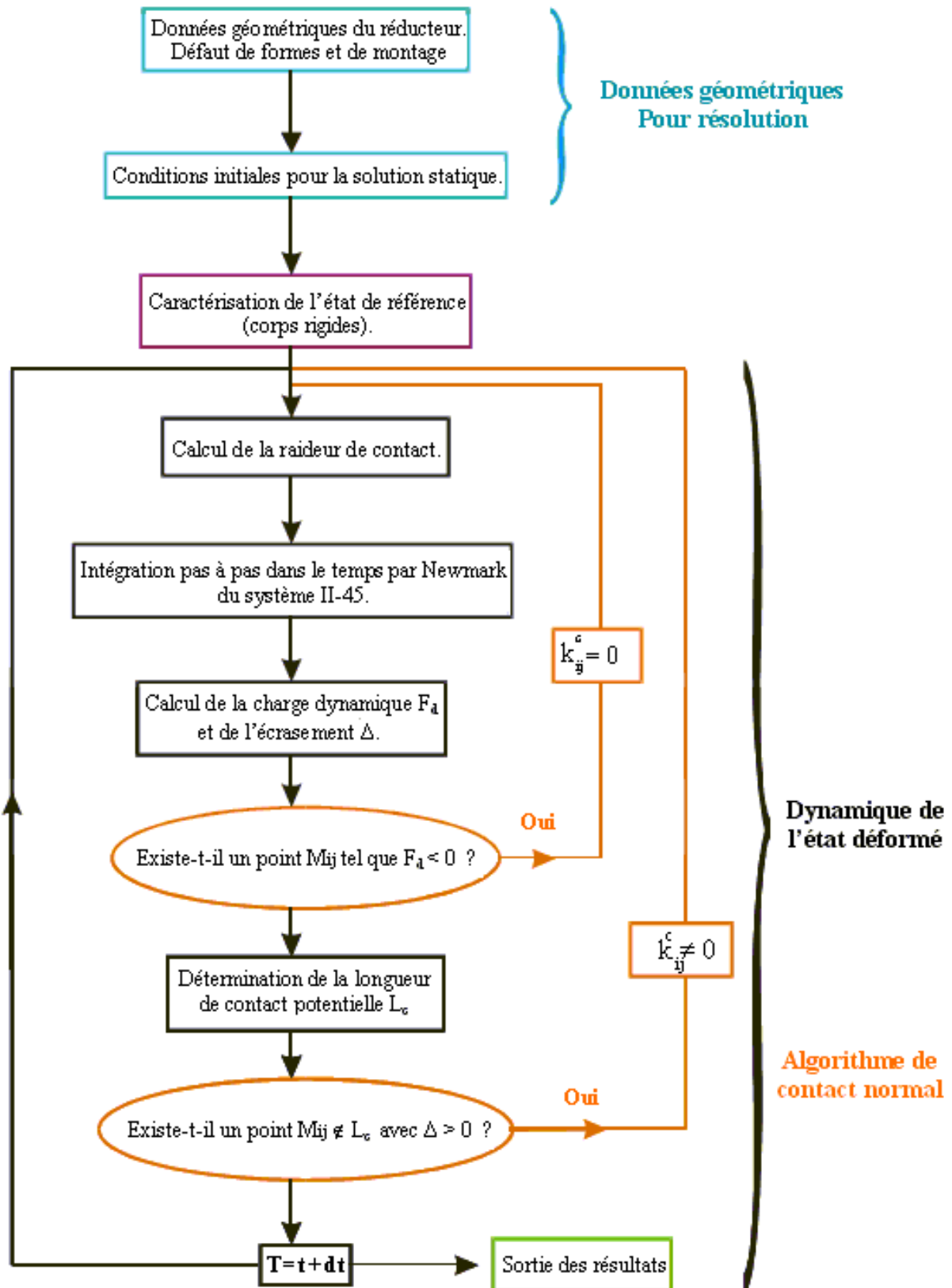


Figure II-14 : Schéma de résolution de Newmark couplé à un algorithme de contact.

3 Eléments de validation

Les éléments de validation présentés dans ce paragraphe reposent principalement sur des comparaisons avec a) le modèle mis en place par Ajmi [5] reposant sur des représentations de type poutre pour les corps du pignon et de la roue et b) les résultats issus un modèle éléments finis tridimensionnels statique appliqué à un cas de roue à voile mince asymétrique (Li [70]). Dans ce qui suit, les dentures sont supposées parfaites et les principales données géométriques et de fonctionnement des engrenages étudiés sont portées dans le Tableau II-1.

	Pignon	Roue
Module (mm)	4	
Nombre de dents Z	50	50
Angle de pression de taillage α_0 (°)	20	
Angle d'hélice primitif β (°)	0	
Couple moteur (Nm)	294	

Tableau II-1: Caractéristiques du réducteur étudié.

La géométrie de la roue à voile mince est définie sur la Figure II-15.

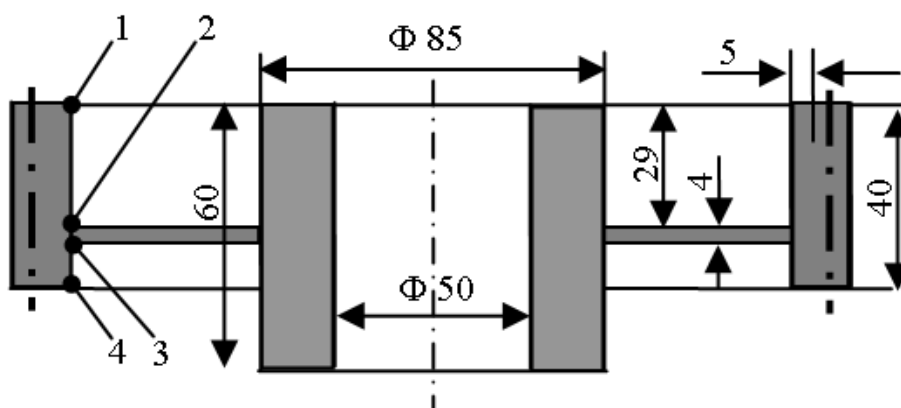


Figure II-15 : Géométrie de la roue à voile mince [70].

Le modèle basé sur des poutres ne pouvant pas intégrer la présence d'un voile mince, une roue massive a été considérée afin de déterminer les distributions de charge quasi-statique

et les évolutions du coefficient dynamique maximal. Les parties motrice et réceptrice sont modélisées par des éléments poutres. En revanche, dans le modèle hybride, si la partie motrice est toujours modélisée par des éléments poutre, la partie réceptrice est décrite par un maillage éléments finis tridimensionnel.

La sous-structuration de la partie réceptrice du modèle développé (cf. § 2.2.1) consiste en une méthode pseudo-modale s'appuyant sur une base tronquée de vecteurs propres de la structure non amortie. Du choix de cette base modale tronquée dépend la qualité de l'approximation déplacements à l'intérieur de la sous-structure et donc de la solution au problème. Pour des raisons de mise en œuvre pratique, les modes ont été choisis en fonction de leurs fréquences et les N modes de fréquences les plus basses ont été conservés.

L'évolution du coefficient dynamique maximal du réducteur défini Tableau II-1 est tracée sur la Figure II-16 en fonction de la vitesse du pignon et ce, pour des nombres de modes croissants (N = 30, 50 et 70 modes). Le coefficient dynamique maximal est défini par la relation suivante :

$$R = \max \left[\frac{f(t)}{F_s} \right] \quad (\text{Eq.2-47})$$

Avec :

R : coefficient dynamique maximal.

f(t) : effort dynamique global.

F_s : charge statique globale.

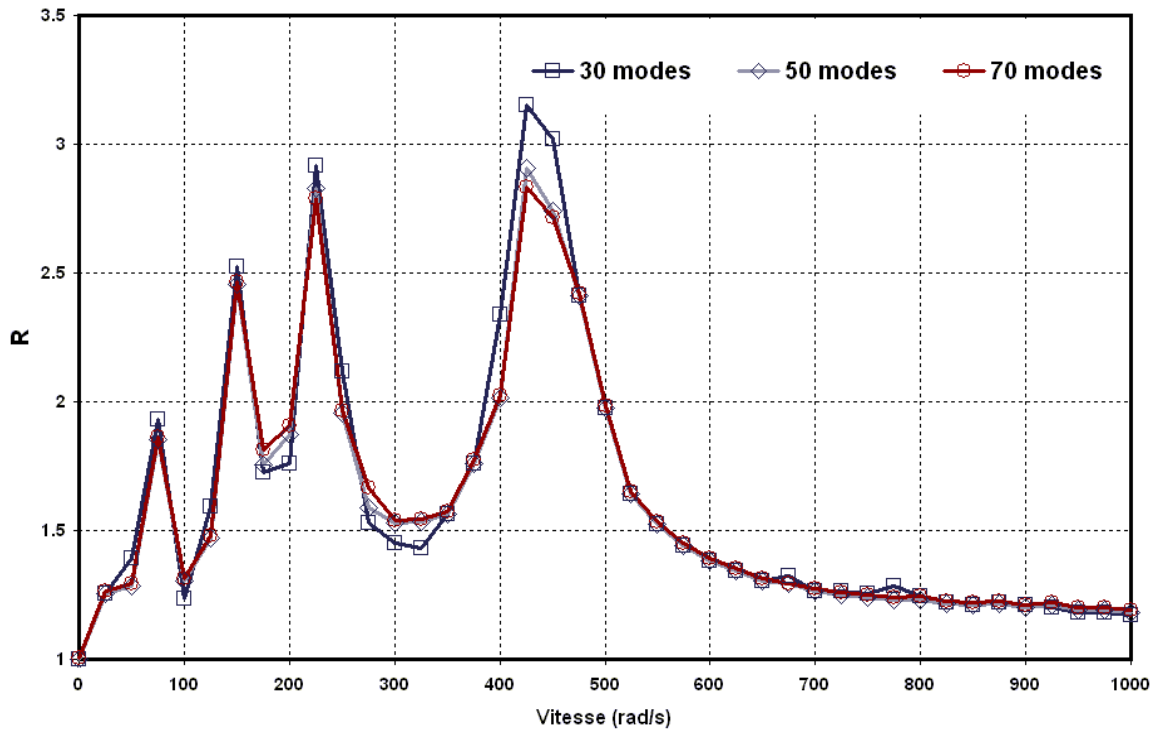
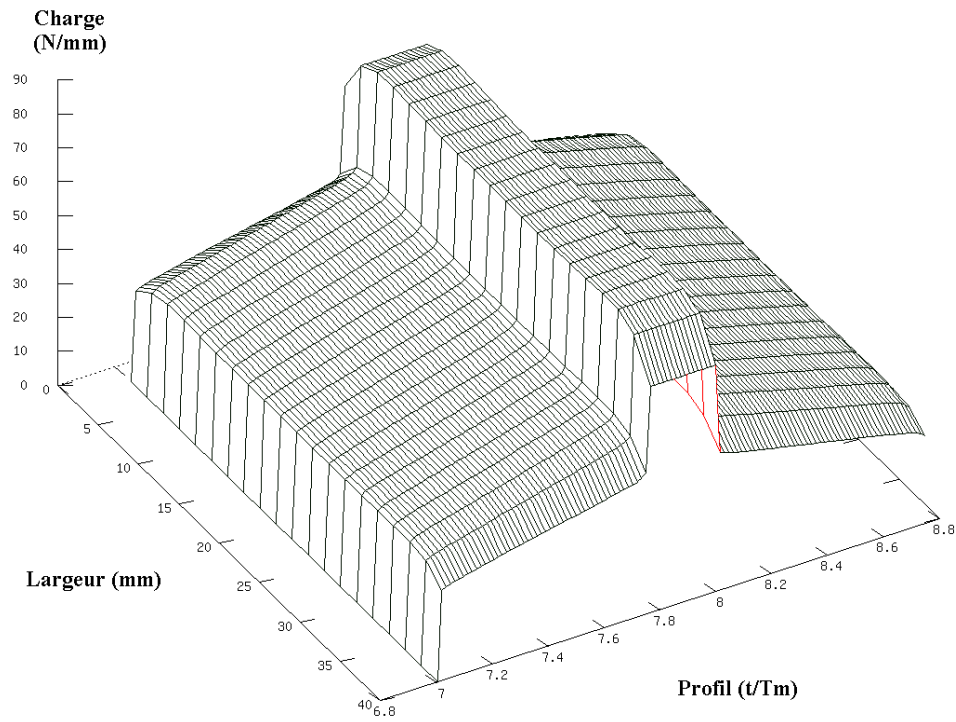


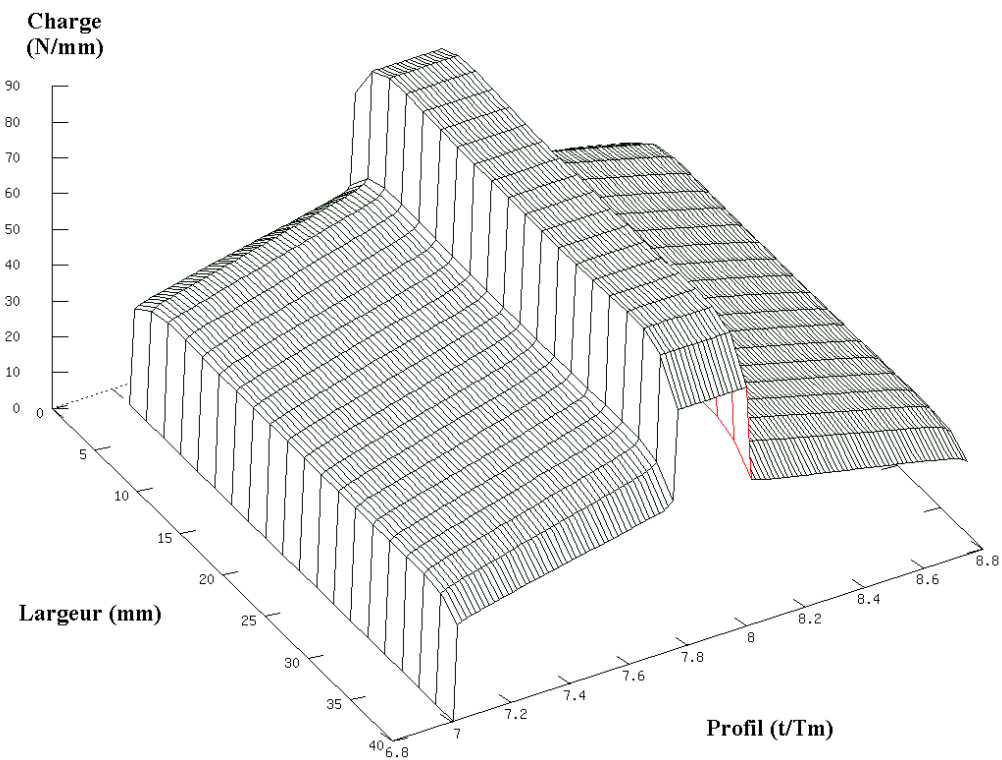
Figure II-16 : Influence du nombre de modes sur l'évolution du maximum du coefficient dynamique en fonction de la vitesse de rotation du moteur.

La réponse dynamique apparaît comme peu sensible au nombre de modes conservés et, dans ce cas précis, il semble que 50 modes soient suffisants pour réaliser la condensation.

Une nappe de distribution de charge sur un engrenement représente l'évolution de la charge linéique en fonction de la position sur le profil et selon la largeur de la dent. Le défilement du contact selon le profil des dents est caractérisé par le temps adimensionné t/T_m (T_m : période d'engrenement) qui est proportionnel à la distance parcourue par les lignes de contact sur le plan d'action. La Figure II-17 et la Figure II-18 représentent, respectivement les distributions de charge quasi statique et la réponse dynamique qui, pour chaque cas, sont calculées par le modèle hybride développé et le modèle poutre. Il est important de signaler que le modèle poutre a été validé numériquement et expérimentalement à travers des comparaisons avec, entre autre, les travaux de Haddad et Pennel [35], Sainsot [105], le code de calcul Rikor [97]. Le bon accord observé sur les résultats des Figures II-17 et II-18 permet de valider les développements théoriques sur lesquels repose le nouveau modèle hybride.



a) modèle hybride



a) modèle poutre

Figure II-17 : Comparaison de la distribution de charge quasi statique du réducteur (modèle hybride et modèle poutre [5]).

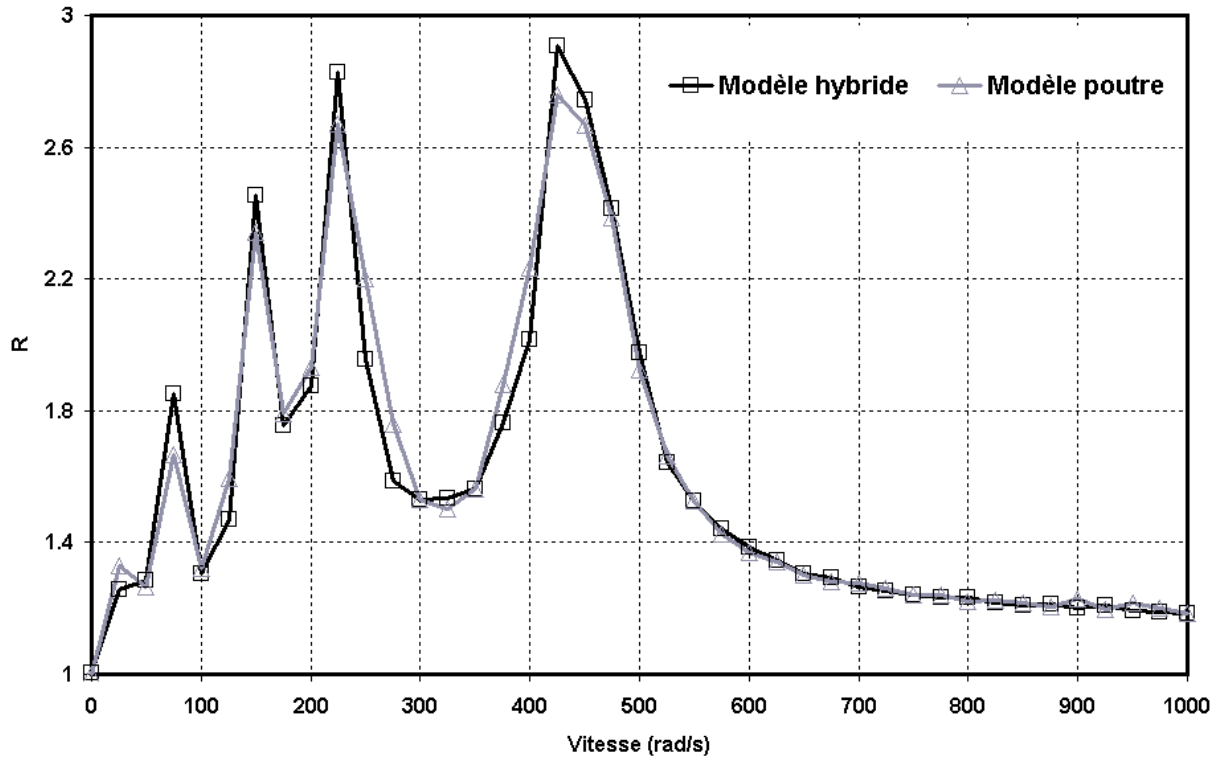
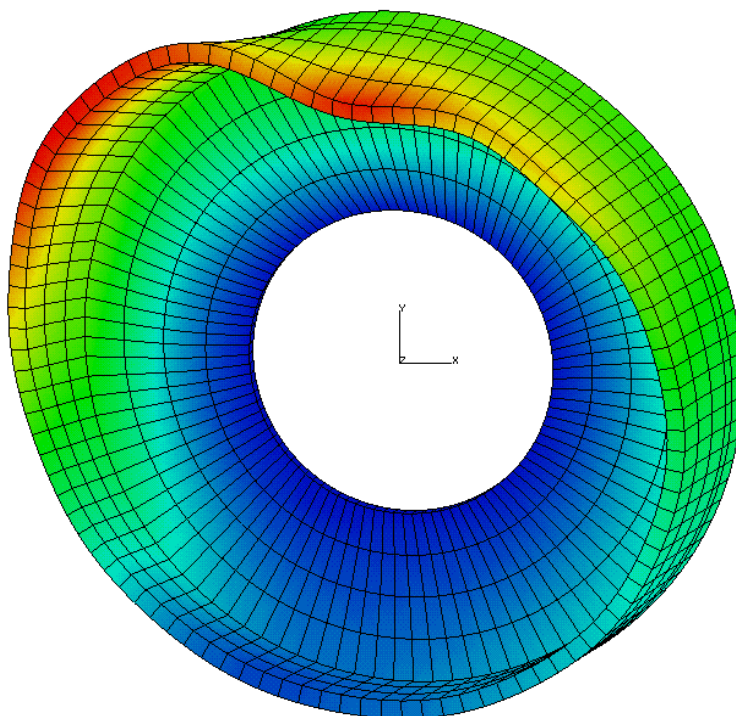
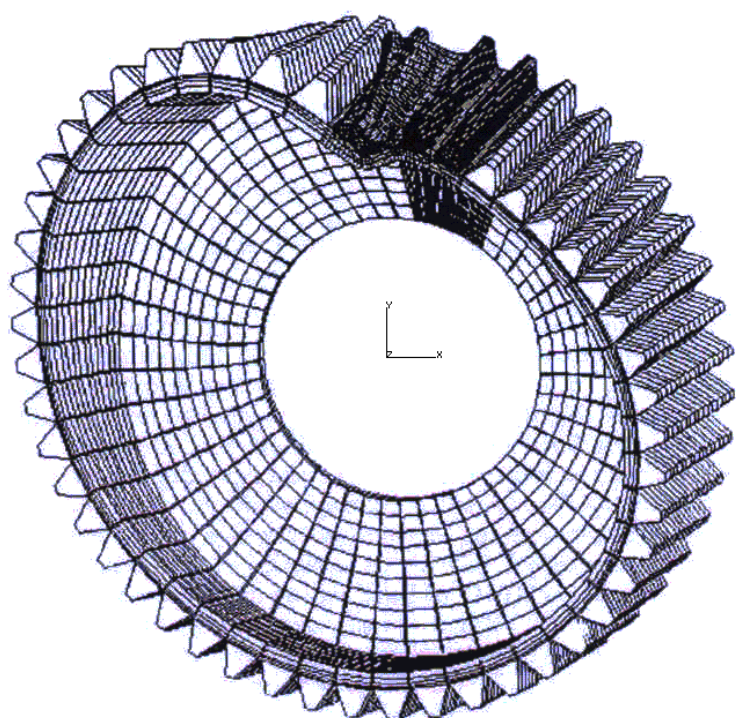


Figure II-18 : *Evolution du maximum du coefficient dynamique en fonction de la vitesse de rotation du moteur.*

Les résultats dans les Figures II-19, II-20 et II-21 ont été déterminés avec le modèle hybride développé et le modèle de Li [70] appliqué à un cas de roue à voile mince asymétrique (Figure II-15). Les figures représentent respectivement : la déformée statique de la roue, la largeur de contact pour une position particulière de l'engrènement et l'évolution du déplacement radial adimensionné par rapport au déplacement radial maximum pour quatre points selon la largeur de la denture (Figure II-15).

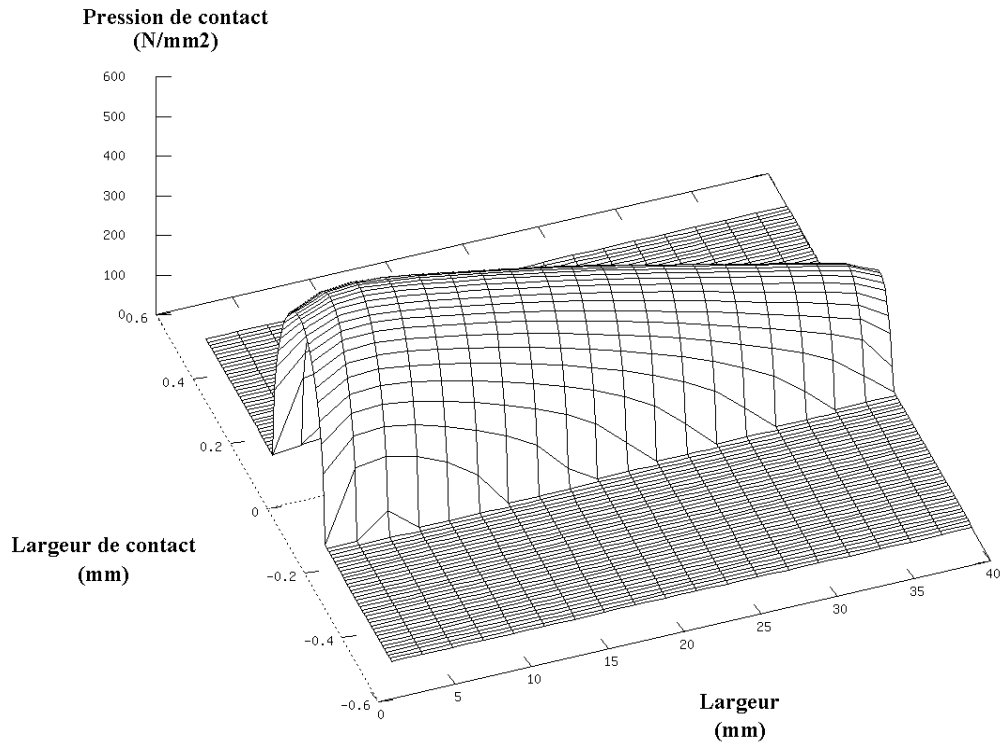


Modèle hybride

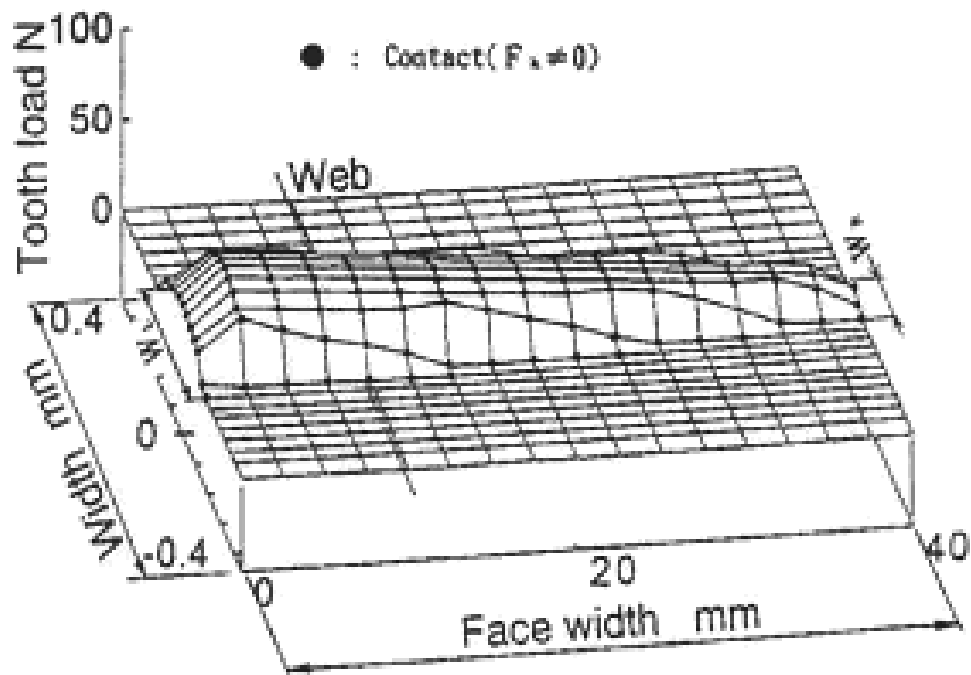


Modèle Li [70]

Figure II-19 : *Déformée statique de la roue à voile mince.*



Modèle hybride



Modèle Li [70]

Figure II-20 : Pression de contact sur la denture.

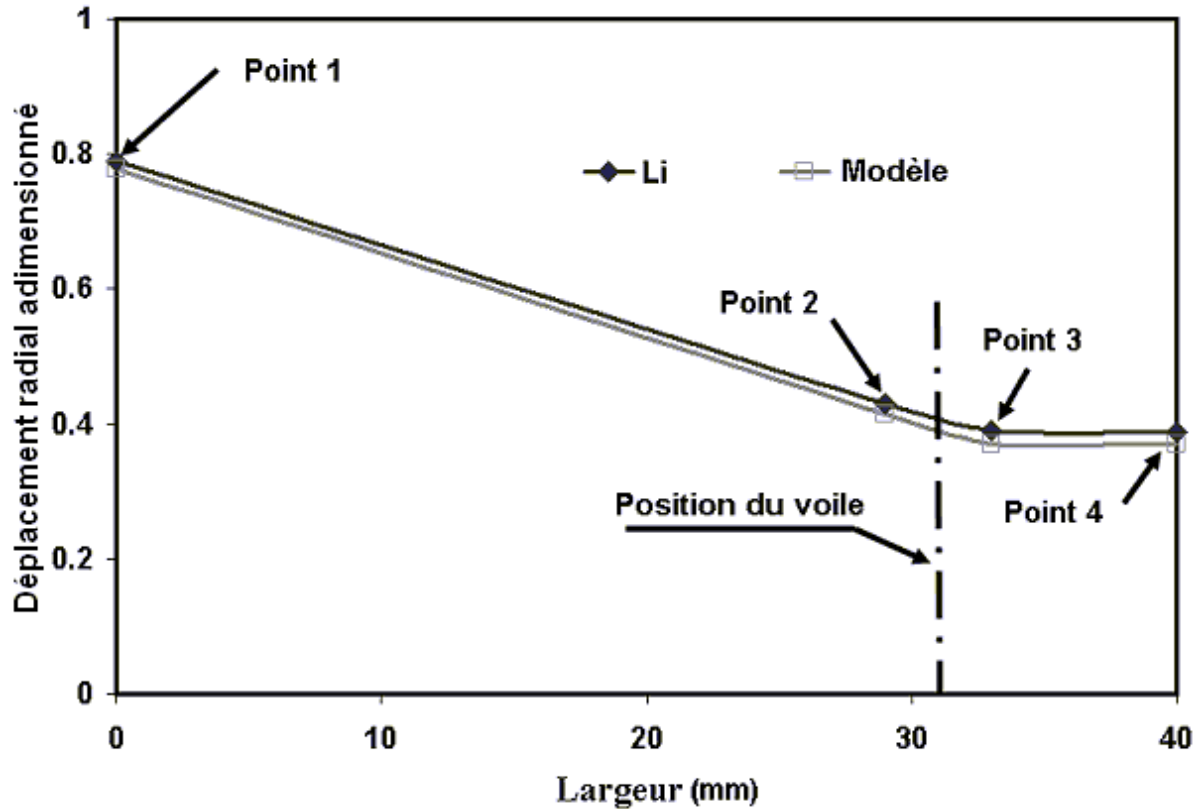


Figure II-21 : *Déplacement radial adimensionné en fonction de la largeur de denture*
Comparaison avec le modèle de S. Li [70] (la position des points est donnée sur la Figure II-15).

A partir de ces trois figures précédentes, les résultats issus du modèle proposé montre un bon accord avec ceux du modèle de Li [70]. On note que la roue est fortement tordue et ne peut pas être assimilée à un corps massif, les débattements élastiques du voile-jante de la roue changent également le chargement de denture suite au désalignement sous charge des flancs du pignon et de la roue et conduisent une augmentation du chargement sur un coté de la denture.

4 Conclusion

Les développements présentés dans ce chapitre ont permis, par une méthode originale, de prédire le comportement statique et dynamique de réducteurs à engrenages comportant des éléments de structures flexibles. Le modèle développé est une approche hybride qui consiste à combiner des éléments finis de poutre classiques, des fondations élastiques pour les contacts entre dents et, pour les parties structurelles flexibles des sous structures issues de modèles éléments finis tridimensionnels. L'arbre et le corps du pignon (denture exclue) sont modélisés par des éléments de poutres en flexion, torsion et traction compression. Le contact entre deux dents est assimilé à deux fondations élastiques de Pasternak de caractéristiques différentes liées par des raideurs de contact indépendantes, ce qui permet de tenir compte des couplages élastiques entre points de contact. Pour intégrer un corps de roue à voile mince (denture exclue), un maillage éléments finis tridimensionnel de type brique est construit. L'introduction de ce maillage dans les équations du mouvement impose une réduction de taille de ce modèle qui, dans ce cas, est réalisé via une méthode pseudo-modale. La validation de la modélisation proposée a été essentiellement basée sur des comparaisons avec un modèle poutre (Ajmi [5]) et un modèle éléments finis tridimensionnels purement statique appliqué à un cas de roue à voile mince asymétrique (Li [70]). Une bonne correspondance a été notée avec les résultats du modèle poutre (distribution de charge et réponse dynamique) et ceux du modèle de Li (largeur de contact, déformée statique et déplacement radial).

Chapitre 3 :

Applications quasi-statiques

1 Introduction

Ce chapitre a pour but d'illustrer les potentialités et l'intérêt du modèle hybride à travers une série d'applications numériques portant sur le comportement statique et quasi-statique (faibles vitesses de rotation) de réducteurs simple étage possédant des éléments déformables (roues flexibles principalement).

L'effet de la flexibilité de la roue sur les conditions de fonctionnement d'un réducteur d'engrenages en statique et en régime quasi-statique est analysé. Dans une première partie, pour des dentures droites et hélicoïdales, l'influence de la géométrie de la roue (roue massive et roue à voile mince) sur la déformée statique, la distribution de charges, les déplacements de certains nœuds situés au long de la fibre neutre de la roue et l'erreur de transmission est notamment mise en évidence à partir de modèle Eléments finis 3D. Pour chaque géométrie de roue étudiée, deux largeurs de dentures sont considérées.

Dans une seconde partie, on démontre l'apport du modèle sur un exemple industriel. Il s'agit d'un réducteur simple étage ayant une géométrie de roue assez particulière. Le comportement est comparé à celui d'un réducteur équivalent ayant une roue massive afin de mettre en évidence l'intérêt de tenir compte de la flexibilité des composantes dans un réducteur à engrenage.

2 Exemple académique

2.1 Description du modèle

Tous les résultats présentés dans cette partie concernent un réducteur dont les caractéristiques géométriques sont détaillées dans le Tableau III-1 ci-dessous. Pour deux largeurs de dentures différentes égales à 100 mm et 200 mm, deux géométries de roue sont présentées : un cas de roue massive et un cas de roue à voile mince en denture droite et hélicoïdale ($\beta = 30^\circ$).

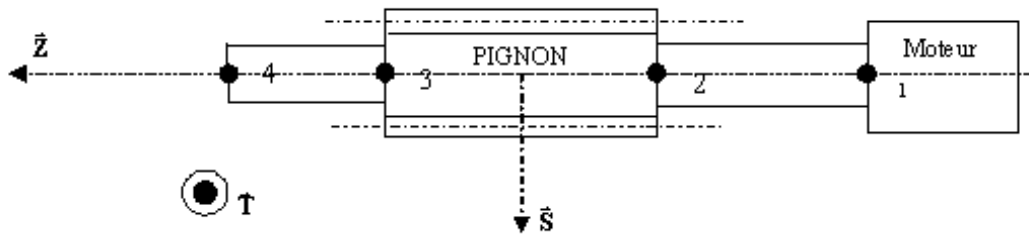
	Pignon	Roue
Module (mm)	4	
Nombre de dents Z	25	80
Angle de pression de taillage α_0 (°)	20	
Angle d'hélice primitif β (°)	0/30	
Largeur (mm)	100/200	100/200
Coefficient de saillie h_a	1	1
Coefficient de creux h_f	1,4	1,4
Rayon de raccordement R_c (mm)	0,38	0,38
Diamètre intérieur de l'engrenage (mm)	0	0
Couple moteur (Nm)	800	

Tableau III-1: Caractéristique du réducteur étudié.

Tous les constituants du réducteur sont en acier de module d'Young $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Pa, de coefficient de Poisson $\nu = 0,3$ et de masse volumique $\rho = 7800$ kg/m³.

2.2 Modélisation de la partie motrice du réducteur

Le corps du pignon (denture exclue) considéré massif ainsi que l'arbre moteur sont modélisés par des éléments de poutre à deux nœuds et six degrés de liberté par nœud (Figure II-2). Cette partie motrice est supportée par des raideurs concentrées simulant des paliers et appliquées respectivement aux nœuds 1 et 4 (Figure III-1).

Figure III-1: *Modélisation de la partie motrice.*

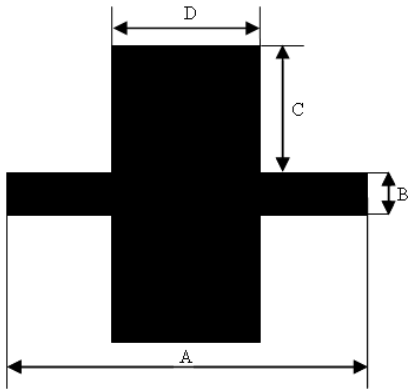
Les valeurs de raideurs appliquées aux nœuds 1 et 4 sont définies dans le Tableau III-2 :

Raideur axiale K_u (N/m)	$1,0 \cdot 10^9$
Raideur radiale K_v (N/m)	$1,0 \cdot 10^8$
Raideur tangentielle K_w (N/m)	$1,0 \cdot 10^8$

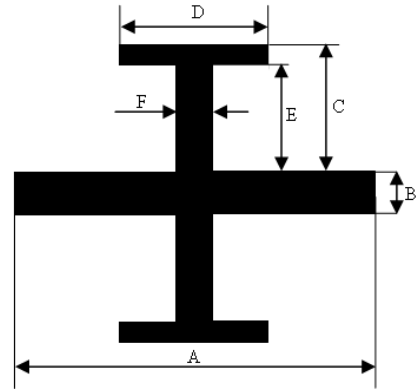
Tableau III-2 : Caractéristiques des raideurs de la partie motrice.

2.3 Modélisation de la partie réceptrice du réducteur

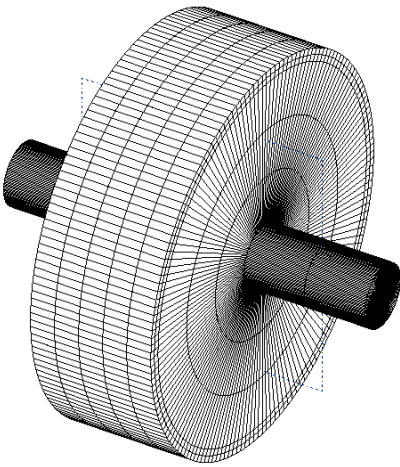
La partie réceptrice du réducteur étudié est constituée par le corps de la roue et son arbre, elle est modélisée par un maillage tridimensionnel d'éléments finis de type brique réduit par une méthode de sous structuration pseudo modale (voir 2.2). Deux géométries sont considérées pour la roue : une roue massive et une roue à voile mince. Deux largeurs différentes de denture sont étudiées (100 mm et 200 mm). Les deux maillages de ces deux types de géométrie de roue ainsi que les données géométriques associées à chacune des deux largeurs, sont représentés sur la Figure III-2. Les géométries avec des largeurs de 200 mm représentent clairement des cas extrêmes qui, néanmoins, permettent d'amplifier et de mettre ainsi en lumière l'influence d'une roue à voile mince sur le comportement statique d'engrenages à dentures larges.



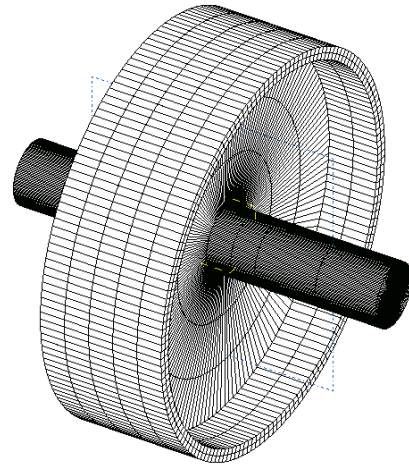
Données géométriques (roue massive)



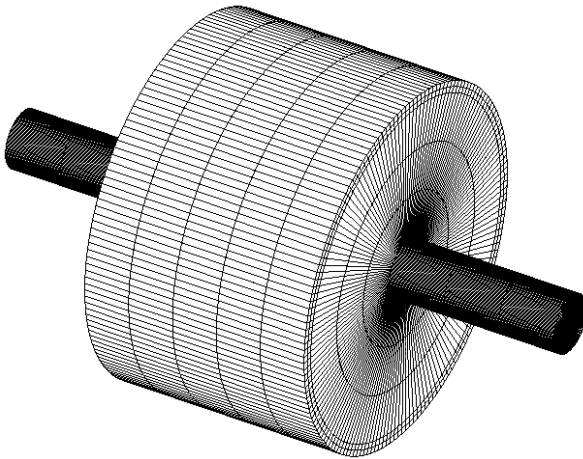
Données géométriques (roue à voile mince)



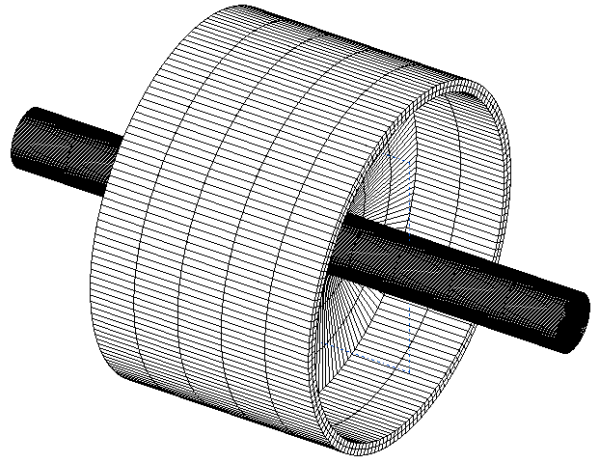
a) Roue massive, largeur = 100 mm



b) Roue à voile mince, largeur = 100 mm



c) Roue massive, largeur = 200 mm



d) Roue à voile mince, largeur = 200 mm

Figure III-2 : Modélisation de la partie réceptrice.

Les données géométriques et les détails du maillage de la partie réceptrice pour chaque configuration de la Figure III-2 sont donnés dans le Tableau III-3.

	Largeur 100 mm		Largeur 200 mm	
	Roue massive	Roue à voile mince	Roue massive	Roue à voile mince
Nombre de nœuds total	24659	18899	25943	20183
Nombre de modes dynamiques retenus pour la condensation	50	50	50	50
A (mm)	300	300	500	500
B (mm)	25	25	25	25
C (mm)	154.4	154.4	154.4	154.4
D (mm)	100	100	200	200
E (mm)	-	10	-	10
F (mm)	-	20	-	40

Tableau III-3 : Modélisation et données géométriques de la partie réceptrice.

Pour les conditions de suspension, la partie gauche de l'arbre récepteur est supportée par des raideurs concentrées appliquées en cinq nœuds du maillage comme représenté Figure III-3. Ce modèle permet de simuler un palier et une raideur torsionnelle destinée à éliminer la rotation de corps rigide.

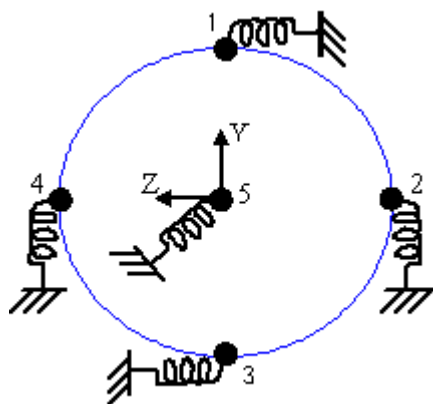


Figure III-3 : Conditions de support coté arbre gauche de la partie réceptrice.

Les valeurs de ces raideurs sont définies dans le Tableau III-4 :

Raideur axiale K_u (N/m)	Nœud 5	$1,0 \cdot 10^9$
Raideur radiale K_v (N/m)	Nœud 2 et 4	$0,5 \cdot 10^9$
Raideur tangentielle K_w (N/m)	Nœud 1 et 3	$0,5 \cdot 10^9$

Tableau III-4 : Caractéristiques des raideurs de palier coté arbre gauche de la partie réceptrice.

Le côté droit de la partie réceptrice est, quant à lui, supporté par trois raideurs concentrées appliquées à un nœud au niveau de la fibre neutre comme le montre la Figure III-4 :

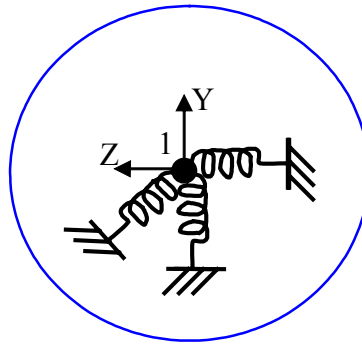


Figure III-4 : Conditions de support coté arbre droit de la partie réceptrice.

Les valeurs de ces raideurs sont définies dans le Tableau III-5 :

Raideur axiale K_u (N/m)	$1,0 \cdot 10^9$
Raideur radiale K_v (N/m)	$1,0 \cdot 10^9$
Raideur tangentielle K_w (N/m)	$1,0 \cdot 10^9$

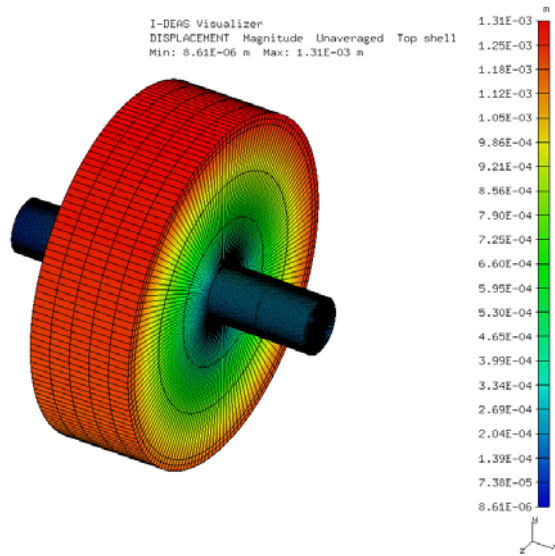
Tableau III-5 : Caractéristiques des raideurs de palier coté arbre droit de la partie réceptrice.

2.4 Comportement quasi-statique du réducteur

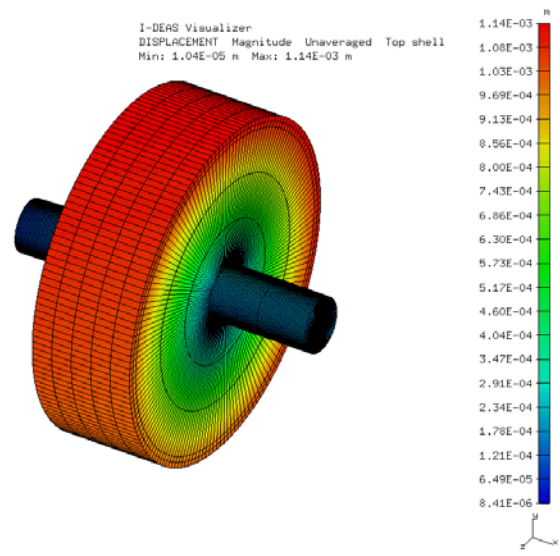
La solution quasi-statique est obtenue en résolvant le système d'équations du mouvement (cf. (Eq. 2-45)) dont les termes inertiels ont été négligés. Cela revient à simuler le comportement du réducteur à de très faibles vitesses de rotation de sorte que les composantes en $\{\dot{X}\}$ et $\{\ddot{X}\}$ puissent être omises. Pour les deux largeurs de denture prises (100 mm et 200 mm), la solution statique est recherchée pour un réducteur sans défaut ayant, dans un premier cas, une géométrie de roue massive et, dans un deuxième cas, une géométrie de voile mince en denture droite et hélicoïdale ($\beta = 30^\circ$). Pour chaque configuration étudiée (Figure III-2), on calcule la déformée statique, la distribution de charge sur les dentures, les composantes des déplacements de certains nœuds répartis sur la fibre neutre de la roue et l'erreur de transmission du réducteur ainsi que le spectre associée.

2.4.1 Déformée statique

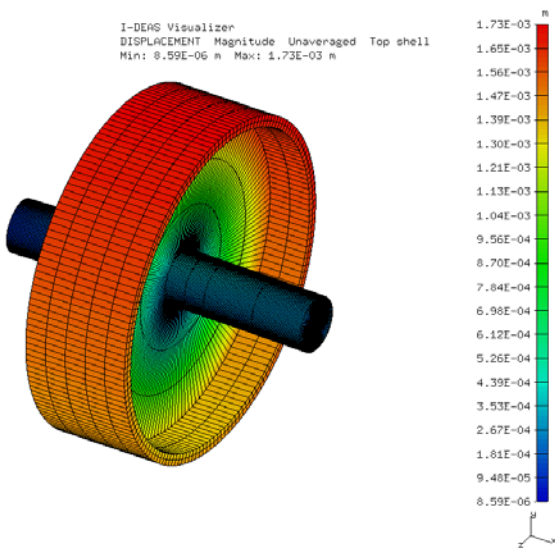
Afin de calculer la solution statique du système, la matrice raideur d'engrènement définie par le terme : $[K(t, \omega_1, \omega_2, x, q)]$ ((Eq. 2-45) et (Eq. 2-46)) (qui dépend du temps, des déplacements attribués aux dents et des coordonnées généralisées du système) est moyennée en temps et en espace sur une période d'engrènement. L'état déformé de la partie réceptrice (roue + arbres) est calculé pour différentes configurations et est représenté sur la Figure III-2. Pour des largeurs de denture de 100 mm et 200 mm, la Figure III-5 et la Figure III-6 représentent respectivement, l'état déformé statique de la partie réceptrice pour une roue massive et pour une roue à voile mince avec des dentures droites et hélicoïdales ($\beta = 30^\circ$).



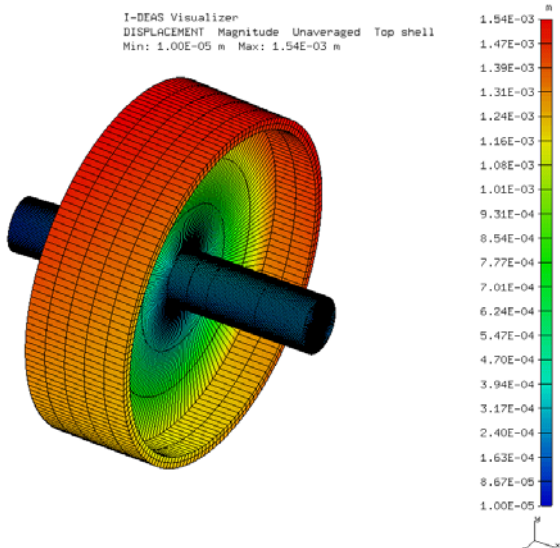
a) roue massive, $\beta = 0^\circ$



b) roue massive, $\beta = 30^\circ$



c) roue à voile mince, $\beta = 0^\circ$



d) roue à voile mince, $\beta = 30^\circ$

Figure III-5 : Déformées statiques de la partie réceptrice du réducteur pour les deux types de géométrie de roue en denture droite et hélicoïdale ayant une largeur 100 mm.

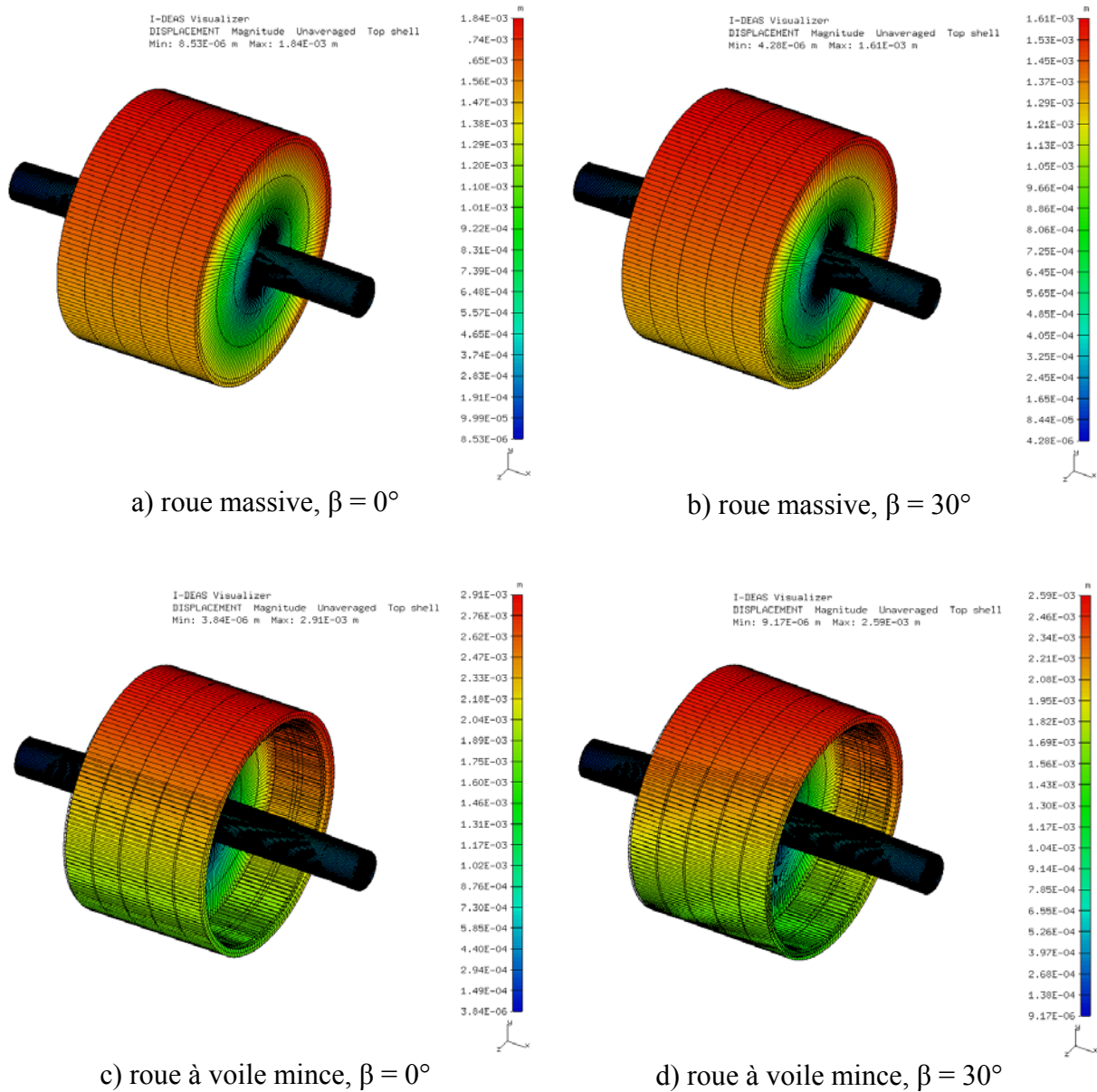


Figure III-6 : Déformées statiques de la partie réceptrice du réducteur pour les deux types de géométrie de roue en denture droite et hélicoïdale ayant une largeur 200 mm.

A partir des déformées statiques ci-dessus, pour chaque cas de largeur de denture (100 mm et 200 mm), les déplacements maximaux des différentes configurations associées, sont déduits et récapitulés dans le Tableau III-6.

	Largeur 100 mm	Largeur 200 mm
<i>Roue massive, $\beta = 0^\circ$</i>	1.31 E-03	1.84 E-03
<i>Roue massive, $\beta = 30^\circ$</i>	1.14 E-03	1.61 E-03
<i>Roue à voile mince, $\beta = 0^\circ$</i>	1.73 E-03	2.91 E-03
<i>Roue à voile mince, $\beta = 30^\circ$</i>	1.54 E-03	2.59 E-03

Tableau III-6 : Déplacements maximaux généralisés
(configuration roue massive et voile mince, $\beta = 0^\circ$ et 30°)

Comme anticipé, le passage d'une roue massive à une roue mince conduit à des déplacements plus importants que ce soit en dentures droites ou hélicoïdales ($\beta = 30^\circ$). Les composantes $\{\dot{X}\}$ et $\{\ddot{X}\}$ des équations de mouvement (cf. (Eq. 2-45)) sont omises de sorte que le système à résoudre s'écrit :

$$[K(t, \omega_1, \omega_2, x, q)] \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{q\} \end{Bmatrix} = \{F(t, \omega_1, \omega_2, x, q)\} \quad (\text{Eq.3-1})$$

En conservant l'effort, c'est-à-dire le second membre, constant tout en amincissant la roue, la matrice raideur globale décroît et conduit à une solution dont l'amplitude augmente.

2.4.2 Distribution de charge

Dans un processus de conception, il est intéressant de prédire au mieux le cycle de chargement des flancs de denture afin de déterminer des corrections de denture et / ou des modifications de la géométrie des pièces optimales. La présence de structures allégées et flexibles dans un réducteur à engrenages, est susceptible d'influer sur les répartitions de charge sur les dentures et par conséquent de modifier la durée de vie des surfaces en contact. L'impact de la géométrie de la roue prise parmi les différentes configurations étudiées ci-dessus (Figure III-2) sur les distributions de charge des dentures est analysé.

2.4.2.1 Denture droite

Les distributions de charge pour deux réducteurs en dentures droites avec une roue massive sont portées Figure III-7 pour une largeur de denture de 100 mm et Figure III-9 pour une largeur de denture 200 mm. Les résultats correspondant en présence de roues à voile mince sont représentés Figure III-8 (largeur de denture 100 mm) et Figure III-10 (largeur de denture 200 mm). Ces nappes de distribution de charge sur un engrenement représentent les évolutions de la charge linéique sur les contacts entre dents en fonction de la position sur le profil et de la largeur de la denture. Le défilement de contact selon le profil des dents est caractérisé par le temps adimensionné t/T_m (T_m : période d'engrènement) qui est proportionnel à la distance parcourue par les lignes de contact sur le plan d'action.

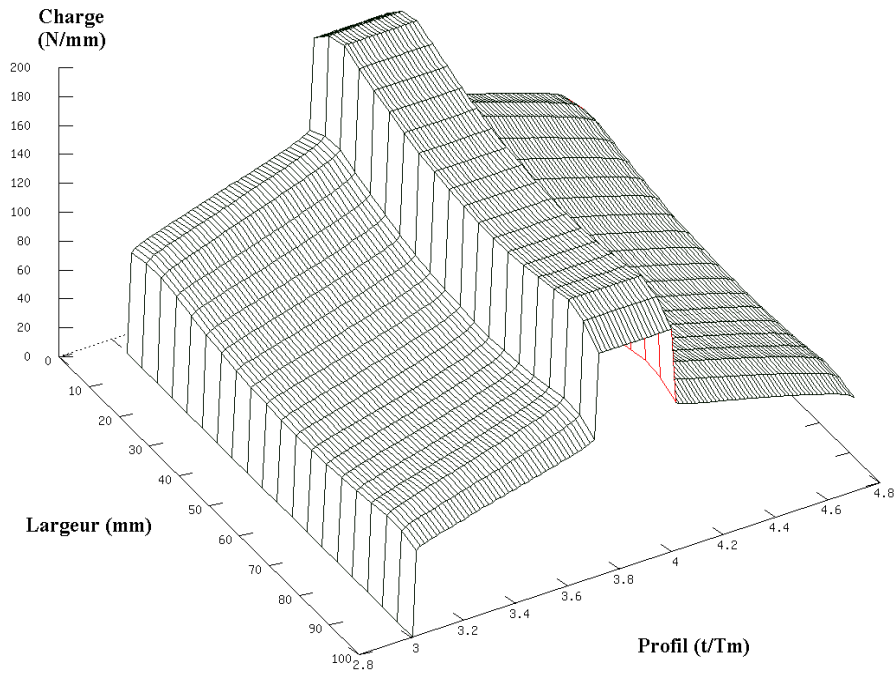


Figure III-7 : *Distribution de charge quasi statique du réducteur en denture droite (Roue massive, largeur 100 mm).*

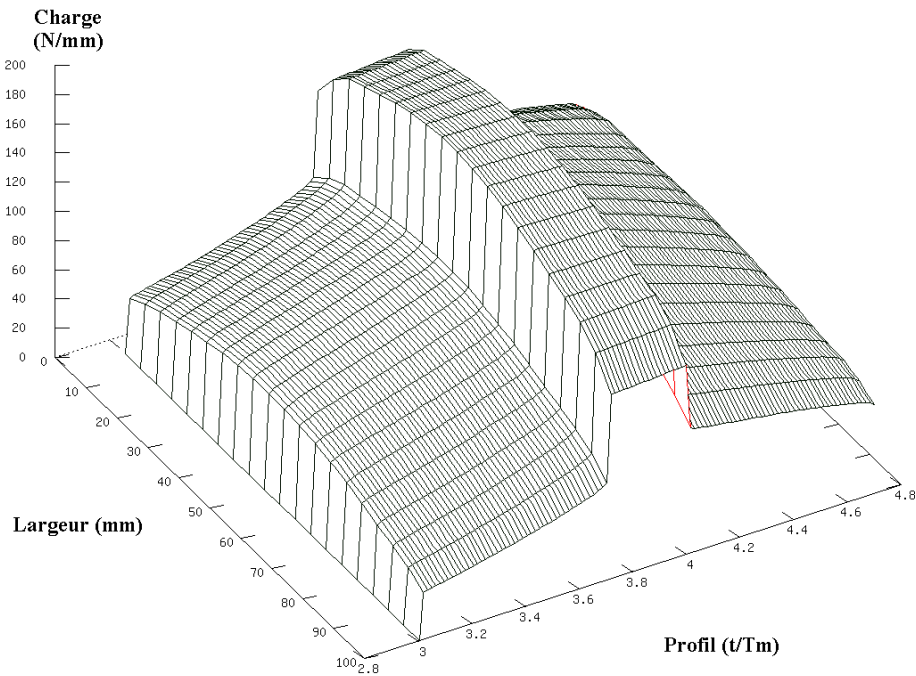


Figure III-8 : *Distribution de charge quasi statique du réducteur en denture droite (Roue à voile mince, largeur 100 mm).*

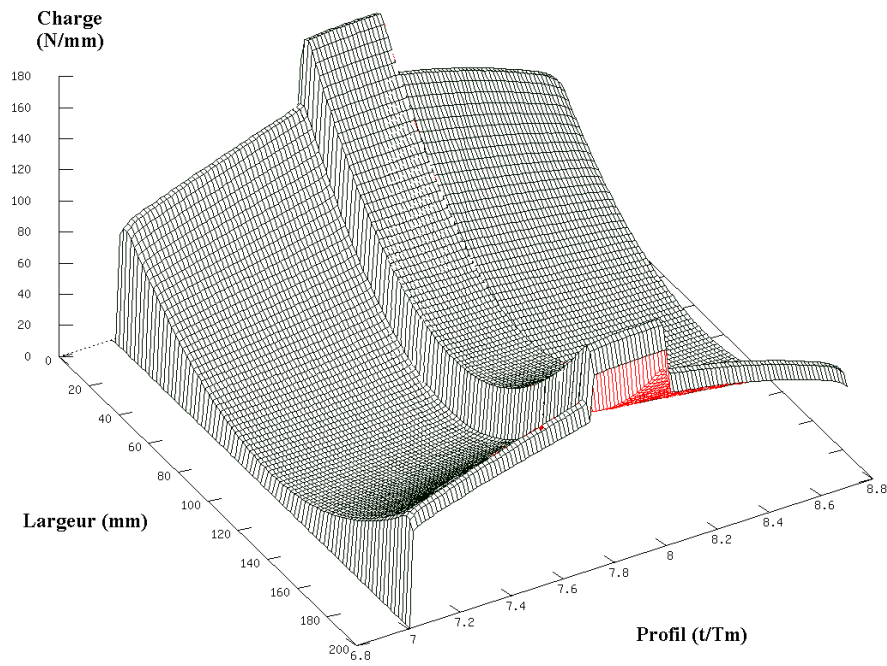


Figure III-9 : *Distribution de charge quasi statique du réducteur en denture droite*
(Roue massive, largeur 200 mm).

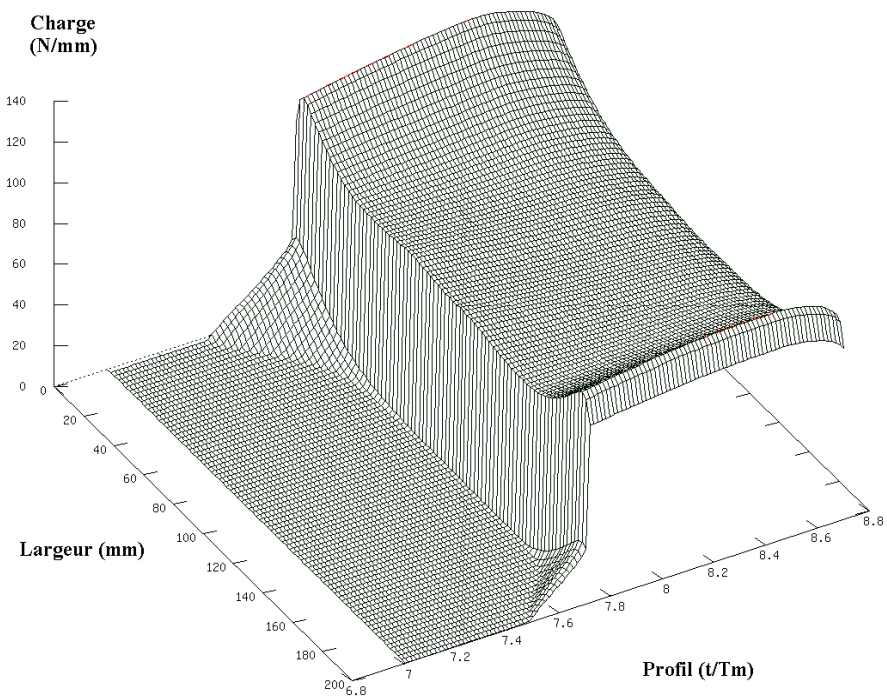


Figure III-10 : *Distribution de charge quasi statique du réducteur en denture droite*
(Roue à voile mince, largeur 200 mm).

Les principales constatations qui ressortent de l'analyse des distributions de charge dans les figures III-7 à III-10 sont recensées ci-dessous :

- Pour un réducteur à dentures droites et roue massive, la répartition de charge présente une forme de créneau comme le montrent la Figure III-7 et la Figure III-9, ce créneau caractérise le passage de deux paires de dents en prise à une paire de dents puis à nouveau à deux paires de dents en prise. On remarque une augmentation du chargement au voisinage des bords libres particulièrement marquée dans le cas d'une roue de largeur 200 mm, qui provient essentiellement d'un effet de pincement entre le pignon et la roue généré par l'action combinée de la flexion et de la torsion des deux corps d'engrenages ainsi que des couplages élastiques entre points de contacts.
- En ce qui concerne le réducteur à dentures droites ayant une roue à voile mince et une largeur de denture égale à 100 mm, la répartition de charge conserve la forme de créneau décrite plus haut mais le chargement est plus élevé au centre de la denture (Figure III-8). Ce résultat est corroboré par les travaux de Prabhu et Houser [95] et s'explique par le surcroît de rigidité apporté par la présence du voile dans la partie centrale de la dent par rapport aux extrémités.
- Pour un engrenage à dentures droites avec une roue à voile mince et une largeur de denture égale à 200 mm (Figure III-10), la répartition de charge perd la forme en créneau décrite précédemment. Sous l'effet des déflexions, les conditions d'engagement sont profondément modifiées et le rapport de conduite réel est considérablement réduit et ainsi, pendant la plus grande partie du cycle d'engrènement, la charge est-elle supportée par un seul couple de dents. La distribution longitudinale de chargement quant à elle est toujours caractérisée par des surcharges près des extrémités. A ce stade, il faut garder à l'esprit que ce cas test représente une situation extrême et, qu'au vu des résultats obtenus, il est sans doute à déconseiller pour un bon fonctionnement du dispositif.

2.4.2.2 Denture hélicoïdale

Les distributions de charge quasi-statique pour des réducteurs à dentures hélicoïdales ($\beta = 30^\circ$) de largeur 100 mm, sont illustrées sur la Figure III-11 pour une roue massive et sur la Figure III-12 pour une roue à voile mince. La Figure III-13 et la Figure III-14 représentent respectivement les distributions de charge pour une géométrie de roue massive et pour une roue à voile mince ayant une largeur de denture égale à 200 mm.

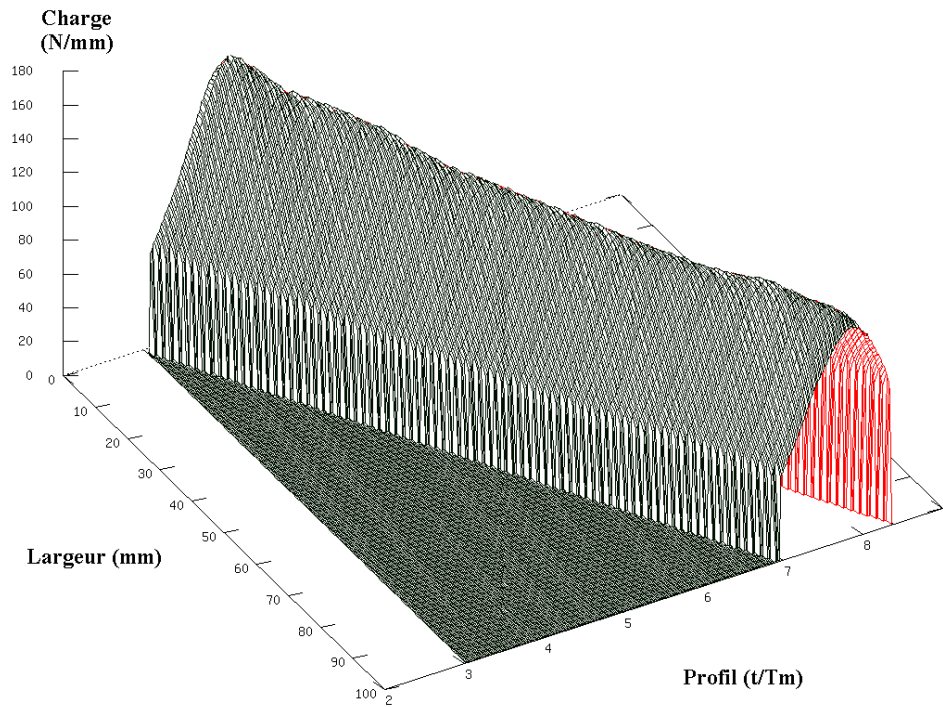


Figure III-11 : *Distribution de charge quasi-statique du réducteur en denture hélicoïdale (Roue massive, largeur 100 mm, $\beta = 30^\circ$).*

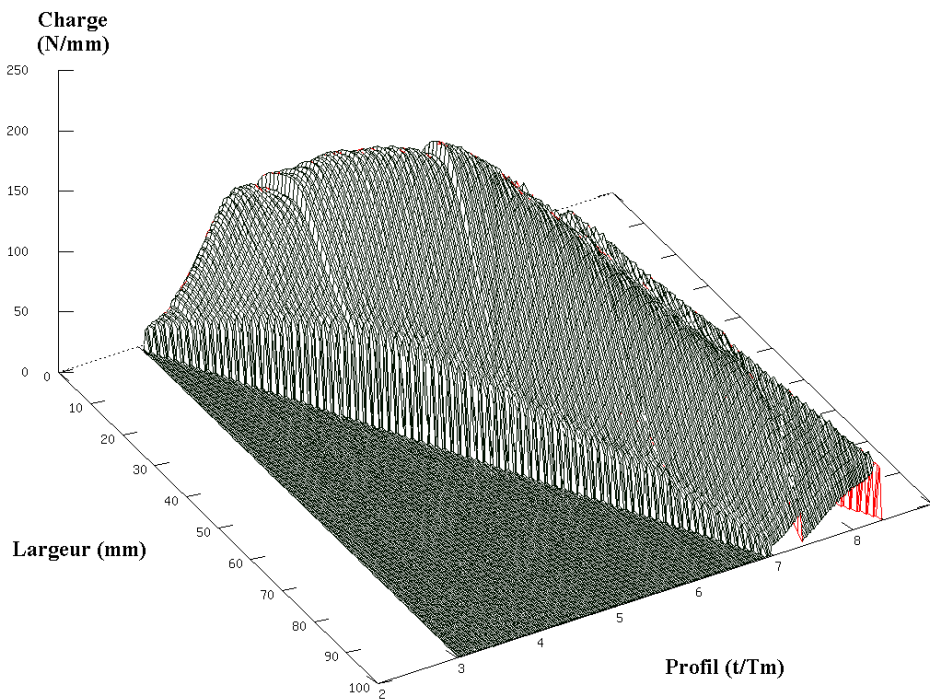


Figure III-12 : *Distribution de charge quasi- statique du réducteur en denture hélicoïdale (Roue à voile mince, largeur 100 mm, $\beta = 30^\circ$).*

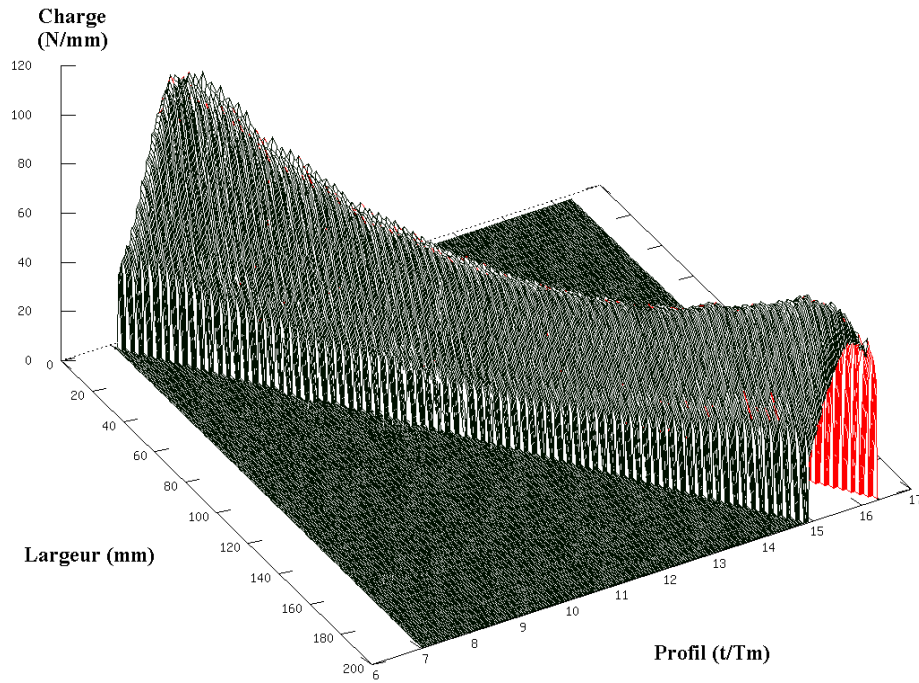


Figure III-13 : *Distribution de charge quasi-statique du réducteur en denture hélicoïdale (Roue massive, largeur 200 mm, $\beta = 30^\circ$).*

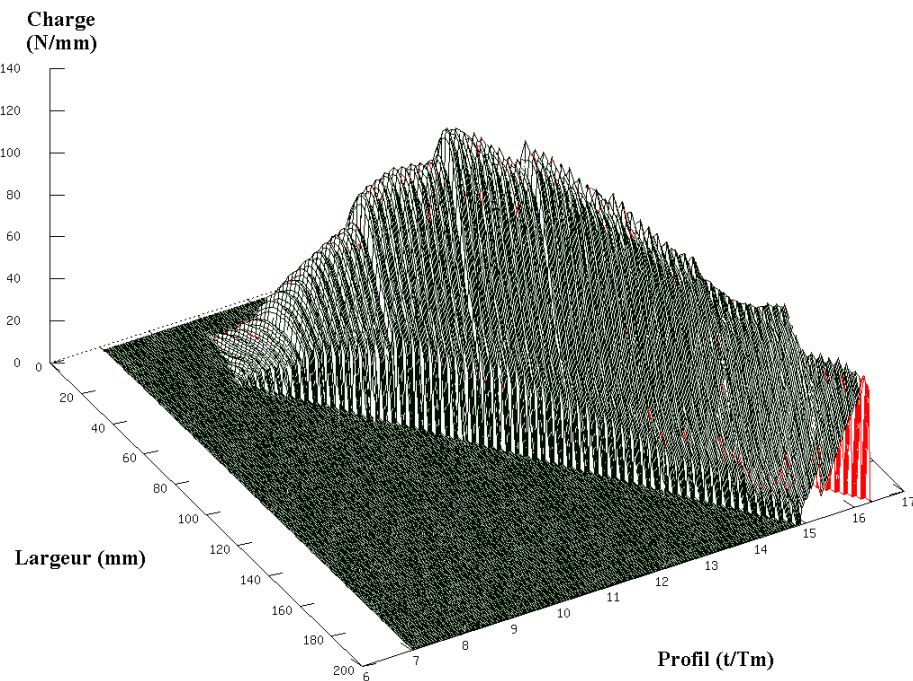


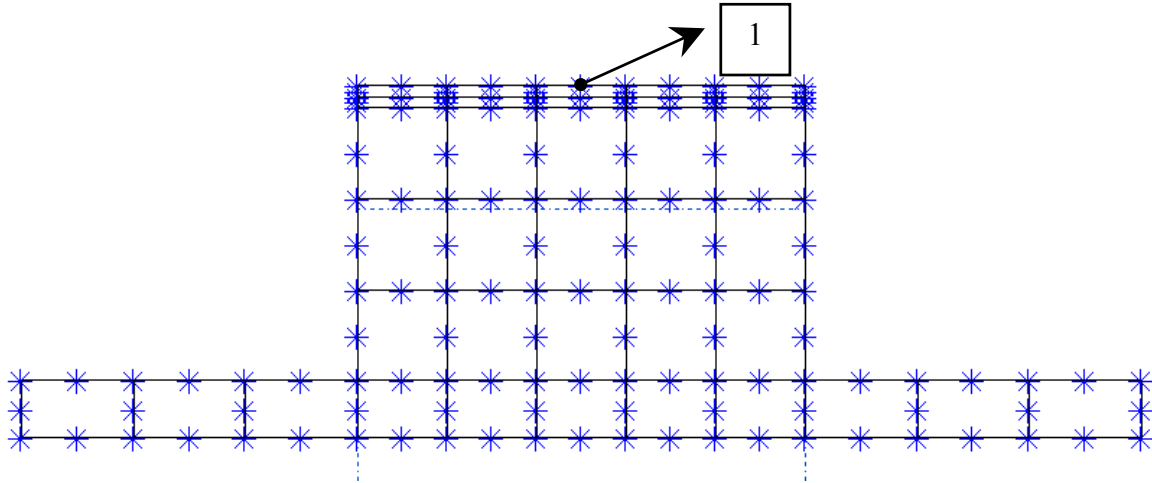
Figure III-14 : *Distribution de charge quasi-statique du réducteur en denture hélicoïdale (Roue à voile mince, largeur 200 mm, $\beta = 30^\circ$).*

Les distributions de chargement portées sur les figures ci-dessus permettent de dresser les constations suivantes :

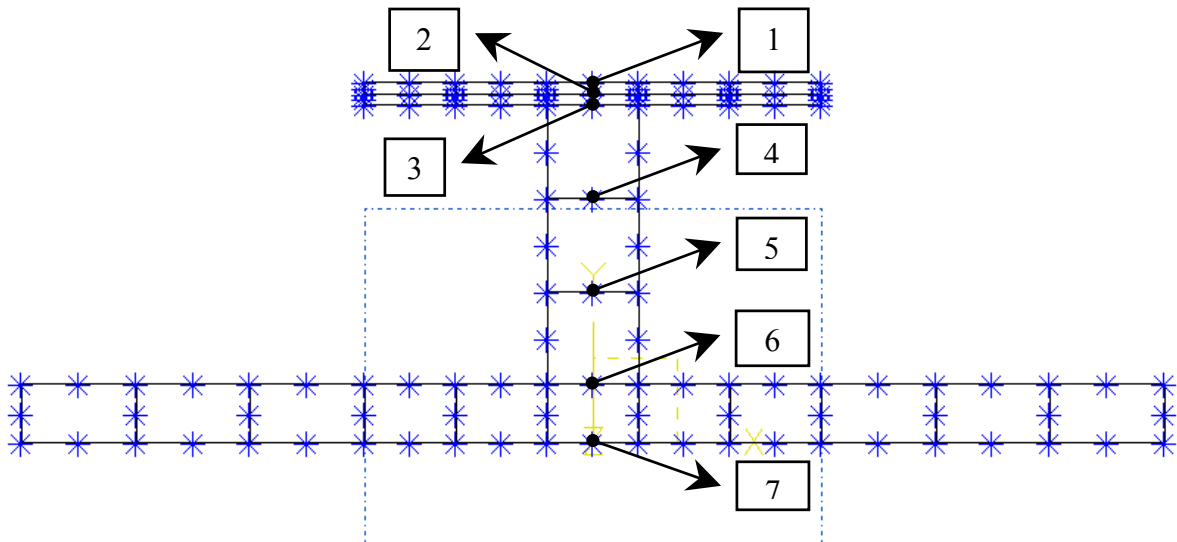
- Les distributions de chargement dans le cas d'une roue massive à dentures hélicoïdales confirment les observations précédentes en dentures droites avec, entre autre, la présence de surcharges sur les bords des dentures (particulièrement marquées pour une roue de largeur 200 mm).
- Dans le cas d'un réducteur ayant une roue à voile mince, on remarque que pour les deux largeurs de denture étudiées, la valeur maximale de la charge s'est déplacée des bords de la denture (cas de roue massive) vers le milieu (Figure III-12 et Figure III-14). Ceci est dû à la présence du voile au centre de la roue et de la raideur supplémentaire qu'il apporte. De plus, pour une largeur de denture de 200 mm, une influence significative de la flexibilité du corps de la roue sur le contact des dentures est observée et se traduit par un retard à l'engagement (un des deux bords de la denture est déchargé (voir Figure III-14)). Les surcharges et les variations entre roue massive et roue à jante mince sont plus importantes pour les dentures hélicoïdales que pour les dentures droites. Cette différence est probablement provoquée par la flexibilité axiale du voile qui, par opposition avec les engrenages droits, commande pour partie les répartitions des charges sur les dentures hélicoïdales.

2.4.3 Déplacement d'un nœud de la roue

Dans cette partie, les déformations quasi-statiques de la roue sont abordées. Les déplacements axiaux, radiaux et tangentiels de certains nœuds de la roue en dentures droites et hélicoïdales ($\beta = 30^\circ$), pour les différentes géométries de roues étudiées (Figure III-2), sont calculés en fonction du temps adimensionné par rapport à la période d'engrènement. Les nœuds de calculs choisis sont situés le long de la fibre neutre de la roue, ils sont repérés de 1 à 7, le nœud 1 se situe au niveau du rayon de fond de dent de la roue, le nœud 7 est placé sur l'axe de la roue (Figure III-15).



a) Roue massive



b) Roue à voile mince

Figure III-15 : Disposition des sept nœuds situés au long de la fibre neutre de la roue choisis pour les deux géométries de la roue ayant une largeur 200 mm.

2.4.3.1 Déplacements axiaux

Le déplacement axial du nœud 1 d'une roue massive et d'une roue à voile mince en dentures droites et hélicoïdales ($\beta = 30^\circ$) est représenté sur la Figure III-16 pour une largeur de denture égale à 100 mm et sur la Figure III-17 pour une largeur de 200 mm.

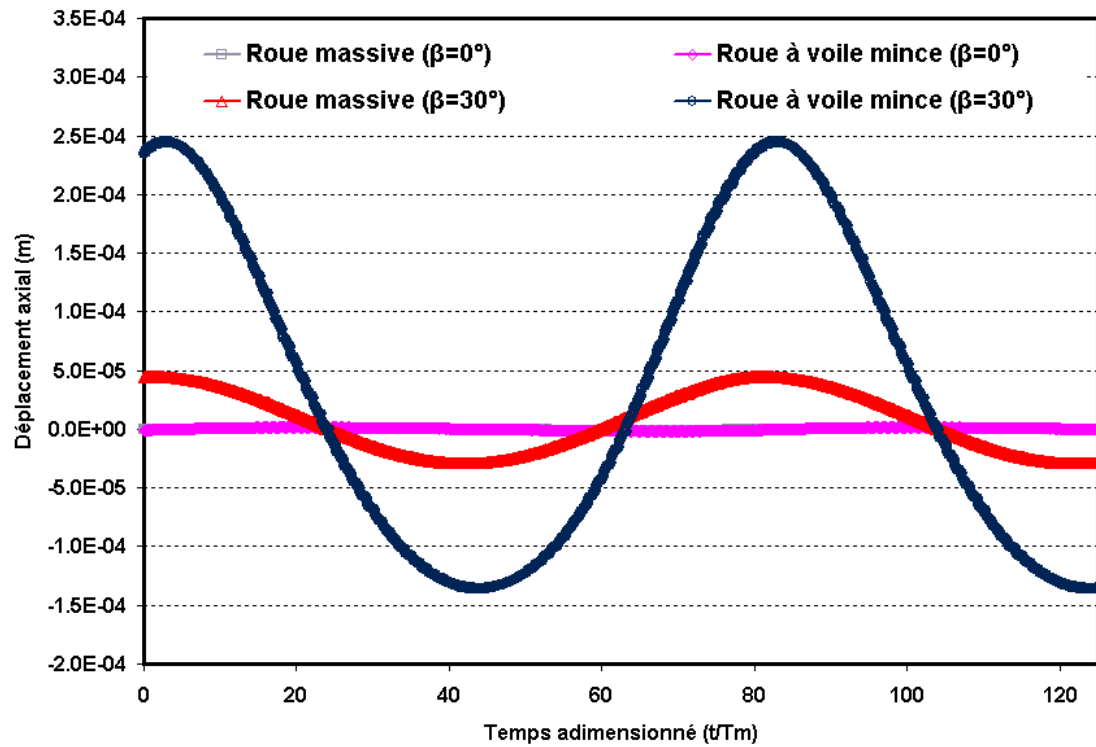


Figure III-16 : Déplacement axial du nœud 1 de la roue (largeur 100 mm).

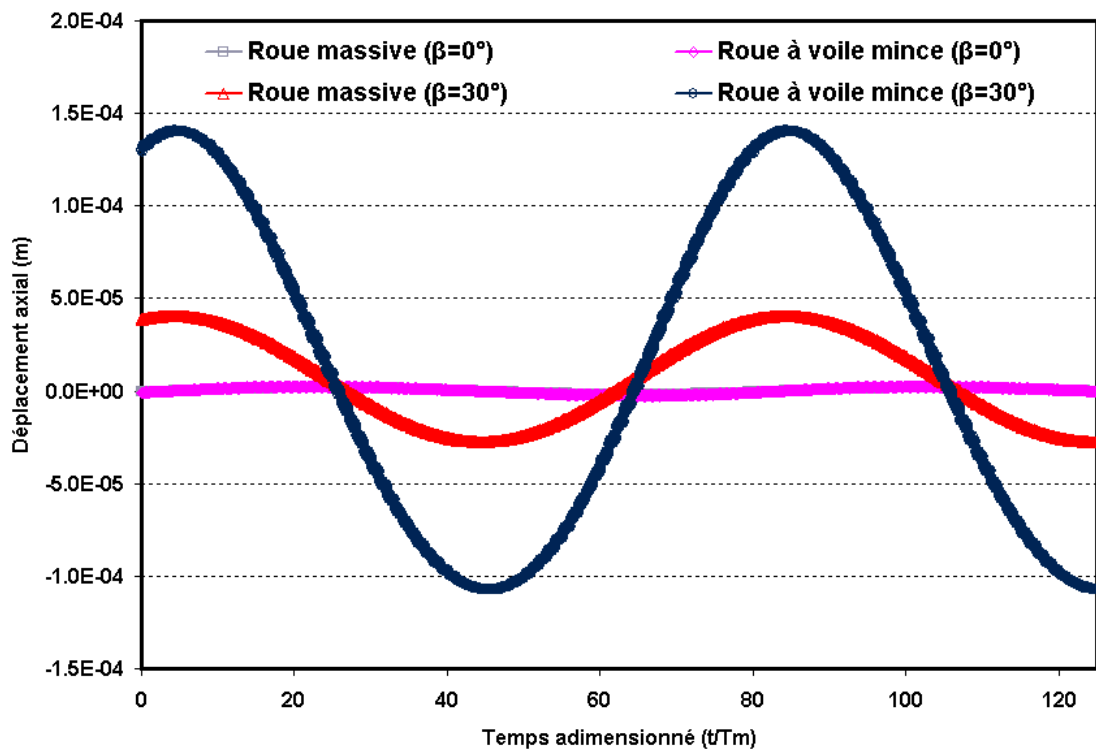


Figure III-17 : Déplacement axial du nœud 1 de la roue (largeur 200 mm).

Les constats suivants peuvent être déduits :

- Quelque soient leurs géométries, les roues pivotent dans le sens imposé par la poussée axiale, ce qui pour un nœud fixe dans le repère de la roue se traduit par une oscillation dont la période est un tour de roue.
- Pour la denture hélicoïdale ($\beta = 30^\circ$), la composante axiale de l'effort d'engrènement appliquée au nœud 1 lors du basculement de la roue à droite est supérieure à celle appliquée au même nœud lors du basculement de la roue à gauche. Cette variation d'effort axial implique qu'on a un déplacement axial maximum du nœud 1 dans le sens positif, supérieur à celui dans le sens négatif pour les deux largeurs de denture retenues.
- Quelque soit la largeur de la roue en denture hélicoïdale, le décalage du déplacement axial maximal selon le sens du basculement de la roue, est plus important dans le cas d'une roue à voile mince qu'une roue massive. Donc, en gardant l'effort d'engrènement constant et en rendant la roue plus flexible, on augmente le déplacement axial de la roue.
- En denture droite, la composante axiale de l'effort d'engrènement appliquée au nœud 1 est nulle et, par conséquent, le déplacement axial est lui même nul pour toutes les géométries considérées.

Des calculs similaires ont été conduits pour l'engrenage hélicoïdal à jante mince avec plusieurs nœuds sur un même rayon comme indiqué sur la Figure III-15-b.

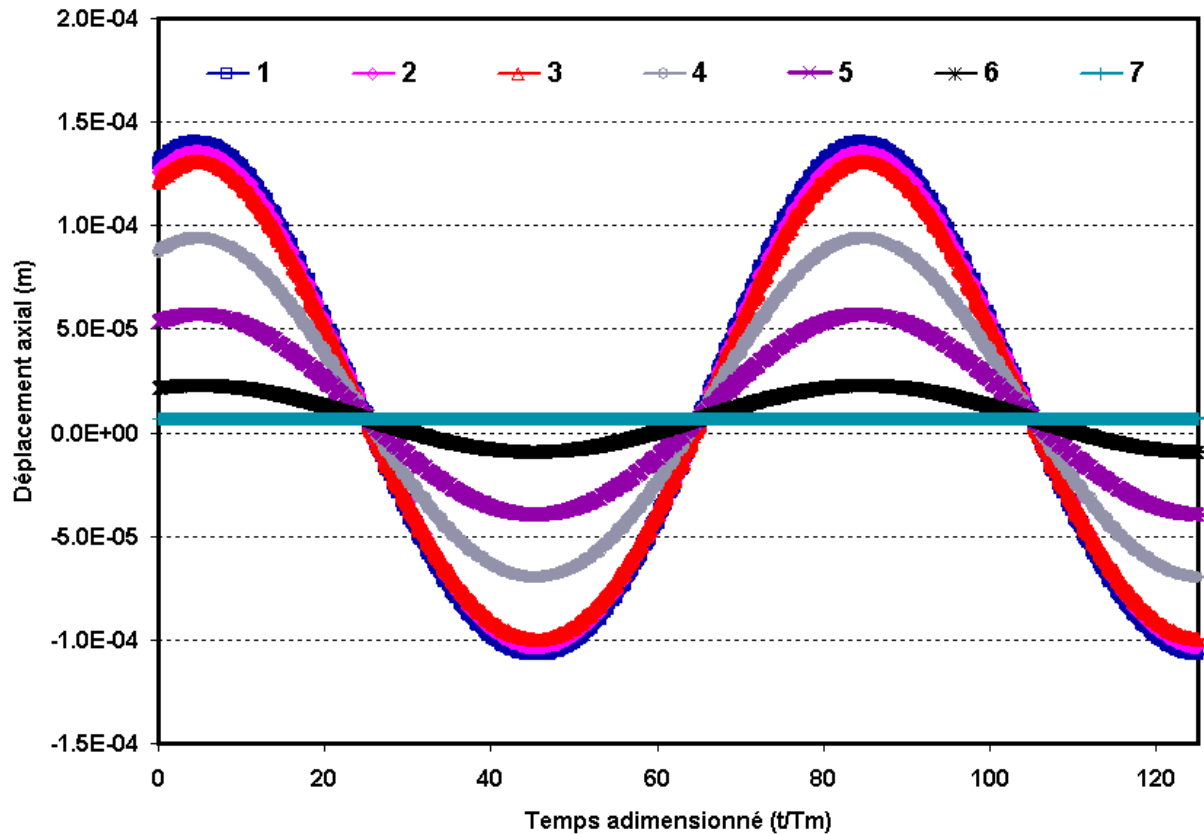


Figure III-18 : *Déplacements axiaux des sept noeuds situés au long de la fibre neutre de la roue à voile mince en denture hélicoïdale ($\beta = 30^\circ$).*

Il est intéressant de remarquer sur la figure ci-dessus que les amplitudes de déplacement augmentent à mesure que l'on s'éloigne de l'axe de rotation (nœud 7) et prennent leur valeur maximale pour le rayon de fond de dent (nœud 1).

2.4.3.2 Déplacements radiaux

Le déplacement radial du nœud 1 d'une roue massive et d'une roue à voile mince en denture droite et hélicoïdale ($\beta = 30^\circ$), calculé en fonction du temps adimensionné par rapport à la période d'engrènement, est représenté sur la Figure III-19 pour une largeur de denture égale à 100 mm et sur la Figure III-20 pour une largeur de 200 mm.

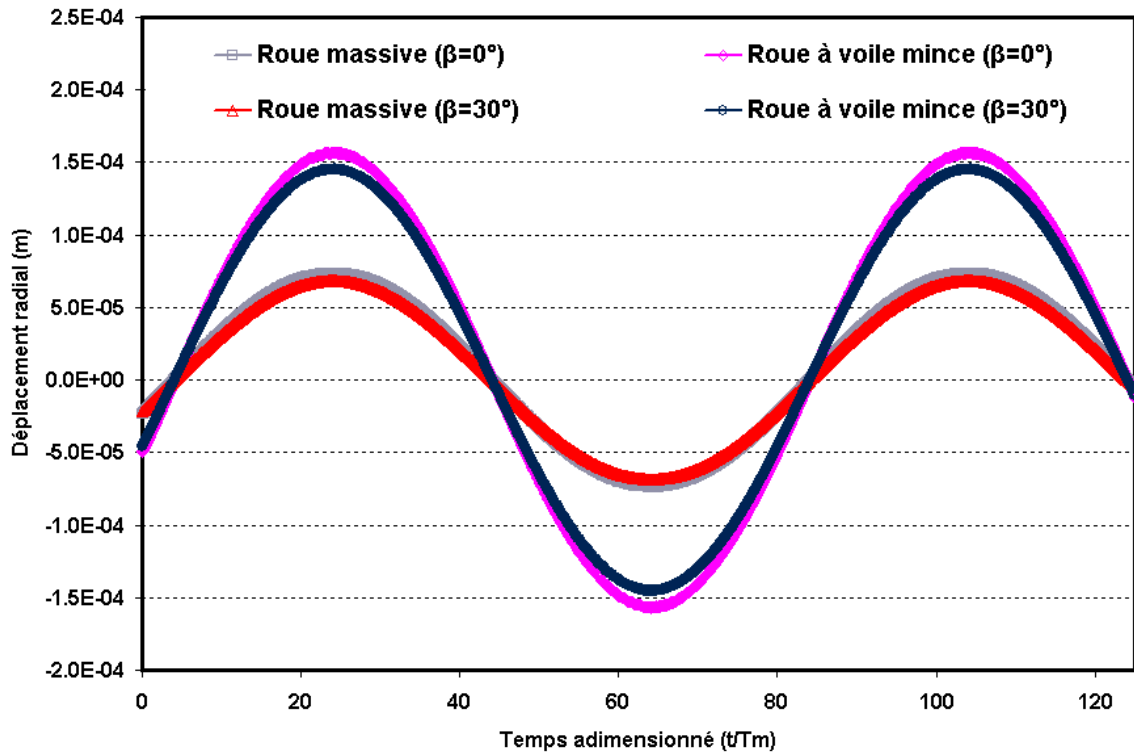


Figure III-19 : Déplacement radial du nœud 1 de la roue (largeur 100 mm).

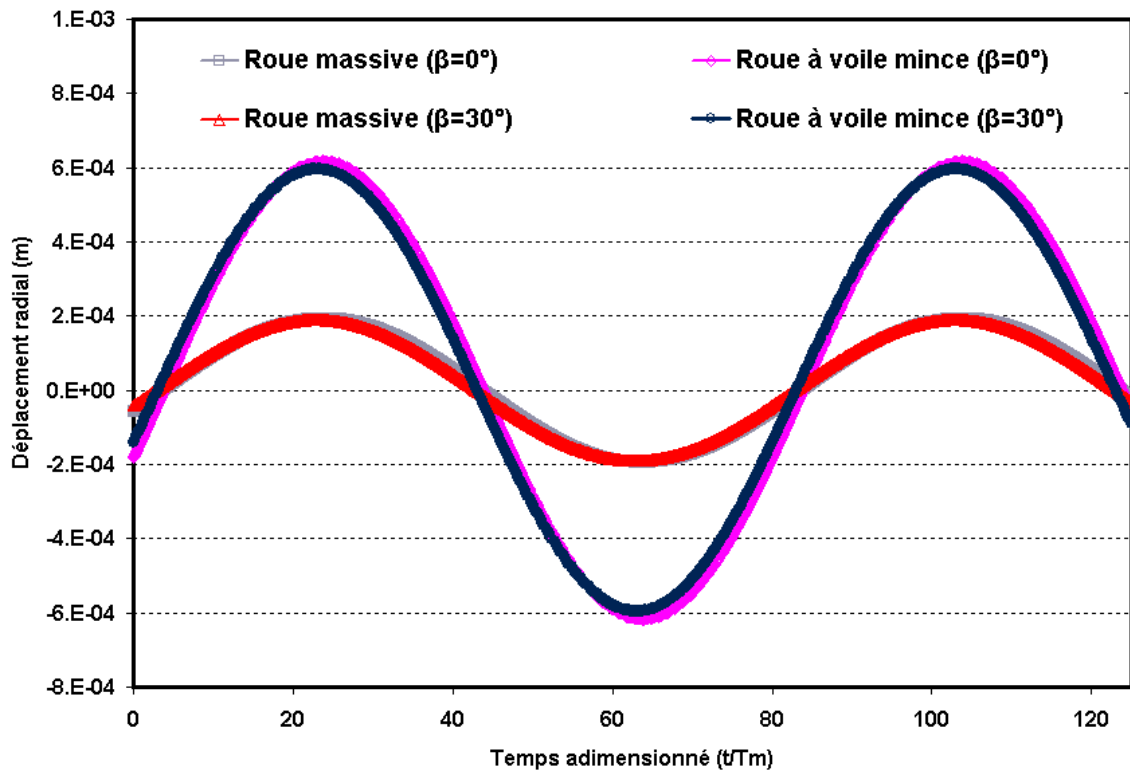


Figure III-20 : Déplacement radial du nœud 1 de la roue (largeur 200 mm).

Les résultats sur les deux figures ci-dessus permettent de dresser les constatations suivantes :

- Au cours du temps la roue est alternativement étirée (déplacement radial positif) puis comprimée (déplacement radial négatif). Il apparaît en outre que le déplacement radial maximal du nœud 1 dans le sens positif (étirement) est égal à celui dans le sens négatif (compression) pour les deux types de géométrie de roues étudiées et cela que ce soit en dentures droites ou hélicoïdales.
- On note une faible influence de l'angle d'hélice sur le déplacement radial du nœud 1. Pour les deux géométries de roue massive et à voile mince, le déplacement radial diminue très faiblement en augmentant l'angle d'hélice dans les deux cas de largeur de denture.
- Pour les deux cas de largeur de denture étudiés, le maximum du déplacement radial dans le sens positif du nœud 1 augmente si la flexibilité de la roue augmente quelque soit le type de denture. Toutefois cette augmentation est nettement plus grande pour une roue de largeur 200 mm qu'une roue de largeur 100 mm.

Les déplacements radiaux des sept noeuds situés au long de la fibre neutre de la roue à voile mince en denture hélicoïdale ($\beta = 30^\circ$) sont portés sur la Figure III-21 en fonction du temps adimensionné par rapport à la période d'engrènement.

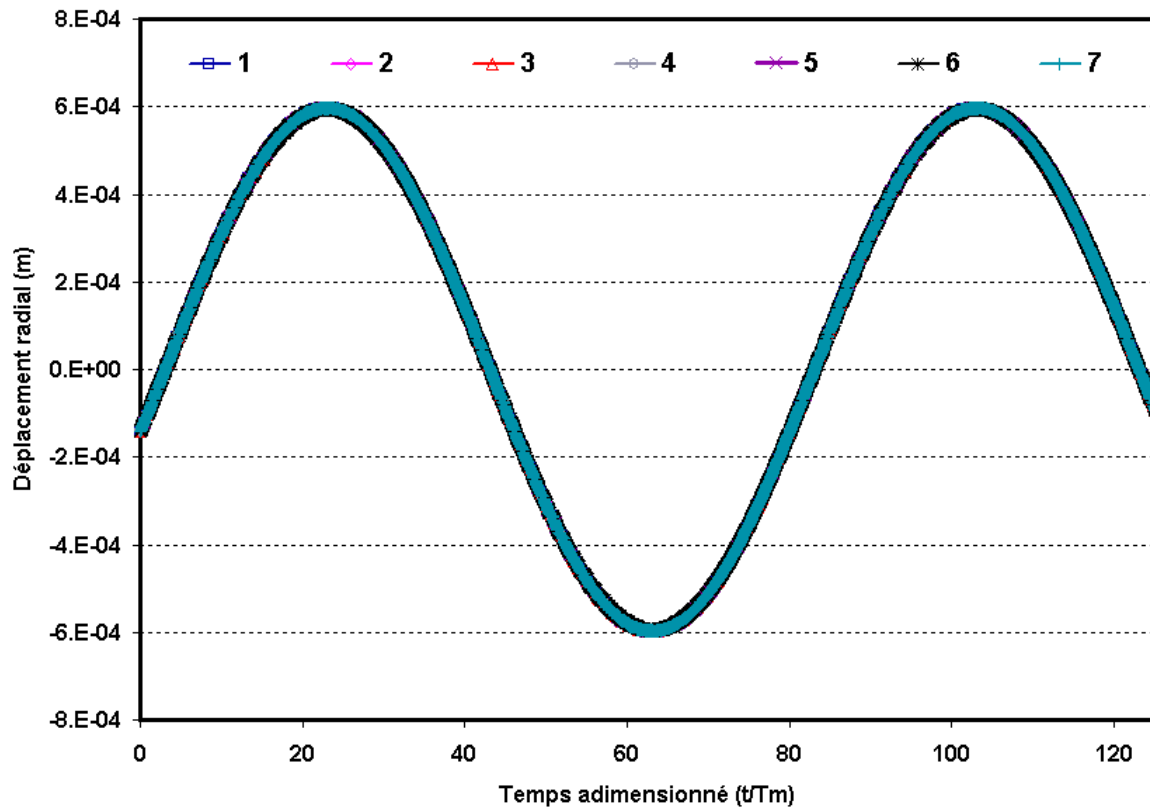


Figure III-21 : *Déplacements radiaux des sept noeuds situés au long de la fibre neutre de la roue à voile mince en denture hélicoïdale ($\beta = 30^\circ$).*

On remarque que les déplacements radiaux des sept noeuds se trouvant le long de la fibre neutre de la roue, ont la même évolution au cours du temps, ce qui implique que la roue a un mouvement radial d'ensemble.

2.4.3.3 Déplacements tangentiels

Les déplacements tangentiels au nœud 1 pour une roue massive et d'une roue a voile mince en denture droite et hélicoïdale ($\beta = 30^\circ$) sont donnés sur la Figure III-22 pour une largeur de denture égale à 100 mm et sur la Figure III-23 pour une largeur de 200 mm.

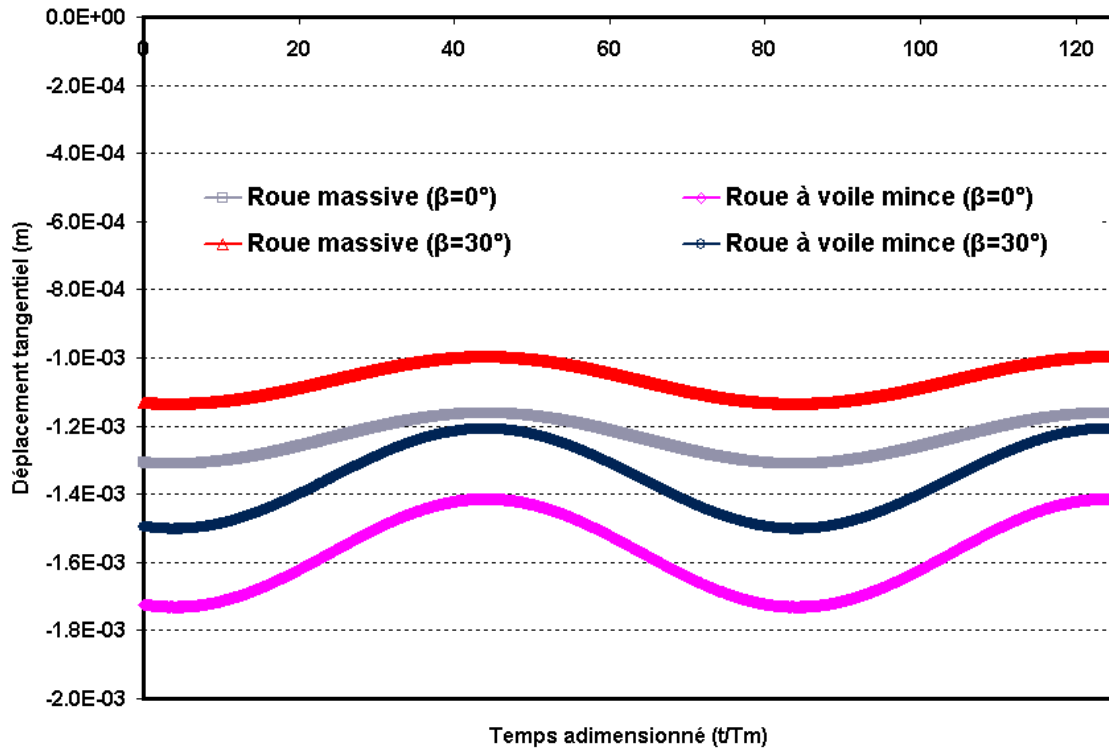


Figure III-22 : Déplacement tangentiel du nœud 1 de la roue (largeur 100 mm).

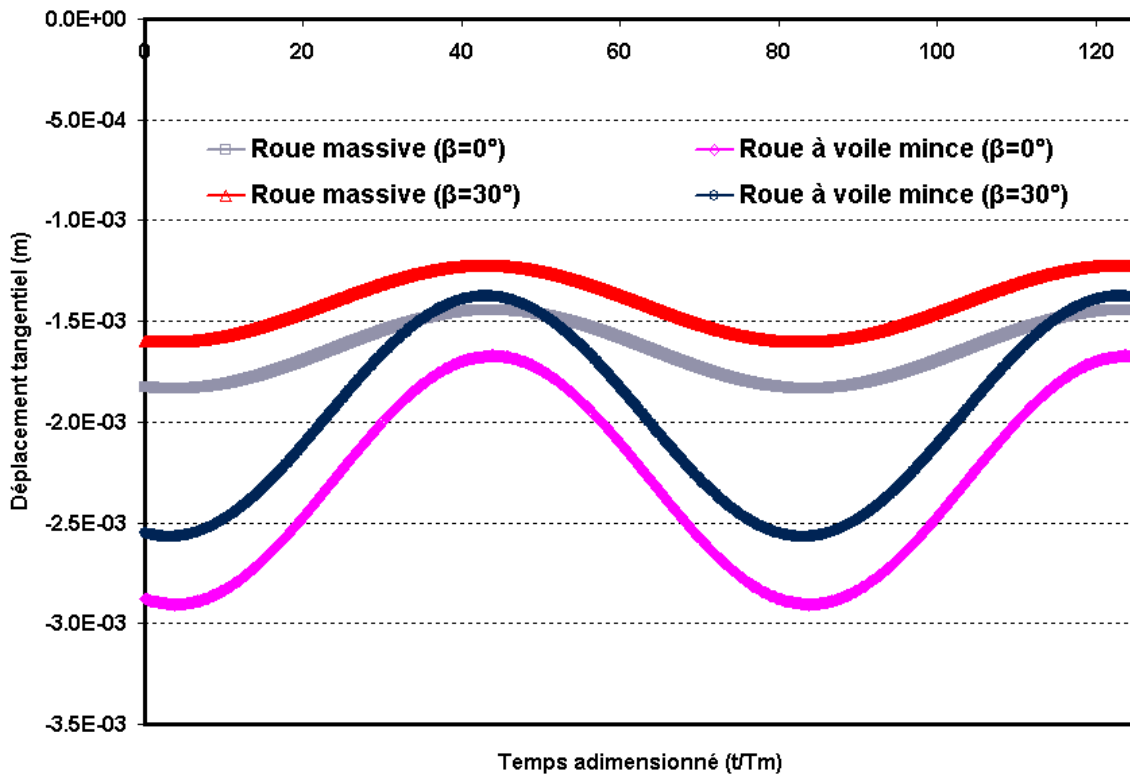


Figure III-23 : Déplacement tangentiel du nœud 1 de la roue (largeur 200 mm).

Les principaux constats sont :

- Le déplacement tangentiel du nœud 1 oscille autour d'une valeur moyenne négative. Cette valeur moyenne en valeur absolue croît en augmentant la flexibilité de la roue, par contre elle décroît si on augmente l'angle d'hélice quelque soit la configuration de roue retenue.
- On note les mêmes valeurs crête à crête des oscillations du déplacement tangentiel du nœud 1 en denture droite et en denture hélicoïdale et cela dans les deux cas de géométrie de roue (roue massive et roue à voile mince) ayant soit une largeur de denture égale à 100 mm soit à 200 mm.

La Figure III-24 représente les déplacements tangentiels des sept noeuds situés au long de la fibre neutre de la roue à voile mince en denture hélicoïdale ($\beta = 30^\circ$) en fonction du temps adimensionné par rapport à la période d'engrènement.

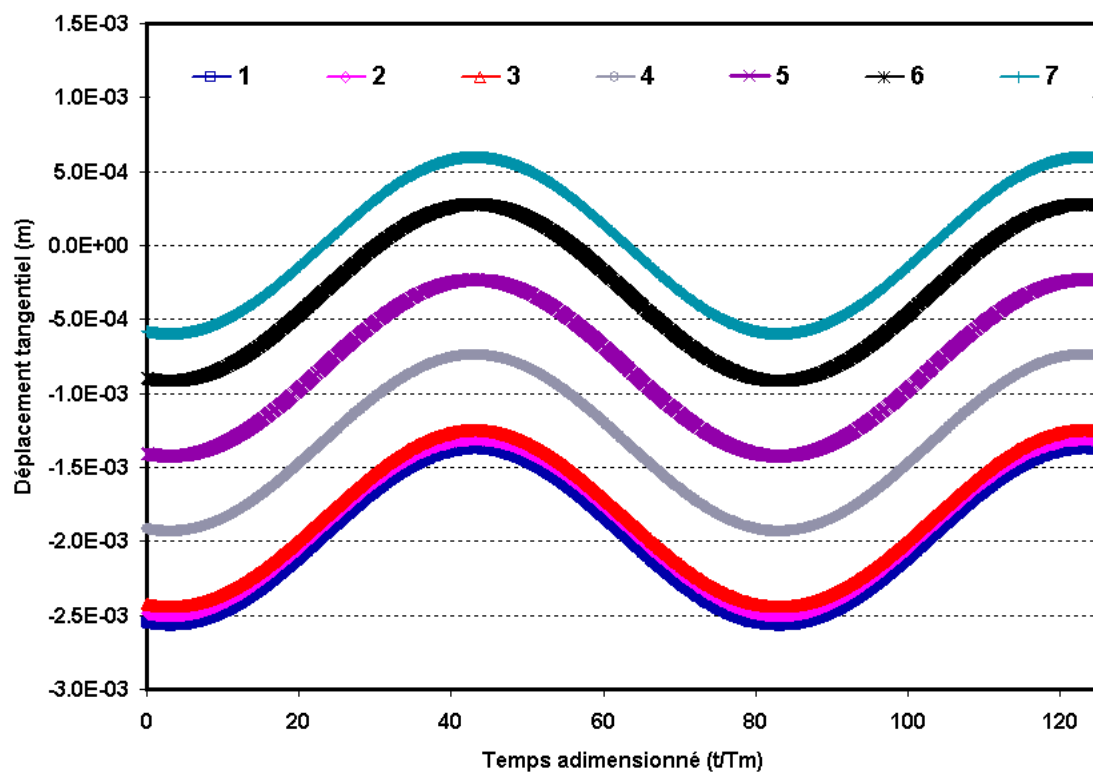


Figure III-24 : *Déplacements tangentiels des sept noeuds situés au long de la fibre neutre de la roue à voile mince en denture hélicoïdale ($\beta = 30^\circ$).*

Les résultats indiquent, qu'au cours de la rotation, les déplacements tangentiels des sept nœuds oscillent autour de plusieurs valeurs moyennes inférieures ou égales à zéro. Ces valeurs moyennes décroissent progressivement en partant d'une valeur quasi-nulle pour le nœud 7 (fibre neutre axial de la roue) jusqu'à une certaine valeur négative pour le nœud 1 (rayon de fond de la roue). On note également que les valeurs crête à crête des oscillations aux sept nœuds sont très proches.

2.4.4 Erreur de transmission

Dans notre modèle, l'erreur de transmission peut être déterminée par le calcul des angles de rotation instantanés simulant les résultats de mesure obtenus par des roues codeuses (codeurs optiques) par exemple. La Figure III-25 montre les positions des roues codeuses pour les cas étudiés.

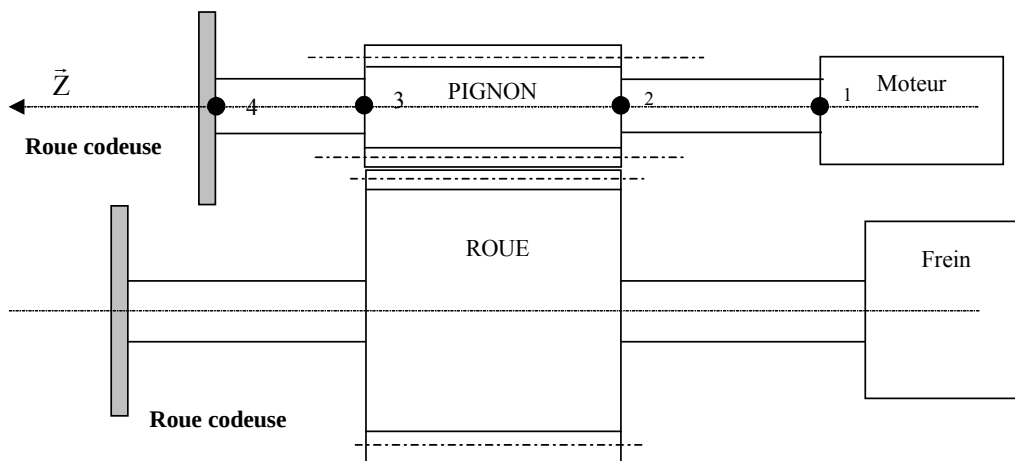


Figure III-25 : *Position des roues codeuses.*

L'erreur de transmission dans le cas d'un réducteur sans défaut est donnée par la formule suivante :

$$E.T = R_{b_1} \theta_1 + R_{b_2} \theta_2 \quad (\text{Eq.3-2})$$

Avec :

R_{b_1} et R_{b_2} : respectivement les rayons de base du pignon et de la roue.

θ_1 : degré de liberté de rotation infinitésimale selon l'axe z du nœud où se trouve la roue codeuse sur la partie motrice du réducteur.

θ_2 : degré de liberté de rotation infinitésimale selon l'axe z du nœud où se trouve la roue codeuse sur la partie réceptrice du réducteur, On rappelle que la partie réceptrice n'est pas modélisée par des poutres mais par un maillage éléments finis tridimensionnel. La valeur de θ_2 est déterminée à partir des degrés de liberté des nœuds du maillage par l'équation suivante :

$$\theta_2 = \frac{\frac{|u_{t1}|}{Ra_2} + \frac{|u_{t2}|}{Ra_2} + \frac{|u_{t3}|}{Ra_2} + \frac{|u_{t4}|}{Ra_2}}{4} \quad (\text{Eq.3-3})$$

θ_2 est donc calculé par la moyenne de quatre quotients, chacun étant égal au rapport du déplacement tangentiel de l'un des quatre nœuds choisis (U_{ti} , $i = 1$ à 4) par le rayon extérieur de l'arbre de la roue désigné par Ra_2 (Figure III-26).

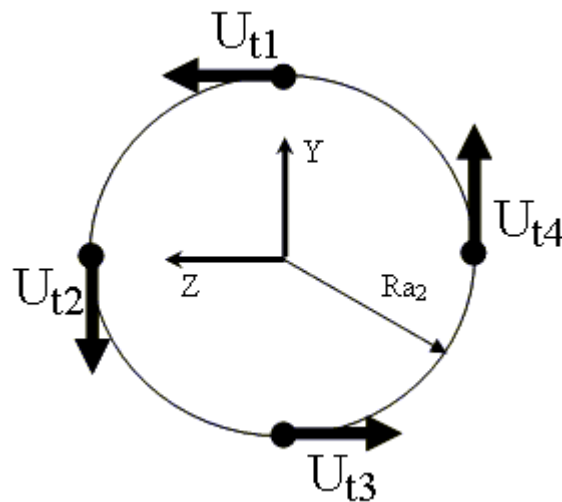
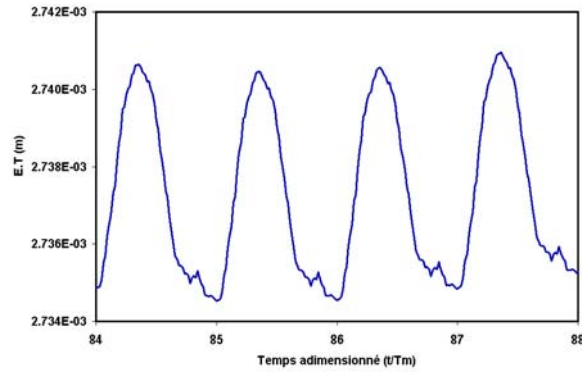
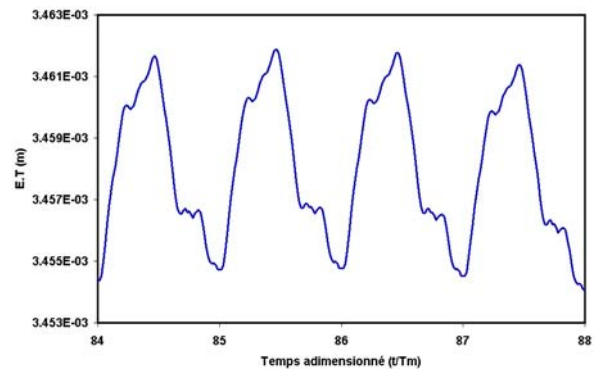


Figure III-26 : Conditions de support coté arbre droit de la partie réceptrice.

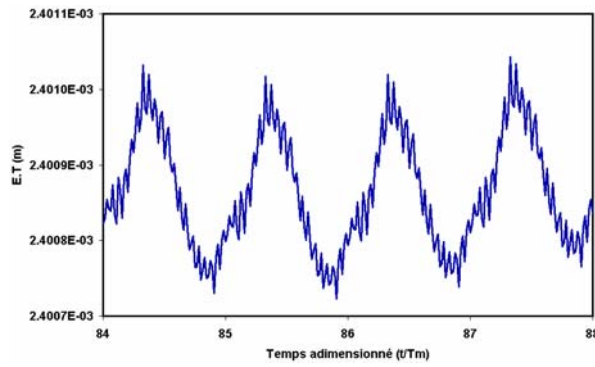
La Figure III-27 représente les courbes d'erreurs de transmission correspondantes obtenues pour des largeurs de denture de 100 mm et 200 mm avec des engrenages droits et hélicoïdaux ($\beta = 30^\circ$). La première série de résultats a trait au cas d'une roue massive, la seconde se rapporte à la roue à voile mince.



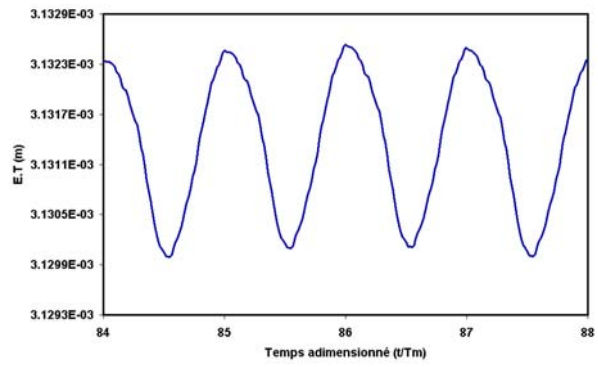
Roue massive, largeur 100 mm, $\beta = 0^\circ$



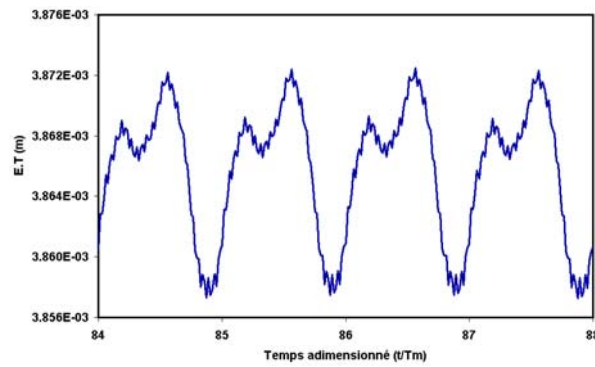
Roue à voile mince, largeur 100 mm, $\beta = 0^\circ$



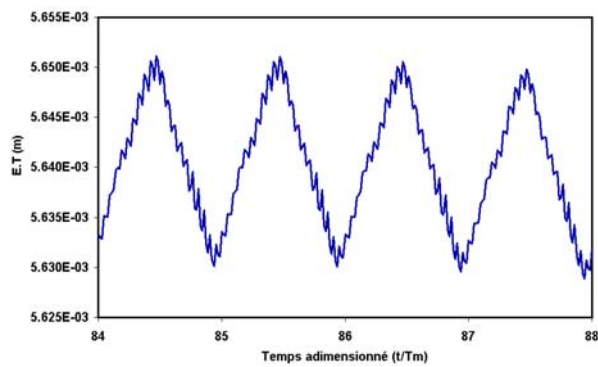
Roue massive, largeur 100 mm, $\beta = 30^\circ$



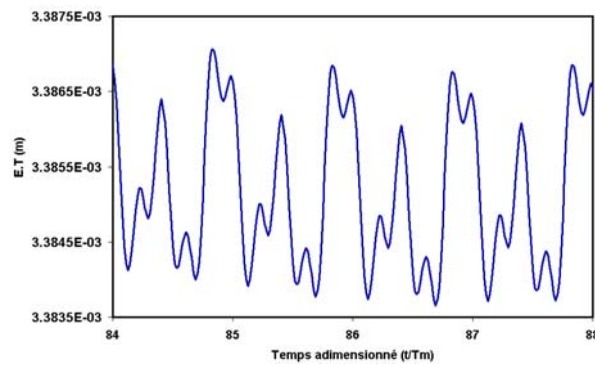
Roue à voile mince, largeur 100 mm, $\beta = 30^\circ$



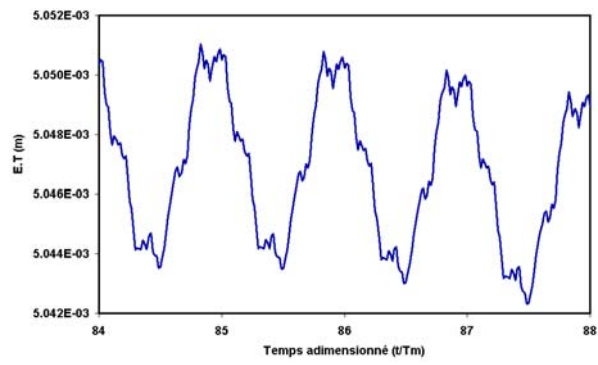
Roue massive, largeur 200 mm, $\beta = 0^\circ$



Roue à voile mince, largeur 200 mm, $\beta = 0^\circ$



Roue massive, largeur 200 mm, $\beta = 30^\circ$



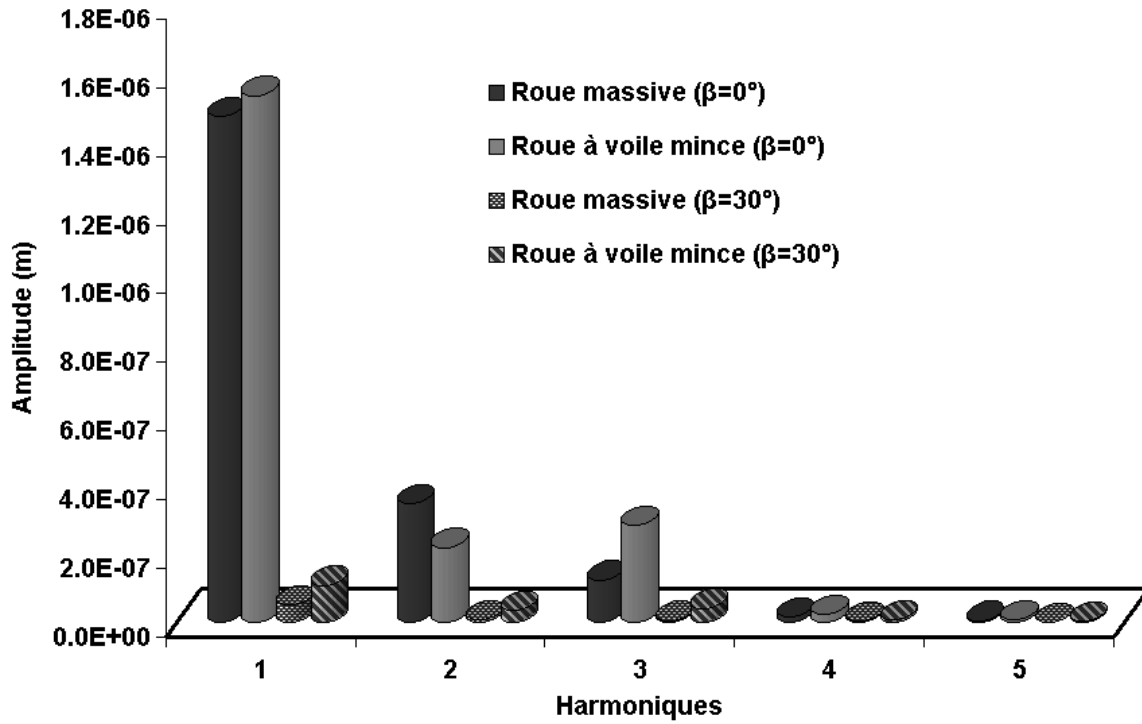
Roue à voile mince, largeur 200 mm, $\beta = 30^\circ$

Figure III-27: Erreur de transmission sous charge du réducteur pour plusieurs configurations

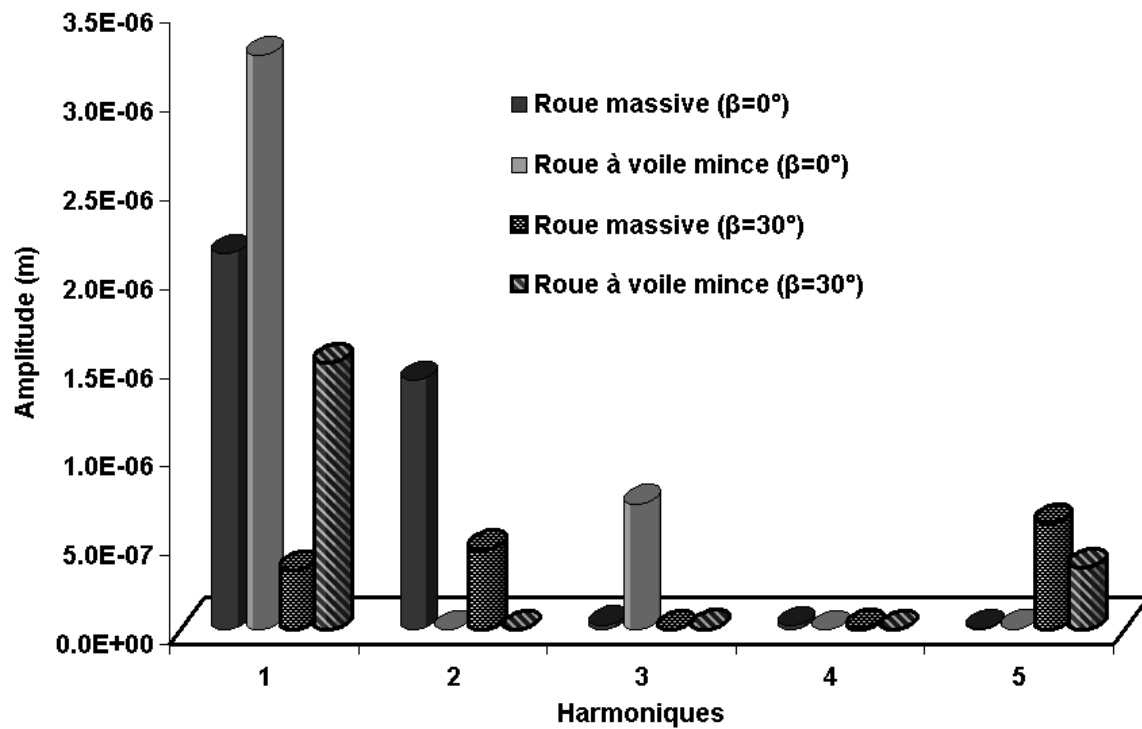
Pour une largeur de denture égale à 100 mm et 200 mm, le Tableau III-7 donne les valeurs moyennes et crête à crête de l'erreur de transmission sous charge pour les deux géométries de roue en denture droite et hélicoïdale. La Figure III-28 représente les spectres des erreurs de transmission correspondant.

Largeur 100 mm	Roue massive		Roue à voile mince	
	$\beta = 0^\circ$	$\beta = 30^\circ$	$\beta = 0^\circ$	$\beta = 30^\circ$
Valeur moyenne de l'E.T (m)	2.737E-03	2.40087E-03	3.458E-03	3.1312E-03
Valeur crête à crête de l'E.T (m)	5.871E-06	2.947E-07	7.106E-06	2.354E-06
Largeur 200 mm	Roue massive		Roue à voile mince	
	$\beta = 0^\circ$	$\beta = 30^\circ$	$\beta = 0^\circ$	$\beta = 30^\circ$
Valeur moyenne de l'E.T (m)	3.865E-03	3.385E-03	5.640E-03	5.047E-03
Valeur crête à crête de l'E.T (m)	14.95E-06	3.14E-06	21.08E-06	7.54E-06

Tableau III-7 : Valeur crête à crête de l'erreur de transmission sous charge.



a) largeur 100 mm



b) largeur 200 mm

Figure III-28 : Spectre de l'erreur de transmission sous charge pour deux largeurs de roue.

Les erreurs de transmission représentées sur la Figure III-27 confirment que, selon la géométrie de la roue, des tendances très différentes peuvent être trouvées en terme de valeur moyenne et de crête à crête ainsi qu'en terme d'amplitude et de contenu spectral.

A partir des résultats du Tableau III-7, il est possible d'analyser l'influence de deux paramètres : a) la flexibilité de la roue et b) l'angle d'hélice sur la valeur moyenne et crête à crête de l'erreur de transmission :

- En ce qui concerne l'influence de la flexibilité, on remarque que pour les deux largeurs de denture 100 mm et 200 mm, la valeur moyenne de l'erreur de transmission est plus élevée pour un réducteur ayant une roue à voile mince par rapport à celui ayant une roue massive. De plus, les variations crête à crête de l'erreur de transmission traditionnellement liées au niveau d'excitations sur les dentures sont également plus importantes en présence d'une roue à voile mince. Ceci laisse à penser qu'une roue à voile mince va simultanément influencer sur la rigidité et sur les excitations associées à l'engrènement.
- Les fluctuations d'erreurs de transmission avec des dentures hélicoïdales sont plus faibles qu'en dentures droites et ce, quelque soit la géométrie de la roue prise en considération. Le phénomène est identique à celui observé avec des modèles à paramètres concentrés et s'explique par des fluctuations plus faibles de longueurs de contact et donc de rigidités au cours du temps.

Les spectres des erreurs de transmission Figure III-28 confirment que les roues à voiles minces, au-delà des changements de raideurs, peuvent modifier le contenu fréquentiel des erreurs de transmission, c'est-à-dire les harmoniques dominantes de la fréquence d'engrènement. Considérant deux engrenages, l'un avec une roue massive et l'autre avec une roue amincie, le comportement dynamique sera donc susceptible d'être modifié par l'influence conjointe de propriétés modales différentes (masse et raideur) et de spectres d'excitations également différents.

3 Exemple industriel

3.1 Description du modèle

Les données géométriques du réducteur étudié sont décrites dans le Tableau III-8.

	Pignon	Roue
Module (mm)	10	
Nombre de dents Z	51	294
Angle de pression de taillage α_0 (°)	20	
Angle d'hélice primitif β (°)	14,785	
Largeur (mm)	475	475
Coefficient de saillie h_a	1	1
Coefficient de creux h_f	1,45	1,45
Rayon de raccordement R_c (mm)	0,3	0,3
Diamètre intérieur de l'engrenage (mm)	250	555,54
Couple moteur (Nm)	97270,439	

Tableau III-8 : Caractéristique du réducteur étudié.

Tous les constituants du réducteur sont en acier de module d'Young $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Pa, de coefficient de Poisson $\nu = 0,3$ et de masse volumique $\rho = 7800$ kg/m³.

3.2 Modélisation de la partie motrice

Le corps du pignon (denture exclue) considéré massif ainsi que les deux arbres moteur sont modélisés chacun par un élément de poutre à deux nœuds et six degrés de liberté par nœud (Figure II-2). Cette partie motrice est supportée par trois raideurs concentrées selon l'axe Z , S et T , appliquées respectivement au nœuds 1 et 4 (Figure III-1) telles que leurs valeurs sont définies dans le Tableau III-2.

3.3 Modélisation de la partie réceptrice

La partie réceptrice du réducteur étudié, est constituée par le corps de la roue et ses arbres, elle est modélisée par un maillage tridimensionnel d'éléments finis de type brique à 20 nœuds (Figure III-29) et réduite par une méthode de sous structuration pseudo modale. Le

nombre total de nœuds est 39100 et 50 modes dynamiques ont été retenus pour la condensation. Les conditions de support pour la partie réceptrice sont identiques à celles utilisées pour les exemples académiques au paragraphe précédent.

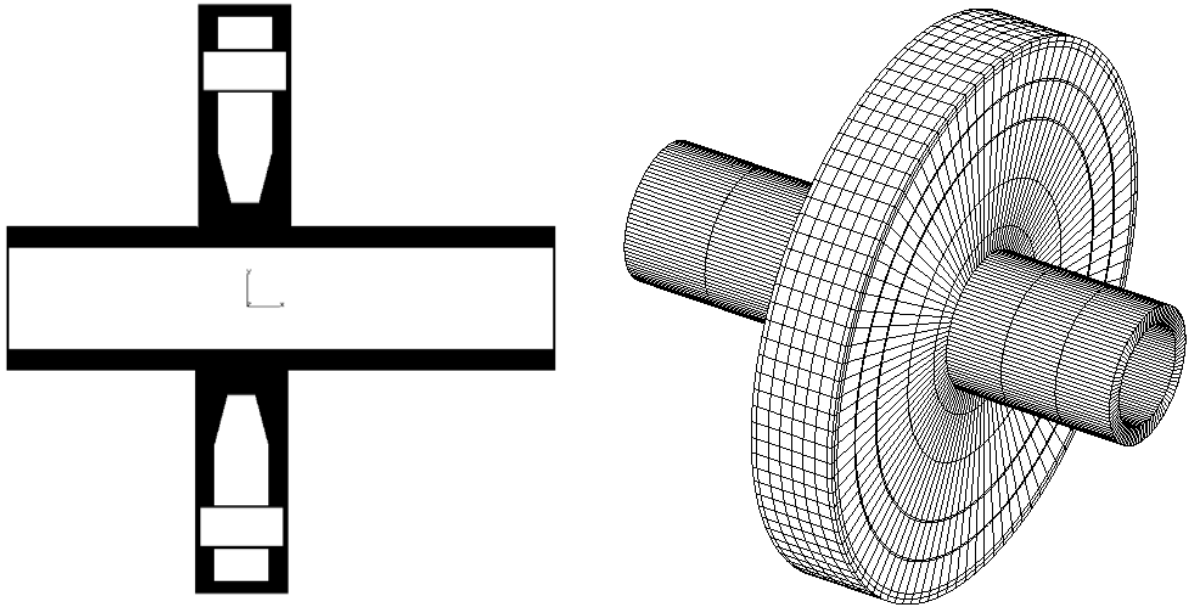


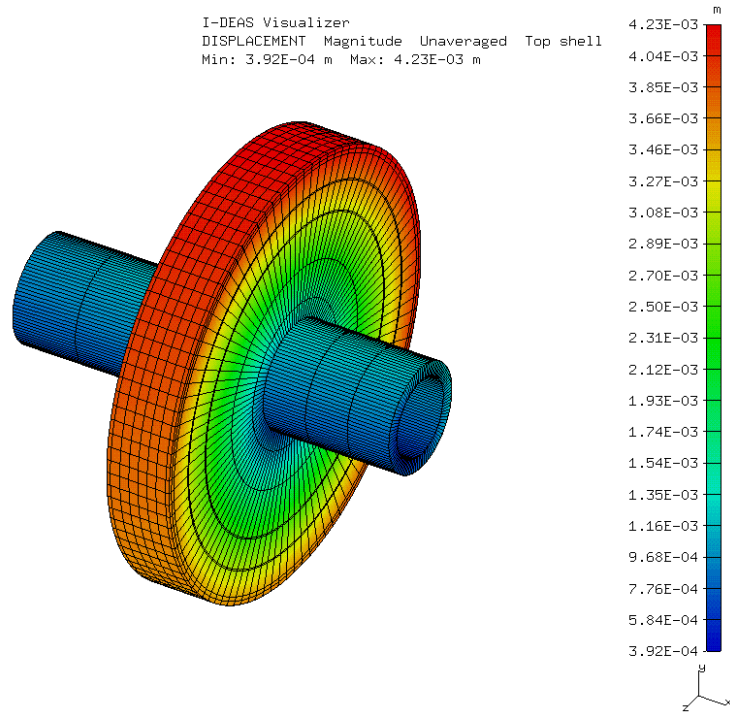
Figure III-29 : Modélisation de la partie réceptrice du réducteur.

3.4 Comportement quasi-statique du réducteur

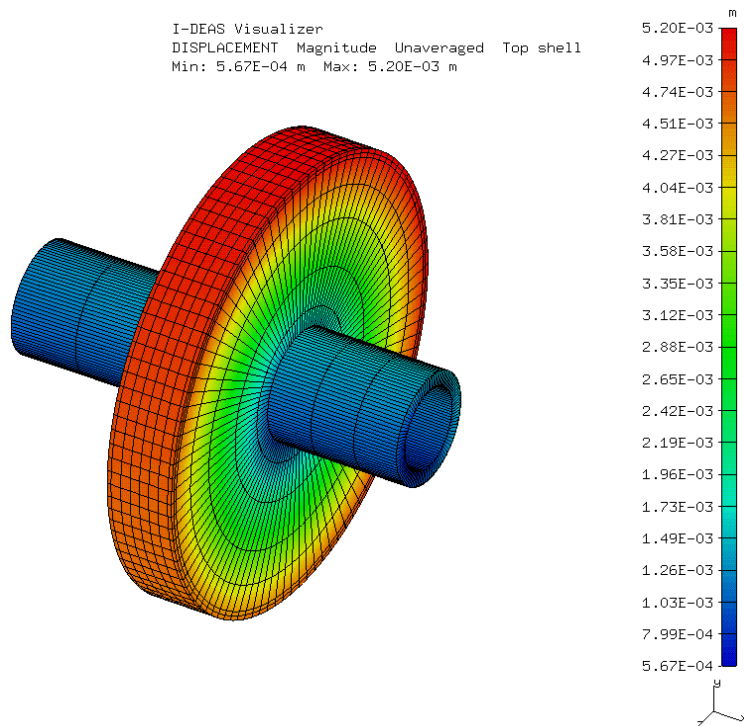
Dans un premier temps, la solution statique est recherchée pour un réducteur sans défaut avec une géométrie de roue flexible comme décrit dans la Figure III-29. Dans un deuxième temps, une géométrie de roue massive est considérée afin de mettre en évidence l'impact de la flexibilité de la structure sur le comportement du réducteur. Les composantes du déplacement de six nœuds réparties sur la fibre neutre de la roue sont ensuite analysées.

3.4.1 Déformée statique

On représente sur la Figure III-30, les déformées statiques des parties réceptrices de deux réducteurs de mêmes caractéristiques (Tableau III-8) avec respectivement une roue flexible (Figure III-29) et une roue massive.



a) Roue flexible



b) Roue massive

Figure III-30 : Déformée statique de la partie réceptrice du réducteur
(roue flexible et roue massive).

A partir des déformées statiques ci-dessus, le déplacement maximal obtenu de $4.23 \text{ E-}03 \text{ m}$ est inférieur à celui pour un réducteur équivalent ayant une roue massive ($5.2 \text{ E-}03 \text{ m}$). Ce résultat inattendu, à l'encontre des tendances observées dans le cas des exemples académiques (voir Tableau III-6), peut être expliqué par la géométrie assez particulière de la roue de l'exemple industriel (entretoises) dont le comportement élastique est sans doute complexe. Dans de telles conditions, des généralisations semblent hasardeuses et des études au cas par cas s'imposent.

3.4.2 Distribution de charge

Un des objectifs principaux du modèle développé dans cette thèse est tenir compte de façon assez précise la flexibilité du corps des composants du réducteur afin, notamment, d'étudier leur influence sur les contacts en dentures. L'impact de la géométrie complexe du corps de la roue de l'application présentée sur la Figure III-29 est étudié ci-dessous.

La Figure III-31 et la Figure III-32 comparent les distributions de charge obtenues avec les deux architectures de roue. Il en ressort que les nappes de chargement sont très voisines à l'exception d'une légère différence au niveau de la charge maximale. Malgré des formes assez différentes pour les deux exemples d'application, la distribution de charge n'est que très faiblement affectée ce qui valide la conception de cette roue allégée en termes de sollicitations sur les contacts de denture. Pour mémoire, les écarts étant nettement plus importants lorsqu'un simple voile mince était considéré (par exemple voir Figure III-9 et Figure III-10).

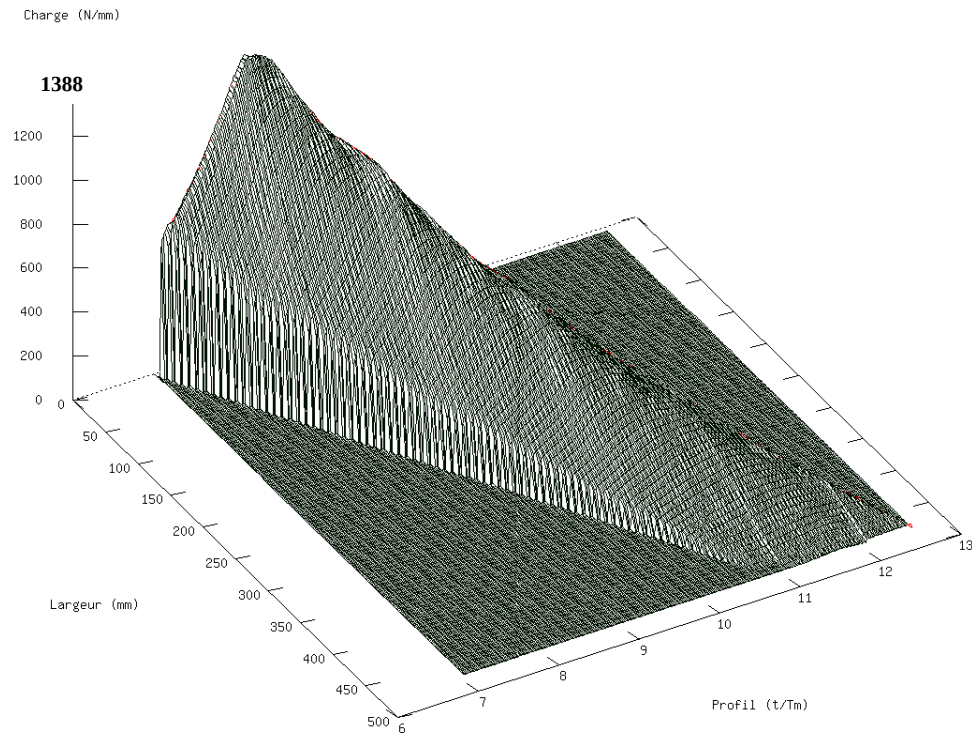


Figure III-31 : *Distribution de charge quasi statique du réducteur (Roue massive)*

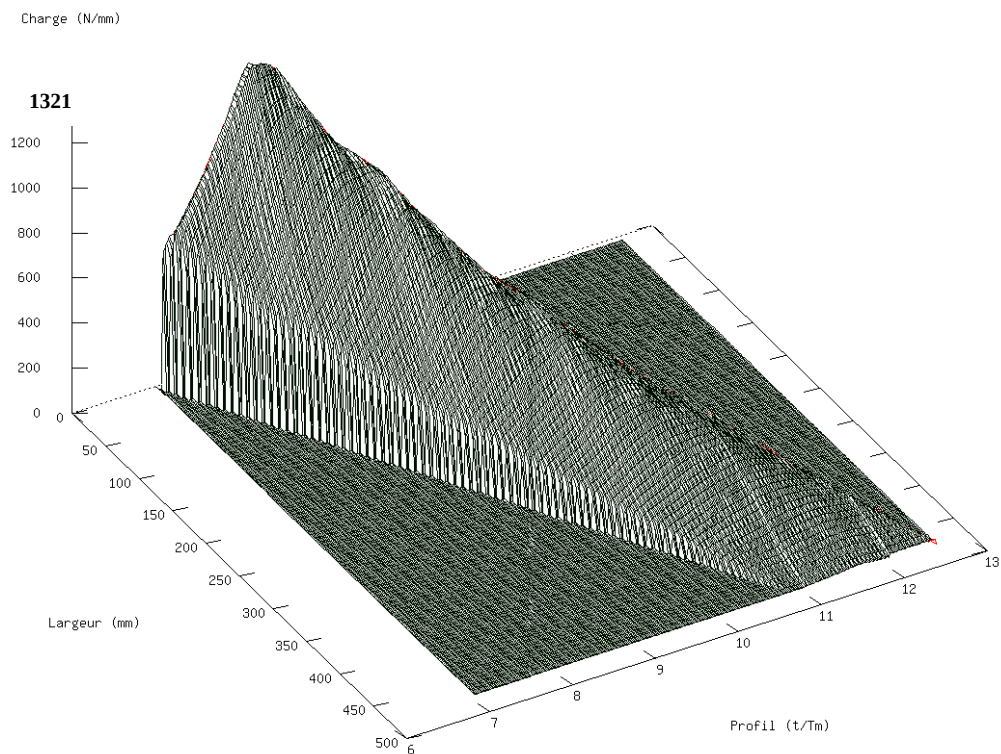


Figure III-32 : *Distribution de charge quasi statique du réducteur (Roue flexible)*

3.4.3 Déplacement d'un nœud de la roue

Pour une vitesse de rotation du pignon fixée à 0.01 rad/s, les évolutions temporelles des déplacements axiaux, radiaux et tangentiels de six nœuds situés au long de la fibre neutre de la roue sont déterminés. Les deux géométries de roue sont étudiées et l'emplacement des nœuds de référence est précisé sur la Figure III-33 dans le cas de la roue allégée; des emplacements comparables ont été considérés pour la roue massive.

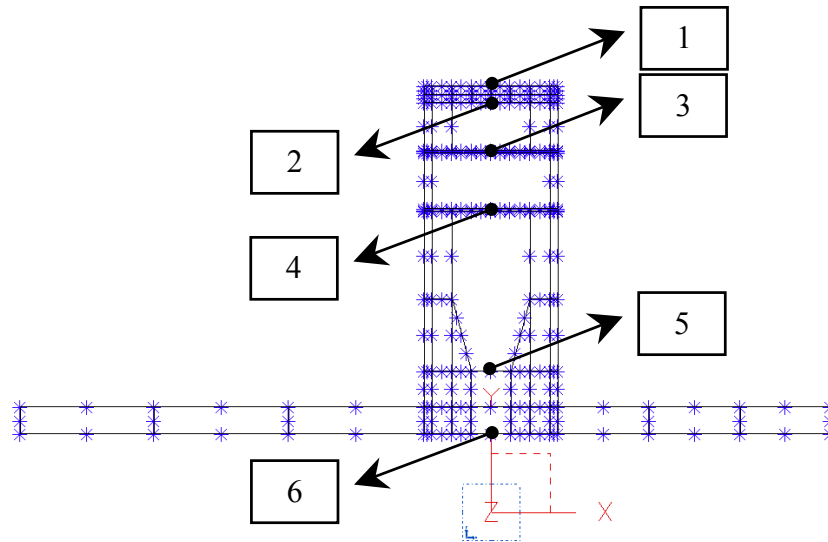
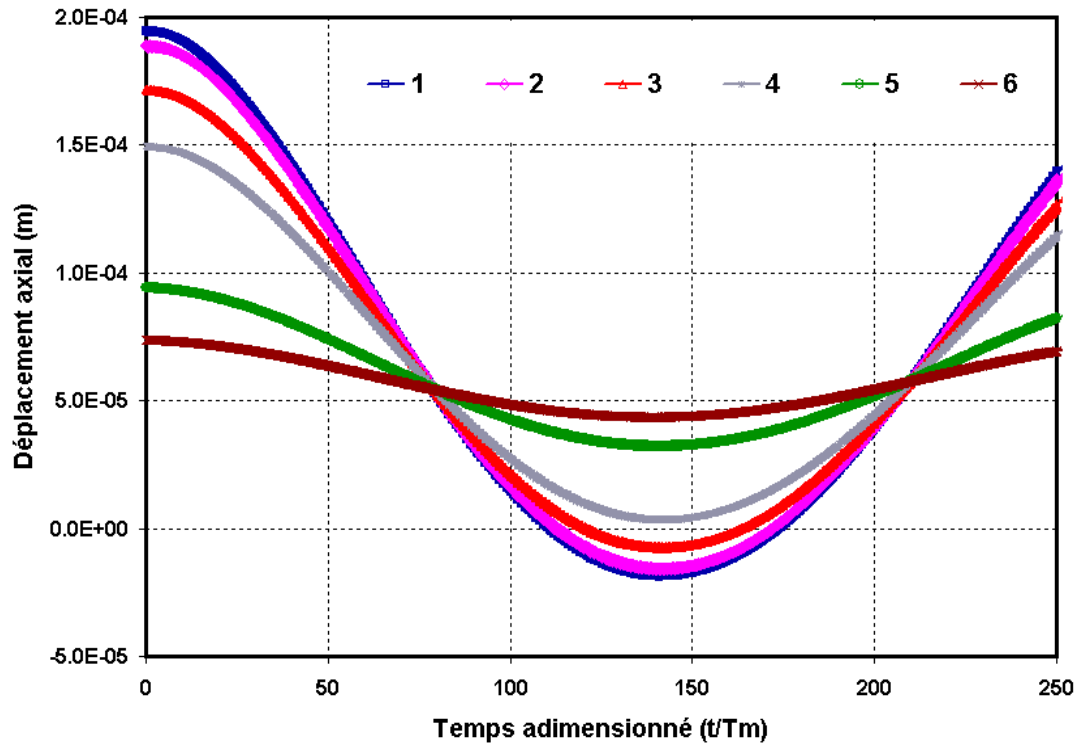
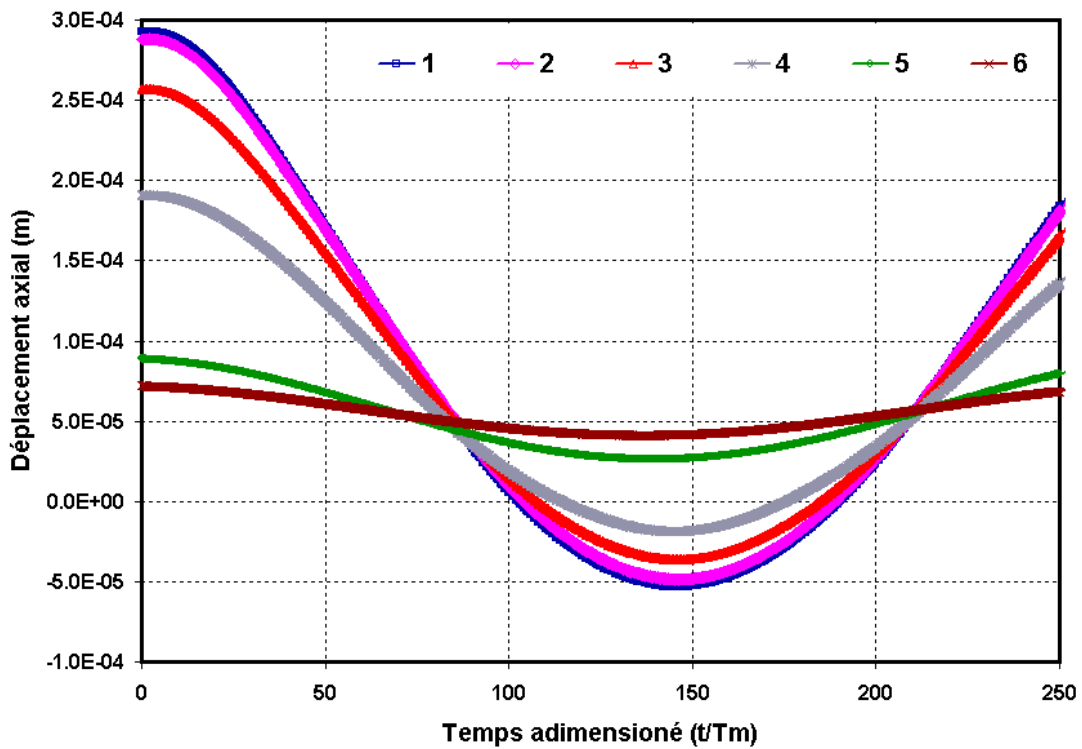


Figure III-33: *Disposition des six noeuds situés au long de la fibre neutre de la roue*

Les résultats correspondants sont représentés sur les Figures III-34 à III-36 ci-dessous. Les tendances confirment que les comportements statiques des deux mobiles sont très proches (mêmes ordres de grandeur des déplacements, même variations temporelles) et que la structure allégée réagit de manière analogue à la roue massive avec bien évidemment un gain de poids substantiel. Dans le détail, la roue massive se déforme moins dans la direction axiale et par contre, les déplacements tangentiels de la roue allégées (que l'on peut associer à de la torsion) sont inférieurs à ceux du mobile massif.

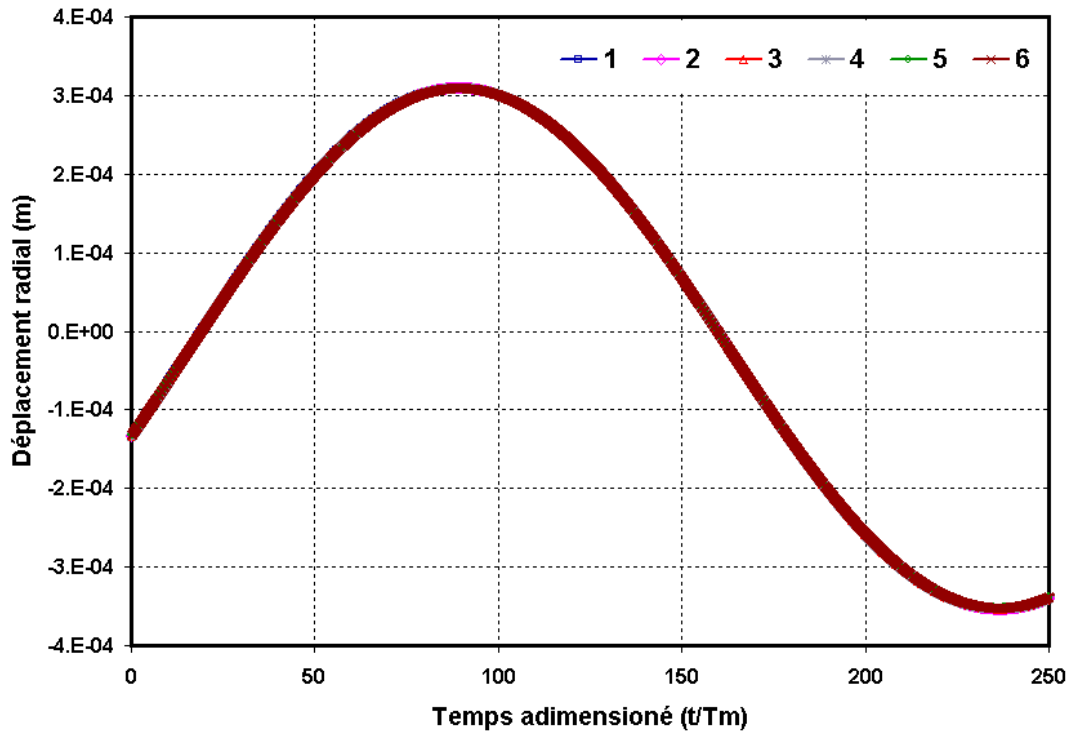


a) roue massive

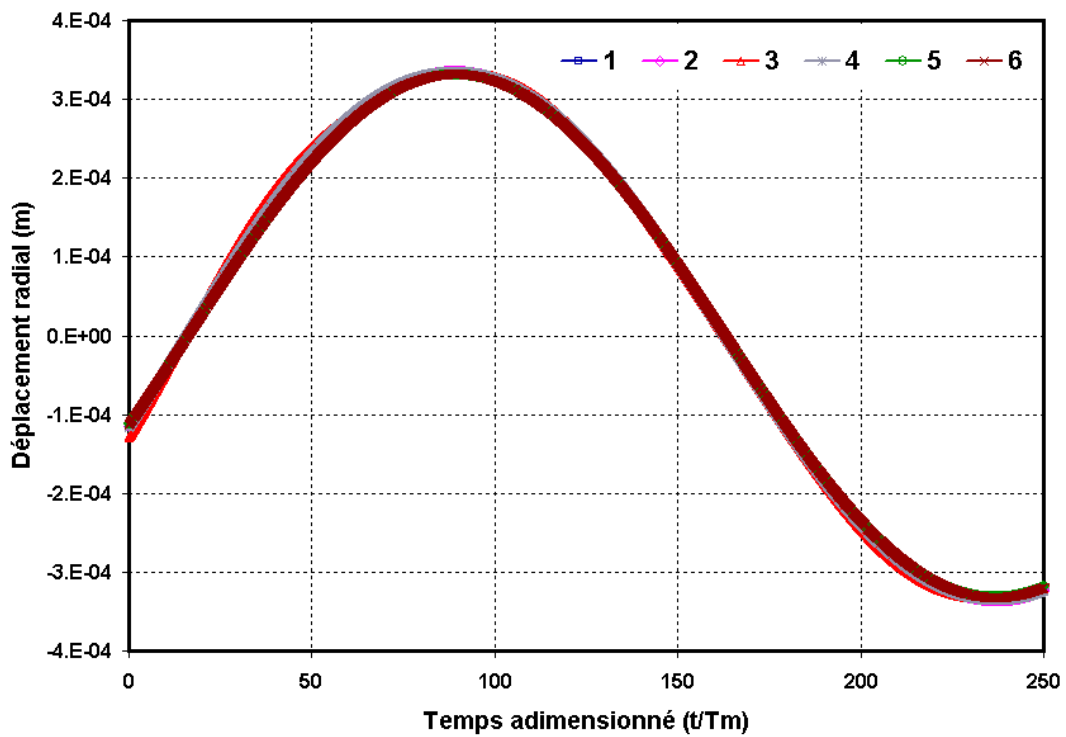


b) roue flexible (cas industriel)

Figure III-34: Déplacement axial des six noeuds situés au long de la fibre neutre de la roue

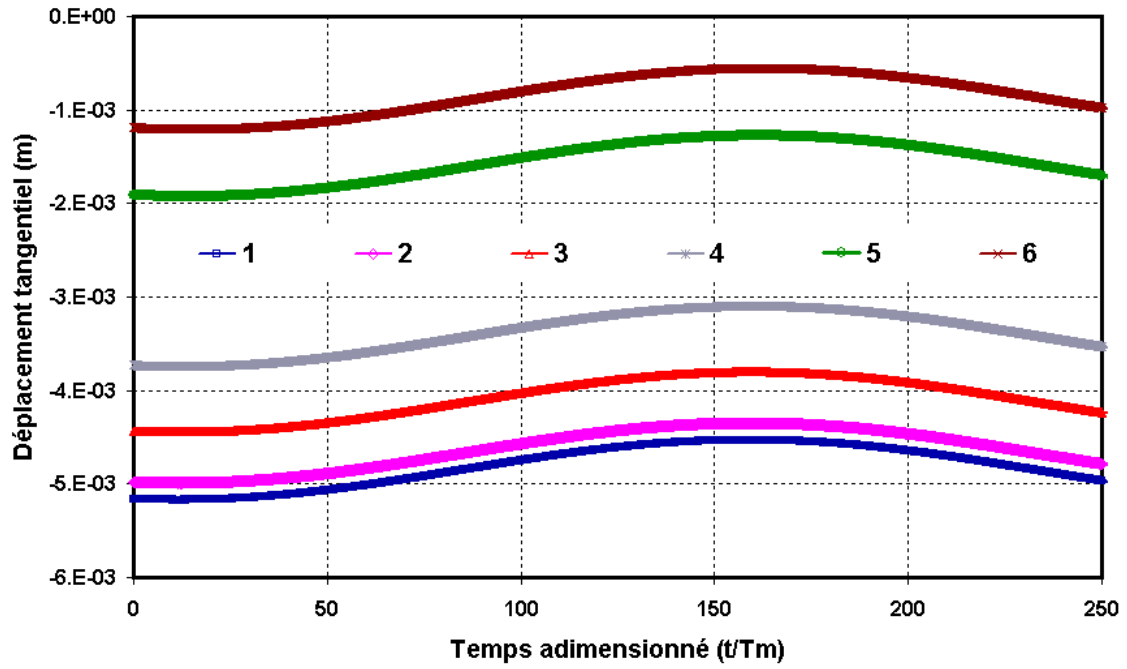


a) roue massive

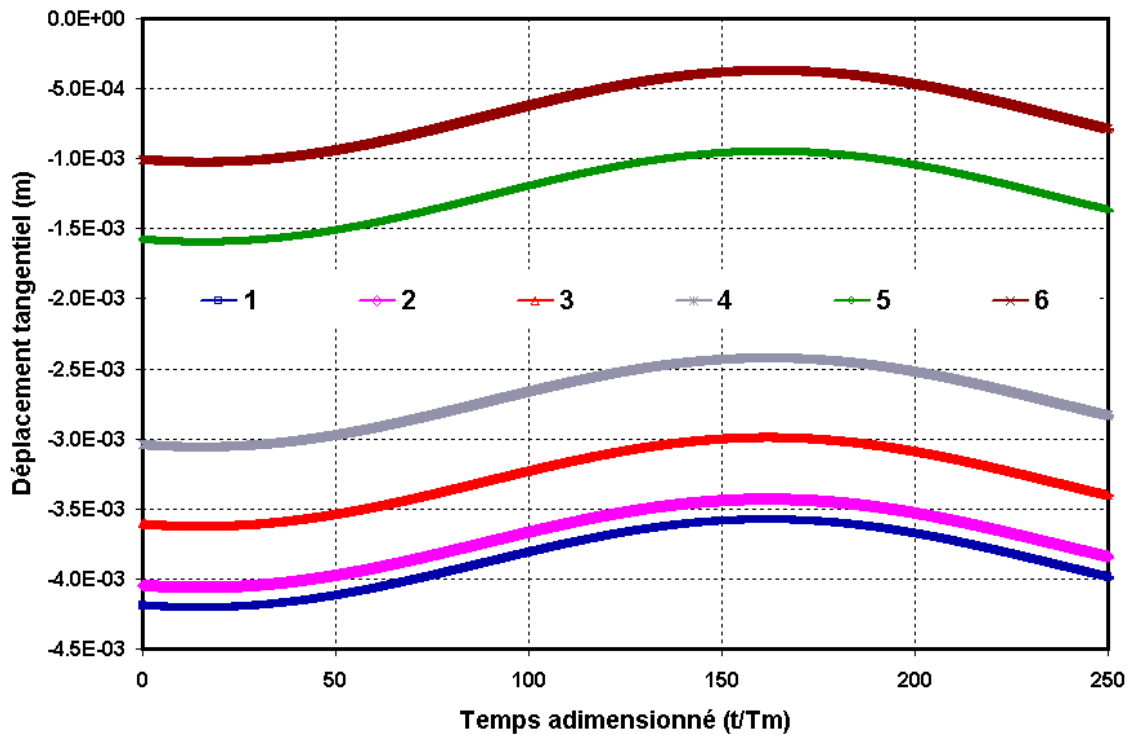


b) roue flexible (cas industriel)

Figure III-35: Déplacement radial des sept noeuds situés au long de la fibre neutre de la roue



a) roue massive



b) roue flexible (cas industriel)

Figure III-36: Déplacement tangentiel des six noeuds situés au long de la fibre neutre de la roue

4 Conclusion

Le modèle développé au chapitre II a été appliqué à des exemples académiques (Figure III-2) et à un exemple industriel (Figure III-29). Les principaux résultats et constats, à l'issue de ces études paramétriques, sont répertoriés ci-dessous.

L'introduction d'une roue déformable (roue à voile mince) dans un modèle d'engrenage modifie sensiblement la distribution de charge quasi-statique sur les dents. Par exemple, pour une largeur de denture égale à 100 mm, la présence du voile au centre de la denture la rend plus raide au milieu qu'aux extrémités et va donc conduire à des surcharges dans la partie centrale de la dent. Pour une largeur égale à 200 mm, ce phénomène peut conduire jusqu'à des pertes de contact sur les bords de denture. Dans un contexte de définition d'engrenages et/ou de corrections de forme sur les dentures, ces observations soulignent la nécessité d'approches fines permettant de simuler les couplages entre engrènement et éléments de structures flexibles

Par contre pour le cas industriel qui représente une roue allégée mais des raidisseurs (entretoises), les distributions de charge sur les dents des engrenages sont très peu modifiées par rapport à un cas de roue massive. Ceci indique qu'une conception de roue gardant l'essentiel de ces propriétés en terme de rigidité mais présentant un gain de masse substantiel est possible. Toutefois, le comportement semble difficilement prévisible a priori et laisse à penser que des études au cas par cas s'imposent.

Enfin, la prise en compte de la flexibilité de la roue dans un réducteur d'engrenage est susceptible de modifier notablement les erreurs de transmission sous charge en termes d'harmoniques d'excitation dominantes. Cette dernière remarque fait le lien avec le comportement dynamique de la transmission par engrenage qui est abordé au chapitre suivant.

Chapitre 4 :

Applications dynamiques

1 Introduction

Les aspects associés au fonctionnement quasi-statique ont été abordés au chapitre précédent et ce dernier chapitre du mémoire traite du comportement dynamique d'engrenages à voile mince ou avec roue allégée. Les architectures et géométries sont identiques à celles considérées dans le chapitre III. Les paramètres relatifs au chargement instantané sur les contacts de dentures et les vibrations au niveau des corps de roue sont examinés.

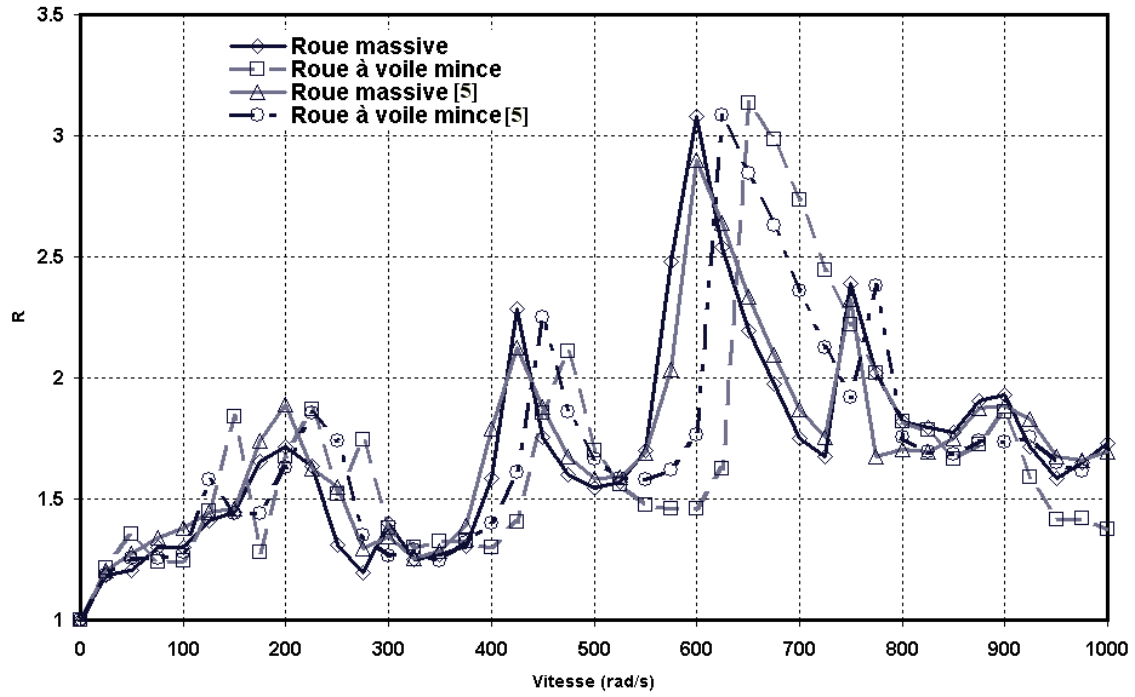
2 Exemple académique

Le comportement dynamique est analysé avec, en particulier, la prédiction des éventuelles plages de résonance où les efforts dynamiques sur les dents peuvent devenir très importants. Les points suivants sont abordés:

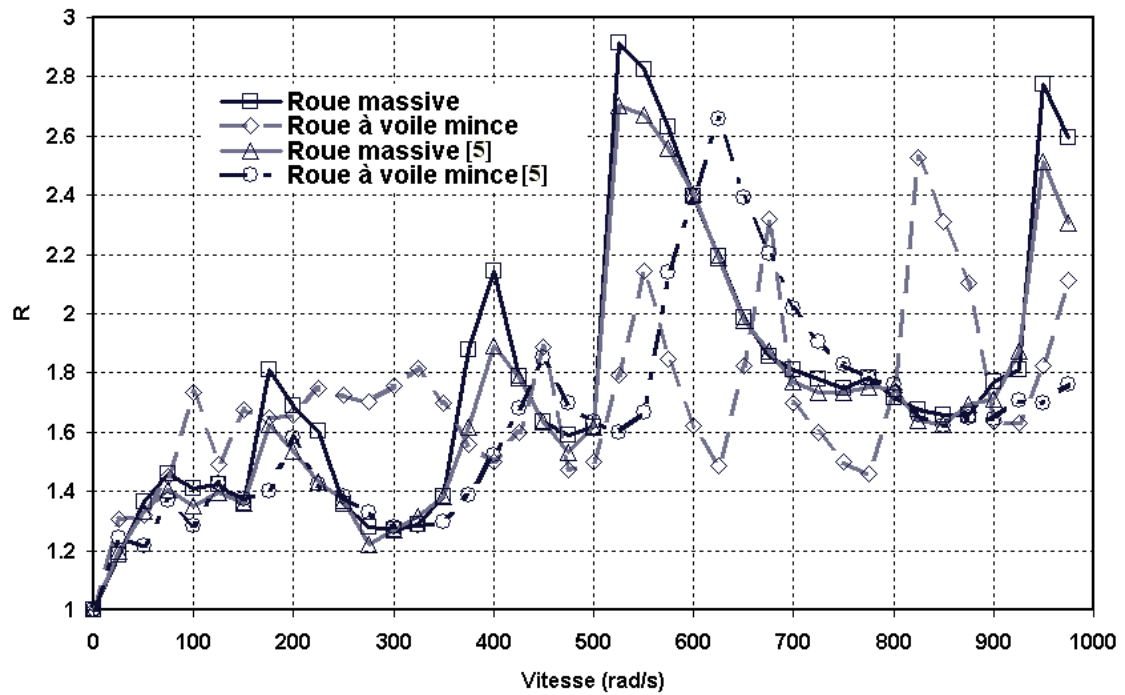
- L'impact de la prise en compte ou non de la flexibilité de la roue sur le comportement dynamique du réducteur en comparant avec les résultats issus d'un modèle poutre [5],
- Le couplage entre contacts et parties structurales via le calcul de déplacements sur une plage de vitesses significatives.

2.1 Coefficient dynamique

Les courbes de réponse en vitesse déterminées à partir du modèle hybride proposé et du modèle poutre [5] pour des roues massives et à voile mince (Figure III-2) sont représentées Figure IV-1(denture droite) et Figure IV-2 (denture hélicoïdale avec $\beta = 30^\circ$). Deux largeurs de denture respectivement 100 et 200 mm sont considérées. On rappelle que le modèle poutre [5] assimile les corps du pignon et de la roue à des arbres en flexion, torsion et traction-compression. Le paramètre principal sur les Figures IV-1 et IV-2 est le maximum du coefficient dynamique global en fonction de la vitesse de rotation. Ce paramètre noté R représente le rapport entre l'effort dynamique maximum et l'effort statique maximum à l'engrènement. Afin de s'approcher au mieux de la représentation d'un voile mince avec le modèle poutre [5], une roue de masse équivalente à la roue réelle est modélisée via un élément de poutre. Pour l'ensemble des résultats qui suivent, la géométrie du réducteur et les formes des dents sont supposées parfaites.

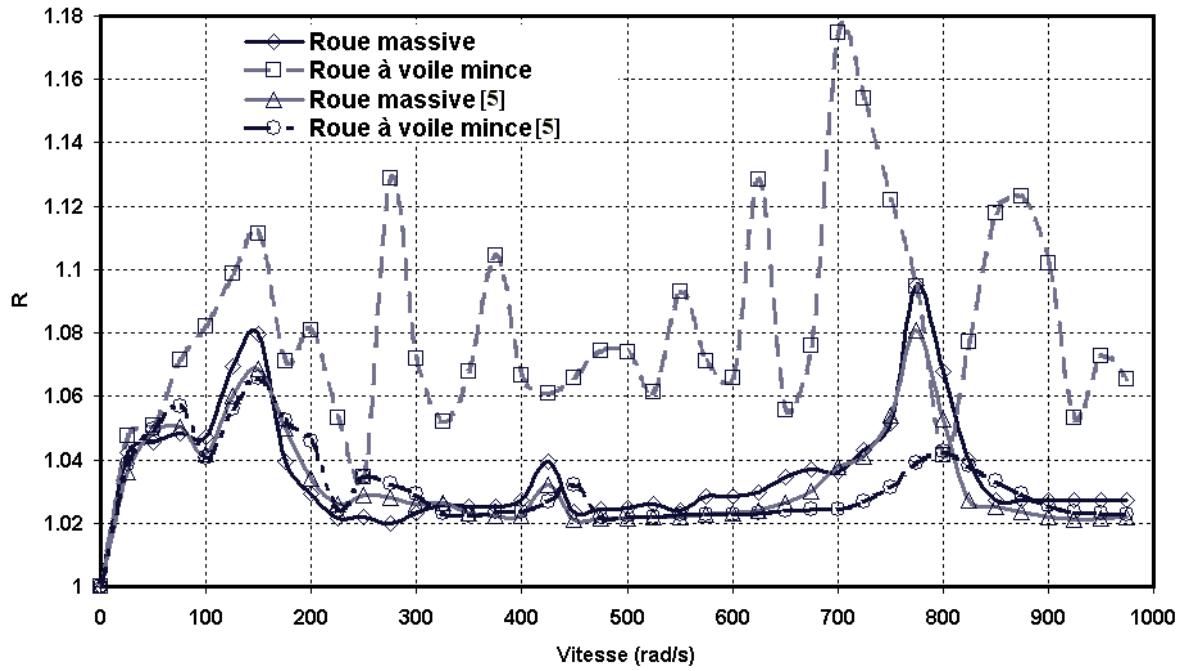


a) Largeur 100 mm

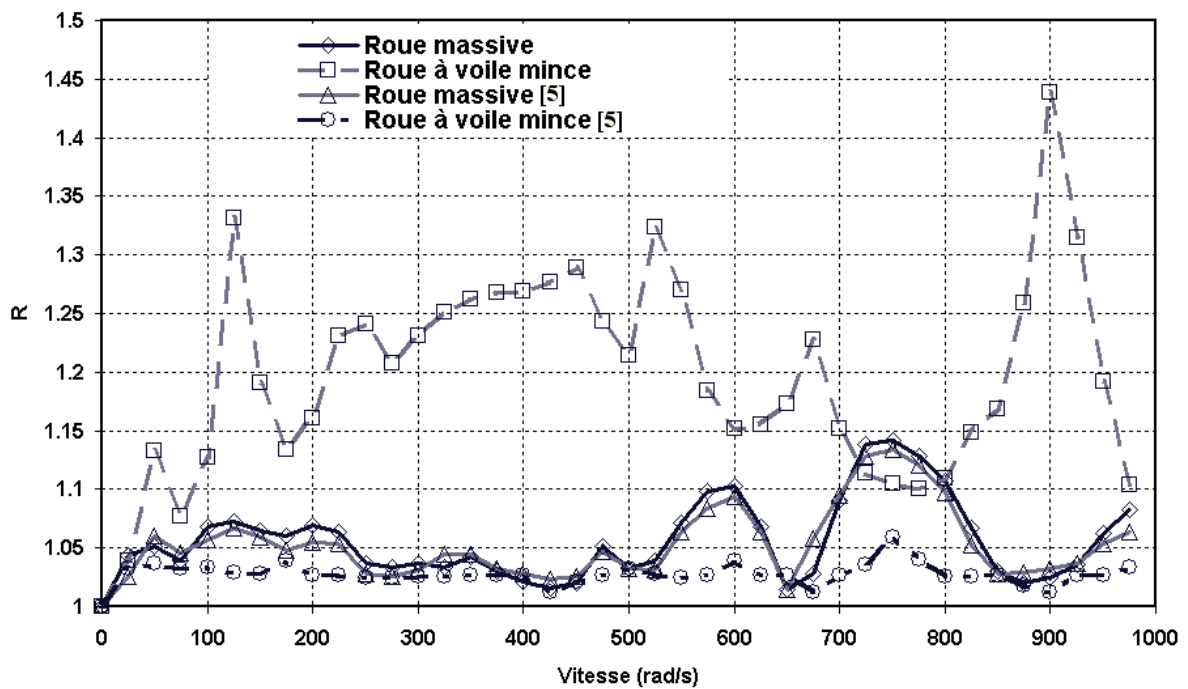


b) Largeur 200 mm

 Figure IV-1 : Evolution du maximum du coefficient dynamique global en fonction de la vitesse de rotation du moteur (roue massive et à voile mince, $\beta = 0^\circ$).



a) Largeur 100 mm



b) Largeur 200 mm

 Figure IV-2 : Evolution du maximum du coefficient dynamique global en fonction de la vitesse de rotation du moteur (roue massive et à voile mince, $\beta = 30^\circ$).

L'examen des courbes de réponses dynamiques conduit aux observations suivantes:

- Pour un réducteur à dentures droites ou hélicoïdales ayant une roue massive de largeur égale à 100 mm ou bien 200 mm, les coefficients dynamiques R (qui est une mesure du chargement instantané maximum) en fonction de la vitesse de rotation du pignon obtenus par le nouveau modèle hybride et par le modèle poutre [5] sont proches. Ce constat justifie a posteriori la validité d'approches de types poutre pour des engrenages massifs.
- En commençant par les dentures droites (Figure IV-1), la réponse dynamique calculée avec le modèle hybride pour une roue amincie présente davantage de pics de plus faibles amplitudes comparés au cas d'une roue massive. L'approximation du voile mince par une poutre de même masse conduit à des résultats relativement éloignés de ceux obtenus par le modèle hybride soulignant ainsi la nécessité de décrire ces géométries particulières de façon relativement précise.
- Pour les dentures hélicoïdales, les niveaux globaux des réponses dynamiques s'avèrent largement inférieurs à ceux avec des dentures droites. Comme précédemment, l'approximation basée sur un élément de poutre de même masse que celle de la roue amincie n'apparaît pas satisfaisante. Les courbes de réponse issues du modèle hybride indiquent un contenu modal plus riche avec des pics de réponse plus nombreux et de morphologies différentes ainsi que des amplitudes en moyennes supérieures.
- Ces constatations permettent de conclure qu'une modélisation des structures flexibles par des éléments poutres est inadaptée quelque soit la gamme de vitesses et qu'une approche plus précise comme celle proposée dans ce mémoire s'impose.

En considérant que les fluctuations d'erreur de transmission quasi-statique sous charge sont représentatives des excitations associées à l'engrènement, les spectres portés Figure III-28 donnent les composantes fréquentielles d'excitations prédominantes. Par ailleurs, les fréquences propres du système non amorti ont été calculées à partir de la matrice masse globale et de la matrice de rigidité globale du réducteur moyennée sur le temps et l'espace et sont listées dans le Tableau IV-1 (cas de denture droite) et le Tableau IV-2 (cas de denture hélicoïdale, $\beta = 30^\circ$) en fonction du pourcentage d'énergie de déformation dans la denture. A partir de ces résultats, il apparaît que la plupart des pics de chargement sur les courbes de réponse (Figure IV-1 et Figure IV-2) correspondent approximativement aux coïncidences entre les fréquences propres présentant les pourcentages d'énergie de

déformation les plus élevés et les composantes fréquentielles dominantes dans les spectres d'erreurs de transmission sous charge.

Largeur 100 mm							
Roue massive				Roue à voile mince			
$\rho \%$	$H1(\text{rad/s})$	$H2(\text{rad/s})$	$H3(\text{rad/s})$	$\rho \%$	$H1(\text{rad/s})$	$H2(\text{rad/s})$	$H3(\text{rad/s})$
51.46	-	595.59	198.53	80.71	-	682.81	227.6
31.49	444.15	222.07	74.02	17.49	430.8	215.4	71.8
15.61	-	755.46	-	15.93	147.1	73.55	-
10.29	910.14	455.07	-	11.94	65.23	-	-
-	-	-	-	11.03	900.28	450.14	150.04
-	-	-	-	10.63	-	694.34	231.44
Largeur 200 mm							
Roue massive				Roue à voile mince			
$\rho \%$	$H1(\text{rad/s})$	$H2(\text{rad/s})$	$H3(\text{rad/s})$	$\rho \%$	$H1(\text{rad/s})$	$H3(\text{rad/s})$	
80.67	-	595.5		61.63	-	580.47	
44.52	412.46	206.23		34.35	-	647.92	
21.91	155.45	77.72		17.34	134.82	44.94	
14.86	-	910.15		12.01	-	457.84	
-	-	-		11.44	305.27	101.75	
-	-	-		11.42	-	241.2	
-	-	-		10.25	-	822.34	

Tableau IV-1 : Coïncidences entre composantes fréquentielles (fréquences propres du système et fréquences d'excitations principales – cas de denture droite).

Largeur 100 mm							
Roue massive				Roue à voile mince			
$\rho \%$	$H1(rad/s)$			$\rho \%$	$H1(rad/s)$	$H2(rad/s)$	$H3(rad/s)$
50.23	138.68			33.26	-	687.34	458.23
35.71	422.54			25.98	-	557.73	371.82
18.75	770.91			25.78	-	536.25	357.5
-	-			25.73	-	206.21	137.47
-	-			14.98	876.43	-	292.14
-	-			11.79	142.86	-	-
-	-			11.21	-	621.19	-
-	-			10.13	958.44	479.22	-
Largeur 200 mm							
Roue massive				Roue à voile mince			
$\rho \%$	$H1(rad/s)$	$H2(rad/s)$	$H5(rad/s)$	$\rho \%$	$H1(rad/s)$	$H5(rad/s)$	
51.5	-	206.23	-	75.64	-	540.94	
46.82	713.65	356.82	142.73	25.79	-	65.51	
41.56	-	555.24	222.09	25.67	479.44	-	
32.23	125.63	62.81	-	21.34	643.8	128.76	
31.7	963.61	481.8	192.72	21.14	120.13	-	
-	-	-	-	19.33	237.57	47.51	
-	-	-	-	11.68	928.25	-	

Tableau IV-2 : Coïncidences entre composantes fréquentielles (fréquences propres du système et fréquences d'excitations principales – cas de denture hélicoïdale).

2.2 Analyse du déplacement d'un nœud de la roue

On représente sur la Figure IV-3, la variation temporelle du déplacement axial du nœud 1 de la roue massive (largeur de 200 mm (Figure III-15-a)) pour une vitesse du pignon égale à 125 rad/s.

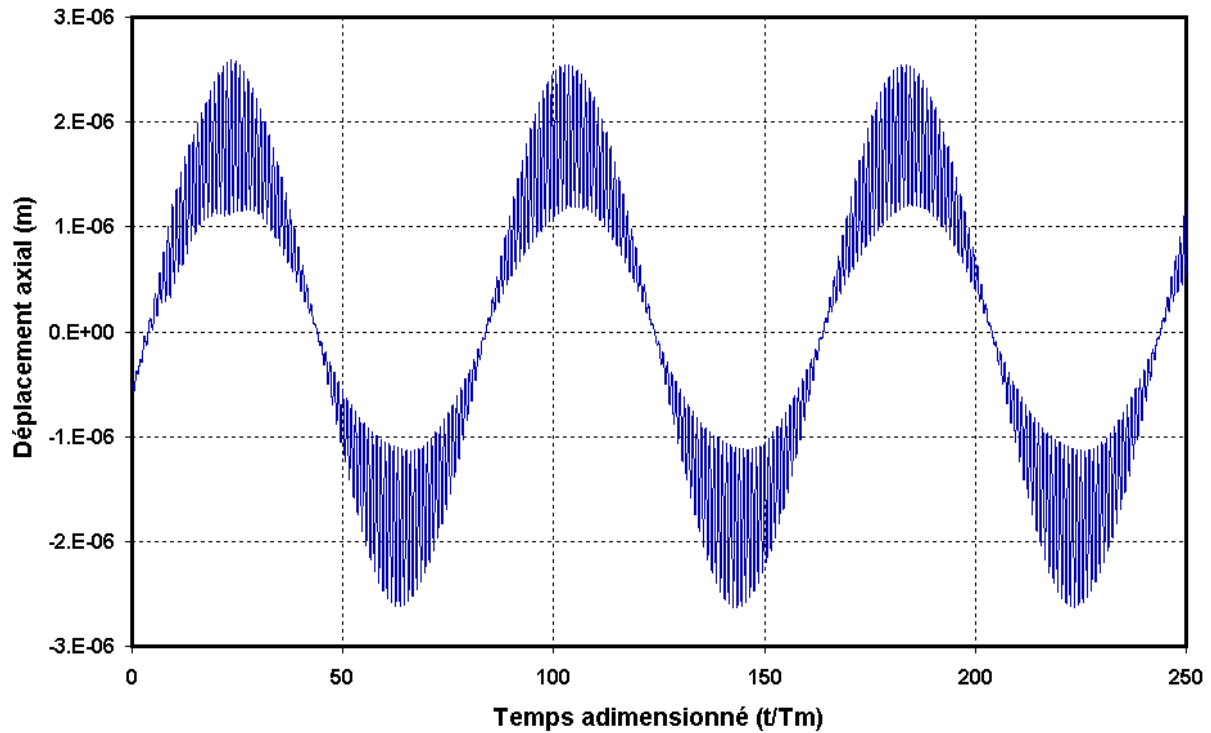
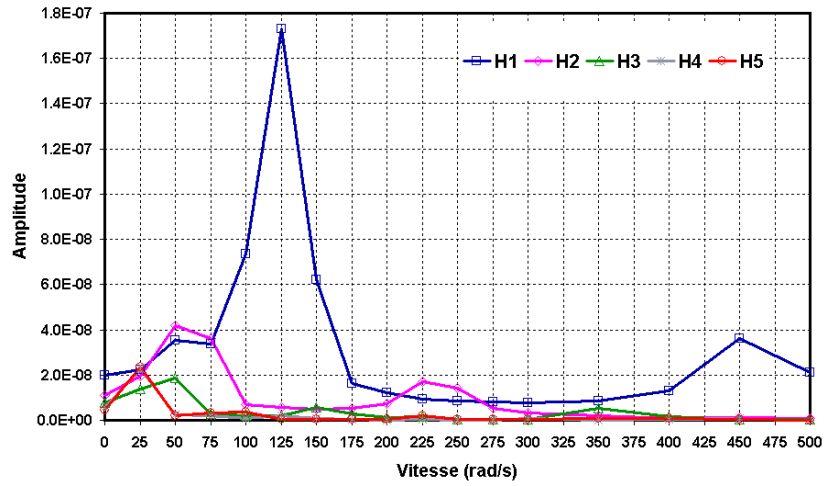
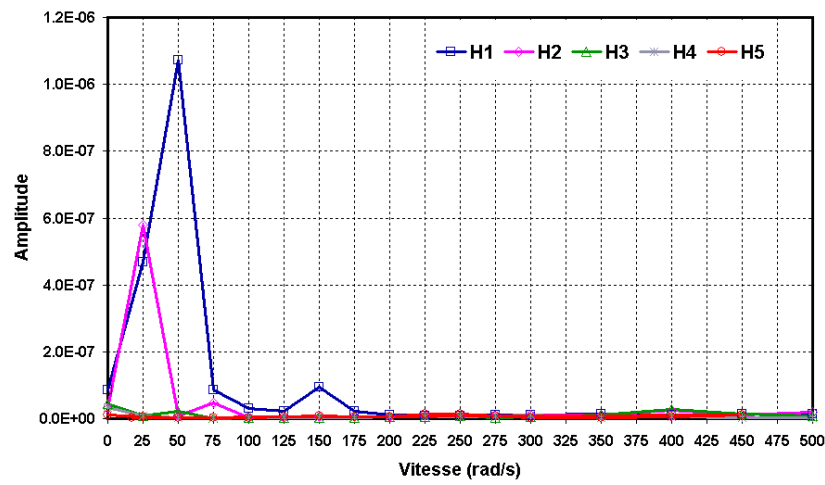


Figure IV-3 : *Déplacement axial du nœud 1 à 125 rad/s (roue massive, $\beta = 0^\circ$).*

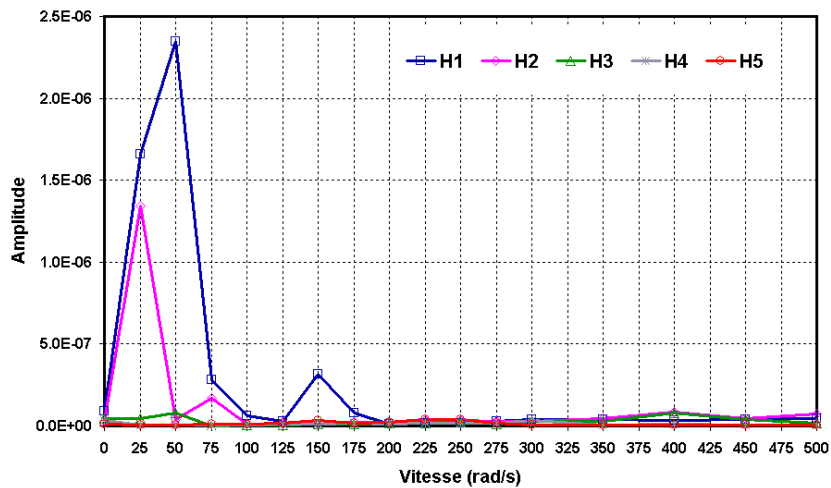
L'allure du déplacement axial fait apparaître à la fois une composante basse fréquence provenant du passage de l'engrènement à proximité du nœud de calcul choisi et des composantes à plus hautes fréquences associées à l'engrènement. Dans de qui suit, le déplacement axial, radial et tangentiel de ce même nœud 1 est calculé pour les deux types de géométrie de roue (roue massive (Figure III-15-a) et roue à voile mince (Figure III-15-b) en dentures droites et hélicoïdales. Ces déplacements sont déterminés pour des vitesses de rotation du pignon variant de 0 à 1000 rad/s. Les spectres correspondants sont déterminés pour chaque vitesse du pignon et les amplitudes des harmoniques de la fréquence d'engrènement sont tracées en fonction de la vitesse de rotation sur les figures qui suivent (les basses fréquences provenant de la rotation et dont les amplitudes sont dominantes ne sont pas représentées).



a) axial

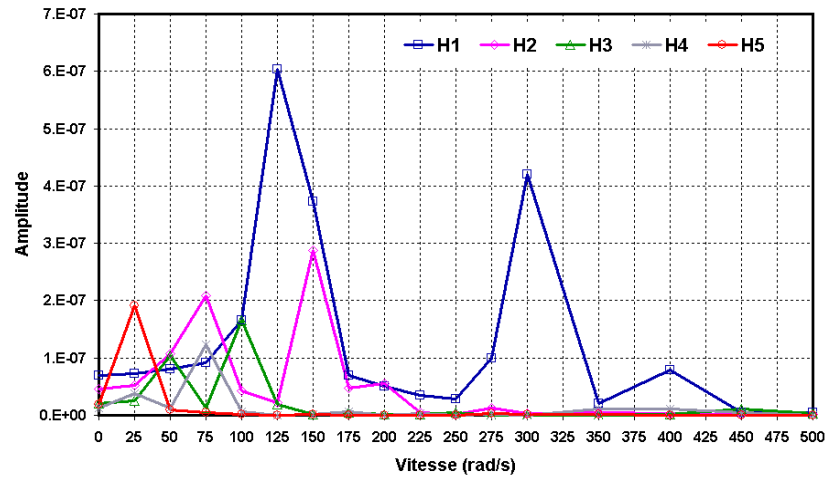


b) radial

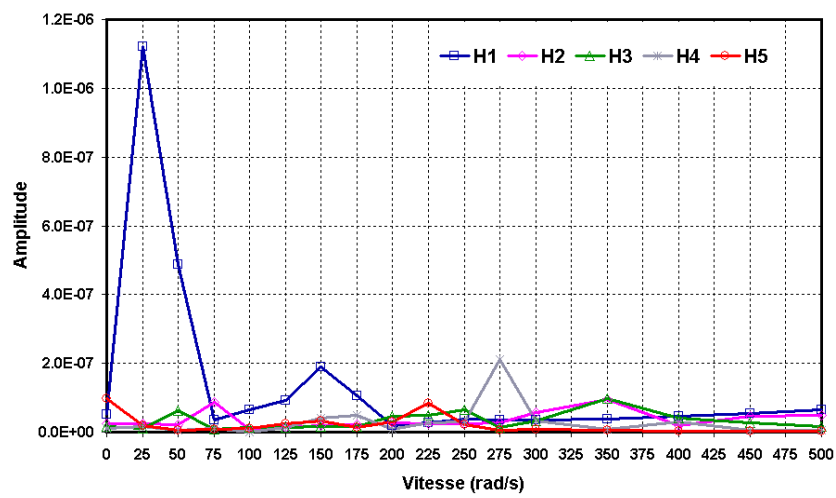


c) tangentiel

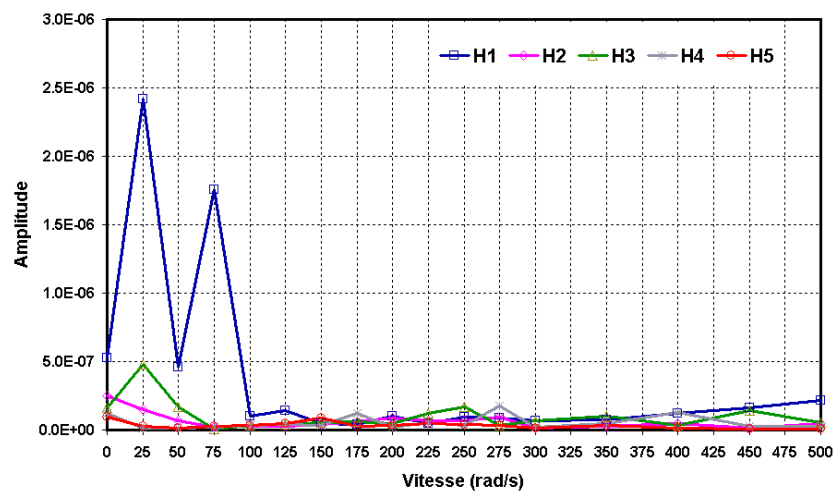
Figure IV-4 : Spectres des trois composantes du déplacement au nœud 1 de la roue massive ($\beta = 0^\circ$).



a) axial

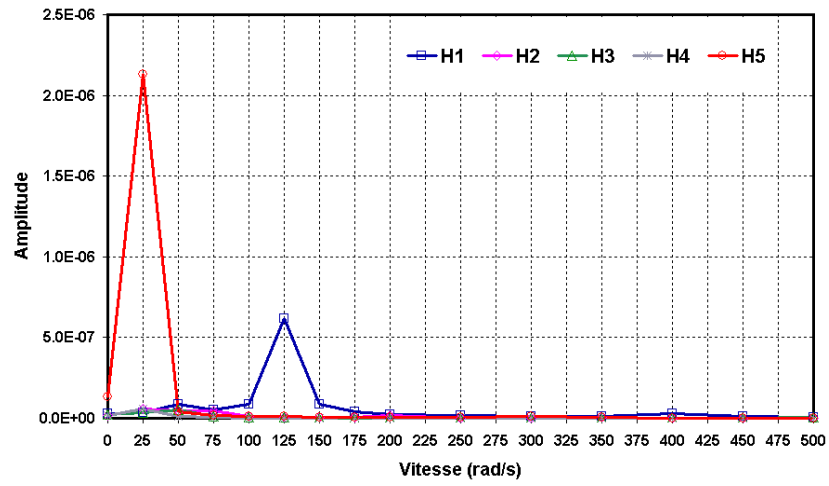


b) radial

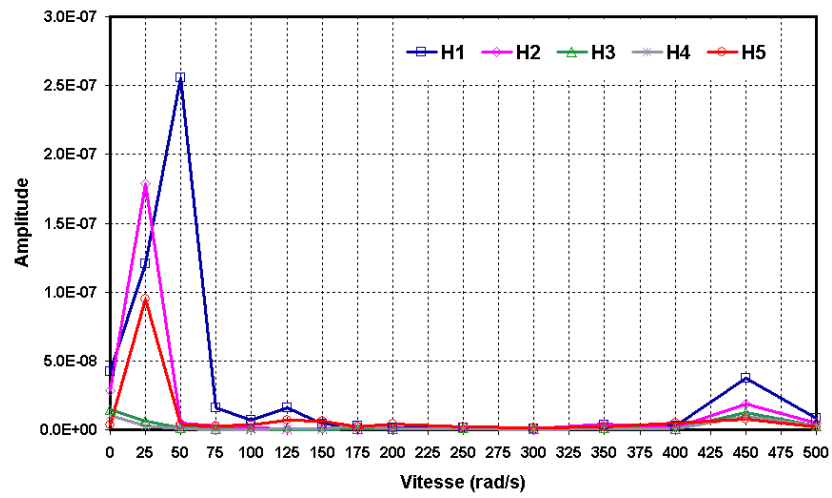


c) tangentiel

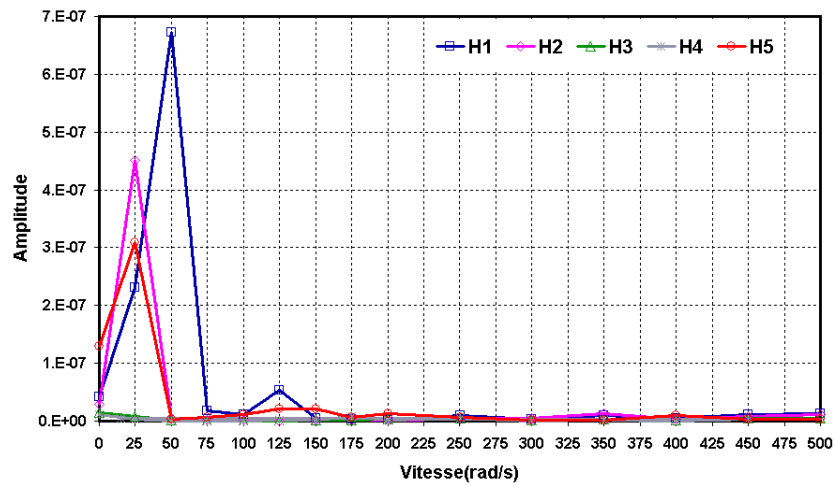
Figure IV-5 : Spectres des trois composantes du déplacement au nœud 1 de la roue à voile mince ($\beta = 0^\circ$).



a) axial

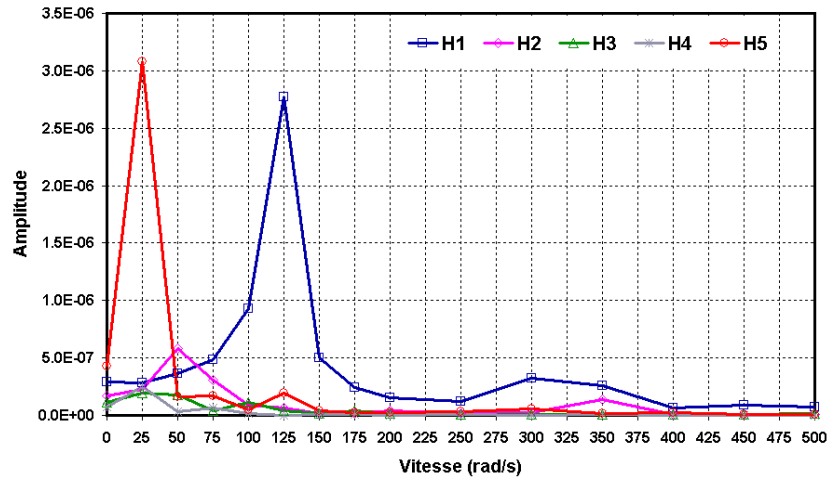


b) radial

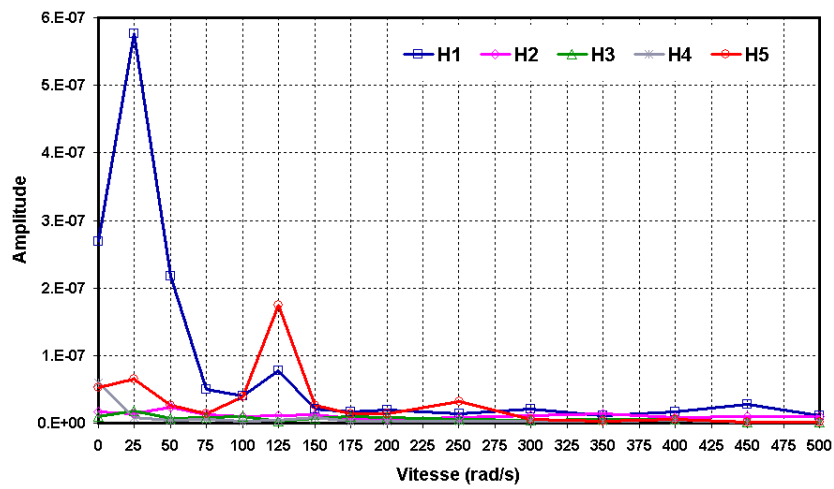


c) tangentiel

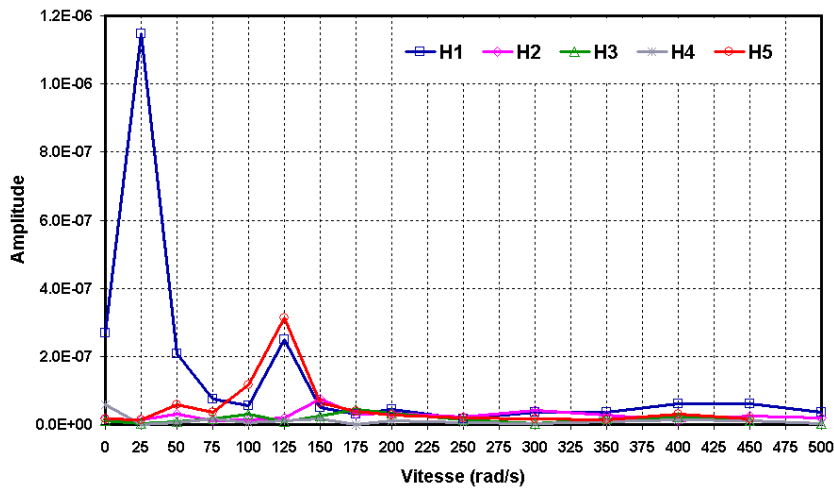
Figure IV-6 : Spectres des trois composantes du déplacement au nœud 1 de la roue massive ($\beta = 30^\circ$).



a) axial



b) radial



c) tangentiel

Figure IV-7 : Spectres des trois composantes du déplacement au nœud 1 de la roue à voile mince ($\beta = 30^\circ$).

Comme pour les spectres d'erreur de transmission (Figure III-28-b), les déplacements dynamiques sont contrôlés par les 5 premières harmoniques de la fréquence d'engrènement et au-delà de 500 rad/s, les amplitudes de réponse sont pratiquement nulles. Les vitesses critiques et les amplitudes associées aux différents pics des trois composantes (axiale, radiale et tangentielle) du déplacement au nœud 1 de la roue massive et de la roue à voile mince en denture droite et hélicoïdale, sont listées respectivement dans le Tableau IV-3 (déplacement axial), le Tableau IV-4 (déplacement radial) et le Tableau IV-5 (déplacement tangentiel).

		Roue massive		Roue à voile mince		
		$\beta=0^\circ$	$\beta=30^\circ$	$\beta=0^\circ$	$\beta=30^\circ$	
H1	<i>Vitesse rad/s</i>	125	125	125	300	125
	<i>Amplitude (m)</i>	1.72E-07	6.17E-07	6E-07	4E-07	2.75E-06
H2	<i>Vitesse rad/s</i>	-	-	75	150	50
	<i>Amplitude (m)</i>	-	-	2E-07	2.8E-07	6E-07
H3	<i>Vitesse rad/s</i>	-	-	50	100	-
	<i>Amplitude (m)</i>	-	-	1E-07	1.6E-07	-
H4	<i>Vitesse rad/s</i>	-	-	75		-
	<i>Amplitude (m)</i>	-	-	1.2E-07		-
H5	<i>Vitesse rad/s</i>	-	25	25		25
	<i>Amplitude (m)</i>	-	2.13E-06	1.9E-07		3.1E-06

Tableau IV-3 : Vitesses critiques des principales composantes fréquentielles du déplacement axial du nœud 1 (configuration roue massive et voile mince, largeur 200 mm, $\beta = 0^\circ$ et 30°).

		Roue massive		Roue à voile mince		
		$\beta=0^\circ$	$\beta=30^\circ$	$\beta=0^\circ$		$\beta=30^\circ$
H1	Vitesse (rad/s)	50	50	25	150	25
	Amplitude (m)	1.08E-06	2.6E-07	1.12E-06	2E-07	5.8E-07
H2	Vitesse (rad/s)	25	25	-		-
	Amplitude (m)	5.8E-07	1.75E-07	-		-
H3	Vitesse (rad/s)	-	-	-		-
	Amplitude (m)	-	-	-		-
H4	Vitesse (rad/s)	-	-	275		-
	Amplitude (m)	-	-	2E-07		-
H5	Vitesse (rad/s)	-	-	-		125
	Amplitude (m)	-	-	-		1.7E-07

Tableau IV-4 : Vitesses critiques des principales composantes fréquentielles du déplacement radial du nœud 1 (configuration roue massive et voile mince, largeur 200 mm, $\beta = 0^\circ$ et 30°).

		Roue massive			Roue à voile mince			
		$\beta=0^\circ$		$\beta=30^\circ$	$\beta=0^\circ$		$\beta=30^\circ$	
H1	Vitesse (rad/s)	50	150	50	25	75	25	125
	Amplitude (m)	2.4E-06	3E-07	6.7E-07	2.4E-06	1.7E-07	1.15E-06	2.5E-07
H2	Vitesse (rad/s)	25		25	-		125	
	Amplitude (m)	1.34E-06		4.5E-07	-		3.14E-07	
H3	Vitesse (rad/s)	-		-	25		-	
	Amplitude (m)	-		-	4.9E-07		-	
H4	Vitesse (rad/s)	-		-	-		-	
	Amplitude (m)	-		-	-		-	
H5	Vitesse (rad/s)	-		25	-		-	
	Amplitude (m)	-		3E-07	-		-	

Tableau IV-5 : Vitesses critiques des principales composantes fréquentielles du déplacement tangentiel du nœud 1

(configuration roue massive et voile mince, largeur 200 mm, $\beta = 0^\circ$ et 30°).

Il est intéressant de remarquer que les vitesses critiques associées aux différents pics du déplacement axial, radial et tangentiel du nœud 1 d'une roue massive ou bien d'une roue à voile mince en denture droite et hélicoïdale ayant une largeur 200 mm portées sur les trois tableaux précédents, ne correspondent pas aux vitesses critiques associées aux engrènements (Figure IV-1-b et Figure IV-2-b). Pour cet exemple, les couplages dynamiques entre les contacts à la denture et le voile de la roue sont donc faibles et le lien entre ces deux composantes se fait principalement par les excitations d'engrènement qui viennent faire vibrer la structure de la roue amincie.

3 Exemple industriel

Les caractéristiques du réducteur sont données au Tableau III-8 et la géométrie de la roue étudiée est présentée sur la Figure III-29. La géométrie du réducteur est considérée parfaite, sans défaut ni corrections de forme. Un calcul du coefficient dynamique global maximum en fonction de la vitesse est effectué avec respectivement les modèles hybride et de type poutre en considérant à chaque fois les deux géométries de roue : roue de l'application industrielle et roue massive équivalente. Les évolutions du coefficient dynamique en fonction de la vitesse de rotation du pignon (0 à 1000 rad/s) pour ces trois cas d'étude sont présentées sur la Figure IV-8.

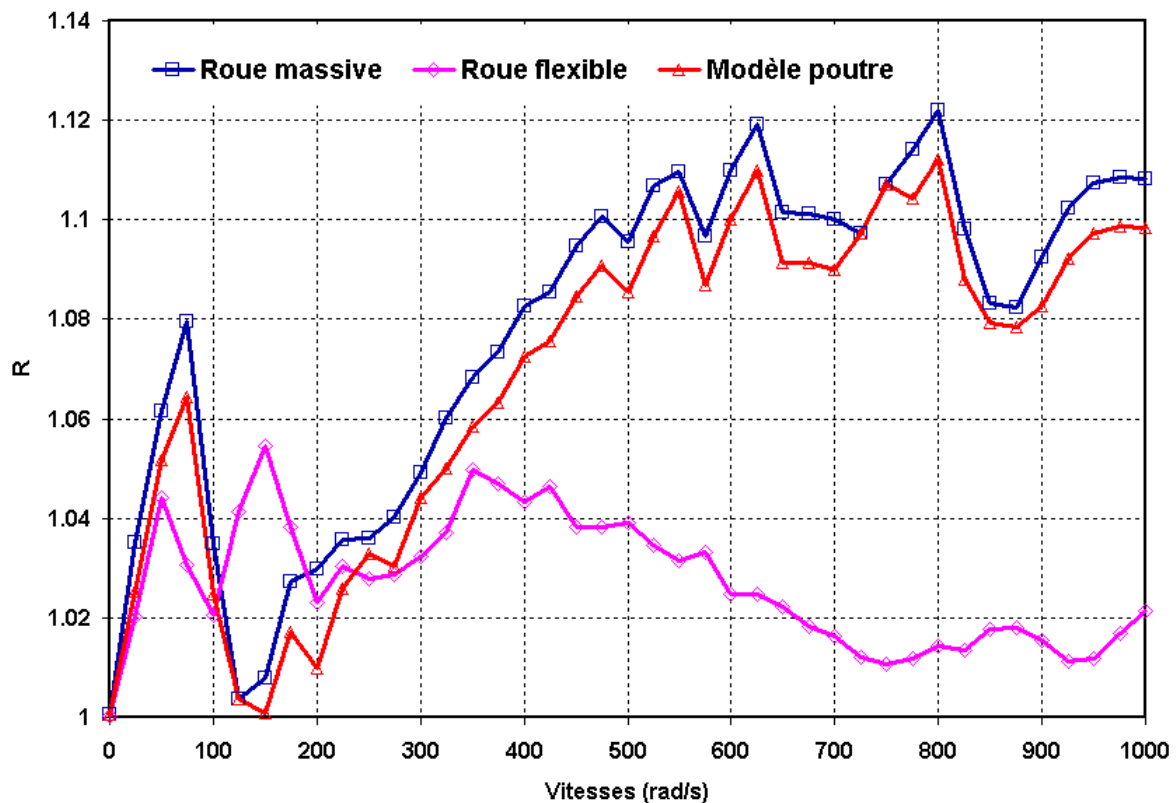


Figure IV-8 : Evolution du maximum du coefficient dynamique global en fonction de la vitesse de rotation du moteur.

Les résultats du modèle poutre et du modèle développé appliqué à une roue massive apparaissent en bon accord, tant sur la position des vitesses critiques que sur les amplitudes de réponse, ce qui valide pour partie les développements proposés. Les comportements à hautes vitesses de rotation de l'engrenage à roue allégée et à roue massive sont très différents. Les

effets dynamiques sont atténués dans le cas roue allégée avec des surcharges plus faibles et la disparition de certains pics de réponse. Ces résultats sont opposés à ceux obtenus dans le cas d'une roue à voile mince où, au contraire, les amplifications d'efforts étaient plus marquées dans le cas du voile mince.

4 Conclusion

Dans ce chapitre l'intérêt d'intégrer une description fine du corps de la roue a été montré sur un calcul de réponse dynamique via deux exemples de réducteurs académique et industriel.

Pour les deux applications, une bonne correspondance a été notée dans le cas d'engrenages massifs entre les réponses calculées par le modèle hybride et celles issues d'un modèle poutre [5]. Ce résultat confirme qu'une modélisation par éléments poutres des corps d'engrenages massifs d'un réducteur est suffisante pour l'étude de son comportement statique et dynamique.

La prise en compte de la flexibilité de la roue a une incidence non négligeable sur la réponse dynamique. Par exemple pour un réducteur ayant une roue à voile mince, les effets dynamiques sont plus marqués principalement en dentures hélicoïdales avec, en particulier, un nombre de pics plus élevé présentant des formes plus pointues, c'est-à-dire, davantage de vitesses potentiellement critiques comparées à un réducteur avec une roue massive. Cette différence de comportement provient essentiellement de la différence de rigidité des corps des deux roues.

Pour les différents exemples académiques de réducteurs étudiés, les vitesses critiques pour l'engrènement peuvent être déduites des coïncidences entre les composantes spectrales dominantes de l'erreur de transmission et les fréquences propres du système linéaire avec raideur moyennée. Les pourcentages d'énergie de déformation affectés à la denture apparaissent donc comme des paramètres pertinents permettant de trier les fréquences propres en fonction de leur contribution au chargement dynamique sur les dents.

On remarque que la roue à voile mince réagit différemment d'une roue massive en terme de déplacement en régime quasi-statique et dynamique. Les spectres des composantes du déplacement d'un noeud de la roue pour différentes vitesses montrent un faible couplage entre les contacts et la structure des composants d'un réducteur d'engrenage.

Finalement, il semble difficile de tirer des conclusions générales en ce qui concerne le comportement dynamique d'un réducteur ayant différentes structures amincies et une étude précise de chaque cas s'impose.

Conclusion générale

Cette étude s'inscrit dans la continuité des travaux de modélisation du comportement statique et dynamiques des réducteurs d'engrenage effectués au Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Solides. Ce travail, à caractère spécifiquement théorique et numérique, vise à dépasser le cadre des modèles usuels de la littérature en proposant une approche hybride originale permettant d'intégrer les contributions de parties déformables au comportement statique et dynamique d'engrenages. Le modèle se caractérise par :

- la modélisation du corps du pignon (denture exclue) et ses arbres par des éléments poutres en flexion, torsion et traction compression (partie motrice),
- l'introduction de maillages éléments finis tridimensionnels par réduction pseudo-modale pour les parties structurelles flexibles (partie réceptrice),
- la modélisation des conditions de contact instantanées entre dentures par des fondations élastiques de Pasternak,
- la prise en compte d'écarts de forme sur les dentures et de défauts de montage.

La résolution est conduite pas à pas dans le temps en couplant l'intégration des équations du mouvement condensées et la résolution du contact normal entre dents. Les résultats présentés dans cette thèse montrent qu'une approche de type poutre semble suffisante pour des corps d'engrenages massifs et que, par contre, les roues amincies nécessitent un traitement plus adapté.

De nombreux résultats, dont certains semblent originaux illustrent le potentiel du modèle et son intérêt dans un contexte industriel avec, en particulier, les applications aéronautiques et navales dans les quelles les réducteurs comportent généralement des roues déformables et de géométries assez complexes. Les effets de la flexibilité de ces types de roues dans un réducteur simple étage sans défauts ont été analysés à la fois en statique et en dynamique.

En considérant un fonctionnement à faible vitesse, la flexibilité de la roue modifie sensiblement la distribution de charge quasi-statique sur un couple de dents, l'erreur de transmission et la déformation de la roue.

A des vitesses plus élevées, selon la géométrie du corps de la roue étudiée, les courbes de réponse montrent qu'on a des effets dynamiques assez différentes, ceci est dû essentiellement au changement de la rigidité de la roue dans chaque cas d'étude.

Un fort couplage entre l'erreur de transmission et la réponse dynamique en terme de détection de vitesses critiques est observé. Par contre, les vitesses potentiellement critiques pour, d'une part, les dentures et, d'autre part, les corps de roue semblent être relativement dissociées.

Le travail effectué permet d'envisager différentes perspectives :

- Une étude du comportement des plans d'action après déformation en présence de structures flexibles semble nécessaire afin de s'affranchir d'une des hypothèses fortes de la modélisation, à savoir, l'invariance du plan d'action entre les états de corps rigides et déformables.
- L'état de référence au calcul des déplacements élastiques correspond ici au fonctionnement d'un réducteur parfait et infiniment rigide. Les perturbations induites par des écarts de géométrie sur la cinématique et la dynamique des corps rigides demeurent un problème important à résoudre afin de pouvoir simuler des erreurs de pas, d'excentricités, ...
- La prise en compte de l'interaction entre structure (corps du pignon et de la roue, arbres, carter ...), paliers (tenant compte des conditions de contact sur les éléments roulants) et engrènement constitue une voie de développement privilégiée. La partie motrice et le carter pourraient être introduits comme deux sous-structures liées par des modèles de roulements ou de paliers fluides tandis que la simulation des contacts via des fondations de Pasternak serait conservée.
- Il serait également intéressant de pouvoir remonter aux contraintes à l'intérieur des sous-structures.

En conclusion, la méthodologie proposée apparaît comme une solution prometteuse ouverte à des développements futurs. Elle permet, pour l'heure, des simulations de systèmes complexes pour des temps de calcul demeurant modérés et permettant, par exemple, des analyses paramétriques.

Références bibliographiques

- [1] **ABOUSLEIMAN, V.** *Comportement dynamique des trains planétaires et épicycloïdaux. Conditions de contact instantanées et influence de sous-ensembles flexibles.* Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de LYON, octobre 2004. 226 p.
- [2] **ABOUSLEIMAN, V., VELEX, P.** *A hybrid 3D finite element/lumped parameter model for quasi-static and dynamic analyses of planetary/epicyclic gear sets.* Mechanism and Machine Theory, September 2005
- [3] **AJMI, M.** *Introduction des couplages élastiques dans la modélisation du comportement statique et dynamique d'engrenages à dentures larges.* Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de LYON, 2000. N°2000 ISAL 0013, 151p.
- [4] **AJMI, M., VELEX, P.** *Un modèle pour la simulation du comportement dynamique d'engrenages à dentures larges.* Proceedings of the 4th World Congress on Gearing and Power Transmission, Paris, Mars 1999, Vol. 3, p. 1991-2002.
- [5] **AJMI, M., VELEX, P.** *A model for simulating the quasi-static and dynamic behaviour of solid wide-faced spur and helical gears.* Mechanism and Machine Theory, September 2004, Vol. 40, p. 173-190.
- [6] **ANTONY, G.,** *Gear vibration. Investigation of the dynamic behaviour of one stage epicyclic gears,* AGMA Technical Paper, 88 FTM 12, October 1988, 9 p.
- [7] **ATTIA, A.Y.** *Deflection of spur gear teeth cut in thin rims.* Transactions of the ASME Journal of Engineering for Industry, November 1964, p. 333-342.
- [8] **BAUD, R.V., PETERSON, R.E.** *Load and stress cycles in gear teeth.* Journal of Mechanical Engineers, 1929, Vol 51, p. 653-662.
- [9] **BALZAKIS, C.A., HOUSER, D.R.** *Finite element and experimental analysis of the effects of thin-rimmed gear geometry on spur gear fillet stresses.* International Gearing Conference, Newcastle, September 1994, p. 41-46.
- [10] **BELHANECHÉ, H., COMTE, M.** *Etude des modes de vibration en torsion des engrenages à dentures droites par interférométrie holographique.* Mécanique, Matériaux, Electricité, 1989, n°3, p. 792-798.
- [11] **BETTAIEB, M.N., VELEX, P., AJMI, M.** *A static and dynamic model of geared transmissions by combining substructures and elastic foundations - Applications to thin-rimmed gears,* ASME, Journal of Mechanical Design, à paraître.

-
- [12] **BLANKENSHIP, G.W., KAHRAMAN, A.** *Gear dynamics experiments, Part-1: Characterization of forced response.* Proceedings of the 7th ASME International Power Transmission and Gearing Conference, San Diego, 1996, p. 373-380.
 - [13] **BLANKENSHIP, G.W., SINGH, R.** *A comparative study of selected gear mesh interface dynamic models.* Proceedings of the 6th ASME International Power Transmission and Gearing Conference, Phoenix, 1992, Vol. 1, p. 137-146.
 - [14] **BOURDON, A.** *Modélisation dynamique globale des boîtes de vitesses automobile.* Thèse de Doctorat : Institut National des Sciences Appliquées de LYON, 1997, N° 97 ISAL 0084, 221 p.
 - [15] **CAI, Y. et HAYASHI, T.** *The Linear Approximated Equation of Vibration of a Pair of Spur Gears: Theoretical Analysis and Experiment.* Proc. 3rd J.S.M.E, Int. Conf. on Motion and Power Transmission, Hiroshima 1991, p. 21-26.
 - [16] **CARDOU, A., TORDION, G. V.** *Numerical implementation of complex potentials for gear tooth stress analysis.* Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design, April 1981, Vol. 103, p. 460-465.
 - [17] **CHEUNG, Y.K.** *Finite strip method in structure analysis.* Oxford: Pergamon Press, 1976. 233 p., ISBN 0-08-018308-5.
 - [18] **CHIANG, T., BADGLEY, R.H.,** *Reduction of vibration and noise generated by planetary ring gears in helicopter aircraft transmission,* ASME, Journal of Engineering and Industry, 1973, pp. 1149-1158.
 - [19] **CRAIG, R.R., BAMPTON, M.C.C.,** *Coupling of Substructures for Dynamic Analysis,* AIAA Journal, July 1968, Vol.6, n°7, pp. 1313-1319.
 - [20] **CUNLIFFE, F.** *Epicyclic gear vibrations.* Ph. D. Thesis, Cambridge 1973, 104 p.
 - [21] **CUNLIFFE, F., SMITH, J.D., WELBOURN, D.B.** *Dynamic tooth loads in epicyclic gears.* J. Eng. Ind., Trans. A.S.M.E., 1974, pp.578-584.
 - [22] **DE VAUJANY, J.P.** *Comportement d'engrenage cylindrique intérieur. Effet de jante et de voile.* Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de LYON, décembre 1996. 178 p.
 - [23] **DE VAUJANY, J.P., GUINGAND, M., PLAY, D.** *Interaction of gear epicyclic planets and effect of web for internal gears.* Kluwer Academic Publisher, Netherland, 2002, pp. 373-380.
 - [24] **DE VAUJANY, J.P., KIM, H.C., GUINGAND, M.** *Effects of rim and web on stresses in internal cylindrical gears.* ASME 7th international Power Transmission and gearing conference, 1996, San Diego, California.
 - [25] **DHATT, G., TOUZOT, G., DENIELOU, G.,** *Une présentation de la méthode des éléments finis,* Paris : Maloine, 1981, 543 p.
 - [26] **DRAGO, R.J.** *Fundamentals of gear design.* Boston : Butterworth, 1988, 560 p.

-
- [27] **DRAGO, R.J., BROWN, F.W.,** *The analytical and experimental evaluation of resonant response in high speed, light weight, highly loaded gearing.* J. Mech. Design, Trans. A.S.M.E., vol.103, pp.346-356.
 - [28] **FURUKAWA, T.** *Vibration analysis of gear and shaft system by modal method.* Proceedings of the 3rd JSME International Conference on Motion and Power Transmissions, Hiroshima, 1991, p. 123-127.
 - [29] **GAGNON, P., GOSSELIN, C., CLOUTIER, L.** *Analysis of spur and straight bevel gear teeth deflection by the finite strip method.* Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design, December 1997, Vol. 119, p. 421-426.
 - [30] **GRAZIANO, C., FRANCESCO, A.R., DARIO, G., CARLO, B.** *Three-dimensional, stress analysis of thin-rimmed gears.* PMPT'91 JSME International Conference on Motion and Powertransmissions, Hirochima, Japan, Novembre 1991, pp. 787-794.
 - [31] **GREGORY, R.W., HARRIS, S.L., MUNRO, R.G.** *Dynamic behaviour of spur gears.* Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 1963-64, Vol 178, Part 1, n° 8, p. 207-226.
 - [32] **GREGORY, R.W., HARRIS, S.L., MUNRO, R.G.** *Torsional motion of a pair of spur gears.* Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 1963-64, Vol. 178, Part 3, p. 166-173.
 - [33] **GULLIOT, M., TORDION, G.V.** *Stress Analysis of thin-Rim Spur Gears by Finite Element Method.* Proceedings of the International Power Transmissions and Gearing Conference, 1989, No. 2, pp. 26-31.
 - [34] **HADDAD, C.D.** *The elastic analysis load distribution in wide-faced helical gears.* PhD Thesis, University of Newcastle, October 1991, 470 p.
 - [35] **HADDAD, C.D., PENNELL, J.A.** *A PC-based program for three-dimensional elastic analysis of load distribution in wide-faced spur and helical gears.* Proceedings of the 3rd World Congress on Gearing and Power Transmissions, Paris, February 1992, Vol. 1, p. 201-211.
 - [36] **HAGIWARA, N., IDA, M., KIKUCHI, K.** *Forced vibration of a pinion-gear system supported on journal bearing.* Proc. Int. Symp. Of Gearing and Power Trans., Tokio 1981, pp. 85-90.
 - [37] **HAMAD, B.M., SEIREG, A.** *Simulation of whirl interaction in pinion gear systems supported on oil film bearing.* J.Eng. for Power, Trans. A.S.M.E., 1980, n°102, pp.508-510.
 - [38] **HAMAD, B.M., SEIREG, A.** *Whirl of geared systems supported on hydrodynamic bearing,* Proc. 5th IFToMM World Congress, Montréal 1980, pp.1109-1112.
 - [39] **HARRIS, S.L.** *Dynamic loads on the teeth of spur gears.* Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 1958, Vol. 172, p. 87-112.

-
- [40] **HENRIOT, G.** *Traité théorique et pratique des engrenages, tome I : théorie et technologie.* 6^{ème} édition, Paris : Dunod technique, 1979, 622 p.
 - [41] **HIDAKA, T., TERAUCHI, Y.** *Dynamic behavior of Planetary Gear (1st report : Load Distribution in Planetary Gear),* JSME, June 1976, Vol.19, no 132, pp. 690-698.
 - [42] **HIDAKA, T., TERAUCHI, Y., DOHI, K.,** *On the relation between the run out errors and the motion of the center of the sun gear in a stoekicht planetary gear,* JSME, 1979, Vol.22, n°167, pp. 748-754.
 - [43] **HIDAKA, T., TERAUCHI, Y., ISHIOKA, K.,** *Dynamic behavior of planetary gear (2nd report: Displacement of sun gear and ring gear),* JSME, 1976, Vol.19, n°138, pp. 1563-1570.
 - [44] **HIDAKA, T., TERAUCHI, Y., NAGAMURA, K.,** *Dynamic behavior of Planetary Gear (1st report: Load Distribution in Planetary Gear),* JSME, June 1976, Vol.19, no 132, pp. 690-698.
 - [45] **HIDAKA, T., TERAUCHI, Y., NAGAMURA, K.,** *Dynamic behavior of planetary gear (6th report: Influence of meshing phase),* JSME, 1979, Vol.22, n°169, pp. 1026-1033.
 - [46] **HIDAKA, T., TERAUCHI, Y., NOHARA, M., OSHITA, J.,** *Dynamic behavior of planetary gear (3rd report: Displacement of ring gear in direction of line of action),* JSME, 1977, Vol.20, n°150, pp. 1663-1672.
 - [47] **HONDA, S.** *Rotational vibration of a helical gear pair with modified tooth surfaces.* Proceedings of the 3rd JSME International Conference on Motion and Powertransmissions, Hiroshima, 1991, p. 78-84.
 - [48] **HOUSER, D.R., SEIREG, A.** *An experimental investigation of dynamic factors in spur and helical gears.* Transactions of the ASME Journal of Engineering for Industry, May 1970, p. 495-503.
 - [49] **ISO 6336-1: 1996(E)** *Calculation of load capacity of spur and helical gears. Part 1 : Basic principales, introduction and general influence factors.* 1996, 93 p.
 - [50] **IWATSUBO, T., ARII, S., KAWAI, R.** *Coupled lateral-torsional vibration of rotor system trained by gears (part 1. Analysis by transfer matrix method).* JSME, February 1984, Vol. 27, n° 224, pp. 271-277.
 - [51] **KAHRAMAN, A.** *Dynamic analysis of a multi-mesh helical gear train.* Proceedings of the 6th ASME International Power Transmission and Gearing Conference, Phoenix, 1992, Vol. 1, p. 365-373.
 - [52] **KAHRAMAN, A.** *Effect of axial vibrations on the dynamics of a helical gear pair.* Journal of Vibration and Acoustics, January 1993, Vol. 115, p. 33-39
 - [53] **KAHRAMAN, A., KHARAZI, A.A., UMRANI, M.,** *A deformable body dynamic analysis of planetary gears with thin rims,* Journal of Sound and Vibration, May 2003, Vol. 262, Issue 3, pp. 752-768.

-
- [54] **KAHRAMAN, A., OZGUVEN, H.N., HOUSER, D.R., ZAKRAJSEK, J.** *Dynamic analysis of geared rotors by finite elements.* Proceedings of the 5th ASME International Power Transmission and Gearing Conference, Chicago, 1989, Vol. 1, p. 375-382.
 - [55] **KAHRAMAN, A., SINGH, R.** *Interactions between time-varying mesh stiffness and clearance non-linearities in a geared system.* Journal of Sound and Vibration, 1991, Vol. 146, n° 1, p. 135-156.
 - [56] **KAHRAMAN, A., SINGH, R.** *Non-linear dynamics of a spur gear.* Journal of Sound and Vibration, 1990, Vol. 142, n° 1, p. 49-75.
 - [57] **KAHRAMAN, A., VIJAYAKAR, S.M.,** *Effect of Internal Gear Flexibility on the Quasi-Static Behavior of a Planetary Gear Set,* ASME, Journal of Mechanical Design, September 2001, Vol. 123, pp. 408-415.
 - [58] **KASSAI, A., MATHIEU, J.P. et CHAHMIRIAN, G.** *"Sirènement de denture: Composantes non harmoniques de l'engrènement liées à la rectification par génération"* Proc. of the 3rd World Congress on Gearing and Power Transmissions, Paris, 1992, Vol. 2, p. 853-864.
 - [59] **KASUBA, R. et EVANS, J.W.** *An Extended Model for Determining Dynamic Loads in Spur Gearing.* J. of Mech. Design, Trans. A.S.M.E., April 1981, Vol. 103, p. 398-409.
 - [60] **KERR, A.D.** *Elastic and viscoelastic foundation models.* Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, September 1964, p. 491-498.
 - [61] **KHOLER, H., REGAN, R.** *The derivation of gear transmission error from pitch error records.* Proceedings of Institution of Mechanical Engineers, Vol. 199, n° C3, 1977, pp. 195-201.
 - [62] **KIM, H.C.** *Etude des charges et des contraintes dans les engrenages cylindriques avec voile. Simulation numérique par la méthode des Prismes Finis.* Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de LYON, 1996. N°96 ISAL 0045, 152 p.
 - [63] **KOHLER, H. K., PRATT, A. et THOMPSON, A. M.** *Dynamics and Noise of Parallel-Axis Gearing.* Proc. Inst. Mech. Engrs, London 1969-70, Vol. 184, Pt30, p. 111-121.
 - [64] **KRISHNAMURTHY, S., RAMAMOHANA RAO, A.** *The effect of web thickness variation on the performance of spur gears.* International Symposium on Gearing and Power Transmissions, Tokyo 1981, p. 195-199.
 - [65] **KUBO, A.** *Stress condition, vibrational exciting force, and contact pattern of helical gears with manufacturing and alignment error.* Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design, January 1978, Vol. 100, p. 77-84.
 - [66] **KÜÇÜKAY, F.** *Dynamic Behaviour of High Speed Gears.* Proc. Inst. Mech. Engrs, 1984, Paper C317/84, p. 81-90.

-
- [67] **LALANNE, M., BERTHIER, P., DER HAGOPIAN, J.** *Mécanique des vibrations linéaires.* (2^{ème} édition). Paris : Masson, 1986, 306 p.
 - [68] **LALANNE, M., FERRARIS, G.** *Rotordynamics Prediction in Engineering.* (2nd edition). J. Wiley and Sons, New York, 1998, 254 p.
 - [69] **LEWINCKI, D.G., BALLARINI, R.** *Effect of Rim Thickness on Gear Crack Propagation Path.* A.S.M.E. J. Mech. Des., 1997, pp. 88-95.
 - [70] **LI, S.** *Deformation and bending stress analysis of a three-dimensional, thin-rimmed gear.* A.S.M.E., Journal of Mechanical Design, March 2002, Vol. 124, pp. 124 -129.
 - [71] **LI, S.** *Fundamental studies of analyzing the thooth-load distribution of three-dimensional, thin-rimmed gears with assembly errors.* Doctoral dissertation, 1998, Yamaguchi University, Japan.
 - [72] **LI, S.** *Gear contact model and loaded tooth contact analysis of a three-dimensional, thin-rimmed gear.* A.S.M.E., Journal of Mechanical Design, September 2002, Vol. 124, pp. 511-517.
 - [73] **LIN, H.H., TOWNSEND, D.P., OSWALD, F.B.** *Dynamic loading of spur gears with linear or parabolic tooth profile modifications.* Proceedings of the 5th ASME International Power Transmission and Gearing Conference, Chicago, 1989, Vol. 1, pp. 409-419.
 - [74] **LIN, H.H., TOWNSEND, D.P., OSWALD, F.B.** *Profile modification to minimize spur gear dynamic loading.* Proceedings of the 5th ASME International Power Transmission and Gearing Conference, Chicago, 1989, Vol. 1, pp. 455-465.
 - [75] **LOVE, A.E.H.** *Stress produced in a semi-infinite solid by pressure on part of the boundary.* Phil. Trans. Royal Society, 1929, Vol. A228, p. 37-43.
 - [76] **LUNDBERG, G.** *Elastische Berührung zweier Halbraüme (Elastic contact of two half spaces).* Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, 1939, Vol. 10, n°5, p. 201-211.
 - [77] **LUNDBERG, G.** *Cylinder compressed between two plane bodies.* SKF Aktiebolagest Svenska Kullagerfabriken Goteborg, (by courtesy of SKF, Luton), 1949, n°4134.
 - [78] **MAATAR, M.** *Contribution à l'analyse du comportement dynamique de réducteurs à engrenages simple étage. Influence des écarts de forme et des défauts de montage.* Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de LYON, 1995. N°95 ISAL 0028, 192 p.
 - [79] **MAATAR, M. VELEX, P.,** *Quasi-static and dynamic analysis of narrow-faced helical gears with profile and lead modifications.* Transactions of the ASME, J. Mechanical Design, vol. 119, p. 474-480.

- [80] **MAATAR, M., VELEX, P., FLAMAND, L.** *Numerical simulations of the non-linear dynamic behaviour.* Proceedings of the 1994 International Gearing Conference, Newcastle, September 1994, p. 111-116.
- [81] **MAATAR, M., VELEX, P., NGUYEN, T., OCTRUE, M., VASSEUR, J.L.** *Experimental and numerical analysis of transmission errors in spur gear drives.* Proceedings of the International Conference on Vibration and Noise, Venice, April 1995, p. 711-717
- [82] **MARK, W. D.** *Analysis of the Vibratory Excitation of Gear Systems: Basic Theory.* J. Acoust. Soc. Am., May 1978, Vol. 63, N°5, p. 1409-1430.
- [83] **MARK, W. D.** *Analysis of the Vibratory Excitation of Gear Systems: Tooth Error Representations, Approximations, and Application.* J. Acoust. Soc. Am., Dec. 1979, Vol. 66, N°6, p. 1758-1787.
- [84] **MARK, W.D.** *The transfert function method for gear system dynamics applied to conventional and minimum excitation gearing designs.* Cambridge (USA) : NASA, 1982, 107 p., Contract Report n° 3626
- [85] **MITCHELL, L.D., MELLEN, D.M.** *Torsional lateral coupling in a geared high speed rotor system.* A.S.M.E., 1975, Paper 75 DET 75.
- [86] **MIYACHIKA, K., ODA, S., KOIDE, T., FUJIWARA, S.** *Bending Strength Estimation of Thin-Rimmed Spur Gears.* JSME Int. J., Ser. C, 61, No. 582, 1995, pp. 386-391.
- [87] **MUNRO, R.G.** *Effect of Geometrical Errors on the Transmission of Motion between Gears.* Proc. Inst. Mech. Engrs, 1969-70, Vol. 184, Pt30, p. 79-83.
- [88] **MUNRO, R.G.** *The D.C. component of gear transmission error.* Proceedings of the 5th ASME International Power Transmission and Gearing Conference, Chicago, 1989, Vol. 1, p. 467-470.
- [89] **MUNRO, R.G.** *The dynamic behaviour of spur gears.* PhD thesis. Cambridge University, 1962, 95 p.
- [90] **ODA, S., MIYACHIKA, K., CAO, X.T, NAMBA, C.** *Root stresses of thin-rimmed spurinternal gears with asymmetric web arrangements in mesh.* JSME Int. J., Ser. C, 63, 1997, No. 610, pp. 291-297.
- [91] **ODA, S., SAYAMA, T., SHIMATOMI, Y.** *Study on welded structuregears (3rd report, Effect of rim thickness on root stresses and bending fatigue strenght).* Bulletin of JSME, Jan 1980, Vol .23,No 175, pp. 132-139.
- [92] **OLAKOREDE, A.** *Répartition de charges et résistance en conception d'engrenages cylindriques, appllication de la méthode des prisles finis en CAO.* Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de LYON, 1990. N°90 ISAL 0049, 157 p.
- [93] **OZGUVEN, H.N., HOUSER, D.R.** *Mathematical models used in gear dynamics - A review.* Journal of Sound and Vibration, 1988, Vol. 121, n° 3, p. 383-411.

-
- [94] **OZGUVEN, H.N., HOUSER, D.R.** *Dynamic analysis of high speed gears by using loaded static transmission error.* Journal of Sound and Vibration, 1988, Vol. 125, n° 1, p. 71-83.
 - [95] **PARABHU, M.S., HOUSER, D.D.R.** *A hybrid finite element aproach for analyzing the load distribution and transmission error in thin-rimmed gears.* International Conferance on Gears, Verein Deutscher Ingenieure, Berichte NR1230, Dresden, April 1996, p. 201-212.
 - [96] **PEARCE, W. J., NIELSEN, M. A. et ROUVEROL, W. S.** *Reducing Gear Noise Excitation.* Proc. of the 2nd World Congress on Gearing, Paris1986, Vol.1, p.587-598.
 - [97] **PLACZEK, T.** *Lastverteilung und Flankenkorrektur in gerad- und schrägverzahnten Stirnradstufen.* Thèse de Doctorat, Université Technique de Munich, 1988, 140 p.
 - [98] **REMMERS, E. P.** *Gear Mesh Excitation Spectra for Arbitrary Tooth Spacing Errors, Load and Design Contact Ratio.* J. of Mech. Design, Trans. A.S.M.E., October 1978, Vol. 100, N° 10, p. 715-722.
 - [99] **REMOND, D.** *Contribution à l'étude et à l'analyse expérimentale du bruit d'engrènement. Développement et application de la transformée en ondelettes rapide.* Thèse de Doctorat : Institut National des Sciences Appliquées de LYON, 1991, N°91 ISAL 0067, 232 p.
 - [100] **REMOND, D., VELEX, P., SABOT, J.** *Comportement dynamique et acoustique des transmissions par engrenages. Synthèse bibliographique.* Senlis : Publications du CETIM, 1993, 189 p.
 - [101] **RESWICK, J. B.** *Dynamic Loads in Spur and Helical Gear Teeth.* Trans. A.S.M.E., July 1955, Vol.77, N°5, p. 635-644.
 - [102] **RETTIG, H.** *Vibrations in gear drives : test results and calculation method for dynamic tooth forces.* Proc. 4th IFToMM Word Congress, Newcastle 1975.
 - [103] **RIEGER, N. F.** *Drive Train Vibrations.* Machine Design, 1969, N°4, p.115-119.
 - [104] **ROSINSKI, J., HOFMANN, D.A., PENNELL, J.A.** *Dynamic transmission error measurements in the time domain in high speed gears.* Proceedings of International Gearing Conference, University of Newcastle upon Tyne, 1994, p. 363-370.
 - [105] **SAINOT, A.** *Analyse du contact entre dentures d'engrenages cylindriques de réducteurs.* Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de LYON, 1989, N°89 ISAL 0091, 205 p.
 - [106] **SAINOT, A., VELEX, P., DUVERGER, O.** *Contribution of gear body to tooth deflections-A new bidimensional analytical formula.* ASME Journal of Mechanical Design, 2004, N°4, Vol 126, p. 748-752.
 - [107] **SAYAMA, T., ODA, S., UMEZAWA, K.** *Study on welded structure gears.* Bulletin of JSME, Décembre 1969, Vol. 28, n° 246, p. 3025-3030.

-
- [108] **SCHMIDT, G., PINNEKAMP, L., WUNDER, A.** *Optimum tooth profile correction of helical gears*. Proceedings International Power Transmission and Gearing Conference, San Francisco, August 18-21 1980, Paper 80-C2/DET-110, 12p.
 - [109] **SEAGER, A.** *SWhirling of shafts in geared systems*. ASME, 1966, Paper 66 WA/MD-6.
 - [110] **SEAGER, D.L.** *Some elastic effects in helical gear teeth*. PhD Thesis, University of Cambridge, 1967, 209 p.
 - [111] **SEIREG, A., HOUSER, D.R.** *Evaluation of dynamic factors for spur and helical gears*. Transactions of the ASME Journal of Engineering for Industry, May 1970, p. 504-515.
 - [112] **SIGG, H.** *Profile and longitudinal corrections on involute gears* Proc. AGMA Fall Meeting, Chicago, October 1965, 24 p.
 - [113] **STEWART, J.H.** *The compliance of solid wide-faced spur gears*. Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design, December 1990, Vol. 112, p. 590-595.
 - [114] **STOCKTON, R.J.**, *Sun gear travelling wave vibration in a sequential planetary gearbox*, ASME Paper 85-DET-167, 1985, 8 p.
 - [115] **STRAUCH, H.** *Zahnradschwringungen*. Zeitschrift des Vereines Deutscher Ing., 1953, N° 95, p. 159-163.
 - [116] **TAKATSU, N., KATO, M., INOUE, K., ISHIKAWA, M.** *Analysis and experiment on the vibration transmission in a single stage gearbox*. Proceedings of the 3rd JSME International Conference on Motion and Powertransmissions, Hiroshima, 1991, p. 104-109.
 - [117] **TANNA, R.P., LIM, T.C.**, *Modal frequency deviations in estimating ring gear modes using smooth ring solutions*, Journal of Sound and Vibration, January 2004, Vol. 269, n° 3-5, pp. 1099-1110.
 - [118] **TAVAKOLI, M.S., HOUSER, D.R.** *Optimum profile modifications for the minimization of static transmission errors of spur gears*. ASME, Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, March 1986, Vol. 108, pp. 86-95.
 - [119] **TESSEMA, A., WALTON, D., WEALE, D.** *Effect of web and flange thickness on nonmetallic gear performance*. Gear Technology, November.-December 1995, pp. 30-35.
 - [120] **TUPLIN, W.A.** *Dynamic loads on gear teeth*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, International Conference on Gearing, London, 1958, p. 24-30.
 - [121] **TUPLIN, W. A.** *Gear Tooth Stresses at High Speed*. Proc. Inst. Mech. Engrs, 1950, Vol. 163, 162 p.

-
- [122] **TUPLIN, W. A.** *Dynamic Loads on Gear Teeth.* Machine Design, October 1953, Vol. 25, p. 203-211.
 - [123] **UMEZAWA, K.** *Deflections and moments due to a concentrated load on a rack-shaped cantilever plate with finite width for gears.* Bulletin of JSME, 1972, Vol. 15, p. 116-130.
 - [124] **UMEZAWA, K.** *The meshing test on helical gears under load transmission - 1st report: The approximate formula for deflection of gear tooth.* Bulletin of JSME, 1972, Vol. 15, n° 90, p. 1632-1639.
 - [125] **UMEZAWA, K.** *The meshing test on helical gears under load transmission - 2nd report: The approximate formula for bending moment distribution of gear tooth.* Bulletin of JSME, 1973, Vol. 16, n° 92, p. 407-413.
 - [126] **UMEZAWA, K.** *The meshing test on helical gears under load transmission - 3rd report: The static behaviour of driven gear.* Bulletin of JSME, 1974, Vol. 17, n° 112, p. 1348-1355.
 - [127] **UMEZAWA, K.** *The performance diagrams for the vibration of helical gears.* Proceedings of the 5th ASME International Power Transmission and Gearing Conference, Chicago, 1989, Vol. 1, p. 399-408.
 - [128] **UMEZAWA, K., HOUJOH, H., ICHIKAWA, N., MATSUMURA, S.** *Simulation on rotational vibration of a helical gear pair transmitting light load.* Proceedings of the 3rd JSME International Conference on Motion and Powertransmissions, Hiroshima, 1991, p. 85-91.
 - [129] **UMEZAWA, K., HOUJOH, H., MATSUMURA, S.** *The influence of flank deviations on the vibration of a helical gear pair transmitting light load.* Proceedings of the 6th ASME International Power Transmission and Gearing Conference, Phoenix, 1992, Vol. 2, p. 681-688
 - [130] **UMEZAWA, K., ICHIKAWA, J., HAYASHI, K.** *Deflections due to a concentrated load on a cantilever thick plate of finite length for gears.* Bulletin of JSME, 1969, Vol. 12, n° 53, p. 85-91.
 - [131] **UMEZAWA, K., SATO, T., ISHIKAWA, J.** *Simulation of rotational vibration of spur gears.* Bulletin of JSME, 1984, n° 27, pp. 102-109.
 - [132] **UMEZAWA, K., SUZUKI, T., HOUJOH, H., BAGIASNA, K.** *Influence of misalignment on vibration of helical gear.* Proceedings of the 2nd World Congress on Gearing, Paris, March 1986, p. 615-626.
 - [133] **VEDMAR, L.** *On the design of external involute helical gears.* PhD Thesis, Technical University of Lund , 1981, 120 p.
 - [134] **VELEX, P.** *Contribution à l'analyse du comportement dynamique de réducteurs à engrenages à axes parallèles.* Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de LYON, N°88 ISAL 0032, 1988. 188 p.

-
- [135] **VELEX, P. et BERTHE, D.** *Comportement dynamique d'un réducteur à axes parallèles.* Rapport Final Contrat INSA-DRET, Lyon, Septembre 1986, 86 p, N° 85/1425.
 - [136] **VELEX, P., DUVERGER, O., SAINOT, P.** *Un modèle du comportement dynamique d'engrenages droit avec prise en compte de contacts hors du plan d'action.* Mécanique et industries, AFM, EDP Sciences, 2004, N°5, p.701-708.
 - [137] **VELEX, P., MAATAR, M.** *A mathematical model for analyzing the influence of shape deviations and mounting errors on gear dynamic behaviour.* Journal of Sound and Vibration, 1996, Vol. 191, n° 5, p. 629-660.
 - [138] **VELEX, P., MAATAR, M., RACLOT, J.P.** *Some numerical methods for the simulation of geared transmission dynamic behaviour: formulation and assessment.* Transactions of the ASME, J. Mechanical Design, vol. 119, p. 292-298.
 - [139] **VELEX, P., SAADA, A.** *Application d'une méthode de Ritz à l'analyse du comportement dynamique de trains d'engrenages simple ou multi-étages.* Proceedings of the 3rd World Congress on Gearing and Power Transmissions, Paris, February 1992, p. 755-764.
 - [140] **VELEX, P., SAADA, A.** *Modal analysis for the prediction of dynamic tooth loads in geared trains.* Proceedings of the 3rd JSME International Conference on Motion and Powertransmissions, Hiroshima, 1991, p. 117-122.
 - [141] **VELEX, P., SAADA, A.** *A model for the dynamic behaviour of multi-stage geared systems.* Proceedings of the 8th World Congress on Theory of Machines and Mechanisms, Prague, 1991, Vol. 2, pp. 621-624.
 - [142] **VIJAYAKAR, S.,** *A combined surface integral and finite element solution for a three-dimensional contact problem,* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1991, Vol. 31, pp.525-545.
 - [143] **WALKER, H.** *Gear tooth deflections and profile modifications.* The Engineer, 1938, Vol 166, p. 434-436.
 - [144] **WEBER, C.** *The deformation of loaded gears and the effect on their load-carrying capacity. Part 1.* , London : Department of Scientific and Industrial Research (Sponsored Research (Germany)), 1949, Report N°3.
 - [145] **WEBER, C., BANASCHEK, K.** *The deformation of loaded gears and the effect on their load-carrying capacity. Part 5.* London : Department of Scientific and Industrial Research (Sponsored Research (Germany)), 1950, Report N°6.
 - [146] **WELBOURN, D.B.** *Gear errors and their resultant noise spectra.* Proceedings of Institution of Mechanical Engineers, 1969-70, Vol. 184, Part 30, p. 131-139.
 - [147] **WELLAUER, E.J., SEIREG, A.** *Bending strength of gear teeth by cantilever-plate theory.* Transactions of the ASME, Journal of Eng. For Ind., 1960, Vol. 82, p. 213-222.

- [148] ZEMAN, J. *Dynamische Zusatzkrafte in Zahnbradgetrieben*. Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure, 1957, Vol. 99, p. 244-254.