

THÈSE

GESTION DU CONTACT AVEC FROTTEMENT LE LONG DES FACES DE FISSURES DANS LE CADRE DE LA METHODE X-FEM. APPLICATION A LA FATIGUE TRIBOLOGIQUE

Présentée devant

l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

pour obtenir

le GRADE DE DOCTEUR

École doctorale :

Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique

Spécialité :

MÉCANIQUE

par

Rachelle RIBEAUCOURT

Thèse soutenue le devant la Commission d'examen

Jury

| | | |
|----------------|------------------------|--------------------|
| J.B. LEBLOND | Professeur | Président |
| M. RAOUS | Directeur de Recherche | Rapporteur |
| L. CHAMPANEY | Professeur | Rapporteur |
| B. VILLECHAISE | Professeur | Examineur |
| A. GRAVOUIL | Maître de Conférence | Examineur |
| M.-C. BAIETTO | Directeur de Recherche | Directeur de thèse |

Résumé

Un nouveau modèle numérique pour l'analyse de la fissuration en fatigue tribologique est présenté. Ce modèle est basé sur la méthode des éléments finis étendus (X-FEM) couplée avec le schéma itératif de résolution des problèmes non linéaires d'évolution issu de la méthode LATIN. Dans le cadre de la mécanique élastique linéaire de la rupture pour un matériau homogène isotrope, des développements bidimensionnels ont été effectués afin d'intégrer une gestion du contact avec frottement entre les faces de fissures. Une description incrémentale du problème non linéaire de frottement engendré par les sollicitations multiaxiales et non proportionnelles a ainsi été implémentée. Un nouveau critère d'arrêt du schéma itératif a aussi été proposé. Il prend en compte séparément les phénomènes ouverture/contact et glissement/adhérence permettant ainsi une précision accrue en terme de champs locaux le long des faces de la fissure. Plusieurs étapes de validation ont été effectuées entre des résultats analytiques/numériques et ceux issus du modèle. Après une première étape mettant en jeu des chargements uni axiaux statiques, nous avons simulé et analysé des configurations quasi statiques de plus en plus complexes, pour des configurations de fissures différentes (perpendiculaires/inclinées) mettant en jeu du mode mixte. L'ensemble de ces validations a montré la robustesse du modèle et la capacité de la stratégie du modèle à restituer des comportements de fissures variés et complexes. Ensuite une simulation de propagation bidimensionnelle a été présentée dans le cas d'un contact tribologique de roulement. Cette simulation a nécessité l'implémentation de nouveaux critères de bifurcation ainsi que des lois de fissuration appropriées. L'analyse tridimensionnelle n'est abordée que partiellement par la présentation de résultats d'essais expérimentaux, accompagnés des premiers développements numériques tridimensionnels.

MOTS CLÉS: contact avec frottement, fatigue tribologique, mécanique rupture, méthode X-FEM, méthode LATIN, propagation fissure

Table des matières

| | |
|---|-------------|
| INTRODUCTION GENERALE | xiii |
| 1 APPROCHE "MACROSCOPIQUE" DE LA PROPAGATION DE FISSURES EN FATIGUE DE CONTACT | 1 |
| 1.1 Les outils de la mécanique élastique linéaire de la rupture | 2 |
| 1.1.1 Aperçu historique sur la rupture | 2 |
| 1.1.2 Les grandeurs caractéristiques | 3 |
| 1.1.3 Le calcul des grandeurs caractéristiques | 12 |
| 1.2 Propagation de fissure de fatigue | 19 |
| 1.2.1 Lois de fissuration par fatigue | 20 |
| 1.2.2 Critères de direction de propagation pour des chargements proportionnels | 22 |
| 1.2.3 Critères de direction de propagation pour des chargements non proportionnels | 26 |
| 1.3 La fatigue tribologique | 28 |
| 1.3.1 Les spécificités des sollicitations en fatigue tribologique | 28 |
| 1.3.2 Dégradations survenant en fatigue tribologique | 29 |
| 1.3.3 Ce que le chargement induit sur les fissures | 30 |
| 1.4 Les outils de la mécanique du contact - Approches du contact - Lois de comportement d'interface | 30 |
| 1.4.1 Le contact au sens de Signorini | 31 |
| 1.4.2 Lois de frottement | 32 |
| 1.4.3 La formulation mécanique du problème de contact entre deux corps | 36 |
| 1.5 Conclusion | 38 |
| 2 RESOLUTION DU PROBLEME DE CONTACT AVEC FROTTEMENT | 39 |
| 2.1 Problème de référence d'une structure fissurée sous sollicitations de contact | 40 |
| 2.2 Méthodes de discrétisation pour les problèmes de fissuration avec contact et frottement | 42 |
| 2.2.1 La méthode des distributions continues de dislocation | 42 |
| 2.2.2 La méthode des éléments finis | 45 |

| | | |
|-------|--|----|
| 2.2.3 | La méthode des éléments de frontière | 51 |
| 2.2.4 | La méthode des éléments finis étendus (X-FEM) | 52 |
| 2.3 | Stratégies de résolution des problèmes non linéaires d'évolution | 56 |
| 2.3.1 | Les méthodes incrémentales | 56 |
| 2.3.2 | La méthode à large incrément de temps : la méthode LATIN | 57 |
| 2.4 | Conclusion | 58 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3 | LE MODELE NUMERIQUE DE COMPORTEMENT DE FISSURE EN CONSIDERANT LE CONTACT INTERFACIAL AVEC FROTTEMENT | 61 |
| 3.1 | Stratégie de résolution | 63 |
| 3.1.1 | Choix d'une méthode itérative pour le problème d'évolution | 63 |
| 3.1.2 | L'étape locale de la méthode LATIN | 65 |
| 3.1.3 | L'étape globale de la méthode LATIN | 73 |
| 3.1.4 | Algorithme de résolution | 76 |
| 3.2 | Développement d'un critère d'arrêt adapté au problème de contact | 78 |
| 3.3 | Traitement numérique des grandeurs caractéristiques de la fissuration | 85 |
| 3.4 | Implémentation dans le code elfe_3d | 86 |
| 3.5 | Conclusion partielle | 89 |
| 3.6 | Analyse de la qualité du modèle de comportement pour une fissure perpendiculaire à la surface en situation de fatigue de contact | 90 |
| 3.6.1 | Données du problème | 91 |
| 3.6.2 | Résultats de référence | 92 |
| 3.6.3 | Influence de la précision | 93 |
| 3.6.4 | Influence des conditions aux limites | 95 |
| 3.6.5 | Influence de l'incrément du pas de chargement | 96 |
| 3.6.6 | Conclusion partielle | 99 |
| 3.7 | Qualification du modèle pour un chargement proportionnel en statique | 99 |
| 3.7.1 | Chargement proportionnel en traction | 100 |
| 3.7.2 | Chargement proportionnel en compression | 100 |
| 3.7.3 | Conclusion partielle | 103 |
| 3.8 | Qualification du modèle pour un chargement non proportionnel | 105 |
| 3.8.1 | Déplacement d'une charge normale hertzienne avec un incrément de pas de chargement grossier ($\delta l = 1$ mm) | 106 |
| 3.8.2 | Déplacement d'une charge normale avec un incrément de pas de chargement fin ($\delta l = 50$ μ m) | 115 |
| 3.8.3 | Analyse d'un cycle complet de chargement en fatigue tribologique | 121 |
| 3.9 | Conclusion | 131 |

| | |
|--|------------|
| 4 PREVISION DE LA CROISSANCE DES FISSURES DE FATIGUE TRIBOLOGIQUE | 133 |
| 4.1 Analyse bidimensionnelle de la propagation de fissures en fatigue de contact à la fin d'un cycle de chargement | 135 |
| 4.2 Simulation bidimensionnelle de la propagation de fissures en fatigue de contact de roulement | 139 |
| 4.3 Conclusion partielle | 141 |
| 4.4 Vers une analyse tridimensionnelle du problème de fatigue de contact . . . | 141 |
| 4.4.1 Essais et résultats expérimentaux | 143 |
| 4.4.2 Etudes préliminaires tridimensionnelle du problème de fatigue tribologique | 148 |
| 4.5 Conclusion | 153 |
| CONCLUSION | 159 |
| A Description des champs asymptotiques des contraintes et des déplacements par l'approche de Westergaard | 1 |
| B Les invariants intégraux | 7 |
| C La solution d'Amestoy | 9 |
| D Mise à jour des quantités normales et tangentielles le long des faces de la fissure | 11 |
| E Itération de point fixe sur les quantités normales et tangentielles le long des faces de la fissure | 15 |
| F Exemple de jeu de données pour le code elfe_3d | 19 |
| G Quelques données expérimentales | 21 |

Table des figures

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | (a) Fissure (b) Repère attaché au front de la fissure | 4 |
| 1.2 | Les modes de fissuration | 4 |
| 1.3 | Propagation de la fissure sur une longueur Δa | 5 |
| 1.4 | Définition des axes (x, y) et des coordonnées (r, θ) au voisinage de l'extrémité d'une fissure | 8 |
| 1.5 | Fissure débouchante | 9 |
| 1.6 | Définition du contour Γ utilisé pour l'intégrale J | 10 |
| 1.7 | Définition des contours Γ_1, Γ_2 et Γ utilisé pour l'intégrale d'interaction et les intégrales de domaine. | 11 |
| 1.8 | Déplacement de la pointe de la fissure | 14 |
| 1.9 | Définition de la couronne utilisée dans la méthode $G\theta$ | 15 |
| 1.10 | Allure générale du taux d'accroissement d'une fissure, $\frac{da}{dN}$, en fonction de ΔK (écart entre les FIC extrêmes d'un cycle de chargement) pour une sollicitation en mode I | 21 |
| 1.11 | Quelques configurations fissure/chargement impliquant un mode mixte | 21 |
| 1.12 | Notion de critères explicites/implicites | 25 |
| 1.13 | Description de l'extension de fissure et des FIC associés | 25 |
| 1.14 | Illustration des différences de comportement entre chargement proportionnel et non proportionnel en considérant les évolutions du FIC k_1^* [27] | 27 |
| 1.15 | Illustration de la géométrie tridimensionnelle d'une fissure propagée avec un lubrifiant | 30 |
| 1.16 | Problème de Signorini | 31 |
| 1.17 | Graphe de la loi de contact unilatéral | 32 |
| 1.18 | (a) Définition du point de contact C entre deux corps élastiques. (b) Graphe de la loi de Coulomb | 33 |
| 1.19 | Cône de Coulomb (a) en 2D, (b) en 3D. | 34 |
| 1.20 | Régularisation possible de la loi de Coulomb | 35 |
| 1.21 | Graphe de la loi de frottement de Tresca | 36 |
| 1.22 | Illustration du problème de contact entre deux corps | 37 |
| 1.23 | Données du problème de contact entre les faces d'une fissure | 38 |
| 2.1 | Problème de référence | 40 |

| | | |
|------|---|-----|
| 2.2 | Description des ensembles E_I, E_J, E_K de l'approximation du champ de déplacement élément fini enrichi | 54 |
| 2.3 | Description de la fonction H | 54 |
| 2.4 | Plaque sous un chargement compressif d'après [25] | 55 |
| 2.5 | Description des éléments d'interface Γ_C^+ et Γ_C^- , des points de Gauss $G_{1,2}^+, G_{1,2}^-$ et du vecteur \vec{n}_C | 55 |
| 2.6 | Illustration géométrique du schéma itératif issu de la méthode LATIN | 58 |
| 3.1 | Description de A_p l'aire potentielle de contact, A_c l'aire courante et A_0 l'aire d'ouverture | 65 |
| 3.2 | Données du cas test pour la comparaison de deux critères d'arrêt | 79 |
| 3.3 | Variations de K_{II} pour le cas test figure 3.2 | 80 |
| 3.4 | Comparaison des sauts de déplacement normal le long des faces de la fissure pour cinq étapes du chargement du cas test figure 3.2 entre l'ancien (le nouveau) critère d'arrêt à gauche (droite) | 82 |
| 3.5 | Comparaisons des sauts de déplacements tangentiel le long des faces de la fissure pour cinq étapes du chargement du cas test figure 3.2 entre l'ancien (le nouveau) critère d'arrêt à gauche (droite) | 84 |
| 3.6 | Définition d'un J -domaine en 2D | 85 |
| 3.7 | Les différents ordres de grandeurs du problème de fatigue tribologique | 90 |
| 3.8 | Données du cas test pour l'analyse de la qualité du modèle | 91 |
| 3.9 | Variations obtenues par le modèle de référence pour $b = 0.1$ mm | 93 |
| 3.10 | Variations obtenues par le modèle de référence pour $b = 0.8$ mm | 93 |
| 3.11 | Variations obtenus par elfe_3d pour $b = 0.1$ mm, en fonction de tol . $H = 150$ mm, $L = 250$ mm, $b = 0.1$ mm, $\delta l = 1$ mm. | 94 |
| 3.12 | Variations obtenus par elfe_3d pour $b = 0.1$ mm, en fonction de tol . $H = 100$ mm, $L = 150$ mm, $\delta l = 0.04$ mm. | 94 |
| 3.13 | Variations de K_I (a) en fonction de L et (b) en fonction de H . $b=0.8$ mm, $\delta l = 1$ mm, $tol=10^{-3}$ | 95 |
| 3.14 | Variations de (a) σ_{yy} et (b) σ_{xy} en fonction de L et P , dans le plan de la fissure ($y=0$). $b=0.8$ mm, $\delta l = 1$ mm, $tol=10^{-2}$ | 96 |
| 3.15 | Variations de K_{II} (a) en fonction de L et (b) en fonction de H . $b=0.8$ mm, $\delta l = 1$ mm, $tol=10^{-3}$ | 97 |
| 3.16 | Définition de l'évolution de l'incrément du pas de chargement pendant le passage du chargement. | 98 |
| 3.17 | Variations de (a) K_I et (b) K_{II} en fonction de la valeur de l'incrément du pas de chargement. $H = 100$ mm, $L = 150$ mm, $b = 0.1$ mm, $tol=10^{-4}$ | 99 |
| 3.18 | Données du problème pour un chargement proportionnel en traction | 101 |
| 3.19 | Variations de K_I et K_{II} pour un chargement proportionnel en traction défini par le problème de la figure 3.18. | 101 |
| 3.20 | Données du problème pour un chargement proportionnel en compression, traité par Hammouda et al [40] | 103 |

| | | |
|------|--|-----|
| 3.21 | Variations obtenues par Hammouda et al [40] | 104 |
| 3.22 | Variations obtenues par le modèle elfe_3d | 104 |
| 3.23 | Représentation des J -domaines utilisés lors de la résolution du problème pour un chargement proportionnel en compression | 105 |
| 3.24 | Maillage utilisé par le modèle elfe_3d pour un chargement proportionnel en compression | 105 |
| 3.25 | Données du problème pour le déplacement d'une charge normale hertzienne (chargement non proportionnel) | 106 |
| 3.26 | Maillage utilisé par le modèle elfe_3d pour le déplacement d'une charge normale hertzienne et une fissure perpendiculaire. | 107 |
| 3.27 | Comparaison entre le modèle de référence et le modèle elfe_3d pour le déplacement d'une charge normale hertzienne en cinq pas. Fissure perpendiculaire $b = 3\text{mm}$. | 107 |
| 3.28 | Sauts de déplacements normal et tangentiel le long des faces de la fissure perpendiculaire pour le déplacement d'une charge normale hertzienne en cinq pas | 110 |
| 3.29 | Maillage utilisé par le modèle elfe_3d pour le déplacement d'une charge normale hertzienne et une fissure inclinée. | 111 |
| 3.30 | Comparaison entre le modèle de référence et le modèle elfe_3d pour le déplacement d'une charge normale hertzienne en quatre pas. Fissure inclinée, $b = 3\text{ mm}$, $\theta = 15^\circ$ | 111 |
| 3.31 | Définition de la géométrie de la "bulle" d'ouverture. | 113 |
| 3.32 | Sauts de déplacements normal et tangentiel le long des faces de la fissure inclinée pour le déplacement d'une charge normale hertzienne en quatre pas | 114 |
| 3.33 | Comparaison des variations de K_I entre le modèle de référence et le modèle elfe_3d pour le déplacement d'une charge normale hertzienne incrémentée avec $\delta l = 50\ \mu\text{m}$. Fissure perpendiculaire, $b = 3\text{ mm}$. | 115 |
| 3.34 | Sauts de déplacements normal et tangentiel le long des faces de la fissure perpendiculaire pour le déplacement d'une charge normale hertzienne incrémentée avec $\delta l = 50\ \mu\text{m}$ | 116 |
| 3.35 | Sauts de déplacements normal et tangentiel le long des faces de la fissure perpendiculaire pour le déplacement d'une charge normale hertzienne incrémentée avec $\delta l = 50\ \mu\text{m}$ | 117 |
| 3.36 | Sauts de déplacements normal et tangentiel le long des faces de la fissure perpendiculaire pour le déplacement d'une charge normale hertzienne incrémentée avec $\delta l = 50\ \mu\text{m}$ | 118 |
| 3.37 | Comparaison des variations des FIC entre le modèle de référence et le modèle elfe_3d pour le déplacement d'une charge normale hertzienne incrémentée avec $\delta l = 50\ \mu\text{m}$, et une fissure inclinée | 120 |
| 3.38 | Sauts de déplacement sur tout le cycle de chargement issus du modèle elfe_3d pour le déplacement d'une charge normale hertzienne incrémentée avec $\delta l = 50\ \mu\text{m}$. Fissure inclinée, $b = 3\text{ mm}$, $\theta = 15^\circ$. | 120 |

| | | |
|------|---|-----|
| 3.39 | Sauts de déplacement pour $\frac{y_C}{a}$ allant de -0.9 à 0.3 mm issus du modèle elfe_3d pour le déplacement d'une charge normale hertzienne incrémentée avec $\delta l = 50 \mu\text{m}$. Fissure inclinée, $b = 3 \text{ mm}$, $\theta = 15^\circ$. | 121 |
| 3.40 | Données du problème portant sur un cycle complet en fatigue de contact de roulement | 122 |
| 3.41 | Variations des FIC issues du modèle de référence pendant un cycle de fatigue de contact de roulement pour trois longueurs de fissure | 123 |
| 3.42 | Variations des FIC issues du modèle elfe_3d pendant un cycle de fatigue de contact de roulement pour trois longueurs de fissure | 123 |
| 3.43 | Description des différentes phases de chargement en pointe de la fissure de longueur 2 mm | 124 |
| 3.44 | Description des différentes phases de chargement en pointe de la fissure de longueur 4.3 mm | 125 |
| 3.45 | Description des différentes phases de chargement en pointe de la fissure de longueur 5.85 mm | 125 |
| 3.46 | Description de l'évolution des sauts de déplacement normal et tangentiels pour les positions définies par y_C/a , avec $b = 5.85 \text{ mm}$. Les courbes rouge et verte correspondent respectivement à la première et dernière position de y_C/a . | 127 |
| 3.47 | Description de l'évolution des sauts de déplacement normal et tangentiels pour les positions définies par y_C/a , avec $b = 2 \text{ mm}$. Les courbes rouge et verte correspondent respectivement à la première et dernière position de y_C/a . | 129 |
| 4.1 | Organigramme général de la prévision de la croissance des fissures de fatigue tribologique | 134 |
| 4.2 | Illustration à différentes étapes de chargement des évolutions des FIC k_1^* et k_2^* . | 136 |
| 4.3 | Les deux premiers critères d'Hourlier appliqués à un cycle de fatigue de contact de roulement. | 137 |
| 4.4 | Critères d'Hourlier en $\frac{da}{dN_{max}}$ pour différentes lois de fissuration | 138 |
| 4.5 | Réorientation de la fissure et modes de sollicitation | 139 |
| 4.6 | Résultats du calcul des FIC après la première extension de la fissure $b = 5.85 \text{ mm}$ | 140 |
| 4.7 | Résultats du critères d'Hourlier en $\frac{da}{dN_{max}}$ pour différentes lois de fissuration après la première extension de la fissure $b = 5.85 \text{ mm}$ | 140 |
| 4.8 | Trajet de propagation d'une fissure inclinée ($b = 5.85 \text{ mm}$) | 141 |
| 4.9 | Organigramme de prise en compte des essais expérimentaux | 142 |
| 4.10 | Dispositif expérimental - Machine à galets | 144 |
| 4.11 | Géométrie des galets en contact | 145 |
| 4.12 | Dispositif de prise d'images | 146 |
| 4.13 | Suivi de la croissance de quelques fissures | 147 |

| | | |
|------|--|-----|
| 4.14 | Description des isovaleurs des fonctions de niveaux Φ et Ψ | 149 |
| 4.15 | Géométrie des fissures de fatigue de contact | 150 |
| 4.16 | Représentation des fissures par les isovaleurs des fonctions de niveaux . . . | 150 |
| 4.17 | Les différents contours d'intégration de l'intégrale d'interaction en 3D . . . | 151 |
| 4.18 | Repère local en 3D pour tout point du front | 151 |
| 4.19 | (a) Déformée totale du galet et (b) déformée locale près de la fissure avec la zone de chargement | 154 |
| 4.20 | Représentation des trois fissures en fonction du maillage et des fonctions de niveaux | 155 |
| 4.21 | Variations des FIC suivant l'axe z pour les trois profondeurs de fissure . . . | 156 |
| 4.22 | J -domaine en 3D | 157 |

Liste des tableaux

| | | |
|-----|---|-----|
| 3.1 | Organigramme de la résolution du problème de fatigue tribologique | 77 |
| 3.2 | Architecture du code elfe_3d sous forme de classes. | 87 |
| 3.3 | Quelques résultats de référence pour l'analyse de la qualité du modèle elfe_3d | 92 |
| 3.4 | Effets de la taille du domaine sur les valeurs des FIC | 97 |
| 3.5 | Résultats sur l'influence de l'incrément du pas de chargement pour $H =$ 100 mm , $L = 150 \text{ mm}$, $b = 0.1 \text{ mm}$, $tol=10^{-4}$ | 98 |
| 3.6 | Erreurs relatives pour un chargement proportionnel en traction défini par le problème 3.18 | 102 |
| 3.7 | Maximum de l'erreur de $\frac{K_I}{K_O}$ en % entre les résultats d'Hammouda et al. [40] et ceux issus du modèle elfe_3d en fonction du coefficient de frottement μ_C | 103 |
| 3.8 | Erreur relative pour le déplacement d'une charge normale hertzienne en cinq pas. Fissure perpendiculaire $b = 3\text{mm}$ | 108 |
| 3.9 | Erreur relative pour le déplacement d'une charge normale hertzienne en quatre pas. Fissure inclinée, $b = 3 \text{ mm}$, $\theta = 15^\circ$ | 112 |
| 4.1 | Caractéristiques géométriques et mécaniques des 2 galets | 145 |
| A.1 | Expression des champs de contraintes et de déplacement en coordonnées cartésiennes | 5 |
| A.2 | Autres expressions des champs de contraintes et de déplacement | 6 |
| D.1 | Etat du point, composantes du déplacement et des forces de contact en fonction de la valeur des indicateurs \tilde{C}_I et \tilde{G}_I pour les pas de chargement avec un effet d'histoire. | 12 |
| D.2 | Etat du point, composantes du déplacement et des forces de contact en fonction de la valeur des indicateurs C_I et G_I pour le premier pas de char- gement. | 13 |
| G.1 | Ensemble des données expérimentales traitées à 180° Est | 21 |
| G.2 | Ensemble des données expérimentales traitées à 60° Est | 22 |
| G.3 | Valeurs expérimentales à 60° Est de la largeur surfacique de la fissure 1 et de la profondeur de son centre | 22 |

| | | |
|-----|---|----|
| G.4 | Valeurs expérimentales à 60° Est de la largeur surfacique de la fissure 2 et de la profondeur de son centre | 23 |
| G.5 | Valeurs expérimentales à 60° Est de la largeur surfacique de la fissure 3 et de la profondeur de son centre | 23 |
| G.6 | Valeurs expérimentales à 60° Est de la largeur surfacique de la fissure 4 et de la profondeur de son centre | 23 |

INTRODUCTION GENERALE

Prévoir l'évolution de fissures dans une structure représente un enjeu économique majeur. Le concepteur doit prendre en compte le matériau et sa loi de comportement, la géométrie, les chargements complexes, les lois de fissuration, des critères de bifurcation, d'arrêt ... au cours des différents stades de la conception et du dimensionnement. De nombreux travaux ont ainsi été menés en fatigue.

Ce travail concerne plus précisément la fatigue de contact ou fatigue tribologique. Celle-ci correspond aux dégradations telles que l'usure et la fissuration qui surviennent entre solides en contact, soit immobiles l'un par rapport à l'autre, soit en mouvement relatif (roulement, glissement). Usure et fissuration ne dépendent pas de la cause du mouvement (vibrations, déformations cycliques, glissement continu, roulement) mais résultent d'une synergie complexe entre géométrie du contact, frottement local et son évolution temporelle liée au détachement de particules d'usure, leur vie dans le contact et leur éjection qui conditionnent in fine le type de dommage, usure et/ou fissuration. Atteindre des capacités prédictives en fatigue tribologique requière la prise en compte de phénomènes complexes non-linéaires, couplés, mettant en jeu des échelles physiques différentes. Ainsi les sollicitations locales subies par les solides ou corps en contact sont étroitement liées aux évolutions de la microgéométrie des surfaces, de la physico-chimie, des propriétés mécaniques, de la présence de particules d'usure dans le contact, leur expulsion ou au contraire leur maintien, évolutions traduites en partie par des variations du coefficient de frottement local (dans les zones de micro-glissement) et global (rapport effort tangent sur effort normal) au cours des cycles. Ces évolutions peuvent perturber et modifier les mécanismes moteurs de l'endommagement, provoquant par exemple l'arrêt de certaines micro-fissures et stimulant la propagation d'autres, ou provoquer le basculement d'un mode d'endommagement par fissuration à un mode par usure. Dans ce dernier cas, nous comprenons bien que les prédictions basées sur des approches en fatigue multiaxiale associées à des coefficients d'abattement ne peuvent conduire à des estimations correctes.

L'objectif est de proposer un modèle de fissuration en fatigue tribologique, applicable à des solides de géométries complexes et prenant en compte les spécificités des sollicitations tribologiques, qui sont :

- l'amplitude variable des cycles : leur variation est dépendante de celle du coefficient de frottement. Les facteurs influents sur cette valeur sont nombreux : le mécanisme et sa rigidité, la géométrie du contact, les matériaux en contact, l'environnement ...
- la répartition de contraintes et les conditions de confinement : des conditions très

particulières de cisaillement et de pression hydrostatique s'exercent dans des zones très localisées (variations de quelques GPa sur quelques dizaines de microns) par rapport à celles mises en jeu pour des sollicitations classiques de fatigue.

- le caractère multiaxial et non proportionnel : les modèles de prédiction reposent sur des modèles développés en fatigue uniaxiale ou biaxiale proportionnelle. Les propriétés en fatigue, déterminées également lors d'essais de fatigue conventionnelle, sont à considérer comme une base de réflexion par rapport à celles caractérisant la réponse des matériaux sous sollicitations de contact.
- le suivi in situ : la formation de défauts, leur évolution en fissures microscopiques puis macroscopiques se produit à l'interface des corps en contact (ou en sous-surface) ou dans son proche voisinage. Il est actuellement toujours impossible de réaliser des observations directes pour suivre l'amorçage et le développement des fissures de fatigue de contact pour des matériaux métalliques. Les analyses ont lieu lors d'essais interrompus (ce qui implique des changements au niveau des conditions de sollicitations lors de la reprise des essais) ou des analyses destructives (ce qui sous-entend un grand nombre d'essais).
- le mode mixte complexe : Les fissures de fatigue sont sollicitées en mode mixte, selon des cycles complexes et leur propagation est affectée tant par les conditions de contact unilatérales (ouverture et fermeture) que par le frottement des faces. Les connaissances sur l'évolution d'une fissure soumise à une sollicitation cyclique en mode mixte I+II, lorsque chacune des composantes évolue indépendamment au cours du cycle, sont très insuffisantes et les méthodes de prévision, (lois cinétiques, critères de bifurcation) généralement établies pour des sollicitations proportionnelles, doivent être testées dans le cas de chargements plus complexes et éventuellement reformulées.

Ce modèle doit permettre l'analyse d'éléments de structure, soumis à des chargements complexes, auquel se superpose des sollicitations de contact. Il est donc impératif de se tourner vers des modèles reposant sur des méthodes numériques.

Parmi les modèles numériques existants pour ce type de problème, peu prennent en compte le contact entre les faces de la fissure et aucun ne prend en compte l'aspect tridimensionnel des fissures. Le développement d'un outil permettant d'intégrer cet aspect géométrique est donc d'un intérêt capital pour faire progresser la compréhension dans le domaine de la fissuration sous sollicitations tribologiques.

Un modèle est développé dans ce but au sein du code `elfe_3d` (développé au Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Solides (LaMCoS) de l'INSA de Lyon), reposant sur le formalisme d'une méthode éléments finis. Contrairement à la théorie mathématique de distributions continues de dislocations, cette méthode permet la prise en compte de comportements généraux. Le traitement de discontinuité évoluant au sein de la structure est néanmoins encore quelque chose de difficile par ces méthodes car le support géométrique de la discontinuité est représenté de manière explicite par le maillage. L'évolution au cours du temps de cette discontinuité nécessite donc des remaillages. Pour des problèmes bidimensionnels, ce remaillage est une opération qui peut-être quasi-automatique, mais

ce n'est pas le cas pour les problèmes tridimensionnels, ce qui peut conduire à des coûts numériques très importants. D'autre part, lorsque les champs dépendent de l'histoire, il est nécessaire de procéder à des opérations de projection d'une discrétisation à l'autre, ce qui pose des problèmes théoriques fondamentaux. La nécessité de disposer d'une méthode sans description explicite des surfaces de la discontinuité pour la simulation tridimensionnelle de la propagation de fissure nous a conduit vers la méthode des éléments finis étendus (X-FEM), extension de la méthode des éléments finis classique, qui exploite les propriétés de partition de l'unité des fonctions de forme des éléments finis. L'approximation des champs est enrichie grâce à des fonctions additionnelles choisies de manière à pouvoir reproduire le plus fidèlement possible la solution du problème considéré. Cette stratégie ne nécessite donc pas de maillage explicite de la discontinuité, ni de remaillage lorsque la géométrie évolue au cours du temps. Cette évolution est prise en compte simplement en modifiant les fonctions d'interpolation enrichies sans avoir à modifier le maillage initial de la structure.

Partons de cette méthode, nous avons inclu la prise en compte d'une loi de comportement à l'interface des fissures, couplant contact unilatéral et frottement, dans le cadre de la mécanique élastique linéaire de la rupture (MELR), le solide étant supposé isotrope et homogène. Cette loi d'interface est établie en tenant compte de l'histoire du chargement et la résolution du problème non linéaire d'évolution est traitée par une approche quasi-statique du problème sous forme incrémentale. Le schéma de résolution choisi est celui issu de la méthode LATIN, méthode de résolution proche du formalisme du Lagrangien Augmenté. Les fissures sont considérées microstructurellement longues (plus grande que la taille des grains) avec une zone plastique localisée en pointe dont la taille n'excède pas les 5% de la taille de la fissure.

Nos travaux ont aussi porté sur la prise en compte et l'analyse des effets multi-échelles spécifiques au problème de contact (taille du corps fissuré, taille de la zone de contact, amplitude du déplacement des corps en contact, dimension de la fissure ...). Nous avons aussi étudié l'influence de certains paramètres du modèle sur le comportement de fissures simples, mettant ainsi l'accent sur la nécessité d'une modélisation multi-échelles du problème. Une grande partie des travaux a été conduite en deux dimensions, afin de valider la stratégie du modèle et la qualité de la solution, tant au niveau de grandeurs caractéristiques, qu'au niveau des champs solutions.

Partant de ces développements, l'étape suivante est la simulation de la propagation de fissures de fatigue de contact. Des développements ont ainsi été effectués dans ce but. Nous montrons l'ensemble des développements à apporter pour une telle simulation et l'analyse requise en post-traitement.

Pour finir, l'aspect tridimensionnel doit être abordé à l'aide de résultats expérimentaux pour une validation du modèle. A cette fin, des essais sont mis en place pour des sollicitations de fatigue tribologiques en roulement/glissement. Les premiers résultats sont énoncés ainsi qu'une approche préliminaire de la modélisation tridimensionnelle de ces essais.

Par conséquent, ce mémoire s'organise en quatre chapitres.

Le premier chapitre est consacré à la présentation d'outils théoriques utiles pour une modélisation du problème de fissuration en fatigue de contact. A partir de l'hypothèse d'élasticité linéaire, nous allons énoncer les grandeurs caractéristiques de la fissuration. Ces grandeurs sont utilisées pour mettre en place des lois de fissuration et des critères de direction en fatigue. Dans le cas particulier de la fatigue de contact, nous examinons les critères applicables en présentant les spécificités et les dégradations propres à cette fatigue. Les fissures sollicitées sous ce type de chargement subissant des cycles complexes de contact, il est essentiel de prendre en compte ce contact interfacial, gouvernant la propagation, à travers sa modélisation. Ces outils théoriques sont aussi présentés dans ce chapitre.

La résolution du problème de contact avec frottement en fatigue tribologique établie par l'ensemble des outils théoriques est ensuite abordée dans le second chapitre avec un bilan des méthodes de discrétisation et des stratégies de résolution des problèmes non linéaires d'évolution.

Nous exploitons les différents aspects abordés dans ces deux premiers chapitres pour développer un modèle numérique de comportement de fissure de fatigue. Ce modèle est présenté dans le troisième chapitre avec un nouveau critère d'arrêt propre au problème de contact. Une analyse de l'influence de certains paramètres du modèle sur la solution est exposée, accompagnée d'une validation du modèle en plusieurs étapes pour des chargements proportionnels statiques, non proportionnels simples/complexes sur différentes géométries de fissure.

Grâce à la mise en place d'outils spécifiques dans le modèle numérique, la prévision de la croissance des fissures de fatigue de contact peut ensuite être abordée par une analyse bidimensionnelle à la fin du cycle de chargement dans le quatrième chapitre. Cette analyse permet de déterminer la direction et la vitesse de propagation, et conduit à la présentation d'une simulation en fatigue de roulement. L'approche tridimensionnelle du problème de fatigue de contact en roulement est abordée succinctement par la présentation des essais expérimentaux réalisés et par l'utilisation des premières données expérimentales dans une modélisation tridimensionnelle.

Ce mémoire se termine par des conclusions et des perspectives.

Chapitre 1

APPROCHE "MACROSCOPIQUE" DE LA PROPAGATION DE FISSURES EN FATIGUE DE CONTACT

Sommaire

| | | |
|------------|--|-----------|
| 1.1 | Les outils de la mécanique élastique linéaire de la rupture . . | 2 |
| 1.1.1 | Aperçu historique sur la rupture | 2 |
| 1.1.2 | Les grandeurs caractéristiques | 3 |
| 1.1.3 | Le calcul des grandeurs caractéristiques | 12 |
| 1.2 | Propagation de fissure de fatigue | 19 |
| 1.2.1 | Lois de fissuration par fatigue | 20 |
| 1.2.2 | Critères de direction de propagation pour des chargements proportionnels | 22 |
| 1.2.3 | Critères de direction de propagation pour des chargements non proportionnels | 26 |
| 1.3 | La fatigue tribologique | 28 |
| 1.3.1 | Les spécificités des sollicitations en fatigue tribologique | 28 |
| 1.3.2 | Dégradations survenant en fatigue tribologique | 29 |
| 1.3.3 | Ce que le chargement induit sur les fissures | 30 |
| 1.4 | Les outils de la mécanique du contact - Approches du contact - Lois de comportement d'interface | 30 |
| 1.4.1 | Le contact au sens de Signorini | 31 |
| 1.4.2 | Lois de frottement | 32 |
| 1.4.3 | La formulation mécanique du problème de contact entre deux corps | 36 |
| 1.5 | Conclusion | 38 |

Nous nous plaçons dans le cadre de la mécanique élastique linéaire de la rupture (MELR) qui suppose l'existence d'un défaut initial dans la structure. La MELR [61, 51, 9, 17], est basée sur une analyse élastique linéaire du champ de contraintes en petites déformations. Elle fournit une schématisation suffisamment correcte de la réalité pour les matériaux élastiques fragiles ou peu ductiles, comme les aciers à haute résistance, les verres, et dans une moindre mesure, les bétons et les bois. Le matériau est considéré comme un milieu continu au sens macroscopique dans lequel la présence de défauts est acceptée.

En pointe de la fissure se situe une zone singulière, siège de déformations plastiques, et tant que celle-ci n'est pas trop développée (i.e. lorsqu'elle intervient en pointe de fissure dans un volume dont les dimensions sont inférieures à 5-20 % de la longueur de la fissure), la théorie linéaire apparaît comme une approximation justifiée par l'expérience (avec une erreur de l'ordre de 10 à 15%). L'analyse de la fissuration par fatigue peut s'effectuer dans ce cadre pour des conditions de plasticité confinée.

L'objectif est de quantifier le risque associé à ce défaut pour des conditions de chargement cyclique et de prédire sa propagation ou son arrêt. L'établissement de critères pour définir la direction de propagation ainsi que des lois de fissuration est alors nécessaire. Afin de quantifier au mieux le risque, les conditions de chargement doivent être prises en compte dans l'établissement de ces données.

Par conséquent, après un bref aperçu historique, nous allons détailler les différents concepts qui ont jalonné le développement des outils tels que le taux de restitution d'énergie, les facteurs d'intensité des contraintes et les intégrales de contour, concepts utiles pour quantifier l'évolution de la fissure.

Ensuite, des lois de propagation et certains critères permettant de prédire la direction de propagation seront présentés, pour l'étude d'une propagation de fissure de fatigue. Nous distinguerons les critères applicables à des chargements proportionnels et non proportionnels.

L'aspect non conventionnel de la fatigue de contact et ses spécificités seront décrits dans la troisième section, suivie d'une présentation de critères adaptés à ces sollicitations.

Pour finir, nous définirons l'ensemble des notions utiles pour le traitement d'un problème de contact avec frottement.

1.1 Les outils de la mécanique élastique linéaire de la rupture

1.1.1 Aperçu historique sur la rupture

De tous temps, éviter la rupture a été une préoccupation majeure des constructeurs. Les structures de l'Égypte des pharaons ou de l'empire romain montrent l'importance accordée à éviter la ruine des édifices. Les matériaux utilisés étaient pour l'essentiel le bois, la pierre, la brique et le mortier. Les structures qui ont résisté au temps étaient

conçues pour des chargements en compression. Après la révolution industrielle, au début du 19e siècle, et l'apparition de l'acier, des structures pouvant résister à des chargements en traction ont vu le jour. Cependant l'utilisation de nouveaux matériaux (acier et alliages métalliques) pour des chargements en traction fit apparaître la notion de rupture pour des niveaux de chargements bien inférieurs à la limite d'élasticité. Le surdimensionnement des structures fut une première solution au problème. Cependant le désir d'alléger les structures et de réduire les coûts a conduit au développement des recherches sur la mécanique de la rupture.

En 1920, partant du premier principe de la thermodynamique, Griffith [39] établit la première théorie de la rupture, basée sur un formalisme énergétique. Il s'agit d'une relation directe entre la taille du défaut (la fissure) et la contrainte de rupture dans un milieu élastique. Le défaut devient instable et conduit à la rupture lorsque la quantité d'énergie disponible en pointe du défaut atteint une valeur critique spécifique du matériau. Cette théorie est parfaitement adaptée aux matériaux fragiles. Son domaine d'application ne s'étend pas aux matériaux ductiles. En effet, la dissipation d'énergie liée au mécanisme de la plastification est en dehors des hypothèses de cette théorie.

Irwin [47] en 1948 étend la théorie de Griffith, en incluant un terme de dissipation d'énergie dû à l'écoulement plastique près des extrémités d'une fissure, afin que cette théorie puisse être applicable aux matériaux ductiles. En 1956, il développe la notion de taux de restitution d'énergie. En 1957, à l'aide des travaux de Westergaard [96] sur les champs de déplacements et de contraintes élastiques près de l'extrémité d'une fissure sous un chargement donné, Irwin établit que les déplacements et les contraintes peuvent être décrits à l'aide des seuls paramètres caractérisant l'état de sollicitation de la région dans laquelle la rupture se produit : les facteurs d'intensité des contraintes (FIC), paramètres reliés au taux de restitution d'énergie. Paris utilise ce concept de FIC pour formuler des lois de vitesse de propagation de fissure de fatigue, utilisées pour la prédiction des durées de vie des structures. Dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture, Irwin, Dugdale et Barenblatt [7], et d'autres proposent des formulations qui prennent en compte l'existence d'une zone plastique sur les champs des contraintes et des déplacements à l'extrémité d'une fissure, en proposant le concept d'une correction de zone plastique. En 1968, Rice et Bui [85, 17] introduisent la notion d'intégrales indépendantes du contour, dont le concept est toujours utilisé surtout dans les modélisations numériques.

Après ce bref aperçu historique, nous allons présenter succinctement les différentes grandeurs caractéristiques de la rupture et les méthodes de calculs de ces quantités.

1.1.2 Les grandeurs caractéristiques

Les différents modes de sollicitation d'une fissure

Une fissure Γ_C est considérée comme une surface de discontinuité pour le champ de déplacement u . Nous distinguons deux faces Γ_C^+ et Γ_C^- comme illustré dans la figure 1.1(a).

Cette discontinuité se traduit par la relation :

$$[u_i] = u_i^+ - u_i^- \quad (1.1)$$

où l'indice i représente une direction de l'espace.

La discontinuité normale est l'ouverture de la fissure. Elle n'est jamais négative car les faces de la fissure peuvent s'écarter l'une de l'autre, mais ne peuvent jamais s'interpénétrer. La discontinuité tangentielle est appelée glissement relatif des deux lèvres de la fissure, et peut avoir un signe arbitraire.

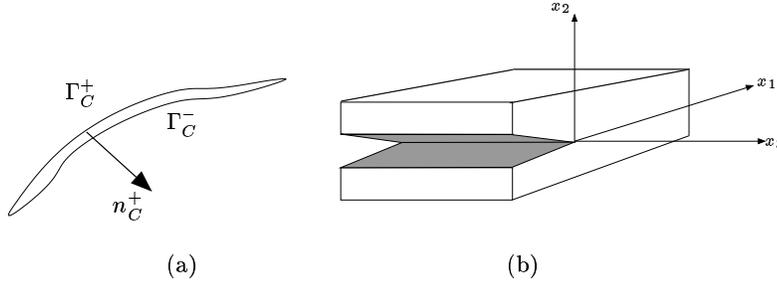


FIG. 1.1 – (a) Fissure (b) Repère attaché au front de la fissure

Concernant l'aspect cinématique de la rupture, nous distinguons trois modes de rupture, illustrés par la figure 1.2.

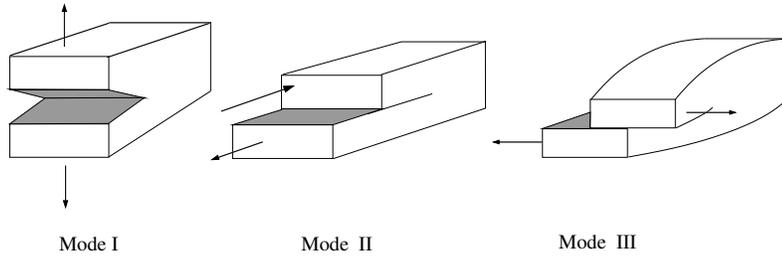


FIG. 1.2 – Les modes de fissuration

En introduisant un repère dont l'origine est située au front de la fissure, (cf. figure 1.1(b)), ces trois modes correspondent :

- au mode I, dit mode d'ouverture traduisant la discontinuité normale, défini par :

$$[u_1] = 0 \quad [u_2] \neq 0 \quad [u_3] = 0, \quad (1.2)$$

- au mode II, dit mode de cisaillement plan traduisant la discontinuité tangentielle, ou glissement plan, défini par :

$$[u_1] \neq 0 \quad [u_2] = 0 \quad [u_3] = 0, \quad (1.3)$$

- au mode III, dit mode de cisaillement antiplan traduisant la discontinuité tangentielle, ou glissement antiplan, défini par :

$$[u_1] = 0 \quad [u_2] = 0 \quad [u_3] \neq 0. \quad (1.4)$$

La notion de mode mixte est introduite pour illustrer une situation où deux ou trois modes (I+II ou I+III ou I+II+III) sont présents simultanément en pointe de fissure.

La théorie de Griffith et la notion de taux de restitution d'énergie

Griffith (1920) [39] aborde la rupture d'un point de vue énergétique. Il suppose l'existence d'une énergie de liaison, γ_S , positive par unité de surface représentative de la séparation des lèvres de la fissure, et étudie l'éventualité de la propagation quasistatique, sous chargement constant, de la fissure. Considérons un matériau contenant une fissure de longueur a (cf figure 1.3). Une extension Δa de cette fissure entre les instants 0 et δt s'accompagnera des variations d'énergie suivantes :

$$\Delta W_{ext} = \Delta W_{elas} + \Delta U \quad (1.5)$$

avec

ΔW_{ext} la variation du travail des forces extérieures
(considérée à forces constantes i.e. sans modification des sollicitations extérieures entre la fissure initiale et la fissure après accroissement),
 ΔW_{elas} la variation de l'énergie élastique,
 ΔU l'énergie dépensée lors de la propagation de la fissure sur la longueur Δa .

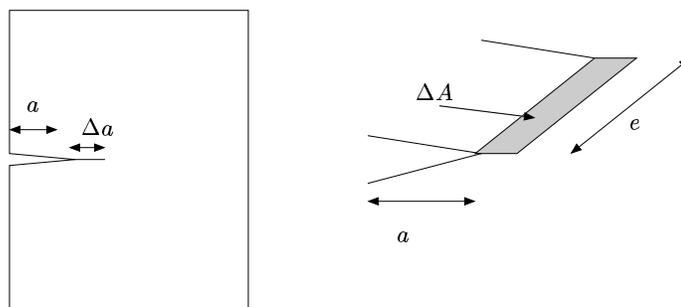


FIG. 1.3 – Propagation de la fissure sur une longueur Δa

Dans la théorie initiale de Griffith, l'énergie ΔU correspond à l'énergie nécessaire à la création de nouvelles surfaces dans le matériau ($\Delta U = \Delta W_{sep}$ avec ΔW_{sep} l'énergie de

séparation des surfaces). L'énergie de Griffith G est rapportée à l'unité de surface; elle est définie à partir de ΔU par :

$$G = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta A} = \frac{\partial U}{\partial A} \quad (1.6)$$

où $\Delta A = e\Delta a$ est la surface fissurée lors de l'avancée de la fissure sur la longueur Δa dans une éprouvette d'épaisseur e . Généralement nous considérons une épaisseur unité ($e = 1$) et G rapportée à l'unité d'épaisseur est alors donnée par :

$$G = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta a} = \frac{\partial U}{\partial a}, \quad (1.7)$$

ce qui est équivalent à écrire :

$$G = -\frac{W_{elas} - W_{ext}}{\partial a} = -\frac{\partial P}{\partial a}, \quad (1.8)$$

P étant l'énergie potentielle stockée dans la structure. G est appelée plus couramment le taux de restitution d'énergie. De plus, à chargement constant, P est une fonction univoque de a car, le chargement étant fixé, la valeur de a détermine la géométrie donc la solution élastostatique du problème. Par conséquent nous trouvons plus communément la relation :

$$G = -\frac{dP}{da} \quad (1.9)$$

En considérant γ_S l'énergie spécifique de création de surface, Griffith établit que la fissure se propage de façon stable si la relation suivante est vérifiée avant et après propagation :

$$G = 2\gamma_S. \quad (1.10)$$

Ces travaux représentent une avancée significative pour le dimensionnement industriel. Les hypothèses restrictives telles que

- chargement constant,
- effets thermiques non intégrés dans le bilan énergétique,
- et la réversibilité de la séparation,

vont être levées progressivement.

Leblond [58, 57] étend le raisonnement de Griffith en élargissant le champ d'application des hypothèses :

- la température est constante,
- l'énergie superficielle réversible est négligeable, mais l'avancée de la fissure provoque une dissipation d'énergie G_C , positive, par unité de longueur,
- le chargement est variable.

En tenant compte d'une énergie liée au contact interfacial unilatéral sans frottement, il aboutit à une relation équivalente au critère de Griffith. Par contre, dans le cadre de contact interfacial avec frottement, aucune expression de G intégrant la dissipation d'énergie due au frottement n'a été établie.

Définie par l'équation (1.9), G est une grandeur caractéristique de la fissuration qui nous sera utile pour évaluer le taux de restitution d'énergie élastique lié à l'avancée de la fissure. Il sera néanmoins judicieux d'émettre des réserves en présence de frottement sur l'interprétation et le sens physique que nous donnerons à G .

Les facteurs d'intensité des contraintes (FIC)

En 1957, Irwin [47] a introduit la notion de facteur d'intensité des contraintes (FIC) comme un paramètre caractéristique des champs en pointe de fissure. Les facteurs d'intensité de contrainte K_I , K_{II} et K_{III} , caractérisent l'intensité de la singularité du champ des contraintes à la pointe et sont proportionnels à la discontinuité du champ de déplacement des lèvres de la fissure pour chaque mode élémentaire. Ils contiennent l'information sur la géométrie de la fissure et la nature des sollicitations. Ils s'expriment en $\text{MPa}\sqrt{m}$. L'expression générale est :

$$K = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma(\theta = 0) = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [u]. \quad (1.11)$$

Nous verrons dans les sections suivantes les relations qui les lient aux autres paramètres, et pour cela intéressons-nous à la description du champ des contraintes à la pointe de la fissure.

Description du champ des contraintes à l'extrémité d'une fissure

Les premiers résultats analytiques portent sur des géométries simples, des chargements uniformes dans des milieux élastiques linéaires. Considérons donc un milieu plan, fini, peu épais, contenant une fissure de longueur $2a$ loin du bord. La taille de la fissure est supposée petite par rapport aux dimensions du corps.

La forme générale du champ des contraintes au voisinage de l'extrémité d'une fissure dans un tel matériau est de la forme [52] :

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m r^{\frac{m}{2}} g_{ij}(\theta) \quad (1.12)$$

K correspondant au FIC du mode de sollicitation considéré. Les coordonnées (r, θ) sont repérées par rapport à l'extrémité de la fissure (cf figure 1.4). Les fonctions addimensionnelles f_{ij} et g_{ij} dépendent du mode de sollicitation. Les quantités g_{ij} dépendent également de l'état de contrainte et de la géométrie du corps fissuré.

Au voisinage immédiat de la pointe de la fissure ($r \rightarrow 0$), les contraintes présentent une singularité en $1/\sqrt{r}$. Les termes d'ordre plus élevé de la relation (1.12), qui font notamment intervenir les fonctions g_{ij} , sont alors négligeables.

Les champs des contraintes dans la zone la plus critique, le voisinage immédiat de la fissure, sont appelés champs de contraintes asymptotiques et s'écrivent simplement :

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (1.13)$$

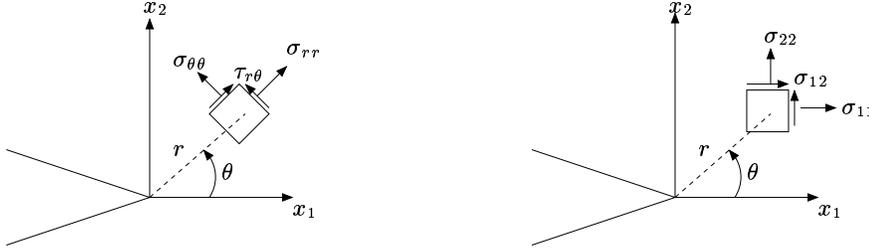


FIG. 1.4 – Définition des axes (x, y) et des coordonnées (r, θ) au voisinage de l'extrémité d'une fissure

Les fonctions f_{ij} ont été obtenues par Westergaard [96] pour des conditions de bord libres sur les lèvres de la fissure (voir annexe A). Les champs asymptotiques correspondant sont résumés dans les tableaux A.1 et A.2 de l'annexe A. Dans le cas de contact avec frottement, la singularité en pointe de fissure évolue en fonction des zones de contact et de glissement le long de la fissure, et particulièrement en pointe. Nous reviendrons sur ce point ultérieurement dans ce manuscrit.

Les expressions établies montrent clairement le lien existant entre la singularité du champ de contrainte et les FIC. Il existe aussi un lien entre le taux de restitution d'énergie, G , et ces facteurs.

Lien entre le taux de restitution d'énergie, G , et les facteurs d'intensité des contraintes, K_i : la théorie d'Irwin

Irwin [58, 37] a établi en 1958 une relation entre le taux de restitution d'énergie G et les facteurs d'intensité des contraintes K_I , K_{II} (et K_{III}), pour une longueur et un chargement donnés :

$$G = \frac{k}{E}(K_I^2 + K_{II}^2) \quad \text{en 2D,} \quad (1.14)$$

avec $k = 1$ en contraintes planes et $1 - \nu^2$ en déformations planes, E le module de Young et ν le coefficient de Poisson. Pour une fissure 3D non débouchante, nous avons la relation

$$G = \frac{k}{E}(K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1 + \nu}{E}K_{III}^2 \quad (1.15)$$

avec $k = 1 - \nu^2$ dans le volume. Lorsque la fissure débouche à la surface libre, aux points M_1 et M_2 où la ligne de la fissure rencontre cette surface (cf. figure 1.5), la nature de la singularité des contraintes peut-être différente [17]. Aux points M_1 et M_2 , la nature de la singularité peut dépendre de l'angle de la fissure avec la surface libre ainsi que du matériau. Différentes approches théoriques proposent des expressions de la singularité en u mais sont contradictoires entre elles [46].

Ces relations sont très utilisées pour l'évaluation des FIC.

Après l'approche globale de Griffith et celle locale des FIC, attardons-nous sur les intégrales de contour qui sont à mi-chemin entre les deux précédentes approches.

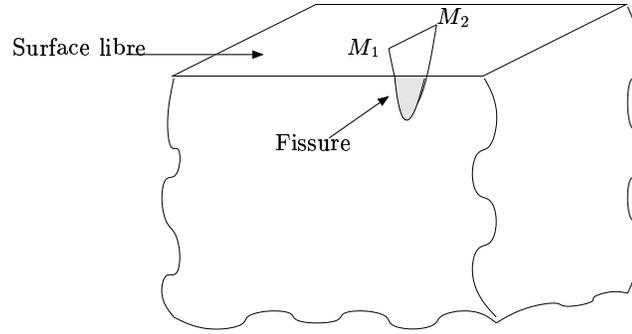


FIG. 1.5 – Fissure débouchante

L'intégrale J

Le concept de l'intégrale J est introduit par Eshelby en 1956 [34] et développé par Rice en 1968 [85]. Partant des invariants intégraux [85, 17, 9] (rappelés en annexe B en mécanique de la rupture élastique), cette théorie établit la quantité J comme étant le taux de diminution de l'énergie potentielle stockée dans un domaine fermé lorsque la fissure croît.

Considérons un problème plan, avec une fissure rectiligne débouchante ou non à la surface extérieure du solide et située sur l'axe (Ox_1) telle que sa pointe corresponde à l'origine des coordonnées. En définissant Γ un contour *ouvert* orienté quelconque tel que les extrémités A^+ et A^- se trouvent sur les faces de la fissure, et n la normale à Γ (voir figure 1.6), l'intégrale J introduite par Rice est définie par :

$$J = \int_{\Gamma} (W\delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1}) n_j ds, \quad (1.16)$$

avec ds un arc élémentaire de Γ , et W la densité d'énergie de déformation défini par

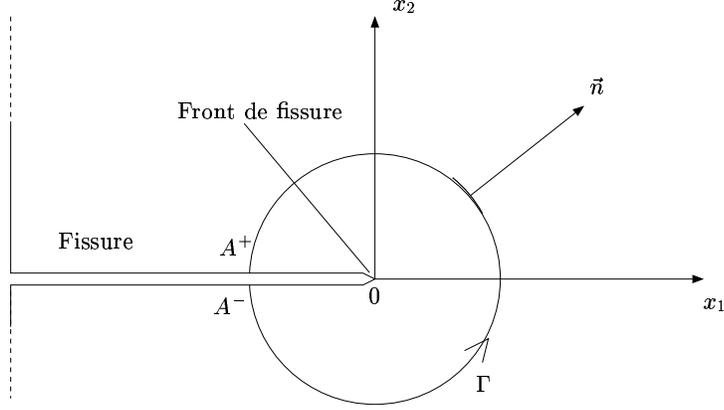
$$W = \int_0^\epsilon \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}. \quad (1.17)$$

En élasticité linéaire W s'écrit simplement

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}. \quad (1.18)$$

L'indépendance de J sur tout contour *ouvert* Γ , entourant la pointe et dont les extrémités sont situées sur chacune des lèvres de la fissure, est établie à condition que [85] :

1. les faces de la fissure soient des surfaces libres d'effort,
2. la fissure soit dans le prolongement de l'axe x_1 fixé en pointe, et ce du point A jusqu'à la pointe O .

FIG. 1.6 – Définition du contour Γ utilisé pour l'intégrale J

En effet, considérons ces deux conditions, avec le contour *fermé* $\Gamma = \Gamma_2 \cup [B^- A^-] \cup \Gamma_1 \cup [A^+ B^+]$ défini dans la figure 1.7. L'intégrale J est nulle sur ce contour *fermé* (cf. annexe B). Or l'intégrale J est nulle sur $[A^+ B^+]$ et $[B^- A^-]$ car $\sigma_{ij}n_i = 0$ d'après la condition 1, et $n_1 = 0$ du fait de la condition 2. Il reste donc $J_{\Gamma_1} + J_{\Gamma_2} = 0$. En définissant le contour $\Gamma_{1'}$ comme étant identique à Γ_1 mais parcouru dans l'autre sens, nous obtenons $J_{\Gamma_{1'}} = J_{\Gamma_2}$.

Cette propriété d'indépendance du chemin parcouru est importante car elle permet de calculer l'intégrale J à partir des champs de contrainte et de déplacement obtenus par une méthode numérique, sur un contour quelconque, éloigné du front de fissure. D'autre part, pour un matériau élastique, l'intégrale J s'identifie au taux de restitution d'énergie G et nous obtenons la relation très utile pour le calcul des FIC :

$$J = G. \quad (1.19)$$

Dans le cas où le processus de dissipation d'énergie sur les faces de la fissure s'effectue avec des conditions de contact avec frottement, l'intégrale J n'est plus indépendante du contour et dépend de la position des points A^+ et A^- (cf. figure 1.6) par la transmission des valeurs des contraintes de cisaillement en ces points [76, 59].

En effet, si nous considérons le contour *fermé* $\Gamma = \Gamma_2 \cup [B^- A^-] \cup \Gamma_1 \cup [A^+ B^+]$ précédent (cf. figure 1.7), nous pouvons écrire :

$$J_{\Gamma_{1'}} = J_{\Gamma_2} + \int_{A^-}^{B^-} (-W\delta_{1j} + \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1}) n_j^- ds + \int_{A^+}^{B^+} (W\delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1}) n_j^+ ds, \quad (1.20)$$

avec n_j^+ et n_j^- les normales extérieures n relatives à chaque face ($n_j^- = -n_j^+$). Or le long des segments $[A^- B^-]$ et $[A^+ B^+]$, nous avons $n_1 = 0$ et $\sigma_{ij}^+ n_j^+ = T_i^+ = -T_i^-$, ce qui conduit à écrire :

$$J_{\Gamma_{1'}} = J_{\Gamma_2} - \int_{AB} T_i^+ \left(\frac{\partial u_i^-}{\partial x_1} - \frac{\partial u_i^+}{\partial x_1} \right) ds. \quad (1.21)$$

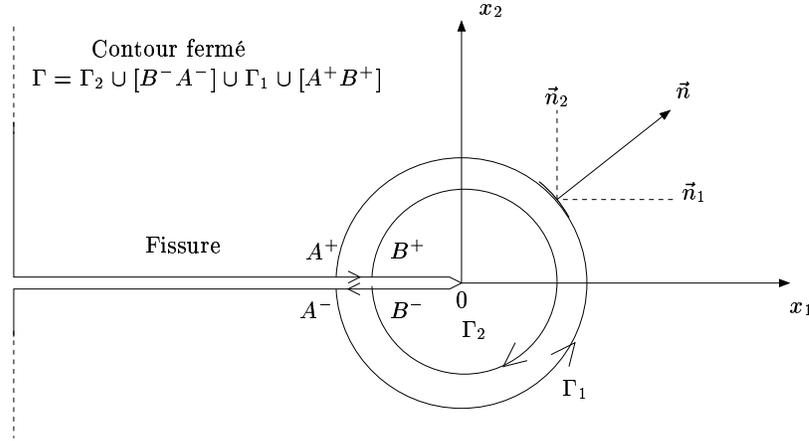


FIG. 1.7 – Définition des contours Γ_1 , Γ_2 et Γ utilisé pour l'intégrale d'interaction et les intégrales de domaine.

Si la fissure est fermée, alors les déplacements selon la composante suivant l'axe x_2 sont égaux sur les deux faces, et nous obtenons :

$$J_{\Gamma_1'} = J_{\Gamma_2} - \int_{AB} T_1^+ \left(\frac{\partial u_1^-}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} \right) ds \quad (1.22)$$

ce qui est équivalent à écrire

$$J_{\Gamma_1'} - T_1^+(A)(u_1^- - u_1^+)(A) = J_{\Gamma_2} - T_1^+(B)(u_1^- - u_1^+)(B) \quad (1.23)$$

Finalement, c'est uniquement lorsque un état de cisaillement non nul s'exerce au point A ($T_1^+ = \sigma_{1k}^+ n_k = \sigma_{12}^+ n_2$) que l'intégrale J n'est plus indépendante du contour. Mais dans ce cas, il existe tout de même une quantité indépendante du contour *ouvert* Γ (cf. figure 1.6) dont les extrémités se situent sur chaque face de la fissure au point A , et définie par

$$J_{\Gamma} - T_1^+(A)(u_1^- - u_1^+)(A). \quad (1.24)$$

Trois types de variables en mécanique de la rupture caractérisent donc la perturbation du champ des contraintes due à la présence d'une fissure, et permettent la quantification du risque :

- les facteurs d'intensité de contraintes, K_I , K_{II} et K_{III} , qui décrivent l'intensité du mode de sollicitation en pointe de la fissure,
- le taux de restitution d'énergie, G , définissant l'énergie dissipée pour l'extension de la fissure.
- l'intégrale de contour, J ,

Ces paramètres caractéristiques seront utilisés dans le modèle numérique pour décrire l'état des champs en pointe de fissure et pour l'analyse de la fissuration et de la propagation de la fissure.

Par conséquent, intéressons-nous aux méthodes de calcul de ces grandeurs.

1.1.3 Le calcul des grandeurs caractéristiques

La liste des méthodes que nous allons présenter n'est pas exhaustive.

Le calcul des facteurs d'intensité des contraintes [37, 17]

Ce calcul a été établi de façon analytique pour certaines géométries, et par des méthodes numériques pour des géométries plus complexes.

Méthodes analytiques

Pour des problèmes à géométrie et chargement simples, la première méthode consiste à ramener le problème traité à une suite de problèmes déjà résolus dont les solutions élémentaires sont connues. Le principe utilisé est celui de la superposition des solutions qui résulte de l'élasticité linéaire. Il existe bon nombre de solutions tabulées dans la littérature [17, 9, 72, 88].

Une autre méthode de résolution consiste à rechercher la valeur de $K_I(x)$ produite par une force unité, placée à une distance x de l'extrémité de la fissure. Pour une distribution d'effort imposé $F(x)$, nous écrivons alors :

$$K_I = \int_{fissure} F(x)K(x)dx \quad (1.25)$$

où la fonction $K(x)$, appelée fonction de poids, est bien établie pour certains cas particuliers [52]. L'avantage est qu'elle ne nécessite qu'un seul calcul de structure.

Mais ces techniques analytiques sont limitées à des géométries et des chargements simples où les dimensions sont infinies. Pour des cas réels plus complexes, nous faisons appel à des techniques expérimentales ou numériques. Les méthodes expérimentales ne seront pas abordées dans ce mémoire car l'objectif de ce travail est l'élaboration d'un outil numérique.

La première méthode des techniques numériques repose sur l'expression des contraintes utilisant la fonction d'Airy et les potentiels complexes ϕ et χ (cf annexe A). Nous introduisons la singularité des contraintes en utilisant des termes en \sqrt{z} dans l'expression de la solution aux équations de l'élasticité. Pour certains problèmes plans infinis avec des conditions particulières de symétrie et de contrainte à l'infini, il y a une relation entre ϕ et χ . Ces problèmes sont résolus en fonction d'une seule fonction, notée par Westergaard Z , et d'une constante qui dépend du tenseur des contraintes à l'infini. En utilisant des développements en série pour la fonction Z et en vérifiant les conditions aux limites avec ces développements, il est possible d'extraire les parties singulières auxquelles correspondent les FIC.

Méthodes numériques

Les méthodes numériques sont d'autres méthodes de calcul utiles pour des géométries complexes. Les expressions des FIC proviennent alors soit d'une formulation en contrainte ou en déplacement, soit d'une formulation globale provenant des calculs de J ou G .

En s'appuyant sur la connaissance du champ des contraintes et des déplacements fournie par un calcul numérique, les FIC sont évalués par extrapolation du champ des contraintes ou des déplacements lorsque r tend vers 0 (cf expressions (1.11)). L'extrapolation en fonction des contraintes est moins précise que celle en fonction des déplacements car les contraintes sont évaluées aux points d'intégration et non aux noeuds. Cette méthode est très efficace pour des techniques utilisant les distributions continues de dislocations. De plus, elle a l'avantage de distinguer les modes I et II. Mais pour des méthodes de type éléments finis (présentée section 2.2.2), elle nécessite un maillage explicite de la fissure et donc des éléments très fins, de façon à bien représenter les forts gradients en pointe de fissure. Des éléments spéciaux, de type Barsoum [8], peuvent être utilisés en pointe de fissure. Mais cette méthode reste dépendante du maillage et des variations très importantes qui apparaissent sur les valeurs des contraintes en pointe. Par conséquent des méthodes plus globales sont préférables.

En s'appuyant sur la relation existant en élasticité linéaire entre J , G et les FIC, l'évaluation d'intégrales est alors considérée comme un moyen de déterminer plus précisément les FIC. Nous allons présenter les méthodes de calcul des intégrales J et G .

Le calcul de G et J

Il est nécessaire d'évaluer qu'une seule des deux quantités (G et J) pour les problèmes plans élastiques, du fait de l'existence de la relation (1.19). Nous allons donc présenter les méthodes de calcul pour l'une ou l'autre de ces quantités sans faire de distinction "significative".

La propriété d'indépendance au contour d'intégration (cf. section 1.1.2) permet le calcul direct de ces quantités en se plaçant assez loin de la pointe de la fissure, de façon à ne pas faire intervenir les singularités.

La méthode par calcul de l'avancée réelle de la fissure

La méthode par calcul de l'avancée réelle de la fissure ([16]) considère un problème à force imposée, et calcule l'évolution de l'énergie élastique pour une petite extension de fissure Δa . La quantité G est alors égale à $\frac{\Delta W}{\Delta a}$. Dans la pratique, deux calculs élastiques successifs sont effectués à partir d'un même maillage mais sur lequel un ou plusieurs noeuds ont été relâchés en fond de fissure pour le second calcul. Cette méthode a l'avantage de bien s'adapter aux codes. Cependant, elle nécessite un maillage fin en pointe de fissure et est très coûteuse en temps de calcul.

La méthode de l'extension virtuelle de la fissure

La méthode de l'extension virtuelle de la fissure introduite par Hellen [41, 78] établit la quantité G comme l'opposée de la variation de l'énergie potentielle suite à l'extension virtuelle de la longueur de la fissure. Le processus d'extension de la fissure est obtenu en déplaçant les points nodaux (cf. figure 1.8) au lieu d'annuler les composantes de traction nodale à la pointe de la fissure, comme c'était le cas pour la méthode du calcul par avancée réelle de la fissure. Cette modification du front implique une perturbation des champs induisant une variation de l'énergie potentielle. Cette extension virtuelle perturbe aussi la matrice de raideur du problème. Pour éviter des temps de calculs importants, des stratégies de translation d'une zone restreinte du maillage ont été mises en place, ce qui induit un changement localisé dans la matrice de raideur. Malgré tout cette approche nécessite un maillage fin en pointe de fissure comme la précédente.

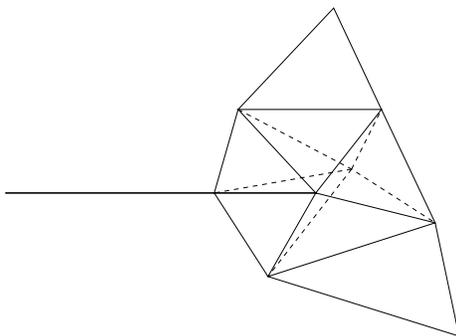


FIG. 1.8 – Déplacement de la pointe de la fissure

La méthode $G\theta$

Une autre méthode bien connue est la méthode $G\theta$ développée initialement par Desuynder [23] et à laquelle des améliorations ont été apportées [93, 94]. Elle consiste à calculer G par dérivation de l'énergie potentielle. L'intégration se fait alors sur une couronne entourant la pointe sans la contenir, et non pas sur un contour (cf. figure 1.9). Les frontières de cette couronne coïncident avec les côtés des éléments, pris suffisamment loin du fond de fissure pour bénéficier d'une bonne approximation de la solution. L'intégration numérique s'effectue sur les points de Gauss des éléments, renforçant encore la précision du calcul. Pour déterminer la variation de l'énergie potentielle totale, une application F^ϵ est introduite. Elle représente une perturbation géométrique infinitésimale ϵ , au voisinage du front de fissure, et se définit pour tout point M du domaine par l'expression :

$$F^\epsilon(M) = M + \epsilon\theta(M), \quad (1.26)$$

où le champ θ , défini sur le domaine, représente la cinématique virtuelle du mouvement. Il vérifie les propriétés suivantes :

- θ est parallèle au plan de fissure,
- le support de θ est limité à un voisinage de la fissure où aucune force n'est appliquée,
- $\int \text{div}(\theta) = 1$.

Le champ θ est appelé le champ d'extension virtuelle. En pratique, dans la couronne, ce champ varie continûment de $(1,0)$ à $(0,0)$, de l'intérieur vers l'extérieur. La couronne délimite un domaine contenant le front, dans lequel le champ θ est constant et vaut $(1,0)$. A l'extérieur de la couronne le champ est nul. La variation de l'énergie potentielle totale $\frac{\Delta W_p}{\Delta a}$ par rapport à l'allongement virtuel de la fissure est obtenue par passage à la limite de $\frac{W_p^\epsilon - W_p}{\epsilon}$ lorsque ϵ tend vers 0, et l'expression de G s'exprime par la relation :

$$G = \int \text{Tr}(\sigma \nabla U \nabla \theta) d\Omega - \frac{1}{2} \int \text{Tr}(\sigma \nabla U) \cdot \text{div} \theta d\Omega. \quad (1.27)$$

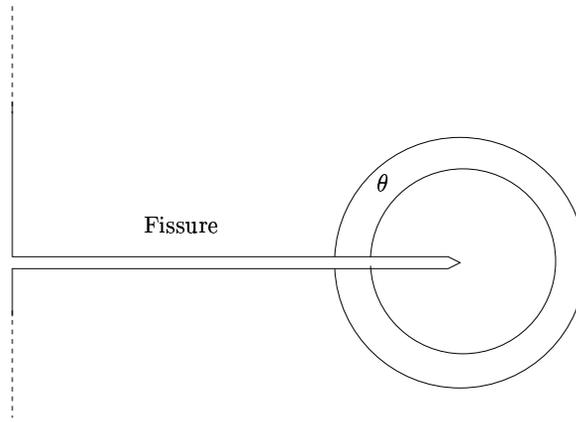


FIG. 1.9 – Définition de la couronne utilisée dans la méthode $G\theta$

La méthode de l'intégrale de domaine

La méthode de l'intégrale de domaine introduite par Moran et Shih en 1987 [62, 87, 71] a permis d'améliorer le calcul de G et J , en utilisant une forme d'intégrale sur le domaine intérieur du contour Γ plutôt qu'une intégrale sur le contour lui-même. Cela permet de lisser les oscillations parasites qui affectent la solution numérique et d'augmenter la précision de la solution estimée. Pour illustrer la méthode, considérons l'intégrale I sur le contour fermé de la figure 1.7, dont l'intégrande est celui de l'intégrale de l'équation (1.16) pondéré par une fonction q (en référence aux propriétés du champ θ introduit dans la méthode $G\theta$),

$$I = \int_{\Gamma} (W \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1}) m_j q ds, \quad (1.28)$$

avec m la normale extérieure au contour fermé Γ qui vaut n sur Γ_1 et $-n$ sur Γ_2 . En

choisissant la fonction q telle que

$$q = \begin{cases} 1 & \text{sur } \Gamma_2, \\ 0 & \text{sur } \Gamma_1, \\ \text{arbitraire ailleurs,} & \end{cases} \quad (1.29)$$

l'intégrale I se réduit à

$$I = \int_{\Gamma_2} (W\delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1}) m_j ds + \int_{[A+B^+] \cup [B^- A^-]} (W\delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1}) m_j q ds. \quad (1.30)$$

En considérant les faces libres d'efforts, le dernier terme s'annule ($m_1 = 0$ et $\sigma_{i2} m_2 = 0$, pour tout i). L'intégrale I sur le contour fermé Γ se réduit à l'intégrale sur Γ_2 c'est-à-dire

$$I = \int_{\Gamma_2} (W\delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1}) m_j ds = -J. \quad (1.31)$$

D'autre part, en appliquant le théorème de la divergence à l'intégrale I (équation (1.28)) sur le contour fermé Γ , nous obtenons

$$I = \int_A \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(W\delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) q + \left(W\delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \frac{\partial q}{\partial x_j} \right] dA, \quad (1.32)$$

avec A l'aire comprise à l'intérieur du contour fermé Γ (cf. figure 1.7). En élasticité linéaire, le premier terme de l'intégrande est nul, et (1.31) et (1.32) fournissent alors la forme de domaine de l'intégrale J

$$J = - \int_A \left(W\delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \frac{\partial q}{\partial x_j} dA. \quad (1.33)$$

Lorsque l'hypothèse sur la fissure est levée (surface libre d'efforts), l'équation (1.30) devient

$$I = \int_{\Gamma_2} (W\delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1}) m_j ds - \int_{[A+B^+] \cup [B^- A^-]} \sigma_{i2} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} m_2 q ds, \quad (1.34)$$

car $m_1 = 0$. En utilisant le fait que $T_i^+ = \sigma_{i2}^+ m_2^+$, nous avons

$$I = \int_{\Gamma_2} (W\delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1}) m_j ds - \int_{AB} T_i^+ \left(\frac{\partial u_i^+}{\partial x_1} - \frac{\partial u_i^-}{\partial x_1} \right) q ds, \quad (1.35)$$

et nous retrouvons la quantité indépendante du contour définie dans la section 1.1.2 pour une fissure fermée

$$I - T_1^+(B)(u_1^- - u_1^+)(B) = - (J_\Gamma - T_1^+(A)(u_1^- - u_1^+)(A)). \quad (1.36)$$

En suivant le même raisonnement que précédemment entre (1.36) et (1.32), nous obtenons

$$J_{\Gamma} - T_1^+(A)(u_1^- - u_1^+)(A) = - \int_A \left(W \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \frac{\partial q}{\partial x_j} dA + T_1^+(B)(u_1^- - u_1^+)(B). \quad (1.37)$$

Nous avons ainsi défini une méthode de calcul de l'intégrale J en présence de forces de contact le long des faces de la fissure. Des applications numériques [86, 74, 73, 38] ont montré la grande précision de cette méthode, notamment pour des problèmes où les faces étaient considérées comme libre d'efforts. L'utilisation de cette méthode pour des problèmes de contact interfacial a été effectuée par Dolbow et al [25], mais en prenant l'intégrale J sous sa forme classique (cf. équation (1.16) au lieu de l'équation (1.24)).

Les quantités G et J masquent le caractère local du mode de sollicitation, ne délivrant qu'une information globale du comportement. Il faut alors faire appel à d'autres notions, comme les méthodes de découplage des modes de rupture pour acquérir la connaissance locale des modes de sollicitation en pointe de fissure. Parmi ces méthodes, la notion d'intégrale d'interaction qui est une formulation à deux champs [97, 86], va être détaillée.

Découplage numérique des modes de rupture

La nécessité de connaître les valeurs des FIC conduit à l'établissement de l'intégrale d'interaction introduite par Yau et al. en 1980 [97]. Deux états d'équilibre indépendants (1) et (2), pour un corps élastique, homogène et isotrope, sont introduits. Les variables associées sont repérées respectivement par les exposants ⁽¹⁾ et ⁽²⁾. L'état (1) est l'état réel qui satisfait les conditions aux limites, et l'état (2) est un état auxiliaire fictif. La superposition des deux états d'équilibre conduit à un nouvel état d'équilibre repéré par l'exposant ⁽⁰⁾. Dans le cas d'une fissure rectiligne et libre d'effort (sans frottement ni contact, hypothèses de l'intégrale J), l'intégrale J de l'état (0) est

$$J^{(0)} = \int_{\Gamma} (W^{(0)} \delta_{1j} - (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) \frac{\partial (u_i^{(1)} + u_i^{(2)})}{\partial x_1}) n_j ds, \quad (1.38)$$

où

$$W^{(0)} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) (\epsilon_{ij}^{(1)} + \epsilon_{ij}^{(2)}). \quad (1.39)$$

En réordonnant les termes, nous obtenons

$$J^{(0)} = J^{(1)} + J^{(2)} + M^{(1,2)} \quad (1.40)$$

avec $J^{(1)}$ et $J^{(2)}$ les intégrales J des états (1) et (2) respectivement. $M^{(1,2)}$ est appelée l'intégrale d'interaction pour les états (1) et (2). Elle est donnée par :

$$M^{(1,2)} = \int_{\Gamma} (W^{(1,2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1}) n_j ds, \quad (1.41)$$

où $W^{(1,2)}$ est l'énergie de déformation d'interaction définie par :

$$W^{(1,2)} = \frac{1}{2}(\sigma_{ij}^{(1)} \epsilon_{ij}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(2)} \epsilon_{ij}^{(1)}). \quad (1.42)$$

En utilisant les équations (1.14) et (1.19) pour l'état (0), et après développement et simplification, nous aboutissons à l'écriture de $J^{(0)}$ sous la forme :

$$J^{(0)} = J^{(1)} + J^{(2)} + \frac{2k}{E}(K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)}). \quad (1.43)$$

La comparaison des deux équations conduit à :

$$M^{(1,2)} = \frac{2k}{E}(K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)}) \quad (1.44)$$

Par conséquent, les FIC de l'état réel (1) peuvent être déterminés en évaluant l'intégrale d'interaction $M^{(1,2)}$ pour un choix judicieux des champs asymptotiques de l'état auxiliaire (2). Nous optons pour les trois états des modes purs asymptotiques fournis par le tableau A.1 dans l'annexe A :

- en mode I pur, $K_I^{(2)} = 1$, $K_{II}^{(2)} = 0$, $K_{III}^{(2)} = 0$, détermine $K_I^{(1)}$ en terme d'intégrale d'interaction par la relation :

$$K_I^{(1)} = \frac{E}{2k} M^{(1),\text{modeI}}, \quad (1.45)$$

- en mode II pur, $K_I^{(2)} = 0$, $K_{II}^{(2)} = 1$, $K_{III}^{(2)} = 0$, détermine $K_{II}^{(1)}$ en terme d'intégrale d'interaction :

$$K_{II}^{(1)} = \frac{E}{2k} M^{(1),\text{modeII}}. \quad (1.46)$$

- en mode III pur, $K_I^{(2)} = 0$, $K_{II}^{(2)} = 0$, $K_{III}^{(2)} = 1$, détermine $K_{III}^{(1)}$ en terme d'intégrale d'interaction :

$$K_{III}^{(1)} = \frac{E}{2k} M^{(1),\text{modeIII}}. \quad (1.47)$$

Remarque :

Avec contact et frottement, les résultats énoncés restent valables en considérant la quantité de l'équation (1.24) à la place de J seule.

Les grandes familles de calculs permettant de définir les grandeurs caractéristiques K_i , G et J ont été présentées. Nous abordons maintenant leur utilisation dans le contexte de la fissuration en fatigue.

1.2 Propagation de fissure de fatigue

L'application de la MELR à la fatigue date des années 50. La prévision de la croissance des fissures suppose l'existence d'un défaut de taille "macroscopique", et se place donc après la phase d'amorçage des microfissures, phase qui n'est pas décrite par la MELR.

Pour prévoir l'évolution des fissures dans une structure soumise à des sollicitations de fatigue, il faut pouvoir résoudre un problème mécanique dans lequel les données sont constituées par la géométrie de la structure, la configuration de la fissure initiale, l'histoire des efforts appliqués, la loi de comportement à la déformation, la loi de fissuration du matériau considéré.

Le dimensionnement d'une structure en fatigue repose sur la connaissance des sollicitations appliquées. Celles-ci peuvent être uniaxiales (une seule direction principale non nulle, fixe dans le temps, σ_1), biaxiales (deux directions principales non nulles, fixe dans le temps, σ_1 et σ_2), ou multiaxiales (une ou plusieurs directions principales non nulles, mais variables dans le temps). Elles engendrent des champs de contraintes qui peuvent avoir une évolution spatiale et/ou temporelle.

Dans le cas d'un champ de contraintes uniaxial avec une évolution temporelle, nous définissons l'amplitude maximale, σ_{max} , l'amplitude minimale, σ_{min} , la valeur moyenne, σ_m , de la contrainte au cours d'un cycle. Nous définissons aussi le rapport $R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = \frac{K_{min}}{K_{max}}$ et la composante alternative $\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$.

Dans le cas de champs de contraintes multiaxiaux, nous distinguons les champs à amplitude constante et ceux à amplitude variable dans le temps. Pour une évolution temporelle de l'amplitude, les composantes du vecteur contrainte peuvent varier indépendamment pendant le cycle de chargement. Nous introduisons alors la notion de champs de contraintes non proportionnels qui décrit le déphasage temporel des contraintes. Pour un chargement proportionnel, le rapport $\frac{\sigma_1(t)}{\sigma_2(t)}$ est constant (les maximums sont atteints en même temps) en opposition à un chargement non proportionnel, où ce rapport est variable.

Pour un temps fixé t_n , la propagation de fissure classique pose les questions suivantes :

- la fissure va-t-elle se propager ?
- si oui, dans quelle direction et à quelle vitesse ?

Les critères de seuil de propagation établissent si le défaut va se propager ou non. Les critères de direction de propagation estiment la direction suivant laquelle le défaut va croître, et les lois de propagation donnent des valeurs de vitesse de propagation du défaut.

Pour un problème de fatigue, le calcul consiste à trouver la relation reliant les configurations successives des fissures à l'histoire des sollicitations. Les modèles qui décrivent la propagation doivent tenir compte des paramètres qui la conditionnent et qui agissent au niveau :

- de la cinétique,
- du chemin de propagation et
- des conditions de chargement.

Nous allons donc aborder ses trois éléments de base pour l'analyse de la propagation de

fissure de fatigue. Tout d'abord, les lois de propagation vont être exposées.

1.2.1 Lois de fissuration par fatigue

Il existe un ensemble de relations dans la littérature qui relie l'avancée de la fissure par cycle à des paramètres caractéristiques du chargement.

En 1963, Paris et Erdogan [77] postulent que le FIC K_I suffit à rendre compte de l'état des contraintes en pointe de fissure et proposent une loi :

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_I)^n, \quad (1.48)$$

avec $\Delta K_I = K_{I,max} - K_{I,min}$ l'amplitude du FIC en mode I, C et n des constantes caractéristiques du matériau et de l'environnement considéré (constantes déterminées par des expériences de base sur des éprouvettes CT). Très simple dans son application, cette loi est la plus utilisée en fatigue et décrit le comportement de la fissure dans la région II de la figure 1.10. Elle n'est cependant pas apte à décrire toute la courbe de fissuration, notamment près du seuil de fissuration ΔK_{th} (région I) et de la rupture K_c (région III). Des lois correctives ont été formulées pour rendre compte des deux asymptotes de la courbe de la figure 1.10 (certaines sont rapportées dans [55]). De plus, cette relation a été modifiée pour intégrer l'influence de différents paramètres comme le rapport R , la fréquence de sollicitations, la sollicitation moyenne, ... D'autres relations basées sur la notion de l'ouverture du fond de fissure noté CTOD (crack tip opening displacement), de dissipation d'énergie, ... ont été formulées et sont toujours utilisées [79].

Ces lois ont été étendues aux sollicitations en mode mixte. La notion de ΔK_I est alors élargie par l'introduction de la notion de ΔK_{eff} , une combinaison des modes impliqués selon la nature du chargement (biaxial, multiaxial), dont l'expression générale est

$$\Delta K_{eff} = (\Delta K_I^m + A \Delta K_{II}^n)^p, \quad (1.49)$$

dont les constantes m , n , A et p sont à définir en fonction du matériau et des sollicitations. Les lois résultantes de cette utilisation ont été établies sous sollicitations périodiques et l'effet de la zone plastique en pointe de fissure est négligée. Cela suppose implicitement que les effets de surcharge ne sont pas pris en compte. Par conséquent, ces lois phénoménologiques ne sont donc valables que dans le domaine de variation des paramètres (K_I , R , ...) couvert par les essais. Il faut donc que ce domaine soit le plus proche de celui du problème réel.

La connaissance de lois de propagation n'est cependant pas suffisante. Le chemin de propagation est aussi une donnée nécessaire. Une des difficultés est la prévision de la direction de fissuration au cours de la propagation. Lorsque la direction du chargement varie dans le temps, ou lorsque la direction initiale de la fissure est non compatible avec le chargement 1.11, la fissure va bifurquer (changer de direction). Nous allons donc énoncer des critères de propagation de fissure en distinguant ceux s'appliquant à des chargements proportionnels de ceux s'appliquant à des chargements non proportionnels.

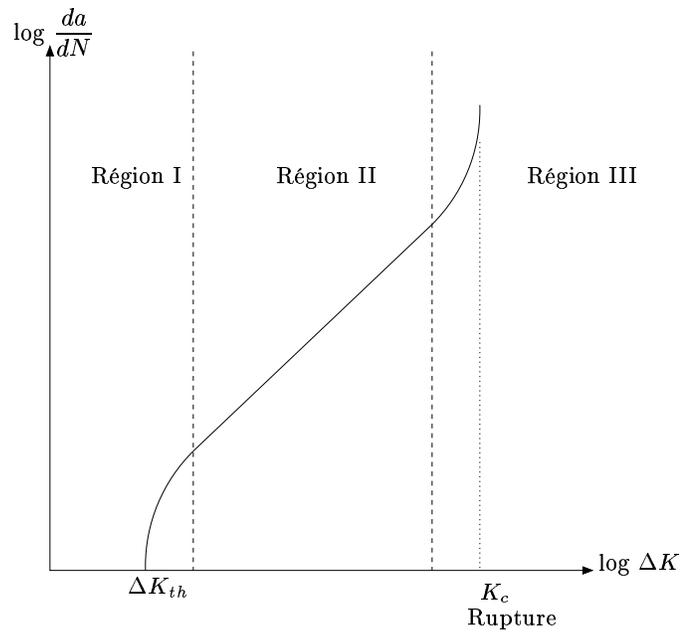


FIG. 1.10 – Allure générale du taux d'accroissement d'une fissure, $\frac{da}{dN}$, en fonction de ΔK (écart entre les FIC extrêmes d'un cycle de chargement) pour une sollicitation en mode I

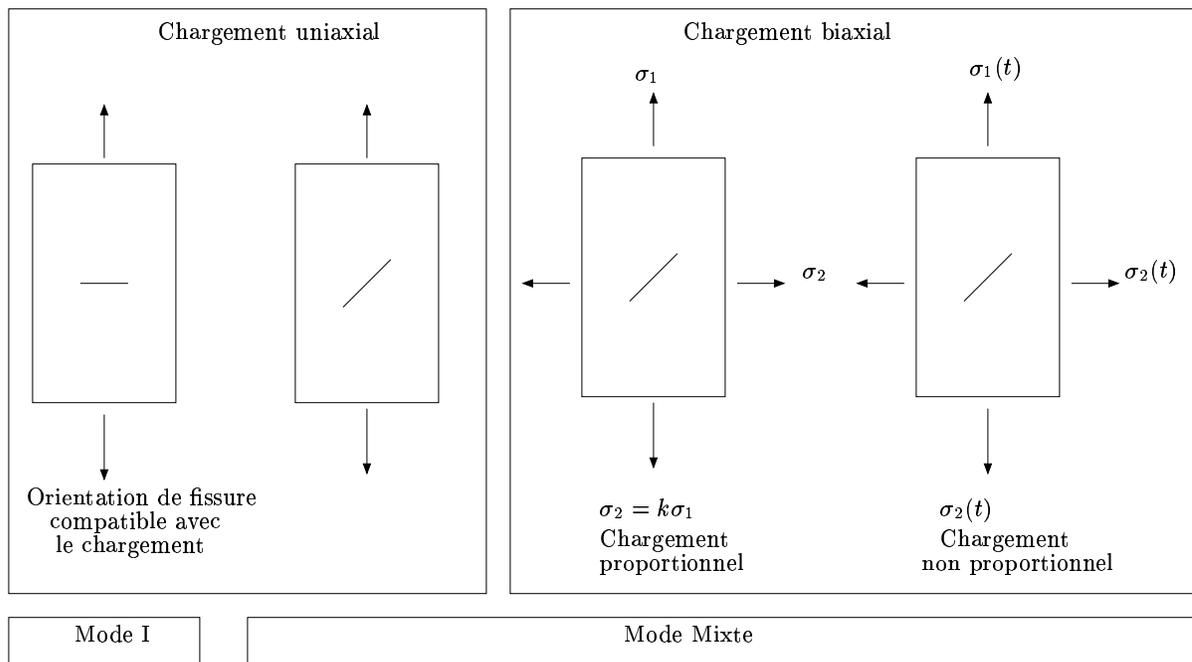


FIG. 1.11 – Quelques configurations fissure/chargement impliquant un mode mixte

1.2.2 Critères de direction de propagation pour des chargements proportionnels

Les essais réalisés pour des conditions de chargements proportionnels induisant un mode mixte ont montré que la pointe de la fissure bifurquait dans la direction la conduisant à retrouver une sollicitation en mode I. A partir de ces constatations phénoménologiques, des critères ont été proposés. Nous allons présenter les différents critères établis suivant cette approche.

Critère d'Erdogan et Sih

En 1963, Erdogan et Sih [33] proposent un critère prenant en compte un mode mixte I et II. Dans le cas de problèmes plans, la fissure se propage dans la direction θ_0 pour laquelle la contrainte tangentielle $\sigma_{\theta\theta}$ (appelée aussi la contrainte circonférentielle) est maximale et la contrainte de cisaillement $\sigma_{r\theta}$ est nulle (cf. figure 1.4), ce qui revient à résoudre :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} < 0 \end{cases} \quad (1.50)$$

A partir de l'expression asymptotique des contraintes donnée par Westergaard (cf tableau A.1 de l'annexe A), nous obtenons l'équation donnant l'angle de propagation de la fissure dans le système de coordonnées en pointe de fissure :

$$K_I \sin \theta_0 + K_{II}(3 \cos \theta_0 - 1) = 0 \quad (1.51)$$

d'où finalement :

$$\theta_0 = 2 \arctan \left[\frac{1}{4} \left(\frac{K_I}{K_{II}} - \text{sign}(K_{II}) \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2 + 8} \right) \right] \quad (1.52)$$

Pour une sollicitation uniquement en mode I, ce critère prévoit une propagation coplanaire ($\theta_0 = 0^\circ$), tandis que pour une sollicitation uniquement en mode II la fissure bifurque selon un angle $\theta_0 = 70^\circ 5$. Nous constatons aussi que $\sigma_{\theta\theta}$ est maximale dans la direction θ_0 pour laquelle $\tau_{r\theta}(\theta_0) = 0$.

Le seuil de propagation associé établit que la fissure se propagera lorsque

$$\cos \frac{\theta_0}{2} \left(K_I \cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta_0 \right) \geq K_{Ic} \quad (1.53)$$

avec θ_0 vérifiant la relation précédente.

Cette approche est basée sur l'hypothèse a priori d'un mécanisme de fissuration en mode I ($\tau_{r\theta}(\theta_0) = 0$), c'est-à-dire que la fissure se propagera dans la direction où le mécanisme de fissuration en mode I est le plus important. Cette hypothèse permet néanmoins

de restituer un comportement cohérent avec les essais expérimentaux. Ceci peut-être expliqué par le fait que le mode d'ouverture est le mode de propagation le plus rencontré lors des essais uniaxiaux ou biaxiaux. Mais cette hypothèse peut-être mise en défaut en présence d'un chargement où un mode II pur apparaît au cours d'un cycle [75].

Le critère MSS (Maximum Shear Stress)

Otsuka et al. [75] définissent les quantités $K_\sigma = \sigma_{\theta\theta}\sqrt{2\pi r}$ et $K_\tau = \tau_{r\theta}\sqrt{2\pi r}$, quantités "équivalentes" aux FIC mais dans le repère local de la fissure. Ils énoncent trois conditions critiques de propagation relatives aux trois conditions de chargement

– en traction,

$$\max K_\sigma(\theta) = \text{constante} = K_{Ic} \quad (1.54)$$

– en cisaillement,

$$\max K_\tau(\theta) = \text{constante} \quad (1.55)$$

– en mode mixte (I+II),

$$\max K_\sigma(\theta) = \text{constante} = K_{Ic} \quad (1.56)$$

Le critère portant sur K_σ est équivalent à celui d'Erdogan et Sih. Par contre le critère portant sur K_τ permet de décrire la propagation en mode II. Il est appelé critère MSS (Maximum Shear Stress). Des essais de propagation ont été effectués par Otsuka et al. pour différentes fissures sollicitées en mode mixte I + II, pour des éprouvettes en aluminium. Les essais ont confirmé ces critères.

Pour pallier la présence d'un chargement où un mode II apparaît au cours d'un cycle, Sih a suggéré un autre critère de propagation de fissure basé sur des considérations énergétiques.

Le critère de Sih dit critère de la densité minimale d'énergie de déformation

Toujours en mode mixte I, II, III, le critère de Sih (1974) [89, 52, 9] est fondé sur la densité d'énergie de déformation ou d'énergie élastique, $W(\epsilon_{ij})$. La trajectoire de la pointe de la fissure s'identifie au lieu des points de la structure possédant la densité maximale d'énergie élastique. Le facteur de densité d'énergie de déformation S est défini par :

$$S = r \frac{dW}{dV} \quad (1.57)$$

où r est la distance depuis le front de la fissure, et $\frac{dW}{dV}$ la fonction de densité d'énergie de déformation telle que :

$$\frac{dW}{dV} = \frac{1 + \nu}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \nu(\sigma_x + \sigma_y)^2 + 2\tau_{xy}^2) \quad (1.58)$$

Nous utilisons la forme asymptotique de S :

$$S = \frac{8\mu E}{1 + \mu} (a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2 + a_{33}K_{III}^2) \quad (1.59)$$

avec $k = 3 - 4\nu$ en déformation plane et $\frac{3 - 4\nu}{1 + \nu}$ en contrainte plane, et

$$a_{11} = (k - \cos \theta)(1 + \cos \theta), \quad (1.60)$$

$$a_{12} = (2 \cos \theta - k + 1) \sin \theta, \quad (1.61)$$

$$a_{22} = (k + 1)(1 - \cos \theta) + (1 + \cos \theta)(3 \cos \theta - 1), \quad (1.62)$$

$$a_{33} = 4. \quad (1.63)$$

L'instabilité se produit lorsque la densité d'énergie de déformation dans la direction (θ_0, ϕ_0) atteint la valeur critique S_c caractéristique du matériau. Cette valeur s'obtient en considérant le cas limite du mode I pur pour lequel le critère $S = S_c$ doit s'identifier au critère $K_I = K_{Ic}$, d'où la valeur :

$$S_c = \frac{1 - \nu}{4\pi\mu} K_{Ic}^2. \quad (1.64)$$

Les angles θ_0 et ϕ_0 définissent la direction de propagation obtenue par le critère de Sih, critère qui repose sur les deux hypothèses suivantes :

- la propagation de la fissure se fait dans la direction de densité d'énergie de déformation minimale, par conséquent elle est définie par les angles θ_0 et ϕ_0 tels que :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)_{\theta=\theta_0} = 0 \\ \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)_{\phi=\phi_0} = 0 \end{cases} \quad (1.65)$$

- la fissuration subcritique se fait de telle sorte que le front de fissure suive les lignes d'énergie de déformation $\frac{dW}{dV}$ constante.

Ce critère a l'avantage d'être simple à utiliser et peut être appliqué à une fissure en 3D. Mais il manque de sens physique et ne conduit pas à des résultats satisfaisants. En effet, d'après l'étude faite par Sih sur une fissure elliptique, en présence de mode III appréciable, ce critère ne rend pas bien compte des discontinuités du front de la fissure provoquées par l'extension. D'autre part, il ne rend pas compte de l'influence du rapport R défini par $\frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$.

Les critères qui viennent d'être énumérés, tiennent compte de l'état des contraintes en pointe de fissure. Ils peuvent être qualifiés d' "explicites". Nous allons présenter d'autres critères basés sur les champs en pointe d'une extension virtuelle ou infinitésimale de fissure. Ils seront qualifiés d' "implicites" (cf figure 1.12).

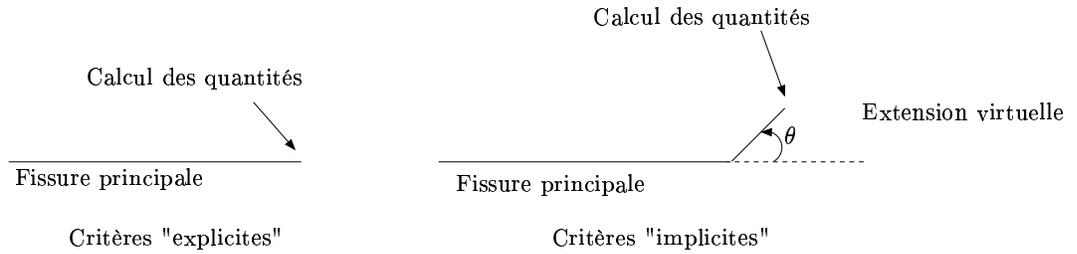


FIG. 1.12 – Notion de critères explicites/implicites

Le critère du taux de restitution d'énergie maximal [60]

Ce critère est une extension du critère de Griffith, applicable aux problèmes plans. Parmi toutes les extensions virtuelles de fissure cinématiquement admissibles et de même longueur, l'accroissement réel est celui qui maximise le taux de restitution d'énergie G (au bout de cette extension). Il y a rupture lorsque G_{max} atteint une valeur critique G_{cr} . Les résultats obtenus sont peu différents de ceux issus du critère de la contrainte normale maximale [61], les hypothèses qui soutendent les deux critères étant identiques.

Critères d'Amestoy, Bui et Dang Van (Modes I et II)

Un autre critère implicite a été proposé par Amestoy en 1979 [3, 95]. Cette fois-ci, l'angle de propagation de la fissure est calculé selon trois critères. Ces critères sont basés sur la définition des FIC en pointe d'un segment infinitésimal. Considérons une fissure donnée et la connaissance des facteurs d'intensité des contraintes en mode I et II, K_I et K_{II} à sa pointe (cf. figure 1.13). Nous prolongeons temporairement la fissure dans la direction de l'angle θ d'un segment de longueur s . Notons $k_1(s, \theta)$, $k_2(s, \theta)$ et $G(s, \theta)$, les FIC et le taux de restitution d'énergie de cette nouvelle géométrie soumise au même chargement proportionnel que la fissure sans prolongement.

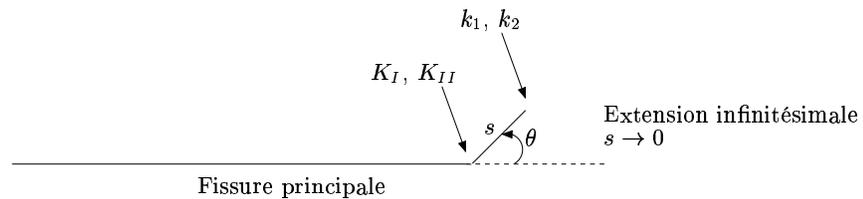


FIG. 1.13 – Description de l'extension de fissure et des FIC associés

Grâce aux potentiels complexes de Muskhelishvili et des techniques de représentation conformes [85, 17], nous connaissons le développement limité des FIC, k_1 et k_2 , à l'extrémité de la fissure branchée. En utilisant les FIC K_I et K_{II} avant branchement et la

contrainte non singulière T , [95, 3] fournit l'écriture :

$$\begin{pmatrix} k_1(s, \theta) \\ k_2(s, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11}(\theta) & K_{12}(\theta) \\ K_{21}(\theta) & K_{22}(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_I \\ K_{II} \end{pmatrix} + T\sqrt{s} \begin{pmatrix} K_{11}^{(1)}(\theta) & K_{12}^{(1)}(\theta) \\ K_{21}^{(1)}(\theta) & K_{22}^{(1)}(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin 2\gamma \\ \cos 2\gamma \end{pmatrix} + O(\sqrt{s}) \quad (1.66)$$

où les coefficients analytiques $K_{ij}(\theta)$ et $K_{ij}^{(1)}(\theta)$ sont reportés en annexe C, et γ est l'angle formé par la première direction principale et l'axe du prolongement de la fissure. En posant :

$$\begin{aligned} k_1^*(\theta) &= \lim_{s \rightarrow 0} k_1(s, \theta), \\ k_2^*(\theta) &= \lim_{s \rightarrow 0} k_2(s, \theta), \\ G^*(\theta) &= \lim_{s \rightarrow 0} G(s, \theta), \end{aligned} \quad (1.67)$$

les critères s'expriment de la façon suivante :

- critère du $(k_1^*)_{max}$: choisir θ_0 tel que $k_1^*(\theta)$ soit maximal
- critère du $(k_2^*)_{nul}$: choisir θ_0 tel que $k_2^*(\theta)$ soit nul
- critère du $(G^*)_{max}$: choisir θ_0 tel que $G^*(\theta)$ soit maximal

Ces trois critères donnent des résultats très voisins. Des essais ont été effectués pour des fissures inclinées sous chargement biaxial, avec un rapport $R = 0.1$ [95, 3]. Cependant, la dispersion expérimentale n'a pas permis de valider ces critères par rapport à celui d'Erdogan et Sih, qui, lui, utilise l'état des contraintes avant branchement.

Les critères explicites et implicites qui viennent d'être énoncés permettent d'obtenir des prévisions en accord avec les essais, sous chargement uniaxiaux, biaxiaux proportionnels. A plusieurs reprises ces critères ont été testés et validés pour des chargements proportionnels. Dans ce cas, il est possible de définir sans ambiguïté, d'après un de ces critères, une direction de propagation au cours d'un cycle de chargement.

Nous allons à présent présenter des critères pour les chargements non proportionnels.

1.2.3 Critères de direction de propagation pour des chargements non proportionnels

En présence de chargement non proportionnel, les critères précédents ne sont plus adaptés. En effet, pour un chargement proportionnel, le maximum du paramètre du critère est atteint pour une même valeur de θ à chaque étape du cycle. Le choix de la direction est alors unique (cf. figure 1.14). Or cette propriété n'est plus vérifiée en présence de non proportionnalité. La direction θ pour laquelle le maximum est atteint varie à chaque étape du cycle et donc, la direction n'est pas unique.

Pour ce type de chargement, peu de travaux ont été effectués sur la détermination de la direction de propagation de fissures de fatigue. Nous présentons les quelques résultats

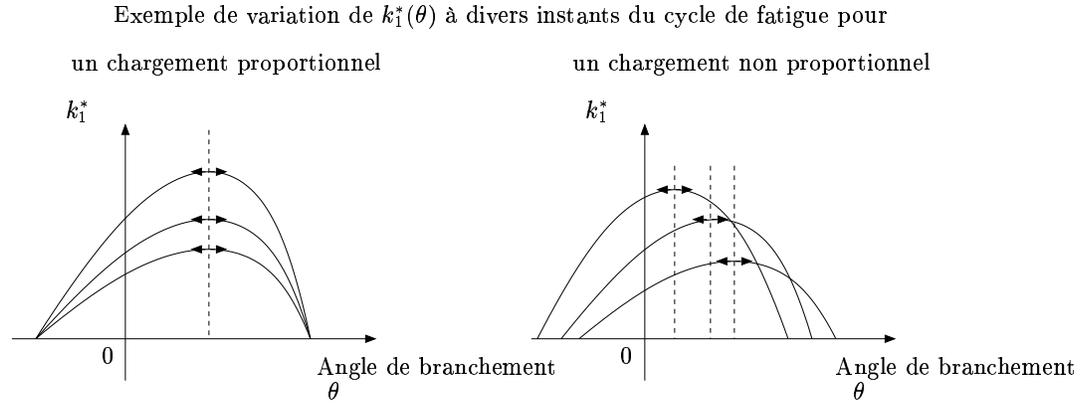


FIG. 1.14 – Illustration des différences de comportement entre chargement proportionnel et non proportionnel en considérant les évolutions du FIC k_1^* [27]

issus des articles [95, 43, 24], pour des essais effectués sur des fissures inclinées centrales et sollicitées en mode mixte par un chargement biaxial non proportionnel.

En partant des travaux d'Amestoy [3], Hourlier et al. [43] proposent trois critères définissant un maximum sur l'espace et le temps et en accord avec les essais. Ces trois critères définissent la direction de propagation θ_0 par les définitions suivantes :

- critère 1 ($k_{1,max}^*$) : θ_0 est telle que $k_1^*(\theta, t)$ atteint son maximum absolu (espace et temps),
- critère 2 ($\Delta k_{1,max}^*$) : θ_0 est telle que $\Delta k_1^*(\theta) = \max_t k_1^*(\theta, t) - \min_t k_1^*(\theta, t)$ est maximale sur l'espace,
- critère 3 ($\frac{da}{dN}_{max}$) : θ_0 est telle que la vitesse de fissuration, notée $\frac{da}{dN}$, atteint son maximum sur l'espace ($\frac{da}{dN}$ dépendant de $k_1^*(\theta, t)$ et $k_2^*(\theta, t)$),

avec $k_1^*(\theta, t)$ et $k_2^*(\theta, t)$ FIC à la pointe d'une longueur infinitésimale d'extension de fissure, obtenus à partir de $K_I(t)$ et $K_{II}(t)$ FIC de la pointe de la fissure principale au cours du cycle de chargement, par les expressions [3] :

$$k_1^*(\theta, t) = K_{11}(\theta)K_I(t) + K_{12}(\theta)K_{II}(t) \quad (1.68)$$

$$k_2^*(\theta, t) = K_{21}(\theta)K_I(t) + K_{22}(\theta)K_{II}(t). \quad (1.69)$$

Pour l'utilisation de ces critères, à chaque étape t_n du cycle et pour tous les θ , il faut calculer $k_1^*(\theta, t)$ et $k_2^*(\theta, t)$. Ensuite, suivant le choix du critère, la direction de propagation est celle qui maximise le paramètre du critère.

Ces critères ont l'avantage de prendre en compte l'aspect non proportionnel du chargement. Ils ont été comparés à des résultats expérimentaux d'essais de fissuration [24].

La validation du critère 3 a été effectuée pour un mode I cyclique et un mode III statique. Par contre en mode I cyclique avec un mode II statique, les angles de branchement et les vitesses observées ne sont pas conformes aux grandeurs calculées. L'auteur attribue ce fait au phénomène de refermeture de la fissure, mais sans analyse complète du problème.

D'autres essais de bifurcation sous chargement proportionnels (mode I cyclique avec un mode II statique) ont été conduits sur deux matériaux présentant une réponse différente au rapport de charge R . D'après les résultats expérimentaux, la direction de branchement est mieux prédite par le critère 2 pour un matériau à faible sensibilité au rapport R , et les résultats fournis par le critère 3 restent acceptables. Par contre le critère 1 ne rend pas compte des résultats expérimentaux. Pour un matériau dont la propagation de fissure en mode I est très influencée par le rapport R , la meilleure estimation de la direction de bifurcation est celle fournie par le critère 3.

L'utilisation de ce critère pour un chargement de fatigue tribologique de type fretting fatigue [55, 20, 56, 6] a fournit des estimations de direction en accord avec les essais expérimentaux.

Par conséquent, en présence d'un mode mixte induit par un chargement non proportionnel, trois critères sont utilisables. D'autre part, le rôle de refermeture de fissure semble influencer la direction de propagation, de sorte que le phénomène de branchement ne peut plus être considéré comme purement mécanique [24]. Le frottement entre les faces de la fissure peut donc jouer un rôle important dans l'extension de la fissure (surtout pour une propagation de fissure en mode mixte). Il est donc essentiel de considérer et d'établir les conditions de contact le long des faces de la fissure pour ce type de chargement.

A présent définissons la notion de fatigue de contact et identifions les caractéristiques d'un tel chargement.

1.3 La fatigue tribologique

Dans cette partie, nous présentons la fatigue tribologique dans le cadre de la mécanique élastique linéaire de la rupture. Le but de ces études est de comprendre les facteurs complexes qui sont liés à la fatigue de contact en comparaison avec la fatigue conventionnelle.

1.3.1 Les spécificités des sollicitations en fatigue tribologique

La première spécificité des sollicitations en fatigue tribologique est phénoménologique [5]. En effet, la valeur du coefficient de frottement local (dans l'aire de contact en surface) est une valeur difficilement quantifiable ainsi que son évolution temporelle. Elle conditionne l'évolution spatiale et temporelle de l'aire de contact (modification des surfaces de contact due à l'usure et au frottement) et l'amplitude des efforts. Ces notions sont difficilement intégrables dans un processus classique de dimensionnement. Les interactions normales et tangentielles requièrent la connaissance d'une loi de frottement.

D'autre part, ce chargement fortement localisé et les valeurs importantes des pressions mises en jeu donnent naissance à des gradients de contrainte très élevés dans une zone confinée sous le contact, de l'ordre de grandeur du MPa au GPa sur quelques microns de profondeur [12].

Cette complexité qui relève de différents phénomènes physiques, chimiques et mécaniques est finalement approximée à l'aide de lois de frottement traduisant les interactions normales et tangentielles.

Une autre spécificité de ces sollicitations est liée à la cinématique imposée. Les sollicitations tribologiques peuvent être de type roulement (déplacement d'une charge normale dans une direction), de type roulement et glissement continu (déplacement d'une charge normale et tangentielle dans une direction), de type fretting (mouvement oscillant de petite amplitude sur la surface caractéristique des liaisons immobiles ou quasistatiques).

Ce chargement complexe engendre des sollicitations en mode mixte (I, II, III), multiaxiales et non proportionnelles, dont l'amplitude est variable [99, 32].

1.3.2 Dégradations survenant en fatigue tribologique

Les dégradations survenant en fatigue de contact sec sont de nature différente englobant l'endommagement, la plasticité, l'usure, l'amorçage et la propagation de fissures [10]. Dans le cadre de ce travail nous nous intéressons principalement à la fissuration. Ekberg [32] établit un bilan concernant la fatigue de contact de roulement des roues ferroviaires. Bien que l'usure soit la cause la plus fréquente derrière des reprofilages des roues et la rupture en fatigue, elle est considérée comme assez inoffensive. La fissuration quant à elle peut conduire à la rupture catastrophique (roue d'un train, par exemple). Elle est issue de différents mécanismes. Normalement l'initiation d'une fissure s'effectue près d'un défaut matériel macroscopique, mais des fissures peuvent aussi s'amorcer en absence de défauts. Uwe et al. [99] illustrent ce point en rapportant des fissures de fatigue tribologique amorcées à la jonction des essieux avec les roues ferroviaires par fatigue en fretting. La forme de ces fissures est semi-elliptique ou semi-circulaire et débouchante à la surface. Concernant les fissures de fatigue sur les rails et certaines fissures sur les roues [32, 99], elles sont répertoriées en deux catégories :

- les fissures dont l'amorçage est relié aux forces de traction très élevées qui engendrent une déformation plastique intense de la surface. Ces fissures se propagent sous l'influence d'un lubrifiant en formant un angle par rapport à la surface dans la direction du mouvement. Elles peuvent s'arrêter après amorçage ou continuer de se propager en branchant vers le bas dans le volume jusqu'à rupture, ou vers le haut pour provoquer un écaillage de l'ordre du cm^2 . Leur longueur peut atteindre 20 mm.
- les fissures de sous-surface initialisées par les contraintes de contact en sous-surface. Généralement les fissures apparaissent à quelques millimètres en dessous de la surface (pour les métaux) où les contraintes de cisaillement sont les plus importantes. Leur propagation est d'abord parallèle à la surface puis bifurque vers la surface.

Ce bilan se généralise à toutes les pièces industrielles soumises à des sollicitations de contact : mécanismes de transmission de charge comme les dents d'engrenage [15], les roulements [67], les turbines [18] ...

Des réseaux de fissures de fatigue ont également été observés [22] sous ces sollicitations.

1.3.3 Ce que le chargement induit sur les fissures

Les champs de contraintes et de déformations engendrés par des sollicitations tribologiques sont donc des champs multiaxiaux non proportionnels spécifiques qui influent fortement le comportement et la propagation des fissures de fatigue qui s'amorcent sous leur effet. Des résultats expérimentaux ont montré qu'un chargement non proportionnel peut réduire la durée de vie en fatigue jusqu'à un facteur 10 [48].

Le mécanisme de propagation est lié à la présence d'un lubrifiant qui pénètre à l'intérieur de la fissure lors des phases d'ouverture et qui amplifie le mode I. Des observations ont montré la géométrie complexe et tridimensionnelle de la fissure qui bifurque dans la profondeur [22, 20] sous ces sollicitations (cf. figure 1.15).



FIG. 1.15 – Illustration de la géométrie tridimensionnelle d'une fissure propagée avec un lubrifiant

Ces sollicitations non conventionnelles induisent un état compressif le long de la fissure, évoluant et introduisant des séquences complexes de traction/compression et de cisaillement. Le contact interfacial doit être pris en compte et nécessite la valeur d'un coefficient de frottement, valeur quasi très difficile à évaluer expérimentalement.

Il est donc essentiel de considérer et de déterminer les conditions de contact le long des faces de la fissure, ce que nous allons faire en abordant les aspects théoriques du contact dans la section suivante.

1.4 Les outils de la mécanique du contact - Approches du contact - Lois de comportement d'interface

Dans les problèmes de mécanique des solides et des structures, il existe trois formes de non-linéarité :

- des non-linéarités de type comportement qui portent sur la loi de comportement du matériau : endommagement, plasticité,
- des non-linéarités de type géométrique qui sont prises en compte dans le cas de grandes déformations ou de grands déplacements,
- des non-linéarités de type contact.

Les conditions locales de contact se traduisent par :

- des conditions de contact unilatéral (conditions de Signorini), qui traduisent les interactions normales des milieux
- des conditions sur les composantes tangentielles, qui traduisent les interactions tangentielles.

Dans cette section, nous allons aborder les notions liées au contact et les formulations existantes sur le sujet. Nous entamons cette présentation par le contact au sens de Signorini, puis nous présentons le problème de contact entre deux corps.

1.4.1 Le contact au sens de Signorini

La loi de contact unilatéral, illustrée dans la littérature par le problème de Signorini (1933), se traduit par 3 conditions. Toujours sous l'hypothèse de petits déplacements, Signorini considère un corps déformable, occupant le domaine Ω de frontière Γ suffisamment régulière telle que $\Gamma = \Gamma_F \cup \Gamma_U \cup \Gamma_C$, en contact avec un obstacle rigide. Γ_C est la zone initiale de contact entre le solide et l'obstacle, Γ_F est une partie de la frontière où les efforts surfaciques sont imposés et Γ_U est une partie de la frontière où les déplacements sont imposés. Les déplacements et les forces de contact en composantes normales et tangentielles sont décomposés sur Γ_C :

$$\begin{aligned} u &= u_N n + u_T, \\ F &= F_N n + F_T, \end{aligned} \tag{1.70}$$

avec n la normale extérieure à Γ_C , comme indiqué sur la figure 1.16, et F la force exercée par le solide rigide sur le corps élastique. Remarquons que u_N et F_N sont des mesures algébriques suivant la direction normale et qu'en trois dimensions, les vecteurs F_T et u_T appartiennent au plan tangent. En deux dimensions u_T représente le glissement.

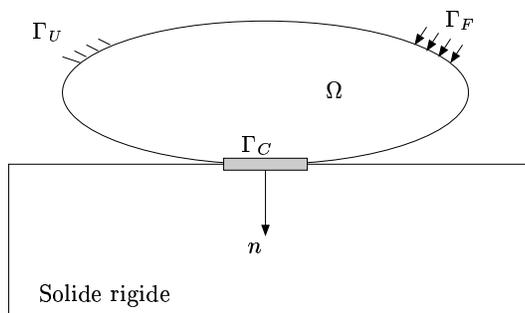


FIG. 1.16 – Problème de Signorini

Pour tout point situé dans l'aire de contact, le contact unilatéral est énoncé par les trois conditions suivantes :

- une condition de non interpénétration de la matière :

$$u_N \geq 0, \quad (1.71)$$

- une condition de compression sur la force normale de contact :

$$F_N \leq 0, \quad (1.72)$$

- une relation de complémentarité liant u_N et F_N :

$$F_N \cdot u_N = 0. \quad (1.73)$$

Concernant cette dernière relation, si le point est en contact alors $u_N = 0$ et $F_N \leq 0$, et si le point quitte le contact $F_N = 0$ et $u_N > 0$, ce qui établit le graphe de la loi de contact unilatéral de la figure 1.17.

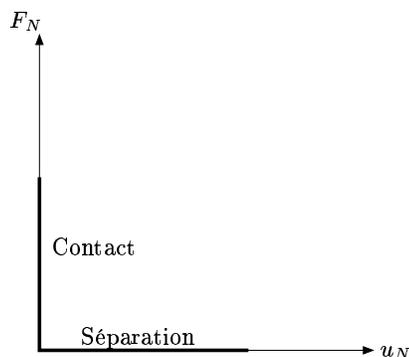


FIG. 1.17 – Graphe de la loi de contact unilatéral

Cette description correspond à celle de deux corps dont les surfaces sont parfaitement lisses. D'autres possibilités sont envisageables. Des lois dites de compliance prenant en compte la présence de rugosités, de lois d'interface complexes, .. peuvent être définies. Pour plus de détails se référer aux travaux de [83].

Cette façon de voir le contact implique que la force de contact tangentielle dans la zone de contact est nulle. Néanmoins cette force tangentielle est non nulle dans la plupart des contacts réels. Il est donc nécessaire d'introduire des lois complémentaires, les lois de frottement.

1.4.2 Lois de frottement

Par définition, une loi de frottement décrit le comportement des deux corps lorsque le contact est maintenu, liant les efforts tangentiels (forces de frottement) sur la zone de

contact et le mouvement relatif des deux corps (glissement). Plusieurs lois de frottement existent, allant de la plus simple à la plus complexe [83, 82]. Nous allons énoncer quelques modèles associés à une approche globale macroscopique des phénomènes de contact et de frottement, dans le cadre d'un contact entre un corps déformable Ω_1 et un corps rigide Ω_2 . Ceci peut tout à fait se généraliser au contact entre deux corps déformables.

Enonçons tout d'abord la plus simple et la plus ancienne.

La loi de frottement de Coulomb (1785)

Elle met en jeu deux notions fondamentales : la notion de seuil et la dépendance à la contrainte normale. Considérons un corps élastique Ω_1 en contact en C avec un corps rigide Ω_2 , comme dans la figure 1.18(a), avec \vec{F} la force exercée par le corps Ω_2 sur Ω_1 . La notion de coefficient de frottement, noté μ , est introduite.

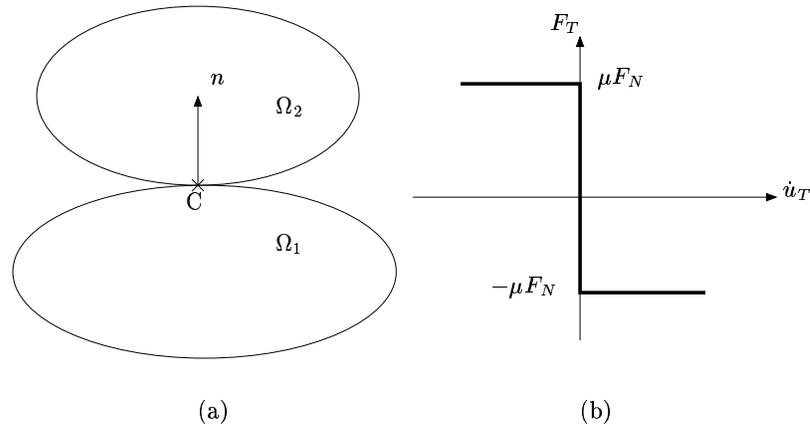


FIG. 1.18 – (a) Définition du point de contact C entre deux corps élastiques. (b) Graphe de la loi de Coulomb

En $C \in \Omega_1$, la loi de Coulomb s'écrit :

$$\| F_T(C) \| \leq \mu(C) |F_N(C)| \quad (1.74)$$

avec

$$\begin{cases} \| F_T(C) \| < \mu(C) |F_N(C)| & \Rightarrow \dot{u}_T(C) = 0 & \text{(adhérence)} \\ \| F_T(C) \| = \mu(C) |F_N(C)| & \Rightarrow \exists \lambda > 0, \dot{u}_T(C) = -\lambda F_T(C) & \text{(glissement)} \end{cases} \quad (1.75)$$

et $\dot{u}_T = \frac{\partial u_T}{\partial t}$ la vitesse de glissement.

Par conséquent, un point de contact glisse lorsque la contrainte tangentielle, i.e. la projection sur le plan tangent de la force de contact en ce point, F_T , atteint ou est supérieure à la valeur $\mu(C) |F_N(C)|$. Sinon, il adhère. Le graphe de cette loi est tracé figure 1.18(b). Notons que tous les paramètres locaux tels que la rugosité entre les deux corps, la température à l'interface, etc ... peuvent être inclus dans la valeur du coefficient de frottement.

Pour des problèmes statiques ou monotones quasi-statiques, la loi de Coulomb relie les forces de frottement et le glissement :

$$\| F_T \| \leq \mu(C) |F_N| \quad (1.76)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \| F_T \| < \mu(C) |F_N| & \Rightarrow u_T = 0 & (\text{adhérence}) \\ \| F_T \| = \mu(C) |F_N| & \Rightarrow \exists \lambda > 0 \quad u_T = -\lambda F_T & (\text{glissement}) \end{cases} \quad (1.77)$$

Le lieu géométrique de l'extrémité du vecteur force de contact a la forme d'un cône, en 2D (figure 1.19(a)) ou en 3D (figure 1.19(b)). Il est appelé le cône de Coulomb. L'enveloppe de ce cône est la surface seuil du glissement dont la définition est à rapprocher de celle de la surface seuil en plasticité.

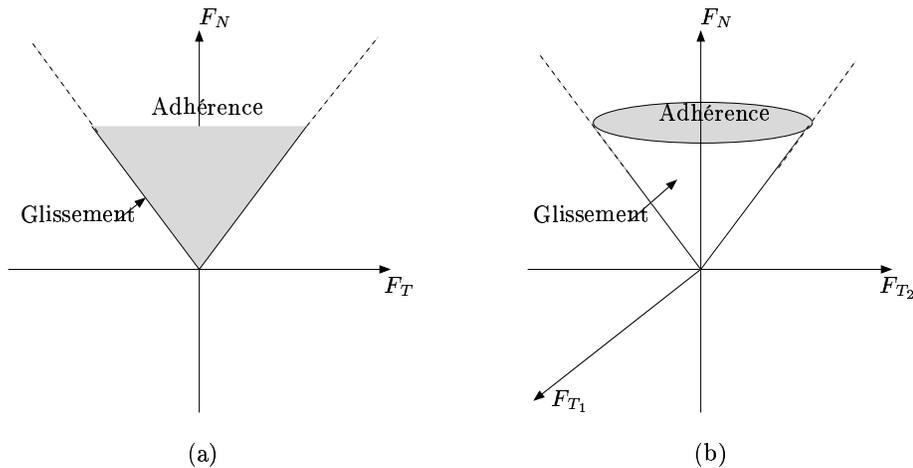


FIG. 1.19 – Cône de Coulomb (a) en 2D, (b) en 3D.

Les inconvénients majeurs de la loi de Coulomb sont

- l'absence de relation biunivoque entre les forces de frottement et la vitesse de glissement,
- le caractère non différentiable de la loi,
- le changement brutal de comportement au passage adhérence/glissement.

Pour pallier ces inconvénients, des lois régularisées [82], dont les graphes sont plus réguliers, ont été proposées, comme celle illustrée figure 1.20.

Enonçons à présent des lois de frottement plus complexes.

La loi de frottement de Coulomb-Orowan ou loi de Coulomb à seuil

Pour les situations fréquentes de mise en forme, l'utilisation de la loi de frottement de Coulomb-Orowan s'avère souvent plus efficace que celle de Coulomb. C'est une loi où

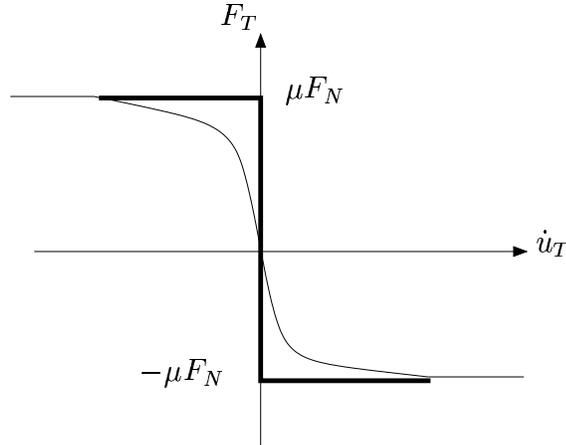


FIG. 1.20 – Régularisation possible de la loi de Coulomb

l'effort tangentiel est limité par la contrainte tangentielle d'écoulement du matériau k :

$$\| F_T \| \leq \min\{\mu|F_N|, k\} \quad (1.78)$$

où μ est le coefficient moyen macroscopique compris entre 0.01 et 0.5.

La loi de frottement de Shaw

Utilisé pour l'étude de problèmes d'emboutissage, ce modèle suppose une dépendance entre la contrainte tangentielle et l'aire de contact réelle A_C . Ceci conduit à une relation du type :

$$\| F_T \| \leq \alpha k \quad (1.79)$$

où α traduit la dépendance avec l'aire de contact effective A_C , et k défini précédemment comme la contrainte tangentielle d'écoulement du matériau.

La loi de frottement de Tresca

Le modèle de Tresca est une loi de frottement à seuil fixe g , fonction de la contrainte d'écoulement du matériau σ_Y :

$$\| F_T \| \leq \mu_m \frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}} = g \quad (1.80)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \| F_T \| < \mu_m \frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}} & \Rightarrow \dot{u}_T = 0 \quad \text{adhérence} \\ \| F_T \| = \mu_m \frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}} & \Rightarrow \dot{u}_T = -\mu_m \frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}} \frac{\dot{u}_T}{\| \dot{u}_T \|} \quad \text{glissement} \end{cases} \quad (1.81)$$

où μ_m est un coefficient de frottement moyen. Son graphe est donné figure 1.21. Le fait que la contrainte normale n'apparaisse pas dans la limite de glissement limite l'utilisation de cette loi.

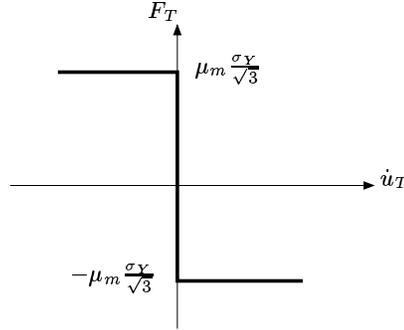


FIG. 1.21 – Graphe de la loi de frottement de Tresca

D'autres modèles de frottement existent, notamment ceux utilisant des coefficients de frottement variables. Une revue détaillée est développée dans les différents articles de Raous [82, 83].

Le choix de ces lois de frottement tient compte du problème de contact à résoudre et des paramètres influant dans le contact. A l'échelle macroscopique, nous cherchons à étudier les champs des contraintes et des déformations dans les solides résultant de leur contact. Par conséquent une loi de frottement de type Coulomb suffit. C'est le choix qui sera fait dans la suite de ce travail.

1.4.3 La formulation mécanique du problème de contact entre deux corps

Dans cette section, nous nous intéressons au contact entre deux corps et au bilan mécanique de ce contact (les résultats énoncés peuvent être retrouvés dans [31, 50, 82]). Cette étape est nécessaire pour la transposition au contact entre les faces de la fissure.

Dans le cadre de l'hypothèse des petites déformations et petits déplacements, les termes d'inertie sont négligés, et les variables d'Euler et de Lagrange sont confondues.

Le contact entre deux corps élastiques Ω_1, Ω_2 , s'établit sur une zone Γ_C supposée connue, notée Γ_{C_1} lorsque l'on se place dans le corps Ω_1 , et Γ_{C_2} respectivement dans Ω_2 . Pour définir ce contact, nous considérons les variables sur Γ_C à l'aide de la normale n_C comme indiqué sur la figure 1.22. Ce vecteur est choisi comme étant la normale extérieure de Γ_{C_1} . En utilisant les notations introduites par l'équation (1.70), les conditions de contact unilatéral sur Γ_C s'écrivent (conformément aux équations établies pour le contact

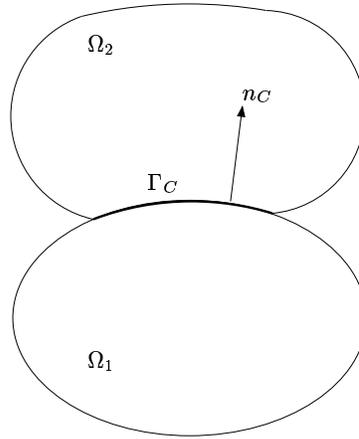


FIG. 1.22 – Illustration du problème de contact entre deux corps

de Signorini, équations (1.71) à (1.73)) :

$$[u_N] \geq 0 \quad (1.82)$$

$$F_N = F_{N_1} = -F_{N_2} \leq 0 \quad (1.83)$$

$$[u_N] \cdot F_N = 0 \quad (1.84)$$

avec pour notation $[u_N] = u_{N_2} - u_{N_1}$, le saut de déplacement normal. L'équation (1.82) représente la non interpénétration des deux corps, (1.83) les efforts normaux en compression et (1.84) est la relation de complémentarité (soit contact, soit décollement).

En l'absence de frottement sur Γ_C , les quantités tangentielles sont définies par les conditions :

$$F_T = F_{T_1} = -F_{T_2} = 0. \quad (1.85)$$

En présence de frottement, nous considérons les conditions d'un contact unilatéral avec un frottement de Coulomb, formulées par :

$$F_N \neq 0 \Rightarrow \text{si } \|F_T\| < \mu|F_N| \text{ alors } [u_T] = 0 \quad (1.86)$$

$$\Rightarrow \text{si } \|F_T\| = \mu|F_N| \text{ alors } \exists \lambda \geq 0, [u_T] = \lambda F_T \quad (1.87)$$

avec pour notation $[u_T] = u_{T_2} - u_{T_1}$, le saut de déplacement tangentiel et F_T l'effort tangentiel de Ω_2 sur Ω_1 .

Dans le cadre d'un contact entre les faces de la fissure, la zone de contact correspond à la fissure elle-même et le champ solution u représente uniquement le champ du corps Ω_1 (cf figure 1.23). Au lieu de Γ_{C_1} et Γ_{C_2} , nous utiliserons Γ_C^+ et Γ_C^- pour représenter chaque face de la fissure, avec n_C le vecteur extérieur unitaire de la face Γ_C^+ .

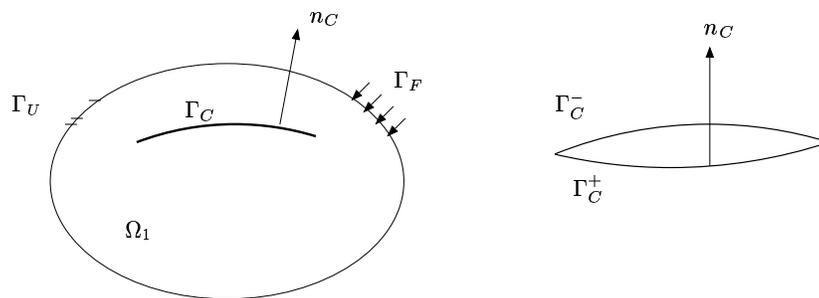


FIG. 1.23 – Données du problème de contact entre les faces d’une fissure

1.5 Conclusion

La MELR fournit des grandeurs caractéristiques, K_i ($i=1,2,3$), G et J , nécessaires à l’analyse du comportement et à la propagation de fissures de fatigue de contact.

Nous avons vu que la prédiction de la propagation d’une fissure se faisait à l’aide de lois de fissuration et de critères pour définir la direction. Ces notions utilisent les grandeurs caractéristiques. D’autre part, le choix d’un critère dépend de la nature du mode de sollicitation présent en pointe de fissure.

La définition des spécificités de la fatigue de contact a mis en évidence que le chargement induisait un champ de contraintes multiaxial, non proportionnel. Ce chargement induit une zone de compression en sous-surface provoquant des cycles complexes de contact entre les faces des fissures.

Il a été souligné que la propagation des fissures de fatigue en mode mixte pouvait être influencée par le phénomène de refermeture. Le frottement entre les faces de la fissure a un rôle important sur la propagation. Nous avons établi les équations modélisant le contact unilatéral entre les faces d’une fissure grâce à la mécanique du contact, ainsi que des lois de frottement. Pour l’élaboration du modèle numérique de comportement de fissures de fatigue, le choix est fait de travailler avec la loi de frottement de Coulomb. La difficulté majeure résidera dans le choix de la valeur du coefficient de frottement.

L’analyse des différents critères existants dans la littérature pour des chargements en mode mixte a montré que les critères classiques établis en chargement proportionnel n’étaient pas applicables en présence d’un chargement de fatigue de contact. Le choix du critère en fatigue de contact s’est donc porté sur ceux d’Hourlier qui définissent des maximums absolus (espace et temps).

Maintenant que l’ensemble des aspects théoriques a été établi, nous pouvons nous diriger vers le choix de méthodes de résolution du problème de fatigue tribologique.

Chapitre 2

RESOLUTION DU PROBLEME DE CONTACT AVEC FROTTEMENT

Sommaire

| | | |
|------------|--|-----------|
| 2.1 | Problème de référence d'une structure fissurée sous sollicitations de contact | 40 |
| 2.2 | Méthodes de discrétisation pour les problèmes de fissuration avec contact et frottement | 42 |
| 2.2.1 | La méthode des distributions continues de dislocation | 42 |
| 2.2.2 | La méthode des éléments finis | 45 |
| 2.2.3 | La méthode des éléments de frontière | 51 |
| 2.2.4 | La méthode des éléments finis étendus (X-FEM) | 52 |
| 2.3 | Stratégies de résolution des problèmes non linéaires d'évolution | 56 |
| 2.3.1 | Les méthodes incrémentales | 56 |
| 2.3.2 | La méthode à large incrément de temps : la méthode LATIN . | 57 |
| 2.4 | Conclusion | 58 |

Dans le chapitre précédent, nous avons choisi de nous placer dans le cadre de la mécanique linéaire élastique de la rupture afin d'étudier le problème d'une structure fissurée sous sollicitations cycliques de contact.

Dans ce chapitre, nous définissons tout d'abord les équations locales du problème de référence. Ensuite nous présentons de façon non exhaustive des familles de méthodes numériques adaptées au traitement du contact interfacial.

Nous effectuerons un bilan des avantages et inconvénients de ces méthodes afin d'introduire la stratégie de discrétisation appliquée au problème de référence.

2.1 Problème de référence d'une structure fissurée sous sollicitations de contact

Le problème que nous avons à résoudre est celui du contact le long des faces d'une fissure appartenant à un corps soumis à des sollicitations de contact cycliques engendrant une "fatigue de contact". Nous considérons un comportement élastique linéaire homogène isotrope dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations. D'autre part, nous négligeons les forces d'inertie et de gravitation par rapport aux autres actions en présence. Finalement, le problème de contact surfacique est découplé du problème de structure fissurée ce qui conduit à considérer les sollicitations de contact comme connues au cours du temps.

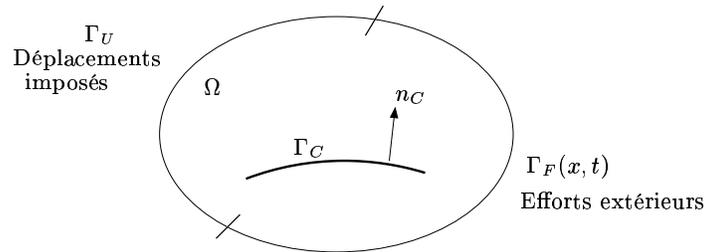


FIG. 2.1 – Problème de référence

La zone potentielle de contact est ici définie par la fissure. Le contact interfacial est modélisé par les équations de contact unilatéral et la loi de frottement de Coulomb portant sur le saut de déplacement $[\omega]$ énoncé section 1.4.3. L'aspect dissipatif du phénomène de frottement nécessite de prendre en compte l'histoire du chargement le long des faces de la fissure, ce qui conduit à une modélisation quasi-statique du problème. Le phénomène de fatigue de contact est alors représenté par une répétition de cycles de chargement, et chaque cycle est défini comme une séquence/succession de pas de chargement.

Les équations et les conditions aux limites du problème

$$\operatorname{div} \sigma(x, t) = 0 \quad \forall (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (2.1)$$

$$\sigma(x, t) = \mathcal{K}\epsilon(x, t) \quad \forall (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (2.2)$$

$$u(x, t) = \bar{U}(x) \quad \forall (x, t) \in \Gamma_U \times [0, T], \quad (2.3)$$

$$\sigma(x, t) \cdot \vec{n} = \bar{F}(x, t) \quad \forall (x, t) \in \Gamma_F(x, t) \times [0, T], \quad (2.4)$$

Les conditions de contact unilatéral sur Γ_C

$$[w_N] := \omega_N^- - \omega_N^+ \geq 0, \quad (2.5)$$

$$F_N := t_N^+ = -t_N^- \leq 0, \quad (2.6)$$

$$F_T := t_T^+ = -t_T^-, \quad (2.7)$$

$$[w_N] \cdot F_N = 0, \quad (2.8)$$

Les conditions de frottement sur Γ_C

$$\|F_T\| < \mu_C |F_N| \Rightarrow \Delta[w_T] = 0, \quad (2.9)$$

$$\|F_T\| = \mu_C |F_N| \Rightarrow \exists \lambda \geq 0, \Delta[w_T] = \lambda F_T. \quad (2.10)$$

Pour ce type de problème d'évolution, nous devons définir une stratégie numérique capable d'appréhender la non linéarité interfaciale mais aussi l'état de contrainte non proportionnel issu des sollicitations tribologiques.

Pour chaque pas de chargement, la formulation du problème statique fournit les équations (2.1)-(2.4) résumées dans l'encadré suivant, et (2.5)-(2.8) décrivant les conditions de contact unilatéral formulées en déplacement, avec l'introduction des notations suivantes :

$$\begin{aligned} \omega^+ &= u|_{\Gamma_C^+} & t^+ &= \sigma \cdot n|_{\Gamma_C^+}, \\ \omega^- &= u|_{\Gamma_C^-} & t^- &= \sigma \cdot n|_{\Gamma_C^-}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Pour ce qui est des conditions décrivant le contact avec frottement, nous avons :

- soit une formulation en déplacement : loi de Coulomb formulée en statique,
- soit une formulation en vitesse : loi de Coulomb formulée en vitesse.

Or le contact à résoudre concerne les faces de la fissure, lesquelles appartiennent au même corps. Par conséquent, c'est la formulation en déplacement qui sera retenue. La variation des efforts le long de la zone de contact n'étant pas monotone, une écriture incrémentale du problème est introduite pour les conditions de frottement, ce qui conduit aux équations (2.9)-(2.10) au pas t_n . Par souci de clarté, les variables ne sont pas indicées par le numéro du pas de chargement t_n , dans la suite du chapitre. L'aspect irréversible du processus est représenté par l'utilisation de l'incrément du saut de déplacement tangentiel (ou incrément

de glissement) $\Delta [w_T]$ entre le pas t_n considéré et le précédent, lequel s'écrit de manière détaillé par

$$\Delta [w_T] = \Delta \omega_T^{-n} - \Delta \omega_T^{+n} = (\omega_T^{-n} - \omega_T^{+n}) - (\omega_T^{-(n-1)} - \omega_T^{+(n-1)}). \quad (2.12)$$

Finalement, pour un pas t_n donné du chargement, la solution doit vérifier l'ensemble des équations reportées dans l'encadré.

A présent que nous avons établi l'ensemble des équations du problème à résoudre à chaque pas de chargement, intéressons-nous aux méthodes numériques de résolution.

La démarche de résolution d'un problème non linéaire d'évolution consiste tout d'abord à discrétiser l'espace. Abordons donc les différentes approches de discrétisation possibles ainsi que leur application en présence de contact avec frottement le long des faces d'une fissure.

2.2 Méthodes de discrétisation pour les problèmes de fissuration avec contact et frottement

D'un point de vue général, il n'est possible de trouver une solution exacte au problème de contact interfacial que dans des cas très particuliers. Nous cherchons donc en général une solution approchée dans un espace de dimension finie, appelé l'espace d'approximation.

Nous allons exposer quatre méthodes numériques susceptibles de convenir à notre problème. Elles permettent de décrire la présence de la fissure et ont été utilisées pour résoudre le contact avec frottement interfacial.

D'un point de vue général, nous supposons les méthodes présentées par la suite comme étant convergentes vers le problème continu de référence défini précédemment, sans se focaliser sur les problèmes éventuels d'unicité de la solution.

2.2.1 La méthode des distributions continues de dislocation

Description de la méthode

La spécificité de cette méthode approchée [42] réside dans la manière de décrire la fissure, à l'aide d'un ensemble de dislocations (ou empilement) pour un milieu élastique linéaire. Les champs de contraintes et de déplacements sont alors décrits à partir de la description de cet ensemble. Concrètement, d'après Burgers [45], une dislocation est caractérisée de manière unique par une ligne (ou courbe) L et un vecteur \vec{b} . Ces deux notions déterminent une surface de glissement. La dislocation suivant la ligne L est créée en effectuant une coupure dans le milieu continu élastique suivant la surface de glissement. Ensuite les faces de la coupure sont déplacées par le vecteur de \vec{b} . Le champ des contraintes

résultant de cette modification du milieu s'exprime de manière analytique en fonction de \vec{b} .

De façon similaire, la modélisation des zones de discontinuité du déplacement le long de la fissure associées aux modes I et II, i.e. l'ouverture et le glissement, peuvent être décrites de façon indépendantes par l'utilisation de deux distributions de dislocations notées B_x et B_y . Cette méthode permet ainsi de modéliser des situations réelles de fissures comme des géométries typiques de fissure de fatigue telles que des fissures perpendiculaires à la surface du massif, des fissures inclinées, des fissures de type ligne brisée, et la présence de plusieurs fissures.

Cette méthode a l'avantage de pouvoir décrire très finement la ou les fissure(s), surtout aux extrémités, mais elle n'est valide qu'en élasticité. La prise en compte de comportements non linéaires, et en particulier la plasticité en pointe de fissure, ne peut pas être envisagée par cette méthode. D'autre part, une extension au cas tridimensionnel fait encore l'objet d'actives recherches.

Application de la méthode pour un contact avec frottement

Les premiers travaux sur ce sujet ont été proposés par Comninou en 1977 [21], mais ne permettaient pas une réelle résolution du contact avec frottement car cette résolution ne déterminait que la taille des zones de glissement. Dubourg [30, 28, 29] a étendu le champ d'application de cette approche à de multiples fissures en modifiant la formulation initialement proposée par Comninou et en intégrant des techniques de résolution du contact unilatéral entre les faces de la fissure. Le modèle ainsi développé repose sur la superposition de la réponse du massif en l'absence de fissures, dit réponse «milieu continu», et de celle des fissures au chargement, dit réponse «fissure». Le cumul arithmétique de ces deux champs découle de l'application du principe de superposition, applicable dans le cadre de l'élasticité linéaire. Le champ «milieu continu» est obtenu en sommant les contributions élémentaires correspondant à des charges ponctuelles normales et tangentielles, exprimées à partir de fonctions d'Airy. Les conditions aux limites sont ainsi respectées en surface et à l'infini.

Le champ «fissure» peut-être considéré comme une correction associée aux conditions aux limites le long de la fissure. Les expressions du champ des contraintes et des discontinuités du déplacement sont fournies de manière analytique par l'utilisation des distributions continues de dislocations. Ces expressions peuvent être retrouvées dans [26] sous la forme d'équations intégrales singulières. La détermination des distributions continues des dislocations le long de la fissure est conduite numériquement en introduisant une méthode de résolution du contact avec frottement interfacial. Les expressions analytiques fonction des distributions B_x et B_y sont intégrées dans une formulation du problème de contact. Il s'agit donc de résoudre le problème de contact avec frottement par la détermination de la taille de zones de glissement, d'adhérence et d'ouverture, ce qui fournit la configuration de l'état de la fissure.

Le modèle de résolution est basé sur les travaux de Kalker du contact unilatéral avec

frottement entre deux corps en roulement [49]. Les conditions aux limites à l'interface de la fissure s'écrivent à l'aide de l'expression du champ total des contraintes. Ainsi, pour un point situé sur la fissure, le problème de contact frottant se formule par les équations suivantes :

- pour le problème normal :

$$\begin{aligned} \text{- ouverture :} & \quad \sigma_N^T = 0, \quad \delta u_N > 0 \\ \text{- contact :} & \quad \sigma_N^T < 0, \quad \delta u_N = 0 \end{aligned}$$

- pour le problème tangentiel :

$$\begin{aligned} \text{- ouverture :} & \quad \sigma_T^T = 0 \\ \text{- contact glissant arrière :} & \quad \sigma_T^T = \mu \sigma_N^T, \quad \delta u_T \sigma_T^T < 0 \\ \text{- contact glissant avant :} & \quad \sigma_T^T = -\mu \sigma_N^T, \quad \delta u_T \sigma_T^T < 0 \\ \text{- contact adhérent :} & \quad |\sigma_T^T| < \mu |\sigma_N^T|, \quad \delta u_T = 0 \end{aligned}$$

Finalement, le champ total satisfait aux conditions aux limites à la surface du massif, et aux conditions de contact à l'interface des fissures.

Initialement, un découplage des problèmes normal et tangentiel était effectué. S'en suivait un processus itératif de résolution allant du normal vers le tangentiel jusqu'à l'obtention d'une solution stabilisée, c'est à dire pour laquelle les zones de glissement, d'adhérence et d'ouverture ne changent plus.

La méthode de résolution itérative a été améliorée en implémentant les développements de Kalker connus sous le nom de l'approche «KOMBI» [50]. L'algorithme de résolution est fondé sur la résolution des équations précédentes suivie d'une vérification des inégalités. Ceci permet de réajuster la solution dès que l'une des inégalités n'est plus respectée. La convergence est atteinte lorsqu'il n'y a plus de changement de statut de point et lorsque l'erreur relative calculée sur les points en glissement de la fissure est suffisamment petite.

A la fin de la résolution, la configuration de l'état de la fissure est fourni par la répartition des zones d'ouverture, de glissement et d'adhérence, ainsi que les champs des contraintes et des déplacements totaux. Etant proportionnels aux discontinuités du déplacement, les FIC sont alors calculés en utilisant le champ du déplacement solution.

Ce modèle permet donc de résoudre le contact avec frottement le long d'une ou plusieurs fissures, avec des géométries bidimensionnelles quelconques et un matériau considéré comme élastique linéaire. Sa validation a été effectuée pour des chargements de fatigue de contact [55, 27]. Néanmoins, un comportement non linéaire ne pouvant être pris en compte, l'extension de ce modèle au cas tridimensionnel, bien que possible, ne sera pas envisagée.

Dans la suite de ce travail, ce modèle sera utilisé comme référence en vue de validations dans le cadre de l'élasticité linéaire en bidimensionnel et sous l'hypothèse de massif semi-infini.

2.2.2 La méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis standards [44] est une autre méthode numérique permettant de décrire la présence et la géométrie de la fissure. Le point de départ de cette méthode est la formulation faible du problème.

Principe des puissances virtuelles

Partant des équations d'équilibre du problème sur un domaine Ω , la formulation du principe des puissances virtuelles dans le cadre général, s'énonce par l'équation

$$-\int_{\Omega(t)} \sigma : \epsilon(u^*) d\Omega + \int_{\Omega(t)} f \cdot u^* d\Omega + \int_{\partial\Omega(t)} F_{ext} \cdot u^* dS = 0, \quad \forall u^* \in U_0 \quad (2.13)$$

où f correspond au vecteur des forces internes et u^* à un mouvement virtuel quelconque (les autres notions correspondent à celles introduites précédemment) et avec

$$U_0 = \{v \in \text{régularité} / v = 0 \text{ sur } \Gamma_U\}. \quad (2.14)$$

Sous l'hypothèse des petites déformations et petits déplacements, le domaine Ω est considéré comme fixe au cours du temps et les variables d'Euler et de Lagrange peuvent être confondues. De plus, en quasi-statique le membre de droite de l'équation (2.13) disparaît. Il s'agit donc de déterminer la solution u vérifiant ce principe, les équations locales (loi de comportement) et les conditions aux limites du problème.

Description de la méthode des éléments finis standards

La méthode des éléments finis consiste à remplacer la formulation continue du problème sous sa forme variationnelle par un modèle discret. Pour cela, une discrétisation en espace est introduite, le domaine Ω étudié est discrétisé en N_e sous-domaines à géométrie simples, appelés éléments finis. Les éléments finis les plus simples sont le triangle et le quadrangle en 2D, et le tétraèdre et le parallélépipède en 3D, mais d'autres types d'éléments existent dans la littérature. L'ensemble de tous les éléments constitue le maillage. A l'aide des fonctions de forme ϕ_i , et d'un seul élément de référence, nous pouvons définir tous les éléments du maillage, par l'écriture :

$$x = \sum \phi_i(M)x_i. \quad (2.15)$$

Nous cherchons ensuite l'approximation du champ de déplacement solution, sur chaque élément du maillage, formulée à l'aide de fonctions polynomiales. Mais ces fonctions polynomiales ne permettent pas d'obtenir la singularité en $\frac{1}{\sqrt{r}}$ du champ des contraintes en pointe de fissure. Pour pallier cette difficulté, la pointe de la fissure est maillée très finement ce qui augmente le nombre d'éléments et donc le temps de calcul de la solution. Il a aussi été proposé d'introduire la singularité par la création d'éléments contenant la singularité ou en modifiant les éléments en pointe pour la représenter (éléments de Barsoum [8], ...). Mais ceci ne simplifie en rien le maillage, et la géométrie de la fissure reste dépendante du maillage.

Application de la méthode au problème d'élasticité linéaire

Pour ce qui est de la résolution à proprement dite du problème dans le cas particulier qui nous intéresse de l'élasticité linéaire en quasi-statique, les conditions sur Γ_C n'existent pas. Conformément aux notations introduites dans le problème de référence, le principe des puissances virtuelles s'écrit :

$$\int_{\Omega} \sigma(x, t) : \epsilon(u^*(x)) d\Omega = \int_{\Gamma_F(x,t)} \bar{F}(x, t) \cdot u^*(x) dS, \quad \forall u^* \in U_0, \quad (2.16)$$

avec :

$$u(x, t) \in U_{ad} \times [0, T] = \{v \in \text{régularité} / v = \bar{U} \text{ sur } \Gamma_U\} \times [0, T], \quad (2.17)$$

et en tenant compte de la loi de comportement et des conditions aux limites.

Ecrit sous forme d'une équation variationnelle, le problème (2.1) à (2.4) équivaut donc à trouver $u(x, t) \in U_{ad} \times [0, T]$ tel que

$$a(u, u^*) - (\bar{F}, u^*) = 0 \quad \forall u^* \in U_0 \quad (2.18)$$

avec :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma(x, t) : \epsilon(u^*(x)) d\Omega \quad (2.19)$$

$$= \int_{\Omega} K_{ijkl} \epsilon_{ij}(u(x, t)) \epsilon_{kl}(u^*(x)) d\Omega \quad (2.20)$$

$$(\bar{F}, v) = \int_{\Gamma_F(x,t)} \bar{F}(x, t) \cdot v d\Gamma \quad (2.21)$$

Ceci équivaut à dire que la variation de l'énergie potentielle est nulle :

$$\delta\Pi(u, \delta u) = 0 \quad \forall \delta u \in U_0 \quad (2.22)$$

car dans le cas particulier qui nous intéresse (petites déformations, petits déplacements, isotherme), nous avons $\Pi = W - W_{ext}$, avec l'énergie de déformation W (cf. équation 1.18) et W_{ext} le travail des efforts extérieurs.

Un problème de minimum est associé à l'équation (2.18) linéaire en u , en cherchant $u \in U_{ad}$ qui minimise l'énergie potentielle notée $I(v)$, telle que $\forall v \in U_{ad}$,

$$I(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - (f, v) - (\bar{F}, v). \quad (2.23)$$

Des résultats d'existence et d'unicité ont été établis pour ce problème. Par exemple si Ω ouvert borné de frontière régulière de \mathbb{R}^2 , $\bar{U}_i \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \forall i$, Γ_U de mesure positive et $\bar{F} \in (L^2(\Gamma_F))^2$, alors il existe une solution unique au problème de minimum [31].

Avec la méthode des éléments finis, dans chaque élément N_e , le champ solution est représenté par une combinaison linéaire de fonctions de forme dépendant des coordonnées d'espace,

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^n u_i(t) \phi_i(x) \quad (2.24)$$

où n correspond au nombre de noeuds de N_e , $u_i(t)$ aux coefficients de la combinaison linéaire qui dépendent des déplacements des noeuds de l'élément N_e . Les inconnues du problème sont alors les coefficients $u_i(t)$ pour tout t . La minimisation de l'énergie potentielle conduit ainsi à la résolution d'un système linéaire pour un problème classique d'élasticité, et non linéaire en présence de contact avec frottement. La résolution de ce système fournit des coefficients qui permettent le calcul du déplacement dans l'élément, puis des déformations et des contraintes. La formulation discrète introduit les notations suivantes :

$$u = [U][\phi] \quad [\epsilon] = [\nabla][U], \quad (2.25)$$

$$[B] = [\nabla][\phi], \quad (2.26)$$

$$K_{ij} = \int_{\Omega} B_i^T [D] B_j d\Omega, \quad (2.27)$$

$$[F_{ext}] = \int_{\Gamma_F} [\bar{F}][\phi] d\Gamma + \int_{\Gamma_{fatigue}(t)} [F(t)][\phi] d\Gamma \quad (2.28)$$

où K_{ij} est appelée la matrice de raideur élémentaire sur l'élément N_e . La matrice de raideur totale du problème \mathbb{K} est assemblée avec l'ensemble des sous-matrices K_{ij} en vue de la résolution du système linéaire.

Résoudre un problème d'élasticité par la méthode des éléments finis nécessite donc l'établissement de la matrice de rigidité totale \mathbb{K} , et du second membre. S'en suit la résolution du système $\mathbb{K}[U] = F_{ext}(t)$. Or la décomposition du domaine est souvent constituée d'un grand nombre d'éléments, donc de nombreux degrés de liberté (de 1 000 à 10 000, ou plus). Par conséquent, la matrice \mathbb{K} peut-être énorme. Néanmoins, sa structure en bande de coefficients situés autour de la diagonale principale diminue le nombre de termes non nuls.

Les problèmes de la méthode des éléments finis standards appliquée à la fissuration sont nombreux. Tout d'abord le choix du découpage de la structure doit pouvoir représenter au mieux les fissures. D'autre part, les éléments doivent être très petits au voisinage de la pointe de la fissure à cause du fort gradient des contraintes. De plus, modéliser la croissance de fissure présente une difficulté liée au remaillage après chaque propagation. Cette opération peut être coûteuse en temps de calcul. Finalement, la disparité de la géométrie des éléments finis sur l'interface peut poser problème pour l'application des lois de contact et de frottement. Même si des stratégies existent à certains de ces problèmes, en deux dimensions et pour les fissures planes à trois dimensions, elles semblent irréalistes pour des fissures tridimensionnelles arbitraires.

Remarque : nous pouvons aussi introduire la méthode des éléments finis à partir du théorème de l'énergie potentielle, dans le cadre des hypothèses d'élasticité linéaire et de petites perturbations, avec un matériau homogène isotrope.

Dans la suite et dans un but de simplification, nous présentons la prise en compte des conditions aux limites dans le cadre de ce théorème. Bien entendu l'extension au cas général est tout à fait possible.

Application de la méthode pour un contact avec frottement

Les méthodes employées dans le cadre de la méthode des éléments finis pour prendre en compte les conditions aux limites, et notamment celles qui définissent le contact, peuvent par exemple se mettre en place à partir de la minimisation de l'énergie potentielle (2.18). Dans le cadre d'une résolution avec connaissance des noeuds en vis-à-vis, les méthodes les plus utilisées sont les méthodes de pénalisation, des multiplicateurs de Lagrange [84, 64, 11, 1], des formulations mixtes (combinaison des deux dernières méthodes) dont la plus connue est celle du Lagrangien augmenté [90, 4, 80]. D'autres méthodes (méthodes de projections [82], de Lemke[82], ...) sont aussi utilisées pour la résolution d'un problème sous contraintes mais elles ne seront pas évoquées dans ce mémoire.

En présence de contact avec frottement, l'équation (2.13) s'écrit à présent

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma(x, t) : \epsilon(u^*(x)) d\Omega &= \int_{\Gamma_F(x,t)} \bar{F}(x, t) \cdot u^*(x) dS \\ + \int_{\Gamma_C} \sigma(x, t) \cdot u^*(x) n dS, \quad \forall u^* \in U_0, \end{aligned} \quad (2.29)$$

Le dernier terme peut-être rendu plus explicite en considérant les variables locales de $\Gamma_C = \Gamma_C^+ \cup \Gamma_C^-$:

$$\int_{\Gamma_C} \sigma n \delta u d\Gamma = \int_{\Gamma_C^+} t^+ \delta u^+ d\Gamma + \int_{\Gamma_C^-} t^- \delta u^- d\Gamma. \quad (2.30)$$

En explicitant le produit scalaire $t \delta u$ indicé + ou -, on obtient :

$$\int_{\Gamma_C} \sigma n \delta u d\Gamma = \int_{\Gamma_C^+} (t_N^+ \delta u_N^+ + t_T^+ \delta u_T^+) d\Gamma + \int_{\Gamma_C^-} (t_N^- \delta u_N^- + t_T^- \delta u_T^-) d\Gamma. \quad (2.31)$$

Pour introduire les inégalités des conditions de contact avec frottement, nous définissons l'ensemble $K = \{v \in U_{ad} / v_N \leq 0 \text{ sur } \Gamma_C\}$, avec U_{ad} défini précédemment. K est un convexe de U_{ad} décrivant l'ensemble des déplacements admissibles compatibles avec les liaisons, c'est-à-dire les conditions de contact unilatéral avec frottement. La formulation variationnelle du problème statique de contact avec frottement de Coulomb fourni par [31] est : trouver $u \in K$ tel que $\forall v \in K$:

$$a(u, v - u) + J(u, v) - J(u, u) \geq (f, v - u) + (F_{ext}, v - u) \quad (2.32)$$

avec $\forall u, v \in U_{ad}$:

$$J(u, v) = \int_{\Gamma_C} \mu |F_N(u)| \| [v_T] \| ds \quad (2.33)$$

Ainsi, l'introduction du contact unilatéral et du frottement transforme le problème d'élasticité classique en une inéquation variationnelle. La forme implicite de l'inéquation varia-

tionnelle (2.32) ne permet pas d'associer directement un problème de minimum. Le problème (à résoudre) se résume donc à trouver la solution u qui minimise l'énergie potentielle $\Pi(u)$ et vérifie les conditions sur Γ_C (équations et inéquations).

Remarque : dans le cas particulier de contact unilatéral sans frottement, l'inéquation variationnelle associée est : trouver $u \in K$ tel que $\forall v \in K$:

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u) + \int_{\Gamma_F} F_{ext} \cdot (v - u) d\Gamma \quad (2.34)$$

Ce problème admet une unique solution [63].

Une façon de contourner le problème a été proposé par Raous et al. [82, 83] en introduisant un point fixe sur le seuil de glissement. Nous allons exposer cette approche.

"Méthode du seuil"

La proposition est d'établir un nouveau problème en introduisant un problème de point fixe sur le seuil de glissement qui conduit à la résolution d'une équence de problèmes de Tresca à seuil de glissement donné [82, 83]. Par suite, le caractère implicite de l'inéquation variationnelle disparaît et un problème de minimum peut lui être associé. Dans la pratique, nous cherchons le seuil g comme point fixe de la fonction $g \rightarrow -\mu F_N(u)$ avec u solution du problème : pour g donné, trouver $u \in K$ tel que :

$$a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq (f, v - u) + (F_{ext}, v - u) \quad (2.35)$$

avec :

$$j(v) = \int_{\Gamma_C} g \|v_T\| ds. \quad (2.36)$$

Cette fois-ci, j ne dépend plus de F_N ni de u solution. Ce dernier problème peut alors se transformer en un problème de minimum sous contraintes où la solution u minimise la fonctionnelle :

$$I(v) = \frac{1}{2}a(v, v) + j(v) - (f, v) - (F_{ext}, v). \quad (2.37)$$

Le problème intermédiaire avec g fixé est un problème non linéaire de contact qui doit être résolu par une méthode itérative. Le problème de minimum associé nécessite donc dans ce cas la résolution d'un problème de point fixe et la résolution de l'inéquation variationnelle (2.32). Par une discrétisation du problème, une forme approchée du problème est établi, ce qui conduit à la résolution d'un problème non linéaire. L'initialisation du processus itératif se fait avec $g=0$. Mais des difficultés apparaissent pour des problèmes incrémentaux en temps. Un choix possible est d'initialiser la valeur de g par celle obtenue au pas précédent.

Un autre axe de résolution possible fait appel à une résolution directe par l'utilisation de l'équation (2.18) sous contraintes (équations (2.5) et (2.6) pour le contact unilatéral et (2.9) pour le frottement). Ces contraintes peuvent être prises en comptes par les méthodes qui vont suivre.

La méthode de la pénalisation

Avec cette méthode, nous introduisons la condition de non-pénétration dans la minimisation de l'énergie potentielle en écrivant :

$$\delta\Pi_\beta(u, \delta u) = \delta\Pi(u, \delta u) + \delta G_\beta(u, \delta u) = 0 \quad \forall \delta u, \quad (2.38)$$

avec

$$\delta G_\beta(u, \delta u) = \int_{\Gamma_C} \beta[u_N][\delta u_N]d\Gamma. \quad (2.39)$$

Ainsi, plus le paramètre β est grand, plus la condition de non-pénétration est assurée. Ce paramètre β est appelé le paramètre de pénalisation.

Dans cette méthode, la contrainte de non-pénétration est imposée, et peut donc autoriser la pénétration. Au lieu de trouver une solution exacte, nous déterminons une solution approchée. D'autre part, la valeur de β est limitée par des problèmes numériques de conditionnement de la matrice du système linéaire. La principale difficulté de cette méthode est donc le choix de la valeur du paramètre β , et le fait qu'elle influe sur la convergence. Néanmoins, en élément fini cette méthode est efficace car elle comporte uniquement deux changements dans les matrices et ne modifie pas la largeur de bande de la matrice de rigidité $[K]$, ce qui explique son utilisation.

La méthode des multiplicateurs de Lagrange

La méthode des multiplicateurs de Lagrange [84, 64, 11, 1] est plus élégante car elle consiste à relaxer les conditions aux limites et à introduire de nouvelles variables, les multiplicateurs de Lagrange Λ . Pour ce nouveau problème, nous cherchons les extrema de la quantité :

$$\delta\Pi(u, \delta u, \Lambda, \delta\Lambda) = \delta\Pi(u, \delta u) + \delta G_\Lambda \quad \forall \delta u, \forall \delta\Lambda \quad (2.40)$$

avec :

$$\delta G_\Lambda(u, \Lambda) = \int_{\Gamma_C} \Lambda[u_N]nd\Gamma. \quad (2.41)$$

Ces extrema vérifient :

$$\frac{\partial(\delta\Pi)}{\partial u} = 0 \Rightarrow \delta\Pi(u, \delta u) + \int_{\Gamma_C} \Lambda_N[\delta u_N]nd\Gamma = 0 \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial(\delta\Pi)}{\partial \Lambda} = 0 \Rightarrow \int_{\Gamma_C} \delta\Lambda_N[u_N]nd\Gamma = 0. \quad (2.43)$$

Cette fois-ci, la condition imposée sur les inconnues est stricte ce qui évite les problèmes liés au choix des coefficients de pénalisation. Les forces normales de contact sont alors représentées par la valeur de ces multiplicateurs. L'inconvénient principal est d'avoir introduit des inconnues supplémentaires.

La méthode du lagrangien augmenté

Cette méthode est la plus connue parmi les formulations mixtes [90, 4, 80] utilisant les méthodes de pénalisation et de multiplicateurs de Lagrange. Elle combine les avantages des

deux méthodes pour une efficacité et une précision optimales. La méthode du Lagrangien perturbé est une autre méthode du même type, mais nous ne présenterons que la première.

Cette fois-ci, nous cherchons les extrema de la quantité :

$$\delta\Pi(u, \delta u, \Lambda, \delta\Lambda) = \delta\Pi(u, \delta u) + \delta G_\Lambda + G_\beta \quad \forall \delta u, \forall \delta\Lambda, \forall \beta. \quad (2.44)$$

Ces extrema vérifient :

$$\frac{\partial(\delta\Pi)}{\partial u} = 0 \Rightarrow \delta\Pi(u, \delta u) + \int_{\Gamma_C} \Lambda_N[\delta u_N]d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \beta[u_N][\delta u_N]d\Gamma = 0 \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial(\delta\Pi)}{\partial \Lambda} = 0 \Rightarrow \int_{\Gamma_C} \delta\Lambda_N[u_N]d\Gamma = 0. \quad (2.46)$$

Cette méthode a l'avantage de prendre en compte les conditions tant sur les déplacements que sur les efforts de contact, contrairement aux deux précédentes. Ainsi toutes les relations sont vérifiées. D'autre part l'indépendance du problème par rapport à la quantité β a été établie (cf. [36]).

Si la méthode des éléments finis classique a montré son efficacité et sa puissance pour résoudre de nombreux problèmes en mécanique des solides, elle est moins adaptée pour réaliser les analyses successives d'un problème de fissuration. Des méthodes numériques plus appropriées que la méthode classique des éléments finis pour la propagation de fissures sont alors nécessaires. Tout d'abord la BEM, puis X-FEM.

2.2.3 La méthode des éléments de frontière

Description de la méthode

C'est une méthode alternative à la méthode des éléments finis. Appliquée aux problèmes de mécanique de la rupture depuis une vingtaine d'années [13, 14], elle présente pour principale caractéristique de ne demander qu'une discrétisation de la frontière du domaine et non de l'intérieur. Le travail de remaillage entre chaque étape est donc minime puisqu'il suffit d'ajouter un ou quelques éléments sur les incréments de fissure. Dans cette méthode, les équations aux dérivées partielles sont transformées en des équations intégrales sur la frontière par le biais d'une certaine solution fondamentale de ces équations aux dérivées partielles, dite solution de Green. Elle n'est donc applicable que si une telle solution existe (ce qui n'est pas le cas des problèmes élasto-plastiques).

Les principales difficultés de cette méthode sont la nécessité de disposer d'une procédure efficace d'évaluation des intégrales singulières, et l'obligation d'adapter un algorithme d'intégration du comportement non linéaire à la formulation équations intégrales du problème. D'autre part, même si la méthode est très appréciée en mécanique de la rupture, la nécessité de disposer d'un maillage fin au voisinage de la pointe de la fissure est toujours présente. De plus, pour la propagation de la fissure un remaillage s'avère nécessaire.

Application de la méthode pour un contact avec frottement

L'utilisation de la méthode des éléments de frontière pour la résolution d'un contact a été effectuée par plusieurs auteurs, et notamment dans le cadre de la fatigue de contact en MELR. Avec cette modélisation du problème, le contact peut-être résolu aux noeuds de la discrétisation par l'application d'une des méthodes citées au paragraphe 2.2.2 (pénalisation, multiplicateurs de Lagrange ou méthodes mixtes). Par exemple, [66] applique la méthode de la pénalité sur les noeuds en contact entre deux surfaces. Une modélisation de la fissure par des densités de dislocation est aussi envisageable [98]. Trois types d'équations intégrales sont appliquées aux problèmes bidimensionnels de fissuration : des équations intégrales portant sur les déplacements, sur les tractions de contact ou sur les forces de contact. La formulation du problème en équations intégrales pour les forces de contact semble donner de meilleurs résultats [98].

L'inconvénient pour un problème de contact est la difficulté introduite par un maillage non compatible le long des faces de la fissure.

Une autre façon de résoudre des problèmes en élasticité linéaire consiste à utiliser la méthode des éléments finis étendus. Cette méthode s'affranchit des problèmes de maillage non compatible.

2.2.4 La méthode des éléments finis étendus (X-FEM)

Description de la méthode

La méthode des éléments finis étendue, connue sous le sigle X-FEM (pour eXtended Finite Element Method), est appliquée aux problèmes de mécanique de la rupture depuis 1999 grâce aux travaux de Moës et al. [69]. C'est une extension de la méthode des éléments finis qui permet de modéliser la présence d'un défaut (fissure ou autre) sans le mailler explicitement. Seul le maillage de la structure sans défaut (non fissurée) est nécessaire. Ensuite, la méthode de partition de l'unité introduite par Melenk et Babuska [65] est utilisée afin d'enrichir l'approximation élément fini standard par des fonctions additionnelles. Un choix pertinent de l'enrichissement permet de libérer le maillage de son obligation de se conformer aux discontinuités. Cette approche permet de représenter un champ de déplacement discontinu de part et d'autre d'une fissure et de prendre en compte l'aspect asymptotique à sa pointe du champ des contraintes.

Cette méthode a plusieurs avantages. D'abord, elle est générale et non liée à un comportement particulier du matériau (élastique, plastique, ...). Ensuite, l'enrichissement reste valable quelle que soit la dimension du problème et quel que soit le type des éléments utilisés. Enfin, la croissance de fissure ne nécessite aucun remaillage, seule la géométrie de la fissure est nécessaire pour définir les éléments à enrichir. En quelque sorte, X-FEM étend les possibilités de la méthode éléments finis sans perdre les avantages.

La première modélisation de fissures avec cette méthode a été présentée par Moës, Gravouil et al. [69] en 2D puis étendue au 3D par Sukumar [92]. La méthode a aussi été couplée à la méthode «fast marching method» pour des fissures planes tridimensionnelles.

Puis la propagation non plane de fissures dans des domaines tridimensionnels a été réalisée par Moës, Gravouil et al [70]. Pour ce qui est de la propagation, elle est simulée en remplaçant les éléments nouvellement traversés par une fissure par un élément spécial contenant l'enrichissement.

Concrètement, la présence de fissure dans un corps est associée à : (i) un champ de déplacement discontinu le long de la fissure et (ii) un champ de contraintes présentant une singularité en $\frac{1}{\sqrt{r}}$ en pointe de fissure. Par conséquent, la méthode X-FEM enrichit l'approximation standard élément fini par des fonctions additionnelles, (i) discontinues pour modéliser les discontinuités du champ de déplacement, et (ii) d'autres pour caractériser le champ asymptotique en pointe de fissure. Le champ de déplacement est donc considéré comme la somme de deux champs : un champ continu et un discontinu, où l'enrichissement X-FEM se fait localement près de la fissure. Dans le cadre d'une fissure débouchante (à un front), l'approximation X-FEM du champ de déplacement est la suivante :

$$u^h(x) = \underbrace{\sum_{i \in E_I} u_i \phi_i(x)}_1 + \underbrace{\sum_{j \in E_J} b_j \phi_j(x) H(x)}_2 + \underbrace{\sum_{k \in E_K} [\phi_k(x) (\sum_{l=1}^4 c_k^l F_l(r, \theta))]}_3 \quad (2.47)$$

Le terme 1 correspond à l'approximation élément fini standard avec E_I l'ensemble des noeuds du maillage, u_i et ϕ_i respectivement les degrés de liberté et la fonction de forme associés au noeud i . Le terme 2 est un enrichissement lié à la discontinuité de la fissure, avec E_J un sous-ensemble de noeuds de E_I , comme indiqué sur la figure 2.2, b_j les degrés de liberté supplémentaires associés à l'utilisation de la fonction discontinue $H(x)$, fonction Heaviside généralisée. Les noeuds de E_J sont tels que leur support intersecte la fissure mais sans contenir le front. En considérant Γ_C comme une courbe paramétrique, pour chaque point x du domaine nous pouvons trouver sur Γ_C le point le plus proche x^* de x . En ce point, les vecteurs normal et tangentiel à la courbe sont construits, e_t and e_n , pris tels que $e_t \times e_n = e_z$, e_z pointant vers l'extérieur de la page comme indiqué sur la figure 2.3. La fonction est alors donnée par l'expression suivante

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } (x - x^*) \cdot e_n > 0 \\ -1 & \text{for } (x - x^*) \cdot e_n < 0 \end{cases} \quad (2.48)$$

Pour une fissure branchée, où la normale n'est pas unique mais un cône de vecteurs normaux est défini en x^* , $H(x) = 1$ si le vecteur $(x - x^*)$ appartient au cône de normales en x^* , et -1 sinon. Le terme 3 traduit la singularité des contraintes le long du front. E_K est le sous-ensemble de noeuds de I dont le support contient ce front, comme indiqué sur la figure 2.2, et c_k^l , $l, k=1, \dots, 4$ les degrés de liberté correspondants. Les fonctions $F_l(r, \theta)$, $l=1..4$, sont des fonctions de forme supplémentaires avec pour expression

$$\{F_l(r, \theta)\} \equiv \left\{ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\} \quad (2.49)$$

où (r, θ) sont les coordonnées polaires dans un repère local lié à la pointe de la fissure.

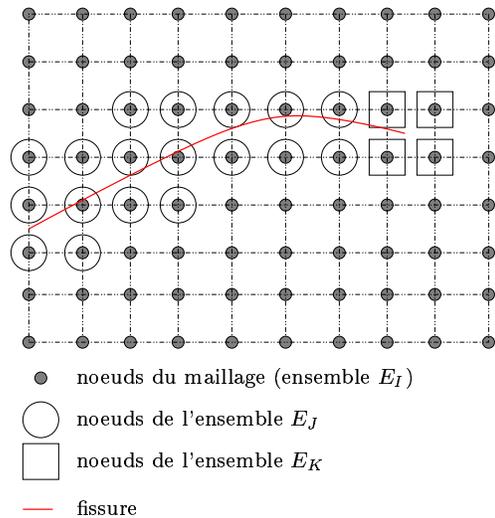


FIG. 2.2 – Description des ensembles E_I , E_J , E_K de l'approximation du champ de déplacement élément fini enrichi

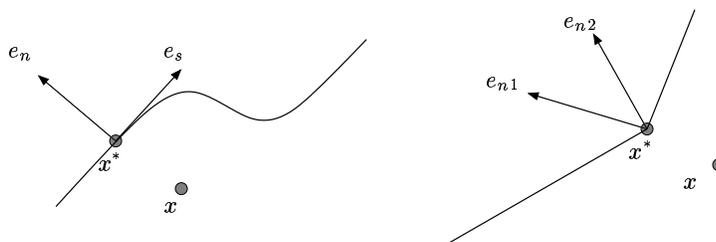


FIG. 2.3 – Description de la fonction H

Application de la méthode pour un contact avec frottement

La première application de la méthode X-FEM au contact avec frottement est due à Dolbow et al. [25].

Le contact avec frottement bidimensionnel le long des faces d'une fissure a été considéré pour mettre en évidence le phénomène appelé 'the axial-splitting'. Ce phénomène correspond au branchement d'une fissure inclinée soumise à un chargement statique uniaxial de compression vers la direction du chargement appliqué (cf. figure 2.4).

Dans le cadre de cette méthode, la fissure n'étant pas maillée explicitement, des éléments dits "éléments d'interface" ont été introduits afin de gérer et de résoudre le contact le long des faces de la fissure. Pour tout élément fini coupé par la fissure, deux éléments d'interface en vis-à-vis Γ^+ et Γ^- sont définis avec deux points de Gauss $(G_i^+, G_i^-)_{i=1,2}$ (voir la figure 2.5).

Les inconnues en ces points, ω_i^+ et t_i^+ pour G_i^+ (ω_i^- et t_i^- respectivement pour G_i^-), sont

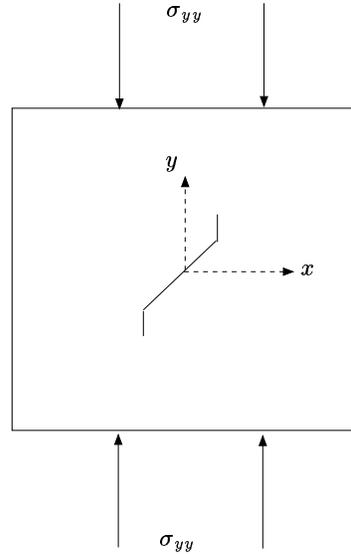


FIG. 2.4 – Plaque sous un chargement compressif d'après [25]

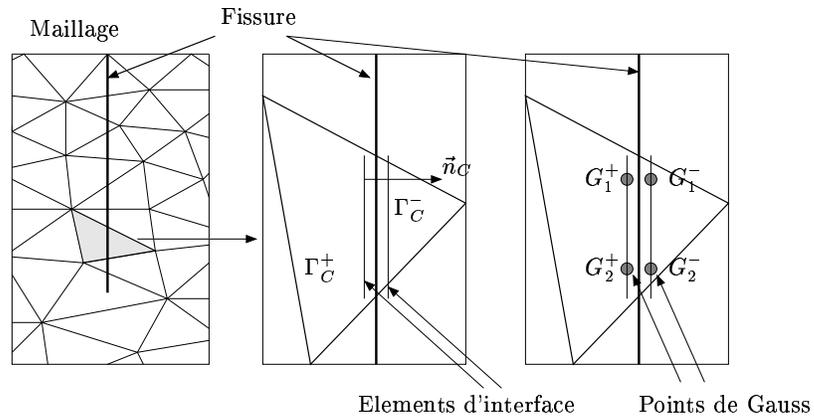


FIG. 2.5 – Description des éléments d'interface Γ_C^+ et Γ_C^- , des points de Gauss $G_{1,2}^+$, $G_{1,2}^-$ et du vecteur \vec{n}_C

exprimées dans le repère local de l'élément d'interface Γ^+ sous la forme : $Z = Z_N \cdot \vec{n}_C + Z_T$, avec \vec{n}_C le vecteur normal unitaire extérieur à Γ^+ . Pour chaque couple de points de Gauss (G_i^+, G_i^-) , i fixé, les conditions de contact sont exprimées selon une loi d'interface, que nous noterons \mathcal{G} , telle que :

$$\mathcal{G}(\omega_i^+, \omega_i^-, t_i^+, t_i^-) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_C^+ \cup \Gamma_C^- \quad (2.50)$$

Cette loi reflète le type de contact envisagé (avec ou sans frottement, loi de frottement envisagée). De plus, des conditions aux limites supplémentaires assurant la continuité le

long de la fissure sont introduites :

$$(\sigma \cdot \vec{n}_C)|_{\Gamma_C^+} = t^+, \quad (\sigma \cdot \vec{n}_C)|_{\Gamma_C^-} = t^-, \quad u|_{\Gamma_C^+} = \omega^+, \quad u|_{\Gamma_C^-} = \omega^-. \quad (2.51)$$

L'un des avantages de la méthode X-FEM appliquée au contact entre les faces d'une fissure réside sur l'utilisation d'un maillage compatible le long des faces qui facilite la résolution du contact.

2.3 Stratégies de résolution des problèmes non linéaires d'évolution

Après la discrétisation de l'espace, la démarche de résolution d'un problème non linéaire d'évolution nécessite la discrétisation du temps. En mécanique des structures, la quasi-totalité des méthodes de résolution des problèmes non linéaires d'évolution sont des méthodes incrémentales (pas à pas). En contraste avec ces méthodes, la méthode à grand incrément de temps (LATIN method = Large Time Increment Method) est aussi utilisée pour l'analyse des structures avec un comportement non-linéaire.

Nous allons présenter ces deux classes de méthodes et le lien possible avec le problème de référence.

2.3.1 Les méthodes incrémentales

Avec les méthodes incrémentales, l'intervalle de temps étudié $[0, T]$, est décomposé en une succession d'intervalles généralement petits $[t_k, t_{k+1}]$, avec $t_0=0$ et $t_n = T$. L'histoire des différentes quantités étant connue jusqu'à l'instant t_k , un nouvel intervalle de temps $[t_k, t_k + \Delta t]$ est étudié, où Δt est l'incrément de temps. Le problème est alors de compléter cette histoire sur l'intervalle $[t_k, t_k + \Delta t_k]$. En supposant une histoire linéaire sur $[t_k, t_k + \Delta t]$ pour les différentes quantités du problème, la résolution d'un problème non linéaire aboutit à la résolution d'un problème où le temps n'intervient plus. Par exemple, pour le déplacement, la linéarité de l'histoire s'écrit :

$$u(\tau) = \frac{\tau - t_k}{\Delta t_k} u(t_k + \Delta t_k) + \frac{(t_k + \Delta t_k) - \tau}{\Delta t_k} u(t_k) \quad (2.52)$$

pour $\tau \in [t_k, t_k + \Delta t_k]$. Le champ de déplacement ne dépend alors que de la valeur à l'instant $t_k + \Delta t_k$, les quantités à l'instant t_k étant connues. Le problème ainsi obtenu qui définit les quantités au temps $t_k + \Delta t_k$ est généralement traité par un schéma numérique.

Le problème d'évolution est ainsi formulé à l'aide des variables discrètes temporelles t_k et la résolution du problème temporel s'effectue par des algorithmes de résolution incrémentaux.

Après les discrétisations spatiale et temporelle, le problème non linéaire d'évolution se résume à un problème discret non linéaire spatialement pour t_i fixé.

La dernière étape de la démarche de résolution du problème consiste alors à faire appel à des algorithmes itératifs de résolution du type Newton-Raphson, quasi-Newton, Newton modifié, ... [11].

Une autre stratégie de résolution d'un problème non linéaire d'évolution discrétisé spatialement, consiste à considérer l'intervalle de temps dans son ensemble. Cette approche est effectuée dans le cadre de la méthode LATIN qui va être présentée.

2.3.2 La méthode à large incrément de temps : la méthode LATIN

Cette méthode a été introduite par Ladevèze en 1985 [53, 54]. Développée pour des problèmes d'évolution non linéaires, elle contraste avec les méthodes incrémentales (méthodes pas à pas) dans le sens où elle ne fait pas appel à la notion d'incrément de temps ; l'intervalle de temps $[0, T]$ étudié n'est pas découpé en incréments. C'est une méthode itérative, partant d'une approximation relativement grossière (issue d'un calcul élastique) des déplacements, des déformations et des contraintes en tout point M appartenant à Ω et pour tout temps t de l'intervalle $[0, T]$. A chaque itération, une amélioration est apportée à ces différentes quantités toujours pour tout t et en tout point M . La solution d'un problème évolutif est ainsi fournie sur l'ensemble de l'intervalle d'étude $[0, T]$.

Une approche dégénérée de cette méthode a été développée par Champaney en 1996 [19] et adaptée à une problématique de contact sous des conditions statiques, pour des situations réelles d'assemblage de structures. Cependant au cours des itérations les champs considérés ne sont pas estimés sur tout l'intervalle de temps mais de façon incrémentale dans le temps.

Dans cette situation dégénérée de la LATIN, le premier principe de la méthode proposée par Ladevèze est conservé : les équations du problèmes sont scindées en deux groupes,

- un groupe d'équations locales par rapport à la variable d'espace, voir non linéaires, et
- un groupe d'équations linéaires, voir globales par rapport à la variable d'espace.

Deux espaces de solution sont ainsi introduits, L et G , associés à chacun des deux groupes précédents. Pour déterminer la solution du problème, un processus itératif est établi grâce à l'introduction de deux directions de recherches, une montante E^+ , allant de G vers L , et une descendante E^- , allant de L vers G comme illustré dans la figure 2.6.

Le second principe de la méthode LATIN de base est conservé : chaque itération est effectuée en deux étapes, une première étape correspondant à la résolution des équations locales, dite étape locale, et une seconde correspondant à celle des équations linéaires, dite étape globale. Pour décrire ces étapes, introduisons s l'ensemble des inconnues du problème, telles que $s = (u, \sigma, \omega, t)$, et S l'espace fonctionnel correspondant. Les ensembles L et G sont des variétés de S . Nous noterons s^L lorsque la solution appartient à l'ensemble L et s^G pour l'ensemble G . L'étape locale détermine la solution appartenant à l'espace L tel que $(s^L - s^G) \in E^+$, s^G donné, et l'étape globale détermine la solution appartenant à l'espace G tel que $(s^G - s^L) \in E^-$, s^L donné. Ainsi, à partir d'une approximation initiale s_0 , le processus converge par une succession d'itérations alternant la résolution des étapes

locale et globale, vers la solution du problème, intersection des deux ensembles.

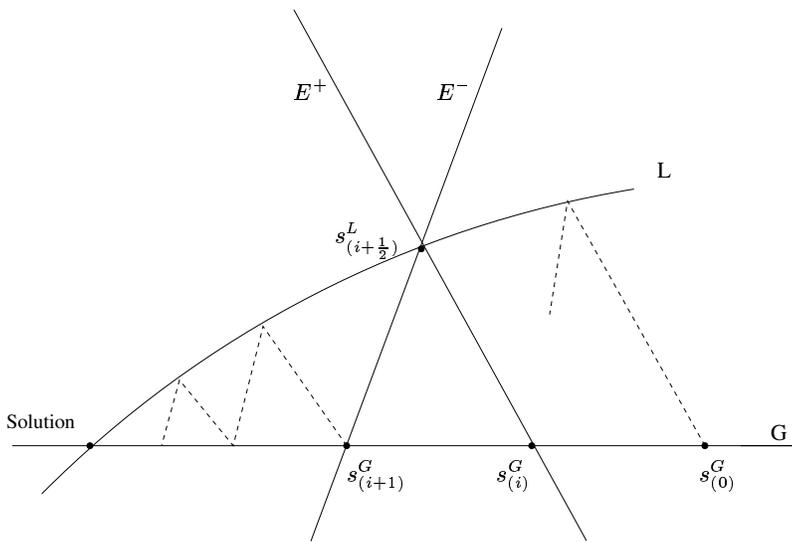


FIG. 2.6 – Illustration géométrique du schéma itératif issu de la méthode LATIN

La résolution du contact avec frottement effectuée par Champaney s'appuie sur l'utilisation d'interfaces pour lesquelles des variables d'entrée et de sortie sont associées. Du coup, les équations à l'étape locale ne mettent en jeu que des quantités locales et les calculs sont indépendants du reste du domaine. Les opérateurs associés aux directions de recherche peuvent être considérés comme une pénalisation portant sur les quantités locales. Cette approche de la résolution du problème de contact est alors très proche de la formulation du problème sous la forme d'un Lagrangien augmenté.

2.4 Conclusion

Nous avons rappelé un ensemble de méthodes numériques applicables au problème de référence (équations (2.1) à (2.10)).

Le modèle basé sur la théorie mathématique des distributions continues de dislocation est un choix judicieux, mais non applicable à des matériaux dont le comportement est non linéaire. Ceci exclut donc son utilisation pour des problèmes de plasticité localisés en pointe de fissure souvent présents dans les problèmes industriels. De plus l'hypothèse de massif semi-infini restreint son champ d'application à des problèmes sans effets de structure. Néanmoins une comparaison numérique bidimensionnelle avec ce modèle s'avère essentielle. Nous l'utiliserons donc comme modèle de référence pour toute validation ultérieure en élasticité bidimensionnelle et sous l'hypothèse de massif semi-infini.

La méthode des éléments finis classique s'avère lourde pour des problèmes de propagation de fissure, à cause du remaillage, mais aussi, à cause des problèmes de projection

des champs d'une discrétisation à l'autre.

Bien que l'utilisation des éléments de frontière réduise considérablement le maillage du problème, ce maillage reste non compatible le long des faces de la fissure ce qui introduit des difficultés dans la résolution du contact.

La méthode X-FEM est une méthode qui s'affranchit du problème du remaillage au cours de la propagation d'une fissure et qui permet de disposer d'un maillage compatible le long des faces de la fissure, grâce à l'introduction d'éléments d'interface comportant des points de Gauss avec leurs propres inconnues. Il n'est donc pas nécessaire de projeter les champs.

Fort de ces avantages, notre choix se porte sur la méthode X-FEM. Par conséquent, la géométrie de la fissure n'est pas maillée explicitement. Sa présence est prise en compte par l'enrichissement introduit dans l'approximation du champ de déplacement, approximation énoncée par l'équation (2.47).

La résolution du problème non linéaire d'évolution nécessite une modélisation incrémentale du problème de frottement. Parmi les méthodes existantes pour prendre en compte les non-linéarités de contact, la méthode de pénalisation ne semble pas un choix opportun du fait de la sensibilité du paramètre sur la solution et du mauvais conditionnement qui peut-être associé. La méthode des multiplicateurs de Lagrange est peu robuste en présence de frottement. Finalement seules les méthodes du lagrangien augmenté (ou les méthodes mixtes) et la méthode LATIN dégénérée pour des problèmes de contact semblent intéressantes pour notre problème. De plus ces méthodes sont de nature "similaires". La méthode du Lagrangien augmenté couplée avec un schéma itératif type Newton-Raphson semble une approche envisageable. L'avantage de la LATIN est sa résolution globale du problème. D'autre part, son utilisation a déjà été abordée avec la méthode X-FEM pour un contact avec frottement en statique. Nous nous orientons donc vers cette approche de résolution et allons développer une résolution numérique adaptée au problème de fissuration en fatigue de contact, intégrant l'histoire du chargement et les différentes échelles de modélisation propres à ce problème de fissuration.

A présent que le choix des méthodes numériques est établi, abordons les détails du modèle développé.

Chapitre 3

LE MODELE NUMERIQUE DE COMPORTEMENT DE FISSURE EN CONSIDERANT LE CONTACT INTERFACIAL AVEC FROTTEMENT

Sommaire

| | | |
|------------|---|-----------|
| 3.1 | Stratégie de résolution | 63 |
| 3.1.1 | Choix d'une méthode itérative pour le problème d'évolution | 63 |
| 3.1.2 | L'étape locale de la méthode LATIN | 65 |
| 3.1.3 | L'étape globale de la méthode LATIN | 73 |
| 3.1.4 | Algorithme de résolution | 76 |
| 3.2 | Développement d'un critère d'arrêt adapté au problème de contact | 78 |
| 3.3 | Traitement numérique des grandeurs caractéristiques de la fissuration | 85 |
| 3.4 | Implémentation dans le code elfe_3d | 86 |
| 3.5 | Conclusion partielle | 89 |
| 3.6 | Analyse de la qualité du modèle de comportement pour une fissure perpendiculaire à la surface en situation de fatigue de contact | 90 |
| 3.6.1 | Données du problème | 91 |
| 3.6.2 | Résultats de référence | 92 |
| 3.6.3 | Influence de la précision | 93 |
| 3.6.4 | Influence des conditions aux limites | 95 |
| 3.6.5 | Influence de l'incrément du pas de chargement | 96 |

| | | |
|------------|--|------------|
| 3.6.6 | Conclusion partielle | 99 |
| 3.7 | Qualification du modèle pour un chargement proportionnel en statique | 99 |
| 3.7.1 | Chargement proportionnel en traction | 100 |
| 3.7.2 | Chargement proportionnel en compression | 100 |
| 3.7.3 | Conclusion partielle | 103 |
| 3.8 | Qualification du modèle pour un chargement non proportionnel | 105 |
| 3.8.1 | Déplacement d'une charge normale hertzienne avec un incrément de pas de chargement grossier ($\delta l = 1$ mm) | 106 |
| 3.8.2 | Déplacement d'une charge normale avec un incrément de pas de chargement fin ($\delta l = 50$ μ m) | 115 |
| 3.8.3 | Analyse d'un cycle complet de chargement en fatigue tribologique | 121 |
| 3.9 | Conclusion | 131 |

L'ensemble des aspects théoriques ayant été présentés, nous abordons dans ce chapitre le modèle numérique développé. Une méthode de discrétisation et un schéma itératif de résolution du problème non linéaire d'évolution sont choisis. Des développements numériques sont effectués afin de considérer les aspects multi-échelles du problème et l'hystérésis du frottement. Un nouveau critère d'arrêt du schéma itératif est présenté. Nous verrons que cette amélioration influence considérablement les résultats.

Nous exposons aussi les méthodes numériques de calculs des grandeurs caractéristiques ainsi que le code `elfe_3d`.

Une étude qualitative du modèle est effectuée afin de déterminer les paramètres et les aspects multi-échelles influants du modèle. Puis plusieurs étapes de validation sont ensuite abordées. La première étape de validation s'appuie sur des résultats analytiques et numériques, pour des situations de chargement proportionnel en statique. La seconde étape se tourne vers des configurations de chargements non proportionnels pour lesquels les modes de sollicitation en pointe de fissure sont, au départ, du mode II seul, puis du mode mixte et enfin des séquences complexes en mode mixte. Des problèmes de fatigue de contact plus représentatifs sont illustrés en dernière partie. Ce chapitre se termine par une conclusion.

3.1 Stratégie de résolution

3.1.1 Choix d'une méthode itérative pour le problème d'évolution

Le choix s'est porté sur une discrétisation par la méthode éléments finis étendus pour une représentation de la fissure indépendante du domaine, avec comme schéma itératif du problème de résolution la méthode LATIN. D'autre part, la notion d'éléments d'interface va être utilisée pour prendre en compte une loi de comportement d'interface appropriée à résoudre le contact interfacial (voir section 2.2.4). Les degrés de liberté des éléments d'interface seront couplés à ceux de la structure dans le cadre d'une formulation mixte à trois champs u le champ de déplacement dans la structure, ω et t respectivement le champ de déplacement et la force de contact le long des faces de la fissure.

La première utilisation de la méthode X-FEM pour un contact frottant a été employée pour un chargement statique monotone et uniaxial [25]. Notre but est la simulation du comportement de fissure de fatigue incluant le contact frottant le long de ses faces pour des chargements multi-axiaux non monotones et quasi-statiques. Nous allons développer une formulation adaptée à ces spécificités.

La stratégie du schéma itératif de résolution, schéma qui est une situation dégénérée de la méthode LATIN conformément aux travaux de Champaney [19], consiste à :

- premièrement, diviser les équations du problème en deux sous-ensembles :
 - un groupe d'équations locales, généralement non linéaires, définissant l'ensemble L , et
 - un groupe d'équations linéaires, généralement globales, définissant l'ensemble G ,

- deuxièmement, trouver la solution approchée en suivant une succession d'itérations dont le processus se fait en deux étapes. En effet, pour chaque itération $i+1$, la solution (indicée $\overset{L}{s}_{i+\frac{1}{2}}$) de l'ensemble L est déterminée durant l'étape locale, puis ensuite, la solution (indicée $\overset{G}{s}_{i+1}$) de l'ensemble G est déterminée durant l'étape globale.

Par souci de clarté nous omettrons les exposants L et G , sachant que les quantités de chaque espace sont identifiables par les indices i ou $i+\frac{1}{2}$. D'après le bilan des équations du problème, rapporté dans l'encadré de la section 2.1 du chapitre 2 (page 40), L est constitué des équations (2.5)-(2.10) du chapitre 2 tandis que G est constitué des équations (2.1)-(2.4) de ce même chapitre.

L'initialisation du schéma peut être construite à partir d'un calcul élastique avec le vecteur d'état $s = (u, \sigma, \omega, t)$ (voir figure 2.6), σ étant les contraintes définies dans la structure. Le nouvel itéré $s_{i+\frac{1}{2}}$ est construit à partir de s_i . Il appartient à la variété L et est défini par la direction de montée E^+ . Quant à l'itéré s_{i+1} , il est construit à partir de $s_{i+\frac{1}{2}}$ et appartient à la variété G . Il est obtenu par la direction de descente E^- .

Les espaces E^+ et E^- sont caractérisables par des opérateurs, H^+ et H^- respectivement. Pour que la première étape soit locale, l'opérateur H^+ doit l'être aussi. D'autre part, l'opérateur H^- est choisi linéaire afin que l'étape globale soit linéaire. Par suite, la direction de recherche E^+ adoptée pour la résolution est associée à un opérateur constant linéaire \mathbf{K}_0 . Ainsi, les équations additionnelles définies par l'opérateur E^+ n'impliquent que les quantités locales, ω et t , par les expressions :

$$t_{i+\frac{1}{2}} - t_i = \mathbf{K}_0(\omega_{i+\frac{1}{2}} - \omega_i) \quad (3.1)$$

L'opérateur associé à E^- est défini par $-\mathbf{K}_0$ tel que les équations de recherche sont :

$$t_{i+1} - t_{i+\frac{1}{2}} = -\mathbf{K}_0(\omega_{i+1} - \omega_{i+\frac{1}{2}}) \quad (3.2)$$

Pour assurer la convergence du schéma itératif [54], l'opérateur constant linéaire \mathbf{K}_0 doit être symétrique défini positif, et la loi de comportement doit être maximale monotone. Ces conditions étant respectées, l'algorithme converge vers la solution.

L'opérateur H^+ utilisé par Dolbow et al. [25] est $\mathbf{K}_0 = k_0 Id$, avec Id la matrice identité et k_0 un réel positif. Ces auteurs ont étudié l'influence du paramètre k_0 sur la vitesse de convergence pour une situation de contact parfait, c'est à dire une situation où les quantités ω et t sont telles que :

$$\omega^+ = \omega^-, \quad t^+ = -t^-. \quad (3.3)$$

Ils ont également montré que la qualité de la solution n'était pas affectée par la variation de ce paramètre, mais que seul le nombre d'itérations à convergence était modifié. D'autre part, d'après les résultats de convergence énoncés dans [54], la méthode converge toujours vers la solution du problème discrétisé. Pour un Lagrangien augmenté, la valeur de la pénalité influe sur la vitesse de convergence mais pas sur la convergence. De même pour

la LATIN, la convergence est assurée par le paramètre k_0 , et seule la vitesse de convergence est influencée par sa valeur.

L'utilisation de la méthode LATIN pour traiter des problèmes de décomposition de domaine ou de contact statique en fatigue uniaxiale, a abouti à de bons résultats en choisissant le paramètre k_0 comme le rapport de la dimension de la rigidité sur la longueur caractéristique du problème.

Nous utiliserons donc comme opérateur H^+ la matrice $\mathbf{K}_0 = k_0 Id$ avec $k_0 = \frac{E}{b}$, E étant le module de Young et b la longueur de la fissure choisie comme longueur caractéristique dans ce cas. H^- sera associé à l'opérateur $-\mathbf{K}_0$.

Les deux étapes du schéma itératif vont être détaillées dans les sections suivantes.

Un critère d'arrêt est calculé après chaque étape globale. Son expression est explicitée section 3.2.

3.1.2 L'étape locale de la méthode LATIN

L'étape locale correspond à la résolution du problème de contact unilatéral avec frottement. La formulation de ce problème est mixte car elle combine des conditions aux limites de deux types : en déplacements et en contraintes. La difficulté d'une telle résolution réside dans la non-connaissance a priori de la répartition des zones d'adhérence, de glissement et d'ouverture le long de la fissure, zones où s'appliquent les conditions aux limites différentes, exprimées sous forme d'équations et d'inéquations. Pour nous affranchir des hypothèses quant à cette répartition des différentes zones, les conditions aux limites sont intégrées dans la formulation du problème sous forme de deux opérateurs : \tilde{C}_I et \tilde{G}_I , qui vont être introduits lors de la présentation de la méthode.

Par rapport au problème classique du contact à deux corps, l'aire potentielle de contact est ici définie par les lèvres de la fissure. Elle sera discrétisée indirectement par les points de Gauss des éléments d'interface. La résolution du contact se fera en ces points. Contrairement à une résolution de contact entre deux corps conduite uniquement sur l'aire "courante" de contact A_C , la résolution est menée sur A_p comme indiqué sur la figure 3.1.

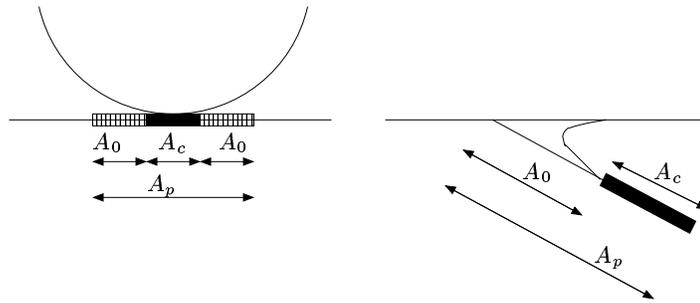


FIG. 3.1 – Description de A_p l'aire potentielle de contact, A_c l'aire courante et A_0 l'aire d'ouverture

L'initialisation de l'étape locale (avant un premier calcul élastique) s'effectue en considérant que les deux faces de la fissure sont adhérentes. Les étapes locales suivantes considèrent qu'une étape globale a été effectuée ; par conséquent, nous disposons de la solution globale de l'itération i : $s_i = (u_i, \sigma_i, \omega_i, t_i)$. L'étape locale détermine la solution à l'itération intermédiaire $(i + \frac{1}{2})$, notée $s_{i+\frac{1}{2}} = (u_{i+\frac{1}{2}}, \sigma_{i+\frac{1}{2}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}, t_{i+\frac{1}{2}})$, qui doit satisfaire sur $\Gamma_C = \Gamma_C^+ \cup \Gamma_C^-$:

- les conditions de contact unilatéral

$$\left[\omega_{N,i+\frac{1}{2}} \right] \geq 0, \quad (3.4)$$

$$F_{N,i+\frac{1}{2}} \leq 0, \quad (3.5)$$

$$\left[\omega_{N,i+\frac{1}{2}} \right] \cdot F_{N,i+\frac{1}{2}} = 0, \quad (3.6)$$

- les conditions de frottement de Coulomb

$$|F_{T,i+\frac{1}{2}}| < \mu_C |F_{N,i+\frac{1}{2}}| \Rightarrow \Delta \left[\omega_{T,i+\frac{1}{2}} \right] = 0, \quad (3.7)$$

$$|F_{T,i+\frac{1}{2}}| = \mu_C |F_{N,i+\frac{1}{2}}| \Rightarrow \exists \lambda \geq 0, \Delta \left[\omega_{T,i+\frac{1}{2}} \right] = \lambda F_{T,i+\frac{1}{2}}. \quad (3.8)$$

μ_C étant le coefficient de frottement le long des faces de la fissure,

- les équations additionnelles

$$t_{i+\frac{1}{2}}^+ - t_i^+ = \mathbf{K}_0(\omega_{i+\frac{1}{2}}^+ - \omega_i^+) \text{ sur } \Gamma_C^+, \quad (3.9)$$

$$t_{i+\frac{1}{2}}^- - t_i^- = \mathbf{K}_0(\omega_{i+\frac{1}{2}}^- - \omega_i^-) \text{ sur } \Gamma_C^-. \quad (3.10)$$

- l'équilibre des forces de contact

$$t_{N,i+\frac{1}{2}}^+ = -t_{N,i+\frac{1}{2}}^- \quad (3.11)$$

$$t_{T,i+\frac{1}{2}}^+ = -t_{T,i+\frac{1}{2}}^- \quad (3.12)$$

avec pour notation

- les indices N et T représentant les coordonnées normale et tangentielle,
- $[\omega]$ définissant le saut de déplacement à l'interface par l'expression

$$[\omega] = \omega^- - \omega^+, \quad (3.13)$$

- F_N la force de contact sur Γ_C , telle que $F_N = t_N^+$,
- F_T la force tangentielle sur Γ_C , telle que $F_T = t_T^+$,
- $\Delta[\omega]$ correspondant à l'incrément du saut de déplacement, c'est-à-dire la différence entre le saut de déplacement de l'itération i du pas t_n et celui obtenu à convergence au pas de chargement précédent, défini par l'équation (2.12).

Les conditions aux limites pour la fissure exprimées sous forme d'inéquations, ne sont pas exploitables pour la constitution de systèmes de résolution. D'autre part les conditions de frottement lient plusieurs inconnues. La résolution du problème dans sa globalité n'est pas possible directement. Une stratégie consiste à le scinder en deux problèmes partiels, un problème de contact normal et un problème de contact tangentiel. Ces deux problèmes seront résolus successivement à chaque étape locale. Après résolution du problème normal, la force de contact $F_{N,i+\frac{1}{2}}$ est connue. C'est alors une donnée pour la résolution du problème tangentiel.

Dans la section suivante, nous allons exposer la démarche établie pour la résolution du problème normal.

Résolution du problème normal

Le problème normal regroupe les équations (3.4) à (3.6), et (3.9) à (3.11). A l'étape $i + \frac{1}{2}$, il s'agit de déterminer s'il y a contact ou séparation du milieu. En utilisant les équations additionnelles (3.9), (3.10), et l'expression matricielle de \mathbf{K}_0 , nous pouvons établir de manière générale les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} (t_{N,i+\frac{1}{2}}^- - t_{N,i+\frac{1}{2}}^+) &= (t_{N,i}^- - t_{N,i}^+) - k_0(\omega_{N,i}^- - \omega_{N,i}^+) \\ &\quad + k_0(\omega_{N,i+\frac{1}{2}}^- - \omega_{N,i+\frac{1}{2}}^+) \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} (t_{N,i+\frac{1}{2}}^+ + t_{N,i+\frac{1}{2}}^-) &= (t_{N,i}^+ + t_{N,i}^-) - k_0(\omega_{N,i}^+ + \omega_{N,i}^-) \\ &\quad + k_0(\omega_{N,i+\frac{1}{2}}^+ + \omega_{N,i+\frac{1}{2}}^-) \end{aligned} \quad (3.15)$$

En reportant (3.11) dans ces équations, nous obtenons

$$F_{N,i+\frac{1}{2}} = k_0 \tilde{C}_I - \frac{k_0}{2} (\omega_{N,i+\frac{1}{2}}^- - \omega_{N,i+\frac{1}{2}}^+) \quad (3.16)$$

$$0 = (t_{N,i}^+ + t_{N,i}^-) - k_0(\omega_{N,i}^+ + \omega_{N,i}^-) + k_0(\omega_{N,i+\frac{1}{2}}^+ + \omega_{N,i+\frac{1}{2}}^-) \quad (3.17)$$

en posant

$$\tilde{C}_I = \frac{1}{2}(\omega_{N,i}^- - \omega_{N,i}^+) - \frac{1}{2k_0}(t_{N,i}^- - t_{N,i}^+). \quad (3.18)$$

S'il y a contact, alors $[\omega_{N,i+\frac{1}{2}}] = 0$ et $F_{N,i+\frac{1}{2}} \leq 0$, et les équations (3.16) et (3.17) deviennent :

$$F_{N,i+\frac{1}{2}} = k_0 \tilde{C}_I \leq 0 \quad (3.19)$$

$$0 = (t_{N,i}^+ + t_{N,i}^-) - k_0(\omega_{N,i}^+ + \omega_{N,i}^-) + 2k_0\omega_{N,i+\frac{1}{2}}^+ \quad (3.20)$$

c'est à dire :

$$t_{N,i+\frac{1}{2}}^+ = -t_{N,i+\frac{1}{2}}^- = k_0 \tilde{C}_I \quad (3.21)$$

$$\omega_{N,i+\frac{1}{2}}^+ = \omega_{N,i+\frac{1}{2}}^- = \frac{1}{2}(\omega_{N,i}^+ + \omega_{N,i}^-) - \frac{1}{2k_0}(t_{N,i}^+ + t_{N,i}^-) \quad (3.22)$$

S'il y a ouverture, alors $[\omega_{N,i+\frac{1}{2}}] > 0$ et $F_{N,i+\frac{1}{2}} = 0$, et l'équation (3.16) devient :

$$\tilde{C}_I = \frac{1}{2}(\omega_{N,i+\frac{1}{2}}^- - \omega_{N,i+\frac{1}{2}}^+) > 0. \quad (3.23)$$

Pour obtenir les déplacements normaux, nous utilisons les équations additionnelles, d'où les expressions des champs de déplacements normaux :

$$\omega_{N,i+\frac{1}{2}}^+ = \omega_{N,i}^+ - \frac{1}{k_0}t_{N,i}^+ \quad (3.24)$$

$$\omega_{N,i+\frac{1}{2}}^- = \omega_{N,i}^- - \frac{1}{k_0}t_{N,i}^-. \quad (3.25)$$

Nous avons donc établi les quantités normales indicées $i + \frac{1}{2}$ lorsqu'il y a contact et ouverture, en fonction des variables indicées i . Pour déterminer les zones de contact, il est nécessaire de disposer d'un 'indicateur de contact'. Nous avons vu que s'il y a contact alors $\tilde{C}_I \leq 0$, et lorsqu'il y a séparation des faces de la fissure $\tilde{C}_I > 0$. Le paramètre \tilde{C}_I apparaît donc comme un 'indicateur de contact' potentiel. Montrons donc que les réciproques de ces conditions établissent l'évaluation de \tilde{C}_I comme une condition suffisante pour savoir s'il y a contact ou non.

Supposons $\tilde{C}_I \leq 0$. D'après l'équation (3.16) nous avons

$$k_0 \tilde{C}_I = F_{N,i+\frac{1}{2}} + \frac{k_0}{2}(\omega_{N,i+\frac{1}{2}}^- - \omega_{N,i+\frac{1}{2}}^+) \leq 0 \quad (3.26)$$

S'il n'y a pas contact, alors $[\omega_{N,i+\frac{1}{2}}] > 0$ et $F_{N,i+\frac{1}{2}} = 0$, ce qui implique

$$\tilde{C}_I = \frac{1}{2}(\omega_{N,i+\frac{1}{2}}^- - \omega_{N,i+\frac{1}{2}}^+) > 0 \quad (3.27)$$

ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $\tilde{C}_I \leq 0$. Par conséquent, il ne peut y avoir ouverture.

S'il y a contact, alors $[\omega_{N,i+\frac{1}{2}}] = 0$ et $F_{N,i+\frac{1}{2}} \leq 0$, ce qui implique

$$k_0 \tilde{C}_I = F_{N,i+\frac{1}{2}} \leq 0 \quad (3.28)$$

Ceci est cohérent avec l'hypothèse $\tilde{C}_I \leq 0$.

Par la même démarche nous montrons que si $\tilde{C}_I > 0$, l'hypothèse est contredite si l'on suppose qu'il y a contact, et que seule l'ouverture des faces de la fissure aboutit à respecter l'hypothèse.

Finalement, nous disposons d'un 'indicateur de contact' n'utilisant pas les quantités inconnues, et tel que

- si $\tilde{C}_I > 0$, alors il y a séparation du milieu,
- si $\tilde{C}_I \leq 0$, alors il y a contact.

Pour une ouverture, la résolution du problème tangentiel aboutit aux expressions des quantités tangentielles suivantes :

$$t_{T,i+\frac{1}{2}}^+ = -t_{T,i+\frac{1}{2}}^- = 0 \quad (3.29)$$

$$\omega_{T,i+\frac{1}{2}}^{+/-} = \omega_{T,i+\frac{1}{2}}^{+/-} - \frac{1}{k_0} t_{T,i}^{+/-} \quad (3.30)$$

Pour une configuration de contact, le problème tangentiel est résolu par l'approche qui va être exposée au paragraphe suivant.

Résolution du problème tangentiel

Le problème tangentiel est formulé à partir des équations (3.7) à (3.10), et (3.12).

Pour une valeur donnée du coefficient de frottement, μ_C , nous posons $g = \mu_C |F_{N,i+\frac{1}{2}}|$. D'après les équations additionnelles (3.9) et (3.10), nous pouvons écrire de manière générale les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} (t_{T,i+\frac{1}{2}}^- - t_{T,i+\frac{1}{2}}^+) &= (t_{T,i}^- - t_{T,i}^+) - k_0(\omega_{T,i}^- - \omega_{T,i}^+) \\ &\quad + k_0(\omega_{T,i+\frac{1}{2}}^- - \omega_{T,i+\frac{1}{2}}^+) \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} (t_{T,i+\frac{1}{2}}^+ + t_{T,i+\frac{1}{2}}^-) &= (t_{T,i}^+ + t_{T,i}^-) - k_0(\omega_{T,i}^+ + \omega_{T,i}^-) \\ &\quad + k_0(\omega_{T,i+\frac{1}{2}}^+ + \omega_{T,i+\frac{1}{2}}^-) \end{aligned} \quad (3.32)$$

En utilisant la solution à convergence obtenue au pas de temps précédent, $\omega^{(n-1)}$, et en simplifiant les expressions obtenues, ces équations deviennent :

$$-2F_{T,i+\frac{1}{2}} = (t_{T,i}^- - t_{T,i}^+) - k_0[\Delta\omega_{T,i}] + k_0[\Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}] \quad (3.33)$$

$$0 = (t_{T,i}^+ + t_{T,i}^-) - k_0(\Delta\omega_{T,i}^+ + \Delta\omega_{T,i}^-) + k_0(\Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}^+ + \Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}^-) \quad (3.34)$$

Posons

$$F_{T,i+\frac{1}{2}} = \tilde{G}_I - \frac{k_0}{2} [\Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}] \quad (3.35)$$

avec

$$\tilde{G}_I = \frac{k_0}{2}[\Delta\omega_{T,i}] - \frac{1}{2}(t_{T,i}^- - t_{T,i}^+). \quad (3.36)$$

Pour un contact adhérent, la condition $|F_{T,i+\frac{1}{2}}| < g$ entraîne $[\Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}] = 0$, et les équations (3.33) et (3.34) deviennent

$$F_{T,i+\frac{1}{2}} = \tilde{G}_I \quad \text{et} \quad |\tilde{G}_I| < g \quad (3.37)$$

$$0 = (t_{T,i}^+ + t_{T,i}^-) - k_0(\Delta\omega_{T,i}^+ + \Delta\omega_{T,i}^-) + 2k_0\Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}^+ \quad (3.38)$$

c'est-à-dire :

$$t_{T,i+\frac{1}{2}}^+ = -t_{T,i+\frac{1}{2}}^- = \tilde{G}_I \quad (3.39)$$

$$\Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}^+ = \Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}^- = \frac{1}{2}(\Delta\omega_{T,i}^+ + \Delta\omega_{T,i}^-) - \frac{1}{2k_0}(t_{T,i}^+ + t_{T,i}^-) \quad (3.40)$$

Pour un contact glissant, la condition $|F_{T,i+\frac{1}{2}}| = g$ entraîne que les quantités $[\Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}]$ et $F_{T,i+\frac{1}{2}}$ sont de même signe, et l'équation (3.33) devient

$$F_{T,i+\frac{1}{2}} + \frac{k_0}{2}[\Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}] = \tilde{G}_I \quad \rightarrow \quad |\tilde{G}_I| \geq g \quad (3.41)$$

Il reste à évaluer le signe de $F_{T,i+\frac{1}{2}}$ et les valeurs des incréments de déplacement. En effectuant le produit scalaire de (3.35) avec la quantité $F_{T,i+\frac{1}{2}}$, on obtient :

$$|F_{T,i+\frac{1}{2}}|^2 = \tilde{G}_I \cdot F_{T,i+\frac{1}{2}} - \frac{k_0}{2}[\Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}] \cdot F_{T,i+\frac{1}{2}} \quad (3.42)$$

Le membre de droite est nécessairement positif. Par suite

$$\tilde{G}_I \cdot F_{T,i+\frac{1}{2}} > \frac{k_0}{2}[\Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}] \cdot F_{T,i+\frac{1}{2}} > 0, \quad (3.43)$$

ce qui entraîne que \tilde{G}_I et $F_{T,i+\frac{1}{2}}$ sont de même signe et donc

$$F_{T,i+\frac{1}{2}} = g \frac{\tilde{G}_I}{|\tilde{G}_I|} \quad (3.44)$$

Pour déduire les déplacements tangentiels, on utilise les équations additionnelles, d'où :

$$\Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}^+ = \Delta\omega_{T,i}^+ - \frac{1}{k_0}(t_{T,i+\frac{1}{2}}^+ - t_{T,i}^+) \quad (3.45)$$

$$\Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}^- = \Delta\omega_{T,i}^- - \frac{1}{k_0}(t_{T,i+\frac{1}{2}}^- - t_{T,i}^-). \quad (3.46)$$

Nous avons donc établi les quantités tangentielles indicées $i + \frac{1}{2}$ pour des zones en adhérence et en glissement, en fonction des variables indicées i . Pour déterminer ces zones, il est nécessaire de disposer d'un 'indicateur de frottement'. Nous avons vu que s'il y a adhérence alors $\tilde{G}_I < g$, et lorsqu'il y a glissement des faces $\tilde{G}_I \geq g$. Le paramètre \tilde{G}_I apparaît donc comme un 'indicateur de frottement' potentiel. Montrons donc que les réciproques de ces conditions établissent l'évaluation de \tilde{G}_I comme une condition suffisante pour déterminer la répartition des zones d'adhérence et de glissement le long des faces de la fissure.

Supposons tout d'abord $|\tilde{G}_I| < g$. Montrons que si on suppose un état glissant, alors on aboutit à une absurdité. Si on considère un contact glissant, alors $[\Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}]$ et $F_{T,i+\frac{1}{2}}$ sont de même signe, et alors :

$$|F_{T,i+\frac{1}{2}}| + \left| \frac{k_0}{2} [\Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}] \right| = |\tilde{G}_I| < g. \quad (3.47)$$

Or ceci conduit à dire que :

$$|F_{T,i+\frac{1}{2}}| < g - \left| \frac{k_0}{2} [\Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}] \right| < g, \quad (3.48)$$

ce qui caractérise un contact adhérent. En conséquence, le contact ne peut pas être glissant. La seule hypothèse possible est un contact adhérent.

Supposons à présent que $|\tilde{G}_I| \geq g$. Montrons que si on suppose un état adhérent, alors on aboutit à une absurdité. L'état adhérent suppose $[\Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}] = 0$, d'où $|\tilde{G}_I| = |F_{T,i+\frac{1}{2}}| \geq g$ ce qui est absurde car l'état est adhérent. La seule hypothèse possible est un contact glissant.

L'état glissant est une situation où $F_{T,i+\frac{1}{2}} = g$, ce qui correspond à être sur le cône de frottement de Coulomb. Or numériquement, il peut apparaître des situations où l'on est en dehors du cône de frottement. L'évaluation $|\tilde{G}_I| \geq g$ permet de prendre en compte ces situations et de forcer la solution à rester sur ce cône, en imposant la force tangentielle de prendre la valeur sur le cône.

Finalement, nous disposons d'un 'indicateur de frottement' n'utilisant pas les quantités inconnues, et tel que

- si $\tilde{G}_I < g$, alors il y a adhérence,
- si $\tilde{G}_I \geq g$, alors il y a glissement.

Bilan étape locale

Nous avons donc établi une nouvelle formulation pour la résolution du contact frottant le long des faces de la fissure en tenant compte de l'hystérésis liée au frottement ou l'effet d'histoire. Ainsi, l'étape locale permet la détermination des zones d'ouverture, de contact adhérent ou glissant. La démarche développée se résume par l'algorithme suivant.

Nous évaluons $\tilde{C}_I = \frac{1}{2}(\omega_{N,i}^- - \omega_{N,i}^+) - \frac{1}{2k_0}(t_{N,i}^- - t_{N,i}^+)$

Si $\tilde{C}_I > 0$ alors il n'y a pas contact mais séparation du milieu, et les quantités normales et tangentielles deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{N,i+\frac{1}{2}}^+ = -t_{N,i+\frac{1}{2}}^- = 0 \\ t_{T,i+\frac{1}{2}}^+ = -t_{T,i+\frac{1}{2}}^- = 0 \\ \omega_{N,i+\frac{1}{2}}^+ = \omega_{N,i}^+ - \frac{1}{k_0}t_{N,i}^+ \\ \omega_{N,i+\frac{1}{2}}^- = \omega_{N,i}^- - \frac{1}{k_0}t_{N,i}^- \\ \omega_{T,i+\frac{1}{2}}^+ = \omega_{T,i}^+ - \frac{1}{k_0}t_{T,i}^+ \\ \omega_{T,i+\frac{1}{2}}^- = \omega_{T,i}^- - \frac{1}{k_0}t_{T,i}^- \end{array} \right. \quad (3.49)$$

Si $\tilde{C}_I \leq 0$ alors il y a contact. Deux problèmes partiels sont alors établis :

– le problème normal où les quantités normales deviennent

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{N,i+\frac{1}{2}}^+ = -t_{N,i+\frac{1}{2}}^- = k_0\tilde{C}_I \\ \omega_{N,i+\frac{1}{2}}^+ = \omega_{N,i+\frac{1}{2}}^- = \frac{1}{2}(\omega_{N,i}^+ + \omega_{N,i}^-) - \frac{1}{2k_0}(t_{N,i}^+ + t_{N,i}^-) \end{array} \right. \quad (3.50)$$

– le problème tangentiel où les quantités tangentielles sont établies en fonction du problème considéré :

– sans frottement :

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{T,i+\frac{1}{2}}^+ = -t_{T,i+\frac{1}{2}}^- = 0 \\ \omega_{T,i+\frac{1}{2}}^+ = \omega_{T,i}^+ - \frac{1}{k_0}t_{T,i}^+ \\ \omega_{T,i+\frac{1}{2}}^- = \omega_{T,i}^- - \frac{1}{k_0}t_{T,i}^- \end{array} \right. \quad (3.51)$$

– avec frottement : on calcule $g = \mu_C |t_{N,i+\frac{1}{2}}^+|$ grâce au problème normal et on évalue

$$\tilde{G}_I = \frac{1}{2}(t_{T,i}^+ - t_{T,i}^-) + \frac{k_0}{2}(\Delta\omega_{T,i}^+ - \Delta\omega_{T,i}^-).$$

– Si $|\tilde{G}_I| < g$ alors il y a adhérence et les quantités deviennent

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{T,i+\frac{1}{2}}^+ = -t_{T,i+\frac{1}{2}}^- = \tilde{G}_I \\ \Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}^+ = \Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}^- = \frac{1}{2}(\Delta\omega_{T,i}^+ + \Delta\omega_{T,i}^-) - \frac{1}{2k_0}(t_{T,i}^+ + t_{T,i}^-) \end{array} \right. \quad (3.52)$$

– Si $|\tilde{G}_I| \geq g$ alors il y a glissement et les quantités deviennent

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{T,i+\frac{1}{2}}^+ = -t_{T,i+\frac{1}{2}}^- = g \frac{\tilde{G}_I}{|\tilde{G}_I|} \\ \Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}^+ = \Delta\omega_{T,i}^+ - \frac{1}{k_0}(t_{T,i+\frac{1}{2}}^+ - t_{T,i}^+) \\ \Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}^- = \Delta\omega_{T,i}^- - \frac{1}{k_0}(t_{T,i+\frac{1}{2}}^- - t_{T,i}^-). \end{array} \right. \quad (3.53)$$

Pour le premier pas de chargement, l'étape locale est résolue par l'approche développée par Dolbow et al. [25]. Les opérateurs C_I et G_I sont définis par les équations suivantes

$$C_I = \frac{1}{2}(\omega_{N,i}^- - \omega_{N,i}^+) - \frac{1}{2k_0}(t_{N,i}^- - t_{N,i}^+) \quad (3.54)$$

$$G_I = \frac{k_0}{2}(\omega_{T,i}^- - \omega_{T,i}^+) - \frac{1}{2}(t_{T,i}^- - t_{T,i}^+) \quad (3.55)$$

La mise à jour des quantités normales et tangentielles pour le premier pas de chargement et les suivants est rapportée dans les tableaux D.1 et D.2 de l'annexe D. Les opérateurs C_I et \tilde{C}_I sont homogènes à des déplacements et G_I et \tilde{G}_I à des forces de contact, ce qui est représentatif de chaque phénomène étudié (déplacement pour représenter ouverture/contact, force tangentielle pour adhérence/glissement).

Nous avons opté ici pour une résolution explicite du problème de contact, en résolvant d'abord le problème de contact unilatéral, puis ensuite le problème tangentiel. Nous avons vérifié numériquement et théoriquement que faire quelques itérations de point fixe pour garder le caractère implicite du problème n'apportait aucune amélioration. En effet, réinjecter les valeurs en sortie de l'étape locale à nouveau dans cette étape ne change en rien l'expression des quantités locales. Ceci est propre à la méthode LATIN, la solution locale appartenant déjà à l'ensemble L , aucune autre solution ne peut-être trouvée à l'intersection de E^+ et L . La vérification théorique est exposée en annexe E.

La méthode de résolution du contact qui vient d'être présentée est valable quelle que soit la fissure. A présent, exposons la résolution de l'étape globale.

3.1.3 L'étape globale de la méthode LATIN

Nous cherchons u_{i+1} , σ_{i+1} , ω_{i+1} , t_{i+1} , vérifiant

$$\operatorname{div} \sigma_{i+1} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.56)$$

$$\sigma_{i+1} = \mathcal{K}\epsilon(u_{i+1}) \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.57)$$

$$\sigma_{i+1} \cdot \vec{n} = \bar{F} \quad \text{sur } \Gamma_F, \quad (3.58)$$

$$u_{i+1} = \bar{U} \quad \text{sur } \Gamma_U, \quad (3.59)$$

sous la contrainte de continuité le long de Γ_C

$$u_{i+1}|_{\Gamma_C} = \omega_{i+1} \quad (3.60)$$

et dans la direction (de recherche)

$$t_{i+1} - t_{i+\frac{1}{2}} = -\mathbf{K}_0(\omega_{i+1} - \omega_{i+\frac{1}{2}}). \quad (3.61)$$

L'équation (3.61) correspond à l'équation de recherche de la direction E^- . L'équation (3.60) explicite les conditions de continuité du déplacement sur les éléments d'interface introduit avec la méthode X-FEM. A partir de la relation d'équilibre, de l'écriture de σ en terme de déplacement et en tenant compte des équations de recherche de E^- , la formulation variationnelle de ce problème est (cf l'équation (2.18) du chapitre 2),

$$\left. \begin{array}{l} \text{trouver } u_{i+1} \in U_{ad} \text{ tel que } \forall \delta u \in U_{ad}, \forall \delta \omega \in U_{ad} \\ \\ a(u_{i+1}, \delta u) + \int_{\Gamma_C} \mathbf{K}_0 u_{i+1} \cdot \delta u \, d\Gamma \\ \quad = (f, \delta u) + (\bar{F}, \delta u) + \int_{\Gamma_C} (t_{i+\frac{1}{2}} + \mathbf{K}_0 \omega_{i+\frac{1}{2}}) \cdot \delta u \, d\Gamma \\ \\ \text{sous la contrainte de continuité le long de } \Gamma_C \\ \\ u_{i+1}|_{\Gamma_C} = \omega_{i+1} \end{array} \right\}$$

La démarche développée par Champaney consistait à résoudre ce problème par rapport à la variable u_{i+1} et à déduire les autres inconnues du problème des équations suivantes :

$$\sigma_{i+1} = \mathcal{K}\epsilon(u_{i+1}) \quad (3.62)$$

$$\omega_{i+1} = u_{i+1}|_{\Gamma_C} \quad (3.63)$$

$$t_{i+1} = t_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{K}_0(\omega_{i+1} - \omega_{i+\frac{1}{2}}) \quad (3.64)$$

Ainsi, la résolution de l'étape ne mettait en jeu que des quantités globales. Cette démarche était nécessaire pour un calcul d'assemblages de structures, ce qui permettait un calcul parallèle et un gain de temps sur le calcul global de la structure.

Dans la démarche introduite par Dolbow and al., la contrainte de continuité (3.60) est introduite sous le formalisme des multiplicateurs de Lagrange par l'introduction des efforts de contact t_{i+1} , par l'écriture

$$- \int_{\Gamma_C} t_{i+1}(u_{i+1} - \omega_{i+1}) \, d\Gamma. \quad (3.65)$$

Ceci entraîne l'ajout des termes suivants à la dérivée de l'énergie potentielle du système :

$$- \int_{\Gamma_C} \delta t (u_{i+1} - \omega_{i+1}) d\Gamma - \int_{\Gamma_C} t_{i+1} \cdot \delta u d\Gamma + \int_{\Gamma_C} t_{i+1} \cdot \delta \omega d\Gamma, \quad (3.66)$$

avec δt et $\delta \omega$ les champs virtuels des efforts et des déplacements d'interface respectivement, appartenant à des espaces fonctionnels à énergie finie et suffisamment réguliers. Cette démarche introduit l'espace fonctionnel U_a défini par

$$U_a = \left\{ (u, \omega) \in U_{ad}^2 / u|_{\Gamma_C^+} = \omega^+, u|_{\Gamma_C^-} = \omega^- \right\}. \quad (3.67)$$

Finalement nous obtenons l'équation continue à résoudre :

$$\left| \begin{array}{l} \text{trouver } u_{i+1}, \omega_{i+1}, t_{i+1} \text{ tel que } \forall \delta u, \delta \omega, \delta t \\ \\ a(u_{i+1}, \delta u) + \int_{\Gamma_C} \mathbf{K}_0 \omega_{i+1} \cdot \delta \omega d\Gamma \\ \\ - \int_{\Gamma_C} \delta t (u_{i+1} - \omega_{i+1}) d\Gamma - \int_{\Gamma_C} t_{i+1} \cdot \delta u d\Gamma + \int_{\Gamma_C} t_{i+1} \cdot \delta \omega d\Gamma \\ \\ = (f, \delta u) + (\bar{F}, \delta u) + \int_{\Gamma_C} (t_{i+\frac{1}{2}} + \mathbf{K}_0 \omega_{i+\frac{1}{2}}) \cdot \delta \omega d\Gamma \end{array} \right.$$

Une formulation faible est ainsi défini. Elle lie les quantités u_{i+1} , t_{i+1} et ω_{i+1} , et la valeur de σ_{i+1} est déduite à partir de la quantité $u_{(i+1)}$ par la loi de comportement $\sigma_{i+1} = \mathcal{K}\epsilon(u_{i+1})$. C'est une formulation mixte qui fait intervenir le champ de déplacement u et les quantités locales ω et t .

La discrétisation éléments finis introduit l'écriture discrète des déplacements $\{U\} = \{N\}^T \{u\}$, avec $\{N\}$ la matrice d'interpolation et $\{U\}$ le vecteur des variables nodales sur tout le maillage par rapport aux fonctions de forme. Nous définissons les matrices $\mathbf{K}_{u\omega}$, \mathbf{K}_{ut} , $\mathbf{K}_{\omega\omega}$, $\mathbf{K}_{\omega t}$, permettant de lier les degrés de liberté du maillage (respectivement u et ω , u et t , ω et ω et ω et t). Ces écritures nous permettent d'aboutir à l'équation discrétisée du problème sous sa forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & 0 & -\mathbf{K}_{ut} \\ 0 & \mathbf{K}_{\omega\omega} & \mathbf{K}_{\omega t} \\ -\mathbf{K}_{ut}^T & \mathbf{K}_{\omega t}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \{u_{i+1}\} \\ \{\omega_{i+1}\} \\ \{t_{i+1}\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{F\} \\ \mathbf{K}_{\omega t} \{t_{i+\frac{1}{2}}\} + \mathbf{K}_{\omega\omega} \{\omega_{i+\frac{1}{2}}\} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.68)$$

avec $\{F\}$ le vecteur des forces extérieures discrétisées, \mathbf{K} matrice de rigidité du problème, $\{u_{i+1}\}$ les degrés de liberté associés à l'approximation du déplacement, c'est-à-dire les u_i , b_j et c_k^l de l'équation (2.47) du chapitre 2. Ainsi, à chaque étape globale, la solution du problème global est déterminée par les quantités u_{i+1} , ω_{i+1} et t_{i+1} .

3.1.4 Algorithme de résolution

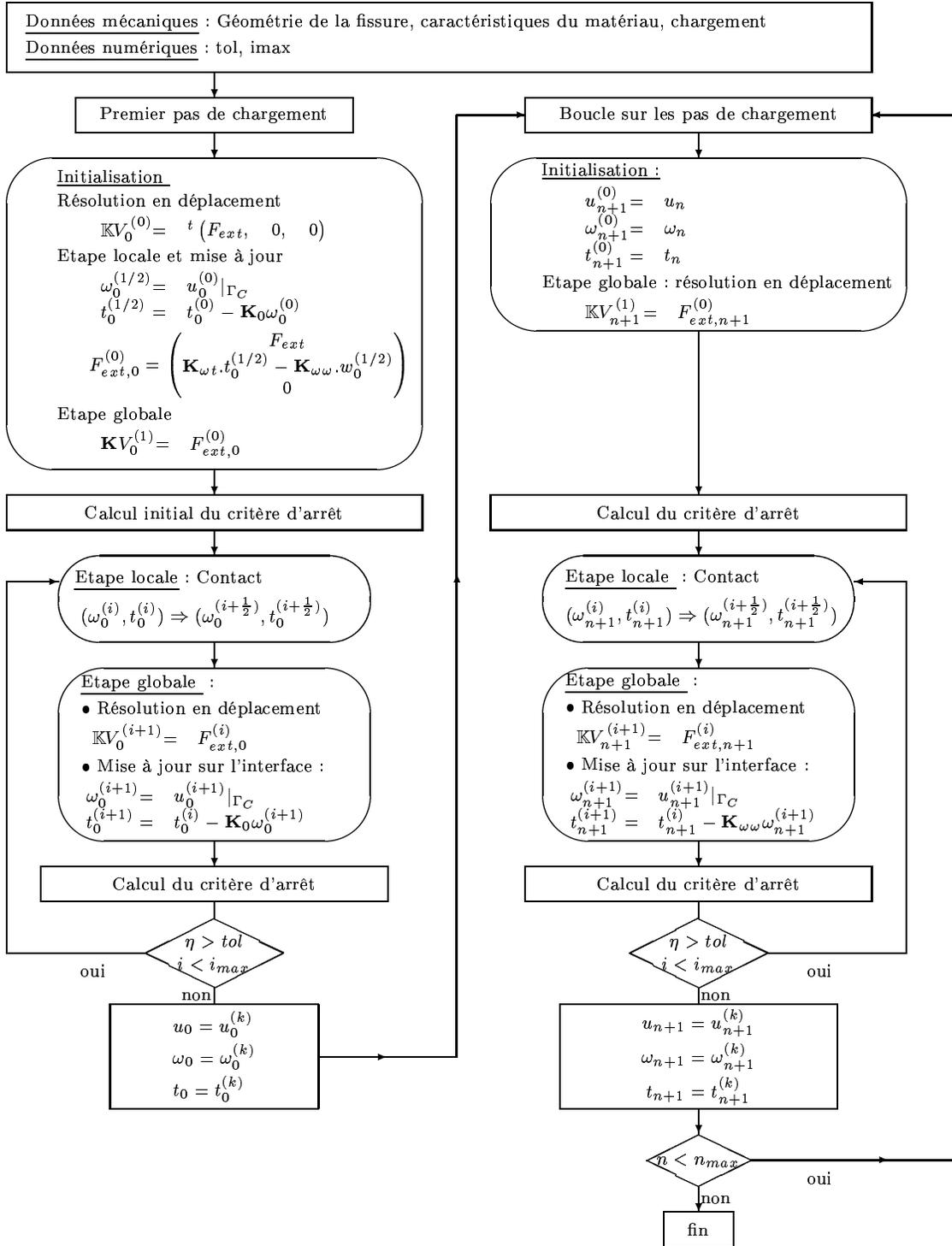
La stratégie employée pour résoudre le problème de contact interfacial soumis à un chargement en fatigue de contact est présentée dans l'organigramme 3.1. Le cycle est décomposé en une succession de pas de chargement. Pour chaque pas de chargement, le processus itératif résout successivement une étape locale suivie d'une étape globale. La notation $V_n^{(i)}$ dans l'organigramme fait référence à l'approximation du champ V à l'itération i pour le pas de chargement n , avec ${}^tV = (u, \omega, t)$. Le système linéaire $\mathbb{K}.V_n^{(i+1)} = F_{ext,n}^{(i)}$ est établi par l'équation (3.68). La matrice \mathbb{K} est une matrice constante incluant la matrice de rigidité et des termes additionnels de couplage entre les variables locales et globales. Cette matrice est assemblée et factorisée uniquement à la première itération. Le membre de droite $F_{ext,n}^{(i)}$ est un vecteur contenant les forces extérieures, les forces de contact et un terme nul. Les forces de contact impliquent l'état de la fissure à l'étape locale.

L'initialisation d'un problème itératif en terme de pas de chargement s'effectue en calculant une étape globale élastique avec les conditions locales telles que :

$$t_{-\frac{1}{2}} = \omega_{-\frac{1}{2}} = 0. \quad (3.69)$$

D'autre part, cette stratégie itérative nécessite le développement d'un critère d'arrêt spécifique adapté au problème de contact. C'est l'objet du paragraphe suivant.

Ces conditions correspondent physiquement à initialiser le calcul en considérant une structure non-fissurée. Pour décrire l'inexistence de la fissure, il suffit donc de décrire un état de contact adhérent, sans discontinuité du champ de déplacement à l'interface.



TAB. 3.1 – Organigramme de la résolution du problème de fatigue tribologique

3.2 Développement d'un critère d'arrêt adapté au problème de contact

Pour stopper le processus itératif, un critère d'arrêt, noté η est introduit. Il est calculé après chaque résolution globale, et considère les quantités locales. Il se définit comme étant la distance entre les approximations globale et locale par l'écriture :

$$\eta^2 = \frac{\|s_{i+1} - s_{i+\frac{1}{2}}\|^2}{\|s_{i+1}\|^2 + \|s_{i+\frac{1}{2}}\|^2} \quad (3.70)$$

Quand η devient inférieur à une tolérance définie par l'utilisateur, le processus itératif est arrêté.

Dans les premières utilisations de la LATIN pour résoudre des problèmes de contact [19, 25], la norme utilisée était définie par :

$$\|s\|^2 = \int_{\Gamma_C} t\mathbf{K}_0^{(-1)}t d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \omega\mathbf{K}_0\omega d\Gamma \quad (3.71)$$

Le champ de déplacement le long des faces de la fissure se décompose en deux parties : une partie normale u_N et une partie tangentielle u_T . Dans la définition du critère d'arrêt, le champ de déplacement et la force agissant à l'interface de la fissure sont introduits sans faire de distinction entre la partie normale et la partie tangentielle de ces champs. Or l'ordre de grandeur de ces deux quantités peut être très différent. Comme cela va être illustré par la suite, en présence d'une zone de contact, la composante normale du saut du champ de déplacement est théoriquement nulle, et l'approximation numérique de cette quantité devient donc très faible. L'évaluation de la composante tangentielle du saut du champ de déplacement peut, quant à elle, atteindre des ordres de grandeur non négligeables. Dans un tel cas, l'évaluation de la norme de la quantité totale est représentative de la norme de la quantité tangentielle. L'arrêt du processus itératif risque donc d'être dépendant uniquement des quantités tangentielles le long de la fissure, l'ordre de grandeur des quantités normales étant insignifiant par rapport à celui des quantités tangentielles.

Afin de considérer les phénomènes des problèmes normal et tangential séparément, une amélioration a été apportée en définissant un nouveau critère d'arrêt par l'expression :

$$\eta^2 = \max(\eta_N) + \max(\eta_T) \quad (3.72)$$

avec les quantités η_N et η_T représentatives de chaque problème (normal/tangential), et formulées par les relations suivantes

$$\eta_N = \frac{\|s_{N,i+1} - s_{N,i+\frac{1}{2}}\|_\infty^2}{\|s_{N,i+1}\|_\infty^2 + \|s_{N,i+\frac{1}{2}}\|_\infty^2}, \quad (3.73)$$

$$\eta_T = \frac{\|s_{T,i+1} - s_{T,i+\frac{1}{2}}\|_\infty^2}{\|s_{T,i+1}\|_\infty^2 + \|s_{T,i+\frac{1}{2}}\|_\infty^2}. \quad (3.74)$$

La norme utilisée ici est la norme infinie définie par

$$\|s\|_{\infty}^2 = k_0 \max_{\Gamma_C} (t^2 + \omega^2) \quad (3.75)$$

La quantité η_N est définie avec les composantes normales des quantités locales, et de même pour η_T seules les composantes tangentielles sont utilisées. Ainsi, pour chaque point de gauss de chaque élément d'interface, les quantités η_N et η_T sont évaluées. La valeur maximale est prise sur tous les points de gauss de tous les éléments d'interface. Le critère d'arrêt η est ainsi représentatif de la position du point de Gauss le long de l'interface où le calcul de l'erreur est maximal comparativement au critère (3.70). Le processus itératif ne se contente plus d'être globalement correct, mais au contraire, la résolution du contact est atteinte à la précision demandée sur tout l'interface de la fissure. Le critère est ainsi plus "restrictif" en ce sens où la solution doit être localement satisfaisante pour tous les points de Gauss. Ceci peut entraîner pour un pas de chargement donné un plus grand nombre d'itérations. Néanmoins ceci conduit généralement à un algorithme incrémental plus robuste et un nombre global d'itérations moindres (du fait d'un cumul d'erreur plus faible au court du temps).

Pour illustrer ces propos, considérons un cas test simplifié. Nous allons mettre en évidence par cet exemple que le nouveau critère aboutit à des résultats satisfaisants en terme de champs locaux, notamment les sauts de déplacements le long de la fissure.

Considérons un massif de longueur 150 mm et de largeur 100 mm, contenant une fissure de longueur 3 mm perpendiculaire par rapport à l'horizontale et positionnée à l'origine du repère comme indiqué dans la figure 3.2.

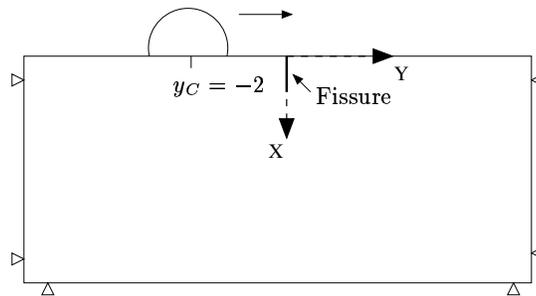


FIG. 3.2 – Données du cas test pour la comparaison de deux critères d'arrêt

Considérons un coefficient de frottement le long de la fissure tel que $\mu_C = 0.1$, et appliquons un chargement normal hertzien en surface du massif se déplaçant de la gauche vers la droite en 5 pas de chargement, avec

$$P_0 = 49 \text{ MPa} \quad (3.76)$$

$$p(y) = P_0 \sqrt{1 - \frac{(y - y_C)^2}{a^2}}, \quad (3.77)$$

a étant la zone de contact du chargement, telle que $2a = 2\text{mm}$. Le centre du chargement y_C se déplace de la gauche vers la droite, sur l'axe horizontal (OY), en partant de la valeur $y_C = -2\text{ mm}$ et en incrémentant de 1 mm jusqu'à $y_C = 2\text{ mm}$. Le maillage contient 110 éléments d'interface et le système linéaire à résoudre contient 10 534 degrés de liberté. La précision demandée est de 10^{-3} .

Les faces de la fissure sont en contact, ce qui induit K_I nul sur tout le cycle. Concernant les variations en K_{II} , elles sont rapportées figure 3.3 pour les deux critères d'arrêt. Le calcul des FIC sera détaillé dans la section suivante.

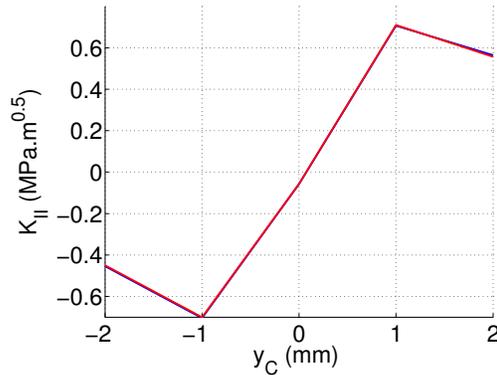


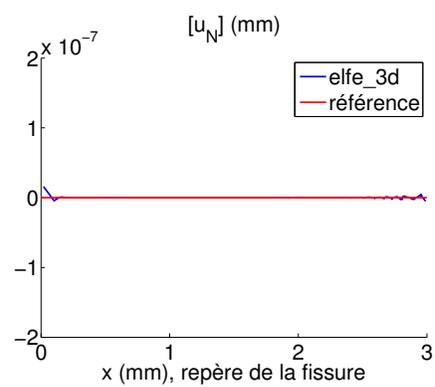
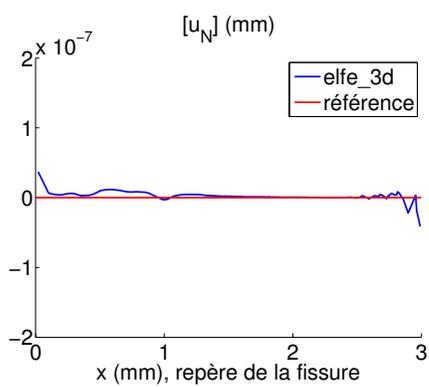
FIG. 3.3 – Variations de K_{II} pour le cas test figure 3.2

L'analyse des FIC n'est pas suffisante, puisqu'il n'y a aucune différence significative. Par conséquent, intéressons-nous aux champs locaux.

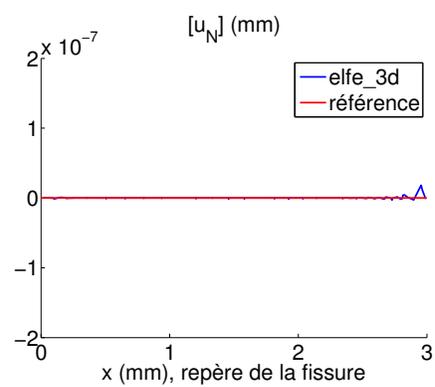
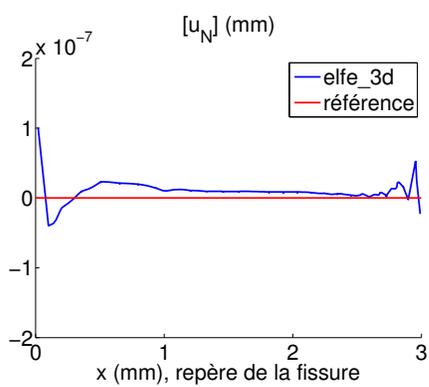
Les figures 3.4 et 3.5 montrent les champs obtenus pour deux calculs identiques (même maillage, même conditions de chargement et géométriques) mais avec des critères d'arrêt différents. L'axe de la fissure est représenté en abscisse, avec l'origine correspondant à la surface. En ordonnée, le saut de déplacement est considéré en mm . Le premier calcul représente les résultats obtenus pour le critère d'arrêt "global", tandis que le second calcul représente ceux obtenus pour le critère d'arrêt "local". Des irrégularités de contact apparaissent sur les sauts de déplacement normaux le long de la face supérieure de la fissure, caractérisant l'aspect global de l'ancien critère.

Il est à noter qu'il y a deux niveaux de comparaison possibles : celle portant sur les FIC, et celle portant sur les champs locaux. L'analyse des champs a montré des imprécisions non représentées par les variations des FIC. Par conséquent, l'introduction du nouveau critère d'arrêt permet d'assurer localement une bonne qualité de solution sur le champ de déplacement.

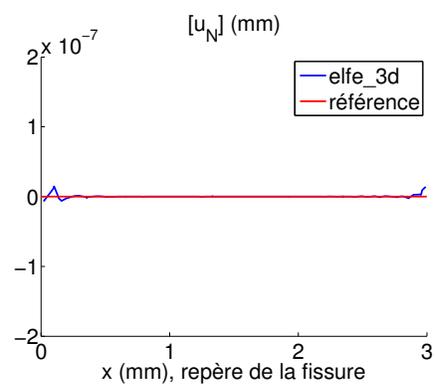
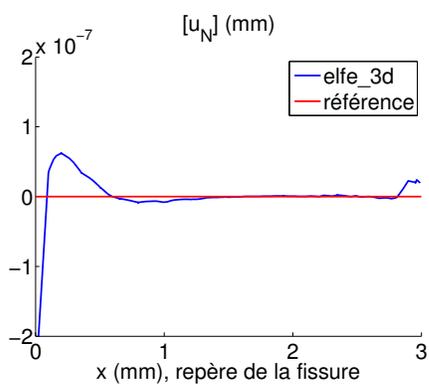
Ce critère d'arrêt sera donc utilisé pour l'ensemble des applications qui vont suivre.



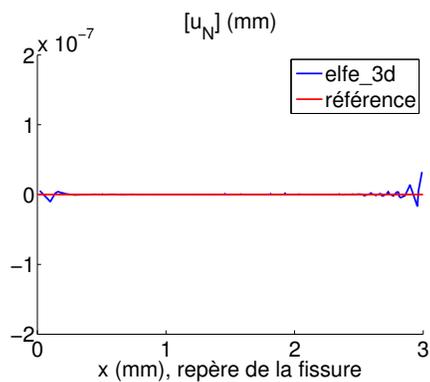
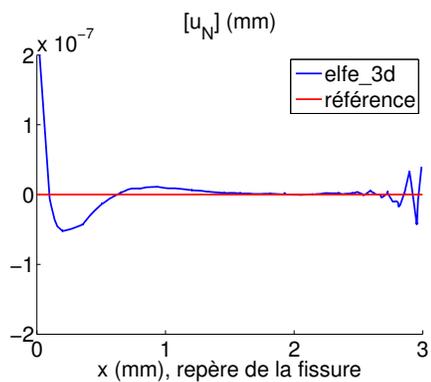
Etape 1



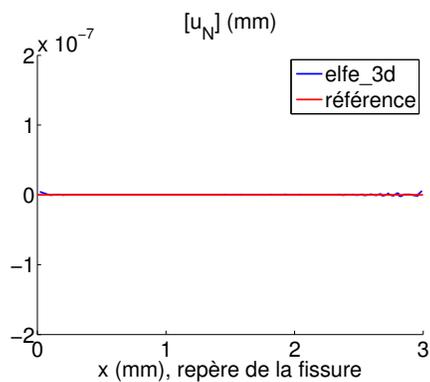
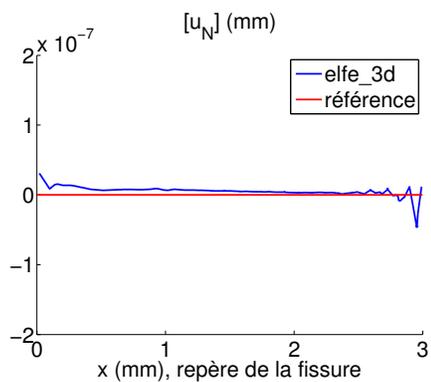
Etape 2



Etape 3

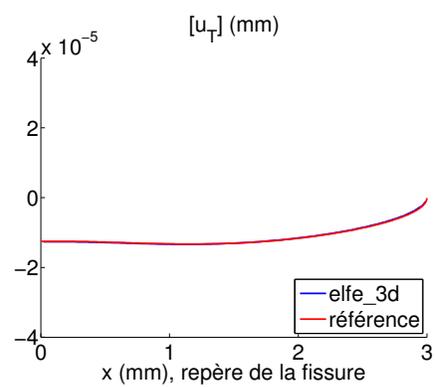
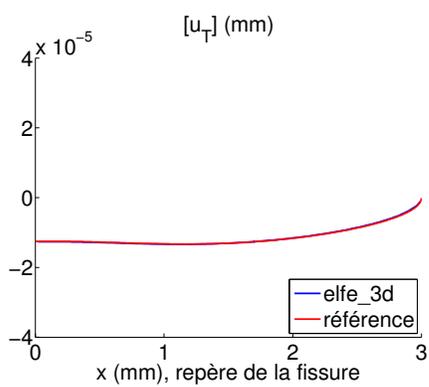


Etape 4

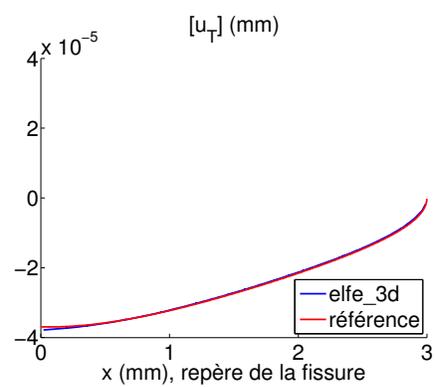
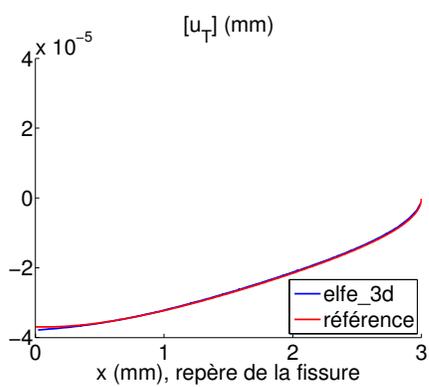


Etape 5

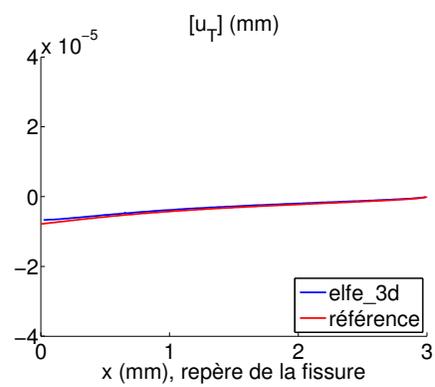
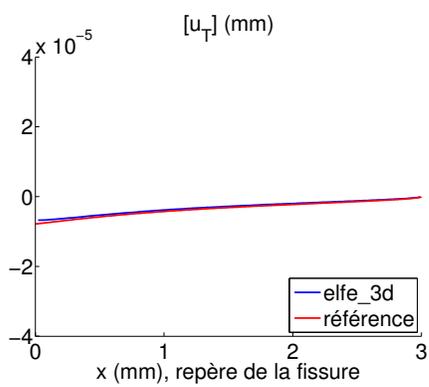
FIG. 3.4 – Comparaison des sauts de déplacement normal le long des faces de la fissure pour cinq étapes du chargement du cas test figure 3.2 entre l'ancien (le nouveau) critère d'arrêt à gauche (droite)



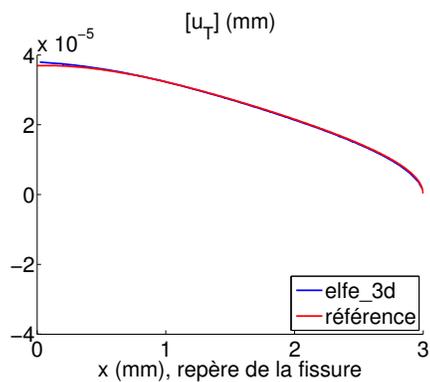
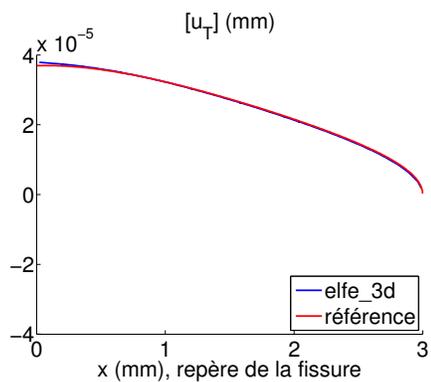
Etape 1



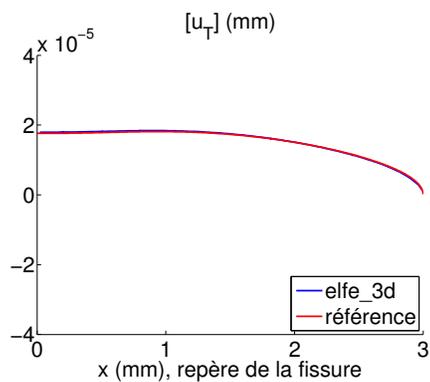
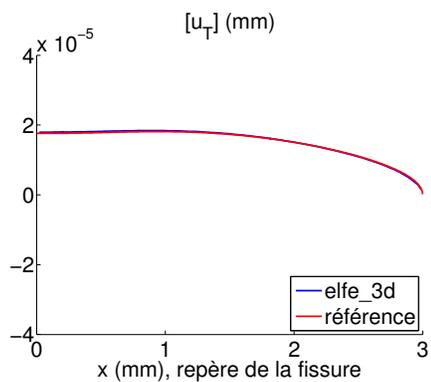
Etape 2



Etape 3



Etape 4



Etape 5

FIG. 3.5 – Comparaisons des sauts de déplacements tangentiel le long des faces de la fissure pour cinq étapes du chargement du cas test figure 3.2 entre l'ancien (le nouveau) critère d'arrêt à gauche (droite)

3.3 Traitement numérique des grandeurs caractéristiques de la fissuration

A la fin du processus itératif nous disposons de l'ensemble des champs du problème, et les grandeurs caractéristiques G , J , K_I et K_{II} peuvent être évaluées en post-traitement.

Le modèle numérique développé étant basé sur l'utilisation de la méthode des éléments finis étendus, nous utilisons par la suite des techniques intégrales indépendantes du contour afin d'évaluer les FIC. En effet, dans le cadre FEM et X-FEM, ces techniques sont beaucoup plus robustes et plus précises que les techniques basées sur les définitions locales des K_i . La stratégie choisie pour le calcul des FIC s'est donc portée vers une approche globale : la méthode de l'intégrale J .

Nous avons passé en revue les différentes hypothèses qui soutendent cette méthode dans le premier chapitre. Dans le cas du contact interfacial avec frottement, ces hypothèses ne sont plus totalement vérifiées. Néanmoins nous avons identifié une expression indépendante du contour restituant la valeur de J en présence de contact avec frottement. La méthode de calcul de l'intégrale J s'appuie sur la méthode de l'intégrale de domaine, utilisant un champ d'extension virtuelle, afin d'avoir la meilleure précision de calcul.

Le calcul des FIC en 2D utilise la méthode de l'intégrale d'interaction en choisissant successivement des champs auxiliaires tels que $(K_I = 1, K_{II} = 0)$, $(K_I = 0, K_{II} = 1)$ pour le problème bidimensionnel. Numériquement, un J -domaine est introduit [38] afin de décrire la surface d'intégration pour l'intégrale d'interaction (cf. figure 3.6). Ce domaine peut faire partie du maillage, ou être indépendant du maillage comme cela est illustré figure 3.6. Nous choisissons un champ d'extension virtuelle q variant linéairement à l'intérieur de ce J -domaine. Afin d'être le plus précis possible numériquement, nous choisissons un J -domaine dont le rayon est suffisamment grand pour que le bord du J -domaine soit assez loin de la singularité du front de fissure. Dans la pratique, la taille du J -domaine est choisie en fonction de la longueur caractéristique de l'élément fini contenant la pointe de la fissure.

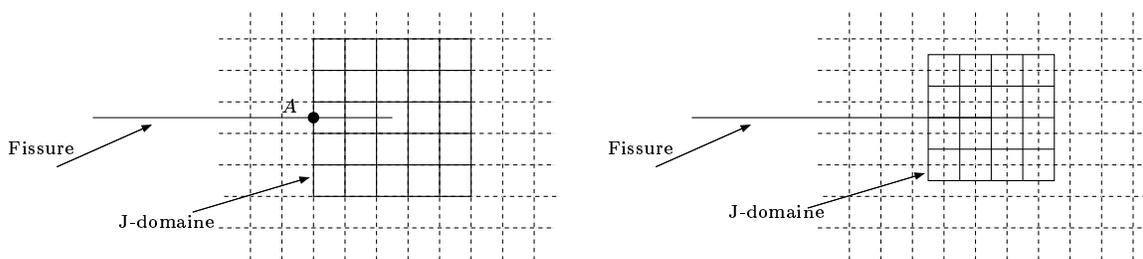


FIG. 3.6 – Définition d'un J -domaine en 2D

Mais des difficultés peuvent apparaître lorsque cette taille est trop importante, car le

bord du J -domaine touche les bords du domaine (surfaces libres ou non d'efforts). De plus, en présence d'une fissure principale et d'une extension de fissure, il est nécessaire d'avoir un J -domaine englobant uniquement la singularité du front de la fissure. Ceci est aussi le cas pour des configurations géométriques plus complexes, fissures inclinées, taille de l'extension de fissure très petite par rapport à la fissure principale. Par conséquent, une attention particulière devra être portée sur le choix de la taille des éléments en pointe, ainsi que celle du J -domaine.

L'utilisation de la méthode d'intégrale d'interaction fait appel à la notion de champs auxiliaires. Ces champs permettent le calcul des FIC. Les champs auxiliaires choisis correspondent aux trois états des modes purs asymptotiques fournis par le tableau A.1 dans l'annexe A. L'hypothèse est donc que la singularité en pointe de fissure est toujours de même nature ($\frac{1}{\sqrt{r}}$). S'il existe une zone d'adhérence en pointe de la fissure, la singularité en mode I s'annule. Avec la prise en compte de contact avec frottement à l'interface de la fissure, nous pouvons nous demander si cette singularité n'évolue pas au cours du cycle de charge. Par conséquent, K_I étant nul en présence de contact, nous faisons le choix de calculer K_{II} à partir de la quantité J , évaluée à l'aide de l'intégrale de surface. Ainsi, aucune hypothèse n'est faite sur la nature de la singularité.

Dans la suite de ce travail, nous accordons une attention particulière aux résultats pouvant mettre en évidence un éventuel changement dans la nature de la singularité (voir section 3.8).

3.4 Implémentation dans le code `elfe_3d`

L'ensemble des développements et des améliorations a été implémenté dans le code de calcul `elfe_3d`, développé au Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Solides (LaMCoS) de l'INSA de Lyon. Ce code est écrit dans le langage orienté objet C++. Initialement développé à l'université de Northwestern en 1999 par Nicolas Moës et John Dolbow, ce code a été considérablement développé, agrémenté et amélioré sous la direction d'Anthony Gravouil depuis 2001, au laboratoire LaMCoS. Ce code offre des possibilités nombreuses liées à l'utilisation du langage orienté objet. Les pré- et post- traitements sont effectués à l'aide du logiciel libre GMSH (<http://www.geuz.org/gmsh/>), un générateur de maillage élément fini 2D/3D.

Le code `elfe_3d` a une architecture sous forme de "classes", dont certaines sont listées dans la table 3.2.

- Le répertoire *DofManager* concerne la gestion des degrés de libertés, de la discrétisation, des assembleurs, de la structure du système, etc ...
- Le répertoire *Forms* contient les informations pour le calcul des quantités élémentaires associées aux formes linéaires ou bilinéaires.
- Le répertoire *Formulations* détient l'ensemble des différentes classes représentatives des algorithmes de calcul possibles.
- Le répertoire *Fracture* contient les classes nécessaires au calcul des intégrales d'in-

| Libplot | Material | Numerics | Formulation | | DofManager | etc ... |
|---------|----------|----------|----------------------|---------------------|------------|---------|
| | Material | | Dynamics | MechanicsBase | | |
| | Elastic | | ExplicitDynamics | Elasticity | | |
| | Plastic | | ImplicitDynamics | MechanicsPlasticity | | |
| | ... | | MechanicsTimeContact | MechanicsContact | | |

TAB. 3.2 – Architecture du code `elfe_3d` sous forme de classes.

- teraction et des champs auxiliaires.
- Le répertoire *Libgx* est l’interface avec le modeleur géométrique des supports des enrichissements, et permet la gestion des interactions entre le maillage et cette géométrie.
 - Le répertoire *Libix* fait l’interface avec le mailleur, gère les connectivités, les zones géométriques particulières.
 - Le répertoire *Libplot* correspond à l’interface entre le code et les logiciels de post-traitement.
 - Le répertoire *LinearAlgebra* cotient tous les outils nécessaires au calcul d’algèbre linéaire, et fait l’interface avec les solveurs.
 - Le répertoire *LSCRACK* permet la gestion et l’évolution des fissures décrites par fonctions de niveaux.
 - Le répertoire *LSET* possède l’ensemble des classes dédiées à l’utilisation de la méthode des fonctions de niveaux (“Level Set”).
 - Le répertoire *Materials* correspond à la gestion des différents types de matériaux, et l’évolution des variables internes.
 - Le répertoire *Numerics* contient les données relatives aux éléments finis, les fonctions de forme, l’intégration numérique.
 - Le répertoire *Solvers* contient les différents solveurs et pré-conditionneurs (gradient conjugué (CG) pour les systèmes symétriques, résidus minimums généralisés (GMRES) pour les systèmes non symétriques) existants.

Le répertoire Formulations contient les classes décrivant les algorithmes associés au type de calcul à effectuer, par exemple : calcul statique (Mechanics), calcul thermique (Thermic), calcul de dynamique implicite (Implicit-Dynamics),... Il est à noter que ces différentes formulations sont organisées de façon hiérarchique :

- MechanicsBase
 - Elasticity
 - Mechanics
 - MechanicsContact
 - MechanicsPlasticity
 - MechanicsCohesive
- CrackGrowth
 - CohesiveCrackGrowth

- LevelSetCrackGrowth
- Dynamics
 - ExplicitDynamics
 - ImplicitDynamics
- MechanicsTimeContact
- DynamicCrackGrowth
 - ExplicitCrackGrowth
 - ImplicitCrackGrowth
 - ImplicitLevelSetCrackGrowth
- ...

Pour l'implémentation de notre stratégie de résolution, une nouvelle formulation appelée `MechanicsTimeContact` a été créée. Elle contient la boucle sur les pas de temps, les itérations du schéma numérique issu de la LATIN avec les étapes locale et globale. Pour la propagation de fissure de fatigue, une autre classe a été créée et appelée `CycleCrackGrowth`. Elle permet l'analyse des quantités K_i sur l'ensemble du cycle de chargement, la détermination de la direction de la propagation et la gestion de la propagation de la fissure. Elle contient l'ensemble des critères de fatigue et des lois de propagation liées au matériau envisagé.

Pour effectuer un calcul, les données sont fournies sous forme de fichiers de données (cf. annexe F). Ces fichiers sont les suivants :

- Le fichier *exemple.DAT* contient le nom et le type de l'ensemble des fichiers de donnée, ainsi que le type de calcul à effectuer. Il définit aussi le choix des matériaux dans les différentes zones créées. Les conditions aux limites et les conditions initiales sont intégrées dans ce fichier, ainsi que le type d'enrichissement envisagé.
- Le fichier *maillage.UNV* contient l'ensemble des informations du maillage, sous le format universel UNV.
- Le fichier *geometrie.GEF* décrit géométriquement les supports des enrichissements (fissures, trous, ...)
- Le fichier *matériau.MAT* possède les données relatives au choix du matériau (E , ν , ...)
- Le fichier *procedure.PAR* contient les informations pour la propagation de la fissure (le critère de propagation, la loi de propagation, le nombre de cycles effectué et la vitesse de propagation envisagée).
- Le fichier *formulation.PAR* contient l'ensemble des informations nécessaires à la formulation considérée (le nombre maximal d'itérations pour la LATIN, la précision pour le critère d'arrêt, le nombre de pas de chargement, la fréquence des 'export')

Un exemple de fichiers de données est fourni en annexe F, pour un calcul de propagation quasi-statique de fissure, pour la formulation incrémentale implémentée sous la classe `MechanicsTimeContact`.

3.5 Conclusion partielle

Le modèle de comportement de fissure développé permet une gestion simple du contact frottant, sans maillage explicite de la fissure et prenant en compte les caractéristiques du chargement de fatigue. Pour atteindre ce but, une nouvelle approche a été utilisée pour décrire le comportement d'une fissure, basée sur deux méthodes : la méthode X-FEM pour prendre en compte la fissure sans la mailler, et l'approche LATIN pour la résolution du problème non linéaire d'évolution. La formulation du problème de contact avec frottement développée prend en compte l'histoire du chargement et aboutit à l'utilisation de deux indicateurs, \tilde{C}_I et \tilde{G}_I . Le critère d'arrêt a été amélioré afin de prendre en compte le comportement local de chaque point de Gauss le long de la fissure, et non plus un comportement global de l'état de la fissure.

Quel que soit le type de fatigue étudiée (la fatigue induite par petits débattements (fretting fatigue), la fatigue de contact roulant (rolling contact fatigue) ou la fatigue), les cycles de chargement ont d'importantes conséquences sur la propagation des fissures. La non-linéarité et l'irréversibilité du problème de frottement imposent de résoudre le problème incrémentalement comme cela a été présenté précédemment. La formulation incrémentale introduite dans la résolution de l'étape locale permet de prendre en compte l'histoire du chargement, mais aussi de suivre l'évolution du comportement de la fissure pas à pas. Simuler un problème de fatigue de contact requière la modélisation

- d'un déplacement de la zone de chargement (en roulement et en glissement et en roulement-glissement),
- d'une évolution du chargement tangentiel en intensité et sens (en fatigue de type fretting).

Par conséquent, le maillage du domaine et surtout, celui de la surface où s'applique les efforts, doit pouvoir décrire avec une précision suffisante :

- le déplacement de la zone de chargement et son intensité, pour des conditions de roulement ou de glissement et dont les distances couvrent une gamme de valeurs allant de la dizaine de microns jusqu'à la dizaine de millimètres, voir le centimètre,
- la zone d'influence du contact que nous appellerons la zone de "contact dominance", dans laquelle les gradients de contraintes et déformations sont très sévères en sous-surface (cf. section 1.3),
- la taille de la zone de contact du chargement, $2a$ (du millimètre au centimètre),
- la "longueur de la fissure", b (du micron au millimètre),
- et les conditions aux limites (voir figure 3.7).

Les ordres de grandeur de ces paramètres sont très différents. L'utilisation de la méthode des éléments finis étendus ne dispense pas d'un maillage fin sous la zone de contact du chargement :

- pour pouvoir capturer exactement les gradients importants parce qu'ils influencent directement l'état de contact entre les faces de la fissure,
- et parce que le maillage conditionne le nombre d'éléments d'interface utilisés pour la résolution du contact.

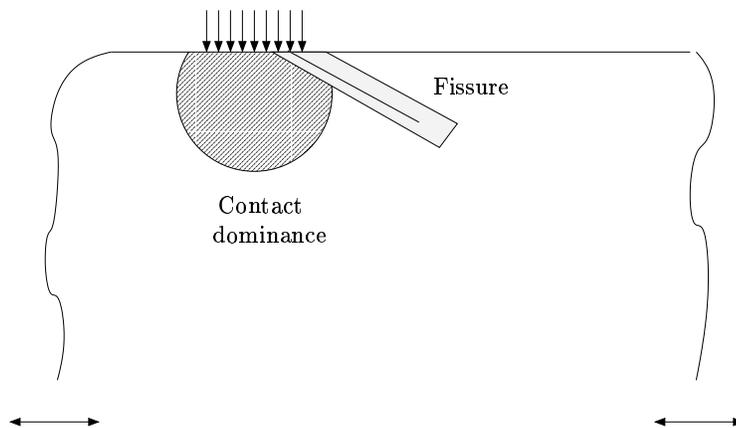


FIG. 3.7 – Les différents ordres de grandeurs du problème de fatigue tribologique

Ces différents aspects géométriques influencent le comportement de la fissure. Par conséquent, il est nécessaire de disposer d'une échelle de discrétisation adaptée à la structure, à la fissure et à l'état de contact le long de ses faces.

3.6 Analyse de la qualité du modèle de comportement pour une fissure perpendiculaire à la surface en situation de fatigue de contact

Cette section vise à analyser l'influence de certains paramètres du modèle sur le comportement de la fissure et à vérifier l'aptitude de ce modèle à décrire les configurations complexes de contact unilatéral avec frottement.

L'analyse de la qualité du modèle se fera à l'aide du modèle basé sur la théorie des dislocations et présenté section 2.2.1. Ce modèle est basé sur l'hypothèse de massif semi-infini. Cette hypothèse impose pour le modèle X-FEM de considérer un domaine suffisamment grand. Par conséquent il est nécessaire d'étudier l'influence des conditions aux limites sur le comportement de la fissure et de vérifier l'aptitude du modèle à décrire les configurations complexes de contact unilatéral avec frottement. D'autres paramètres sont étudiés dans cette section : la précision demandée et l'incrément de déplacement du chargement δl , illustré sur la figure 3.8 comme la distance entre deux positions successives du chargement.

Le maillage est volontairement choisi grossier pour mettre en évidence la robustesse du modèle.

Nous allons suivre les variations des facteurs d'intensité de contraintes K_I et K_{II} . L'ensemble des calculs va être effectué sous l'hypothèse d'un état de déformations planes.

3.6.1 Données du problème

Considérons un chargement de contact très simplifié, correspondant au déplacement de distributions de pression P et de traction Q uniformes, en glissement total ($Q = \mu_S P$), appliquées en surface d'un solide homogène isotrope de dimension $(2L \times H)$ (voir figure 3.8). Le chargement est appliqué sur une zone de dimension $2a = 2\text{mm}$ avec $P = 39\text{ MPa}$. Sa position est définie par l'ordonnée du centre de la zone du chargement y_C . La distribution tangentielle agit dans la direction opposée de celle du mouvement, telle que $Q = -\mu_S P$, μ_S correspondant au coefficient de frottement en surface et égal à 0.15, comme indiqué sur la figure 3.8. Le chargement se déplace; y_C varie de -15 mm à 10 mm.

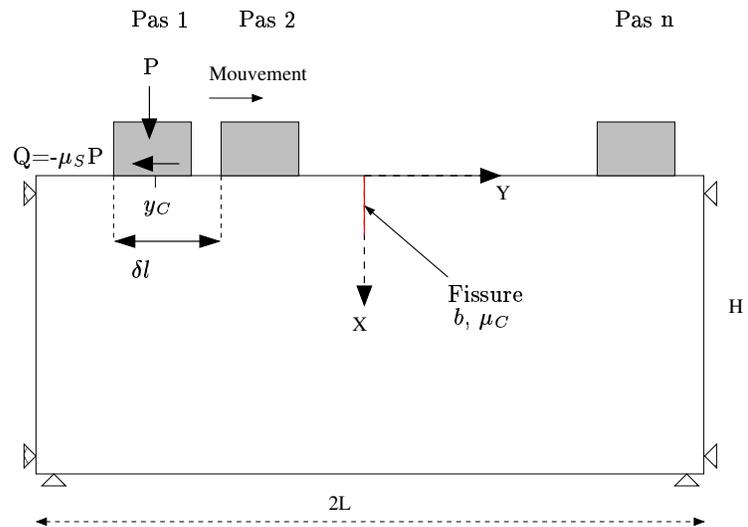


FIG. 3.8 – Données du cas test pour l'analyse de la qualité du modèle

La fissure de longueur b est supposée débouchante, perpendiculaire par rapport à la surface du solide, et localisée à l'origine du repère. Le coefficient de frottement le long des faces de la fissure μ_C est supposé égal à 0.1. Les données matériau correspondant à un PSM9 sont le module de Young $E = 3150\text{ MPa}$ et le coefficient de Poisson $\nu = 0.36$. Les valeurs de P , Q , μ_S , μ_C et a sont fixées tandis que les effets des autres paramètres sont analysés par trois études distinctes déterminant l'influence :

- de la précision demandée, tol ,
- des conditions aux limites, H et L , et
- de l'incrément de déplacement du chargement, δl .

Le but est de souligner et de comprendre l'influence relative de chaque paramètre sur les variations des FIC, en comparaison avec les résultats d'un modèle de comportement de fissure de fatigue.

Les résultats qui vont être présentés sont établis avec l'ancien critère d'arrêt. La fissure considérée étant perpendiculaire par rapport à la surface il n'y a pas de couplage entre

les modes de fissuration I et II. Par conséquent la variation des FIC n'est pas affectée par le choix de ce critère d'arrêt.

Nous allons donc présenter les résultats de référence du problème dans la section suivante.

3.6.2 Résultats de référence

Les variations de référence de K_I et K_{II} à la pointe de la fissure pendant le passage du chargement sont celles obtenues par le modèle, développé par Dubourg, qui repose sur la théorie mathématiques des distributions continues de dislocations couplée à la résolution du contact avec frottement entre les faces des fissures [27]. Il a été présenté dans la section 2.2.1 du chapitre 2.

La modélisation du cas test envisagé utilise 100 points de discrétisation le long de la fissure et le cycle de chargement est incrémenté en 700 pas, ce qui correspond à $\delta l = 50 \mu\text{m}$. Les FIC ont été calculés pour deux longueurs de fissure : $b = 0.1 \text{ mm}$ et 0.8 mm . Les figures 3.9 et 3.10 illustrent les résultats obtenus avec ce modèle. La position de y_C/a est représentée en abscisse, et la valeur de K_i est considérée en ordonnée.

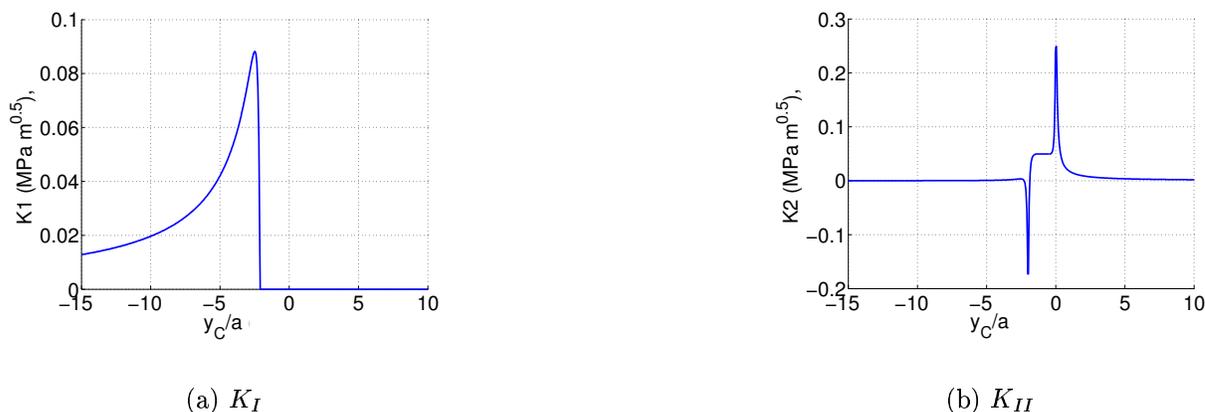
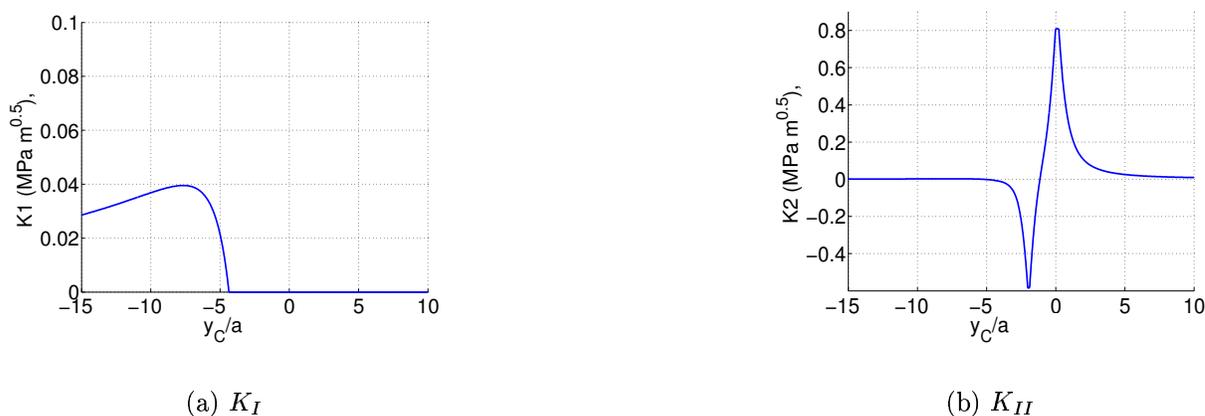
Le signe de K_{II} dépend du signe du glissement relatif entre les faces de la fissure pendant le chargement. Une valeur constante de K_{II} révèle une condition d'adhérence interfaciale entre deux étapes successives de chargement. En effet, si les faces adhèrent, alors le glissement relatif ne change pas et la valeur de K_{II} est la même pour deux pas de chargement consécutifs.

Les valeurs extrémales de K_I et K_{II} , ainsi que les positions correspondantes sont indiquées dans la table 3.3 pour chaque longueur de fissure. La valeur appelée K_{Iinf} correspond à la position où K_I s'annule pour la première fois, c'est-à-dire à la position du chargement pour laquelle la fissure se referme. Pour une plus grande longueur de fissure (cf. figure 3.10), le comportement adhérent disparaît. De plus les positions de y_C/a correspondant au K_{Iinf} et au K_{Imax} diminuent par rapport à celles obtenues pour la fissure de longueur 0.1 mm . D'autre part, la valeur de K_{Imax} est plus petite (voir tableau 3.3).

| | K_{Imax} ($MPa\sqrt{m}$) | | K_{Iinf} ($MPa\sqrt{m}$) | | K_{IImin} ($MPa\sqrt{m}$) | | K_{II} pour $y_C/a=0$ ($MPa\sqrt{m}$) | | K_{IImax} ($MPa\sqrt{m}$) | |
|----------------------|---------------------------------|---------|---------------------------------|---------|----------------------------------|---------|--|---------|----------------------------------|---------|
| | valeur | y_C/a | valeur | y_C/a | valeur | y_C/a | valeur | y_C/a | valeur | y_C/a |
| $b = 0.1 \text{ mm}$ | 0.088 | -1.47 | 0 | -1.087 | -0.173 | -0.98 | 0.0497 | 0 | 0.249 | 1.05 |
| $b = 0.8 \text{ mm}$ | 0.0395 | -6.657 | 0 | -3.309 | -0.584 | -1.017 | 0.0677 | 0 | 0.809 | 1.085 |

TAB. 3.3 – Quelques résultats de référence pour l'analyse de la qualité du modèle elfe_3d

A présent que les résultats de référence sont établis, nous allons présenter l'influence

FIG. 3.9 – Variations obtenues par le modèle de référence pour $b = 0.1$ mmFIG. 3.10 – Variations obtenues par le modèle de référence pour $b = 0.8$ mm

de la précision demandée sur les résultats obtenus pour le modèle de comportement de fissure développé.

3.6.3 Influence de la précision

Les valeurs de H , L et δl sont fixées tandis que la valeur de la précision demandée, notée tol , varie. La fissure de longueur 0.1 mm est considérée. Un maillage fixe a été utilisé avec 4212 degrés de liberté et 5 éléments d'interface ce qui est très faible comparé aux 100 points de discrétisation considérés dans le modèle de référence.

Les figures 3.11 (a) et (b) illustrent les variations des FIC en fonction de la précision demandée pour les valeurs $H=150$, $L=250$ et $\delta l=1$ tandis que les figures 3.12 (a) et (b) illustrent les variations des FIC en fonction de la précision demandée pour les valeurs $H=100$, $L=150$ et $\delta l=0.04$. La position de y_C/a est représentée en abscisse, et la valeur

de K_i est considérée en ordonnée.

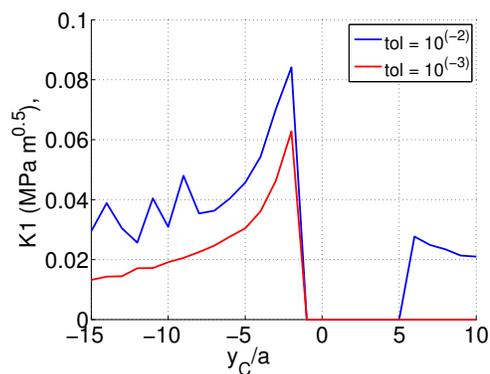
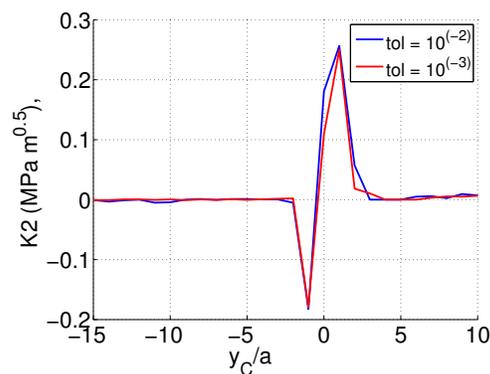
(a) K_I (b) K_{II}

FIG. 3.11 – Variations obtenus par elfe_3d pour $b = 0.1$ mm, en fonction de tol . $H = 150$ mm, $L = 250$ mm, $b = 0.1$ mm, $\delta l = 1$ mm.

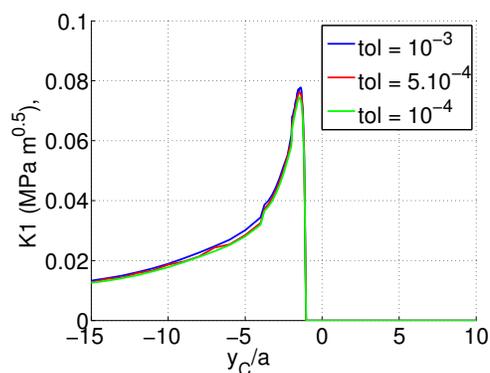
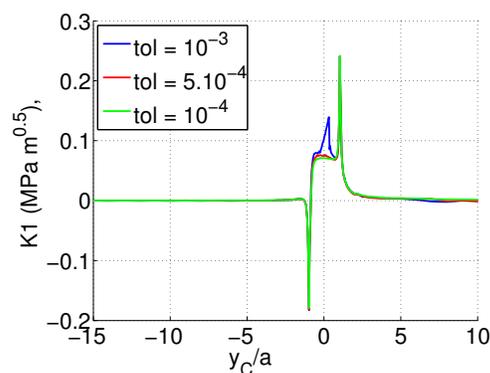
(a) K_I (b) K_{II}

FIG. 3.12 – Variations obtenus par elfe_3d pour $b = 0.1$ mm, en fonction de tol . $H = 100$ mm, $L = 150$ mm, $\delta l = 0.04$ mm.

L'augmentation de tol a plusieurs conséquences sur les variations de K_I d'après la figure 3.11 (a). Tout d'abord les valeurs positives de K_I obtenues pour $y_C/a > 0$ disparaissent. D'autre part, les oscillations correspondant aux solutions erronées disparaissent elles aussi. Finalement, la valeur de $K_{I_{max}}$ baisse. La comparaison avec les résultats de référence est assez bonne (cf. figure 3.9 (a)).

Concernant les variations de K_{II} , le premier point à mettre en évidence est que l'augmentation de la précision ne permet pas d'avoir des résultats satisfaisants si l'incrément

du pas de chargement, c'est-à-dire l'histoire du chargement, n'est pas pris suffisamment petit. Par conséquent, tol n'a pas une influence significative si δl est trop grossier alors qu'elle joue un rôle clé pour de petites valeurs de δl (cf. figures 3.12(b) et 3.9 (b)).

3.6.4 Influence des conditions aux limites

Les valeurs de tol et δl sont fixées tandis que celles de H et L varient. Nous considérons une fissure de longueur 0.8 mm, $tol = 10^{-3}$ et $\delta l = 1$ mm. L'influence des conditions aux limites est d'un ordre de grandeur plus important sur les valeurs des FIC par rapport à celui de la précision. Par conséquent, le choix $tol = 10^{-3}$ est suffisant.

Les figures 3.13 (a) et (b) illustrent les variations de K_I en fonction de L et H . La position de y_C/a est représentée en abscisse, et la valeur de K_I est considérée en ordonnée.

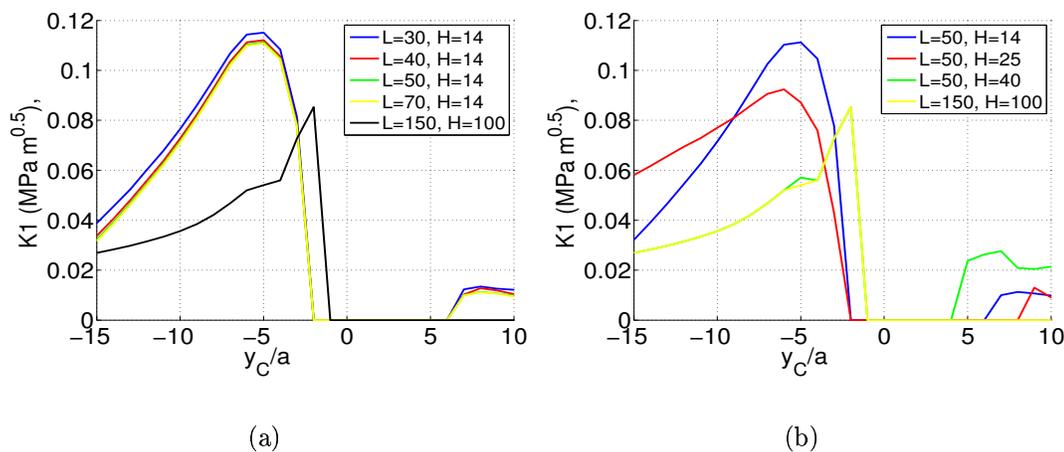


FIG. 3.13 – Variations de K_I (a) en fonction de L et (b) en fonction de H . $b=0.8$ mm, $\delta l = 1$ mm, $tol=10^{-3}$.

L'augmentation de L et H a plusieurs effets concomitants. Tout d'abord, elle conduit à la baisse de la rigidité du domaine étudié (y_C/a entre -25 et 25), son comportement se rapprochant de celui d'un massif semi-infini. Les valeurs positives de K_I obtenues pour une position y_C/a supérieure à zéro sont liées à une valeur trop grossière de tol mais aussi aux valeurs de L et H . L'ouverture de la fissure pour une position y_C/a supérieure à zéro est obtenue pour toutes valeurs de L et H considérées excepté pour $L=150$ et $H=100$. Ces deux valeurs permettent d'obtenir les résultats les plus proches de ceux des résultats de référence. Les valeurs maximales et leurs positions sont très fortement dépendantes de L et H . Le choix de ces valeurs a donc des conséquences directes sur le comportement d'une fissure et notamment sur son ouverture, comme le montrent les variations positives pour $y_C/a > 0$. Ce constat nous a amené à nous intéresser aux variations de σ_{yy} dans la profondeur en fonction des valeurs de L et H (figure 3.14 (a)). Les figures 3.14 (a) et (b)

montrent la variation des contraintes de traction et de cisaillement, σ_{yy} et σ_{xy} , le long du plan de la fissure ($y=0$) pour différentes valeurs de L et H . La meilleure corrélation est obtenue pour les valeurs les plus importantes de L et H . La fissure devient alors moins sensible à l'effet d'encastrement et donc plus sensible au chargement de contact, ce qui change considérablement les variations des FIC. En effet, l'influence des conditions aux limites se manifeste sur la valeur maximale, sur la position de la fermeture de fissure, mais aussi sur la pente initiale des variations de K_I . Par conséquent, la modélisation géométrique du problème doit éliminer ces effets en choisissant un domaine suffisamment important.

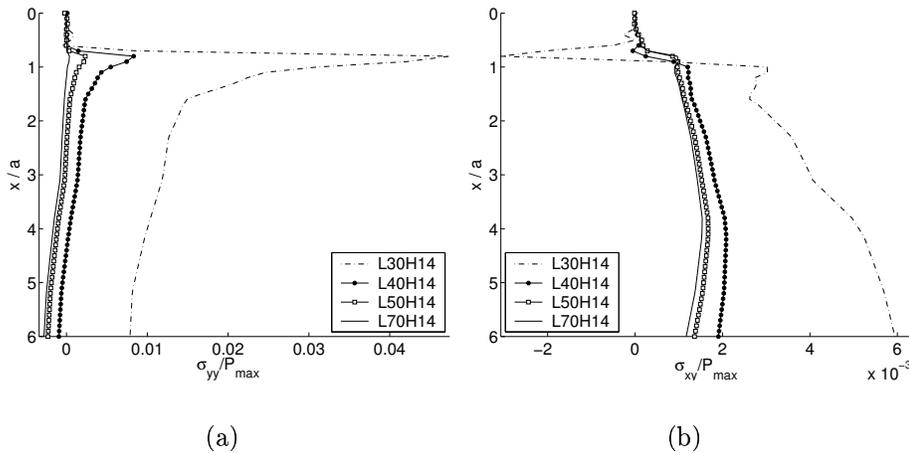


FIG. 3.14 – Variations de (a) σ_{yy} et (b) σ_{xy} en fonction de L et P , dans le plan de la fissure ($y=0$). $b=0.8$ mm, $\delta l = 1$ mm, $tol=10^{-2}$.

Les variations de K_{II} en fonction de L et H (figures 3.15 (a) et (b)) sont, par contre, faiblement influencées par les valeurs de L et H . La position de y_C/a est représentée en abscisse, et la valeur de K_i est considérée en ordonnée.

La table 3.4 résume les principales valeurs des différentes configurations.

Il en ressort que des valeurs adéquates de L et H doivent être déterminées soigneusement pour décrire correctement le comportement d'un milieu semi-infini. Un choix erroné peut conduire à une description incorrecte du comportement de la fissure. Notons que les différences entre le modèle et les résultats de référence, dans ce cas test, sont liées au choix de l'incrément du pas de chargement, trop grossier dans cette étude, $\delta l = 1$ mm, mais aussi au faible nombre d'éléments d'interface considérés, seulement cinq ici. Dans les résultats suivants, les différences de comportement vont disparaître.

3.6.5 Influence de l'incrément du pas de chargement

Les valeurs de H , L , b et tol sont fixées tandis que δl varie. A partir des résultats présentés au-dessus, nous avons opté pour les valeurs telles que $H=100$ mm, $L=150$

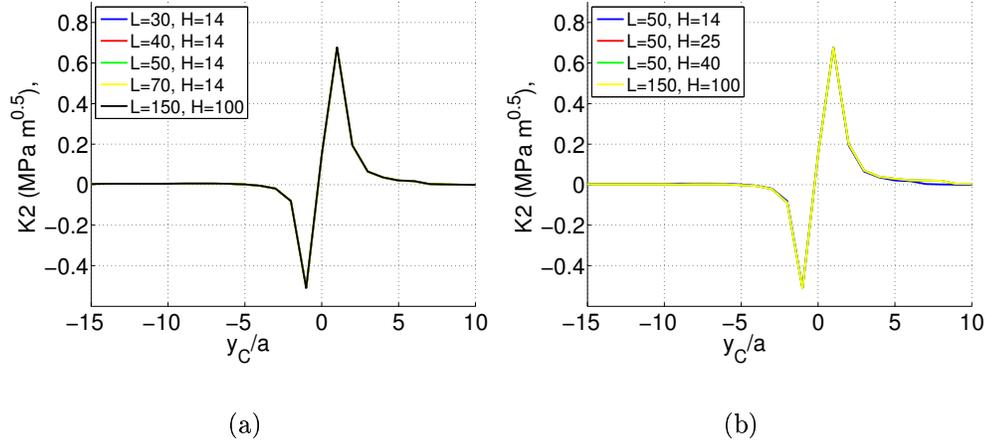


FIG. 3.15 – Variations de K_{II} (a) en fonction de L et (b) en fonction de H . $b=0.8$ mm, $\delta l = 1$ mm, $tol=10^{-3}$.

| | $K_{I_{max}}$ | | $K_{I_{inf}}$ | | $K_{II_{min}}$ | | K_{II} pour $y_C/a=0$ | | $K_{II_{max}}$ | |
|-------------|-----------------|---------|-----------------|---------|-----------------|---------|----------------------------|---------|-----------------|---------|
| | $(MPa\sqrt{m})$ | | $(MPa\sqrt{m})$ | | $(MPa\sqrt{m})$ | | $(MPa\sqrt{m})$ | | $(MPa\sqrt{m})$ | |
| | valeur | y_C/a | valeur | y_C/a | valeur | y_C/a | valeur | y_C/a | valeur | y_C/a |
| L=30 H=14 | 0.0963 | -2 | 0 | -1 | -0.1864 | -1 | 0.1125 | 0 | 0.2522 | 1 |
| L=40 H=14 | 0.0970 | -2 | 0 | -1 | -0.1860 | -1 | 0.1042 | 0 | 0.2538 | 1 |
| L=50 H=14 | 0.0973 | -2 | 0 | -1 | -0.1860 | -1 | 0.1031 | 0 | 0.2536 | 1 |
| L=70 H=14 | 0.0975 | -2 | 0 | -1 | -0.1860 | -1 | 0.1042 | 0 | 0.2539 | 1 |
| L=50 H=25 | 0.0794 | -2 | 0 | -1 | -0.1864 | -1 | 0.1118 | 0 | 0.2502 | 1 |
| L=50 H=40 | 0.0701 | -2 | 0 | -1 | -0.1864 | -1 | 0.1123 | 0 | 0.2495 | 1 |
| L=150 H=100 | 0.0687 | -2 | 0 | -1 | -0.1865 | -1 | 0.1159 | 0 | 0.2513 | 1 |

TAB. 3.4 – Effets de la taille du domaine sur les valeurs des FIC

mm, $b=0.1$ mm et $tol = 10^{-4}$.

L'importance de la valeur de l'incrément du pas de chargement va être illustrée en considérant trois valeurs différentes de δl : $\delta l = 1$ mm appelée l'échelle grossière, $\delta l = 0.25$ mm l'échelle fine 1 et $\delta l = 0.04$ mm l'échelle fine 2. Les échelles fines correspondent à un raffinement de l'incrément près de la position de la fissure comme cela est illustré dans la figure 3.16.

Les figures 3.17 (a) et (b) illustrent les variations des FIC K_I et K_{II} en fonction de y_C/a pour les trois échelles. La position de y_C/a est représentée en abscisse, et la valeur de K_i est considérée en ordonnée. Des allures similaires sont observées par rapport aux résultats de référence.

Concernant la variation de K_I , l'incrément du pas de chargement δl influence autant

échelle grossière

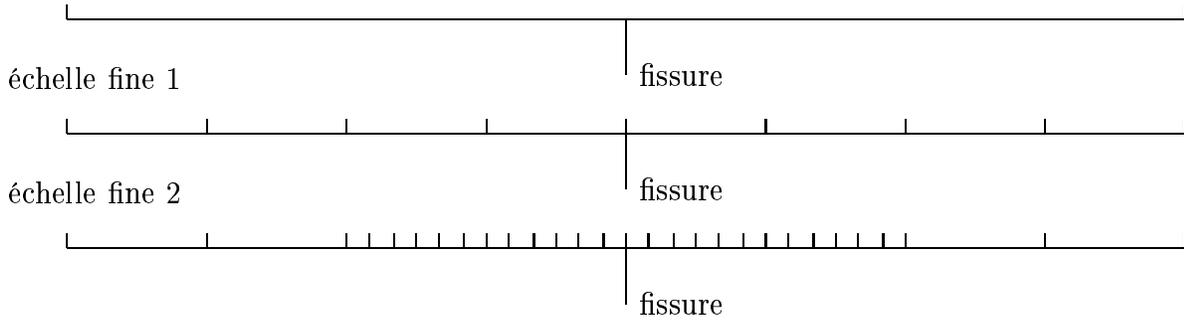


FIG. 3.16 – Définition de l'évolution de l'incrément du pas de chargement pendant le passage du chargement.

l'intensité et la position de $K_{I_{max}}$, ainsi que aussi la position de la refermeture de la fissure(cf. table 3.5). La diminution de δl permet de rapprocher grandement nos résultats de ceux issus du modèle de référence (cf. table 3.5).

| | $K_{I_{max}}$ | | $K_{I_{inf}}$ | | $K_{II_{min}}$ | | K_{II} pour $y_C/a=0$ | | $K_{II_{max}}$ | |
|-------------------|-----------------|---------|-----------------|---------|-----------------|---------|----------------------------|---------|-----------------|---------|
| | $(MPa\sqrt{m})$ | | $(MPa\sqrt{m})$ | | $(MPa\sqrt{m})$ | | $(MPa\sqrt{m})$ | | $(MPa\sqrt{m})$ | |
| | valeur | y_C/a | valeur | y_C/a | valeur | y_C/a | valeur | y_C/a | valeur | y_C/a |
| échelle grossière | 0.0639 | -2 | 0 | -1 | -0.1829 | -1 | 0.100 | 0 | 0.247 | 1 |
| échelle fine 1 | 0.0743 | -1.25 | 0 | -0.75 | -0.1798 | -0.75 | 0.087 | 0 | 0.238 | 1.25 |
| échelle fine 2 | 0.0744 | -1.46 | 0 | -1.04 | -0.1794 | -0.96 | 0.070 | 0 | 0.241 | 1.04 |

TAB. 3.5 – Résultats sur l'influence de l'incrément du pas de chargement pour $H = 100$ mm, $L = 150$ mm, $b = 0.1$ mm, $tol=10^{-4}$

Concernant les variations de K_{II} , δl a une très grande influence sur la capacité du modèle à capturer numériquement le comportement adhérent de la fissure lorsque la charge est située au-dessus de celle-ci. La baisse de la valeur de δl a deux conséquences. La première est l'obtention de ce comportement adhérent caractéristique à l'interface de la fissure et la seconde est liée à cette valeur constante de K_{II} . Notons que la comparaison est d'autant meilleure que δl est faible.

Finalement, ces résultats mettent en évidence la sensibilité du comportement de la fissure à l'incrément du pas de chargement. Une attention particulière doit par conséquent être portée au choix de ce paramètre pour simuler adéquatement les séquences adhérence/glissement le long des faces de la fissure.

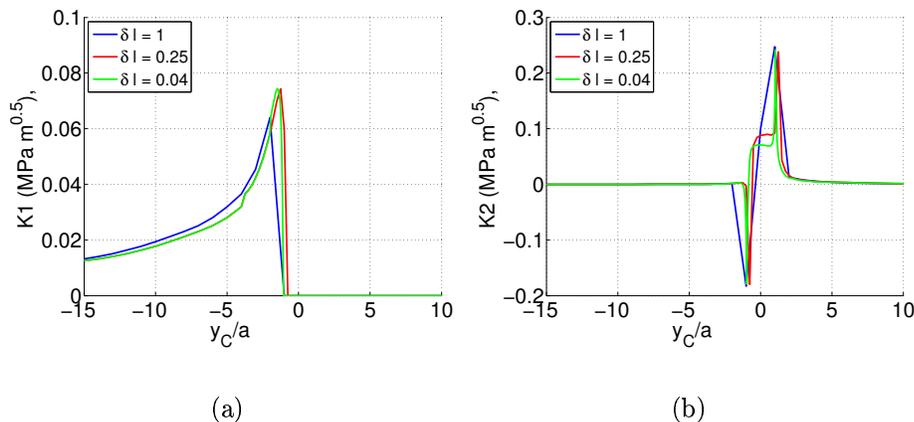


FIG. 3.17 – Variations de (a) K_I et (b) K_{II} en fonction de la valeur de l'incrément du pas de chargement. $H = 100$ mm, $L = 150$ mm, $b = 0.1$ mm, $tol=10^{-4}$.

3.6.6 Conclusion partielle

L'analyse des paramètres comme l'incrément du pas de chargement (δl), les dimensions du solide (H , L) et la précision demandée (tol) a mis en évidence que les comportements en mode I et en mode II sont essentiellement gouvernés par δl et (H , L) respectivement alors que la valeur de tol permet de calculer la solution avec plus de précision.

À présent que nous avons établi les paramètres influant du modèle, procédons à une validation du modèle de comportement par des comparaisons complémentaires. Il s'agit dans un premier temps de vérifier que pour des situations classiques de fatigue, le mode mixte en pointe de fissure est bien représenté par le modèle. Cette vérification fera l'objet de la section 3.7. Dans un deuxième temps, nous voulons évaluer l'aptitude du modèle de comportement à simuler des situations réelles de fatigue de contact. Cette évaluation fera l'objet de la section 3.8.

3.7 Qualification du modèle pour un chargement proportionnel en statique

L'objectif ici est de comparer les valeurs numériques des facteurs d'intensité de contraintes, K_I et K_{II} , calculés à l'aide de notre modèle avec des valeurs calculées analytiquement ou par une méthode éléments finis, pour des configurations simples. L'ensemble des calculs vont être effectués sous l'hypothèse d'un état de déformations planes.

3.7.1 Chargement proportionnel en traction

Considérons une fissure rectiligne sollicitée en mode mixte, avec un mode I prédominant. Les résultats du modèle X-FEM vont être comparés avec des résultats analytiques et des résultats issus d'un modèle élément de frontière établi par Aliabadi et Rooke (1991) [2]. Pour ce cas simple, il n'y a pas de contact interfacial.

Le problème en mode mixte considère une fissure de longueur $2a$ située dans un plan infini et soumise à une contrainte de traction uniforme dans la direction de l'axe y . La fissure est inclinée par rapport à la direction du chargement d'un angle noté β . Les données du problème sont rapportées dans la figure 3.18. Les expressions exactes des FIC de ce problème sont :

$$K_I = \sigma_{yy} \sqrt{\pi a} \sin^2 \beta \quad (3.78)$$

$$K_{II} = \sigma_{yy} \sqrt{\pi a} \sin \beta \cos \beta \quad (3.79)$$

$$(3.80)$$

Pour l'analyse du problème, le modèle élément de frontière modélise le plan infini par un rectangle de largeur $2L$ et de hauteur $2h$ telles que $\frac{L}{a} = 20$ et $\frac{h}{a} = 20$. Il ne présente aucune information sur le maillage utilisé. Le modèle `elfe_3d` utilise les mêmes données géométriques.

Les variations des FIC sont illustrées figure 3.19 pour différentes valeurs de l'angle β , pour le modèle `elfe_3d` et pour les solutions exactes. Les erreurs relatives sont portées dans la table 3.6. Les FIC sont adimensionnés par $K_0 = \sigma \sqrt{\pi a}$. L'angle β de la fissure par rapport à l' verticale est représenté en abscisse, et la valeur des K_i est considérée en ordonnée. Nous constatons une très bonne corrélation entre les résultats issus du modèle X-FEM et les résultats analytiques et ceux issus du modèle BEM. Par conséquent, pour une géométrie et un chargement proportionnel simples, le mode mixte en pointe de fissure est très bien représenté par le modèle X-FEM.

Abordons alors un cas en compression, où le contact sera établi, et vérifions que le modèle apporte une solution satisfaisante.

3.7.2 Chargement proportionnel en compression

L'objectif ici est double :

- tester le modèle pour des conditions de chargement impliquant des conditions de contact avec frottement entre les faces de la fissure,
- mais également tester la précision du modèle en considérant des extensions de fissure de très petite taille, non coplanaires avec la fissure initiale.

Ces comparaisons nous permettront d'aborder par la suite l'étape de la simulation de la propagation non coplanaire pour des avancées de toute petite taille.

Une analyse avec la méthode éléments finis bidimensionnelle a été effectuée par Hamouda et al. [40] pour évaluer les FIC à l'extrémité d'une petite extension de fissure. Le

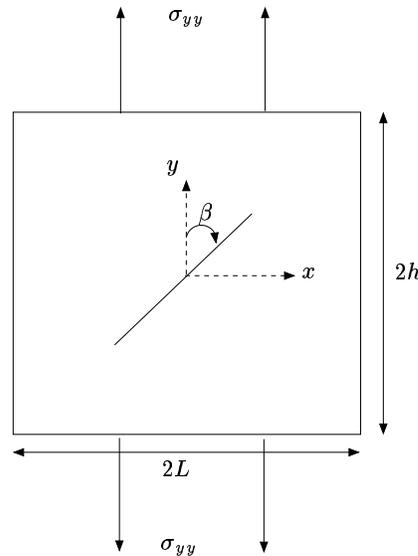


FIG. 3.18 – Données du problème pour un chargement proportionnel en traction

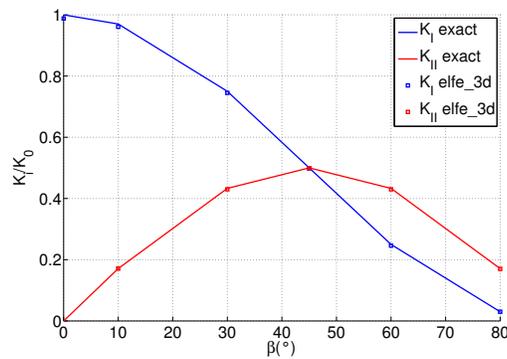


FIG. 3.19 – Variations de K_I et K_{II} pour un chargement proportionnel en traction défini par le problème de la figure 3.18.

frottement entre les faces de la fissure est pris en compte. Le chargement est une compression uniaxiale. Les données matériau sont $E = 206$ GPa et $\nu = 0.3$. La fissure principale est centrée et inclinée par rapport à la verticale d'un angle β de 45° . Sa longueur $2a$ est telle que le rapport $\frac{a}{W} = 0.5$, avec $2W = 100$ mm, la largeur du domaine. La hauteur du domaine est $L = 400$ mm. La petite extension de fissure est choisie de manière à ce que sa longueur, c , soit telle que $\frac{c}{a} = 0.0065$. Différentes valeurs du coefficient de frottement ont été utilisées : 0, 0.25, 0.5, 0.75 et 1. L'angle entre le prolongement de l'axe de la fissure et l'extension de fissure est noté θ . Il varie ici entre 0 et 120° pour le chargement de compression. Les données du problème sont rapportées figure 3.20.

| Erreur de $\frac{K_i}{K_0}$ en % entre les résultats analytiques et ceux issus du modèle de Rooke | |
|---|----------------------|
| $\frac{K_I}{K_0}$ | $\frac{K_{II}}{K_0}$ |
| 0.0 | 0.6 |
| 0.4 | 0.7 |
| 0.6 | 0.4 |
| 0.4 | 0.7 |
| 0.0 | 0.0 |
| 0.1 | / |

| Erreur de $\frac{K_i}{K_0}$ en % entre les résultats analytiques et ceux issus du modèle X-FEM | |
|--|----------------------|
| $\frac{K_I}{K_0}$ | $\frac{K_{II}}{K_0}$ |
| 1.5 | 0.5 |
| 1.5 | 0.6 |
| 0.5 | 0.2 |
| 0.7 | 0.6 |
| 0.9 | 0.3 |
| 1.2 | / |

TAB. 3.6 – Erreurs relatives pour un chargement proportionnel en traction défini par le problème 3.18

Les variations des FIC issues du modèle éléments finis d'Hammouda et al. sont rapportées figures 3.21(a) et 3.21(b). Celles issues du modèle `elfe_3d` sont tracées figures 3.22(a) et 3.22(b). L'angle α entre la fissure principale et l'extension est considéré en abscisse, et en ordonnée les FIC K_i adimensionnés par $\sqrt{\sigma\pi a}$.

Le modèle `elfe_3d` utilise un maillage de 321 éléments d'interface et 19094 degrés de liberté. Ce maillage est illustré figure 3.24. La taille des éléments en pointe est choisie de manière à avoir un J -domaine n'incluant qu'une seule singularité, celle de l'extension de faible longueur de fissure. La taille du J -domaine est la même pour tous les calculs effectués, chaque inclinaison de fissure donnant lieu à une position différente de la boîte. Nous avons fait varier θ avec un pas de 10° en comparaison avec une variation de 5° pour les résultats d'Hammouda. La précision demandée vaut 10^{-2} .

Nous observons une très bonne corrélation entre les résultats d'Hammouda et ceux du modèle `elfe_3d`, pour des coefficients de frottement compris entre 0 et 1, et des angles allant de 0 à 85 (erreur $< 3\%$, cf table 3.7). Pour des angles allant de 90° à 120° , les erreurs relatives montrent que le modèle ne restitue pas une très bonne information en comparaison avec les résultats d'Hammouda. Nous avons peu d'informations sur la méthode employée par Hammouda pour le calcul des FIC. Nous ne pouvons donc pas conclure qu'en à ces écarts de valeurs. La comparaison du modèle `elfe_3d` par rapport à un modèle numérique utilisant la méthode des éléments finis classique montre que notre modèle est capable de déterminer le comportement d'une petite extension de fissure, sans la mailler, pour les angles compris entre 0° et 120° .

Cette analyse nous a permis de nous assurer de la qualité des valeurs des FIC calculés en pointe d'une extension de fissure non coplanaire. (pour rappel $\frac{c}{a} = 0.0065$), ce point étant une étape essentielle dans la construction du modèle.

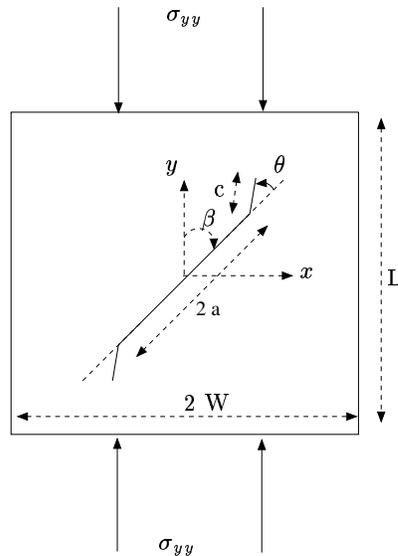


FIG. 3.20 – Données du problème pour un chargement proportionnel en compression, traité par Hammouda et al [40]

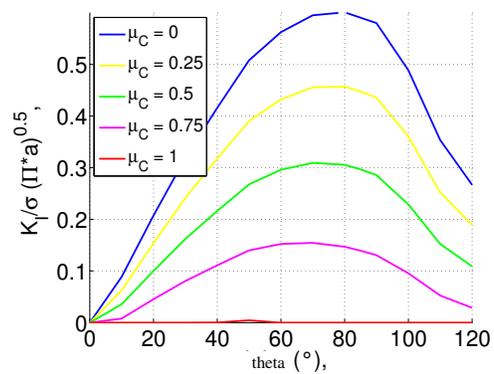
3.7.3 Conclusion partielle

La validation du modèle de comportement de fissure pour des sollicitations uniaxiales en statique induisant un mode mixte en pointe de fissure a été effectuée. Les résultats donnent satisfaction.

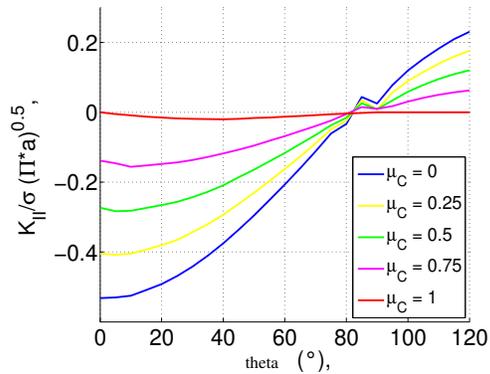
À présent intéressons-nous à des situations réelles de fatigue de contact, où la présence de sollicitations multiaxiales cycliques nécessite une approche quasi-statique.

| θ entre 0 et 85° | | | θ entre 90 et 120° | | |
|-------------------------|-------------------|----------------------|---------------------------|-------------------|----------------------|
| μ_C | $\frac{K_I}{K_O}$ | $\frac{K_{II}}{K_O}$ | μ_C | $\frac{K_I}{K_O}$ | $\frac{K_{II}}{K_O}$ |
| 0 | 3 | 3.15 | 0 | 15.92 | 7.22 |
| 0.25 | 2.61 | 2.74 | 0.25 | 13.4 | 7.07 |
| 0.5 | 1.92 | 2.51 | 0.5 | 10.75 | 5.36 |
| 0.75 | 1.7 | 2.43 | 0.75 | 7.58 | 3.59 |
| 1 | 0.44 | 2.55 | 1 | 0 | 0 |

TAB. 3.7 – Maximum de l'erreur de $\frac{K_I}{K_O}$ en % entre les résultats d'Hammouda et al. [40] et ceux issus du modèle elfe_3d en fonction du coefficient de frottement μ_C

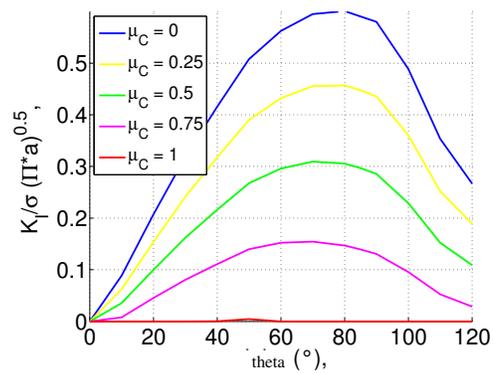


(a) K_I

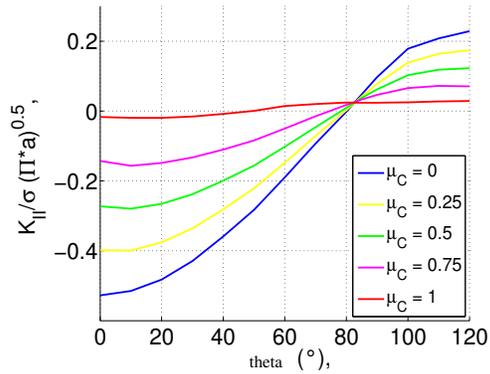


(b) K_{II}

FIG. 3.21 – Variations obtenues par Hammouda et al [40]



(a) K_I



(b) K_{II}

FIG. 3.22 – Variations obtenues par le modèle elfe_3d

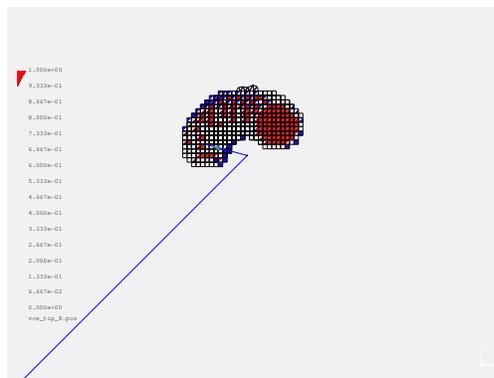


FIG. 3.23 – Représentation des J -domaines utilisés lors de la résolution du problème pour un chargement proportionnel en compression

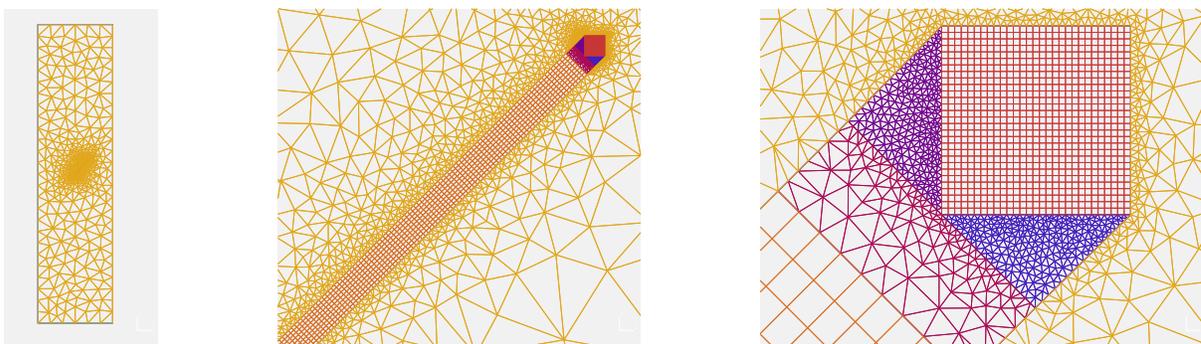


FIG. 3.24 – Maillage utilisé par le modèle `elfe_3d` pour un chargement proportionnel en compression

3.8 Qualification du modèle pour un chargement non proportionnel

Les applications qui vont suivre correspondent à des configurations simplifiées de fatigue de contact de roulement. Les données des problèmes comportent notamment :

- une distribution de pression normale, P , avec P_0 son maximum,
- une aire de contact, notée $2a$, sur laquelle le chargement s'applique,
- et l'existence ou non d'une traction, Q , en glissement pur, dans le sens ou non du mouvement, telle que $\frac{|Q|}{|P|} = \mu_S$, avec μ_S le coefficient de frottement en surface.

Dans tous les cas présentés, le chargement se déplace de gauche à droite.

La comparaison va porter sur les valeurs numériques des facteurs d'intensité de contraintes, K_I et K_{II} et sur le comportement de la fissure à travers l'analyse des variations des champs de déplacements normal et tangentiel le long de son interface, avec les grandeurs issues de calculs réalisés avec le modèle de référence [28].

3.8.1 Déplacement d'une charge normale hertzienne avec un incrément de pas de chargement grossier ($\delta l = 1$ mm)

Afin de comprendre et de vérifier la résolution de contact le long des faces de la fissure, nous nous sommes placés dans un cas simplifié du problème quasi-statique en fatigue de contact (cf figure 3.25), avec :

- une fissure de longueur $b = 3$ mm, dont le coefficient de frottement est fixé à $\mu_C = 0.1$,
- une répartition de pression normale hertzienne sur $2a = 2$ mm telle que :

$$P_0 = 49 \text{ MPa}, \quad (3.81)$$

$$Q = 0, \quad (3.82)$$

- et un déplacement du centre du chargement, y_C , de -2 mm à 2 mm avec un incrément de pas de chargement $\delta l = 1$ mm. Le rapport $\frac{2a}{\delta l}$ vaut 1.

Le choix d'un exemple où la répartition des zones d'ouverture, d'adhérence et de glissement est relativement simple va nous permettre de mettre l'accent sur la précision de notre modèle. Nous allons considérer deux fissures : une perpendiculaire et une inclinée par rapport à l'horizontale de 15° .

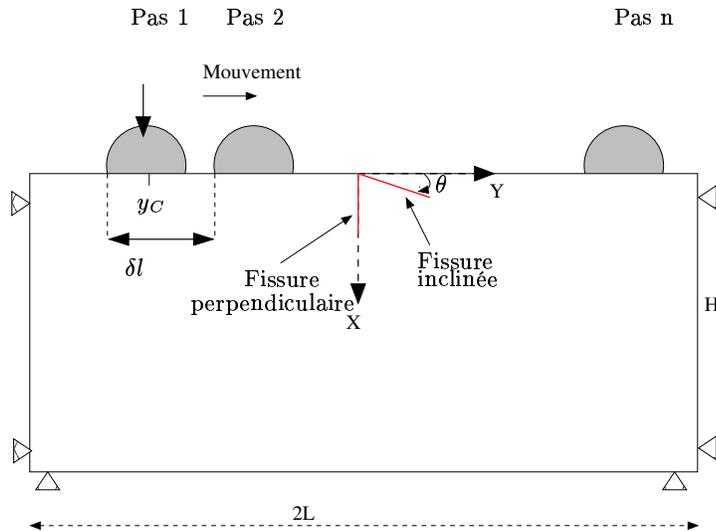


FIG. 3.25 – Données du problème pour le déplacement d'une charge normale hertzienne (chargement non proportionnel)

Fissure perpendiculaire

Pour une fissure perpendiculaire, le maillage établi induit 110 éléments d'interface et 10534 degrés de liberté (cf. figures 3.26). La précision, choisie de manière à avoir la

meilleure qualité sur la solution, est fixée à 10^{-3} . De même la taille du domaine, choisie de manière à modéliser un massif semi-infini, permet de s'affranchir des effets des conditions aux limites sur les résultats ($L = 150$, $H = 100$).

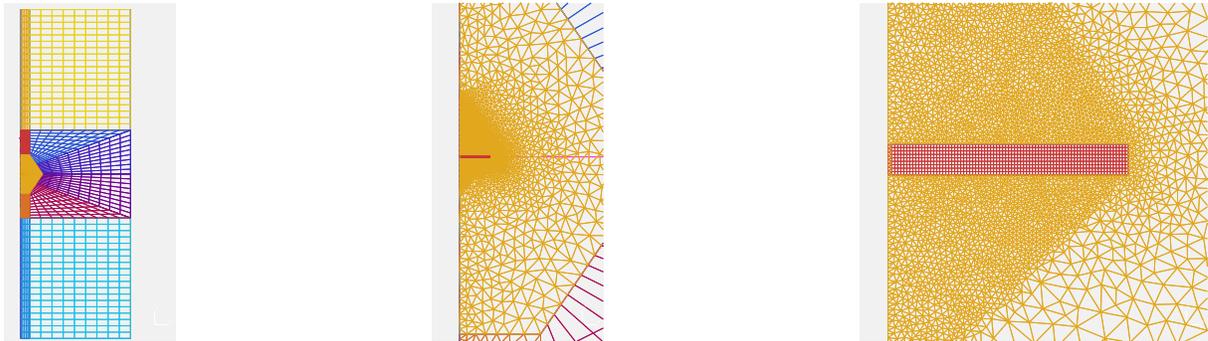


FIG. 3.26 – Maillage utilisé par le modèle `elfe_3d` pour le déplacement d'une charge normale hertzienne et une fissure perpendiculaire.

Dans cet exemple, la valeur de K_I est nulle à tous les pas de chargement, et les variations de K_{II} sont rapportées dans la figure 3.27. En abscisse est représentée la distance du centre de la charge à la position de la fissure ; en ordonnée le FIC en mode II K_{II} . Nous constatons une très bonne corrélation entre les résultats issus du modèle `elfe_3d` et ceux issus du modèle de référence (erreur $< 2\%$, cf. table 3.8, où l'erreur relative correspond à l'erreur absolue sur le maximum de la valeur de référence).

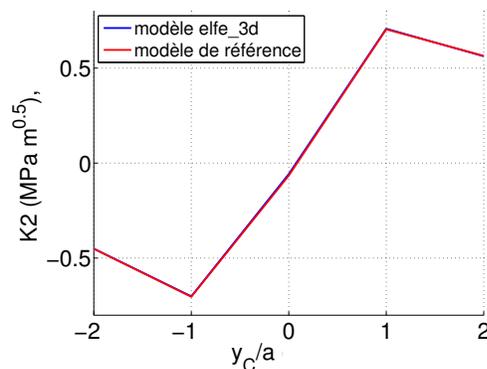


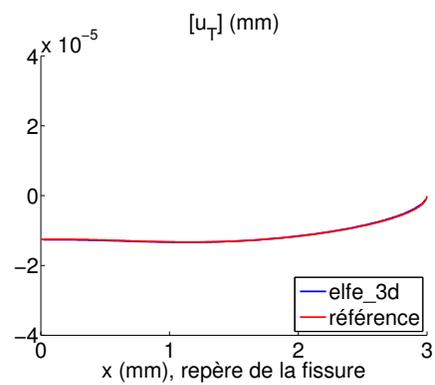
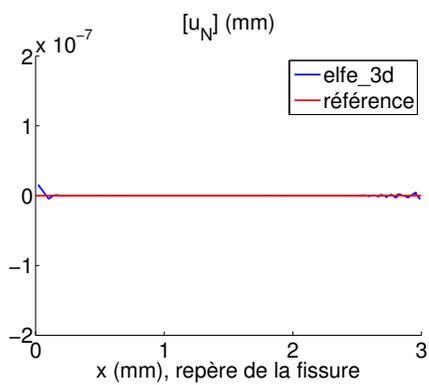
FIG. 3.27 – Comparaison entre le modèle de référence et le modèle `elfe_3d` pour le déplacement d'une charge normale hertzienne en cinq pas. Fissure perpendiculaire $b = 3\text{mm}$.

L'analyse des champs de déplacement montre que la répartition des zones d'ouverture, d'adhérence et de glissement est très bien représentée par notre modèle (cf. figures 3.28). En abscisse est représenté l'axe de la fissure, et en ordonnée les sauts du champ de déplacement en millimètre.

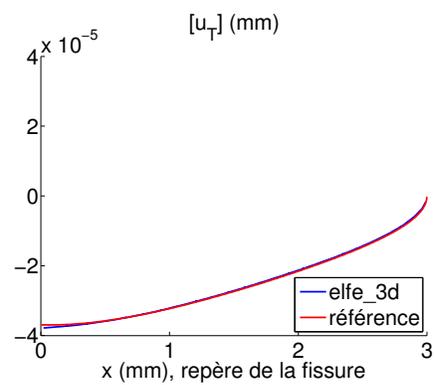
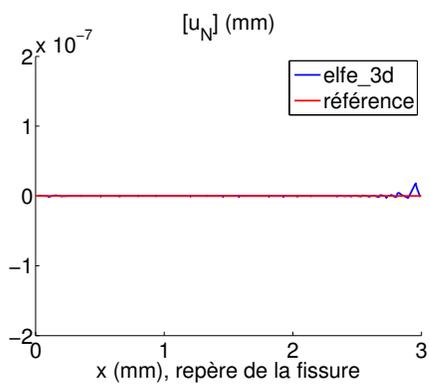
| Erreur relative sur K_{II} en % entre les résultats de référence et ceux issus du modèle <code>elfe_3d</code> | |
|---|----------|
| y_C | K_{II} |
| -2 | 0.37 |
| -1 | 0.03 |
| 0 | 1.08 |
| 1 | 0.4 |
| 2 | 0.04 |

TAB. 3.8 – Erreur relative pour le déplacement d’une charge normale hertzienne en cinq pas. Fissure perpendiculaire $b = 3\text{mm}$

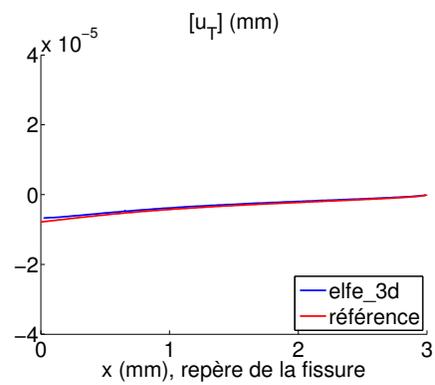
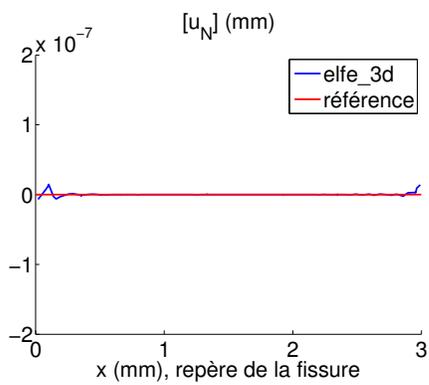
Physiquement, la fissure est située dans une zone de compression et ses faces sont sollicitées en cisaillement. Le mode de sollicitation en pointe est du mode II pur ($K_I = 0$). Le passage du centre de la zone de chargement au-dessus de la fissure ($\frac{y_C}{a} = 0$) correspond à l’inversion du signe du glissement interfacial.



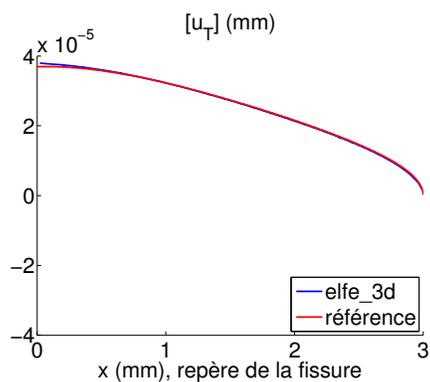
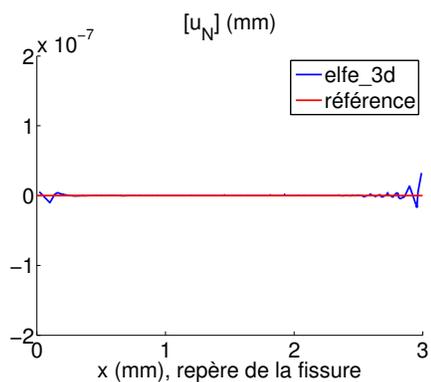
Etape 1



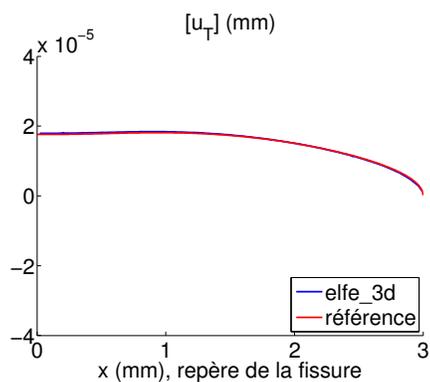
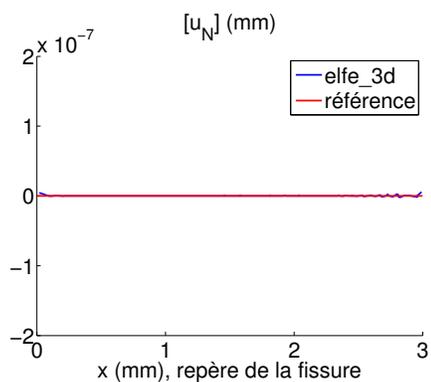
Etape 2



Etape 3



Etape 4



Etape 5

FIG. 3.28 – Sauts de déplacements normal et tangentiel le long des faces de la fissure perpendiculaire pour le déplacement d'une charge normale hertzienne en cinq pas

Fissure inclinée

Les valeurs de la précision, L et H sont les même que précédemment. Pour une fissure inclinée, le maillage établi induit 146 éléments d'interface et 13 200 degrés de liberté (cf. figure 3.29).

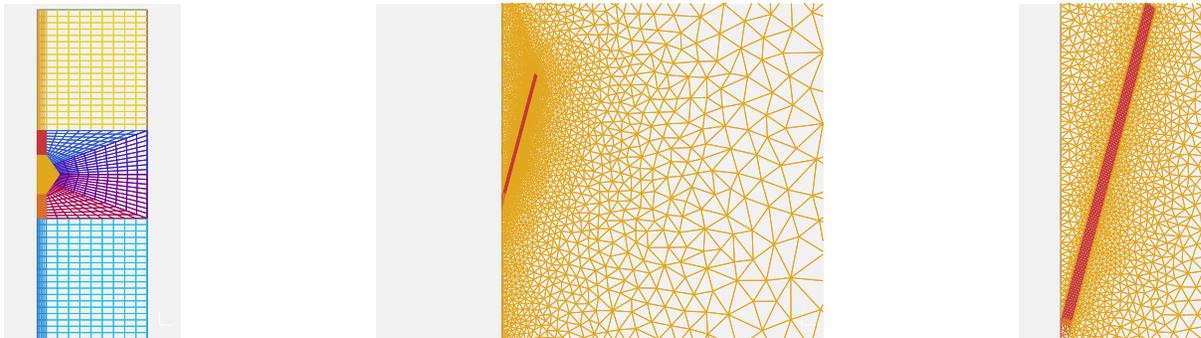


FIG. 3.29 – Maillage utilisé par le modèle `elfe_3d` pour le déplacement d'une charge normale hertzienne et une fissure inclinée.

Les variations des FIC, K_I et K_{II} , sont rapportées figure 3.30. En abscisse est représentée la distance du centre de la charge à la position de la fissure ; en ordonnée les FIC. L'inclinaison de la fissure autorise des zones d'ouverture le long de ses faces. Le mode de sollicitation en pointe est mixte pour les étapes de chargement correspondant à $y_C = 0$ et 1 (étapes 3 et 4). Pour les deux autres étapes, la fissure est sollicitée en mode II pur (étapes 1 et 2).

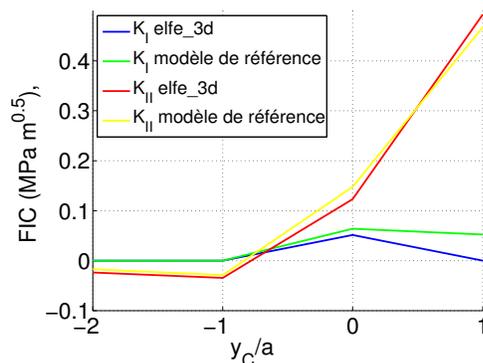


FIG. 3.30 – Comparaison entre le modèle de référence et le modèle `elfe_3d` pour le déplacement d'une charge normale hertzienne en quatre pas. Fissure inclinée, $b = 3$ mm, $\theta = 15^\circ$

Nous constatons une bonne corrélation entre les résultats issus du modèle `elfe_3d` et ceux issus du modèle de référence pour les étapes 1 et 2 (mode II pur, cf. table 3.9). Néanmoins des zones d'imprécision subsistent sur le facteur K_I . Pour pouvoir comprendre

| Erreur relative sur K_I en % entre les résultats de référence et ceux issus du modèle elfe_3d | | Erreur relative sur K_{II} en % entre les résultats de référence et ceux issus du modèle elfe_3d | |
|---|-------|--|----------|
| y_C | K_I | y_C | K_{II} |
| -2 | 0.0 | -2 | 1.02 |
| -1 | 0.0 | -1 | 1.00 |
| 0 | 17.95 | 0 | 3.94 |
| 1 | 15.71 | 1 | 8.35 |

TAB. 3.9 – Erreur relative pour le déplacement d’une charge normale hertzienne en quatre pas. Fissure inclinée, $b = 3$ mm, $\theta = 15^\circ$

cette différence, nous considérons les sauts de déplacements le long de la fissure, figures 3.32. En abscisse est représenté l’axe de la fissure, et en ordonnée les sauts du champ de déplacement en mm. L’analyse de ces champs montre que la répartition des zones d’ouverture, d’adhérence et de glissement est très bien représentée par notre modèle. La répartition de ces zones est plus complexe et l’allure des sauts des champs de déplacement normal et tangentiel illustrent cette complexité. En effet, nous observons l’apparition d’une “bulle” d’ouverture le long des faces en contact pour les étapes 3 et 4.

Nous pouvons alors nous poser des questions quant à l’utilisation de la méthode de l’intégrale J adaptée au contact, pour les étapes 3 et 4. Pour rappel, la quantité utilisée est :

$$J_\Gamma - T_1^+(A)(u_1^- - u_1^+)(A), \quad (3.83)$$

avec u_1 le champ de déplacement selon le plan de la fissure et T_1^+ la composante tangentielle de la force de contact sur la face positive de la fissure. La valeur $(u_1^- - u_1^+)(A)$ correspond donc à celle du glissement au point A , point de jonction entre le contour d’intégration et l’axe de la fissure, et T_1^+ à la force de frottement appliquée. Lorsque A appartient à une zone ouverte, alors $T_1^+(A) = 0$ et par conséquent nous retrouvons la formule classique de l’intégrale J . L’utilisation de cette quantité est donc valable quel que soit l’état de contact au point A . Pour le cas traité, ce point A se situe à 0.628 mm sur l’axe des abscisses, et 2.76 mm sur l’axe des ordonnées, ce qui correspond à 2.83 mm de profondeur suivant l’axe de la fissure. Pour les étapes 3 et 4, A se situe donc sur le domaine de la “bulle” d’ouverture.

Des questions se posent sur l’interprétation physique que peut avoir J (ou la quantité modifiée pour le contact). En effet, l’interprétation de J comme étant le taux de restitution d’énergie disponible en pointe est souvent employée pour une fissure dont les faces sont libres d’efforts. Pour une telle configuration de fissure, la singularité est de l’ordre de $-1/2$ et est unique. Or, pour les situations dans l’exemple considéré et correspondant aux étapes 3 et 4, les faces de la fissure étant partiellement en contact, il semble que des singularités de nature différentes puissent apparaître à cause de la présence de la “bulle” d’ouverture le long de la fissure. Des singularités supplémentaires peuvent résulter des extrémités de

la “bulle”.

Dans le cas précédent, la fissure perpendiculaire était en contact sur tout le long de ces faces et tout au long du cycle. De plus, nous avons vu que l’information sur les FIC était restituée convenablement. Mais dans un tel cas, nous pouvons aussi nous demander si l’ordre de la singularité n’évolue pas. Cependant, si évolution il y a, en tout cas elle ne semble pas affecter l’information restituée par l’intégrale J . Dans le cas présent, l’apparition d’une “bulle” d’ouverture semble influencer l’information restituée par le calcul de J . La dissipation d’énergie n’est plus localisée en tête de fissure (mode I), mais répartie le long des faces de la fissure du fait du glissement relatif dû au cisaillement des deux faces. Cette constatation risque d’apparaître pour tout problème avec une évolution des zones de contact le long des faces de la fissure.

Pour les résultats issus du modèle de référence, les FIC sont calculés directement à partir des discontinuités du champ de déplacement. La singularité en pointe est supposée de l’ordre de $-1/2$. Mais la comparaison des sauts de déplacements ne permet pas de mettre en évidence une différence sur la valeur de la singularité. Par conséquent, pour des cas particuliers de comportement de fissure il semble que les deux modèles (modèle `elfe_3d` et modèle de référence) divergent sur les valeurs des FIC. La méthode de l’intégrale J semble donc restituer une information supplémentaire. Parmi l’ensemble des exemples qui vont être présentés, nous tenterons d’identifier dans quelles situations cette différence apparaît. L’identification dans le cas présent pointe sur la présence d’une “bulle” d’ouverture, partiellement englobée dans le J -domaine, avec les faces de la fissure en contact sur son extrémité supérieure (cf. 3.31).

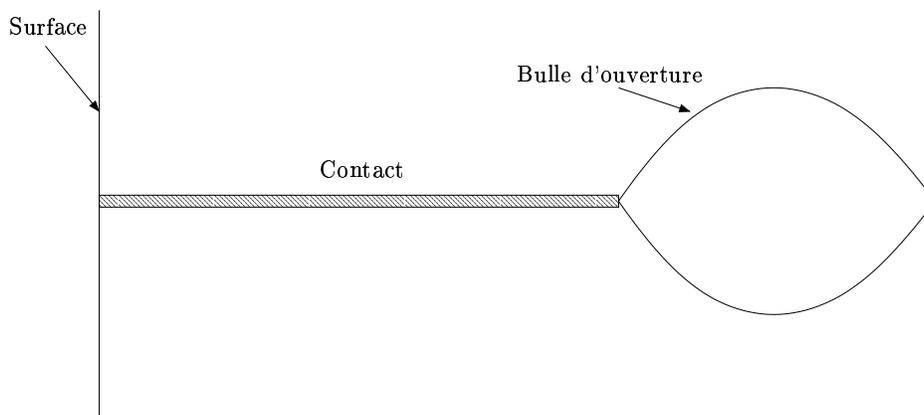
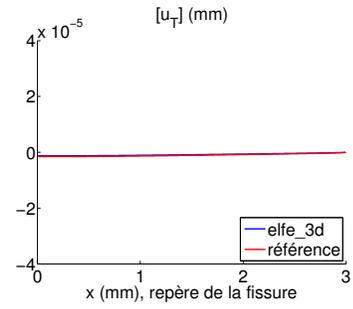
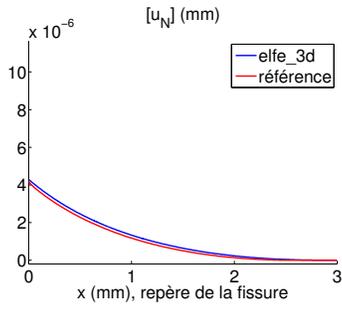


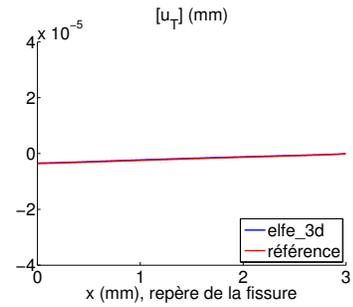
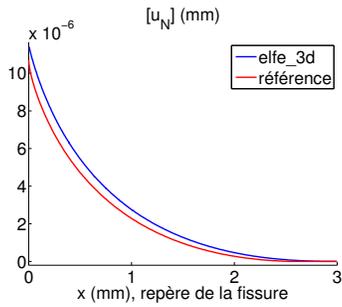
FIG. 3.31 – Définition de la géométrie de la “bulle” d’ouverture.

Conclusion

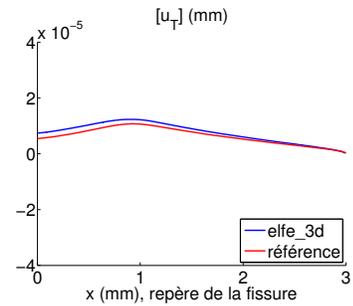
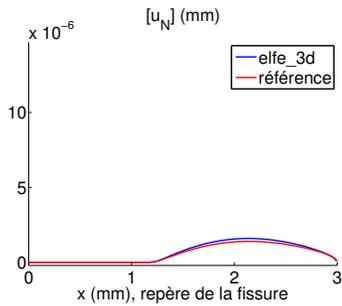
La résolution du contact le long des faces de la fissure, pour un cas simple de chargement, a fourni des résultats acceptables dans les deux configurations de fissure abordées.



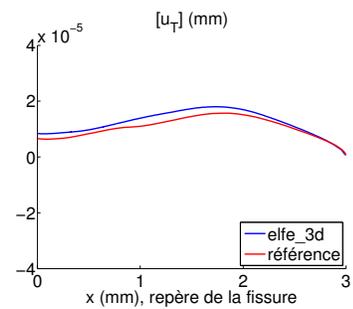
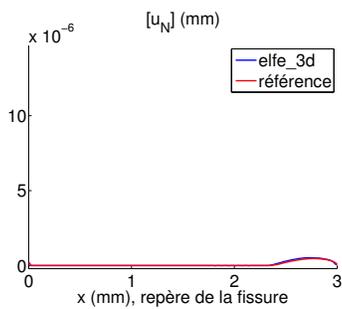
Etape 1



Etape 2



Etape 3



Etape 4

FIG. 3.32 – Sauts de déplacements normal et tangentiel le long des faces de la fissure inclinée pour le déplacement d'une charge normale hertzienne en quatre pas

La répartition des zones d'ouverture, d'adhérence et de glissement est très bien restituée par les champs de déplacement. Le modèle est donc précis quant à la résolution du contact frottant, pour un incrément de pas de chargement grossier $\delta l = 1$ mm. Cependant, quelques différences sur la valeur des FIC ont été identifiées pour la fissure inclinée aux pas de chargement correspondant à $y_C = 0$ et 1. Nous avons émis la supposition que la présence d'une "bulle" d'ouverture introduisait une singularité d'une autre nature et semblait influencer l'information restituée par l'intégrale J . Cependant, l'analyse est effectuée sur un faible nombre de pas de chargement. La même analyse va donc être présentée pour un incrément de pas de chargement plus faible, $\delta l = 50$ μm , afin de mettre en évidence la restitution de l'histoire du chargement par le modèle. Nous verrons aussi des situations où le calcul des FIC conduit à des résultats différents entre les deux méthodes.

3.8.2 Déplacement d'une charge normale avec un incrément de pas de chargement fin ($\delta l = 50$ μm)

Les données du problème sont les mêmes que précédemment. La seule différence concerne l'incrément de chargement fortement diminué : $\delta l = 50$ μm . Le rapport $\frac{2a}{\delta l}$ est différent et vaut 40. Cette analyse va nous permettre de mettre l'accent sur la précision du calcul des FIC.

Fissure perpendiculaire

Les données du maillage sont les mêmes que précédemment. Le choix d'un incrément de pas de chargement impose une répartition surfacique fine, ce qui explique le nombre important de degrés de liberté sur le maillage précédent. Les variations de K_{II} sont rapportées dans la figure 3.33 en fonction de la distance du centre de la charge à la position de la fissure adimensionnée par la demi-longueur de la zone de contact.

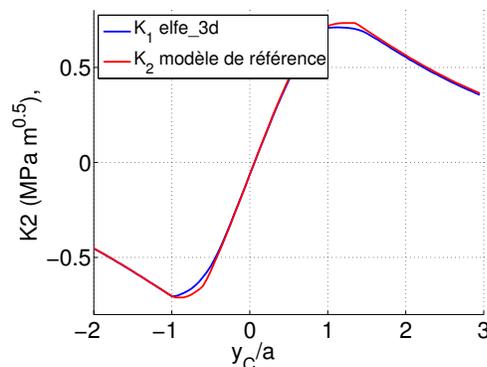
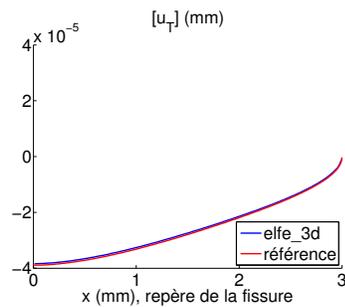
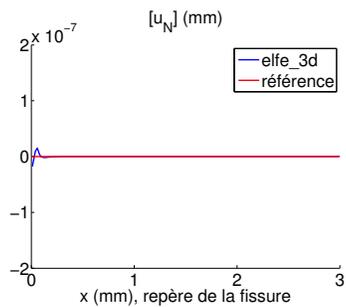
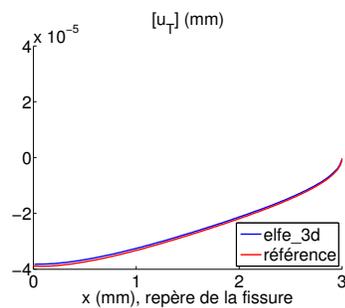
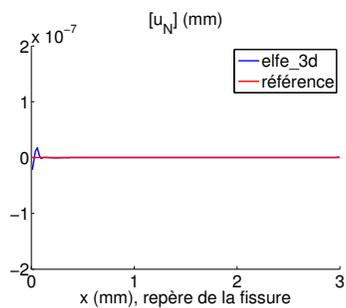


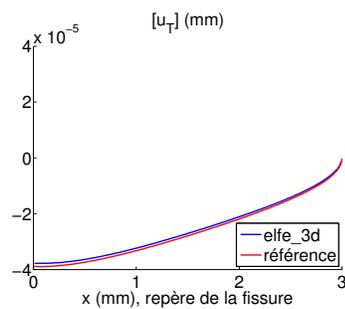
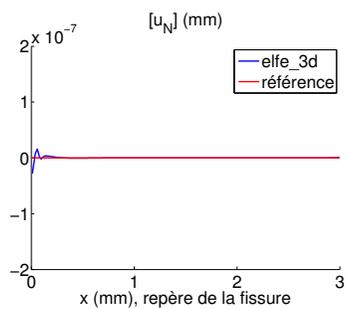
FIG. 3.33 – Comparaison des variations de K_I entre le modèle de référence et le modèle elfe_3d pour le déplacement d'une charge normale hertzienne incrémentée avec $\delta l = 50$ μm . Fissure perpendiculaire, $b = 3$ mm.



Etape à $\frac{y_C}{a} = -0.95$

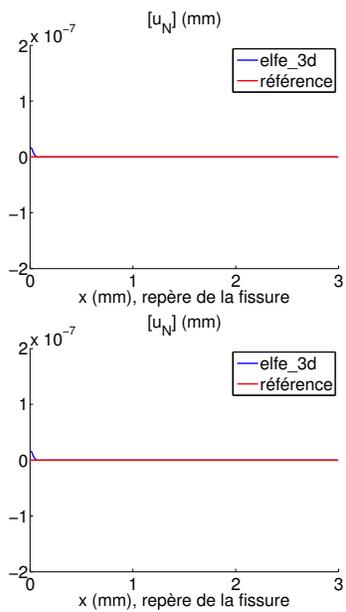


Etape à $\frac{y_C}{a} = -0.90$

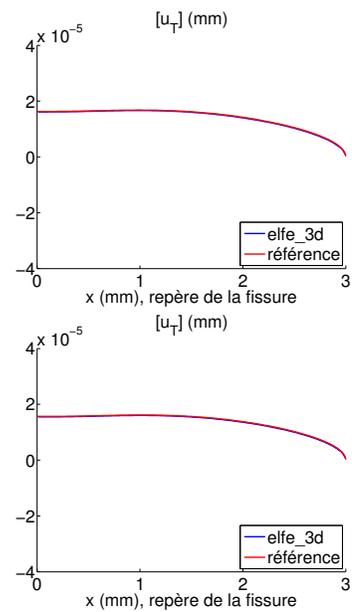


Etape à $\frac{y_C}{a} = -0.85$

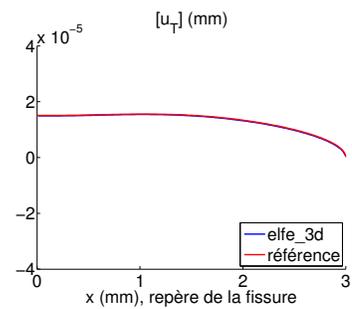
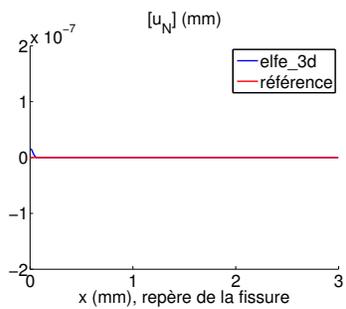
FIG. 3.34 – Sauts de déplacements normal et tangentiel le long des faces de la fissure perpendiculaire pour le déplacement d'une charge normale hertzienne incrémentée avec $\delta l = 50 \mu\text{m}$



Etape à $\frac{y_C}{a} = 1.10$

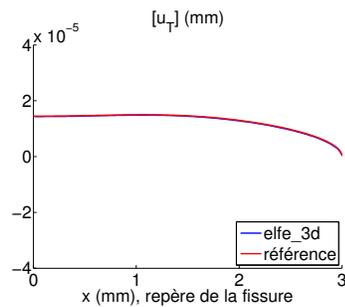
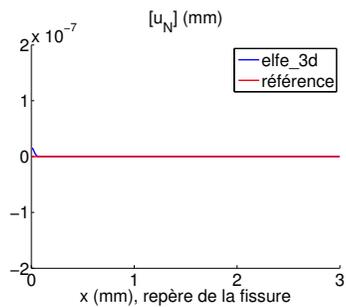


Etape à $\frac{y_C}{a} = 1.15$

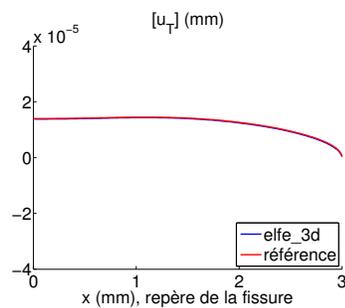
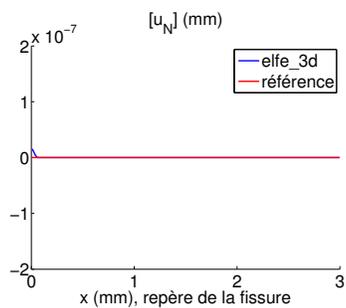


Etape à $\frac{y_C}{a} = 1.20$

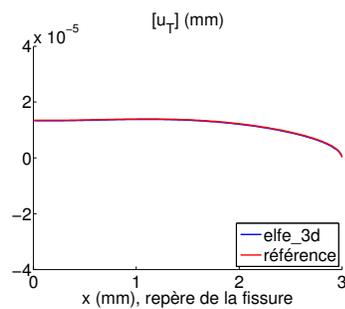
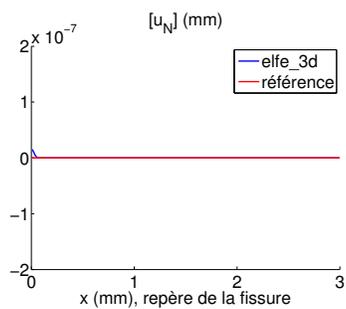
FIG. 3.35 – Sauts de déplacements normal et tangentiel le long des faces de la fissure perpendiculaire pour le déplacement d'une charge normale hertzienne incrémentée avec $\delta l = 50 \mu\text{m}$



Etape à $\frac{y_C}{a} = 1.25$



Etape à $\frac{y_C}{a} = 1.30$



Etape à $\frac{y_C}{a} = 1.35$

FIG. 3.36 – Sauts de déplacements normal et tangentiel le long des faces de la fissure perpendiculaire pour le déplacement d’une charge normale hertzienne incrémentée avec $\delta l = 50 \mu\text{m}$

Nous constatons dans l'ensemble une bonne corrélation des valeurs de K_{II} . Il existe néanmoins des zones ($-0.95 < \frac{y_C}{a} < -0.85$ et $1.1 < \frac{y_C}{a} < 1.35$) pour lesquelles la fissure est adhérente et où la valeur de l'erreur atteint plus de 6%. Afin de constater de la qualité de la solution pour ce comportement adhérent, analysons les champs de déplacement de ces zones. L'incrément du pas de chargement étant très fin, nous allons présenter les champs de déplacement uniquement pour ces zones d'adhérence. Les figures 3.34 (a), (b), (c) illustrent les sauts de déplacement normal et tangentiel pour les valeurs de $y_C = -0.95, -0.9, -0.85$ mm respectivement, et 3.35 (a), (b), (c) et 3.36 (a), (b), (c) illustrent les sauts de déplacement normal et tangentiel pour les valeurs de y_C allant de 1.10 mm à 1.35 mm. En abscisse est représenté l'axe de la fissure en mm, en ordonnée les sauts de déplacement en mm.

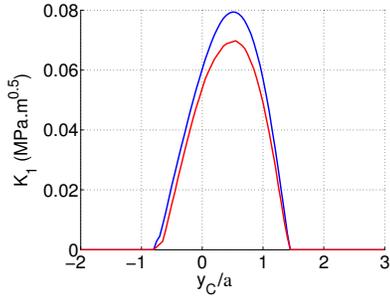
Cette analyse montre qu'il y a une bonne corrélation avec ceux issus du modèle de référence. Il semble donc que les calculs pour déterminer la valeur des FIC effectués par les deux modèles numériques conduisent à des résultats différents en certaines occasions, comme cela a déjà été mis en évidence. Pour cet exemple, le point A se situe à 2.60 mm sur l'axe des abscisses (axe de la fissure). De plus, les sauts de déplacement montrent que les faces de la fissure sont toujours en contact. Par conséquent, dans le cas présent, ce n'est pas une "bulle" d'ouverture qui influence le résultat des FIC. Comme cela a été présenté section 3.3, les calculs effectués par le modèle `elfe_3d` ne font aucune supposition sur la nature de la singularité du champ de déplacement lorsqu'il y a contact. Nous pouvons donc émettre l'hypothèse que la nature de la singularité évolue en pointe de fissure et que les calculs restitués par le modèle de référence sont restrictifs en ce sens qu'il suppose une singularité en $\frac{1}{\sqrt{r}}$.

Dans les exemples présentés dans la suite de ce travail, nous tenterons dans la mesure du possible de valider nos résultats par rapport à ceux issus du modèle de référence, tout en ayant à l'esprit que les deux définitions du calcul des FIC sont différentes. La validation se fera sur l'allure et la taille des zones d'ouverture/contact et glissement/adhérence.

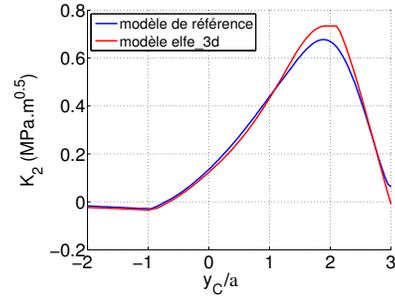
Fissure inclinée

Les données du maillage sont les mêmes que celles du cas étudié en cinq pas de chargement. Les variations des FIC, K_I et K_{II} , sont rapportées dans les figures 3.37(a) et 3.37(b). En abscisse est représentée la distance entre le centre de la charge et l'origine en mm, en ordonnée les FIC. Nous constatons une bonne corrélation entre les résultats issus du modèle `elfe_3d` et ceux issus du modèle de référence en terme d'allure et d'ordre de grandeur.

L'analyse des sauts de déplacement normal le long des faces de la fissure révèle la présence de la "bulle" d'ouverture (cf. figures 3.38(a) où les courbes rouge et verte correspondent aux pas de chargement initial et final respectivement). Cette bulle se déplace de la gauche vers la droite, c'est-à-dire de la surface libre vers la pointe de la fissure, pour y_C allant de -0.9 à 0.3 mm (cf. figure 3.39 où les courbes rouge et verte correspondent aux pas de chargement $y_C = -0.9$ et 0.3 mm respectivement). Nous observons une diffé-

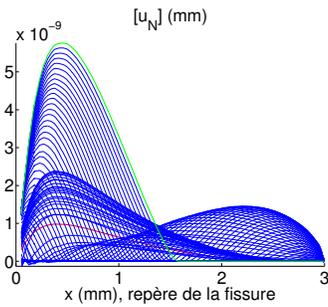


(a) K_I

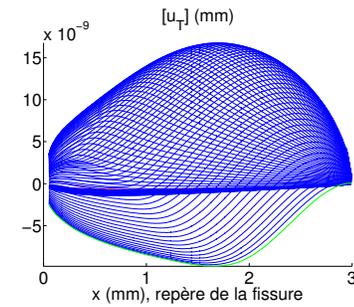


(b) K_{II}

FIG. 3.37 – Comparaison des variations des FIC entre le modèle de référence et le modèle elfe_3d pour le déplacement d’une charge normale hertzienne incrémentée avec $\delta l = 50 \mu\text{m}$, et une fissure inclinée



(a) Saut normal



(b) Saut tangentiel

FIG. 3.38 – Sauts de déplacement sur tout le cycle de chargement issus du modèle elfe_3d pour le déplacement d’une charge normale hertzienne incrémentée avec $\delta l = 50 \mu\text{m}$. Fissure inclinée, $b = 3 \text{ mm}$, $\theta = 15^\circ$.

rence sur la valeur du FIC en mode I à partir de l’apparition de cette “bulle” jusqu’à sa disparition. D’autre part, après l’apparition de cette “bulle” d’ouverture, la fissure s’ouvre progressivement en surface. Ce comportement engendre le déplacement le long de la fissure d’un point M qui passe progressivement d’un état en contact à celui d’ouverture. Ce comportement peut introduire une singularité d’un autre ordre, qui doit certainement voir une influence sur celle de la pointe de la fissure.

Les différences entre les deux modèles portant sur les valeurs des FIC sont liées à l’apparition d’une “bulle” d’ouverture. La comparaison des champs locaux fournit néanmoins une bonne corrélation. Par conséquent, les différences de valeur des FIC proviennent du post-traitement qui suppose d’autres hypothèses. En effet, le modèle de référence utilise une approche de calcul des FIC en terme de déplacement, alors que le modèle elfe_3d

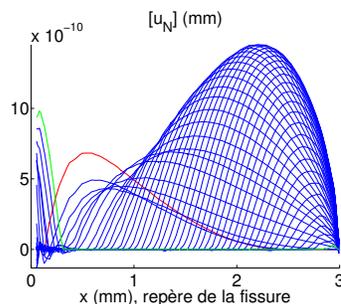


FIG. 3.39 – Sauts de déplacement pour $\frac{y_c}{a}$ allant de -0.9 à 0.3 mm issus du modèle `elfe_3d` pour le déplacement d'une charge normale hertzienne incrémentée avec $\delta l = 50 \mu\text{m}$. Fissure inclinée, $b = 3 \text{ mm}$, $\theta = 15^\circ$.

utilise une formulation énergétique impliquant les contraintes et les déplacements. Ces résultats soulèvent des questions qui nécessitent des développements et des approfondissement théoriques.

Conclusion

La comparaison de nos résultats avec ceux du modèle de référence valide le modèle de comportement de fissure développé, en ce sens que les répartitions des zones de contact/ouverture, glissement/adhérence sont bien restituées. L'étape suivante de validation est la qualification du modèle dans une situation réelle de fatigue de contact.

3.8.3 Analyse d'un cycle complet de chargement en fatigue tribologique

Afin de juger de l'aptitude de notre modèle de comportement à décrire une situation plus complexe, nous allons simuler des conditions de fatigue de contact en roulement et pour différentes configurations de fissure. Les configurations étudiées ici sont issues de travaux réalisés lors d'un contrat européen ICON [27] Un passage de la roue sur le rail correspond à un cycle de chargement pour une fissure dans le rail. Les conditions de chargement sont :

- une force normale égale à 90 000 N,
- une aire de contact avec $2a = 13.5 \text{ mm}$,
- et une force tangentielle Q en glissement pur dans la direction du mouvement, telle que $Q = \mu_s P$, avec le coefficient de frottement en surface, μ_s , égal à 0.2.

La modélisation bidimensionnelle d'un tel chargement est constituée d'une distribution de pression normale hertzienne avec

$$P_0 = 845 \text{ MPa}, \quad (3.84)$$

et d'une distribution tangentielle telle que

$$\frac{Q_0}{P_0} = 0.2. \quad (3.85)$$

Le chargement réel se déplace de gauche à droite. Le chargement de fatigue de contact en roulement est donc composé de pas de chargement successifs modélisant le passage de la charge depuis $y_C = -10$ mm à $y_C = 25$ mm, y_C étant l'ordonnée du centre de la charge (cf. figure 3.40). Le rapport y_C/a varie approximativement entre -1.5 et 4.

La discrétisation quasi-statique a été choisie de manière à représenter convenablement le comportement de la fissure. Par conséquent, 174 pas ont été modélisés pour représenter un cycle entier de chargement, ce qui correspond au choix $dl = 0.25$ mm. Le rapport $\frac{2a}{\delta l}$ vaut 54.

Nous allons considérer des fissures rectilignes, inclinées par rapport à l'horizontale d'un angle β de -15° et débouchantes à la surface de contact (cf. figure 3.40). Trois longueurs de fissure sont choisies : $b = 2, 4.3$ et 5.85 mm pour un acier dont le module de Young et le coefficient de poisson valent $E = 210$ GPa et $\nu = 0.3$ respectivement. Le coefficient de frottement interfacial est fixé constant pour les trois longueurs de fissure : $\mu_C = 0.1$. Les fissures sont positionnées en $x = 0$ et discrétisées avec 135, 244 et 374 éléments d'interface pour $b = 2, 4.3$ et 5.85 mm respectivement.

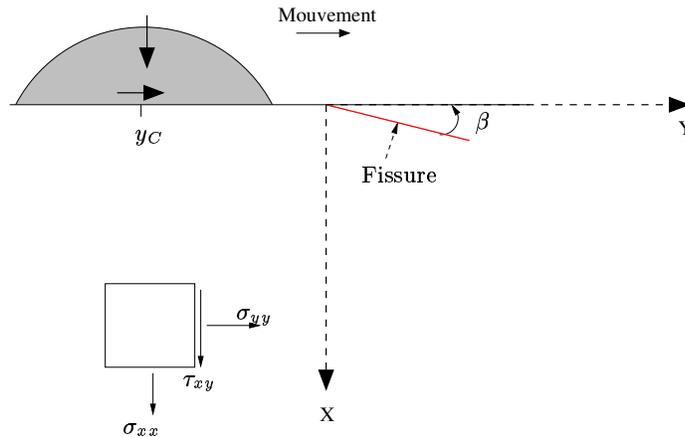


FIG. 3.40 – Données du problème portant sur un cycle complet en fatigue de contact de roulement

L'analyse porte sur la variation des FIC à la pointe de la fissure, K_I et K_{II} , calculées pour les trois longueurs de fissure pour tout le cycle de chargement, y_C allant de -10 à 25 mm. Les résultats issus du modèle de référence sont rapportés dans la figure 3.41(a) et 3.41(b) tandis que ceux issus du modèle elfe_3d sont rapportés dans la figure 3.42(a) et 3.42(b). En abscisse est représenté la position de y_C en mm par rapport à l'origine du repère et en ordonnée les FIC en $\text{MPa}\sqrt{m}$.

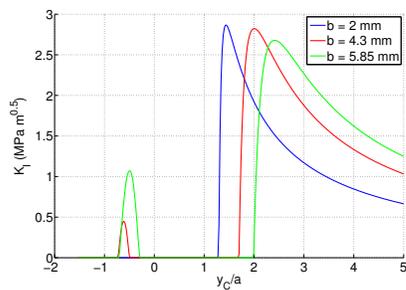
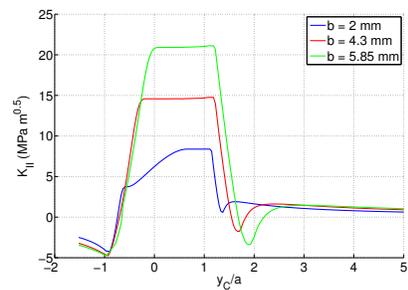
(a) $\underline{K_I}$ (b) $\underline{K_{II}}$

FIG. 3.41 – Variations des FIC issues du modèle de référence pendant un cycle de fatigue de contact de roulement pour trois longueurs de fissure

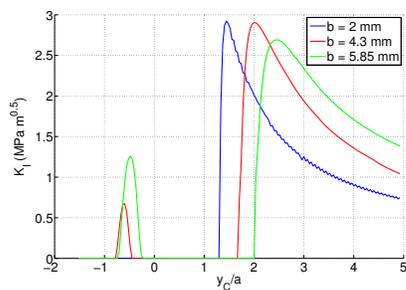
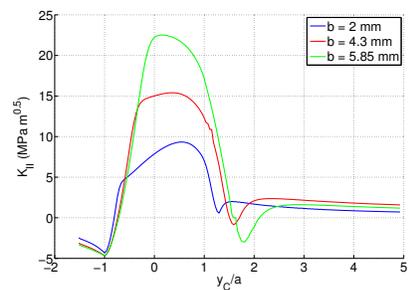
(a) $\underline{K_I}$ (b) $\underline{K_{II}}$

FIG. 3.42 – Variations des FIC issues du modèle elfe_3d pendant un cycle de fatigue de contact de roulement pour trois longueurs de fissure

Des séquences de chargement en mode mixte apparaissent à la pointe de la fissure.

Pour $b = 4.3$ et 5.85 mm, quatre phases se succèdent (cf. figures 3.44 et 3.45). La première phase est un mode II pur. La seconde phase est une phase en mode mixte I+II avec un mode II prédominant. La pointe de la fissure est ouverte avec un glissement positif. Cette phase devient de plus en plus longue lorsque la longueur de la fissure augmente. La troisième phase, la plus longue, est une phase en mode II pur pendant laquelle la valeur maximale de K_{II} est atteinte. Les faces de la fissure sont en contact glissant (glissement positif), puis le glissement change de signe. La dernière phase est une phase de mode mixte I+II avec un mode I prédominant. Le mode d'ouverture est accompagné d'un faible glissement positif.

Pour $b = 2$ mm, seulement deux phases apparaissent (cf. figure 3.43). Les précédentes phases 1 et 2 disparaissent et la troisième devient la séquence la plus importante du cycle de chargement. La pointe de la fissure est située dans la zone d'influence de la compression et pas encore dans la zone d'influence de la traction.

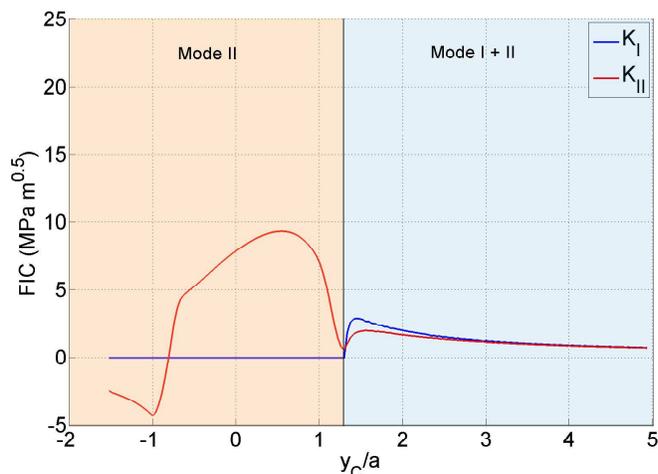


FIG. 3.43 – Description des différentes phases de chargement en pointe de la fissure de longueur 2 mm

Plus la fissure est longue, plus le mode II est important en intensité et en 'espace'. La fissure étant plus longue, elle sort de la zone d'influence en compression qui bloque les faces de la fissure et sa pointe est alors dans la zone de traction, ce qui ouvre la fissure. Cette ouverture décharge les contraintes et favorise le cisaillement.

Le modèle `elfe_3d` restitue les bons ordres de grandeurs pour toutes les longueurs de fissures, ainsi que des allures de comportement tout à fait acceptables en regard de celles obtenus avec le modèle de référence. Des différences de comportement apparaissent néanmoins et peuvent atteindre 80% en K_I et 40% en K_{II} (erreur relative).

Le point A des J -domaine associés aux trois longueurs de fissure (2, 4.3 et 5.85 mm) se situe respectivement à 1.89, 4.17 et 5.7 mm depuis l'origine suivant l'axe de la fissure.

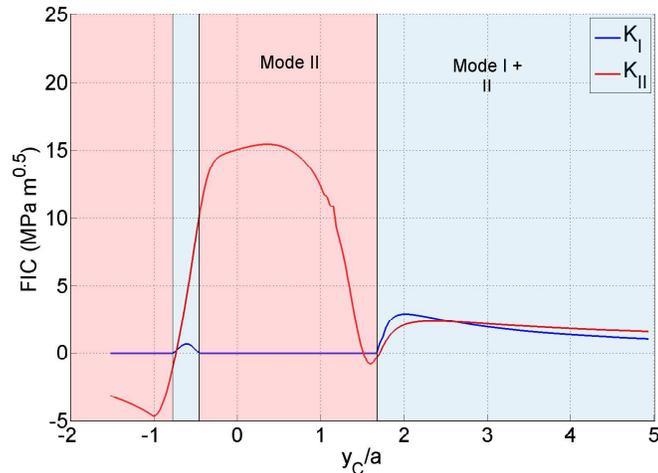


FIG. 3.44 – Description des différentes phases de chargement en pointe de la fissure de longueur 4.3 mm

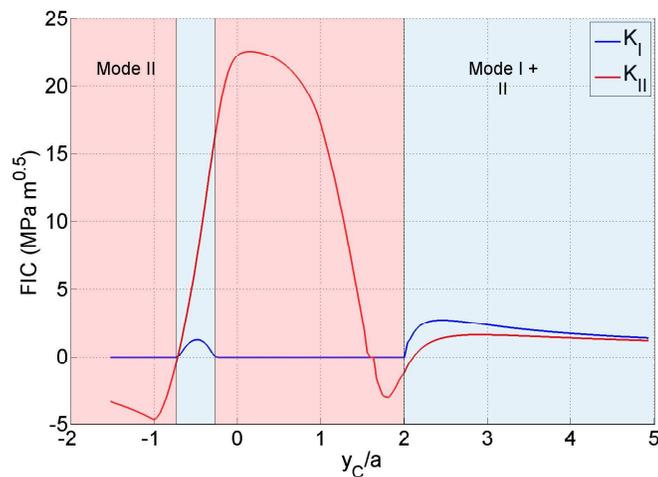
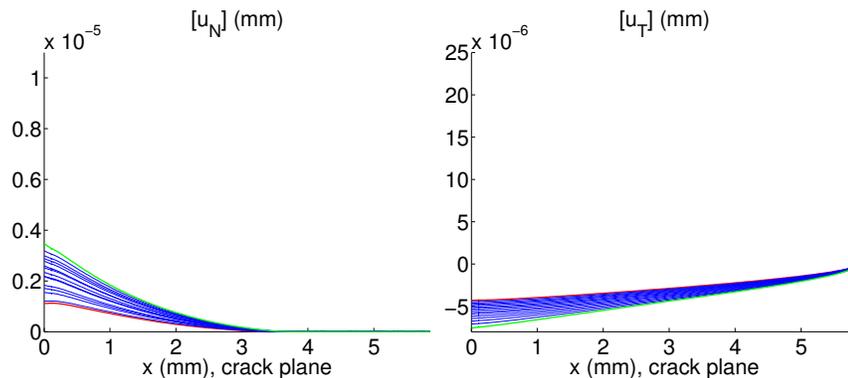


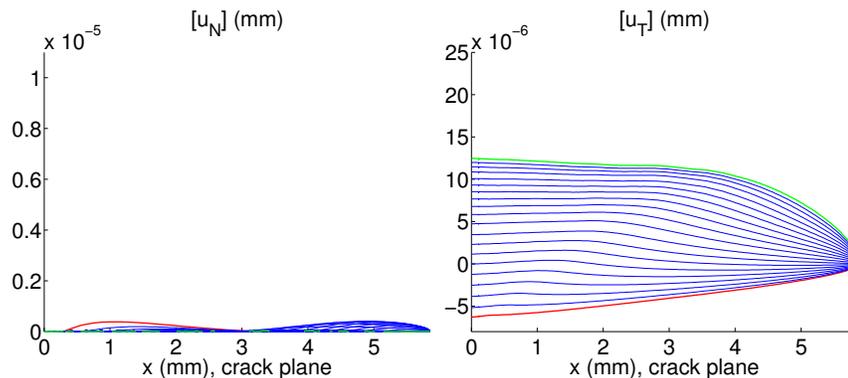
FIG. 3.45 – Description des différentes phases de chargement en pointe de la fissure de longueur 5.85 mm

Si nous considérons les sauts de déplacements à l'interface pour la fissure de longueur 5.85 mm, nous observons à nouveau l'apparition d'une "bulle" d'ouverture pour y_C/a allant de -0.48 à -0.135 mm (cf. figures 3.46). Ces positions de y_C/a correspondent à l'apparition d'un mode d'ouverture en pointe de fissure en présence de glissement positif. Dans les résultats de référence, ce comportement est suivi d'un état adhérent, caractérisé par le palier constant en K_{II} . Pour une fissure plus courte ($b = 2\text{mm}$), cette "bulle" d'ouverture n'apparaît que pour une seule position, $y_C/a = -0.48$ mm, et avec un ordre de grandeur très faible comparativement à celle de la fissure de longueur 5.85 mm (cf. figures 3.47).

D'autre part, en observant la valeur des FIC pour cette position, nous n'observons pas de différence significative entre les valeurs des modèles de référence et de `elfe_3d`. Peut-être est-ce dû au fait que les ordres de grandeurs sont différents (10^{-7} mm pour $[u_N]$ de la fissure de 5.85 mm, et 10^{-8} mm pour $[u_N]$ de la fissure de 2 mm). Toujours est-il que les écarts de comportement en terme de FIC sont moins importants pour la fissure de 2 mm que celle de longueur 5.85 mm.



(a) $y_C/a = -1.50$ à -1.00 mm



(b) $y_C/a = -0.96$ à -0.26 mm

Conclusion partielle

Les premiers résultats montrent que le modèle de fatigue développé est capable de décrire le comportement d'une fissure sous des conditions de contact de roulement et pour différentes longueurs de fissure. La validation a été effectuée grâce aux résultats issus du modèle de référence. Ce modèle de référence a été quantifié par des travaux expérimentaux [26] sur une éprouvette en polyuréthane (PSM4), pour une fissure perpendiculaire à la

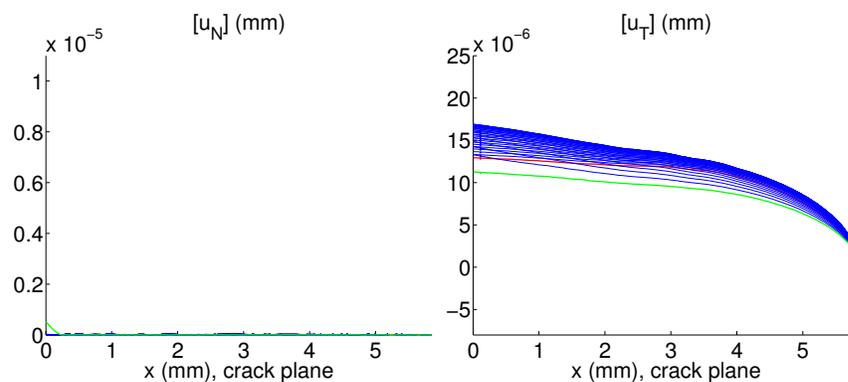
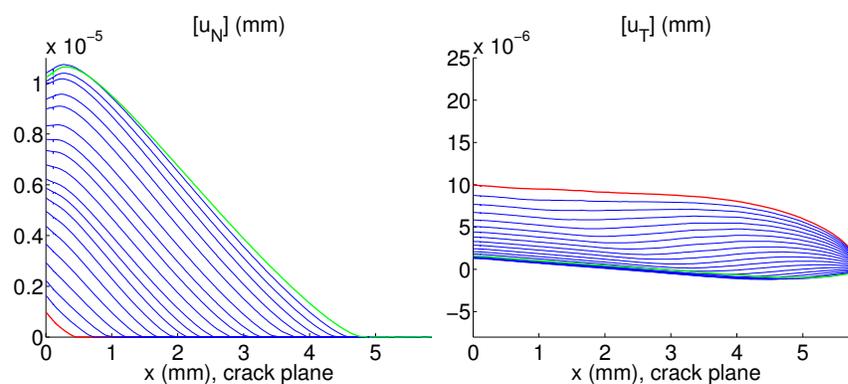
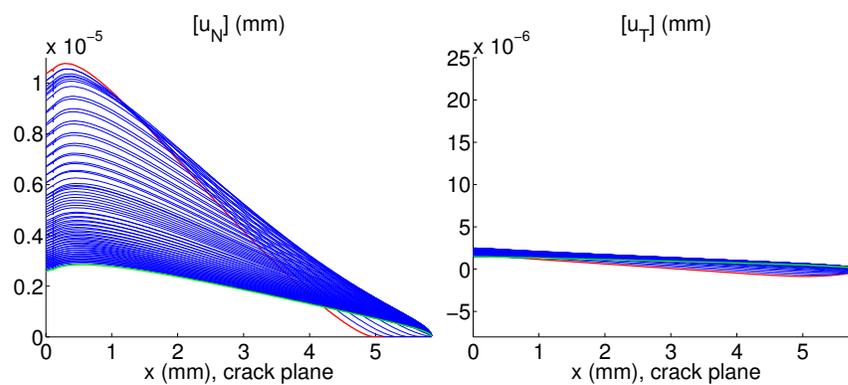
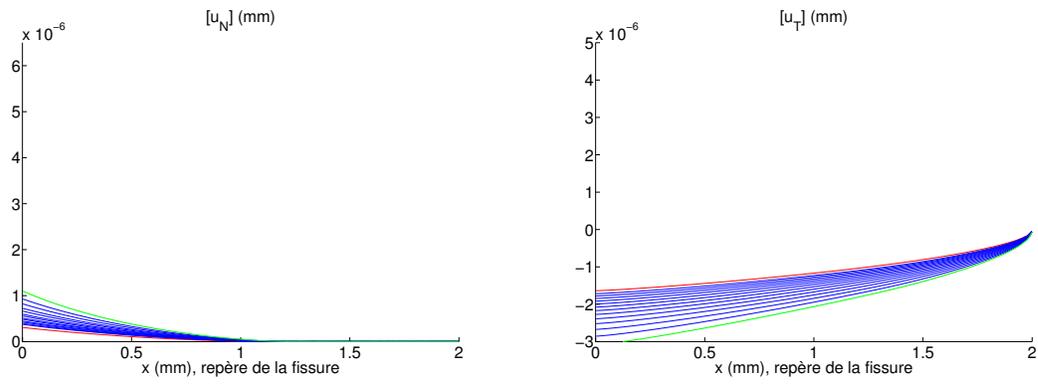
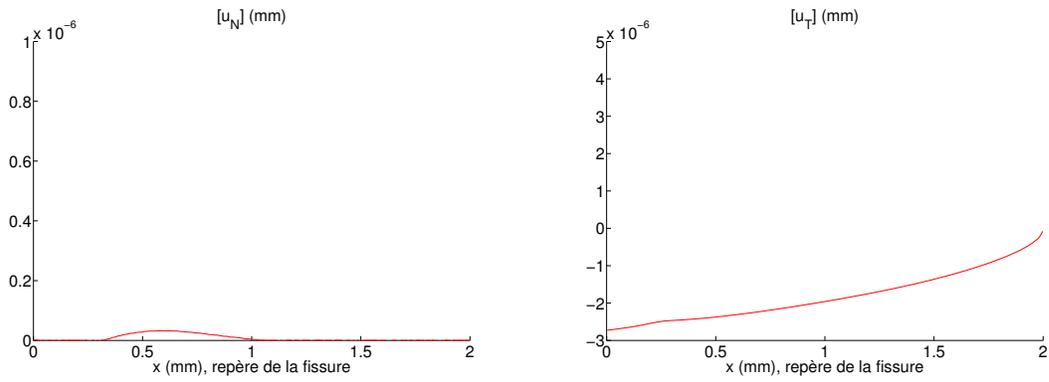
(c) $y_C/a = -0.22$ à 1.04 mm(d) $y_C/a = 1.10$ à 1.70 mm(e) $y_C/a = 1.80$ à 4.90 mm

FIG. 3.46 – Description de l'évolution des sauts de déplacement normal et tangentiels pour les positions définies par y_C/a , avec $b = 5.85$ mm. Les courbes rouge et verte correspondent respectivement à la première et dernière position de y_C/a .



(a) $y_C/a = -1.52 \text{ à } -1.00 \text{ mm}$



(b) $y_C/a = -0.96 \text{ mm}$

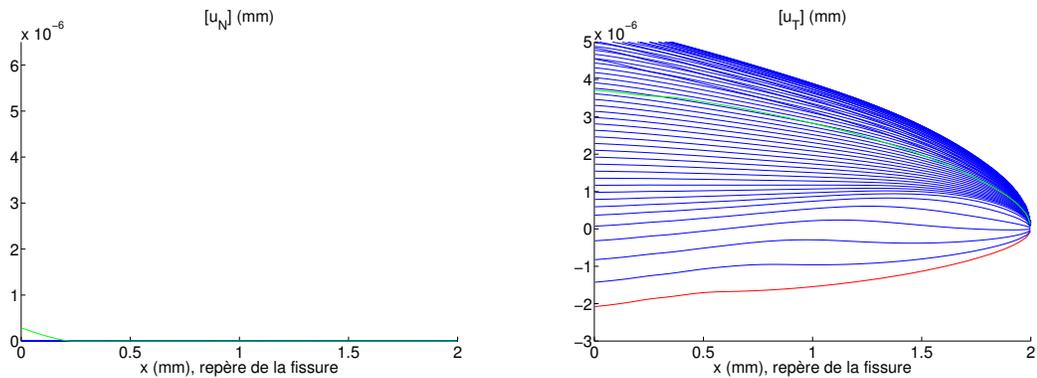
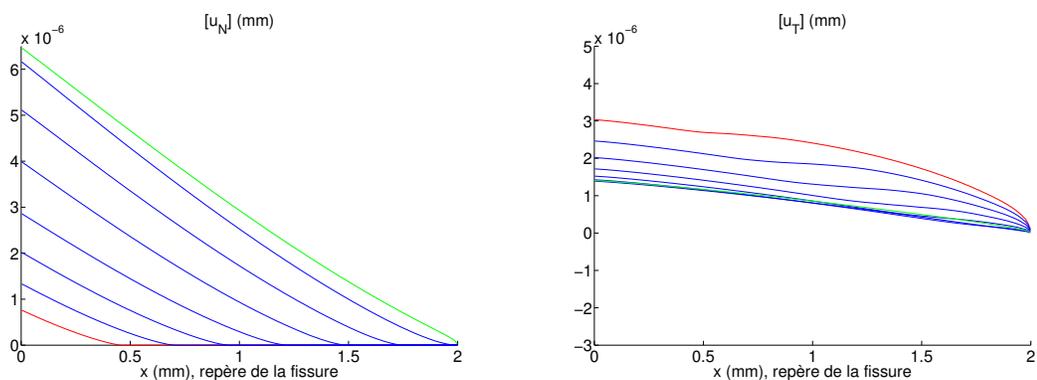
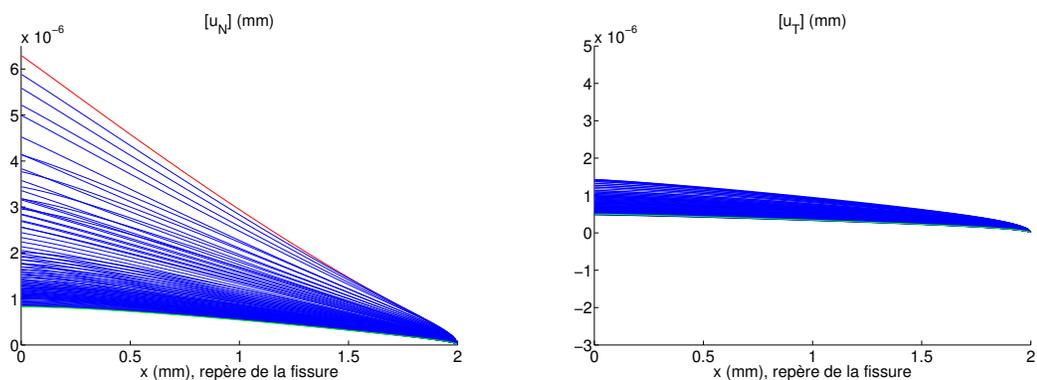
(c) $y_C/a = -0.93$ à 1.03 mm(d) $y_C/a = 1.07$ à 1.33 mm(e) $y_C/a = 1.37$ à 4.92 mm

FIG. 3.47 – Description de l'évolution des sauts de déplacement normal et tangentiels pour les positions définies par y_C/a , avec $b = 2$ mm. Les courbes rouge et verte correspondent respectivement à la première et dernière position de y_C/a .

surface. Mais il apparaît difficile de valider les valeurs des FIC obtenus par le modèle `elfe_3d` en comparaison avec le modèle de référence. La validation que nous effectuons est une validation partielle en terme de comportement de la fissure de fatigue. Une bonne corrélation est alors obtenue pour l'analyse d'un cycle complet de chargement de contact de roulement.

3.9 Conclusion

Le but était de mettre en place les outils numériques pour l'étude de fissures de fatigue de contact. Un modèle numérique de comportement de fissures de fatigue de contact a donc été développé. Il utilise la méthode X-FEM pour discrétiser les champs. Cette méthode permet ainsi une représentation de la fissure indépendamment du maillage grâce à l'ajout de fonctions particulières dans la base des fonctions de forme. Le maillage n'a donc pas besoin de se conformer à la géométrie de la fissure. Le schéma itératif de résolution adapté de la méthode LATIN assure la convergence du modèle vers la solution.

Un nouveau critère d'arrêt a été développé afin d'obtenir une solution qui respecte l'ensemble des conditions de contact le long de l'interface, ce qui améliore considérablement la qualité des champs de déplacement.

Une formulation incrémentale du problème de contact avec frottement le long d'une fissure a été établie. Elle permet de prendre en compte l'histoire du chargement de fatigue de contact. Deux opérateurs, \tilde{C}_I et \tilde{G}_I , ont ainsi été introduits. Leur évaluation permet la résolution directe du problème de contact avec frottement, à chaque itération. Ceci aboutit à l'obtention d'une approximation des déplacements, des déformations et des contraintes en tout point du solide.

Les grandeurs caractéristiques sont ensuite évaluées en post-traitement permettant de déterminer le cycle de chargement en pointe de fissure. En présence de frottement, nous avons évalué la quantité indépendante du contour $J_\Gamma - T_1^+(A)(u_1^- - u_1^+)(A)$, A étant le point de jonction du contour Γ avec l'axe de la fissure. Cette quantité est calculée par la méthode de l'intégrale de domaine restituant ainsi une information précise sur la force d'extension de la fissure. A partir de la connaissance de cette quantité, les FIC pour un mode mixte sont obtenus en utilisant la méthode de l'intégrale d'interaction et les champs auxiliaires des modes purs asymptotiques fournis par le tableau A.1 dans l'annexe A. En présence de contact avec frottement, seule la valeur du FIC en mode II est évaluée à partir de la connaissance de $J_\Gamma - T_1^+(A)(u_1^- - u_1^+)(A)$ (K_I étant nul) afin de ne pas faire d'hypothèse sur la nature de la singularité en pointe de fissure.

L'un des avantages du modèle réside dans la résolution du contact qui est systématique car elle s'affranchit d'une formulation de recherche de zone de contact, cette zone étant donnée par la fissure. D'autre part, l'établissement des indicateurs de contact et de frottement permet une bonne gestion du contact, en ce sens que le comportement de la fissure n'est pas dépendant d'une formulation à priori, la simulation numérique et ses paramètres étant les seules données pouvant influencer l'état de la fissure.

Une première étude numérique a permis de déterminer les paramètres du modèle influençant le comportement de la fissure en fatigue de contact : la précision, les conditions aux limites du problème mais aussi l'incrément de pas de chargement (δl). La précision est un paramètre purement numérique tandis que les conditions aux limites sont purement lié au problème considéré ; en comparaison avec le modèle de référence sous l'hypothèse de massif semi-infini, elles nécessitent de grandes valeurs. Le troisième paramètre (δl) est représentatif du problème de fatigue tribologique. La connaissance de son influence est

utilisée pour toute modélisation ultérieure.

Nous avons utilisé les outils développés pour déterminer le cycle de chargement de fissures débouchantes, perpendiculaires ou inclinée par rapport à la surface, soumises à une fatigue de contact de type roulement. La comparaison avec le modèle de référence a permis de valider le modèle `elfe_3d` pour des situations de fatigue de contact de roulement, simple ou complexe. Elle a aussi soulevé des interrogations quand à l'évolution possible de la singularité en pointe de fissure, l'intégrale calculée restituant, semble-t-il, une information supplémentaire.

Chapitre 4

PREVISION DE LA CROISSANCE DES FISSURES DE FATIGUE TRIBOLOGIQUE

Sommaire

| | | |
|-------|--|-----|
| 4.1 | Analyse bidimensionnelle de la propagation de fissures en fatigue de contact à la fin d'un cycle de chargement | 135 |
| 4.2 | Simulation bidimensionnelle de la propagation de fissures en fatigue de contact de roulement | 139 |
| 4.3 | Conclusion partielle | 141 |
| 4.4 | Vers une analyse tridimensionnelle du problème de fatigue de contact | 141 |
| 4.4.1 | Essais et résultats expérimentaux | 143 |
| 4.4.2 | Etudes préliminaires tridimensionnelle du problème de fatigue tribologique | 148 |
| 4.5 | Conclusion | 153 |

Prévoir l'évolution des fissures dans une structure soumise à des sollicitations de contact, c'est résoudre un problème mécanique dans lequel les données sont constituées par la géométrie de la structure, la configuration de la fissure initiale, l'histoire des efforts appliqués, la loi de comportement à la déformation et la loi de fissuration du matériau considéré. Le calcul consiste à trouver la relation qui relie les configurations successives des fissures à l'histoire des sollicitations (cf. organigramme 4.1).

Dans le cas de la progression par fatigue, la loi de fissuration exprime l'accroissement de longueur ou de surface de fissure par cycle ($\frac{da}{dN}$), en fonction de variables telles que les FIC K_i , l'intégrale de Rice J ou le taux de restitution d'énergie G (cf. section 1.3) :

$$\frac{da}{dN} = f(K_i, J \text{ ou } G) \quad (4.1)$$

Les variables K_i , J et G dépendent de la longueur a de fissure et des sollicitations éventuellement variables avec le nombre de cycles N . L'évolution de la fissure à N cycles est donc la solution de l'équation différentielle (4.1) en général non linéaire, pour la condition initiale de longueur de fissure a_0 (à N_0 cycles). La méthode de prévision basée sur l'utilisation des variables K_i (respectivement G) est considérée comme une approche locale (respectivement globale).

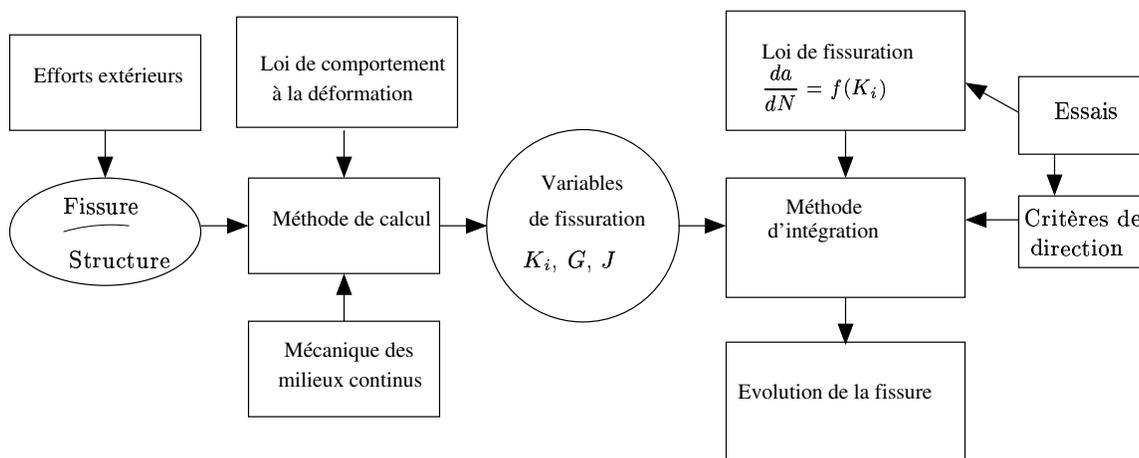


FIG. 4.1 – Organigramme général de la prévision de la croissance des fissures de fatigue tribologique

Déterminer les lois de propagation suppose la réalisation d'essais de fissuration pour des conditions les plus proches possibles des conditions de fonctionnement réelles. Cela concerne les conditions de chargement (uniaxial, biaxial, détermination du déphasage, valeurs minimale et maximale du chargement, sa fréquence, ...) ainsi que les données matériau (sensibilité au rapport R , ...). Les lois de propagation sont des lois phénoménologiques, c'est-à-dire des modèles mathématiques qui représentent approximativement la physique sans la traduire fidèlement.

En plus des lois de propagation de fissure, il faut également disposer de critères permettant de déterminer la direction de bifurcation. Comme cela a été établi au chapitre 1, les critères de bifurcation pour des fissures soumises à une fatigue de contact nécessitent de prendre en compte l'aspect non proportionnel du chargement. Nous allons donc considérer ceux d'Hourlier et al. [43] (les critères $(k_{1,max}^*)$, $(\Delta k_{1,max}^*)$ et $(\frac{da}{dN}_{max})$). Pour pouvoir utiliser ces critères, il est nécessaire de disposer de l'évolution des FIC au cours d'un cycle de chargement, ainsi que d'une loi de fissuration pour le dernier critère.

Une des difficultés majeures est d'obtenir des lois de propagation pour des conditions représentatives du chargement réel, notamment pour des sollicitations tribologiques. Dans le cas de la fatigue de roulement, des essais de fissuration sur machine à galets ont été réalisés à l'Université de Sheffield dans le cadre d'un contrat européen et dont l'application concernait le contact roue-rail [27, 55]. Les conditions de chargement imposées sont la valeur de la pression hertzienne maximale (P_0), le coefficient de traction ($\frac{T}{N}$, avec T et N les efforts tangentiel et normal respectivement) et la valeur du coefficient de glissement (différence des vitesses de roulement des galets rapportée à la somme de ces vitesses). Ces essais ont permis d'obtenir trois lois de propagation pour un acier :

– une loi en mode I :

$$\frac{da}{dN} = 2.47 \cdot 10^{-9} (\Delta K_{I\,eff})^{3.33}, \quad (4.2)$$

– une loi en mode II :

$$\frac{da}{dN} = 1.3 \cdot 10^{-9} (\Delta K_{II\,eff})^{3.33}, \quad (4.3)$$

– et une loi en mode mixte :

$$\frac{da}{dN} = 2.0 \cdot 10^{-9} (\Delta K_{I\,eff}^2 + 0.772 \Delta K_{II\,eff}^2)^{3.33}. \quad (4.4)$$

Nous avons donc choisi de simuler numériquement le comportement et la propagation de fissures débouchantes inclinées par rapport à la surface de contact, qui s'amorcent et se développent sous les conditions de chargement de ces essais. Trois longueurs de fissure ont été sélectionnées : 2, 4.3 et 5.85 mm, représentatives des différents comportements possibles. Nous allons analyser la propagation de ces trois longueurs de fissures différentes à l'aide des trois critères d'Hourlier, et des trois lois de propagation fournies par les essais en fatigue de roulement.

4.1 Analyse bidimensionnelle de la propagation de fissures en fatigue de contact à la fin d'un cycle de chargement

Dans la section 3.8.3, nous avons effectué une analyse sur un cycle complet de chargement pour trois longueurs de fissure 2, 4.3 et 5.85 mm, avec un matériau correspondant à celui utilisé pour l'établissement des lois de propagation. Les données sont rappelées

brèvement : $P_0 = 845$ MPa, $Q_O = 0.2P_0$, $2a = 13.5$ mm, fissures inclinées de 15° par rapport à l'horizontale avec $\delta l = 0.25$ mm, $E = 210$ GPa et $\nu = 0.3$.

A partir de l'évolution des FIC de chaque fissure, une extension infinitésimale est considérée, et les FIC, k_1^* et k_2^* , à la pointe de cette extension sont calculés à l'aide des expressions d'Amestoy (cf. équation (1.66) et figure 1.13).

Nous illustrons le calcul des k_i^* par les figures 4.2(a) et 4.2(b) pour certains pas de chargement de l'évolution des FIC à l'extension infinitésimale de la fissure. En abscisse est représenté l'angle de branchement θ en $^\circ$, en ordonnée les différentes évolutions de k_i^* en $\text{MPa}\sqrt{m}$. Nous observons des valeurs négatives pour k_1^* qui ne sont pas physiquement acceptables. Pour de telles valeurs, nous imposons $k_1^* = 0$. Le premier critère d'Hourlier

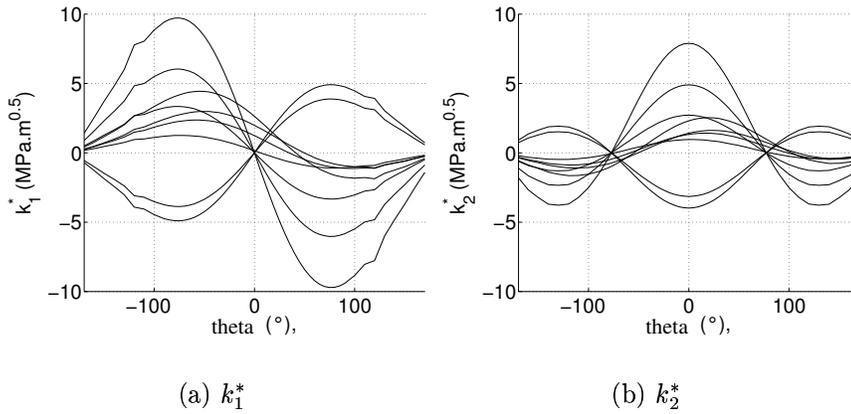


FIG. 4.2 – Illustration à différentes étapes de chargement des évolutions des FIC k_1^* et k_2^* .

appliqué aux trois longueurs de fissure est reporté figure 4.3(a) et celui en $\Delta k_{1,max}^*$ figure 4.3(b). En abscisse est représenté l'angle de branchement θ en $^\circ$ et en ordonnée l'évolution de $k_{1,max}^*$, respectivement $\Delta k_{1,max}^*$, sur le cycle entier.

Pour les trois longueurs de fissure, les deux critères $k_{1,max}^*$ et $\Delta k_{1,max}^*$ prédisent une bifurcation selon un angle $\theta_0 = 70^\circ 5$ par rapport à la direction initiale (cf. figures 4.3(a) et 4.3(b)). Remarquons que zéro est le minimum de k_1^* pour tous les pas du cycle. Cette valeur est conditionnée par les évolutions en K_I et n'est en rien une généralité.

Le troisième critère d'Hourlier est également utilisé. Les évolutions de la valeur maximale de la vitesse de propagation $\frac{da}{dN}_{max}$ sont présentés pour les trois lois de fissuration (4.2), (4.3) et (4.4) figures 4.4(a), 4.4(b) et 4.4(c) en fonction de θ . Les vitesses sont calculées au bout de l'extension de la fissure sur tout le cycle de chargement et pour chaque angle θ , à partir des valeurs de k_1^* et k_2^* exprimés à partir de K_I et K_{II} . Le critère d'Hourlier prédit que la fissure va croître dans la direction où la vitesse de propagation est maximale.

L'utilisation d'une loi en mode I prédit un mécanisme de fissuration en mode d'ouverture. Ce mécanisme est prépondérant suivant la direction $\theta = 75^\circ$. Nous constatons néanmoins que la vitesse de propagation augmente avec la longueur de la fissure.

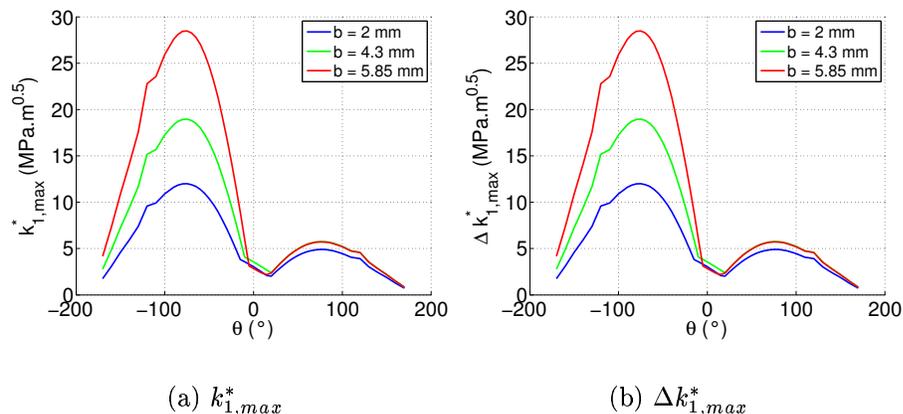


FIG. 4.3 – Les deux premiers critères d'Hourlier appliqués à un cycle de fatigue de contact de roulement.

L'utilisation d'une loi en mode II prédit la direction de fissuration suivant laquelle le mécanisme de fissuration en mode II est le plus important. Pour les trois longueurs de fissures ce mécanisme est maximal dans la direction $\theta = 0^\circ$. La vitesse de fissuration est là encore plus importante pour la fissure la plus longue.

L'utilisation d'une loi en mode mixte tient compte des différents mécanismes et la prédiction de la direction de fissuration varie en fonction de la longueur de la fissure. Pour la fissure la plus courte, 2 mm, les maxima obtenus correspondent à deux mécanismes différents :

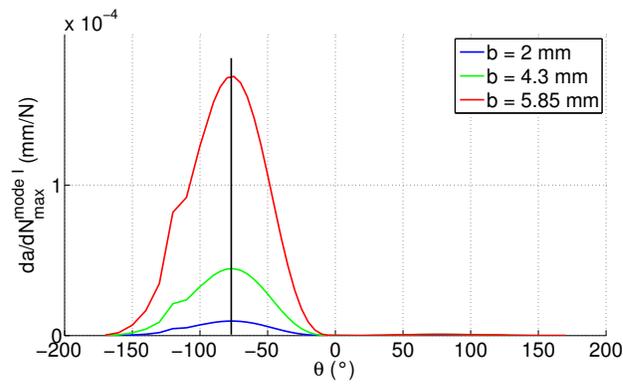
- $\theta_0 = 0^\circ$, propagation coplanaire,
- $-80^\circ < \theta_0 < -15^\circ$, gamme de valeur d'angles pour lesquelles un branchement est possible.

La fissure de taille intermédiaire, 4.3 mm, possède deux maxima : $\theta_0 = 0^\circ$ et $\theta_0 = 75^\circ$. La valeur pour l'angle de 75° est légèrement plus élevée, ce qui conduit la fissure à aller dans le sens de la bifurcation. Enfin, la fissure la plus longue, 5.85 mm, possède clairement un seul maximum, $\theta_0 = 75^\circ$, dont la valeur de la vitesse de fissuration est très élevée.

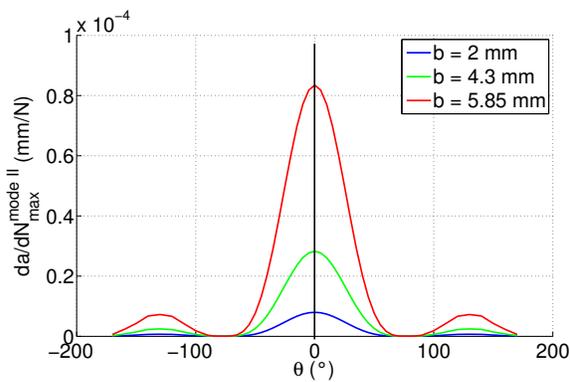
Les courbes de fissuration obtenues pour la loi en mode mixte présentent deux maxima, dont un relatif. Au cours de la croissance de la fissure, ce maxima relatif évolue et augmente. Il y a une réorientation de la fissure telle que celle-ci se place suivant une direction qui lui permet une propagation optimale (cf. figure 4.5).

L'utilisation de ces critères et de ces lois permet donc d'identifier la longueur de fissure critique, c'est-à-dire la longueur pour laquelle la direction de branchement voit sa vitesse de propagation augmenter considérablement.

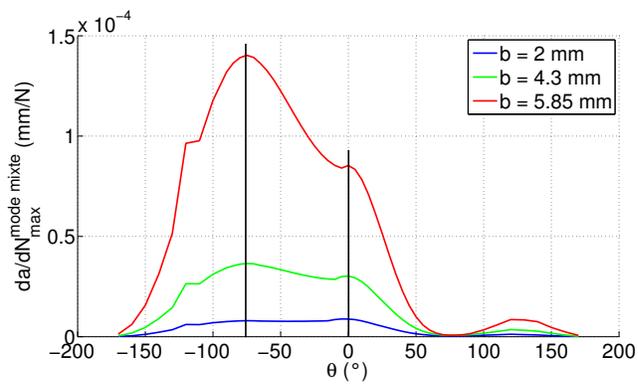
A la fin du cycle de chargement, une analyse des grandeurs caractéristiques sur tous les pas de chargement permet donc d'obtenir la direction et la longueur de la propagation de fissure. En faisant propager la fissure d'un incrément de longueur da , nous obtenons une nouvelle fissure qui devient le point de départ de l'analyse du cycle de chargement



(a) Loi de fissuration en mode I



(b) Loi de fissuration en mode II



(c) Loi de fissuration en mode mixte

FIG. 4.4 – Critères d'Hourlier en $\frac{da}{dN}_{\max}$ pour différentes lois de fissuration

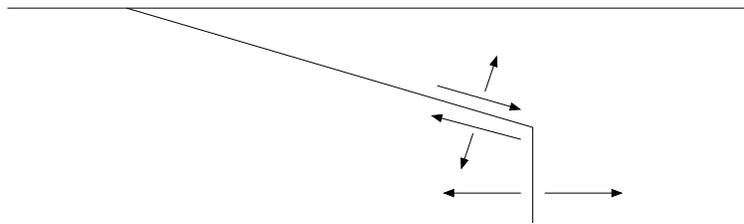


FIG. 4.5 – Réorientation de la fissure et modes de sollicitation

suisant. Le modèle `elfe_3d` intègre les données géométriques de l'extension de fissure, effectue un nouveau calcul de structure, identifie le comportement de la fissure et analyse les grandeurs caractéristiques pour l'obtention d'une nouvelle direction de fissuration. Le processus itère jusqu'à arrêt de la fissure ou rupture brutale de la pièce.

L'utilisation de la méthode X-FEM prend tout son sens à cette étape de l'analyse car la nouvelle géométrie de la fissure est intégrée au problème initial sans changer de maillage. Illustrons cette propagation dans la section suivante.

4.2 Simulation bidimensionnelle de la propagation de fissures en fatigue de contact de roulement

Après le passage d'un cycle de chargement, nous déterminons la direction et la vitesse de la propagation de la fissure. Une nouvelle géométrie de fissure est définie à partir de ces données en considérant une extension de 1% de la longueur de la fissure. Ce choix empirique est motivé par des expérimentations numériques afin de capturer suffisamment précisément les changements de direction de la fissure lors de sa propagation. Cette géométrie devient une donnée d'entrée du modèle numérique. Toutes les quantités du problème sont réinitialisées. Les enrichissements sont réactualisés. Un nouveau cycle de chargement peut ainsi être effectué.

Nous allons présenter à titre d'exemple la propagation de la fissure de longueur 5.85mm. Pour cette propagation, nous choisissons le critère d'Hourlier basé sur la vitesse de propagation maximale, pour la loi de fissuration formulée en mode mixte. Nous présentons les résultats des calculs des FIC figure 4.6 et des critères en $\frac{da}{dN_{max}}$ 4.7 pour le second cycle de chargement, c'est-à-dire après la première extension de fissure. Pour les cycles suivants, le comportement est similaire avec néanmoins une vitesse de propagation qui diminue dans la profondeur.

Le trajet final de la fissure est représenté figure 4.8. Nous observons une bifurcation de la fissure dans la direction perpendiculaire au chargement, sur plusieurs pas de chargement et en forme de zigzag. Cette forme en zigzag est essentiellement due à la présence de plusieurs maxima.

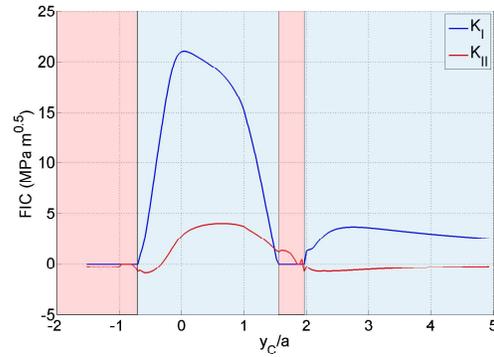


FIG. 4.6 – Résultats du calcul des FIC après la première extension de la fissure $b = 5.85$ mm

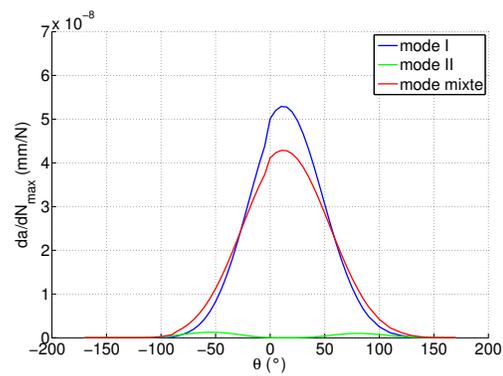


FIG. 4.7 – Résultats du critères d'Hourlier en $\frac{da}{dN_{max}}$ pour différentes lois de fissuration après la première extension de la fissure $b = 5.85$ mm

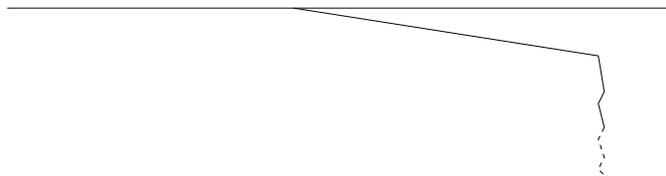


FIG. 4.8 – Trajet de propagation d'une fissure inclinée ($b = 5.85$ mm)

4.3 Conclusion partielle

Le modèle numérique développé permet de simuler la propagation bidimensionnelle de fissures soumises à une fatigue de contact. Les valeurs des FIC sont évaluées à tous les pas de chargement, pour les différents cycles, ce qui permet l'analyse des mécanismes de fissuration. La simulation de la propagation se base sur la connaissance de lois et de critères de fissuration adaptés au problème considéré. Grâce à ces données, nous évaluons la direction et de la vitesse de fissuration. Ces calculs définissent une nouvelle géométrie de fissure dont la mise à jour est indépendante du maillage. Le processus de calcul peut ensuite être relancé avec la nouvelle fissure.

Les développements numériques effectués en bidimensionnel sont transposables pour une analyse tridimensionnelle du problème, ce qui va être détaillé dans la section suivante.

4.4 Vers une analyse tridimensionnelle du problème de fatigue de contact

Le travail effectué précédemment constitue une étape de validation du modèle `elfe_3d` appliqué au problème de la fatigue de contact. Cette validation nous a permis de déterminer l'ensemble des paramètres utiles pour une bonne modélisation des phénomènes physiques. A présent, nous désirons utiliser les potentialités de la méthode X-FEM. Notre but est la propagation de fissures de fatigue de contact avec prise en compte de l'aspect tridimensionnel de sa géométrie laquelle conditionne la propagation. La méthode X-FEM est une méthode très utile dans ce domaine car elle permet de pouvoir appréhender les effets de structure en levant l'hypothèse de massif semi-infini, mais surtout d'incorporer la présence de fissures dans des maillages existants de structures complexes, sans avoir à modifier les dits maillages. La simulation de la propagation de ces fissures constitue l'étape suivante. De nombreuses questions sont ouvertes sur cette simulation tridimensionnelle. Nous cherchons à confronter nos modélisations à des travaux expérimentaux, afin de progresser dans la compréhension des critères de propagation (direction, vitesse) le long des fronts. Des travaux menés sur des aluminiums [35] pour des éprouvettes sollicitées en traction, ont permis de progresser grâce à des données géométriques de fissure obtenues par l'utilisation du synchrotron. Cependant il n'est pas possible de réaliser au

sein du synchrotron des essais de fatigue de contact. L'utilisation de matériaux transparents est une autre alternative car ils permettent d'obtenir en temps réel une visualisation de l'évolution de la fissuration. De tels essais ont déjà été réalisés pour des sollicitations de type fretting et roulement pour des configurations bidimensionnelles [20, 56] et seront donc le point de départ d'une validation expérimentale du modèle.

Dans le cadre d'une modélisation tridimensionnelle, la fissure sera représentée par des fonctions de niveaux [70]. Des travaux récents ont permis de montrer tout l'intérêt de cette utilisation en couplant cette représentation de la fissure avec des images tomographiques [35]. La démarche abordée dans ces travaux est illustrée dans l'organigramme 4.9. Nous

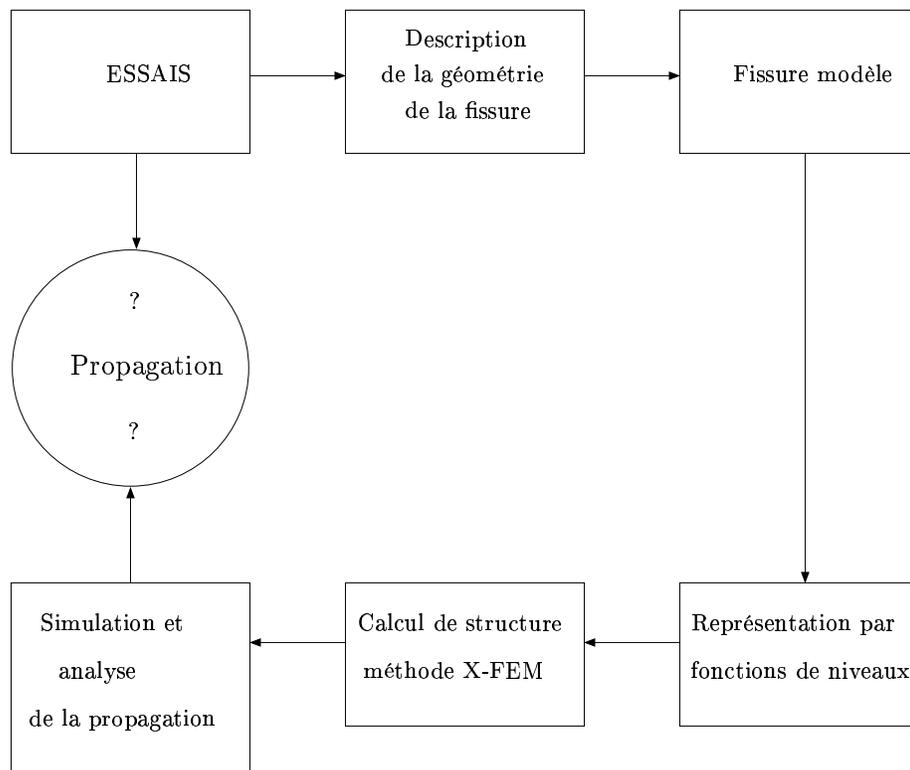


FIG. 4.9 – Organigramme de prise en compte des essais expérimentaux

avons adopté cette approche dans le cadre de la fissuration en fatigue de contact. A partir d'essais, nous souhaitons déterminer la géométrie tridimensionnelle des fissures de fatigue, l'intégrer au modèle numérique afin de caractériser la propagation de fissures de fatigue en vue de l'estimation de la cinétique de formation des dégradations de surface. Par conséquent, nous présentons tout d'abord le dispositif expérimental et les résultats de fissuration exploitables. Nous exposons ensuite les outils numériques supplémentaires et nécessaires à la simulation tridimensionnelle. Puis, nous terminons par les caractéristiques du problème de référence pour la simulation numérique.

4.4.1 Essais et résultats expérimentaux

La démarche expérimentale vise à mettre en oeuvre un dispositif capable d'étudier et de caractériser la propagation des fissures de fatigue de contact débouchantes. Ce dispositif expérimental a été mis en place dans le cas de la fatigue de contact de roulement à l'Institut Universitaire d'Angoulême, sous la direction de Bernard Villechaise, professeur dans l'équipe Structures et Interfaces du Laboratoire de Mécanique du Solide de l'université de Poitiers, UMR CNRS 6610. Les fissures en fatigue de contact de roulement s'amorcent naturellement et se développent au cours des cycles. Le dispositif permet de comprendre, d'analyser et de déterminer les mécanismes moteurs de la fissuration pour ce type de sollicitation.

La première étude expérimentale de la fatigue de contact de roulement effectuée par Dang [22] est une étude paramétrique du phénomène de fissuration sous fatigue de contact de roulement. Les observations et les mesures effectuées ont permis :

- de mieux comprendre les conditions d'amorçage et les mécanismes de propagation de ce type de fissures,
- de suivre l'évolution de la géométrie 3D des fissures, possible grâce à l'utilisation d'un matériau transparent,
- et d'examiner l'influence du mésalignement des axes des galets pour simuler le contact roue/rail dans une courbe.

Des mesures statistiques de l'évolution de la largeur surfacique de la fissure, pouvant être utiles à l'étude de la cinétique de propagation des fissures, ont été faites.

Ces premiers travaux sont la base de la seconde campagne d'essais visant à déterminer des données géométriques plus précises sur la géométrie tridimensionnelle de la fissure. Nous allons détailler cette campagne d'essais en présentant le dispositif expérimental, les caractéristiques géométriques et mécaniques des matériaux, les conditions d'essai et de fonctionnement.

Dispositif expérimental et numérisation des images

Le dispositif expérimental est représenté par la figure 4.10. Deux galets montés sur deux axes en parallèles sont en roulement. Les appellations «galet mené» et «galet menant» sont utilisées. Le galet menant est entraîné en rotation par un moteur à courant continu permettant ainsi de contrôler la vitesse de rotation. Le galet mené est soumis à un chargement normal à l'aide d'un système masse/bras de levier mais aussi à un couple de freinage imposé par un frein à poudre. La charge normale est mesurée à l'aide d'un capteur de forces. Les vitesses de rotation et le nombre de tours des galets (nombre de cycles de fatigue) sont mesurés par deux encodeurs placés directement sur les axes de rotation des broches. Le couple de freinage du galet mené est contrôlé par la tension d'alimentation du frein à poudre. Une centrale d'acquisition permet de numériser en continu l'ensemble de ces mesures.

Le choix des matériaux doit répondre à plusieurs objectifs :

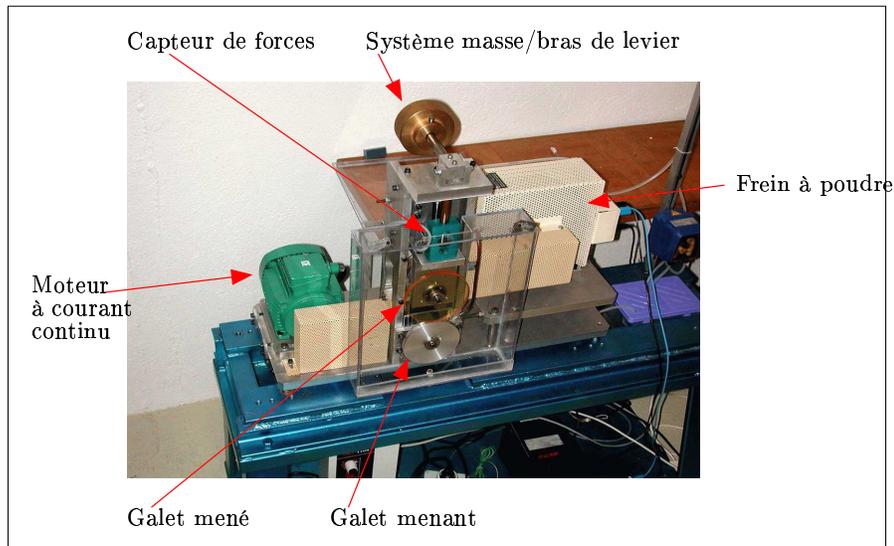


FIG. 4.10 – Dispositif expérimental - Machine à galets

- la possibilité d'effectuer des observations dans le volume de la matière pour accéder à la géométrie tridimensionnelle des fissures,
- effectuer éventuellement des mesures photoélastiques pour obtenir des informations sur le champ de contraintes au voisinage des fissures,
- évacuer la chaleur dissipée par le glissement au niveau du contact,
- avoir un comportement élastique fragile analogue à celui des aciers à haute limite élastique utilisés dans les roulements à billes et les engrenages (comportement plastique très limité).

L'endommagement se produisant à l'interface, il est difficile de visualiser et de suivre au cours du temps les fissures pour des matériaux classiques. Par conséquent, un polymère en résine d'époxyde photoélastique transparent a été utilisé comme galet mené. Ses propriétés transparentes permettent de suivre in-situ la progression de la fissure. Le galet menant est en aluminium. Les caractéristiques géométriques et mécaniques des 2 galets sont mentionnées dans la table 4.1.

Les résultats qui vont être présentés concernent l'application d'une charge normale de 200 N, pour une vitesse de rotation du galet menant, ω_2 , fixée à 500 tr/min, constante au cours du temps. Pour modéliser la fatigue de roulement, la force tangentielle du contact varie au cours du temps grâce à l'utilisation d'un frein à poudre imposant une vitesse de glissement constante. Le couple de freinage C_f est fixé à 1N.m.

La zone de contact entre les deux galets est une ellipse de Hertz dont les deux axes ont pour valeurs 2.058 et 2.526 mm. La pression maximale de Hertz P_0 vaut 73.5 MPa.

Un dispositif de prise de vue des fissures a été réalisé figure 4.12. Le galet mené est monté sur deux liaisons pivot d'axes perpendiculaires. Ces deux liaisons sont montées sur des platines de rotation de précision d'une résolution de 0.5° . Les positions angulaires sont

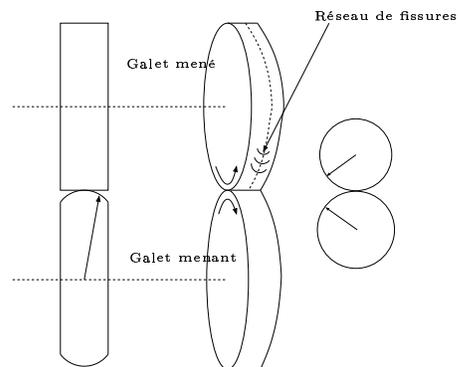


FIG. 4.11 – Géométrie des galets en contact

| | Galet menant Aluminium | Galet mené epoxyde (PSM9) |
|------------------------------------|---------------------------|------------------------------|
| Rayon (mm) | 58.415 | 59.27 |
| Rayon bombé (mm) | 40 | - |
| E (GPa) | 70 | 3.15 |
| ν | 0.34 | 0.36 |
| Masse volumique kg/m^3 | | 1220 |
| Limite élastique en traction (MPa) | | 121 |
| Charge normale (N) | 200 | |
| μ_s | 0.15 | |

TAB. 4.1 – Caractéristiques géométriques et mécaniques des 2 galets

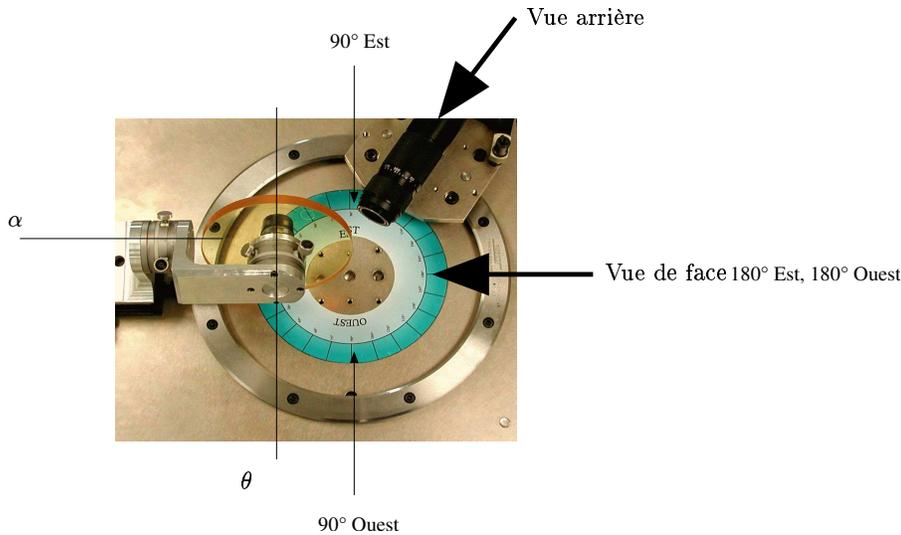


FIG. 4.12 – Dispositif de prise d'images

ainsi contrôlées par deux angles α et θ comme indiqué figure 4.12. La prise d'images est réalisée par un microscope vidéo équipé d'un zoom 25-175 et pouvant tourner sur une couronne circulaire. Ce dispositif permet au vidéo microscope de se positionner de 30° est à 30° ouest. L'ensemble des possibilités de positionnement et d'agrandissement permet d'effectuer des saisies d'images sous plusieurs angles de vue.

Procédure de déroulement d'un essai

Les deux galets sont mis en contact. La charge normale est ensuite appliquée. Puis la vitesse de rotation est imposée au galet menant lequel entraîne le galet mené en rotation. Enfin, le couple de freinage est appliqué au galet mené. Ce couple permet le calcul de la charge tangentielle au niveau du contact par les formules :

$$Q = N * \mu_s \quad (4.5)$$

$$\mu_s = \frac{25}{14} \frac{C_f}{NR_{Epoxy}} \quad (4.6)$$

$$(4.7)$$

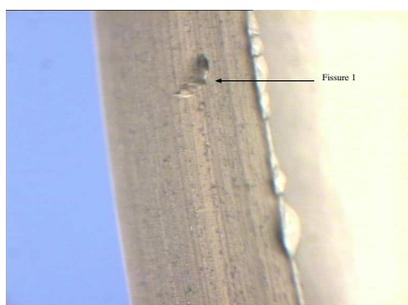
Le couple étant imposé à 1 N.m, le coefficient surfacique de frottement vaut alors 0.15. Pour l'arrêt de l'essai, d'abord le couple de freinage est remis à zéro, ensuite la rotation du moteur est arrêtée et enfin le contact est déchargé normalement. L'ordre choisi pour l'exécution de ces étapes évite les glissements importants qui pourraient détériorer les galets.

Les essais sont arrêtés à intervalles réguliers pour observer à l'aide du vidéo microscope la surface de roulement. Dès que les fissures apparaissent, nous procédons à une

cartographie de la bande de roulement, tous les 5° . D'autres prises d'images perpendiculairement à la surface de roulement permettent d'estimer la profondeur des fissures. Cette phase de prise d'images est très longue et se répète à chaque arrêt de l'essai afin de suivre l'évolution de la propagation des fissures.

La difficulté d'une telle démarche est l'identification de la phase d'amorçage et l'obtention de données suffisamment complètes de manière à retracer géométriquement l'évolution de la propagation des fissures. Nous avons constaté que cette évolution se décomposait en deux phases. La première phase de propagation est qualifiée de propagation bidimensionnelle en raison de la direction coplanaire suivie par la fissure. La seconde phase est une propagation tridimensionnelle en raison du changement de direction de la propagation tant radialement que latéralement.

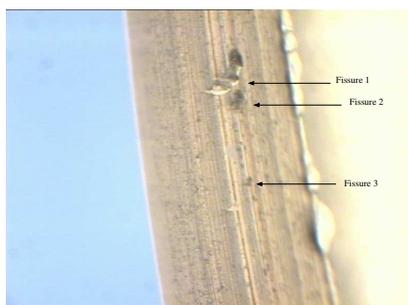
Les données expérimentales que nous avons traitées sont rapportées en annexe G. Quelques unes des images acquises sont illustrées figure 4.13.



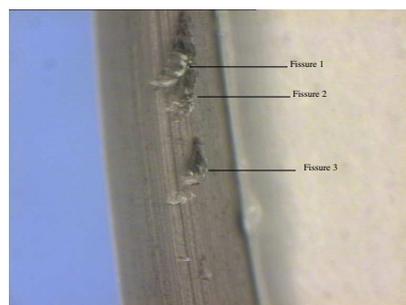
(a) A 25000 cycles



(b) A 50000 cycles



(c) A 75000 cycles



(d) A 400000 cycles

FIG. 4.13 – Suivi de la croissance de quelques fissures

La vue de face du galet (0° EST) permet une estimation de la largeur surfacique de la fissure et son évolution au cours des cycles de fatigue. Les autres prises de vue permettent une estimation de la profondeur de la fissure, profondeur au point au centre mais aussi le long du front. Ces données doivent encore être analysées plus précisément à

l'aide d'un logiciel reconstruisant la géométrie réelle. Pour l'heure, seules les informations sur la largeur surfacique et la profondeur du centre de la fissure ont été exploitées. Ces données seront utiles pour une première approximation de la géométrie de la fissure pour la simulation numérique.

Au cours du temps, il y a amorçage et développement d'un réseau de fissures de fatigue sur la surface du galet mené. Nous désirons modéliser le comportement de ces fissures de fatigue afin de connaître les mécanismes moteurs de la fissuration en 3D. Pour atteindre ce but, deux étapes sont à considérer :

- déterminer les mécanismes physiques entrant dans ce problème,
- et les modéliser au mieux.

L'élément clé d'une telle analyse réside sur l'utilisation de la méthode X-FEM. En effet, elle ne nécessite pas de remaillage et donc pas de projection des champs d'un maillage à un autre. Ces avantages sont d'autant plus utiles pour les problèmes 3D où le remaillage après propagation est extrêmement lourd avec une méthode éléments finis standard, voir inaccessible, sans parler des projections des champs pour de telles géométries.

4.4.2 Etudes préliminaires tridimensionnelle du problème de fatigue tribologique

En 2000, la méthode X-FEM est utilisée pour résoudre des problèmes de fissures tridimensionnelles planes soumise en mode I [92]. La démarche est étendue à la propagation d'un tel problème [91], puis en 2002 à des fissures de géométrie arbitraire [70]. Dans ces derniers travaux, pour faciliter le traitement d'une fissure tridimensionnelle arbitraire, sa géométrie est décrite indépendamment du maillage à l'aide de fonctions de niveaux (fonctions de distance signées). Cette technique a dernièrement été couplée à des images tomographiques pour une représentation de la géométrie de la fissure à partir d'images réelles [35]. Nous allons expliciter ces notions dans la section suivante.

Description de la fissure par fonctions de niveau (Level Sets)

La fissure est définie à l'aide de deux fonctions de niveau orthogonales. La première fonction de niveau permet de décrire la surface de la fissure dans l'espace 3D, notée Φ , et son intersection avec la seconde, notée Ψ , permet de définir le front de la fissure. La surface de fissure correspond à l'isovaleur nulle de la fonction de niveau notée Φ , et l'intersection entre les zéros de ces deux fonctions de niveaux décrit le front 1D de la fissure. Les fonctions Φ et Ψ sont supposées être des fonctions de distance signée, c'est-à-dire la distance de x à la surface $\Phi(x, t) = 0$ est donnée par Φ , et pareillement pour Ψ . Nous pouvons donc définir le front et la surface de la fissure par les conditions suivantes :

$$((x, t) / \quad \Phi(x, t) = 0, \quad \Psi(x, t) < 0) \quad (4.8)$$

$$((x, t) / \quad \Phi(x, t) = 0, \quad \Psi(x, t) = 0) \quad (4.9)$$

$$((x, t) / \quad \Psi(x, t) > 0) \quad (4.10)$$

L'équation (4.8) définit le lieu de la surface de la fissure, (4.9) détermine les points du front de la fissure et (4.10) la zone où les fonctions de niveau n'interceptent pas le front. Ces notions sont illustrées figure 4.14.

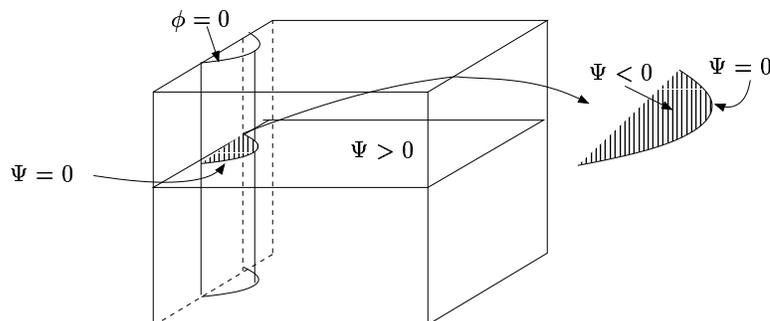


FIG. 4.14 – Description des isovaleurs des fonctions de niveaux Φ et Ψ

Etant donné les deux fonctions de niveaux Φ et Ψ , la localisation du front de la fissure est extraite comme un ensemble de segments 1D.

Pour ce qui est de l'approximation du champ de déplacement fournie par la méthode X-FEM, son expression est identique à celle fournie section 2.2.4 à l'exception qu'à présent nous utilisons les quantités r et θ définies par :

$$r = \sqrt{\Phi^2 + \Psi^2} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\Phi}{\Psi}\right). \quad (4.11)$$

L'intérêt d'une représentation par fonctions de niveaux réside dans la réactualisation de ces champs scalaires de façon robuste et précise en vue de simuler la propagation de la fissure, et ceci, indépendamment du maillage. La propagation est effective grâce à un champ de "vitesse" du front. Les détails de la méthode sont détaillés dans les articles [70].

En 3D, la méthode X-FEM utilise une stratégie d'enrichissement automatique en fonction des fonctions de niveaux. En effet, la fonction d'Heaviside généralisée s'obtient facilement à partir de la connaissance du signe des fonctions de niveaux et la détermination des éléments contenant le front grâce à leur intersection.

Nous allons à présent exposer les différents aspects de modélisation développés pour traiter du problème de fatigue en 3D.

Modélisation et calcul tridimensionnel

La géométrie du galet est choisie de manière à correspondre aux essais expérimentaux. Par conséquent, nous avons modélisé un galet de rayon $R = 60$ mm, d'épaisseur $e = 9.6$ mm, avec un trou central de 20 mm. Nous considérons des conditions de bords libres partout, excepté au centre du galet où nous modélisons un encastrement. La modélisation du chargement est simplifiée par une distribution uniforme telle que $P = 73.5$ MPa et Q

$= 0.15 P$, sur une zone de contact carrée de côté $a = 2$ mm. Les données matériau sont celles du galet mené, $E = 3.15$ GPa, $\nu = 0.36$.

Le choix des fissures est représentatif de quelques phases de propagation qui ont été suivies. Nous avons isolées trois fissures caractéristiques dont la forme géométrique pour la modélisation est illustrée figure 4.15. Ces trois fissures sont définies par les données

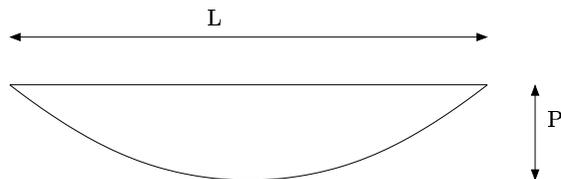


FIG. 4.15 – Géométrie des fissures de fatigue de contact

suivantes :

- fissure 1 : $L = 0.8$ mm, $P = 0.1$ mm,
- fissure 2 : $L = 2$ mm, $P = 0.4$ mm,
- fissure 3 : $L = 3$ mm, $P = 0.6$ mm.

Ces trois fissures sont représentées par les fonctions de niveaux illustrées figure 4.16.



FIG. 4.16 – Représentation des fissures par les isovaleurs des fonctions de niveaux

Outils de la mécanique de la rupture tridimensionnelle

En 3D, tous les concepts présentés en 2D section 3.3 (calcul de G , J , et des FIC) peuvent être généralisés au 3D.

Une intégrale de domaine est utilisée pour calculer le taux de restitution d'énergie en n'importe quel point P situé le long du front de la fissure. Un volume V est construit autour de ce point figure 4.17. Ce volume intersecte l'arc C du front de la fissure et se constitue des faces de la fissure, Γ_C^+ , Γ_C^- , et des trois surfaces Γ_0 , Γ_1 et Γ_2 . L'expression

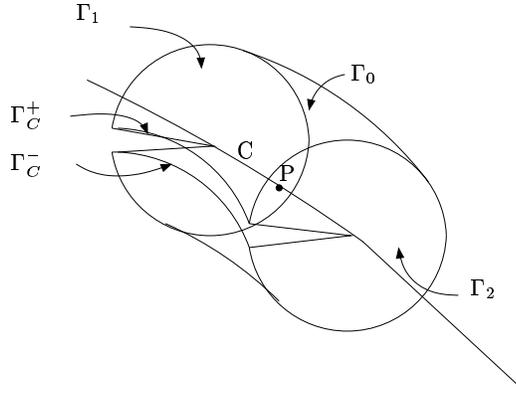


FIG. 4.17 – Les différents contours d'intégration de l'intégrale d'interaction en 3D

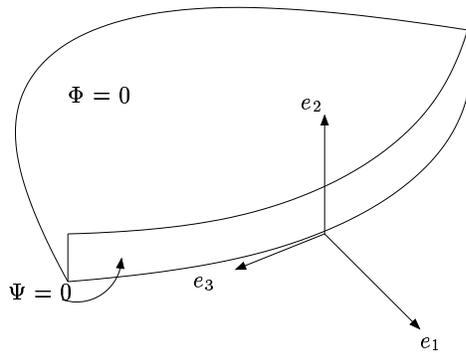


FIG. 4.18 – Repère local en 3D pour tout point du front

de l'intégrale de volume est la suivante :

$$J = \int_V q_{i,j} \left(\frac{1}{2} \sigma_{kl} \epsilon_{kl} \delta_{ij} - \sigma_{kj} u_{k,i} \right) dV \quad (4.12)$$

$$- \int_V q_i \left(\frac{1}{2} \sigma_{kl,i} \epsilon_{kl} \delta_{ij} - \sigma_{kj} u_{k,i} \right) dV \quad (4.13)$$

avec l'utilisation du champ scalaire d'extension virtuelle défini par :

$$q = \alpha e_1 \quad (4.14)$$

$$\alpha(P) = 1 \quad (4.15)$$

$$\alpha(x) = 0 \quad \forall x \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \quad (4.16)$$

où (e_1, e_2, e_3) est une base locale définie en tout point du domaine V grâce à la représentation de la surface des fonctions de niveaux (cf. figure 4.18).

Nous utilisons l'expression 3D de la relation d'Irwin (1.15). De façon similaire au 2D, l'intégrale d'interaction est utilisée pour calculer séparément les trois FIC au point P .

Cette intégrale est exprimée en 3D par :

$$M^{(1,2)} = \int_V q_{i,j} \left(\sigma_{kl}^{(1)} \epsilon_{kl}^{(2)} \delta_{ij} - \sigma_{kj}^{(2)} u_{k,i}^{(1)} - \sigma_{kj}^{(1)} u_{k,i}^{(2)} \right) dV \\ - \int_V q_i \left(\sigma_{kl,i}^{(2)} \epsilon_{kl}^{(1)} \delta_{ij} - \sigma_{kj}^{(1)} u_{k,li}^{(2)} - \sigma_{kl,i}^{(2)} u_{k,i}^{(1)} \right) dV \quad (4.17)$$

où les champs auxiliaires représentent les trois états des modes purs asymptotiques fournis par le tableau A.1 dans l'annexe A. Les FIC de l'état réel (1) sont déterminés en évaluant l'intégrale d'interaction $M^{(1,2)}$ par :

- en mode I pur, $K_I^{(2)} = 1$, $K_{II}^{(2)} = 0$, $K_{III}^{(2)} = 0$, détermine $K_I^{(1)}$ en terme d'intégrale d'interaction par la relation :

$$K_I^{(1)} = \frac{E}{1 - \nu^2} \frac{M^{(1), \text{mode I}}}{mes(C)}, \quad (4.18)$$

- en mode II pur, $K_I^{(2)} = 0$, $K_{II}^{(2)} = 1$, $K_{III}^{(2)} = 0$, détermine $K_{II}^{(1)}$ en terme d'intégrale d'interaction :

$$K_{II}^{(1)} = \frac{E}{2k} \frac{M^{(1), \text{mode II}}}{mes(C)} \quad (4.19)$$

- en mode III pur, $K_I^{(2)} = 0$, $K_{II}^{(2)} = 0$, $K_{III}^{(2)} = 1$, détermine $K_{III}^{(1)}$ en terme d'intégrale d'interaction :

$$K_{III}^{(1)} = \frac{E}{2k} \frac{M^{(1), \text{mode III}}}{mes(C)}. \quad (4.20)$$

Ces expressions ne tiennent pas compte du contact pouvant intervenir le long des faces de la fissure.

Premiers calculs

Nous avons illustré la déformée totale et la déformée locale (près de la fissure) figure 4.19 afin montrer l'aspect multi-échelle du problème. Le maillage utilisé est certes grossier, mais permet néanmoins de lister quelques observations concernant le comportement des fissures simulées. Ces fissures sont représentées par la figure 4.20 où nous constatons les différentes tailles considérées et leur maillage implicite. Pour la fissure de plus petite taille, nous observons le peu d'élément tandis que pour cette de plus grande taille le nombre est suffisant. Le calcul des FIC est effectué pour des points de long du front. Leurs variations est illustrée figures 4.21(a), 4.21(b) et 4.21(c). Ces courbes sont des interpolations des résultats avec des polynomes d'ordre 6. Le domaine d'intégration est représenté schématiquement figure 4.22.

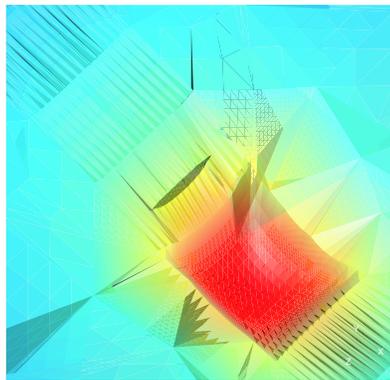
L'ensemble de ces développements ne sont qu'une première approche du problème tridimensionnel considéré. Nous constatons que pour les fissures de profondeur 0.4 et 0.6 mm que les modes I et II sont symétriques et que le mode III est antisymétrique. Des améliorations peuvent être apportées aux techniques numériques de calcul des FIC conformément aux travaux de Minnebo et al. [68].

4.5 Conclusion

Nous avons mis en évidence l'influence de la longueur de la fissure sur la direction de propagation pour un cycle complet de chargement, pour lequel les sollicitations subies par les fissures sont des séquences de mode II pur et de mode mixte, avec toutefois une faible amplitude de la sollicitation en mode I par rapport à celle en mode II. La direction de propagation est influencée par les répartitions possibles de ces séquences de chargement.

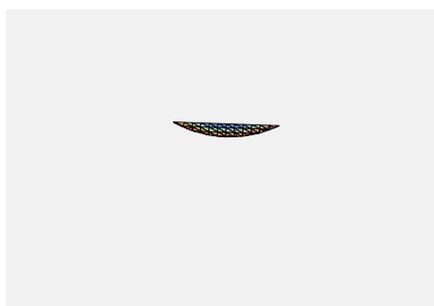


(a)

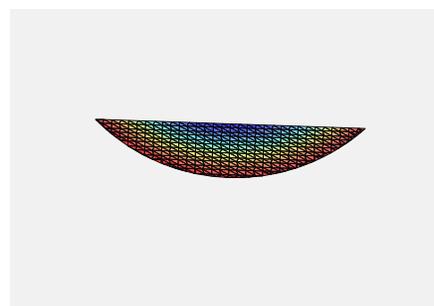


(b)

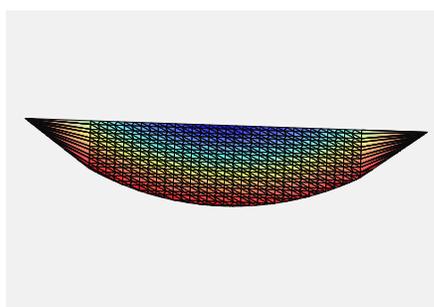
FIG. 4.19 – (a) Déformée totale du galet et (b) déformée locale près de la fissure avec la zone de chargement



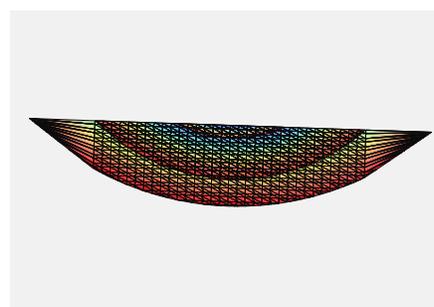
(a) Fissure 1 $L=0.8$ mm, $P=0.1$ mm



(b) Fissure 2 $L=2$ mm, $P=0.4$ mm

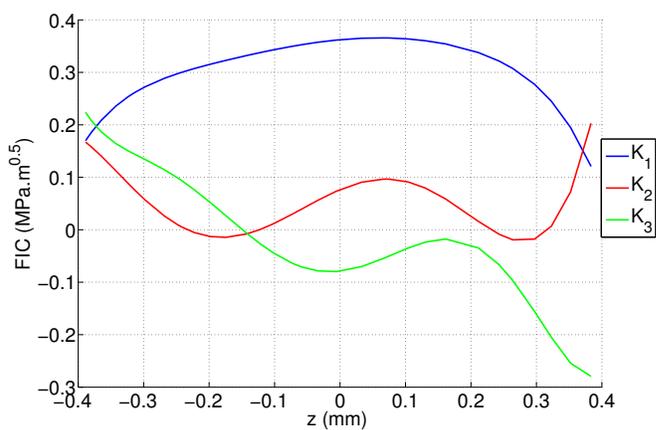
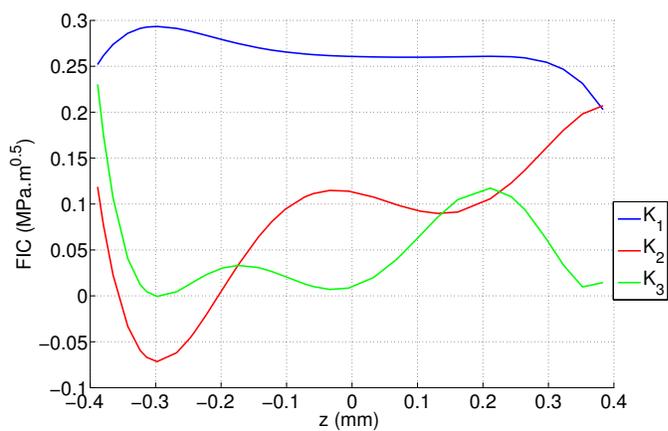
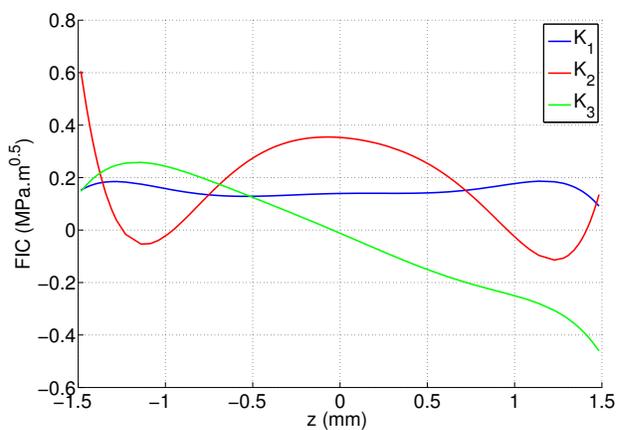


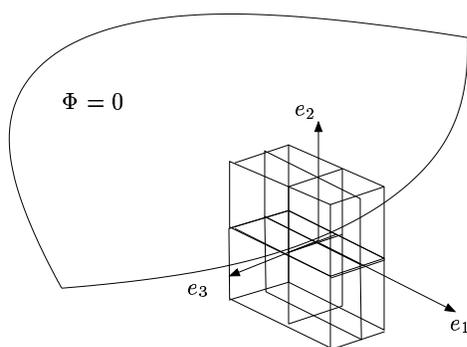
(c) Fissure 3 $L=3$ mm, $P=0.6$ mm



(d) Les trois fissures

FIG. 4.20 – Représentation des trois fissures en fonction du maillage et des fonctions de niveaux

(a) $P = 0.1$ mm(b) $P = 0.4$ mm(c) $P = 0.6$ mmFIG. 4.21 – Variations des FIC suivant l'axe z pour les trois profondeurs de fissure

FIG. 4.22 – J -domain en 3D

CONCLUSION

L'objectif de ce travail visait le développement d'un outil numérique pour la simulation tridimensionnelle de la propagation de fissures soumises à une fatigue tribologique.

L'ensemble des concepts de base énoncés dans le cadre de la MELR nous a permis d'identifier les grandeurs caractéristiques nécessaires à la description du problème de référence et à sa modélisation. Trois types de variables caractérisent la perturbation du champ des contraintes due à la présence d'une fissure et permettent la quantification du risque : les facteurs d'intensité des contraintes (FIC), K_I , K_{II} et K_{III} , le taux de restitution d'énergie, G , et l'intégrale J . Ces paramètres ont été utilisés pour décrire l'état des champs en pointe de fissure et simuler la propagation de fissures de fatigue. Cette simulation s'effectue à partir de lois de fissuration et de critères de prédiction de direction. Nous avons ainsi énoncé et identifié des critères applicables à la nature non proportionnelle du chargement, critères issus des travaux d'Hourlier et al [43] et au nombre de trois : $k_{1,max}^*$, $\Delta k_{1,max}^*$ et $\frac{da}{dN}_{max}$. Nous avons ensuite justifié la nécessité de prendre en compte le contact avec frottement entre les faces de la fissure en énonçant l'ensemble des caractéristiques du chargement en fatigue de contact. Après avoir énoncé la formulation mécanique du contact unilatéral et quelques unes des lois de frottement utilisées dans la littérature, nous avons choisi de modéliser le problème de contact entre les faces de fissures par un contact unilatéral avec la loi simple de frottement de Coulomb. L'ensemble de ces concepts théoriques ont été intégrés au modèle numérique développé.

Une analyse bibliographique des méthodes numériques existantes a été ensuite présentée. À partir de cette analyse, nous avons orienté nos développements vers une nouvelle méthode fiable et robuste : la méthode X-FEM. Cette méthode a l'avantage de prendre en compte la géométrie de la fissure sans la mailler explicitement, ce qui réduit considérablement les difficultés pour une analyse tridimensionnelle de la propagation. Des éléments d'interface sont introduits le long des faces de la fissure à partir du maillage de la structure pour permettre une résolution du contact avec frottement. Ces éléments sont unidimensionnels et bidimensionnels pour des problèmes 2D et 3D respectivement. Ils contiennent des points de Gauss possédant leurs propres inconnues locales, ω et t , le champ de déplacement et la force de contact respectivement. Concernant la résolution du problème non linéaire d'évolution, nous avons opté pour une résolution incrémentale du problème en utilisant le schéma itératif de la méthode LATIN. Dans le cadre de la fissuration en fatigue tribologique, ce schéma nous a conduit vers une formulation mixte à trois champs, (u, ω, t) , où la résolution du problème de contact interfacial avec frottement doit tenir

compte de l'histoire des sollicitations.

La première étape nécessaire pour atteindre l'objectif fixé a été le développement et la validation de l'outil bidimensionnel. Nous avons ainsi développé de nouveaux indicateurs de contact et de frottement, \tilde{C}_I et \tilde{G}_I , pour la résolution incrémentale du problème non linéaire de frottement. Ces indicateurs sont définis uniquement à partir des quantités locales, ω et t . De plus, un nouveau critère d'arrêt du schéma itératif, approprié au problème de contact, a été proposé. Il permet l'obtention d'une meilleure qualité de solution le long des faces de la fissure car il tient compte des différents ordres de grandeurs propres à chacun des phénomènes ouverture/contact et adhérence/glisement. Une démonstration de l'augmentation de la précision locale a été présentée dans la section 3.2 pour l'utilisation de ce critère.

En fin de processus itératif, les grandeurs caractéristiques de fissuration sont estimées numériquement à l'aide d'intégrales indépendantes du domaine d'intégration. Les FIC sont calculés par découplage des modes à l'aide d'une intégrale d'interaction faisant appel à la notion de champs auxiliaires et formulée en intégrale de domaine. Cette méthode à l'avantage d'être précise et plus adaptée aux méthodes numériques éléments finis que celles fondées sur les sauts des champs de déplacements. Les champs auxiliaires choisis correspondent aux trois états des modes purs asymptotiques fournis par le tableau A.1 dans l'annexe A. Pour des situations de contact en pointe de fissure, K_I étant nul, nous avons fait le choix de calculer K_{II} à partir de la quantité J , évaluée à l'aide de l'intégrale de domaine. Ainsi, aucune hypothèse n'a été faite sur la nature de la singularité en pointe de fissure.

La validation du modèle a permis de montrer l'aptitude du code `elfe_3d` à reproduire le comportement de fissures de fatigue allant de configurations simples à des configurations représentatives de la fatigue tribologique.

Ainsi, une première validation a été effectuée pour des chargements proportionnels de fatigue uniaxiale, en traction et en compression, pour un mode simple d'ouverture et un mode mixte. Cette validation s'appuie sur des résultats analytiques et numériques. Elle a montré notamment toute la précision de la méthode X-FEM pour des très faibles extensions de fissures, sans maillage explicite de la discontinuité. Ces calculs ont aussi montré la nécessité d'un maillage représentatif des échelles de discrétisation mises en jeu, afin d'obtenir suffisamment d'éléments d'interface pour une bonne gestion du problème de contact avec frottement.

Une seconde validation portant sur l'analyse du comportement de fissures soumises à des chargements multiaxiaux non proportionnels a été réalisée. Les comparaisons ont été effectuées entre les résultats issus du modèle `elfe_3d` et ceux issus d'un modèle basé sur la théorie mathématique des distributions continues de dislocations, développé par Dubourg [26]. Ce modèle de référence s'appuie sur l'hypothèse de massif semi-infini ce qui a impliqué lors de la simulation numérique la prise en compte d'un domaine de très grande taille comparativement aux autres dimensions du problème : zone de chargement, incrément de déplacement de cette zone au cours du cycle de chargement, taille de la fissure. Plusieurs comparaisons ont été réalisées, pour des configurations chargement/fissure mettant en

jeu au départ du mode II seul, puis du mode mixte et enfin des séquences complexes en mode mixte. La comparaison des champs locaux (sauts normal/tangentiel) à l'interface de la fissure pour ces différentes configurations est très bonne (comparaison entre les champs obtenus par le code `elfe_3d` et le modèle de référence pour des configurations de fissures perpendiculaire et inclinée à la surface de chargement et dont l'effort exercé en surface du massif est purement normal). Toutefois, des différences parfois non négligeables ont été obtenues pour des valeurs de FIC correspondant à certaines phases du cycle de chargement. La confrontation des champs de déplacement le long de la fissure a permis de montrer que cette disparité est liée aux choix des méthodes de calcul des FIC. Le modèle de référence impose indirectement une singularité en pointe de fissure en $\frac{1}{\sqrt{r}}$ alors que le modèle développé ne fait pas d'hypothèse sur la nature de la singularité. D'autres part ces disparités peuvent dans certains cas être liées à la présence d'une "bulle" d'ouverture au cours du cycle de fatigue tribologique qui pourrait influencer l'information restituée par l'intégrale J . Pour les autres cas, la nature de la singularité semble ne plus être en $\frac{1}{\sqrt{r}}$. L'approfondissement de ces points n'a pas été possible à cause du manque de données théoriques et du manque de temps.

Une troisième partie a illustré des problèmes de fatigue de contact plus représentatifs, avec un chargement ayant une composante normale et tangentielle, pour des fissures inclinées typiques de la modélisation bidimensionnelle d'un contact roue-rail. Le modèle `elfe_3d` a ainsi montré son aptitude à capter des séquences de chargement en mode mixte pour différentes longueurs de fissure.

Dans le dernier chapitre de ce mémoire, nous avons abordé la dernière phase du travail bidimensionnel, à savoir la prévision de la croissance des fissures de fatigue tribologique. Nous avons donc intégré au code `elfe_3d` les critères spécifiques de la fatigue de contact, basés sur les développements d'Hourlier et al. [43]. Une analyse de cette prévision est présentée à la fin d'un cycle de chargement pour trois longueurs de fissure. Cette analyse aboutit à l'illustration d'une simulation numérique de propagation.

Après le développement et la validation du modèle bidimensionnel, nous avons abordé l'aspect tridimensionnel du problème de fissuration. Les premiers résultats d'essais expérimentaux réalisés avec un matériau polymère transparent en fatigue de contact de roulement ont été présentés. Un réseau de fissures se développe rapidement suivant deux phases : une propagation schématiquement perpendiculaire à la surface de roulement, puis une bifurcation. Ces essais constituent le point de départ de notre modélisation tridimensionnelle. Dans ce contexte, la fissure est représentée par des fonctions de niveaux [70]. La gestion du contact unilatéral entre les faces est encore en développement ainsi que la prise en compte du frottement. Néanmoins ce premier modèle tridimensionnel permet déjà d'avoir accès à des informations pertinentes, la simulation pour trois longueurs de fissures différentes ayant montré l'importance de prendre en compte l'aspect tridimensionnel.

Ce travail a clairement mis en évidence de nouveaux axes de développements :

- Axes de développements théoriques Concernant les intégrales tridimensionnelles (intégrale d'interaction, intégrale J) des formulations supplémentaires doivent être intégrées afin de prendre en compte le contact et le frottement. Les bords de fissure

débouchants près d'une surface libre doivent faire l'objet de travaux. En effet la nature de la singularité change et le calcul des FIC par la formule d'Irwin n'est plus valable. Nous avons aussi vu le manque de connaissances théoriques lié à la variation possible de la nature de la singularité en pointe de fissure en présence de contact avec frottement. Cet aspect de la modélisation apparaît comme essentiel pour une bonne restitution du mode de fissuration en pointe et donc une meilleure estimation du risque.

- Axes de développements numériques Les aspect multi-échelles de la modélisation du problème doivent être minutieusement analysés et nécessitent des techniques numériques spécifiques (couplage de techniques multigrilles avec la méthode X-FEM) pour avoir une modélisation à différents niveaux (finesse de maillage près des zones fissurées) [81]. D'autre part, la formulation prenant en compte le contact avec frottement doit être étendue au cas tridimensionnel pour lequel la description des éléments d'interface nécessitent encore des développements.
- Axes de développements expérimentaux Une perspective sur le plan des essais de fissuration est l'obtention de la géométrie tridimensionnelle des fissures de fatigue, pouvant être intégrée au modèle numérique afin de caractériser la propagation de ces fissures en vue de l'estimation de la cinétique de formation des dégradations de surface. L'intégration des données expérimentales dans la simulation nécessite d'avantages d'informations sur la géométrie du front de fissure 3D, sur les critères de bifurcation 3D (influence du mode III) et l'identification de lois de fissuration 3D (les effets de bords pourront ainsi être distingués des effets de volume). D'autre part, des travaux récents ont permis de montrer tout l'intérêt de l'utilisation des fonctions de niveaux en couplant cette représentation de la fissure avec des images tomographiques [35]. Une réflexion est donc nécessaire sur la saisie des informations géométriques.

Les premiers développements ont permis de préparer le travail à venir.

Annexe A

Description des champs asymptotiques des contraintes et des déplacements par l'approche de Westergaard

En élasticité plane, les contraintes dérivent d'une fonction biharmonique, la fonction d'Airy, qui s'exprime en utilisant les potentiels complexes $\phi(z)$ et $\chi(z)$ par :

$$\begin{aligned} A &= \Re[\bar{z}\phi(z) + \chi(z)] \\ \sigma_y + \sigma_x &= 4\Re[\phi'(z)] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\sigma_{xy} &= 2[\bar{z}\phi''(z) + \chi''(z)] \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \Re[2\phi'(z) - \bar{z}\phi''(z) - \chi''(z)] \\ \sigma_y &= \Re[2\phi'(z) + \bar{z}\phi''(z) + \chi''(z)] \\ \sigma_{xy} &= \Im[\bar{z}\phi''(z) + \chi''(z)] \end{aligned}$$

Les lèvres de la fissures étant non chargées, le vecteur σ est nul, ce qui équivaut à :

$$\sigma_y = 0 \quad \sigma_{xy} = 0 \quad (\text{A.1})$$

donc sur la fissure (i.e. pour $z = \bar{z}$ et $|z| < a$), on a :

$$\begin{aligned} \Re[2\phi'(z) + \bar{z}\phi''(z) + \chi''(z)] &= 0 \\ \Im[\bar{z}\phi''(z) + \chi''(z)] &= 0 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} 2\phi'(z) + \bar{z}\phi''(z) + \chi''(z) &\quad \text{imaginaire pur sur la fissure} \\ \bar{z}\phi''(z) + \chi''(z) &\quad \text{réel pur sur la fissure} \end{aligned}$$

De ces 2 conditions, il s'ensuit que sur la fissure :

$$\Re [2\phi'(z)] = -\bar{z}\phi''(z) - \chi''(z) \quad (\text{A.2})$$

On peut donc décomposer $\phi(z)$ en 2 fonctions $\phi_1(z)$ et $\phi_2(z)$ telles que :

$$\phi_1(z) \quad \text{imaginaire sur la fissure} \quad (\text{A.3})$$

$$\phi_2(z) \quad \text{réelle sur la fissure} \quad (\text{A.4})$$

$$\phi(z) = \frac{1}{2}(\phi_1(z) + \phi_2(z)) \quad (\text{A.5})$$

$$\phi_2'(z) = -\bar{z}\phi''(z) - \chi''(z) \quad (\text{A.6})$$

De la seconde équation, on exprime la fonction χ en fonction de ϕ :

$$\chi = -\bar{z}\phi(z) + \int \phi_1(z)dz \quad (\text{A.7})$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} A &= \Re \left[\bar{z}\phi(z) - z\phi(z) + \int \phi_1(z)dz \right] \\ \sigma_x &= \Re [\phi_1'(z) + 2\phi_2'(z) - \bar{z}\phi''(z) + z\phi''(z)] \\ \sigma_y &= \Re [\phi_1'(z) + \bar{z}\phi''(z) - z\phi''(z)] \\ \sigma_{xy} &= \Im [\bar{z}\phi''(z) - z\phi''(z) - \phi_2'(z)] \end{aligned}$$

Avec $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$, on obtient :

$$A = \Re \left[\int \phi_1(z)dz \right] + y\Im [\phi(z)] \quad (\text{A.8})$$

$$\sigma_x = \Re [\phi_1'(z)] + 2\Re [\phi_2'(z)] - y\Im [\phi''(z)] \quad (\text{A.9})$$

$$\sigma_y = \Re [\phi_1'(z)] + y\Im [\phi''(z)] \quad (\text{A.10})$$

$$\sigma_{xy} = -y\Re [\phi''(z)] - \Im [\phi_2'(z)] \quad (\text{A.11})$$

On peut donc considérer que σ est la superposition de 2 champs, σ_1 et σ_2 , dérivant des 2 fonctions d'Airy :

$$A_1 = \Re \left[\int \phi_1(z)dz \right] + y\Im [\phi_1(z)] \quad (\text{A.12})$$

$$A_2 = y\Im [\phi_2(z)] \quad (\text{A.13})$$

Pour calculer le champ de déplacement, on intègre les équations de comportement (ou loi de Hooke), ce qui fournit :

$$u_x = \frac{1}{2\mu} \left[\frac{\mu}{\lambda + \mu} \Re [\phi_1(z)] - y\Im [\phi_1'(z)] + \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \Re [\phi_2(z)] - y\Im [\phi_2'(z)] \right] \quad (\text{A.14})$$

$$u_y = \frac{1}{2\mu} \left[\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \Im [\phi_1(z)] - y\Re [\phi_1'(z)] + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \Im [\phi_2(z)] - y\Re [\phi_2'(z)] \right] \quad (\text{A.15})$$

Ces résultats, effectués pour l'état de déformation planes, est transposable à l'état de contraintes planes en remplaçant λ par $\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}$

Westergaard décompose le déplacement, que subit la fissure, en mode I et II de sollicitation. Il pose :

$$Z_I = \phi'_1(z) \text{ pour le mode I} \quad (\text{A.16})$$

$$Z_{II} = \phi'_2(z) \text{ pour le mode II} \quad (\text{A.17})$$

ce qui équivaut à poser $Z = Z_I + Z_{II} = 2\phi'(z)$, Z étant une fonction analytique. Les contraintes et les déplacements se déduisent directement des relations précédentes avec les nouvelles notations.

Pour déterminer la forme des fonctions de Westergaard (Z_I et Z_{II}), on examine les conditions aux limites au voisinage des extrémités d'une fissure. Nous allons donner un exemple avec la fonction Z_I . Pour un mode d'ouverture, les expressions (A.8) se réduisent à

$$\sigma_x = \Re Z_I - y \Im [Z'_I] \quad (\text{A.18})$$

$$\sigma_y = \Re Z_I + y \Im [Z'_I] \quad (\text{A.19})$$

$$\sigma_{xy} = -y \Re [Z'_I] \quad (\text{A.20})$$

Sur le plan de la fissure (i.e. pour $y=0$), on a :

$$\sigma_x = \Re Z_I = \sigma_y \quad (\text{A.21})$$

$$\sigma_{xy} = 0 \quad (\text{A.22})$$

Les conditions aux limites sur les lèvres de la fissure étant non chargées, elles fournissent :

$$\sigma_y = 0 = \sigma_{xy} \text{ pour } y=0 \text{ et } |z| < a \quad (\text{A.23})$$

Par conséquent, d'après (A.21), $\sigma_x = 0$.

Considérons σ_y et choisissons $Z_I(z) = \frac{g(z)}{\sqrt{z^2 - a^2}}$ avec la fonction $g(z)$ réelle pour $y=0$ et finie pour $z = \pm a$. Les conditions aux limites sont alors vérifiées puisque sur le plan de la fissure, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} \text{ imaginaire pur pour } |z| < a \quad \Rightarrow \Re Z_I = 0 \quad (\text{A.24})$$

$$\frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} \text{ réel pour } |z| > a \quad \Rightarrow \Re Z_I \xrightarrow[z \rightarrow -a^-]{z \rightarrow +a^+} \infty \quad (\text{A.25})$$

Les extrémités $z = \pm a$ jouent des rôles identiques. On considère donc seulement l'extrémité $z = +a$, en effectuant une translation de repère pour se mettre sur cette extrémité,

d'où le changement de variable : $\xi = z - a$. La fonction de contrainte de Westergaard s'écrit alors $Z_I(z) = \frac{g_1(\xi)}{\sqrt{\xi}}$ avec $g_1(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\xi^2 + \dots$. Au voisinage de l'extrémité de la fissure, i.e. lorsque $|\xi| \rightarrow 0$, on a :

$$Z_I(z) \approx_{|\xi| \rightarrow 0} \frac{\alpha_0}{\sqrt{\xi}} \quad (\text{A.26})$$

Au lieu de considérer α_0 , une nouvelle constante, K_I est défini, par :

$$K_I = \lim_{z \rightarrow a} \sqrt{2\pi(z-a)} Z_I(z) \quad (\text{A.27})$$

$$= \lim_{\xi \rightarrow 0} \sqrt{2\pi\xi} Z_I(\xi) \quad (\text{A.28})$$

$$= \sqrt{2\pi}\alpha_0 \quad (\text{A.29})$$

d'où l'écriture

$$Z_I(\xi) \approx_{|\xi| \rightarrow 0} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\xi}} \quad (\text{A.30})$$

K_I est donc le FIC pour le mode I de sollicitation. Il dépend de σ_{yy}^∞ et de a . Comme on s'intéresse à l'allure du champ des contraintes au voisinage du front, on introduit la notation $\xi = re^{i\theta}$, et on suppose $\frac{r}{a} \ll 1$. Les champs de contraintes et de déplacement s'expriment par les relations du tableau A.1.

Un raisonnement similaire est appliqué à l'étude du milieu sollicité en mode II. Le choix de la fonction Z_{II} est le suivant : $Z_I(z) = \frac{ig(z)}{\sqrt{z^2 - a^2}}$. Cette fonction est compatible avec les conditions aux limites, et on pose :

$$K_{II} = \lim_{z \rightarrow a} \sqrt{2\pi(z-a)} Z_{II}(z) \quad (\text{A.31})$$

$$= \lim_{\xi \rightarrow 0} i\sqrt{2\pi\xi} Z_{II}(\xi) \quad (\text{A.32})$$

K_{II} dépend de σ_{xy}^∞ et de a et on aboutit à l'écriture

$$Z_{II}(\xi) \approx_{|\xi| \rightarrow 0} -i \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi\xi}} \quad (\text{A.33})$$

L'utilisation de la notation $\xi = re^{i\theta}$ fournit l'expression des champs des contraintes et des déplacements du tableau A.1.

Dans le cas d'un chargement plan combinant du mode I et du mode II, on écrit tout simplement :

$$Z(\xi) = Z_I(\xi) + Z_{II}(\xi) \approx_{|\xi| \rightarrow 0} \frac{K_I - iK_{II}}{\sqrt{2\pi\xi}} = \frac{K^*}{\sqrt{2\pi\xi}} \quad (\text{A.34})$$

avec $K^* = K_I - iK_{II}$ le facteur d'intensité des contraintes complex défini par :

$$K^* = \lim_{\xi \rightarrow 0} \sqrt{2\pi\xi} Z(\xi) \quad (\text{A.35})$$

On aboutit ainsi à l'écriture des champs de déplacements des tableaux A.1 et A.2.

| Mode de sollicitations | Contraintes | Déplacements |
|------------------------|---|--|
| I | $\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2})$ $\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2})$ $\sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$ $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ $\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ | $u_x = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\frac{\kappa-1}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2})$ $u_y = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (\frac{\kappa+1}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2})$ $u_z = 0$ |
| II | $\sigma_{xx} = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} (2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2})$ $\sigma_{yy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$ $\sigma_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2})$ $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ $\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ | $u_x = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (\frac{\kappa+1}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2})$ $u_y = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (-\frac{\kappa-1}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2})$ $u_z = 0$ |
| III | $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0$ $\sigma_{xz} = -\sin \frac{\theta}{2}$ $\sigma_{yz} = \cos \frac{\theta}{2}$ $\sigma_{zz} = 0$ | $u_x = u_y = 0$ $u_z = \frac{4K_{III}}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (1 + \nu)$ |
| | <p>pour l'état de déformations planes $\kappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} = 3 - 4\nu$</p> <p>pour l'état de contraintes planes $\kappa = \frac{5\lambda + 6\mu}{3\lambda + 2\mu} = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$</p> | |

TAB. A.1 – Expression des champs de contraintes et de déplacement en coordonnées cartésiennes

| Mode de sollicitations | Contraintes | Déplacements |
|------------------------|---|---|
| I | $\sigma_{rr} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left(\frac{5}{4} \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \cos \frac{3\theta}{2} \right)$ $\sigma_{\theta\theta} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left(\frac{3}{4} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{3\theta}{2} \right)$ $\tau_{r\theta} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left(\frac{1}{4} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$ | $u_x = \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (1 + \nu)(\kappa - \cos\theta)$ $u_y = \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (1 + \nu)(\kappa - \cos\theta)$ |
| II | $\sigma_{rr} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(-\frac{5}{4} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{3}{4} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$ $\sigma_{\theta\theta} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(-\frac{3}{4} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{3}{4} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$ $\tau_{r\theta} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(\frac{1}{4} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{3}{4} \cos \frac{3\theta}{2} \right)$ | $u_x = \frac{K_{II}}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (1 + \nu)(\kappa + 2 + \cos\theta)$ $u_y = \frac{K_{II}}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (1 + \nu)(\kappa + 2 + \cos\theta)$ |

TAB. A.2 – Autres expressions des champs de contraintes et de déplacement

Annexe B

Les invariants intégraux

[17] établit, pour un solide tridimensionnel homogène élastique D , un invariant intégral permettant de définir des lois de conservation, à partir du lagrangien de la densité d'énergie élastique :

$$L = \int_D W[u_{i,j}(x)] dV. \quad (\text{B.1})$$

Cet invariant est défini par

$$\int_{\partial D} P_{kj} n_k dS = 0, \quad (\text{B.2})$$

avec le tenseur de Eshelby $P_{kj} = \sigma_{ik}(\psi_{ij} - u_{i,l}\phi_{lj})\omega_j + W\phi_{kj}\omega_j$ (ou tenseur moment d'énergie), \vec{n} le vecteur normal à la surface fermée ∂D et les autres paramètres provenant de la transformation des coordonnées et des champs.

Cet invariant, appliqué à des transformations conservant l'énergie élémentaire élastique $W dv$, aboutit aux lois de conservation de Eshelby et de Knowles et Stenberg (première et deuxième lois). La loi de Eshelby, associé à la transformation de type translation, est :

$$\int_{\partial D} (W\delta_{ik} - \sigma_{jk}u_{j,i}\delta\omega_j) n_k dS = 0. \quad (\text{B.3})$$

Celle associée à la transformation de type rotation, pour un matériau isotrope, est :

$$\int_{\partial D} \epsilon_{ijk}(Wx_k n_j - \sigma_{jh}n_h u_k - \sigma_{pl}n_l u_{p,j}x_k) dS = 0. \quad (\text{B.4})$$

La dernière correspond à une transformation de type changement d'échelle, pour un matériau élastique linéaire, dans les trois directions en 3D :

$$\int_{\partial D} (Wx_k n_k - \sigma_{jk}n_k u_{j,k}x_h - \frac{1}{2}\sigma_{jk}n_k u_j) dS = 0, \quad (\text{B.5})$$

ou dans les deux directions en 2D :

$$\int_{\partial D} (Wx_k n_k - \sigma_{jk}n_k u_{j,k}) dS = 0. \quad (\text{B.6})$$

A présent, considérons un milieu élastique linéaire homogène isotrope, sauf dans une région où il existe un défaut (fissures, inclusions, cavités, ...). Le domaine délimité par deux surface fermées quelconques S et S' , entourant le défaut, telles que la normale de S soit orientée vers l'extérieur et celle de S' vers l'intérieur, définit une région dans laquelle les lois de conservations précédentes sont applicables. Sont alors déduit de ces relations, les invariants intégraux J_i , L_i et M :

$$\begin{aligned}
 J_i &= \int_S (W n_i - \sigma_{jk} n_k u_{j,i}) dS \\
 L_i &= \int_S \epsilon_{ijk} (W x_k n_j - \sigma_{jh} n_h u_k - \sigma_{pl} n_l u_{p,j} x_k) dS \\
 M &= \int_S (W x_k n_k - \sigma_{jk} n_k u_{j,k} x_h - c \sigma_{jk} n_k u_j) dS
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

avec $c = \frac{1}{2}$ en 3d et 0 en 2D. La propriété essentielle de ces intégrales est l'indépendance du choix de la surface fermée S . Par conséquent, lorsque la surface S considérée est le défaut lui-même, les champs utilisés peuvent être ceux du défaut. Ceci permet de considérer ces intégrales en mécanique de la rupture comme des paramètres caractéristiques des fissures. Leur signification énergétique conduit à essayer de les utiliser comme critères de croissance ou de rupture.

Annexe C

La solution d'Amestoy

La solution d'Amestoy fournit par [95] est

$$\begin{pmatrix} k_1(r, \theta) \\ k_2(r, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11}(\theta) & K_{12}(\theta) \\ K_{21}(\theta) & K_{22}(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_I \\ K_{II} \end{pmatrix} + T\sqrt{r} \begin{pmatrix} K_{11}^{(1)}(\theta) & K_{12}^{(1)}(\theta) \\ K_{21}^{(1)}(\theta) & K_{22}^{(1)}(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin 2\gamma \\ \cos 2\gamma \end{pmatrix} + O(\sqrt{r}) \quad (\text{C.1})$$

où les coefficients K_{ij} sont définis par les relations suivantes :

$$K_{11}(\theta) = \left(\frac{1-m}{1+m} \right)^{\frac{m}{2}} \left(\cos\theta - \frac{1}{2\pi} \sin L\theta \right) \quad (\text{C.2})$$

$$K_{12}(\theta) = \left(\frac{1-m}{1+m} \right)^{\frac{m}{2}} \left(-\frac{3}{2} \sin\theta \right) \quad (\text{C.3})$$

$$K_{21}(\theta) = \left(\frac{1-m}{1+m} \right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{1}{2} \sin\theta \right) \quad (\text{C.4})$$

$$K_{22}(\theta) = \left(\frac{1-m}{1+m} \right)^{\frac{m}{2}} \left(\cos\theta + \frac{1}{2\pi} \sin L\theta \right) \quad (\text{C.5})$$

avec $m = \frac{\theta}{180}$ et $L = \ln \left(\frac{1-m}{1+m} \right) - 2 \frac{m}{1-m^2}$.

Les coefficients K_{ij} vérifient les propriétés suivantes :

$$K_{11}(-\theta) = K_{11}(\theta) \quad (\text{C.6})$$

$$K_{12}(-\theta) = -K_{12}(\theta) \quad (\text{C.7})$$

$$K_{21}(-\theta) = -K_{21}(\theta) \quad (\text{C.8})$$

$$K_{22}(-\theta) = K_{22}(\theta) \quad (\text{C.9})$$

Annexe D

Mise à jour des quantités normales et tangentiels le long des faces de la fissure

A partir des opérateurs C_I et \tilde{C}_I , G_I et \tilde{G}_I , les quantités normales et tangentiels sont mises à jour par les expressions rapportées dans les tableaux suivants, avec :

$$C_I = \frac{1}{2}(\omega_{N,i}^- - \omega_{N,i}^+) - \frac{1}{2k_0}(t_{N,i}^- - t_{N,i}^+), \quad (\text{D.1})$$

$$G_I = \frac{k_0}{2}(\omega_{T,i}^- - \omega_{T,i}^+) - \frac{1}{2}(t_{T,i}^- - t_{T,i}^+), \quad (\text{D.2})$$

$$\tilde{C}_I = \frac{1}{2}(\omega_{N,i}^- - \omega_{N,i}^+) - \frac{1}{2k_0}(t_{N,i}^- - t_{N,i}^+), \quad (\text{D.3})$$

$$\tilde{G}_I = \frac{k_0}{2}(\Delta\omega_{T,i}^+ - \Delta\omega_{T,i}^-) - \frac{1}{2}(t_{T,i}^- - t_{T,i}^+). \quad (\text{D.4})$$

| $\tilde{C}_I > 0$ | $\tilde{C}_I \leq 0$ | |
|--|--|--|
| | $ \tilde{G}_I < g$ | $ \tilde{G}_I \geq g$ |
| Ouverture | Adhérence | Glissement |
| $t_{N,i+\frac{1}{2}}^- = -t_{N,i+\frac{1}{2}}^+ = 0$ | $t_{N,i+\frac{1}{2}}^+ = -t_{N,i+\frac{1}{2}}^- = k_0 \tilde{C}_I$ | |
| $t_{T,i+\frac{1}{2}}^- = -t_{T,i+\frac{1}{2}}^+ = 0$ | $t_{T,i+\frac{1}{2}}^+ = -t_{T,i+\frac{1}{2}}^- = \tilde{G}_I$ | $t_{T,i+\frac{1}{2}}^+ = -t_{T,i+\frac{1}{2}}^- = g \frac{\tilde{G}_I}{ \tilde{G}_I }$ |
| $\omega_{N,i+\frac{1}{2}}^+ = \omega_{N,i}^+ - \frac{1}{k_0} t_{N,i}^+$ $\omega_{N,i+\frac{1}{2}}^- = \omega_{N,i}^- - \frac{1}{k_0} t_{N,i}^-$ | $\omega_{N,i+\frac{1}{2}}^+ = \omega_{N,i+\frac{1}{2}}^- = \frac{1}{2}(\omega_{N,i}^+ + \omega_{N,i}^-) - \frac{1}{2k_0}(t_{N,i}^+ + t_{N,i}^-)$ | |
| $\omega_{T,i+\frac{1}{2}}^+ = \omega_{T,i}^+ - \frac{1}{k_0} t_{T,i}^+$ $\omega_{T,i+\frac{1}{2}}^- = \omega_{T,i}^- - \frac{1}{k_0} t_{T,i}^-$ | $\Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}^+ = \Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}^-$ $= \frac{1}{2}(\Delta\omega_{T,i}^+ + \Delta\omega_{T,i}^-)$ $- \frac{1}{2k_0}(t_{T,i}^+ + t_{T,i}^-)$ | $\Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}^+ =$ $\Delta\omega_{T,i}^+ - \frac{1}{k_0}(t_{T,i+\frac{1}{2}}^+ - t_{T,i}^+)$ $\Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}^- =$ $\Delta\omega_{T,i}^- - \frac{1}{k_0}(t_{T,i+\frac{1}{2}}^- - t_{T,i}^-)$ |

TAB. D.1 – Etat du point, composantes du déplacement et des forces de contact en fonction de la valeur des indicateurs \tilde{C}_I et \tilde{G}_I pour les pas de chargement avec un effet d'histoire.

| $C_I > 0$ | $C_I \leq 0$ | |
|--|--|---|
| | $ G_I < g$ | $ G_I \geq g$ |
| Ouverture | Adhérence | Glissement |
| $t_{N,i+\frac{1}{2}}^- = -t_{N,i+\frac{1}{2}}^+ = 0$ | $t_{N,i+\frac{1}{2}}^+ = -t_{N,i+\frac{1}{2}}^- = k_0 C_I$ | |
| $t_{T,i+\frac{1}{2}}^- = -t_{T,i+\frac{1}{2}}^+ = 0$ | $t_{T,i+\frac{1}{2}}^+ = -t_{T,i+\frac{1}{2}}^- = G_I$ | $t_{T,i+\frac{1}{2}}^+ = -t_{T,i+\frac{1}{2}}^- = g \frac{G_I}{ G_I }$ |
| $\omega_{N,i+\frac{1}{2}}^+ = \omega_{N,i}^+ - \frac{1}{k_0} t_{N,i}^+$ $\omega_{N,i+\frac{1}{2}}^- = \omega_{N,i}^- - \frac{1}{k_0} t_{N,i}^-$ | $\omega_{N,i+\frac{1}{2}}^+ = \omega_{N,i+\frac{1}{2}}^- = \frac{1}{2}(\omega_{N,i}^+ + \omega_{N,i}^-) - \frac{1}{k_0}(t_{N,i}^+ + t_{N,i}^-)$ | |
| | $\omega_{T,i+\frac{1}{2}}^+ = \omega_{T,i}^+ - \frac{1}{k_0} t_{T,i}^+$ $\omega_{T,i+\frac{1}{2}}^- = \omega_{T,i}^- - \frac{1}{k_0} t_{T,i}^-$ | $\omega_{T,i+\frac{1}{2}}^+ = \omega_{T,i+\frac{1}{2}}^-$ $= \omega_{T,i}^+$ $+ \frac{1}{k_0}(t_{T,i+\frac{1}{2}}^+ - t_{T,i}^-)$ |

TAB. D.2 – Etat du point, composantes du déplacement et des forces de contact en fonction de la valeur des indicateurs C_I et G_I pour le premier pas de chargement.

Annexe E

Itération de point fixe sur les quantités normales et tangentielles le long des faces de la fissure

Raisonnons sur un point de Gauss. En entrée de l'étape locale, les quantités sont ω_i^+ , ω_i^- , t_i^+ et t_i^- . Après évaluation des opérateurs \tilde{C}_I et \tilde{G}_I , en sortie de l'étape locale, nous avons les quantités $\omega_{i+\frac{1}{2}}^+$, $\omega_{i+\frac{1}{2}}^-$, $t_{i+\frac{1}{2}}^+$ et $t_{i+\frac{1}{2}}^-$. Les expressions des composantes normales et tangentielles de ces quantités est fournit par les tableaux D.1 et D.2 de l'annexe D.

Faisons une itération supplémentaire dans l'étape locale à partir des données $\omega_{i+\frac{1}{2}}^+$, $\omega_{i+\frac{1}{2}}^-$, $t_{i+\frac{1}{2}}^+$ et $t_{i+\frac{1}{2}}^-$. Les opérateurs \tilde{C}_I et \tilde{G}_I sont à présent calculés à partir des quantités $\omega_{i+\frac{1}{2}}^+$, $\omega_{i+\frac{1}{2}}^-$, $t_{i+\frac{1}{2}}^+$ et $t_{i+\frac{1}{2}}^-$, et seront notés $\tilde{\tilde{C}}_I$ et $\tilde{\tilde{G}}_I$. Les données de sortie seront notées $\tilde{\omega}_{i+\frac{1}{2}}^+$, $\tilde{\omega}_{i+\frac{1}{2}}^-$, $\tilde{t}_{i+\frac{1}{2}}^+$ et $\tilde{t}_{i+\frac{1}{2}}^-$.

Supposons qu'à la première étape locale, $\tilde{C}_I > 0$. Alors les quantités normales sont les expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{N,i+\frac{1}{2}}^+ = -t_{N,i+\frac{1}{2}}^- = 0 \\ t_{T,i+\frac{1}{2}}^+ = -t_{T,i+\frac{1}{2}}^- = 0 \\ \omega_{N,i+\frac{1}{2}}^+ = \omega_{N,i}^+ - \frac{1}{k_0} t_{N,i}^+ \\ \omega_{N,i+\frac{1}{2}}^- = \omega_{N,i}^- - \frac{1}{k_0} t_{N,i}^- \\ \omega_{T,i+\frac{1}{2}}^+ = \omega_{T,i}^+ - \frac{1}{k_0} t_{T,i}^+ \\ \omega_{T,i+\frac{1}{2}}^- = \omega_{T,i}^- - \frac{1}{k_0} t_{T,i}^- \end{array} \right. \quad (\text{E.1})$$

d'où le calcul de $\tilde{\tilde{C}}_I$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\tilde{C}}_I = \frac{1}{2}(\omega_{N,i+\frac{1}{2}}^- - \omega_{N,i+\frac{1}{2}}^+) - \frac{1}{2k_0}(t_{N,i+\frac{1}{2}}^- - t_{N,i+\frac{1}{2}}^+) \\ = \frac{1}{2}(\omega_{N,i+\frac{1}{2}}^- - \omega_{N,i+\frac{1}{2}}^+) \\ = \frac{1}{2}(\omega_{N,i}^- - \frac{1}{k_0}t_{N,i}^- - \omega_{N,i}^+ - \frac{1}{k_0}t_{N,i}^+) \\ = \frac{1}{2}(\omega_{N,i}^- - \omega_{N,i}^+) - \frac{1}{2k_0}(t_{N,i}^- - t_{N,i}^+) \\ = \tilde{C}_I \end{array} \right. \quad (\text{E.2})$$

Donc $\tilde{C}_I > 0$ entraîne $\tilde{\tilde{C}}_I > 0$ et la mise à jour des quantités locales est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{t}_{N,i+\frac{1}{2}}^+ = -\tilde{t}_{N,i+\frac{1}{2}}^- = 0 \\ \tilde{t}_{T,i+\frac{1}{2}}^+ = -\tilde{t}_{T,i+\frac{1}{2}}^- = 0 \\ \tilde{\omega}_{N,i+\frac{1}{2}}^+ = \omega_{N,i+\frac{1}{2}}^+ - \frac{1}{k_0}t_{N,i+\frac{1}{2}}^+ \\ \tilde{\omega}_{N,i+\frac{1}{2}}^- = \omega_{N,i+\frac{1}{2}}^- - \frac{1}{k_0}t_{N,i+\frac{1}{2}}^- \\ \tilde{\omega}_{T,i+\frac{1}{2}}^+ = \omega_{T,i+\frac{1}{2}}^+ - \frac{1}{k_0}t_{T,i+\frac{1}{2}}^+ \\ \tilde{\omega}_{T,i+\frac{1}{2}}^- = \omega_{T,i+\frac{1}{2}}^- - \frac{1}{k_0}t_{T,i+\frac{1}{2}}^- \end{array} \right. \quad (\text{E.3})$$

ce qui équivaut à

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{t}_{N,i+\frac{1}{2}}^+ = -t_{N,i+\frac{1}{2}}^+ = 0 \\ \tilde{t}_{N,i+\frac{1}{2}}^- = -t_{N,i+\frac{1}{2}}^- = 0 \\ \tilde{t}_{T,i+\frac{1}{2}}^+ = -t_{T,i+\frac{1}{2}}^+ = 0 \\ \tilde{t}_{T,i+\frac{1}{2}}^- = -t_{T,i+\frac{1}{2}}^- = 0 \\ \tilde{\omega}_{N,i+\frac{1}{2}}^+ = \omega_{N,i+\frac{1}{2}}^+ \\ \tilde{\omega}_{N,i+\frac{1}{2}}^- = \omega_{N,i+\frac{1}{2}}^- \\ \tilde{\omega}_{T,i+\frac{1}{2}}^+ = \omega_{T,i+\frac{1}{2}}^+ \\ \tilde{\omega}_{T,i+\frac{1}{2}}^- = \omega_{T,i+\frac{1}{2}}^- \end{array} \right. \quad (\text{E.4})$$

Finalement les quantités normales sont les mêmes si $\tilde{\tilde{C}}_I > 0$.

A présent, supposons qu'à la première étape locale $\tilde{C}_I \leq 0$. Alors les quantités normales ont les expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{N,i+\frac{1}{2}}^+ = -t_{N,i+\frac{1}{2}}^- = k_0\tilde{\tilde{C}}_I \\ \omega_{N,i+\frac{1}{2}}^+ = \omega_{N,i+\frac{1}{2}}^- = \frac{1}{2}(\omega_{N,i}^+ + \omega_{N,i}^-) - \frac{1}{2k_0}(t_{N,i}^+ + t_{N,i}^-) \end{array} \right. \quad (\text{E.5})$$

d'où le calcul de \tilde{C}_I :

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{C}_I &= \frac{1}{2}(\omega_{N,i+\frac{1}{2}}^- - \omega_{N,i+\frac{1}{2}}^+) - \frac{1}{2k_0}(t_{N,i+\frac{1}{2}}^- - t_{N,i+\frac{1}{2}}^+) \\ &= -\frac{1}{2k_0}(t_{N,i+\frac{1}{2}}^- - t_{N,i+\frac{1}{2}}^+) \\ &= \frac{1}{k_0}t_{N,i+\frac{1}{2}}^+ \\ &= \tilde{C}_I \end{aligned} \right. \quad (\text{E.6})$$

Donc $\tilde{C}_I \leq 0$ entraine $\tilde{C}_I \leq 0$ et la mise à jour des quantités locales est :

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{t}_{N,i+\frac{1}{2}}^+ &= -\tilde{t}_{N,i+\frac{1}{2}}^- = k_0\tilde{C}_I \\ \tilde{\omega}_{N,i+\frac{1}{2}}^+ &= \tilde{\omega}_{N,i+\frac{1}{2}}^- = \frac{1}{2}(\omega_{N,i+\frac{1}{2}}^+ + \omega_{N,i+\frac{1}{2}}^-) - \frac{1}{2k_0}(t_{N,i+\frac{1}{2}}^+ + t_{N,i+\frac{1}{2}}^-) \end{aligned} \right. \quad (\text{E.7})$$

ce qui équivaut à

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{t}_{N,i+\frac{1}{2}}^+ &= -\tilde{t}_{N,i+\frac{1}{2}}^- = -t_{N,i+\frac{1}{2}}^- = t_{N,i+\frac{1}{2}}^+ \\ \tilde{\omega}_{N,i+\frac{1}{2}}^+ &= \tilde{\omega}_{N,i+\frac{1}{2}}^- = \omega_{N,i+\frac{1}{2}}^+ = \omega_{N,i+\frac{1}{2}}^- \end{aligned} \right. \quad (\text{E.8})$$

Finalemnt les quantités normales sont les mêmes si $\tilde{C}_I \leq 0$. Le problème normal est donc inchangé si une boucle est effectuée à l'étape locale.

Considérons à présent le problème tangentiel. Supposons qu'à la première étape locale $|\tilde{G}_I| < g$. Alors les quantités tangentielles ont les expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} t_{T,i+\frac{1}{2}}^+ &= -t_{T,i+\frac{1}{2}}^- = \tilde{G}_I \\ \Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}^+ &= \Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}^- = \frac{1}{2}(\Delta\omega_{T,i}^+ + \Delta\omega_{T,i}^-) - \frac{1}{2k_0}(t_{T,i}^+ + t_{T,i}^-) \end{aligned} \right. \quad (\text{E.9})$$

d'où le calcul de \tilde{G}_I :

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{G}_I &= \frac{1}{2}(t_{T,i+\frac{1}{2}}^+ - t_{T,i+\frac{1}{2}}^-) + \frac{k_0}{2}(\Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}^+ - \Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}^-) \\ &= \tilde{G}_I \end{aligned} \right. \quad (\text{E.10})$$

Donc $|\tilde{G}_I| < g_0$ entraine $|\tilde{G}_I| < g$ et la mise à jour des quantités locales est :

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{t}_{T,i+\frac{1}{2}}^+ &= -\tilde{t}_{T,i+\frac{1}{2}}^- = \tilde{G}_I \\ \Delta\tilde{\omega}_{T,i+\frac{1}{2}}^+ &= \Delta\tilde{\omega}_{T,i+\frac{1}{2}}^- = \frac{1}{2}(\Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}^+ + \Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}^-) - \frac{1}{2k_0}(t_{T,i+\frac{1}{2}}^+ + t_{T,i+\frac{1}{2}}^-) \end{aligned} \right. \quad (\text{E.11})$$

ce qui équivaut à

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{t}_{T,i+\frac{1}{2}}^+ &= -\tilde{t}_{T,i+\frac{1}{2}}^- = t_{T,i+\frac{1}{2}}^+ = t_{T,i+\frac{1}{2}}^- \\ \Delta\tilde{\omega}_{T,i+\frac{1}{2}}^+ &= \Delta\tilde{\omega}_{T,i+\frac{1}{2}}^- = \Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}^+ = \Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}^- \end{aligned} \right. \quad (\text{E.12})$$

Finalement, supposons qu'à la première étape locale $|\tilde{G}_I| \geq g$. Alors les quantités tangentielles ont les expressions suivantes :

$$\begin{cases} t_{T,i+\frac{1}{2}}^+ &= -t_{T,i+\frac{1}{2}}^- = g \frac{\tilde{G}^I}{|\tilde{G}_I|} \\ \Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}^+ &= \Delta\omega_{T,i}^+ - \frac{1}{k_0}(t_{T,i+\frac{1}{2}}^+ - t_{T,i}^+) \\ \Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}^- &= \Delta\omega_{T,i}^- - \frac{1}{k_0}(t_{T,i+\frac{1}{2}}^+ - t_{T,i}^-). \end{cases} \quad (\text{E.13})$$

d'où le calcul de $\tilde{\tilde{G}}_I$:

$$\begin{cases} \tilde{\tilde{G}}_I &= \frac{1}{2}(t_{T,i+\frac{1}{2}}^+ - t_{T,i+\frac{1}{2}}^-) + \frac{k_0}{2}(\Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}^+ - \Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}^-) \\ &= t_{T,i+\frac{1}{2}}^+ + \frac{k_0}{2}(\Delta\omega_{T,i}^+ - \Delta\omega_{T,i}^-) + \frac{1}{2}(t_{T,i}^+ - t_{T,i}^-) - t_{T,i+\frac{1}{2}}^+ \\ &= \tilde{G}_I \end{cases} \quad (\text{E.14})$$

Donc $|\tilde{G}_I| \geq g_0$ entraîne $|\tilde{\tilde{G}}_I| \geq g_0$ et la mise à jour des quantités locales est :

$$\begin{cases} \tilde{t}_{T,i+\frac{1}{2}}^+ &= -\tilde{t}_{T,i+\frac{1}{2}}^- = g \frac{\tilde{G}^I}{|\tilde{G}_I|} \\ \Delta\tilde{\omega}_{T,i+\frac{1}{2}}^+ &= \Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}^+ - \frac{1}{k_0}(\tilde{t}_{T,i+\frac{1}{2}}^+ - t_{T,i+\frac{1}{2}}^+) \\ \Delta\tilde{\omega}_{T,i+\frac{1}{2}}^- &= \Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}^- - \frac{1}{k_0}(\tilde{t}_{T,i+\frac{1}{2}}^+ - t_{T,i+\frac{1}{2}}^-). \end{cases} \quad (\text{E.15})$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \tilde{t}_{T,i+\frac{1}{2}}^+ &= -\tilde{t}_{T,i+\frac{1}{2}}^- = -t_{T,i+\frac{1}{2}}^- = t_{T,i+\frac{1}{2}}^+ \\ \Delta\tilde{\omega}_{T,i+\frac{1}{2}}^+ &= \Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}^+ \\ \Delta\tilde{\omega}_{T,i+\frac{1}{2}}^- &= \Delta\omega_{T,i+\frac{1}{2}}^- \end{cases} \quad (\text{E.16})$$

En supposant que $|\tilde{G}_I| \geq g$, nous aboutissons à la conclusion que les quantités tangentielles sont inchangées.

Par conséquent, faire une boucle de point fixe à l'étape locale n'apporte aucune amélioration aux quantités normales et tangentielles.

Annexe F

Exemple de jeu de données pour le code elfe_3d

exemple.DAT

```
# fichiers concernant le maillage
MESH_FILE_TYPE = unv
MESH_FILE      = lunv/maillage.UNV

# fichiers concernant la géométrie de la fissure
GEOM_FILE      = lgef/.GEF
GEOM_TYPE      = classical

#format pour l'export
EXPORT_FORMAT  = gmsh

# type de calcul
REGIME         = static
ANALYSIS       = mechanics_time_contact
PROCEDURE      = cycle_crack_growth
PROCEDURE_PARAM_FILE = lpar_proc/CRACKGROWTH.PAR

# affectation des matériaux par zone
ZONE 41 = {MAT_CLASS = elastic MAT_PARAM = lmat/materiau.MAT}
ZONE 43 = {MAT_CLASS = elastic MAT_PARAM = lmat/materiau.MAT}

# conditions aux limites cinématiques
GROUP 4021 = {GROUP_ENV DISPLACEMENT_X FIX = 0.0 GROUP_ENV DISPLACEMENT_Y FIX = 0.0}

# conditions aux limites quasi-statiques modélisant un chargement en 10 pas de chargement
GROUP 1000 = { GROUP_ENV TRACTION_X NB_EVO = 10 EVO = (0.00e+00, 1.00e+00)
              (1.00e-02, 0.00e+00) (2.00e-02, 0.00e+00) (3.00e-02, 0.00e+00) (4.00e-02, 0.00e+00)
              (5.00e-02, 0.00e+00) (6.00e-02, 0.00e+00) (7.00e-02, 0.00e+00) (8.00e-02, 0.00e+00)
              (9.00e-02, 0.00e+00) (1.00e-01, 0.00e+00) (1.10e-01, 0.00e+00) FIX = 38000.0 }

# définition de l'enrichissement
DO_ENRICH_AUTOMATIC
CRACK 1 = { DISPLACEMENT_X CRACK_DIS DISPLACEMENT_Y CRACK_DIS
            DISPLACEMENT_X NEAR_TIP DISPLACEMENT_Y NEAR_TIP }

# données relatives au calcul des FIC
DO_POSTPRO_AUTOMATIC
```

```
# données relatives à l'utilisation de la méthode LATIN et à la
résolution du contact interfacial
INTERFACE 1 = { LAW = UNILATERAL_WITH_FRICTION
               LATIN_K = 1050.0E10
               FRICTION = 0.1
               BOTH_SIDE_INTERFACE }
```

geometrie.GEF

```
# paramètres
VECTOR 1 = { POS_X = 0.0e+0   POS_Y = 0.0e+0   POS_Z = 0.0e+0 }
VECTOR 2 = { POS_X = 0.1e+0   POS_Y = 0.0e+0   POS_Z = 0.0e+0 }
POINT 1 = { BY_PARAM        NB = 1   LIST = 1 }
POINT 2 = { BY_PARAM        NB = 1   LIST = 2 }
SEGMENT 3 = { BY_POINTS      NB = 2   LIST = 1 2 }

# fissure
CRACK 1 = { NB = 1   FRONT_LIST = 2   NB = 1   INTERIOR_LIST = 3 }

# définition de l'interface pour la résolution du contact
INTERFACE 1 = { NB = 1   INTERIOR_LIST = 3 }
```

materiau.MAT

```
NAME          = PSM9
YOUNG_MODULUS = 3150.0E+9
POISSON_RATIO = 0.36
```

procedure.PAR

```
# loi pour determiner l'angle de propagation
CRACK_GROWTH_ANGLE_LAW = dadN

# vitesse de propagation
CRACK_GROWTH_DELTA_LAW = law_mode_mixte

# nombre de cycle
MAX_STEPS          = 5
```

formulation.PAR

```
# parametres de la méthode LATIN
MAX_ITERS = 500
ERROR_TOL = 1.0e-3

# parametres pr la dicretisation du temps
COMPUTATIONAL_TIME = 0.10
MAX_STEPS          = 10
EXPORT_FREQUENCY   = 1
POSTPRO_FREQUENCY  = 1
# le pas de temps = (Computational_Time/Max_Steps)
```

Annexe G

Quelques données expérimentales

L'ensemble de données disponibles sont rapportées dans les tableaux G.1 et G.2.

| 180° Est, $\alpha = 0^\circ$ | | | | | | | | | | | | | |
|------------------------------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|
| nb de cycles | 25E3 | 50E3 | 75E3 | 100E3 | 200E3 | 300E3 | 400E3 | 600E3 | 800E3 | 1000E3 | 1500E3 | 2000E3 | 2500E3 |
| | T080 | T080 | T080 | T08 | T080 | T080 | T080 | T080 | T080 | T080 | T080 | T080 | T080 |
| | T085 | | T085 | T085 | T085 | T085 | T085 | T085 | T085 | T085 | T085 | T085 | T085 |
| | T090 | | T090 | T090 | T090 | T090 | T090 | T090 | T090 | T090 | T090 | T090 | T090 |
| | T110 | T110 | T110 | T110 | T110 | T110 | T110 | T110 | T110 | T110 | T110 | T110 | T110 |
| | | T115 | | T115 | T115 | T115 | T115 |
| | T130 | T130 | T130 | T130 | T130 | T130 | T130 | T130 | T130 | T130 | T130 | T130 | T130 |
| | | | | | T135 | T135 | T135 | T135 | T135 | T135 | T135 | T135 | T135 |
| | | | | | T140 | T140 | T140 | T140 | T140 | T140 | T140 | T140 | T140 |
| | | | | | T145 | T145 | T145 | T145 | T145 | T145 | T145 | T145 | T145 |
| | | | | | T150 | T150 | T150 | T150 | T150 | T150 | T150 | T150 | T150 |
| | | | | | | | | T240 | T240 | T240 | T240 | T240 | T240 |
| | | | | | | | | T270 | T270 | T270 | T270 | T270 | T270 |

TAB. G.1 – Ensemble des données expérimentales traitées à 180° Est

Nous avons choisis de travailler sur les prises de vue à Est 60°, pour une position sur le galet repérée par $\theta = 130^\circ$. Pour cette position, les valeurs expérimentales ont été acquises par traitement des images saisies, avec une imprécision des mesures de l'ordre de +/-0.02 mm. L'ensemble des mesures de cette position est reporté dans les tableaux G.3 à G.6.

Concernant la seconde campagne d'essai, nous n'avons pu acquérir suffisamment de données sur la propagation bidimensionnelle (première phase de la propagation des fissures observées).

| 60° Est, $\alpha = 0^\circ$ | | | | | | | | | |
|------------------------------|------|------|------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|
| nb de cycles | 25E3 | 50E3 | 75E3 | 400E3 | 600E3 | 1000E3 | 1500E3 | 2000E3 | 2500E3 |
| | T080 | T080 | T080 | | | | | | |
| | T130 | T130 | T130 | T130 | T130 | | T130 | T130 | T130 |
| 60° Est, $\alpha = 20^\circ$ | | | | | | | | | |
| nb de cycles | 25E3 | 50E3 | 75E3 | 400E3 | 600E3 | 1000E3 | 1500E3 | 2000E3 | 2500E3 |
| | T080 | T080 | T080 | | | | | | |
| | T130 | T130 | T130 | T130 | T130 | T130 | T130 | T130 | T130 |
| nb de cycles | 25E3 | 50E3 | 75E3 | 400E3 | 600E3 | 1000E3 | 1500E3 | 2000E3 | 2500E3 |
| 60° Est, $\alpha = 30^\circ$ | | | | | | | | | |
| | T080 | T080 | T080 | | | | | | |
| | T130 | T130 | T130 | T130 | T130 | T130 | T130 | T130 | T130 |
| nb de cycles | 25E3 | 50E3 | 75E3 | 400E3 | 600E3 | 1000E3 | 1500E3 | 2000E3 | 2500E3 |
| 60° Est, $\alpha = 40^\circ$ | | | | | | | | | |
| | T080 | T080 | T080 | | | | | | |
| | T130 | T130 | T130 | T130 | T130 | T130 | T130 | T130 | T130 |
| nb de cycles | 25E3 | 50E3 | 75E3 | 400E3 | 600E3 | 1000E3 | 1500E3 | 2000E3 | 2500E3 |
| 60° Est, $\alpha = 50^\circ$ | | | | | | | | | |
| | T130 | T130 | | T130 | T130 | | | | |

TAB. G.2 – Ensemble des données expérimentales traitées à 60° Est

| Fissure 1 | | |
|------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| Nombre de cycles | Profondeur fissure mesurée (mm) | largeur fissure (mm) surfacique |
| 25 000 | 0.36 | 0.7 |
| 50 000 | 0.74 | 2.07 |
| 75 000 | 1.14 | 2.16 |
| 400 000 | 1.25 | 3.02 |
| 600 000 | 1.44 | 3.11 |

TAB. G.3 – Valeurs expérimentales à 60° Est de la largeur surfacique de la fissure 1 et de la profondeur de son centre

| Fissure 2 | | |
|------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| Nombre de cycles | Profondeur fissure mesurée (mm) | largeur fissure (mm) surfacique |
| 50 000 | 0.20 | 0.81 |
| 75 000 | 0.44 | 1.39 |
| 400 000 | 0.89 | 2.24 |
| 600 000 | 0.97 | 2.32 |

TAB. G.4 – Valeurs expérimentales à 60° Est de la largeur surfacique de la fissure 2 et de la profondeur de son centre

| Fissure 3 | | |
|------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| Nombre de cycles | Profondeur fissure mesurée (mm) | largeur fissure (mm) surfacique |
| 75 000 | 0.21 | 0.58 |
| 400 000 | 0.92 | 1.52 |
| 600 000 | 1.04 | 1.58 |

TAB. G.5 – Valeurs expérimentales à 60° Est de la largeur surfacique de la fissure 3 et de la profondeur de son centre

| Fissure 4 | | |
|------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| Nombre de cycles | Profondeur fissure mesurée (mm) | largeur fissure (mm) surfacique |
| 75 000 | 0.21 | 0.74 |
| 400 000 | 0.76 | 1.38 |
| 600 000 | 0.84 | 1.40 |
| 1 000 000 | 0.85 | 1.99 |

TAB. G.6 – Valeurs expérimentales à 60° Est de la largeur surfacique de la fissure 4 et de la profondeur de son centre

Bibliographie

- [1] P. ALART et A. CURNIER, A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1991, vol. 92, pp. 353–375.
- [2] M.H. ALIABADI et D.P. ROOKE, *Numerical fracture mechanics*. Boston : Kluwer Academic Publishers, 1991, 276 p.
- [3] M. AMESTOY, H.-D. BUI et K. DANG-VAN, Déviation infinitésimale d’une fissure dans une direction arbitraire. *Compte Rendu de l’Académie des Sciences de Paris*, 1979, vol. 289, pp. 99–102.
- [4] O.A. BABA, B. RADİ et J.-C. GELIN, An augmented lagrangian treatment of the metal forming process. *Mathematical and Computer Modelling*, 2000, vol. 32, pp. 1171–1179.
- [5] M.-C. BAIETTO-DUBOURG, *Réponse des premiers corps aux sollicitations tribologiques. Endommagement de fatigue et fissuration*. Rapport de l’habilitation à diriger des recherches. Villeurbanne : INSA-Lyon, Département LaMCos, 1999.
- [6] M.-C. BAIETTO-DUBOURG, A. CHATEAUMINOIS et B. VILLECHAISE, In situ analysis and modeling of crack initiation and propagation within fretting contacts using polymer materials. *Tribology International, Special Issue*, 2003, vol. 36, pp. 109–119.
- [7] G.I. BARENBLATT, *The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture*. In H.L. Dryden, Th. Von Karman, *Advances in Applied Mechanics*, vol. 7. New York : Academic press, 1962.
- [8] R.S. BARSOUM, On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1976, vol. 10, pp. 25–37.
- [9] B. BARTHÉLÉMY, *Notions pratiques de mécanique de la rupture*. Paris : Eyrolles, 1980, 290 p.
- [10] C. BATHIAS et J.P. BAÏLON, *La fatigue des matériaux et des structures*. Paris : Hermès, 1997, 685 p.
- [11] T. BELYTSCHKO, W.K. LIU et B. MORAN, *Nonlinear finite elements for continua and structures*. Weinheim : Wiley, 2000, 650 p.

- [12] Y. BERTHIER, *Third body reality, consequence and use of the third body to solve a friction and and wear problem*. In G.W. Stachowiak, *Wear, materials, mechanisms and practice*. Chichester, England : Wiley editor, 2005. ISBN 0-470-01628-0.
- [13] D.E. BESKOS, *Boundary element methods in mechanics*. North-Holland : Elsevier Science Pub. Co., 1987. (Computational Methods in Mechanics, vol. 3; Mechanics and Mathematical Methods).
- [14] M. BONNET, *Equations intégrales et éléments frontières*. Paris : CNRS, 1995, 316 p.
- [15] V. BORDI-BOUSSOUAR. *Contribution à l'étude de la formation des dégradations de surface par fatigue de contact de roulement*. Thèse de doctorat, Villeurbanne : INSA-Lyon, 1998, 244 p.
- [16] P.-O. BOUCHARD. *Contribution à la modélisation numérique en mécanique de la rupture et structures multimatériaux*. Thèse de doctorat, Paris : Ecole Nationale Supérieure des Mines, 2000, 200 p.
- [17] H.D. BUI, *Mécanique de la rupture fragile*. Paris : Masson, 1978, 215 p.
- [18] J. CALCATERRA et S. NABOULSI, Design methodology to investigate contact fatigue damage in turbine engine hardware. *International Journal of Fatigue*, 2005, vol. 27, pp. 1131–1141.
- [19] L. CHAMPANEY, *Une nouvelle approche modulaire pour l'analyse d'assemblages de structures tridimensionnelles*. Cachan : Ecole Normale Supérieure de Cachan, Thèse de doctorat, 1996, 111 p.
- [20] A. CHATEAUMINOIS, M.-C. BAIETTO-DUBOURG, C. GAUTHIER et R. SCHIRRE, In situ analysis of the fragmentation of polystyrene films within sliding contacts. *Tribology International*, 2006, vol. 38, pp. 931–942.
- [21] M. COMNINOU, The interface crack with friction in the contact zone. *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, 1977, vol. 44, pp. 780–781.
- [22] T.T. DANG, *Étude de la fatigue de contact de roulement*. Rapport de DEA. Angoulême / IUT Angoulême, 2003.
- [23] P. DESTUYNDER, M. DJAOUA et S. LESCURE, Quelques remarques sur la mécanique de la rupture élastique. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 1983, vol. 2, n° 1, pp. 113–135.
- [24] H. D'HONDT, Etude du branchement des fissures de fatigue sous sollicitations bimodales non proportionnelles. influence de la cinétique de propagation du matériau. *Institut de Recherche de la sidérurgie française - IRSID*, Dec 1982, , n° PE 3459.
- [25] N. DOLBOW, N. MOËS et T. BELYTSCHKO, An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, vol. 190, pp. 6825–6846.
- [26] M.-C. DUBOURG. *Le contact unilatéral avec frottement le long de fissures de fatigue dans les liaisons mécanique*. Thèse de doctorat, INSA-Lyon, 1989.

- [27] M.-C. DUBOURG et V. LAMACK, A predictive rolling contact fatigue crack growth model : onset of branching, direction, and growth- role of dry and lubricated conditions on crack patterns. *ASME Journal of Tribology*, 2002, vol. 124, n° 4, pp. 680–688.
- [28] M.-C. DUBOURG et B. VILLECHAISE, Analysis of multiple cracks, part I : theory. *ASME Journal of Tribology*, 1992, vol. 114, pp. 455–461.
- [29] M.-C. DUBOURG et B. VILLECHAISE, Analysis of multiple cracks, part II : results. *ASME Journal of Tribology*, 1992, vol. 114, pp. 462–468.
- [30] M.-C. DUBOURG et B. VILLECHAISE, Stress intensity factors in a bent crack : a model. *European Journal of Mechanics and Solids*, 1992, vol. 11, n° 2, pp. 169–179.
- [31] G. DUVAUT et J.L. LIONS, *Les inéquations en mécanique et en physique*. Paris : Dunod, 1972, 387 p.
- [32] A. EKBERG, *Rolling contact fatigue of railway wheels towards tread life prediction through numerical modelling considering material imperfections, probabilistic loading and operational data*. Thesis for the degree of licentiate of engineering. Gothenburg, Sweden : Chalmers university of technology, Chalmers solid mechanics, 1997, 55 pp.
- [33] F. ERDOGAN et G.C. SIH, On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *Transaction of ASME, Journal of Basic Engineering*, 1963, vol. 85, pp. 519–527.
- [34] J.D. ESHELBY, The continuum theory of lattice defects. *Solid state physics*, 1956, vol. 3, pp. 79–144.
- [35] E. FERRIÉ. *Caractérisation et modélisation tridimensionnelles de la propagation des fissures de fatigue dans des alliages d'aluminium modèles*. Thèse de doctorat, Villeurbanne : INSA de Lyon, GEMPPM, 2006.
- [36] M. FORTIN et R. GLOWINSKI, *Les méthodes de lagrangien augmenté : applications à la résolution numériques de problèmes aux limites*. Paris : Dunod, 1982, 320 p.
- [37] D. FRANÇOIS, A. PINEAU et A. ZAOUI, *Comportement mécanique des matériaux. viscoplasticité, endommagement, mécanique de la rupture, mécanique du contact*. Paris : Hermès, 1995, 494 p.
- [38] M. GOSZ, J. DOLBOW et B. MORAN, Domain integral formulation for stress intensity factor computation along curved three-dimensional interface. *International Journal of Solids and Structures*, 1998, vol. 35, n° 15, pp. 1763–1783.
- [39] A.A. GRIFFITH, The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical transaction of royal society of London*, 1920, , n° 221, pp. 163–197.
- [40] M.M.I. HAMMOUDA, A.S. FAYED et H.E.M. SALLAM, Stress intensity factors of a shortly kinked slant central crack with frictional surfaces in uniaxially loaded plates. *International Journal of Fatigue*, 2003, vol. 25, pp. 283–298.
- [41] T.K. HELLEN, On the method of virtual crack extensions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1975, vol. 9, pp. 187–207.

- [42] D.A. HILLS, P.A. KELLY, D.N. DAI et A.M. KORSUNSKY, *Solution of crack problems - the distributed dislocation technique*. Dordrecht : Kluwer Academic press, 1996, 297 p.
- [43] F. HOURLIER, H. D'HONDT, M. TRUCHON et A. PINEAU, Fatigue crack path behavior under polymodal fatigue. *Institut de recherche de la sidérurgie française - IRSID*, Nov 1982, , n° RE 958.
- [44] T.J.R. HUGUES, *The finite element method. linear static and dynamic finite element analysis*. Mineola, N.Y. : Dover Publications, 1987, 682 p.
- [45] D. HULL, *Introduction to dislocations*. Pergamon, 1975.
- [46] L. HUMBERT. Formulation des effets tridimensionnels dans les plaques élastiques fissurées en mode I à partir de la méthode des éléments finis et de l'interférométrie. application à l'exploitation de la méthode des caustiques. Mémoire de DEA, Poitiers : Université de Poitiers, LMS, 2000.
- [47] G.R. IRWIN, Analysis of stresses and strains near the end of crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics Transactions*, 1957, vol. 24, pp. 361-364.
- [48] T. ITOH, T. NAKATA, M. SAKANE et M. OHNAMI, *Non proportional low cycle fatigue of 6061 aluminium alloy under 14 strain paths*. dans E. macha, T. kagoda, et W. bedkowski, *Multiaxial Fatigue and Fracture*. Oxford : Elsevier, 1999, pp. 41-54. ISBN 0-08-043336-7.
- [49] J.J. KALKER, Two algorithms for the contact problem in elasto statics. *Reports of the Department of Mathematics and Informatics, Delft*, 1982, vol. 82, n° 26.
- [50] J.J. KALKER, *Three-dimensional elastic bodies in rolling contact*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1990, 314 p.
- [51] R. LABBENS, *Introduction à la mécanique de la rupture*. Paris : Pluralis, 1980, 244 p.
- [52] R.C. LABBENS, A. PELLISIER-TANON et J. HELIOT, *Practical method for calculating stress-intensity factors through weight functions*. In *Mechanics of Crack Growth*. Special Technical Publication 590. USA : American Society for Testing and Materials, 1976, pp. 368-375.
- [53] P. LADEVÈZE, Notes : Sur une famille d'algorithmes en mécanique des structures. *Compte Rendu de l'Académie des Sciences de Paris*, 1985, vol. 300, n° 2, pp. 41-44.
- [54] P. LADEVÈZE, *Nonlinear computational structural mechanics*. New York : Springer, 1998, 232 p.
- [55] V. LAMACQ. *Amorçage et propagation de fissures de fatigue sous conditions de fretting*. Thèse de doctorat, Villeurbanne : INSA-Lyon, 1997, 252 p.
- [56] V. LAMACQ, M.-C. DUBOURG et B. VILLECHAISE, *Fretting fatigue crack growth analysis : experimental photoelastic method combined with numerical model*. 11th Biennial European Conference on Fracture - ECF 11, held in Poitiers - Futuroscope, France, 3-6 September, 1996.

- [57] J.B. LEBLOND, Basic results for elastic fracture mechanics with frictionless contact between the crack lips. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 2000, vol. 19, pp. 633–647.
- [58] J.B. LEBLOND, *Mécanique de la rupture fragile et ductile*. Paris : Hermès, 2003, 197 p.
- [59] K.S. LEE, J.T. JINN et Y.Y. EARMME, Finite element analysis of a subsurface crack on the interface of a coated material under a moving compressive load. *Wear*, 1992, vol. 155, pp. 117–136.
- [60] J. LEMAITRE, Extension de la notion de taux d'énergie de fissuration aux problèmes tridimensionnels et non linéaires. *Compte Rendu de l'Académie des Sciences de Paris*, 1976, vol. 282, pp. 157.
- [61] J. LEMAITRE et J.L. CHABOCHE, *Mécanique des matériaux solides*. Paris : Dunod, 2001, 544 p.
- [62] F.Z. LI, C.F. SHIH et A. NEEDLEMAN, A comparison of methods for calculating energy release rates. *Engineering Fracture Mechanics*, 1985, vol. 21, n° 2, pp. 405–421.
- [63] J.L. LIONS et G. STAMPACCHIA, Variational inequalities. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1967, vol. 20, pp. 493–519.
- [64] P. MASSIN, *Dirichlet-type boundary condition and contact problems with friction for lagrangian methods*. 5th International ESAFORM Conference on Material Forming, 2002, Apr., pp. 95-98.
- [65] J.M. MELENK et I. BABUSKA, The partition of unity finite element method : basic theory and applications. *Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, vol. 139, pp. 289–314.
- [66] S. MELLINGS, J. BAYNHAM et R.A. ADEY, Automatic crack growth prediction in rails with BEM. *Engineering Fracture Mechanics*, 2005, vol. 72, pp. 309–318.
- [67] P. MEYNAUD. *Prévision de la durée de vie d'un acier en fatigue de roulement, à partir de ses caractéristiques élastoplastiques et de celles de ses inclusions*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 1995.
- [68] H. MINNEBO, E. BÉCHET et N. MOËS, *Robust stress intensity factors evaluation for 3d fracture mechanics with X-FEM*. ECF 16, Alexandroupolis, Greece, 3-7 July 2006.
- [69] N. MOËS, J. DOLBOW et T. BELYTSCHKO, A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, vol. 46, pp. 131–150.
- [70] N. MOËS, A. GRAVOUIL et T. BELYTSCHKO, Non-planar 3d crack growth by the extended finite element and level sets - part I/II. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, vol. 53, n° 11, pp. 2549–2586.
- [71] B. MORAN et C.F. SHIH, Crack tip and associated domain integrals from momentum and energy balance. *Engineering Fracture Mechanics*, 1987, vol. 27, n° 6, pp. 615–642.

- [72] Y. MURAKAMI, *Stress intensity factors handbook*. Oxford : Pergamon press, 1987.
- [73] T. NAKAMURA, Three-dimensional stress fields of elastic interface cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 1991, vol. 58, pp. 939–946.
- [74] T. NAKAMURA et D.M. PARKS, Antisymmetrical 3-d stress field near the crack front of a thin elastic plate. *International Journal of Solids and Structures*, 1989, vol. 25, n° 12, pp. 1411–1426.
- [75] A. OTSUKA, K. MORI et T. MIYATA, The condition of fatigue crack growth in mixed mode condition. *Engineering Fracture Mechanics*, 1975, vol. 7, pp. 429–439.
- [76] A.C. PALMER et J.R. RICE, The growth of slip surfaces in the progressive failure of over consolidated clay. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A Mathem*, 1973, vol. 332, pp. 527–548.
- [77] P. PARIS et F. ERDOGAN, A critical analysis of crack propagation laws. *Journal of Basic Engineering, Transaction ASME*, 1963, vol. 85, n° D, pp. 528–534.
- [78] D.M. PARKS, A stiffness derivative finite element technique for determination of crack tip stress intensity factors. *International Journal of Fracture*, 1974, vol. 10, pp. 487–502.
- [79] P. PEYRE, E. de LOS RIOS, A. LEVERS, A. SOLLIER, L. BERTHE et R. FABBRO, *Amélioration de la résistance à la fissuration par fatigue de l'alliage 2024-t351 traité par choc-laser en impulsions brèves*. Papport Lulli. Palaiseau : Ecole Polytechnique, Laboratoire d'Utilisation des Lasers Intenses, 2000.
- [80] O.A. RADI, O.A. BABA et J.-C. GELIN, Treatment of the frictional contact via a lagrangian formulation. *Mathematical and Computer Modelling*, 1998, vol. 28, pp. 407–412.
- [81] J. RANNOU, A. GRAVOUIL et A. COMBESURE, A multigrid extended finite element method for elastic crack growth simulation. *Revue européenne de mécanique numérique (accepté)*, 2006.
- [82] M. RAOUS, *Chapitres 1, 4, 5, 12*. In Cours IPSI Modélisation mécanique et numérique du contact et du frottement, S. Cescotto - A. Curnier - A. Millard - M. Raous (Eds), Paris : Editions IPSI, 1996, 75 p.
- [83] M. RAOUS, *Formulation et résolution de problèmes de contact unilatéral avec frottement et adhésion, 4 chapitres*. in Modélisation mathématique et numérique des problèmes de contact et frottement, K.L. Johnson - J.M. Georges - M. Raous (Eds), Cours CEA-EDF-INRIA, rocquencourt INRIA Editions, Le Chesnay, 1999, pp. 43–121.
- [84] G. REBEL, K.C. PARK et C.A. FELIPPA, A contact formulation based on localized lagrange multipliers : formulation and application to two-dimensional problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, vol. 54, pp. 263–297.

- [85] J.R. RICE, A path independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 1968, vol. 35, pp. 379–386.
- [86] C.F. SHIH et R.J. ASARO, Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial interfaces : part I - Small scale yielding. *Journal of Applied Mechanics*, 1988, vol. 55, pp. 299–316.
- [87] C.F. SHIH, B. MORAN et T. NAKAMURA, Energy release rate along a three-dimensional crack front in a thermally stressed body. *International Journal of Fracture*, 1986, vol. 30, pp. 79–102.
- [88] G.C. SIH, *Handbook of stress intensity factors*. Institute of fracture and solid mechanics. Bethlehem, USA : Lehigh University, 1973.
- [89] G.C. SIH, Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems. *International Journal of Fracture*, 1974, vol. 10, n° 3, pp. 305–321.
- [90] J.C. SIMO et T.A. LAURSEN, An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Computers and Structures*, 1992, vol. 42, pp. 97–116.
- [91] N. SUKUMAR, D.L. CHOPP et B. MORAN, Extended finite element method and fast marching method for three-dimensional fatigue crack propagation. *Engineering Fracture Mechanics*, 2002, vol. 70, pp. 29–48.
- [92] N. SUKUMAR, N. MOËS, T. BELYTSCHKO et B. MORAN, Extended finite element method for three-dimensional crack modelling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000, vol. 48, pp. 1549–1570.
- [93] X.Z. SUO et A. COMBESURE, Further exploitations of pi-theta method : numerical illustration. *SMIRT 11 Tokyo (Japon)*, 1991, , n° B, pp. 291–296.
- [94] X.Z. SUO et A. COMBESURE, Double virtual crack extension method for crack growth stability assessment. *International Journal of Fracture*, 1992, vol. 57, pp. 127–150.
- [95] M. TRUCHON et M. AMESTOY, Etude théorique et expérimentale de la fissuration par fatigue sous sollicitations bi axiales. *Institut de recherche de la sidérurgie française - IRSID*, Nov 1981.
- [96] H.M. WESTERGAARD, Bearing pressures and cracks. *ASME, Journal of Applied Mechanics*, 1939, vol. 6, pp. 49–53.
- [97] J.F. YAU, S.S. WANG et H.T. CORTEN, A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 1980, vol. 47, pp. 335–341.
- [98] W.L. ZANG et P. GUDMUNDSON, Frictional contact problems of kinked cracks modelled by a boundary integral method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1991, vol. 31, pp. 427–446.
- [99] U. ZERBST, K. M"ADLER et H. HINTZE, Fracture mechanics in railway applications - An overview. *Engineering Fracture Mechanics*, 2005, vol. 72, pp. 163–194.