



# INSA

N° d'ordre NNT : 2020LYSEI099

**THESE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LYON**  
Opérée au sein de  
**L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON**

**Ecole Doctorale ED162**  
**Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique**

**Spécialité de doctorat :**  
Génie Mécanique

Soutenue publiquement le 16/11/2020, par :  
**Quentin THORET-BAUCHET**

---

**Simulations du comportement  
vibratoire de réducteurs d'entraînement  
pour machine-outil  
Applications à la détection et à  
l'identification de défauts**

---

Devant le jury composé de :

Nom, prénom grade/qualité établissement/entreprise **Président.e (à préciser après la soutenance)**

Paredes, Manuel  
Lafon, Pascal

Professeur, INSA de Toulouse  
Professeur, UTT de Troyes

Rapporteur  
Rapporteur

Thomas, Olivier

Professeur, ENSAM de Lille

Examineur

Velex, Philippe  
Guingand, Michèle  
Casanova, Pierre

Professeur, INSA de Lyon  
Maître de Conférences, INSA de Lyon  
Responsable Technique R&D, REDEX

Directeur de thèse  
Co-directrice de thèse  
Invité



**Département FEDORA – INSA Lyon - Ecoles Doctorales – Quinquennal 2016-2020**

<b>SIGLE</b>	<b>ECOLE DOCTORALE</b>	<b>NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE</b>
<b>CHIMIE</b>	<b>CHIMIE DE LYON</b> <a href="http://www.edchimie-lyon.fr">http://www.edchimie-lyon.fr</a> Sec. : Renée EL MELHEM Bât. Blaise PASCAL, 3e étage <a href="mailto:secretariat@edchimie-lyon.fr">secretariat@edchimie-lyon.fr</a> INSA : R. GOURDON	<b>M. Stéphane DANIELE</b> Institut de recherches sur la catalyse et l'environnement de Lyon IRCELYON-UMR 5256 Équipe CDFA 2 Avenue Albert EINSTEIN 69 626 Villeurbanne CEDEX <a href="mailto:directeur@edchimie-lyon.fr">directeur@edchimie-lyon.fr</a>
<b>E.E.A.</b>	<b>ÉLECTRONIQUE, ÉLECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</b> <a href="http://edeaa.ec-lyon.fr">http://edeaa.ec-lyon.fr</a> Sec. : M.C. HAVGOUDOUKIAN <a href="mailto:ecole-doctorale.eea@ec-lyon.fr">ecole-doctorale.eea@ec-lyon.fr</a>	<b>M. Gérard SCORLETTI</b> École Centrale de Lyon 36 Avenue Guy DE COLLONGUE 69 134 Écully Tél : 04.72.18.60.97 Fax 04.78.43.37.17 <a href="mailto:gerard.scorletti@ec-lyon.fr">gerard.scorletti@ec-lyon.fr</a>
<b>E2M2</b>	<b>ÉVOLUTION, ÉCOSYSTÈME, MICROBIOLOGIE, MODÉLISATION</b> <a href="http://e2m2.universite-lyon.fr">http://e2m2.universite-lyon.fr</a> Sec. : Sylvie ROBERJOT Bât. Atrium, UCB Lyon 1 Tél : 04.72.44.83.62 INSA : H. CHARLES <a href="mailto:secretariat.e2m2@univ-lyon1.fr">secretariat.e2m2@univ-lyon1.fr</a>	<b>M. Philippe NORMAND</b> UMR 5557 Lab. d'Ecologie Microbienne Université Claude Bernard Lyon 1 Bâtiment Mendel 43, boulevard du 11 Novembre 1918 69 622 Villeurbanne CEDEX <a href="mailto:philippe.normand@univ-lyon1.fr">philippe.normand@univ-lyon1.fr</a>
<b>EDISS</b>	<b>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTÉ</b> <a href="http://www.ediss-lyon.fr">http://www.ediss-lyon.fr</a> Sec. : Sylvie ROBERJOT Bât. Atrium, UCB Lyon 1 Tél : 04.72.44.83.62 INSA : M. LAGARDE <a href="mailto:secretariat.ediss@univ-lyon1.fr">secretariat.ediss@univ-lyon1.fr</a>	<b>Mme Sylvie RICARD-BLUM</b> Institut de Chimie et Biochimie Moléculaires et Supramoléculaires (ICBMS) - UMR 5246 CNRS - Université Lyon 1 Bâtiment Curien - 3ème étage Nord 43 Boulevard du 11 novembre 1918 69622 Villeurbanne Cedex Tel : +33(0)4 72 44 82 32 <a href="mailto:sylvie.ricard-blum@univ-lyon1.fr">sylvie.ricard-blum@univ-lyon1.fr</a>
<b>INFOMATHS</b>	<b>INFORMATIQUE ET MATHÉMATIQUES</b> <a href="http://edinfomaths.universite-lyon.fr">http://edinfomaths.universite-lyon.fr</a> Sec. : Renée EL MELHEM Bât. Blaise PASCAL, 3e étage Tél : 04.72.43.80.46 <a href="mailto:infomaths@univ-lyon1.fr">infomaths@univ-lyon1.fr</a>	<b>M. Hamamache KHEDDOUCI</b> Bât. Nautibus 43, Boulevard du 11 novembre 1918 69 622 Villeurbanne Cedex France Tel : 04.72.44.83.69 <a href="mailto:hamamache.kheddouci@univ-lyon1.fr">hamamache.kheddouci@univ-lyon1.fr</a>
<b>Matériaux</b>	<b>MATÉRIAUX DE LYON</b> <a href="http://ed34.universite-lyon.fr">http://ed34.universite-lyon.fr</a> Sec. : Stéphanie CAUVIN Tél : 04.72.43.71.70 Bât. Direction <a href="mailto:ed.materiaux@insa-lyon.fr">ed.materiaux@insa-lyon.fr</a>	<b>M. Jean-Yves BUFFIÈRE</b> INSA de Lyon MATEIS - Bât. Saint-Exupéry 7 Avenue Jean CAPELLE 69 621 Villeurbanne CEDEX Tél : 04.72.43.71.70 Fax : 04.72.43.85.28 <a href="mailto:jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr">jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr</a>
<b>MEGA</b>	<b>MÉCANIQUE, ÉNERGÉTIQUE, GÉNIE CIVIL, ACOUSTIQUE</b> <a href="http://edmega.universite-lyon.fr">http://edmega.universite-lyon.fr</a> Sec. : Stéphanie CAUVIN Tél : 04.72.43.71.70 Bât. Direction <a href="mailto:mega@insa-lyon.fr">mega@insa-lyon.fr</a>	<b>M. Jocelyn BONJOUR</b> INSA de Lyon Laboratoire CETHIL Bâtiment Sadi-Carnot 9, rue de la Physique 69 621 Villeurbanne CEDEX <a href="mailto:jocelyn.bonjour@insa-lyon.fr">jocelyn.bonjour@insa-lyon.fr</a>
<b>ScSo</b>	<b>ScSo*</b> <a href="http://ed483.univ-lyon2.fr">http://ed483.univ-lyon2.fr</a> Sec. : Véronique GUICHARD INSA : J.Y. TOUSSAINT Tél : 04.78.69.72.76 <a href="mailto:veronique.cervantes@univ-lyon2.fr">veronique.cervantes@univ-lyon2.fr</a>	<b>M. Christian MONTES</b> Université Lyon 2 86 Rue Pasteur 69 365 Lyon CEDEX 07 <a href="mailto:christian.montes@univ-lyon2.fr">christian.montes@univ-lyon2.fr</a>

\*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie



---

# REMERCIEMENTS

Ce travail est le fruit de la collaboration entre la société REDEX et le Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures (LaMCoS) de l'INSA de Lyon, sous la direction de Daniel Nelias, que je tiens tous à remercier pour m'avoir accueilli. Ce travail a été rendu possible grâce au soutien de l'Association Nationale pour la Recherche et la Technologie (ANRT) à travers une Convention Industrielle de Formation par la Recherche.

Je tiens avant tout à exprimer ma gratitude envers Philippe Vexex, Professeur à l'INSA de Lyon, et Michèle Guingand, Maître de conférences à l'INSA de Lyon, pour m'avoir accordé leur confiance, partagé leur expérience, et enfin pour leur patience au cours de ces travaux de thèse.

Je souhaite tout particulièrement remercier Pierre Casanova, responsable technique R&D chez REDEX, pour m'avoir offert l'opportunité de réaliser ces travaux de recherche, pour le soutien qu'il m'a offert et la confiance qu'il m'a accordée dans la réalisation de ce projet.

Je souhaite étendre ces remerciements à la totalité du personnel de REDEX, et plus particulièrement aux membres du bureau d'études Transmissions, Pauline Chailloux, Serge Martinelli, Jean-Philippe Mozziconacci, Thomas Patillaut, Morgane Royet et Fabrice Viallon, pour leur accueil et leur bonne humeur.

Je suis honoré de l'attention que Manuel Paredes, Professeur à l'INSA de Toulouse, et Pascal Lafon, Professeur à l'UTT de Troyes, ont portée à mon travail en tant que rapporteurs et membres du jury.

Mes remerciements s'adressent également à Olivier Thomas, Professeur à l'ENSAM de Lille, pour l'honneur qu'il me fait de faire partie de mon jury de thèse.

A mes compagnons de thèse, Cyril, Bilel, Bérengère, merci pour ces moments de détente que nous avons pu partager au cours de ces années. A mon compagnon de bureau tout particulièrement, mais également de labeur, de plaisanteries et de bêtises, merci Charly pour ces moments de bonheur qui ont indéniablement participé à la réussite de ce travail.

Enfin, je tiens à remercier ma famille et ma femme pour leur soutien indéfectible au travers des épreuves qu'a présentée cette thèse, et qui ont par leur bienveillance et leur patience contribué à l'aboutissement de ce travail.



---

# RESUME

Ces travaux de thèse sont le résultat de la collaboration entre la société REDEX et le Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures de l'INSA de Lyon. Ces travaux s'intéressent aux éléments de transmission de puissance du système de guidage d'une machine-outil, dont la conception va naturellement chercher à minimiser les erreurs de fabrication que la machine-outil pourrait générer.

Dans le cadre de cette étude, un modèle dynamique de transmission pour machine-outil a été développé, comprenant un couple d'engrenages spiroconiques et un train épicycloïdal, incorporant de nombreuses erreurs d'assemblages et de forme des différents engrenages du système. Ce modèle mathématique à paramètres concentrés exploite des éléments d'engrenages cylindriques, d'engrenages coniques, d'arbres et de paliers. Les arbres sont modélisés par des poutres de Timoshenko, et les éléments de paliers se basent sur une linéarisation des relations effort-déplacement de Palmgren. Les lignes de contact entre engrenages cylindriques sont discrétisées en segments élémentaires, auxquels sont attribués une raideur élémentaire et un écart normal initial. En adoptant le même formalisme, les flancs de dent des engrenages spiroconiques sont discrétisés en cellules élémentaires auxquelles sont également attribués une raideur élémentaire et un écart normal initial. Les écarts normaux initiaux des éléments d'engrenages sont mis à jour à chaque pas de temps pour prendre en compte les nouvelles positions angulaires relatives des composants et les potentielles erreurs de forme et d'assemblage. Les équations du mouvement sont résolues pas à pas dans le temps à l'aide d'un schéma de Newmark, couplé à un algorithme de gestion des contacts venant s'assurer de la bonne détermination des efforts de contact et des raideurs élémentaires des éléments d'engrenages. Les raideurs élémentaires des engrenages cylindriques sont déterminées suivant la méthode de Weber et Banaschek afin de prendre en compte la contribution des déformations de contact, de la flexion des dentures et de la fondation. Les raideurs élémentaires des engrenages spiroconiques sont déterminées à l'aide d'un élément de coque dont la géométrie a été ajustée, afin de rendre compte de la flexion de la dent, ainsi qu'à l'aide des théories de Boussinesq pour obtenir la contribution des déformations de contact. Un algorithme de calcul de distance de séparation tridimensionnel de type point sur plan est implémenté afin d'obtenir les écarts normaux initiaux des engrenages spiroconiques.

Différents éléments de validation du modèle sont ensuite présentés afin de juger de l'exactitude du modèle et de ses limitations sur certains aspects de modélisation. La modélisation du train épicycloïdal et des éléments d'engrenages cylindriques est éprouvée en comparant différents résultats à des mesures issues de la littérature. Des mesures de portée à vide sont présentées sur un couple d'engrenages spiroconiques afin d'apprécier la justesse de la méthode de résolution du contact appliquée aux engrenages spiroconiques ; une comparaison aux résultats de la théorie de Hertz ainsi qu'à un modèle par éléments finis est également proposée afin de valider la méthode de détermination des raideurs élémentaires.

Enfin, une étude du comportement dynamique du train épicycloïdal seul, du couple d'engrenages spiroconiques et du système complet est proposée, s'intéressant aux couplages existants entre ces deux éléments de la transmission, ainsi qu'à l'impact de différentes erreurs d'assemblages individuelles sur les erreurs de transmission et le coefficient de surcharge dynamique. Pour une même amplitude d'erreur, différents niveaux de criticité sont ainsi mis en valeur selon la nature de l'erreur et le mobile impacté.



---

# ABSTRACT

This research work has been conducted at the Contact and Structural Mechanics Laboratory (LaMCoS) of INSA Lyon, in collaboration with REDEX. The very nature of machine-tools is to answer a need for automation and reliability of the manufacturing process of mechanical parts. The design stage of a machine-tool will therefore seek to minimise the manufacturing errors that the machine-tool could generate, in particular through the power transmission elements of the system guiding the relative displacements of the tool and the machined part. This work focuses on such power transmission elements.

The present work introduces a dynamic model for geared machine-tool transmissions, comprising a pair of spiral bevel gears and an epicyclic gear train, and incorporating numerous shape and assembly errors of the various gears and rotating bodies of the system. This mathematical model adopts a lumped parameters approach, and employs specific elements of cylindrical gears and bevel gears, as well as shafts and bearings elements. The shafts are modelled using Timoshenko beams, and the bearing elements are based on a linearization of Palmgren force-displacement relations. The lines of contact between cylindrical gears are discretised into elemental cells, which are all attributed a local time-varying mesh stiffness element and an initial equivalent normal separation accounting for tooth flank faults and modifications. Using the same formalism, the tooth flanks of spiral bevel gears are discretised into elemental areas to which a local time-varying mesh stiffness element and an initial equivalent normal separation are also assigned. The initial equivalent normal separations of the gear elements are updated at each time step to account for the new relative angular positions of the components. The equations of motion are solved step-by-step over time using a Newmark integration scheme coupled with a normal contact algorithm to ensure that the contact efforts and the elemental mesh stiffness functions of the various gear elements are consistent. The elemental mesh stiffness functions of cylindrical gears are determined using the Weber and Banaschek approach to account for the contribution of contact deformation, tooth bending and foundation displacements. The elemental mesh stiffness function of spiral bevel gears is determined using a shell element, whose geometry has been adjusted, to account for tooth bending, and Boussinesq contact theory to account for the contribution of contact deformation.

Various experimental and theoretical results are then presented and confronted with the model results to assess the accuracy and limitations of certain aspects of the model. The epicyclic gear train model and cylindrical gear elements results are compared with different measurements from the literature. Measurements of contact area are presented on a pair of spiral bevel gears in order to assess the accuracy of the contact resolution method; comparisons with some results of Hertz theory as well as with a finite element model are also proposed in order to validate the elemental stiffness functions calculation method.

Finally, a study of the dynamic behaviour of the epicyclic gear train, of the spiral bevel gear pair and of the complete system is proposed, focusing on the couplings between these two elements of the transmission, as well as on the impact of different individual assembly errors on the transmission errors and the dynamic overload coefficients. Different levels of criticality are thus highlighted depending on the nature of the error and the rotating body carrying the error.



---

# TABLE DES MATIERES

<b>REMERCIEMENTS.....</b>	<b>5</b>
<b>RESUME.....</b>	<b>7</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>9</b>
<b>TABLE DES MATIERES .....</b>	<b>11</b>
<b>LISTE DES FIGURES .....</b>	<b>13</b>
<b>LISTE DES TABLEAUX .....</b>	<b>17</b>
<b>NOMENCLATURE.....</b>	<b>19</b>
<b>INTRODUCTION GENERALE .....</b>	<b>23</b>
<b>CHAPITRE 1 DYNAMIQUE DES ENGRENAGES : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE.....</b>	<b>25</b>
1.1 INTRODUCTION SUR LA THEORIE DES ENGRENEMENTS.....	28
1.2 TRANSMISSIONS PAR ENGRENAGES ET MACHINES-OUTILS.....	30
1.2.1 <i>Introduction historique</i> .....	30
1.2.2 <i>Conception des transmissions</i> .....	31
1.3 SOURCES D'EXCITATION ET ENGRENEMENTS.....	35
1.3.1 <i>Train épicycloïdal</i> .....	35
1.3.2 <i>Engrenage spiroconique</i> .....	39
1.4 MODELES DYNAMIQUES D'ENGRENAGES .....	43
1.4.1 <i>Modèles de trains épicycloïdaux</i> .....	43
1.4.2 <i>Modèles d'engrenages spiroconiques</i> .....	46
1.5 CONCLUSION .....	49
1.5.1 <i>Stratégies de modélisation</i> .....	49
1.5.2 <i>Objectifs de la thèse</i> .....	49
<b>CHAPITRE 2 MODELE.....</b>	<b>51</b>
2.1 ELEMENTS D'ENGRENAGE.....	54
2.1.1 <i>Expression des efforts d'engrènement</i> .....	54
2.1.2 <i>Train épicycloïdal</i> .....	56
2.1.3 <i>Engrenage spiroconique</i> .....	66
2.1.4 <i>Erreurs de transmission</i> .....	77
2.1.5 <i>Cinématique de corps rigides</i> .....	78
2.1.6 <i>Conclusion</i> .....	79
2.2 ÉLÉMENTS DE PALIER .....	80
2.2.1 <i>Roulements à billes</i> .....	81
2.2.2 <i>Roulements à rouleaux coniques</i> .....	81
2.3 AUTRES ELEMENTS ET STRUCTURES DEFORMABLES .....	83
2.3.1 <i>Éléments d'arbre</i> .....	83
2.3.2 <i>Matrices de raideurs additionnelles</i> .....	84

2.4	MATRICES GYROSCOPIQUE, CENTRIFUGE, DE MASSE ET TERME EXCITATEUR .....	85
2.5	AMORTISSEMENT .....	87
2.6	ARCHITECTURE DU MODELE ET RESOLUTION DES EQUATIONS DU MOUVEMENT.....	88
2.7	CONCLUSION .....	92
<b>CHAPITRE 3</b>	<b>ELEMENTS DE VALIDATION .....</b>	<b>93</b>
3.1	MODELE DE SPIROCONIQUES .....	96
3.1.1	<i>Caractérisation du contact par la théorie de Hertz .....</i>	<i>96</i>
3.1.2	<i>Validation du comportement en flexion des dentures par un modèle par éléments finis.....</i>	<i>99</i>
3.1.3	<i>Validation expérimentale par mesure de portée.....</i>	<i>103</i>
3.2	TRAIN EPICYCLOÏDAL.....	106
3.2.1	<i>Validation expérimentale par mesure des accélérations radiales de la couronne .....</i>	<i>106</i>
3.2.2	<i>Caractérisation du partage de charges entre satellites en présence d'erreurs d'assemblage.....</i>	<i>112</i>
3.3	CONCLUSION .....	115
<b>CHAPITRE 4</b>	<b>CARACTERISATION VIBRATOIRE D'UN REDUCTEUR.....</b>	<b>117</b>
4.1	COUPLE SPIROCONIQUE .....	120
4.1.1	<i>Etude modale .....</i>	<i>120</i>
4.1.2	<i>Comportement dynamique.....</i>	<i>124</i>
4.1.3	<i>Influence des erreurs d'assemblage .....</i>	<i>127</i>
4.2	TRAIN EPICYCLOÏDAL.....	132
4.2.1	<i>Etude modale .....</i>	<i>132</i>
4.2.2	<i>Comportement dynamique.....</i>	<i>140</i>
4.2.3	<i>Influence des erreurs d'assemblage .....</i>	<i>142</i>
4.2.4	<i>Influence et détection des erreurs d'écaillage .....</i>	<i>145</i>
4.3	SYSTEME COMPLET .....	152
4.3.1	<i>Etude modale .....</i>	<i>152</i>
4.3.2	<i>Comportement dynamique.....</i>	<i>158</i>
4.3.3	<i>Influence des erreurs d'assemblage .....</i>	<i>164</i>
4.4	CONCLUSION .....	167
	<b>CONCLUSION GENERALE .....</b>	<b>169</b>
	<b>REFERENCES .....</b>	<b>171</b>
	<b>ANNEXE 1.....</b>	<b>179</b>

---

# LISTE DES FIGURES

Figure 1-1 Plan d'action et profils théoriques d'engrenages cylindriques .....	28
Figure 1-2 Représentation graphique des rapports de conduite et de recouvrement, $\varepsilon\alpha$ et $\varepsilon\beta$ respectivement, dans le plan d'action.....	29
Figure 1-3 Illustration d'un tour à bois datée de 1483, employant un guidage mécanique de l'outil de filetage [9] .....	30
Figure 1-4 Exemple de transmission pour machine-outil .....	31
Figure 1-5 Représentation d'un train épicycloïdal [10].....	32
Figure 1-6 Exemple de double réducteur avec renvois d'angle et précharge mécanique.....	33
Figure 1-7 Paramètres géométriques de la formulation de Weber .....	37
Figure 1-8 Représentation schématique des erreurs d'assemblage des engrenages cylindriques a) erreur de position b) erreur d'excentration c) erreur de désalignement d) erreur de désaxage.....	38
Figure 1-9 Exemple d'engrenage conique à denture droite, d'engrenage spiroconique et d'engrenage hypoïde [26].....	39
Figure 1-10 Géométrie de l'élément de coque développé par Kolivand et Kahraman [34].....	40
Figure 1-11 Modélisation par éléments finis 3d d'un couple d'engrenages cycloïdes par Ding <i>et. al.</i> [38].....	40
Figure 1-12 Représentation schématique des erreurs de position des engrenages coniques .....	41
Figure 1-13 Distances de correction et portées résultantes de l'application d'une correction a) longitudinale b) de profil c) du flanc en vrille [39] .....	42
Figure 1-14 Modèle à paramètres concentrés de Cunliffe <i>et. al.</i> [47] .....	44
Figure 1-15 Représentation d'un élément d'engrenage et de son plan de base [62] .....	45
Figure 1-16 Modèle de transmission d'hélicoptère de Astridge et Salzer [100] .....	46
Figure 1-17 Modèle à paramètres concentrés de Peng [109] .....	47
Figure 2-1 Définition des zones d'action des plans de base des différents engrènements d'un train épicycloïdal .....	57
Figure 2-2 Représentation d'une ligne de contact dans le plan de base d'un engrènement extérieur.....	58
Figure 2-3 Représentation d'une ligne de contact dans le plan de base d'un engrènement intérieur .....	58
Figure 2-4 Représentation schématique du modèle de couronne flexible .....	61
Figure 2-5 Représentation des erreurs d'assemblage d'un engrenage cylindrique.....	62
Figure 2-6 Représentation de flancs d'engrenages cylindriques théoriques (en bleu) et corrigés (en gris) avec un bombé longitudinal symétrique ou une correction de profil quadratique asymétrique.....	65
Figure 2-7 Représentation des points d'un flanc d'une dent sur son cône primitif, total de 225 points.....	67
Figure 2-8 Représentation de chacun des flancs d'une dent, ainsi que l'approximation par une surface cylindrique de la fibre neutre, dans le repère cartésien $Rt$ .....	68
Figure 2-9 Représentation d'un nouvel ensemble de points d'un flanc d'une dent sur son cône primitif, total de 2500 points.....	69
Figure 2-10 Représentation des surfaces de denture et des cônes primitifs d'un pignon (en bleu) et d'une roue (en rouge) conique présentant un angle entre axes de $90^\circ$ , dans le repère commun $RI0$ , pour les deux sens de rotation .....	70
Figure 2-11 Représentation des erreurs d'assemblage d'un engrenage spiroconique .....	72

Figure 2-12 Exemple de déplacement a) de contact et b) de flexion des centres des surfaces élémentaires pour un effort normal de 100N répartis sur la surface élémentaire centrale de la dent.....	76
Figure 2-13 Exemple de déplacement a) de contact et b) de flexion des centres des surfaces élémentaires pour un effort normal total de 100N répartis de manière égale sur 400 surfaces élémentaires au centre de la dent .....	77
Figure 2-14 Paramètres géométriques des roulements à billes.....	81
Figure 2-15 Paramètres géométriques des roulements à rouleaux coniques .....	82
Figure 2-16 Degrés de liberté d'un élément de poutre à deux nœuds.....	84
Figure 2-17 Représentation du modèle complet .....	88
Figure 2-18 Illustration des constituants du système complet ■ Paliers - ■ Arbres - ■/■ Engrenages - ■ Porte-satellites (indéformable) .....	89
Figure 2-19 Illustration du montage des satellites sur le porte-satellites et des repères d'expression des degrés de liberté des satellites ◆ Nœuds - ■ Arbres - ^ Paliers - ■ Satellites - ■ Porte-satellites (indéformable) .....	90
Figure 2-20 Illustration du montage des arbres traversant et intermédiaire, et des repères d'expression des degrés de liberté du pignon spiroconique, de la roue spiroconique et du planétaire ◆ Nœuds - ■ Arbres - ^ Paliers - ■/■ Engrenages.....	90
Figure 2-21 Procédure de résolution.....	91
Figure 3-1 Représentation d'un contact hertzien.....	97
Figure 3-2 Pressions de contact obtenues par le modèle sur le flanc du pignon pour a) un couple de 20Nm b) un couple de 200Nm sur le pignon.....	99
Figure 3-3 Géométrie de la dent dans le repère $Rtc$ , avec ■ représentant les points de mesure sur la fibre neutre, aux intersections avec les sections selon $e\theta$ et $zt$ .....	100
Figure 3-4 Maillage par éléments finis tridimensionnels de la dent du pignon spiroconique ....	100
Figure 3-5 Comparaison des résultats de déflexion normale (en m) du modèle de coque et du modèle par éléments finis aux points de mesure pour le premier cas de chargement.....	101
Figure 3-6 Comparaison des résultats de déflexion normale (en m) du modèle de coque et du modèle par éléments finis aux points de mesure pour le deuxième cas de chargement ....	101
Figure 3-7 Comparaison des résultats de déflexion normale (en m) du modèle de coque et du modèle par éléments finis aux points de mesure pour le troisième cas de chargement.....	102
Figure 3-8 Comparaison des résultats de déflexion normale (en m) du modèle de coque et du modèle par éléments finis aux points de mesure pour le quatrième cas de chargement ....	102
Figure 3-9 Comparaison de la mesure de portée avec la pression de contact maximale obtenue par simulation, pour la configuration 1 .....	103
Figure 3-10 Comparaison de la mesure de portée avec la pression de contact maximale obtenue par simulation, pour la configuration 2 .....	104
Figure 3-11 Différence de position selon $er$ , dans le repère local cylindrique $Rtc$ , entre points mesurés sur le flanc de denture et points approximés pour le pignon spiroconique .....	105
Figure 3-12 Différence de position selon $er$ , dans le repère local cylindrique $Rtc$ , entre points mesurés sur le flanc de denture et points approximés pour la roue spiroconique .....	105
Figure 3-13 Spectre des accélérations radiales de la couronne (a) mesurées [124] et (b) obtenues par simulation sur la dent n°6 de la couronne, pour un couple d'entrée de 500Nm et une vitesse de rotation en entrée de 400rpm .....	107
Figure 3-14 Spectre des accélérations radiales de la couronne (a) mesurées [124] et (b) obtenues par simulation sur la dent n°6 de la couronne, pour un couple d'entrée de 400Nm et une vitesse de rotation en entrée de 500rpm .....	108
Figure 3-15 Spectre des accélérations radiales de la couronne (a) mesurées [80] et (b) obtenues par simulation sur la dent n°6 de la couronne, pour un couple d'entrée de 400Nm et une vitesse de rotation en entrée de 500rpm .....	109

Figure 3-16 Spectre des accélérations radiales de la couronne (a) mesurées [124], (b) obtenues par simulation, relevées sur la dent n°6 de la couronne, pour un couple d'entrée de 400Nm et une vitesse de rotation en entrée de 500rpm .....	111
Figure 3-17 Facteurs de partage de charge entre satellites <i>Lpi</i> pour différentes erreurs de position du satellite no1 a) mesurés [12] et b) obtenus par simulation pour un couple d'entrée de 600Nm et une vitesse de rotation en entrée de 500rpm.....	113
Figure 3-18 Facteurs de partage de charge entre satellites <i>Lpi</i> pour différentes erreurs de position du satellite no1 a) mesurés [12] et b) obtenus par simulation pour un couple d'entrée de 600Nm et une vitesse de rotation en entrée de 500rpm.....	113
Figure 3-19 Facteurs de partage de charge entre satellites <i>Lpi</i> pour différentes erreurs de position du satellite no1 a) mesurés [12] et b) obtenus par simulation pour un couple d'entrée de 600Nm et une vitesse de rotation en entrée de 500rpm.....	114
Figure 4-1 Architecture du modèle sans train épicycloïdal .....	120
Figure 4-2 Déformées modales du premier mode des sens de rotation a) horaire et b) trigonométrique. Légende : $\circ$ - position nominale des nœuds, + - position déformée des nœuds, i : nœud d'entrée et du premier roulement de l'arbre traversant, pbg : nœud du pignon spiroconique, ie : nœud du second roulement de l'arbre traversant, wbg : nœud de la roue spiroconique, ib1, ib2 : nœuds des roulements de l'arbre de sortie, o : nœud de sortie .....	122
Figure 4-3 Déformées modales a) du mode n°7 en sens de rotation horaire, b) du mode n°6 en sens de rotation trigonométrique, c) du mode n°8 en sens de rotation horaire, d) du mode n°8 en sens de rotation trigonométrique, une légende détaillée de cette représentation est donnée en figure 4-2 .....	124
Figure 4-4 Evolution du coefficient de surcharge dynamique <i>DC</i> dans le sens de rotation a) horaire et b) trigonométrique.....	125
Figure 4-5 Evolution du coefficient d'erreurs de transmission <i>TEC</i> dans le sens de rotation a) horaire et b) trigonométrique, pour le système global (erreurs de transmission prises entre les nœuds d'entrée et de sortie) et pour l'engrènement uniquement (erreurs de transmission prises entre les nœuds du pignon et de la roue spiroconique uniquement). 125	
Figure 4-6 Répartition des pressions de contact (en Pascal) sur le flanc de denture du pignon spiroconique à a) 100rpm et b) 7800rpm en sens de rotation trigonométrique.....	127
Figure 4-7 Architecture du modèle sans couple d'engrenages spiroconique.....	132
Figure 4-8 Déformées modales a) du mode 10 en sens de rotation horaire et b) du mode 8 en sens de rotation trigonométrique. Légende : $\circ$ - position nominale des nœuds, + - position déformée des nœuds, i : nœud d'entrée, ib1, ib2 : nœuds des roulements de l'arbre d'entrée, c / s : nœuds du porte-satellites et du planétaire (deux nœuds différents mais géométriquement superposés), ob1, ob2 : nœuds des roulements de l'arbre de sortie, o : nœud de sortie, p1, p2, p3 : nœuds des satellites .....	138
Figure 4-9 Déformées modales du mode 25 pour le sens de rotation a) horaire et b) trigonométrique, une légende détaillée de cette représentation est donnée en figure 4-8	139
Figure 4-10 Déformées modales du mode 28 pour le sens de rotation a) horaire et b) trigonométrique, une légende détaillée de cette représentation est donnée en figure 4-8	139
Figure 4-11 Evolution du coefficient de surcharge dynamique <i>DC</i> dans le sens de rotation a) horaire et b) trigonométrique, pour les engrènements extérieurs (planétaire/satellites) et les engrènements extérieurs (satellites/couronne) .....	140
Figure 4-12 Evolution du coefficient d'erreurs de transmission <i>TEC</i> dans le sens de rotation a) horaire et b) trigonométrique, pour le système global (erreurs de transmission prises entre les nœuds d'entrée et de sortie) et pour l'engrènement uniquement (erreurs de transmission prises entre les nœuds du planétaire et du porte-satellites uniquement) .....	141
Figure 4-13 Géométrie du défaut d'écaillage étudié .....	146

Figure 4-14 Spectre des erreurs de transmission globales d'une configuration de référence sans défaut.....	147
Figure 4-15 Spectres des erreurs de transmission globales des configurations a), b), c) et d) ..	148
Figure 4-16 Cepstre des accélérations radiales de la couronne d'une configuration de référence sans défaut .....	149
Figure 4-17 Cepstres des accélérations radiales de la couronne des configurations a), b), c) et d) .....	149
Figure 4-18 Cepstres des accélérations radiales de la couronne des configurations a), b), c) et d) à la quérence d'apparition du défaut (- - Quérence d'apparition du défaut).....	150
Figure 4-19 Amplitude ( $m/s^2$ ) de la quérence d'apparition du défaut (cas a) et b) : $q=36$ , cas d) : $q=8$ ) en fonction de la position angulaire sur la couronne du point de calcul des accélérations radiales ( $^\circ$ ) .....	151
Figure 4-20 Déformées modales du mode 5 en sens de rotation a) horaire et b) trigonométrique. Légende : $\circ$ - position nominale des nœuds, + - position déformée des nœuds, i : nœud d'entrée et du premier roulement de l'arbre traversant, pbg : nœud du pignon spiroconique, ie : nœud du second roulement de l'arbre traversant, wbg : nœud de la roue spiroconique, ib1, ib2 : nœuds des roulements de l'arbre intermédiaire, c / s : nœuds du porte-satellites et du planétaire (deux nœuds différents mais géométriquement superposés), ob1, ob2 : nœuds des roulements de l'arbre de sortie, o : nœud de sortie, p1, p2, p3 : nœuds des satellites..	156
Figure 4-21 Déformées modales du mode a) 18 en sens de rotation horaire et b) 14 en sens de rotation trigonométrique, faisant intervenir des comportements de modes de type R-A et de type T-T simultanément. Une légende détaillée de cette représentation est donnée en figure 4-20 .....	157
Figure 4-22 Déformées modales a) du mode 34 en sens de rotation horaire et b) du mode 36 en sens de rotation trigonométrique, de types PR. Une légende détaillée de cette représentation est donnée en figure 4-20 .....	157
Figure 4-23 Déformées modales du mode 23 en sens de rotation a) horaire et b) trigonométrique, une légende détaillée de cette représentation est donnée en figure 4-20 .....	158
Figure 4-24 Evolution du coefficient de surcharge dynamique $DC$ dans le sens de rotation a) horaire et b) trigonométrique, pour les engrènements extérieurs (planétaire/satellites) et les engrènements extérieurs (satellites/couronne) du train épicycloïdal, et l'engrènement du couple d'engrenages spiroconiques .....	159
Figure 4-25 Evolution du coefficient d'erreurs de transmission $TEC$ dans le sens de rotation a) horaire et b) trigonométrique, pour le système global, pour les engrènements du train épicycloïdal uniquement et pour l'engrènement du couple d'engrenages spiroconiques ..	161
Figure 4-26 Répartition des pressions de contact (en Pascal) sur le flanc de denture du pignon spiroconique à a) 100rpm, b) 2500rpm, c) 3300rpm, d) 4400rpm et e) 5600rpm en sens de rotation trigonométrique.....	163

---

# LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1-1 Coefficients des déformations de fondation.....	36
Tableau 3-1 Comparaison entre les résultats de la théorie de Hertz et du modèle .....	98
Tableau 3-2 Configurations des mesures de portée.....	103
Tableau 3-3 Paramètres de denture [124] .....	106
Tableau 4-1 Paramètres de denture du couple d'engrenages spiroconique.....	120
Tableau 4-2 Fréquences et pourcentages d'énergies modales des modes propres du couple d'engrenages spiroconiques seul en sens de rotation trigonométrique .....	121
Tableau 4-3 Fréquences et pourcentages d'énergies modales des modes propres du système en sens de rotation horaire .....	122
Tableau 4-4 Description des modes propres du système .....	123
Tableau 4-5 Influence des erreurs de position axiale, des erreurs d'hypoïde et des erreurs d'excentration sur les erreurs de transmission et les efforts d'engrènement – sens de rotation horaire.....	128
Tableau 4-6 Influence des erreurs de position axiale, des erreurs d'hypoïde et des erreurs d'excentration sur les erreurs de transmission et les efforts d'engrènement – sens de rotation trigonométrique.....	129
Tableau 4-7 Influence des erreurs de désalignement et de désaxage – sens de rotation horaire .....	130
Tableau 4-8 Influence des erreurs de désalignement et de désaxage – sens de rotation trigonométrique.....	130
Tableau 4-9 Paramètres de denture du train épicycloïdal .....	132
Tableau 4-10 Fréquences et pourcentages d'énergies modales des modes propres du système en sens de rotation trigonométrique .....	134
Tableau 4-11 Fréquences et pourcentages d'énergies modales des modes propres du système en sens de rotation horaire .....	135
Tableau 4-12 classification des modes propres du système sans couple d'engrenages spiroconiques.....	137
Tableau 4-13 Influence des erreurs de position et d'excentration sur les erreurs de transmission et les efforts d'engrènement – sens de rotation horaire .....	142
Tableau 4-14 Influence des erreurs de position et d'excentration sur les erreurs de transmission et les efforts d'engrènement – sens de rotation trigonométrique .....	143
Tableau 4-15 Influence des erreurs de désalignement et de désaxage sur les erreurs de transmission et les efforts d'engrènement – sens de rotation horaire .....	144
Tableau 4-16 Influence des erreurs de désalignement et de désaxage sur les erreurs de transmission et les efforts d'engrènement – sens de rotation trigonométrique .....	145
Tableau 4-17 Paramètres de denture du train épicycloïdal pour l'étude des erreurs d'écaillage .....	145
Tableau 4-18 Position du défaut d'écaillage dans différentes configurations.....	146
Tableau 4-19 Fréquence d'apparition du défaut dans les erreurs de transmission globales .....	146
Tableau 4-20 Quéfrencce d'apparition du défaut dans les accélérations radiales de la couronne .....	150
Tableau 4-21 Fréquences et pourcentages d'énergies modales des modes propres du système complet en sens de rotation horaire .....	153
Tableau 4-22 Fréquences et pourcentages d'énergies modales des modes propres du système complet en sens de rotation trigonométrique.....	154

Tableau 4-23 Influence des erreurs de position axiale, des erreurs d'hypoïde et des erreurs d'excentration sur les erreurs de transmission et les efforts d'engrènement du système complet – sens de rotation horaire .....	164
Tableau 4-24 Influence des erreurs de position axiale, des erreurs d'hypoïde et des erreurs d'excentration sur les erreurs de transmission et les efforts d'engrènement du système complet – sens de rotation trigonométrique .....	165
Tableau 4-25 Influence des erreurs de désalignement et de désaxage sur les erreurs de transmission et les efforts d'engrènement du système complet – sens de rotation horaire .....	166
Tableau 4-26 Influence des erreurs de désalignement et de désaxage sur les erreurs de transmission et les efforts d'engrènement du système complet – sens de rotation trigonométrique.....	166

# NOMENCLATURE

Repères	
$R_{I0}$	= $(x_{I0} y_{I0} z_{I0})$ repère lié à la couronne, fixe dans le référentiel inertiel, dont l'axe $z_{I0}$ est l'axe de rotation du train épicycloïdal
$R_{I1}$	= $(x_{I1} y_{I1} z_{I1})$ repère lié à la couronne, fixe dans le référentiel inertiel, dont l'axe $z_{I1}$ est l'axe de rotation de l'arbre traversant de l'engrenage spiroconique
$R_j$	= $(x_j y_j z_{I0})$ repère lié au porte-satellites, dont l'axe $x_j$ passe par le centre du planétaire et du satellite n <sup>o</sup> $j$
$R_l$	= $(x_l y_l z_l)$ repère lié au pignon ou à la roue conique
$R_t$	= $(x_t y_t z_t)$ repère cartésien local à une dent du pignon ou de la roue conique
$R_{tc}$	= $(e_r e_\theta z_t)$ repère cylindrique local à une dent du pignon ou de la roue conique
Général	
$d$	Distance de séparation
$E$	Module d'Young
$ec$	Amplitude de l'erreur d'excentration
$ex, ey$	Amplitudes des erreurs de positionnement
$e\xi$	Amplitude de l'erreur de désaxage
$e\phi, e\psi$	Amplitudes des erreurs de désalignement
$F_b$	Effort au palier
$G$	Module de Coulomb
$I_t, I_G$	Moment quadratique transverse et polaire respectivement
$J_t, J_G$	Moment d'inertie transverse et polaire respectivement
$k_m$	Raideur associée à la surface de contact élémentaire n <sup>o</sup> $m$
$M$	Point de contact potentiel
$M_m$	Point central de la surface de contact élémentaire n <sup>o</sup> $m$
$m$	Masse d'un mobile
$m_n$	Module normal
$N_m$	Nombre de surfaces de contact élémentaires par dent
$N_t$	Nombre de dents potentielles en contact
$n_c$	= $(n_x, n_y, n_z)$ normale au contact
$O$	Centre de rotation
$q$	= $(x, y, z, \phi, \psi, \vartheta)$ vecteur des degrés de liberté d'un ou de plusieurs nœuds, au nombre de six par nœud

$(x, y, z)$	Coordonnées cartésiennes d'un point
$(r, \theta, z)$	Coordonnées cylindriques d'un point
$\mathbf{v}$	Vecteur structurel d'engrènement
$Z$	Nombre de dents
$\alpha_R, \beta_R$	Coefficients d'amortissement de Rayleigh
$\Delta$	Écrasement au contact
$\delta$	Distance de rapprochement élastique
$\delta_e$	Distance de séparation initiale
$\varepsilon$	Sens de rotation de l'arbre de sortie, +1 pour une rotation dans le sens horaire de l'arbre intermédiaire, -1 pour une rotation dans le sens trigonométrique de l'arbre intermédiaire
$\varepsilon_t$	Rapport de conduite total
$\lambda_0$	Angle de rotation de corps rigide dans le repère lié au référentiel inertiel
$\nu$	Coefficient de Poisson
$\Omega^0, \Omega^1$	Vitesse de rotation de corps rigide dans le repère fixe ( $R_{I1}$ pour le pignon conique, $R_{I0}$ sinon) et le repère $R_1$ respectivement
Train épicycloïdal	
$N_n$	Nœud lié à la dent de la couronne n <sup>o</sup> n
$N_p$	Nombre de satellites du train épicycloïdal
$p$	Position du centre d'une ligne de contact le long du plan d'action
$p_{bt}$	Pas de base apparent
$R_c$	Rayon d'entraxe du porte-satellites
$r_b$	Rayon de base
$X_{N_n}, Y_{N_n}$	Coordonnées selon $x_{I0}$ et $y_{I0}$ du nœud $N_n$
$\alpha$	Angle de pression de fonctionnement
$\alpha_{ex}$	Angle de la direction de l'excentration du porte-satellites avec $x_1$
$\beta_b$	Angle d'hélice de base
$\gamma$	Angle de projection du plan de base dans le repère $R_{I0}$
$\Delta_{s1}^{gj}$	Différence de phase entre l'engrènement entre le planétaire et le satellite n <sup>o</sup> 1 et l'engrènement entre l'engrenage $g$ (= $s$ pour le planétaire, = $r$ pour la couronne) et le satellite n <sup>o</sup> $j$
$\eta$	Position d'un point le long de sa ligne de contact
$\kappa$	Angle de résolution de montage des satellites
$\lambda$	Angle de rotation de corps rigide dans le repère $R_1$
$\lambda_c$	Angle de rotation instantané entre les repères $R_1$ et $R_{I0}$
$\rho$	Angle de projection du plan de base dans le repère $R_1$

$\Phi_j$	Position angulaire du satellite n <sup>o</sup> <i>j</i> dans le repère $R_1$
Spiroconiques	
$A, B, C$	Coefficients des déplacements normaux et des rotations de cisaillement à la fibre neutre d'une dent
$a_t, b_t$	Coordonnées selon $x_t$ et $y_t$ du centre du cylindre de la fibre neutre d'une dent
$F_{c_m}$	Effort de contact s'appliquant sur la surface de contact élémentaire n <sup>o</sup> <i>m</i>
$h$	Hauteur de dent selon $z_t$
$K_c$	Matrice de coefficients de raideur d'une dent
$l_m, b_m, X_m, Y_m$	Dimensions et coordonnées du centre de la surface de contact élémentaire n <sup>o</sup> <i>m</i> assimilée à un rectangle
$PE$	Energie potentielle
$p_n$	Pression normale à la fibre neutre
$p_m$	Pression de contact appliquée sur la surface de contact élémentaire n <sup>o</sup> <i>m</i>
$r_{nf}$	Rayon de la fibre neutre d'une dent
$SE$	Energie de déformation
$s_m$	Aire de la surface de contact élémentaire n <sup>o</sup> <i>m</i>
$t_{tc}$	Epaisseur d'une dent selon $e_r$
$v_{\mathcal{P}}$	Vecteur normal au plan $\mathcal{P}$
$W$	Déplacements normaux à la fibre neutre
$WF$	Travail des efforts extérieurs
$\beta_z, \beta_\theta$	Rotations de cisaillement
$\gamma_{z\theta}, \gamma_{\theta r}, \gamma_{zr}$	Contraintes de cisaillement
$\delta_{c_m}$	Déplacement de contact de la surface de contact élémentaire n <sup>o</sup> <i>m</i>
$\delta_{f_m}$	Déplacement de flexion de la surface de contact élémentaire n <sup>o</sup> <i>m</i>
$\delta_p, \delta_w$	Demi-angle au sommet du cône primitif du pignon et de la roue conique respectivement
$\varepsilon_z, \varepsilon_\theta$	Contraintes normales
$\Sigma$	Angle entre axes de l'engrenage spiroconique
$\varsigma$	Angle maximal décrit par la dent selon $e_\theta$
$\Phi, \Psi$	Fonctions de forme des déformations d'une dent
Indices et exposants	
$g$	Indice générique pouvant faire référence au pignon conique (= <i>p</i> ), à la roue conique (= <i>w</i> ), au planétaire (= <i>s</i> ), au satellite n <sup>o</sup> <i>j</i> (= <i>j</i> ), ou à la couronne (= <i>r</i> )
$cs, cr$	Relatif à l'influence du porte-satellites sur les engrènements intérieurs et extérieurs respectivement

$sj, js$	Relatif à l'engrènement planétaire – satellite n° $j$
$rj, jr$	Relatif à l'engrènement couronne – satellite n° $j$
$RE$	Indice pouvant faire référence à un élément roulant où à une tranche d'un élément roulant
$ec, e\xi$	Relatif à l'erreur d'excentration et de désaxage respectivement
$\cdot$	Dérivée première par rapport au temps
$\ddot{\phantom{x}}$	Dérivée seconde par rapport au temps
$\bar{\phantom{x}}$	Moyenne dans le temps
$T$	Transposée
Fonctions	
$  \  $	Valeur absolue
$\  \ \ $	Norme euclidienne
$\lceil \ \rceil$	Partie entière par excès, "plafond"
$a \bmod b$	Reste de la division euclidienne de $a$ par $b$
Paliers	
$D_{RE}$	Diamètre de bille
$d_{RE}$	Distance séparant le plan médian d'un palier à la position d'une tranche d'un rouleau conique
$k_b$	Constante de raideur d'un élément roulant
$l_{RE}$	Longueur d'une tranche d'un rouleau conique
$n$	Facteur de non linéarité de la relation entre effort et écrasement d'un élément roulant
$r_{IR}$	Rayon de la piste intérieure
$\mathbf{v}_b$	Vecteur de projection
$\alpha_{IR}$	Angle d'inclinaison de la piste intérieure
$\delta_0$	Ecrasement de référence d'un élément roulant
$\delta_{zp}, \delta_{rp}$	Déplacements de précharge axiale et radiale d'un roulement
$\Phi_{RE}$	Position angulaire d'un élément roulant

---

# INTRODUCTION GENERALE

Les engrenages sont employés depuis l'Antiquité, et leur évolution a longtemps été gouvernée par des besoins de puissance toujours croissants des mécanismes les employant. Ce n'est que relativement récemment dans l'histoire des engrenages, dans la première moitié du XX<sup>ème</sup> siècle, que les vibrations sont devenues un sujet de recherche majeur dans les transmissions par engrenages. La fiabilisation des procédés de fabrication des engrenages a progressivement réduit les erreurs de fabrication. Par conséquent, l'influence des paramètres de conception sur les vibrations, autrefois peu significatifs face aux erreurs de fabrication, s'en est trouvée accrue. C'est ainsi que sont apparus au milieu du XX<sup>ème</sup> siècle les premiers modèles d'engrenages étudiant l'impact de différents paramètres de conception, modèles dont les enjeux et la complexité ont évolués avec les procédés de fabrication et les capacités de calcul numérique.

La société REDEX se spécialise dans la fabrication de transmissions par engrenages pour machines-outils, domaine pour lequel la diminution des vibrations est un enjeu majeur, conditionnant la précision de fabrication finale de la machine-outil. Les contraintes liées à cette application ont amené à l'utilisation de transmissions comprenant un ou plusieurs trains épicycloïdaux, dont les multiples chemins de transmission de puissance amènent à des phénomènes de partage de charge complexes, ainsi que des engrenages spiroconiques, dont les géométries complexes ont fortement ralenti le développement de modèles numériques. Ainsi, les modèles numériques dynamiques d'engrenages spiroconiques existants dans la littérature offrent peu de possibilités de couplage dynamique fort avec d'autres sources d'excitation telles que le train épicycloïdal de notre application. Enfin, peu de modèles dynamiques de train épicycloïdaux comme d'engrenages spiroconiques prennent en compte de possibles erreurs de forme et d'assemblage, générant des vibrations potentiellement critiques.

L'objectif de ce travail de thèse est donc de proposer un modèle de transmission pour machine-outil comprenant un train épicycloïdal et un couple d'engrenages spiroconiques et capable de rendre compte des couplages existants entre ces deux éléments, et ce même lorsque certains mobiles sont soumis à une ou plusieurs erreurs de forme ou d'assemblage.

Le chapitre 1 présente donc les enjeux propres aux transmissions par engrenages pour machines-outils, les différentes sources d'excitation de ces transmissions, ainsi qu'un état de l'art des différentes stratégies de modélisation des constituants de ces transmissions.

Le chapitre 2 détaille les choix de modélisation effectués, présentant notamment des modèles dynamiques de train épicycloïdal et d'engrenages spiroconiques. Les équations du mouvement et leur méthode de résolution sont explicitées.

Le chapitre 3 propose un certain nombre d'éléments de validation basés sur des résultats théoriques et expérimentaux, issus en grande partie de la littérature. Différents aspects des modèles de train épicycloïdal et d'engrenages spiroconiques sont traités séparément.

Enfin, le chapitre 4 s'intéresse au comportement dynamique d'un réducteur pour machine outils, et des interactions existant entre le train épicycloïdal et le couple d'engrenages spiroconiques. A cette fin, le comportement dynamique du train épicycloïdal et du couple d'engrenages spiroconiques sont d'abord étudiés séparément.



---

# CHAPITRE 1 DYNAMIQUE DES ENGRENAGES : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE



Ce premier chapitre présente un état de l'art sur la dynamique des engrenages.

La première partie introduit des notions fondamentales sur la théorie des engrènements et la géométrie des engrenages à travers une approche historique de leurs développements.

La seconde partie s'intéresse au problème des vibrations dans les transmissions pour machines-outils et discute des enjeux et objectifs spécifiques à cette application. Elle s'intéresse également aux solutions apportées à ces problématiques, ayant mené aux architectures des transmissions faisant l'objet de cette étude.

La troisième partie se concentre sur les sources d'excitation dans les transmissions par engrenages, et sur les modélisations existantes de ces différentes sources.

Une revue des différents modèles dynamiques d'engrenages est ensuite proposée. L'accent est porté sur les modèles de trains planétaires et épicycloïdaux, ainsi que sur les modèles d'engrenages spiroconiques et hypoïdes, particulièrement pertinents pour cette étude.

Enfin, la stratégie de modélisation adoptée, ainsi que les objectifs de cette étude seront présentés.

# 1.1 INTRODUCTION SUR LA THEORIE DES ENGRENEMENTS

Afin de garantir un rapport constant de vitesses angulaires entre deux roues dentées engrenant l'une avec l'autre, les profils de denture des engrenages suivent le tracé de courbes mathématiques précises, sujets de nombreux travaux de recherches. Litvin [1] et Drago [2] retracent l'histoire des principaux développements théoriques des engrenages ainsi que leurs principaux contributeurs. Deux courbes mathématiques sont majoritairement utilisées, les engrenages cycloïdes, se basant sur le tracé d'une courbe cycloïdale et dont les développements ont été menés par De la Hire, Poncelet et Camus, et les engrenages à développante de cercle se basant sur la courbe de même nom, et dont l'application aux engrenages a initialement été proposé par Euler [1], [2]. Les engrenages cycloïdes nécessitent une grande précision sur leur entraxe pour garantir un rapport de vitesse constant alors que les engrenages à développante de cercle continuent de présenter cette propriété sur une plage d'entraxe autour de leur entraxe nominal. Cet aspect de la développante de cercle en fait le tracé d'engrenages le plus répandu dans l'industrie, bien que les engrenages cycloïdes soient utilisés dans certaines applications telles que l'horlogerie [3].

La développante de cercle présente de nombreuses autres propriétés justifiant son utilisation dans la conception d'engrenages. Notamment, les contacts des profils théoriques de deux engrenages à développantes de cercle sont linéiques. Ces lignes de contact appartiennent toutes, ainsi que les normales au contact, à un même plan, appelé plan de base du fait de sa tangence avec les cylindres de base des deux engrenages. En délimitant ce plan de base par ses intersections avec les cylindres de tête des deux engrenages, une partie du plan de base est isolée, appelée plan d'action, délimitant précisément la zone au sein de laquelle les contacts entre profils théoriques vont se produire.

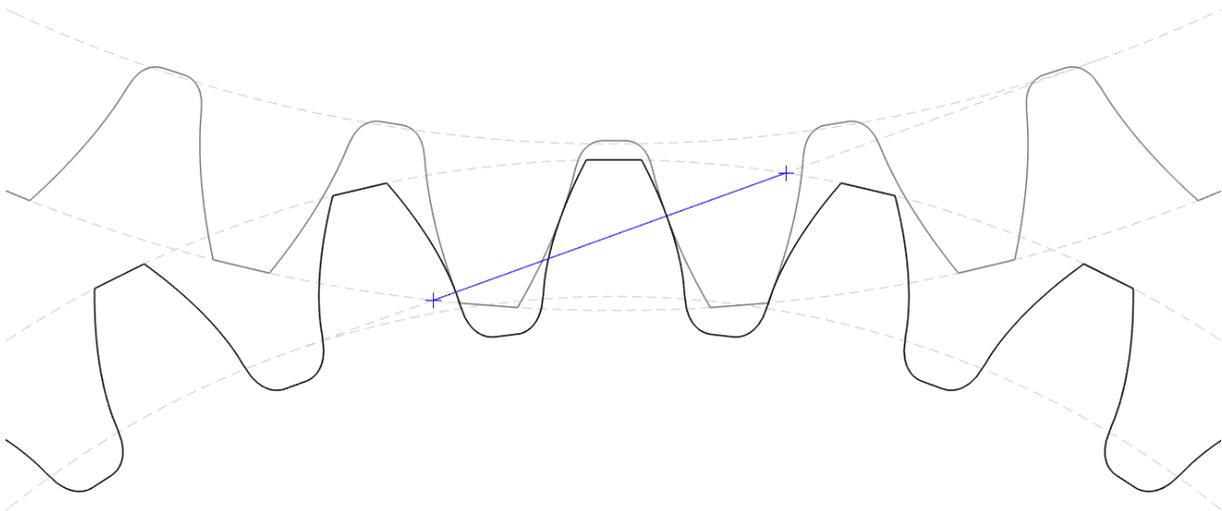


Figure 1-1 Plan d'action et profils théoriques d'engrenages cylindriques

Les lignes de contact étant séparées du pas de base dans le plan d'action, on peut définir un rapport de conduite comme le rapport entre la longueur du plan d'action et le pas de base, représentant le nombre de lignes de contact dans le plan d'action. Ce rapport n'étant pas forcément entier, le nombre de lignes de contact, donc le nombre de couples de dents en contact, va varier au cours du temps.

En assimilant chaque couple de dents en contact à un ressort, l'engrenage peut être représenté par un système masse-ressort, dont la raideur globale va donc varier au cours du temps avec le nombre de paires de dent en contact. En considérant les efforts extérieurs, et notamment le couple

moteur, comme constants, cette variation de la raideur de la transmission va entraîner une variation des déformations, donc une variation des déplacements relatifs des deux roues de l'engrenage, c'est-à-dire des vibrations.

Cette variation de raideur de la transmission a rapidement été identifiée comme l'une des sources principales d'excitation des transmissions par engrenages [4]. Beaucoup de travaux de recherche ont alors adopté des formulations simplifiées de la raideur d'engrènement supposant une raideur constante par unité de longueur de ligne de contact dans le plan d'action, tels que les travaux de Strauch [4], Küçükay [5] ou Saada et Vexlex [6]. Une formulation analytique des longueurs de contact a ensuite été développée par Maatar et Vexlex [7], mettant en valeur l'influence du rapport de conduite et du rapport de recouvrement, dû à l'angle que présentent les lignes de contact dans le plan d'action dans le cas des dentures hélicoïdales, sur les excitations d'une transmission par engrenages.

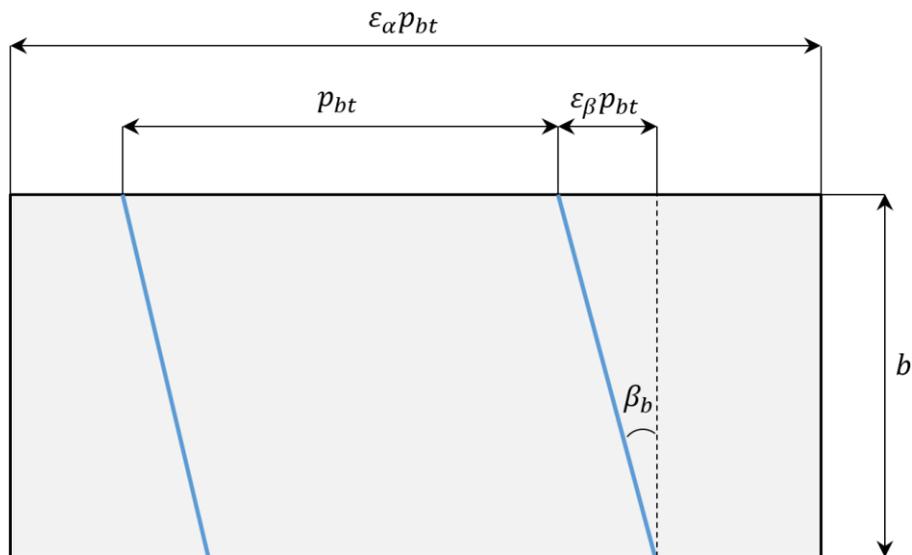


Figure 1-2 Représentation graphique des rapports de conduite et de recouvrement,  $\varepsilon_\alpha$  et  $\varepsilon_\beta$  respectivement, dans le plan d'action

C'est en 1958 qu'Harris introduisit le concept d'erreurs de transmission [8], après avoir mis en évidence leur relation avec l'excitation et la réponse dynamique d'un train d'engrenage. Les erreurs de transmission peuvent s'interpréter comme une variation du rapport de transmission instantané, et se définissent comme la différence entre la position réelle de l'engrenage mené et sa position si le train d'engrenage était géométriquement parfait et infiniment rigide. Elles englobent donc deux concepts différents, les erreurs géométriques des engrenages en tant que corps rigides, et les déformations élastiques des engrenages sous charge. Les erreurs géométriques vont générer des distances de séparation entre les flancs du pignon et de la roue dans les positions nominales, qui seront donc compensées par une rotation de corps rigide supplémentaire afin d'amener au moins une paire de dent en contact. Les déformations élastiques des engrenages vont également générer une rotation de corps rigide supplémentaire qui dépendra, entre autres, du nombre de paires de dents en contact.

## 1.2 TRANSMISSIONS PAR ENGRENAGES ET MACHINES-OUTILS

### 1.2.1 Introduction historique

Les transmissions par engrenages sont employées dans de nombreux domaines de l'industrie, de l'horlogerie aux sous-marins, de la robotique aux hélicoptères. Cette diversité des applications et des usages multiplie les formes et les enjeux des transmissions par engrenages. Cette étude traite de transmissions par engrenages pour machines-outils, et adresse spécifiquement leurs problématiques.

Une machine-outil est un dispositif mécanique permettant d'imposer un mouvement relatif entre un outil et une pièce, permettant d'usiner ou de déformer cette dernière. Un outil devient donc machine-outil lorsque le mouvement relatif de l'outil et de la pièce n'est plus contrôlé « à la main » par un opérateur humain, mais imposé par un mécanisme. Historiquement, les premières apparitions de machines-outils remontent à la fin du Moyen Âge [9], avec notamment une illustration d'un tour à bois mécanique conçu pour une opération de filetage, datée aux alentours de 1483.

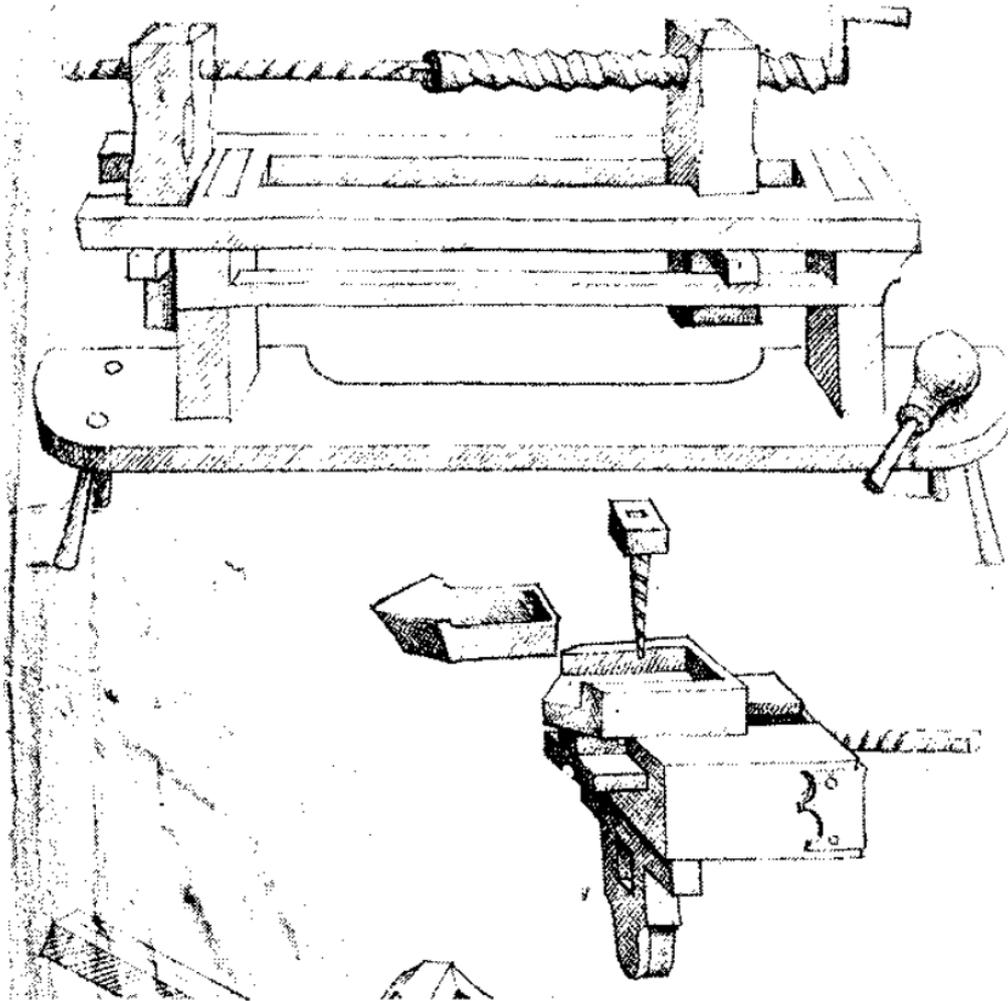


Figure 1-3 Illustration d'un tour à bois datée de 1483, employant un guidage mécanique de l'outil de filetage [9]

D'après Moore [9], ce n'est cependant que vers la fin du XVIII<sup>ème</sup> siècle durant la révolution industrielle que le développement des machines-outils s'initia réellement, alimenté par les besoins

d'outils capables de travailler l'acier avec toujours plus de rendement et de précision. Les efforts nécessaires à l'usinage de pièces en acier étant considérablement plus importants que pour le travail du bois, le développement de mécanismes de commandes des outils, c'est-à-dire de machines-outils, devient impératif.

Les machines-outils répondent donc à plusieurs besoins :

- (1) Un besoin d'automatisation de l'étape de fabrication, fortement lié à la notion de répétabilité
- (2) Un besoin d'efforts et de vitesses suffisamment importants pour garantir le bon déroulement de différentes procédures de fabrication tout en minimisant leur durée
- (3) Un besoin de précision du guidage des mouvements relatifs entre la pièce et l'outil

Afin de répondre à ces différents besoins, des transmissions par engrenages sont employées, permettant de générer et de synchroniser, à partir de la rotation d'un moteur, des mouvements composés complexes, à l'aide notamment d'ensembles pignon-crémaillère transformant les rotations en translations. Les transmissions par engrenages présentent l'avantage de pouvoir transmettre des puissances élevées pour un encombrement moindre, tout en offrant des rendements élevés. Enfin, l'entraînement par obstacle assure une certaine précision de la transmission. Les réducteurs faisant l'objet de cette étude servent notamment, parmi leur nombre important d'applications, à démultiplier la vitesse de rotation transmise d'un moteur au pignon d'une crémaillère tout en multipliant d'autant le couple transmis.

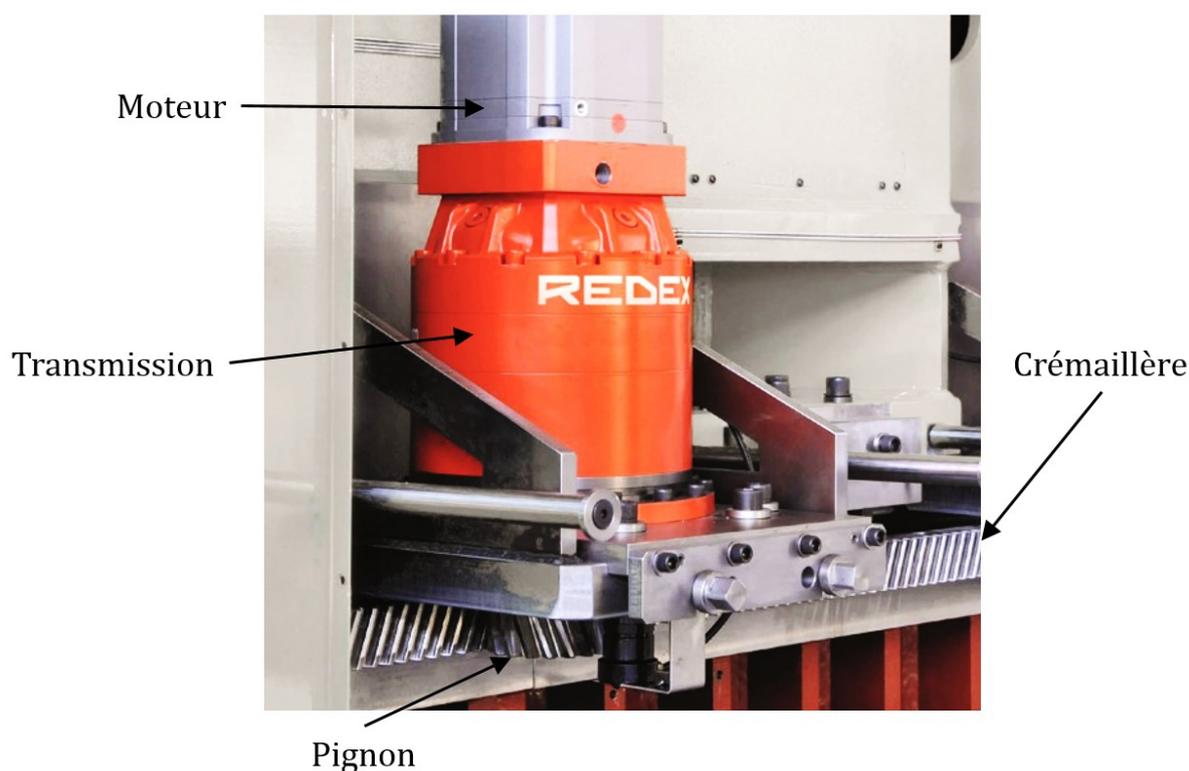


Figure 1-4 Exemple de transmission pour machine-outil

## 1.2.2 Conception des transmissions

La notion d'erreurs de transmission introduite précédemment devient alors centrale à ce type d'application, en effet une variation du rapport de transmission instantané va se traduire par une variation de la vitesse de translation instantanée de la crémaillère, pouvant générer des défauts d'état de surface de la pièce usinée, et diminuant la précision du guidage des mouvements relatifs

de la pièce et de l'outil, et donc la précision d'usinage de la machine-outil. La conception de ces réducteurs va donc présenter trois enjeux majeurs :

- (1) La conception doit minimiser l'influence des erreurs de montage et de fabrication des engrenages, afin de minimiser les erreurs de transmission d'origines géométrique.
- (2) La conception doit maximiser la raideur globale du système, afin de minimiser les erreurs de transmission dues aux déformations élastiques des composants du système, et notamment des dentures.
- (3) La conception doit minimiser le jeu angulaire de la transmission. Ces transmissions étant vouées à changer de sens de rotation fréquemment, la présence de jeu angulaire, notamment dû aux dentures, va générer une imprécision supplémentaire sur le guidage.

Les deux premiers enjeux de conception ont logiquement mené à l'emploi de trains planétaires et épicycloïdaux. Les termes « train planétaire » et « train épicycloïdal » désignent un agencement particulier de plusieurs engrenages, dans lequel un pignon central, appelé planétaire, engrène avec un certain nombre d'engrenages extérieurs, appelés satellites, engrenant eux-mêmes également avec un unique engrenage intérieur coaxial au planétaire, appelé couronne. Les satellites sont montés sur une unique pièce, appelée porte-satellites. Les trains planétaires correspondent à une configuration où le porte-satellite est fixe, l'entrée de puissance se faisant par le planétaire et la sortie par la couronne ; leur nom découle du mouvement des différents composants, analogues à celui d'une planète et de ses satellites. L'entrée de puissance dans les trains épicycloïdaux se fait également par le planétaire, cependant leur couronne est fixe, la sortie se faisant sur le porte-satellites ; leur nom n'est pas relié aux dentures cycloïdes mentionnées précédemment, mais à la trajectoire épicycloïdale décrite par un point du cercle primitif d'un satellite observé dans le repère fixe, indépendamment de la forme des dentures.

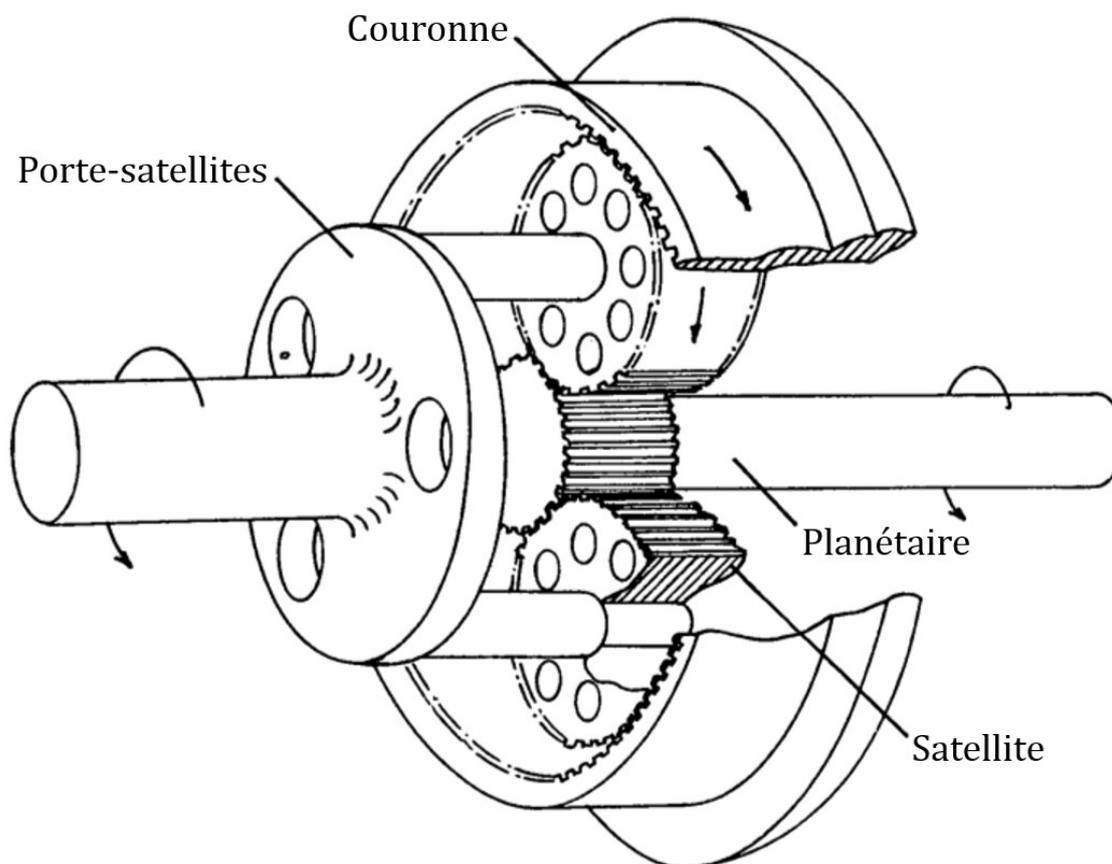


Figure 1-5 Représentation d'un train épicycloïdal [10]

Cette architecture de transmission par engrenages fut inventée durant l'antiquité afin notamment de prédire le mouvement des planètes, sa plus ancienne manifestation connue à ce jour est le mécanisme d'Anticythère, daté du I<sup>er</sup> siècle av. J.-C. [11]. Les trains planétaires et épicycloïdaux sont maintenant largement utilisés dans l'industrie en raison d'un grand nombre d'avantages. La multiplicité des chemins de transmission de puissance permet de transmettre des puissances importantes et d'assurer une rigidité élevée, tout en présentant une compacité exemplaire. Les efforts radiaux sur les différents composants sont théoriquement nuls, s'annulant entre eux, lorsque les satellites sont équirépartis. Enfin, cette architecture présente une sensibilité amoindrie à certaines erreurs de montage et de fabrication [12], bien que la multiplicité des engrènements puisse faire émerger des problèmes de partage de charges entre les différents satellites pouvant s'avérer critiques dans certaines conditions [13], [14]. Les trains planétaires et épicycloïdaux répondent donc efficacement aux deux premiers enjeux de conception cités plus tôt dans cette partie.

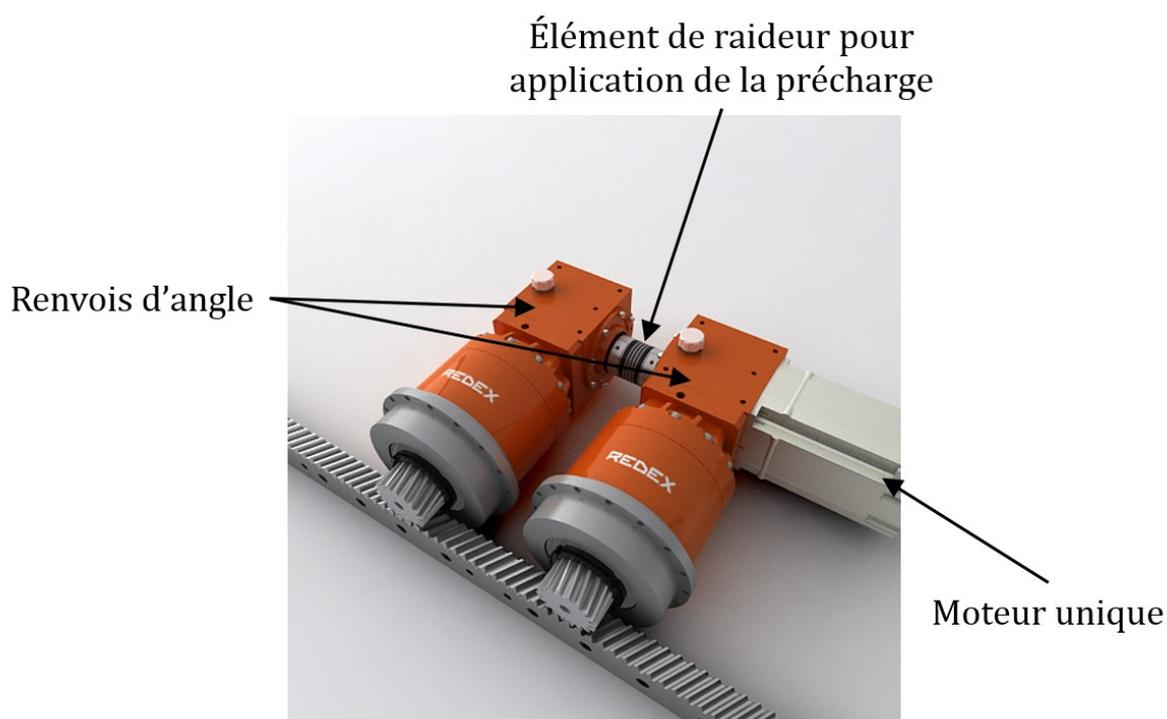


Figure 1-6 Exemple de double réducteur avec renvois d'angle et précharge mécanique

Répondre au troisième enjeu de conception est plus complexe. Bien qu'il puisse être significativement réduit pour certaines applications, un jeu de denture est nécessaire au bon fonctionnement des engrenages, permettant d'éviter des frottements excessifs pouvant user prématurément la transmission et des chocs pouvant endommager significativement la denture. Une transmission à jeu réduit peut ne pas être suffisante pour atteindre l'objectif de précision fixé, d'autres solutions technologiques ont alors vu le jour afin d'annuler complètement le jeu de guidage. L'une de ces solutions technologiques consiste par exemple à monter deux réducteurs identiques sur une même crémaillère en imposant une précharge angulaire entre eux afin d'annuler à chaque instant les jeux des réducteurs et des engrènements pignons-crémaillère. Cette précharge angulaire peut être appliquée de manière électrique, mais nécessite alors un moteur pour chaque réducteur, ou de manière mécanique, ne nécessitant plus qu'un seul moteur pour l'ensemble. L'une des solutions privilégiées pour l'application d'une précharge mécanique entre deux réducteurs consiste à monter en entrée de chacun des réducteurs un système de renvoi d'angle, l'arbre traversant perpendiculaire aux axes de rotation des réducteurs devient alors l'axe du moteur. Le décalage de position angulaire initiale des réducteurs entre eux permet d'assurer la précharge à travers un élément de raideur positionné sur l'arbre traversant entre les deux systèmes de renvoi d'angle,

qui peut être l'arbre lui-même. Pour toutes les raisons citées précédemment, la technologie de renvoi d'angle favorisée dans l'industrie de la machine-outil sont les engrenages coniques, présentant des capacités de charges et des rigidités importantes tout en limitant les erreurs de transmissions. L'utilisation d'engrenages coniques s'est donc répandue dans les réducteurs pour machines-outils, permettant des montages annulant entièrement le jeu global, mais dont l'engrènement vient contribuer aux erreurs de transmission globales.

## 1.3 SOURCES D'EXCITATION ET ENGRENEMENTS

Comme présenté en première partie de ce chapitre, les engrenages peuvent être une source significative de vibrations, et ce pour de multiples raisons. Cette section est consacrée à la présentation des différentes sources d'excitation dans les engrenages, et plus particulièrement dans les trains épicycloïdaux et dans les engrenages spiroconiques.

### 1.3.1 Train épicycloïdal

#### 1.3.1.1 Raideur d'engrènement

Nous avons dans l'introduction de cette partie mis en valeur l'importance de la variation de la longueur totale de contact dans le plan d'action sur la réponse dynamique et l'excitation d'un engrènement, en supposant une raideur d'engrènement constante par unité de longueur de ligne de contact. La raideur de denture n'est cependant pas uniquement dépendante de la longueur des lignes de contact, des modèles de raideur de denture ont donc été développés afin de la caractériser avec plus de précision. Weber [15], Weber et Banaschek [16], puis Cornell [17], ont notamment proposé une méthode de calcul des déflexions basée sur la somme des contributions de la déformation au contact, de flexion de la dent et de la déformation de fondation.

#### *Déformation au contact*

Les expressions de la déformation au contact d'une dent d'engrenage proviennent généralement de la théorie de Hertz. Le corps de l'engrenage et la fibre neutre de la dent sont supposés indéformables afin d'isoler les déformations locales à l'interface de contact. La formulation de Weber et Banaschek [16] pour les déformations de contact dans la direction de la charge donne :

$$\delta_c = 2 \frac{F}{\pi b E_{eq}^*} \left( \ln \frac{2\sqrt{k_1 k_2}}{a} - \frac{\nu}{2(1-\nu)} \right) \quad 1-1$$

Avec :

$$a = \sqrt{4 \frac{F \rho_{eq}}{\pi b E_{eq}^*}} : \text{Demi-largeur du contact de Hertz pour deux cylindres d'axes parallèles}$$

$E_{eq}^* = \frac{E_1 E_2}{E_2(1-\nu_1^2) + E_1(1-\nu_2^2)}$  : Module équivalent des modules d'Young normalisés par les coefficients de Poisson

$$\rho_{eq} = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} : \text{Rayon de courbure équivalent au contact}$$

$k_1, k_2$  : Distances entre le point de contact et la fibre neutre de la dent, dans la direction de la normale au contact, définis en figure 1-7.

$F, b$  : Charge sur la dent et largeur de denture

D'autres approches peuvent être citées, telle que la formule analytique de Lundberg [18], ou la formule semi-empirique développée par Palmgren pour application à des roulements à rouleaux cylindriques [19].

#### *Flexion de dent*

Les déflexions d'une dent sont classiquement déterminées en considérant le contact et la section encadrée au corps de l'engrenage comme indéformables. Les travaux de Weber et Banaschek [16]

approximement une dent par une poutre encastree-libre de section variable et, en se basant sur l'expression de l'energie de deformation et du travail des forces exterieures, amènent l'expression des deflexions suivante (cf. figure 1-7) :

$$\delta_b = \frac{F}{bE} \cos^2 \alpha_u \left( 10.92 \int_0^{u_w} \frac{(u_w - y)^2}{s(y)^3} dy + 3.1(1 + 0.294 \tan^2 \alpha_u) \int_0^{u_w} \frac{1}{s(y)} dy \right) \quad 1-2$$

Les travaux de Lin et Liou [20] se basent sur une approche similaire, alors qu'Umezawa [21] propose une approche tridimensionnelle en approximant la dent par un element de plaque à epaisseur variable.

### Déformation de fondation

Les deformations de fondation, ou deformations du corps de l'engrenage, se determinent en etudiant les deformations du solide supportant les dents lorsque les dents sont supposees comme indeformables. Les premiers travaux sur le sujet, tels que ceux de Weber [15], O'Donnell [22], [23], Attia [24], ou encore Cornell [17] ont approximé le corps de l'engrenage à un massif elastique semi-infini, menant à une estimation du deplacement de la dent dans la direction de la charge de la forme :

$$\delta_f = \frac{F}{bE} \cos^2 \alpha_u \left( L \left( \frac{u_w}{s_{fw}} \right)^2 + M \left( \frac{u_w}{s_{fw}} \right) + P(1 + Q \tan^2 \alpha_u) \right) \quad 1-3$$

Les valeurs numeriques des coefficients  $L$ ,  $M$ ,  $P$  et  $Q$  varient selon l'auteur, quelques valeurs sont donnees dans le tableau 1-1 pour un coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ .

Auteur(s)	$L$	$M$	$P$	$Q$
Weber [15] - Attia [24]	5.2	1	1.4	0.294 - 0.32
Cornell [17]	5.306	1.4 (plane stress) 1.14 (plane strain)	1.534	0.32

Tableau 1-1 Coefficients des deformations de fondation

Sainsot *et al.* [25] ont ensuite propose une approche similaire, prenant en compte la geometrie du corps de l'engrenage, et pour laquelle les coefficients de l'equation 1-3 sont exprimes comme fonctions de la geometrie de l'engrenage.

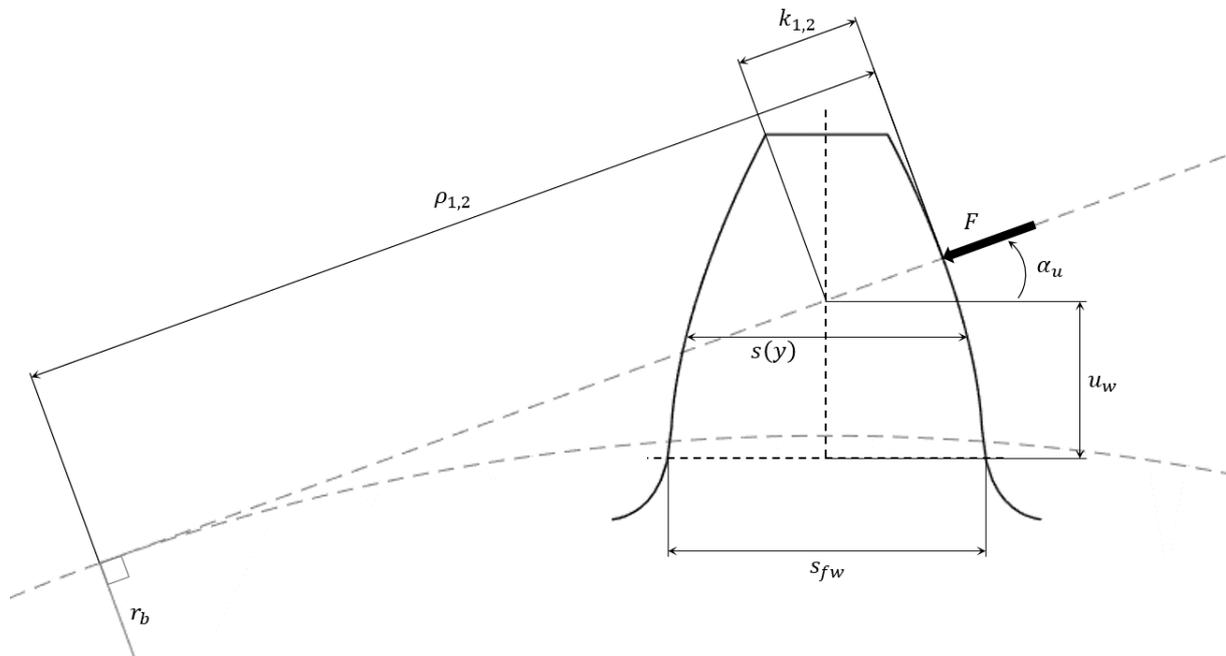


Figure 1-7 Paramètres géométriques de la formulation de Weber

### 1.3.1.2 Erreurs d'assemblage

Les erreurs d'assemblage proviennent des écarts de positionnement relatif des différents mobiles dus aux tolérances de montage et de fabrication de ces pièces. Ces erreurs vont donc éloigner un engrenage de sa position de fonctionnement nominale, et ainsi devenir une source d'excitation de l'engrènement. Les erreurs d'assemblages peuvent être classées en différentes catégories :

- (1) Les erreurs de position, correspondant à un décalage de l'axe de rotation du solide. Ce type d'erreur peut par exemple survenir si l'alésage d'un arbre ou d'un composant du train épicycloïdal n'est pas parfaitement centré avec l'axe de rotation principal du réducteur. Ce défaut de centrage va générer un décalage constant dans le repère fixe de l'axe de rotation du solide concerné. Dans le cas des trains épicycloïdaux, cette erreur peut également concerner un satellite, dont l'alésage de l'axe sur le porte-satellites ne serait pas à sa position nominale. Les erreurs de positions axiales vont réduire d'autant la largeur de denture en fonctionnement des engrènements concernés, mais n'influent pas outre mesure sur les conditions d'engrènement dans le cas des dentures cylindriques.
- (2) Les erreurs d'excentration, correspondant à un décalage du centre géométrique du solide par rapport à son axe de rotation. Ce type d'erreur est dû à un défaut de centrage de la denture d'un engrenage par rapport à son alésage où à l'axe de rotation de son arbre. Ce défaut peut donc concerner tous les engrenages du système, il peut également dans le train épicycloïdal concerner le porte-satellites. Dans ce cas, il se traduira par un décalage du centre géométrique des alésages des axes des satellites par rapport à l'axe de rotation du porte-satellites.
- (3) Les erreurs de désalignement, correspondant à un désalignement de l'axe de rotation du solide. Ce type d'erreur est dû à une déviation angulaire de l'alésage d'un arbre ou d'un composant du train épicycloïdal, constante dans le repère fixe.
- (4) Les erreurs de désaxage, correspondant à un désalignement de l'axe du solide par rapport à son axe de rotation. Ce type d'erreur est dû à un défaut de montage d'un mobile sur son arbre, provoquant un désalignement de l'axe du mobile par rapport à son axe de rotation.

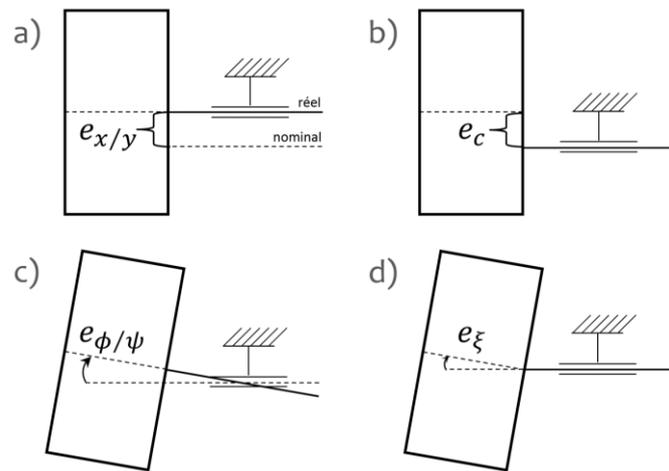


Figure 1-8 Représentation schématique des erreurs d'assemblage des engrenages cylindriques a) erreur de position b) erreur d'excentration c) erreur de désalignement d) erreur de désaxage

### 1.3.1.3 Erreurs de forme

Les erreurs de forme consistent en une différence entre la géométrie du flanc de dent théorique et celle des flancs de dent réels. Elles se manifestent de nombreuses manières et présentent des causes très variées. Elles peuvent se classer en différentes catégories :

#### *Erreurs de taillage*

Les tolérances de taillage des engrenages, liées à la trajectoire et à la géométrie de l'outil de taillage, génèrent inévitablement des défauts de géométrie. Selon la nature ou l'origine de ces défauts, ils peuvent être individuels, et n'impacter donc qu'une seule dent, ou systématique sur l'ensemble de la denture. Ces erreurs de taillage peuvent être classées dans différentes catégories, dont les principales sont :

- (1) Les erreurs de pas, représentant la différence entre le pas réel séparant chacune des dents d'un engrenage du pas théorique.
- (2) Les déviations de profil, représentant en chaque point du profil la distance séparant le profil réel du profil théorique.
- (3) Les erreurs d'hélice, représentant la différence entre l'angle d'hélice réel et l'angle d'hélice théorique.

#### *Domages et défaillances*

Des conditions de taillage ou de fonctionnement inappropriés peuvent endommager les surfaces d'engrènement. Ces défauts peuvent être générés par des températures trop faibles ou trop élevées associées à des charges importantes, une lubrification inadéquate, des efforts transmis inadaptés, ou des anomalies de matière ou de fabrication.

Ces dommages et défaillances peuvent prendre de nombreuses formes, telles que des défauts d'écaillage, de corrosion, de grippage, de l'usure, etc.

#### *Corrections*

Les corrections volontaires de la surface d'engrènement sont fréquentes, permettant d'optimiser le comportement sous charge d'engrenages corrigés, ou de limiter l'impact de certains défauts

d'assemblage sur la réponse dynamique de la transmission. Ces corrections peuvent être effectuées dans la direction du profil, permettant d'influencer les instants précis d'entrée et de sortie des lignes de contact et d'éviter de possibles chocs sous certaines conditions, ou dans la direction de la largeur de denture, permettant de recentrer la zone de chargement et d'assurer une certaine robustesse vis-à-vis de possibles erreurs de montage.

### 1.3.2 Engrenage spiroconique

Les engrenages coniques sont des engrenages dont la surface primitive est un cône, et dont les axes sont donc concourants et non-parallèles. Il existe de nombreuses géométries de denture différentes, avec par exemple des engrenages coniques à denture droite, des engrenages spiroconiques, dont les dents décrivent une courbe, etc. Le terme d'engrenage conique est également fréquemment utilisé pour désigner des engrenages hypoïdes, bien que la surface primitive d'un tel engrenage soit un hyperboloïde et non un cône. Les engrenages hypoïdes correspondent à une généralisation des engrenages coniques pour des montages à axes non-parallèles mais également non-concourants. Cette étude se limitera aux engrenages spiroconiques, à axes concourants.

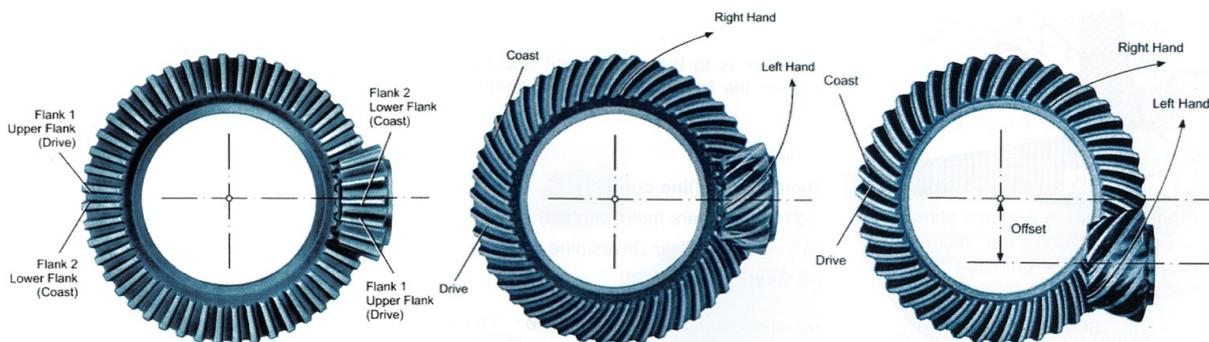


Figure 1-9 Exemple d'engrenage conique à denture droite, d'engrenage spiroconique et d'engrenage hypoïde [26]

La théorie des engrènements des engrenages coniques correspond à la généralisation pour trois dimensions des principes théoriques en deux dimensions introduits plus tôt dans ce chapitre sur les engrenages cylindriques. Cet ajout de dimension amène à des géométries de denture théoriques complexes dont aucune définition mathématique directe ne peut être donnée, avec pour conséquence des géométries réelles historiquement conditionnées non pas par la géométrie théorique des dentures mais par les méthodes de taillage. Chaque méthode de taillage différente va donc générer une géométrie de denture différente, et les seules méthodes d'obtention de surfaces de denture théoriques sont par simulation du taillage. Les méthodes de taillage des engrenages spiroconiques peuvent être à génération discontinue, dans ce cas les creux de dents sont taillés un à un et décrivent un arc de cercle, où à génération continue, et les creux de dents sont taillés simultanément et décrivent un arc d'épicycloïde ; les flancs concaves et convexes peuvent être taillés avec un unique outil ou avec deux outils différents, générant différentes variations de l'épaisseur de dent le long de l'axe du cône ; l'axe de rotation de l'outil de taillage peut être positionné de manière à générer des hauteurs de dentures constantes ou variables le long de l'axe du cône. Stadtfeld [26], Klingelberg [27] et Henriot [28] détaillent un grand nombre de méthodes de taillage existantes.

#### 1.3.2.1 Raideur d'engrènement

La complexité et la diversité des géométries des dentures d'engrenages spiroconiques ont sensiblement ralenti les travaux de recherche sur ce type de denture en comparaison avec les engrenages cylindriques. Ce n'est qu'avec l'apparition des méthodes de résolution numériques que les

travaux portant sur la détermination de la raideur de denture des engrenages spiroconiques se développèrent. Deux approches sont majoritairement utilisées :

- (1) Une approche de type élément de plaque ou élément de coque pour déterminer le comportement en flexion de la dent. Initialement développée pour les engrenages cylindriques, avec notamment Umezawa [21], son utilisation pour les engrenages spiroconiques a été suggérée relativement tôt, avec par exemple les travaux de Wellauer et Seireg [29] ou de Wang et Morse [30], car cette méthode peut amener à des résultats analytiques dans le cas de géométries simplifiées. Ce type d'approche s'est fortement développé avec l'apparition des méthodes d'intégration numérique, avec notamment les travaux de Krenzer [31], Vaidyanathan *et al.* [32], [33], Kolivand et Kahraman [34] et Ding *et al.* [35]. Telle que l'approche de Weber pour les dentures cylindriques, cette approche découple les déformations de flexion de la dent de celles de contact et de fondation.

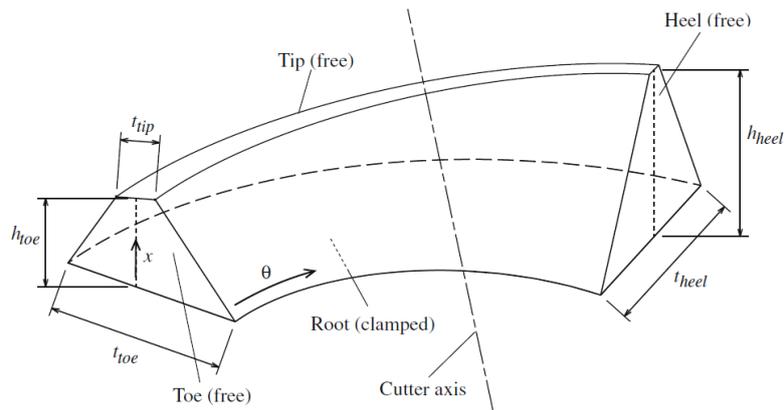


Figure 1-10 Géométrie de l'élément de coque développé par Kolivand et Kahraman [34]

- (2) Une approche de type éléments finis 3D, permettant de s'affranchir d'hypothèses sur la géométrie des dentures et de prendre en compte les déformations de fondation, mise en place notamment par Gosselin *et al.* [36] et Simon [37], ou plus récemment par Ding *et al.* [38]. Cette approche est générale et s'adapte facilement aux différentes formes de denture des engrenages spiroconiques, elle reste cependant coûteuse en temps de calcul et suppose une certaine position relative des deux engrenages. Certains phénomènes tels que des erreurs d'assemblage ou des flexions d'arbres peuvent donc être difficilement modélisables, ou fortement impacter les temps de calculs.

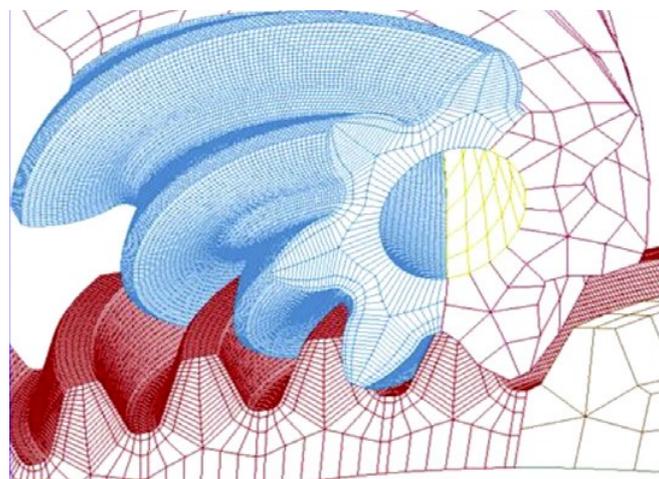


Figure 1-11 Modélisation par éléments finis 3d d'un couple d'engrenages cycloïdes par Ding *et al.* [38]

### 1.3.2.2 Erreurs d'assemblage

De manière similaire aux engrenages cylindriques, les tolérances de montage et de fabrication des engrenages coniques vont impacter leur réponse dynamique. Leur géométrie spéciale amène cependant quelques différences, et les erreurs d'assemblage peuvent se catégoriser comme suit :

- (1) Les erreurs de position axiale, correspondant à un décalage entre la position axiale réelle et la position axiale nominale de l'engrenage conique. Les erreurs de position radiale, correspondant à un décalage de position d'un engrenage conique dans l'axe du second engrenage conique, sont assimilables à une erreur de position axiale du second conique. Ce type d'erreur peut être causé par les tolérances de fabrication et de montage du carter ou de l'arbre de l'engrenage conique.
- (2) Les erreurs d'hypoïde, correspondant à un décalage de position d'un engrenage conique dans la direction perpendiculaire aux deux axes de rotation du couple d'engrenages coniques. Cette erreur se nomme ainsi car les axes de rotation réels des deux engrenages ne se croisent alors plus, tel que pour les engrenages hypoïdes.
- (3) Les erreurs d'excentration, similaires à celles du train épicycloïdal, correspondant à un décalage du centre géométrique du solide par rapport à son axe de rotation. Ce type d'erreur est dû à un défaut de centrage de la denture d'un engrenage par rapport à son alésage ou à l'axe de rotation de son arbre.
- (4) Les erreurs de désalignement, similaires à celles du train épicycloïdal, correspondant à un désalignement de l'axe de rotation du solide.
- (5) Les erreurs de désaxage, similaires à celles du train épicycloïdal, correspondant à un désalignement de l'axe du solide par rapport à son axe de rotation

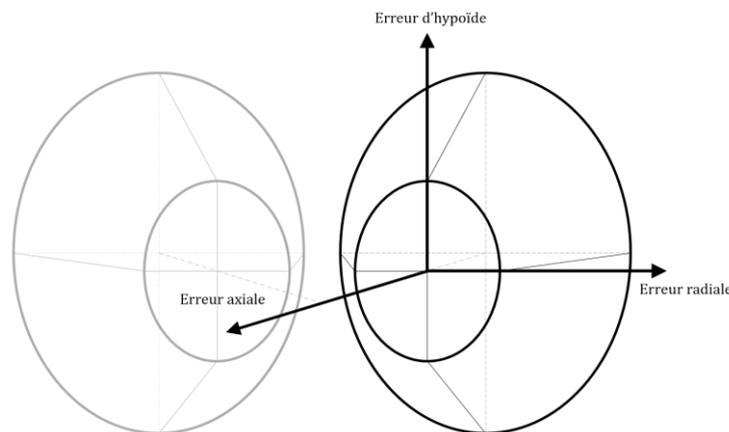


Figure 1-12 Représentation schématique des erreurs de position des engrenages coniques

### 1.3.2.3 Erreurs de forme

Telle que pour les engrenages cylindriques, la géométrie réelle des flancs de denture des engrenages coniques va inévitablement s'éloigner de la géométrie théorique. Les dentures coniques sont sujettes aux mêmes erreurs de taillage et défaillances, leurs corrections sont cependant plus complexes, Stadtfeld et Gaiser [39] les ont catégorisé comme suit :

- (1) Correction longitudinale, obtenue par une inclinaison de l'outil de taillage ou par modification de son rayon.
- (2) Correction de profil, obtenue par modification du profil de l'outil de taillage. L'utilisation d'un profil d'outil concave va notamment générer un bombé de profil.

- (3) Correction du flanc, de manière à générer un profil se vrillant dans le sens de la longueur de denture, et obtenue par une inclinaison de l'outil de taillage ou par une modification de sa cinématique.

Les corrections sont caractérisées par la distance théorique séparant les flancs du pignon et de la roue après application des corrections pour toutes les positions relatives des flancs au cours d'une période d'engrènement. Les zones pour lesquelles cette distance est nulle correspondent aux points conjugués pour lesquels le rapport de vitesse est exact ; pour des surfaces d'engrènement théoriques sans corrections ni erreurs la totalité du flanc est conjugué et la distance de correction est nulle en tous points. La figure 1-13 donne un exemple de distances de correction pour chacune des trois familles de corrections présentées précédemment, ainsi que la portée théorique résultante de l'application de cette correction.

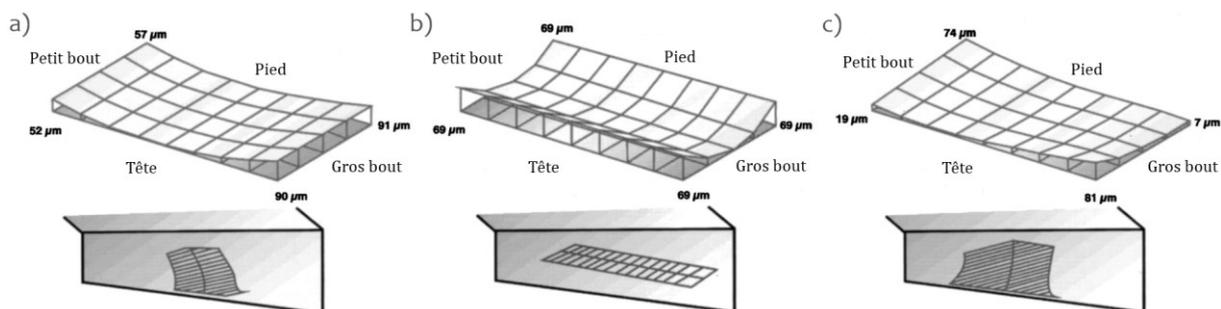


Figure 1-13 Distances de correction et portées résultantes de l'application d'une correction a) longitudinale b) de profil c) du flanc en vrille [39]

## 1.4 MODELES DYNAMIQUES D'ENGRENAGES

Nous avons en introduction de ce chapitre abordé la théorie des engrènements, et les réalisations mathématiques ayant mené à l'apparition des premiers modèles d'engrenages cylindriques. Bien que ce soient les travaux de Strauch [4] qui semblent être les premiers à prendre en compte l'excitation périodique due à la variation périodique de longueur de ligne de contact, le premier modèle masse-ressort d'engrenage est attribué à Tuplin [40]. Özgüven et Houser [41] dressent un état de l'art exhaustif des premiers modèles d'engrenages. Ces modèles mathématiques sont dits « à paramètres concentrés », réduisant les solides à un très faible nombre de nœuds. Ils s'opposent aux modèles par éléments-finis, dont le premier appliqué à l'étude d'engrenages est attribué à Wallace et Seireg [42]. Enfin, un certain nombre de modélisations hybrides mixtes combinant éléments finis et formulation analytique des contacts sont apparus dans l'objectif d'exploiter les forces de ces deux approches, avec notamment les travaux de Parker *et al.* [43]. A la revue de la littérature sur les modèles d'engrènement d'Özgüven et Houser [41] s'ajoutent celles de Blankenship et Singh [44] et de Wang *et al.* [45].

De ces modèles d'engrènement sont apparus des modèles plus complexes pouvant traiter de multiples engrènements simultanés, et notamment des modèles de train épicycloïdaux que nous allons décrire. Nous présenterons ensuite les différents modèles d'engrenages spiroconiques existants.

---

### 1.4.1 Modèles de trains épicycloïdaux

De par leur conception unique, les modèles de trains planétaires et épicycloïdaux s'articulent autour de plusieurs thèmes spécifiques, succinctement présentés ici. L'un des thèmes critique des trains planétaires et épicycloïdaux est le partage de charge entre les différents satellites, et de nombreux travaux sont centrés sur la détermination de ce partage de charge et sa sensibilité à des possibles erreurs d'assemblage ou à des conditions de fixations particulières du planétaire. Un autre de ces thèmes concerne l'excitation paramétrique de la transmission due aux multiples engrènements et à leurs interactions, et notamment l'influence de la phase relative de ces différents engrènements. De plus, leur conception axisymétrique génère des réponses modales fortes directement liées à la structure de la transmission, qui constituent un autre sujet de recherche majeur des trains planétaires et épicycloïdaux. Enfin, certaines pièces telles que le porte-satellites ou la couronne répondent à des contraintes géométriques uniques amenant à des conceptions de pièces dont les déformations seront non négligeables en comparaison avec les déformations de dentures. Ces pièces souples vont avoir des répercussions sur le comportement dynamique de la transmission, et font l'objet de nombreux modèles également. La revue de Cooley et Parker [46] couvre les différents modèles de trains planétaires et épicycloïdaux par thème et par type de modélisation, nous en ferons ici une présentation chronologique.

Le modèle à paramètres concentrés de Cunliffe *et al.* [47] publié en 1975 est le premier modèle de train épicycloïdal recensé, orienté autour de la détermination des fréquences et des modes propres du train épicycloïdal. C'est un modèle dit « global », dénomination des modèles calculant à priori les fonctions de raideur d'engrènement ou d'erreurs de transmission qui serviront de sources d'excitation. Il est suivi par les travaux de Seager [48], qui a étudié la phase relative des engrènements des différents satellites en utilisant l'erreur de transmission statique comme source d'excitation. Botman [49] a ensuite étudié l'impact d'un porte-satellite tournant sur la réponse modale de la transmission, notamment à hautes vitesses de rotation. Frater *et al.* [50] se sont intéressés aux fréquences propres et aux modes de vibration d'un train planétaire dont les

satellites n'auraient pas la même raideur d'engrènement. Nikolajsen et Botman [51] ont alors proposé un modèle de train planétaire incluant un modèle dynamique de paliers. Pour cela, ils utilisent les résultats d'un modèle de train planétaire sans paliers comme données d'entrée dans leur modèle global avec paliers. Ma et Botman [52] se sont ensuite intéressés aux erreurs d'assemblage dans un train planétaire, toujours en utilisant les erreurs de transmission comme données d'entrée. August et Kasuba [53] ont proposé en 1986 un modèle de train planétaire centré sur la détermination du partage de charge entre les différents satellites et de l'influence des conditions de fixation du planétaire, en utilisant une expression non linéaire de la raideur d'engrènement. Les travaux de Kahraman [54]–[56] en 1994 ont présenté un modèle de train planétaire en trois dimensions afin d'étudier les vibrations hors plan générées par l'utilisation de dentures hélicoïdales, ont proposé une modélisation de certaines erreurs avec la prise en compte de raideurs d'engrènement non linéaires, et enfin, ont offert une comparaison avec des modèles torsionnels simplifiés accompagnée d'une étude sur la plage de validité de ces derniers. Kahraman et Blankenship [57] ont ensuite étudié les phases des engrènements des différents satellites avec un modèle global utilisant l'erreur de transmission statique comme source d'excitation.

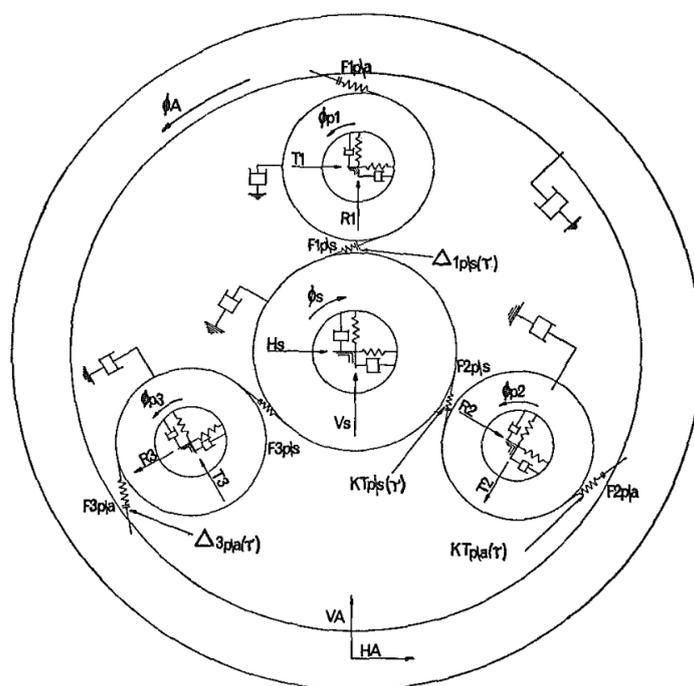


Figure 1-14 Modèle à paramètres concentrés de Cunliffe *et. al.* [47]

Les différents modèles de train planétaire cités ci-dessus sont tous des modèles mathématiques, à paramètres concentrés, et ce n'est que vers le début des années 1990 que les premières études de trains planétaires et épicycloïdaux par éléments finis apparurent. Les coûts en temps de calcul de ces modèles sont cependant élevés, et bon nombre de ces études sont uniquement statiques. Valco [58] a notamment construit un modèle par éléments finis pour étudier les déformations statiques du système. Similairement, Vexel *et. al.* [59] ont en 1994 mis en évidence les déformations de la couronne à l'aide d'un modèle de train planétaire en éléments finis qu'ils confirmèrent avec des mesures expérimentales. Le premier modèle dynamique d'un train planétaire par éléments finis semble être celui présenté par Gradu *et. al.* [60] en 1996.

Parallèlement au développement des modèles par élément finis, Saada et Vexel [61] ont développé en 1995 une nouvelle formulation de modèle à paramètres concentrés dite « locale », afin d'étudier la sensibilité des fréquences propres d'un train planétaire en fonction de la raideur d'engrènement, de la raideur des paliers des satellites et de la raideur de support de la couronne. Ce modèle local est centré sur la résolution des conditions de contact au cours de l'engrènement, dont

les variations vont générer l'excitation du système, et ne suppose donc pas de terme d'excitation à priori ; il s'oppose ainsi aux modèles globaux le précédant dans la littérature. Cette approche locale a ensuite été étendue et formalisée par Vexex et Maatar [62]. Les travaux de Saada et Vexex ont été complétés par ceux de Vexex et Flamand [63] qui caractérisèrent la réponse dynamique d'un train planétaire soumis à différentes charges et à différentes raideurs de fixation du planétaire, mettant en évidence l'impact de la non linéarité de la raideur d'engrènement.

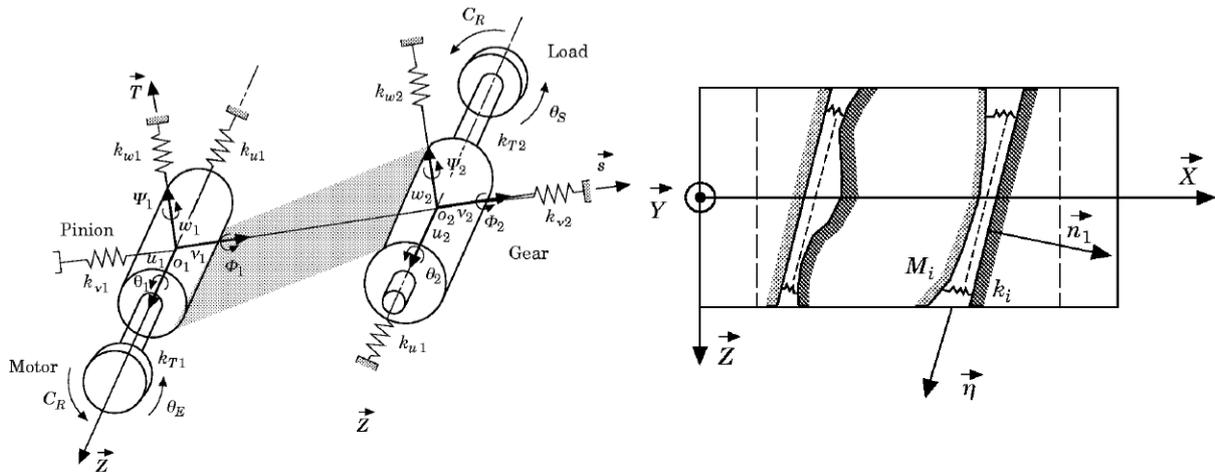


Figure 1-15 Représentation d'un élément d'engrenage et de son plan de base [62]

Plusieurs stratégies de modélisation cohabitent alors et se sont développées parallèlement. Lin et Parker [64] ont mis en évidence à l'aide d'un modèle global en deux dimensions différents modes de vibration d'un train planétaire, qu'ils classèrent en trois catégories : modes de satellites, modes de rotations et modes de translations. Kahraman [65] a ensuite proposé un modèle analytique pour déterminer le partage des charges entre les différents satellites d'un train planétaire. Parker *et al.* [66] ont en 2000 mis en place un premier modèle dynamique mixte combinant éléments finis et formulation analytique des déformations de contact. Kahraman [67] s'est ensuite intéressé aux vibrations d'un train planétaire composé, à l'aide d'un modèle à paramètres concentrés purement torsionnel. Kahraman et Vijayakar [68] ont développé un modèle quasi statique en éléments finis comprenant une couronne déformable, qui a ensuite été étendu par Kahraman *et al.* [69] à des géométries à jantes minces. Cheon et Parker [70], [71] ont étudié l'influence d'erreurs d'assemblage à l'aide d'un modèle en éléments finis. Abousleiman et Vexex [72] ont développé un modèle de train planétaire local comprenant une couronne flexible, proposant une modélisation de cette dernière en éléments finis pour les géométries complexes, ou en la discrétisant en une multitude d'éléments de poutre pour les géométries plus simples. Abousleiman *et al.* [73] ont ensuite complété ce modèle en proposant une modélisation par éléments finis du porte-satellites. Ambarisha et Parker [74] ont étudié le comportement non linéaire de la dynamique d'un train planétaire à l'aide d'un modèle analytique, dont ils ont corrélé les résultats à ceux d'un modèle en éléments finis. Le modèle de train planétaire composé de Kahraman [67] a été repris et étendu par Kiracofe et Parker [75], le généralisant à deux dimensions, puis par Inalpolat et Kahraman [76] pour des architectures plus complexes. Eritenel et Parker [77] se sont intéressés aux réponses modales d'un train planétaire à dentures hélicoïdales. Guo et Parker [78] ont proposé un modèle purement torsionnel de train planétaire composé, synthétisant différents travaux dans un modèle général. Guo et Parker [79] ont également étudié l'influence des jeux de roulements ainsi que de l'absence de jeu générant des contacts sur le flanc inactif des dentures dans un train planétaire. Inalpolat et Kahraman [80] se sont intéressés à la réponse spectrale d'un train planétaire présentant des erreurs d'assemblage. Gu et Vexex [81]–[83] ont développé un modèle local permettant d'étudier l'influence des erreurs d'assemblage des planètes sur le partage des charges entre satellites et sur la réponse dynamique de la transmission. Cooley et Parker [84] ont investigué les effets

gyroscopiques apparaissant à grandes vitesses de rotation. Eritenel et Parker [85] ont développé une formulation de la raideur d'engrènement permettant de prendre en compte des phénomènes non linéaires tels que la perte partielle de contact. Kim *et al.* [86] ont proposé un modèle dynamique de train planétaire incorporant une variation au cours du temps des angles de pression et des rapports de conduite des différents engrènements. Bu *et al.* [87] et Sondkar et Kahraman [88] ont développé des modèles de train planétaire adaptés à des dentures en chevrons, qui seront ensuite étendus par [89]. Chen et Shao [90] ont présenté un modèle global adapté à la modélisation d'erreurs individuelles. Fyler et Inalpolat [91] se sont intéressés au cas particulier des trains planétaires à deux satellites. Fan *et al.* [92] ont développé un modèle hybride comprenant un porte-satellites modélisé par éléments finis et présentant une fissure plus ou moins importante. Chapron [93] a repris le modèle développé par Gu et Velez pour application à l'optimisation des corrections de dentures dans un train planétaire. Leque et Kahraman [94] ont développé un modèle de train planétaire à trois dimensions pour la modélisation d'erreurs d'assemblage. Liu *et al.* [95] et Concli *et al.* [96] ont proposé des modèles hybrides utilisant des fonctions de raideur d'engrènement calculés par éléments finis comme données d'entrée de modèles à paramètres concentrés. Plus récemment, He *et al.* [97] et Li *et al.* [98] ont proposé une modélisation hybride d'un train planétaire dont le planétaire serait flottant, et Hu *et al.* [99] ont développé un modèle hybride comprenant une couronne flexible dont les déformations influent dynamiquement sur les conditions d'engrènement.

## 1.4.2 Modèles d'engrenages spiroconiques

La géométrie unique des engrenages spiroconiques et hypoïdes a considérablement ralenti l'apparition des premiers modèles dynamiques. Le modèle de Astridge et Salzer [100] en 1977 semble être l'un des premiers, avec comme objectif de caractériser le comportement dynamique d'une transmission d'hélicoptère. Ce modèle considère des éléments de poutres pour modéliser les arbres et une partie du carter, des matrices de raideur concentrées pour les paliers, et un modèle par éléments finis d'une partie du carter. Les engrenages coniques de cette étude sont considérés comme rigides, et les erreurs de transmission sont introduites en tant qu'excitation forcée de ce modèle global. Il est intéressant de noter que dès les premiers développements de modèles dynamiques d'engrenages coniques les conditions de montage des engrenages sont considérées, soulignant leur importance sur les conditions d'engrènement des engrenages coniques.

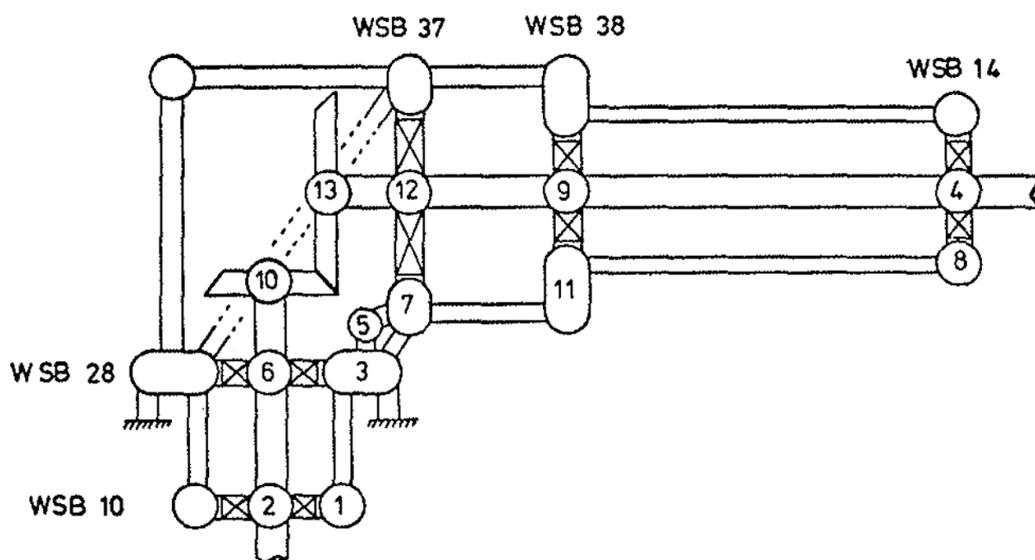


Figure 1-16 Modèle de transmission d'hélicoptère de Astridge et Salzer [100]

Lim et Cheng [101] ont présenté en 1999 un modèle dynamique à paramètres concentrés tridimensionnel, utilisant une formulation simplifiée de la raideur d'engrènement dépendant uniquement du nombre de paires de dent en contact, et dont la ligne d'action est constante dans le temps. Ils proposeront par la suite un second modèle incorporant les erreurs de transmission dans l'expression de leur terme d'excitation [102]. Li *et. al.* [103], [104] se sont intéressés aux couplages entre différents modes de vibration à l'aide d'un modèle à paramètres concentrés tridimensionnel, supposant des engrenages rigides et une ligne d'action constante au cours du temps, et des matrices de raideurs concentrées pour les arbres et paliers.

Cheng et Lim [105] ont proposé un second modèle dynamique pour engrenages hypoïdes en 2003. Ils déterminent à l'aide d'un calcul par éléments finis la position et normale du contact au cours du temps, les erreurs de transmission, et la raideur d'engrènement moyenne, qu'ils utilisent comme données d'entrée d'un modèle à paramètres concentrés.

Wang *et. al.* [106] se sont intéressés à la réponse dynamique d'engrenages hypoïdes à l'aide d'un modèle à paramètres concentrés prenant en compte une raideur d'engrènement non-linéaire, mais néanmoins approximative, et les possibles comportements non-linéaires dus au jeu de denture. Wang et Lim [107] se sont ensuite intéressés à l'impact de l'asymétrie des contacts et des raideurs entre les flancs concave et convexe des engrenages hypoïdes sur leur comportement dynamique avec le même modèle à paramètres concentrés, qui sera également repris pour une étude similaire par Li *et. al.* [108].

Peng [109] développa en 2010 un modèle similaire à celui de Cheng et Lim [105], calculant les raideurs d'engrènement, zones de contact et normales au contact par éléments finis, qu'il utilisa comme données d'entrée dans un modèle à paramètres concentrés. Hua [110] le perfectionna pour y intégrer arbres et paliers.

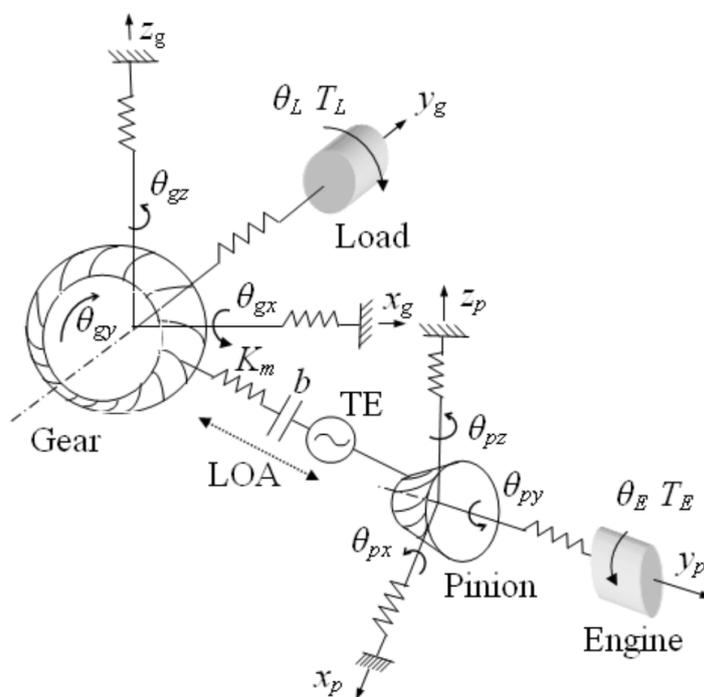


Figure 1-17 Modèle à paramètres concentrés de Peng [109]

Wang *et. al.* [111] ont développé un modèle dynamique par éléments finis uniquement afin d'étudier le comportement d'engrenages spiroconiques soumis à un impact dynamique.

Wang, Teixeira Alves *et. al.* [112]–[114] ont développé deux modèles dynamiques d'engrenages spiroconiques à paramètres concentrés, le premier utilisant une approche globale, déterminant

les raideurs d'engrènement et les erreurs de transmission avec un calcul par éléments finis, le second avec une approche locale, discrétisant la zone de contact en surfaces élémentaires et calculant la raideur associée à chacune des surfaces élémentaires avec un calcul par éléments finis.

Wang [115] a repris le modèle de Peng et Hua [109], [110] en modifiant la formulation de la raideur d'engrènement. Il a, lors du calcul par éléments finis servant à déterminer les caractéristiques de l'engrènement, sommé les contributions de plusieurs points de calcul appartenant à la surface de contact. Wang *et al.* [116] ont ensuite étendu ce modèle afin d'y incorporer un modèle de carter par éléments finis.

Song *et al.* [117] ont développé un modèle d'engrenages beveloïds, des engrenages coniques avec un très faible angle de cône, avec un modèle mixte combinant une modélisation par éléments finis des arbres et carters et un modèle à paramètres concentrés global, avec un calcul préalable des erreurs de transmission et des raideurs d'engrènement par éléments finis.

Yang *et al.* [118] ont proposé un modèle dynamique à paramètres concentrés pour engrenages hypoïdes ou spiroconiques utilisant les erreurs de transmission calculées par éléments finis comme source d'excitation, ainsi qu'une valeur moyenne de la raideur d'engrènement, du point et de la normale de contact.

Yavuz *et al.* [119] ont développé un modèle à paramètres concentrés utilisant des poutres de Timoshenko pour modéliser les arbres et des matrices de raideurs concentrées pour modéliser les paliers. Les raideurs d'engrènement et les caractéristiques géométriques du contact sont calculées à priori par un modèle en éléments finis.

Cao *et al.* [120] ont proposé un modèle tribo-dynamique pour caractériser la durée de vie en fatigue d'engrenages spiroconiques. Ils ont pour cela couplé un modèle de roulements et de lubrification élastohydrodynamique à un modèle d'engrènement à paramètres concentrés utilisant une fonction de raideur d'engrènement, une fonction d'erreurs de transmission et des caractéristiques géométriques de contact de denture déterminées par un calcul par éléments finis.

## 1.5 CONCLUSION

---

### 1.5.1 Stratégies de modélisation

Trois stratégies de modélisation des engrènements se dégagent de cette étude bibliographique :

- (1) Les modèles par éléments finis. Ces modèles présentent l'avantage de ne pas avoir à effectuer d'hypothèse sur la géométrie des contacts, notamment dans le cas des spiroconiques. Les temps de calcul élevés de ces modèles limitent cependant le nombre de positions cinématiques étudiées, dégradant leurs capacités à modéliser des phénomènes à basses fréquences telles que certaines erreurs d'assemblage.
- (2) Les modèles à paramètres concentrés globaux. Ces modèles mathématiques utilisent des grandeurs telles que la raideur d'engrènement ou les erreurs de transmission comme fonction d'excitation de leur modèle. Ces fonctions d'excitation sont calculées préalablement, le plus souvent dans des conditions quasi-statiques. Ces modèles ont l'avantage de présenter des temps de calcul faibles, mais se basent sur l'hypothèse contestable que leur fonction d'excitation reste valable en dynamique. Cette hypothèse est d'autant plus contestable dans les systèmes à engrènements multiples, les différents engrènements interagissant entre eux.
- (3) Les modèles à paramètres concentrés locaux. Ces modèles mathématiques sont centrés sur la résolution simultanée des conditions de contact et des équations du mouvement, et ne nécessitent donc pas de fonction d'excitation, la variation périodique des conditions de contact venant exciter le système naturellement. Ils présentent l'avantage de temps de calcul faibles, mais se reposent sur une formulation des conditions de contact, tant géométrique qu'élastique, qui peut ne pas être satisfaisante.

Chacune de ces stratégies de modélisation présentent des avantages et des inconvénients prononcés, et le choix de la stratégie de modélisation est donc fortement dépendant des objectifs de l'étude.

---

### 1.5.2 Objectifs de la thèse

L'objectif premier de ce travail de thèse est de développer un modèle de transmission pour machine-outil rendant compte des couplages dynamiques importants existant entre un train épicycloïdal et un couple d'engrenages spiroconiques, ainsi que de l'influence de différentes erreurs sur le comportement de cette transmission.

A cette fin, une approche mathématique centrée sur la résolution des conditions de contact simultanément dans les différents engrènements du système est proposée. Cette approche mathématique permet d'effectuer des études paramétriques étendues en conservant des temps de calcul raisonnables en comparaison avec les approches par éléments finis, nécessaires à la caractérisation de défauts.

Une attention particulière est portée à la modélisation de l'interface d'engrènement des spiroconiques, afin de s'affranchir des hypothèses sur les positions des zones de contact et sur la direction de la ligne d'action, couramment rencontrées dans la littérature. Le modèle de train épicycloïdal s'insère dans la continuité directe des travaux de Chapron [93] et Gu et Velez [81]–[83].

Enfin, une étude sur l'impact du couplage entre engrenages spiroconiques et train épicycloïdal, ainsi que de l'impact de différents défauts sur les caractéristiques de la transmission sera présentée.



---

# CHAPITRE 2 MODELE



Afin de pouvoir étudier l'influence de nombreux paramètres et défauts sur la réponse temporelle de la transmission, un modèle à paramètres concentrés a été privilégié. Le principe de fonctionnement de ces modèles est de réduire les solides à un très faible nombre de nœuds dont le comportement est dicté par des éléments de masses et de raideurs.

La réduction importante du nombre de nœuds en comparaison avec d'autres méthodes de modélisation, tels que les méthodes de type éléments-finis, permet de diminuer d'autant les temps de calculs. La réduction des temps de calcul est primordiale à l'application envisagée, permettant non seulement des études paramétriques importantes mais également de caractériser de manière exhaustive des phénomènes de basses fréquences nécessitant la simulation de nombreuses périodes d'engrènement.

En contrepartie, le faible nombre de nœuds implique l'utilisation d'éléments relativement complexes de par l'ensemble des phénomènes physiques qu'ils sont amenés à représenter. Ce chapitre détaille les éléments développés dans le cadre de cette étude, avant de présenter l'architecture du modèle et la stratégie de résolution des équations du mouvement.

## 2.1 ELEMENTS D'ENGRENAGE

En se basant sur les travaux de Vexé & Maatar [62], les hypothèses suivantes sont émises :

- (1) Les corps d'engrenages sont supposés rigides, et l'élasticité de l'engrènement est transférée aux interfaces en contact
- (2) Le régime de lubrification est supposé parfaitement élastohydrodynamique, permettant de négliger les forces de friction, tangentielles au contact, face aux forces normales.
- (3) La normale au contact à tout moment de l'engrènement est supposée égale à la normale au flanc de denture non déformé

En se basant sur ces hypothèses, une approche de mécanique des solides indéformables est utilisée pour formuler les déplacements des nœuds, qui se voient attribuer six degrés de liberté, correspondant aux trois translations et trois rotations, et définis relativement aux déplacements de corps rigide. Un nœud est associé au centre de rotation de chacune des roues dentées, et les degrés de liberté des engrenages du système s'écrivent selon les torseurs suivants :

Pour les membres centraux du train épicycloïdal :

$$\{S_g^{R_1}(O_g)\} = \begin{cases} \boldsymbol{\omega}_g^{R_1} = \phi_g \mathbf{x}_1 + \psi_g \mathbf{y}_1 + \vartheta_g \mathbf{z}_{10} \\ \mathbf{u}_g^{R_1}(O_g) = x_g \mathbf{x}_1 + y_g \mathbf{y}_1 + z_g \mathbf{z}_{10} \end{cases} \quad 2-1$$

Pour les satellites :

$$\{S_j^{R_j}(O_j)\} = \begin{cases} \boldsymbol{\omega}_j^{R_j} = \phi_j \mathbf{x}_j + \psi_j \mathbf{y}_j + \vartheta_j \mathbf{z}_{10} \\ \mathbf{u}_j^{R_j}(O_j) = x_j \mathbf{x}_j + y_j \mathbf{y}_j + z_j \mathbf{z}_{10} \end{cases} \quad 2-2$$

Pour la roue conique :

$$\{S_w^{R_{10}}(O_w)\} = \begin{cases} \boldsymbol{\omega}_w^{R_{10}} = \phi_w \mathbf{x}_{10} + \psi_w \mathbf{y}_{10} + \vartheta_w \mathbf{z}_{10} \\ \mathbf{u}_w^{R_{10}}(O_w) = x_w \mathbf{x}_{10} + y_w \mathbf{y}_{10} + z_w \mathbf{z}_{10} \end{cases} \quad 2-3$$

Pour le pignon conique :

$$\{S_p^{R_{11}}(O_p)\} = \begin{cases} \boldsymbol{\omega}_p^{R_{11}} = \phi_p \mathbf{x}_{11} + \psi_p \mathbf{y}_{11} + \vartheta_p \mathbf{z}_{11} \\ \mathbf{u}_p^{R_{11}}(O_p) = x_p \mathbf{x}_{11} + y_p \mathbf{y}_{11} + z_p \mathbf{z}_{11} \end{cases} \quad 2-4$$

Les différents repères d'expression des degrés de liberté des engrenages du système sont représentés en figure 2-19 et figure 2-20

### 2.1.1 Expression des efforts d'engrènement

En se basant sur la troisième loi de Newton, les efforts d'engrènement entre deux roues dentées quelconques  $g_1$  et  $g_2$  s'expriment de manière générale :

$$\mathbf{F}_{mesh} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{g_2/g_1} \\ \mathbf{T}_{g_2/g_1}(O_{g_1}) \\ \mathbf{R}_{g_1/g_2} \\ \mathbf{T}_{g_1/g_2}(O_{g_2}) \end{bmatrix} \quad 2-5$$

Si l'interface de contact entre  $g_1$  et  $g_2$  se résume à un nombre  $N_t$  de surfaces  $S_n$  en contact, on peut définir l'effort de réaction  $\mathbf{R}_{g_2/g_1}$  comme l'intégrale sur les surfaces de contact de la forme différentielle des efforts de contact, qui par définition s'exprime selon la normale au contact :

$$\begin{cases} \mathbf{R}_{g_2/g_1} = \sum_{n=1}^{N_t} \iint_{M \in S_n} d\mathbf{F}_{g_2/g_1}(M) \\ \mathbf{T}_{g_2/g_1}(O_{g_1}) = \sum_{n=1}^{N_t} \iint_{M \in S_n} \mathbf{O}_{g_1} \mathbf{M} \wedge d\mathbf{F}_{g_2/g_1}(M) \end{cases} \quad 2-6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{R}_{g_2/g_1} = \sum_{n=1}^{N_t} \iint_{M \in S_n} dF_{g_2/g_1}(M) \cdot \mathbf{n}_{c_{g_2/g_1}}(M) \\ \mathbf{T}_{g_2/g_1}(O_{g_1}) = \sum_{n=1}^{N_t} \iint_{M \in S_n} dF_{g_2/g_1}(M) \cdot \mathbf{O}_{g_1} \mathbf{M} \wedge \mathbf{n}_{c_{g_2/g_1}}(M) \end{cases} \quad 2-7$$

L'expression des efforts d'engrènement peut donc se réduire à :

$$\Rightarrow \mathbf{F}_{mesh} = \sum_{n=1}^{N_t} \iint_{M \in S_n} dF_{g_2/g_1}(M) \cdot \mathbf{v}(M) \quad 2-8$$

$$\text{avec } \mathbf{v}(M) = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{c_{g_2/g_1}}(M) \\ \mathbf{O}_{g_1} \mathbf{M} \wedge \mathbf{n}_{c_{g_2/g_1}}(M) \\ -\mathbf{n}_{c_{g_2/g_1}}(M) \\ -\mathbf{O}_{g_2} \mathbf{M} \wedge \mathbf{n}_{c_{g_2/g_1}}(M) \end{bmatrix} \quad 2-9$$

Le vecteur  $\mathbf{v}$ , appelé vecteur structural, dépend uniquement de la géométrie du contact entre les deux roues dentées, c'est-à-dire de la géométrie des surfaces de contact et de leur positionnement relatif.

En supposant que le contact entre les deux corps peut être ramené à une fondation élastique de ressorts indépendants, s'apparentant à une fondation de Winkler [121], la forme différentielle des efforts de contact peut s'exprimer comme le produit d'une raideur élémentaire et d'une déflexion normale au contact :

$$dF_{g_2/g_1}(M) = k(M)\Delta(M) \quad 2-10$$

La déflexion normale au contact correspond à la différence entre le rapprochement  $\delta(M)$ , dû aux degrés de liberté, et la distance de séparation initiale  $\delta_e(M)$  :

$$\Delta(M) = \delta(M) - \delta_e(M) \quad 2-11$$

L'expression du rapprochement est développée, et donne :

$$\begin{aligned} \delta(M) &= (\mathbf{u}_{g_1}(M) - \mathbf{u}_{g_2}(M)) \cdot \mathbf{n}_{c_{g_2/g_1}}(M) \\ &= (\mathbf{u}_{g_1}(O_{g_1}) + \boldsymbol{\omega}_{g_1} \wedge \mathbf{O}_{g_1} \mathbf{M} - \mathbf{u}_{g_2}(O_{g_2}) - \boldsymbol{\omega}_{g_2} \wedge \mathbf{O}_{g_2} \mathbf{M}) \cdot \mathbf{n}_{c_{g_2/g_1}}(M) \\ &= {}^T \mathbf{v}(M) \mathbf{q} \end{aligned} \quad 2-12$$

$$\text{avec } \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{g_1}(O_{g_1}) \\ \boldsymbol{\omega}_{g_1} \\ \mathbf{u}_{g_2}(O_{g_2}) \\ \boldsymbol{\omega}_{g_2} \end{bmatrix} \quad 2-13$$

Le vecteur  $\mathbf{q}$  rassemble donc les degrés de liberté des deux roues dentées. On peut donc réécrire la déflexion normale au contact et la forme différentielle des efforts de contact :

$$\Rightarrow \Delta(M) = {}^T \mathbf{v}(M) \mathbf{q} - \delta_e(M) \quad 2-14$$

$$\Rightarrow dF_{g_2/g_1}(M) = k(M)({}^T\mathbf{v}(M) \mathbf{q} - \delta_e(M)) \quad 2-15$$

En réinjectant cette nouvelle expression de la forme différentielle des efforts de contact dans l'expression des efforts d'engrènement, on obtient :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbf{F}_{mesh} &= \sum_{n=1}^{N_t} \iint_{M \in S_n} k(M) {}^T\mathbf{v}(M) \mathbf{q} \mathbf{v}(M) - k(M) \delta_e(M) \mathbf{v}(M) \\ &= \left[ \sum_{n=1}^{N_t} \iint_{M \in S_n} k(M) \mathbf{v}(M) {}^T\mathbf{v}(M) \right] \mathbf{q} - \left[ \sum_{n=1}^{N_t} \iint_{M \in S_n} k(M) \delta_e(M) \mathbf{v}(M) \right] \end{aligned} \quad 2-16$$

$$\Rightarrow \mathbf{F}_{mesh} = \mathbf{K}_{mesh} \mathbf{q} + \mathbf{F}_{\delta_e} \quad 2-17$$

$$\text{avec } \mathbf{K}_{mesh} = \sum_{n=1}^{N_t} \iint_{M \in S_n} k(M) \mathbf{v}(M) {}^T\mathbf{v}(M) \quad 2-18$$

$$\text{avec } \mathbf{F}_{\delta_e} = - \sum_{n=1}^{N_t} \iint_{M \in S_n} k(M) \delta_e(M) \mathbf{v}(M) \quad 2-19$$

En discrétisant les surfaces de contact  $S_n$  des  $N_t$  dents en contact en  $N_m$  surfaces élémentaires centrées en un point  $M_m$ , on peut faire l'approximation suivante :

$$\mathbf{K}_{mesh} = \sum_{n=1}^{N_t} \sum_{m=1}^{N_m} k_m \mathbf{v}(M_m) {}^T\mathbf{v}(M_m) \quad 2-20$$

$$\mathbf{F}_{\delta_e} = - \sum_{n=1}^{N_t} \sum_{m=1}^{N_m} k_m \delta_e(M_m) \mathbf{v}(M_m) \quad 2-21$$

Avec  $k_m$  la raideur élémentaire associée à la  $m^{\text{ème}}$  surface élémentaire. De manière similaire, les efforts de contact s'écrivent alors :

$$F_{c_m} = k_m ({}^T\mathbf{v}(M_m) \mathbf{q} - \delta_e(M_m)) \quad 2-22$$

Les efforts d'engrènement entre deux roues dentées quelconques peuvent donc s'exprimer comme le produit d'une matrice de raideurs et du vecteur des degrés de liberté de ces deux roues dentées, auquel s'ajoute un vecteur d'efforts d'excitation dus aux séparations initiales. Cette matrice de raideurs et ce vecteur d'efforts d'excitation s'expriment eux-mêmes, une fois les surfaces de contact discrétisées en surfaces élémentaires, à partir des raideurs élémentaires associées ainsi que des vecteurs structurels et des distances de séparation. Cette formulation reste générale, et aucune hypothèse n'a encore été émise sur la géométrie du contact.

Les méthodes de détermination des raideurs élémentaires, des vecteurs structurels et des distances de séparation utilisées dans cette étude diffèrent des engrenages cylindriques aux engrenages coniques, et sont détaillées dans la suite de cette sous-partie.

## 2.1.2 Train épicycloïdal

L'élément d'engrenage cylindrique développé par Vexex et Maatar [62] est utilisé dans cette étude, dans la continuité des travaux sur les trains planétaires et épicycloïdaux de Gu [81]–[83] et Chapron [93].

### 2.1.2.1 Définition des engrènements

Les contacts entre les différentes dentures cylindriques sont supposés linéiques, à l'intérieur du plan de base théorique, et de normale constante au cours du temps. Les lignes de contact sont discrétisées en  $N_m$  segments élémentaires de point central  $M_m$ . Les différents engrènements du train épicycloïdal sont définis dans la figure 2-1, les points  $A_g$  délimitant les zones d'action des différents plans de base.

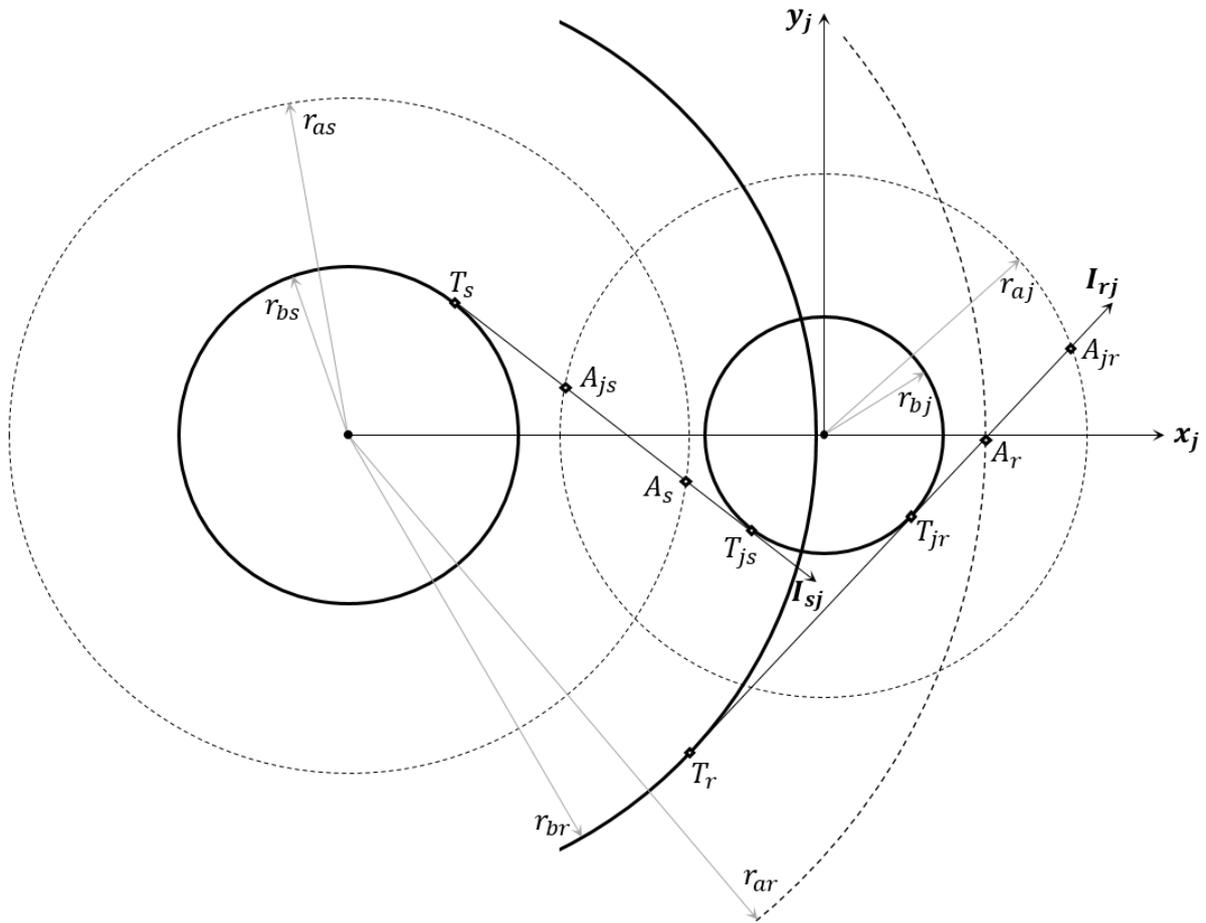


Figure 2-1 Définition des zones d'action des plans de base des différents engrènements d'un train épicycloïdal

Les plans de base sont représentés en figure 2-2 et figure 2-3, un point de discrétisation d'une ligne de contact est schématisé sur ces plans de base afin d'en définir les paramètres géométriques.

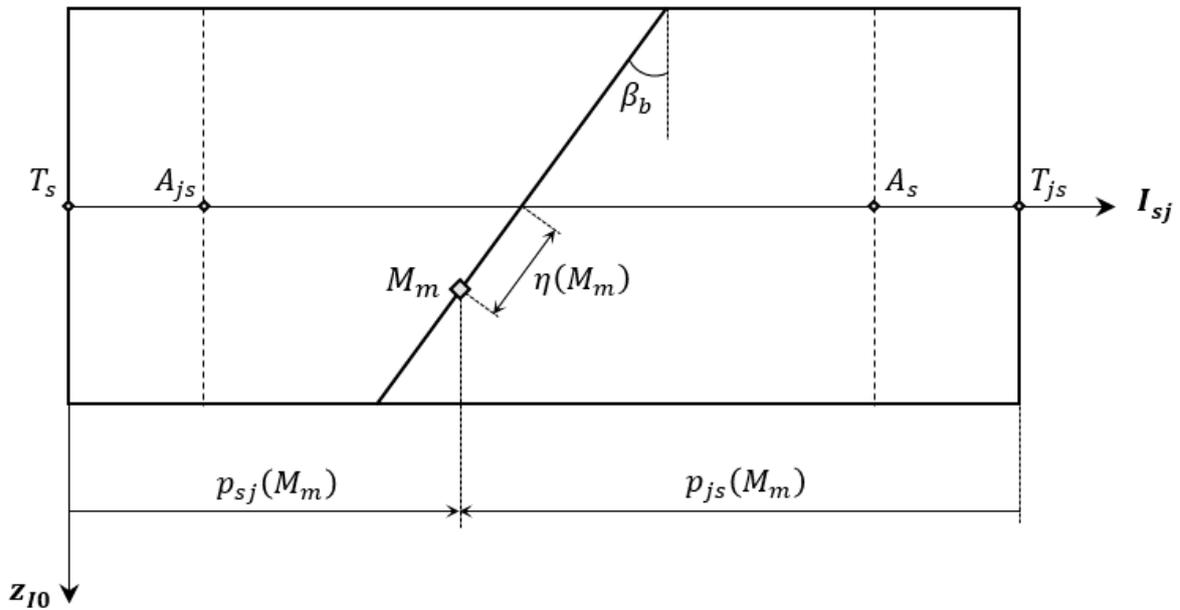


Figure 2-2 Représentation d'une ligne de contact dans le plan de base d'un engrènement extérieur

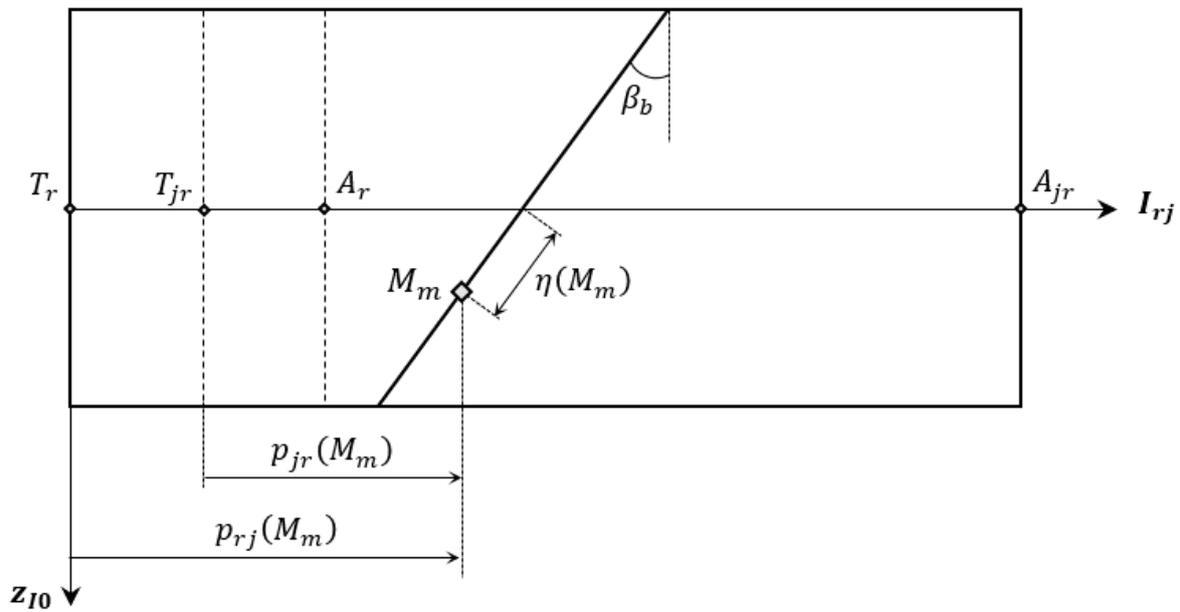


Figure 2-3 Représentation d'une ligne de contact dans le plan de base d'un engrènement intérieur

La position angulaire  $\Phi_j$  des satellites est définie comme un multiple entier quelconque de l'angle de résolution de montage :

$$\Phi_j = n_j \kappa \quad \forall n_j \in \mathbb{N} \quad 2-23$$

Par convention, l'angle  $\Phi_1$  du premier satellite est choisi comme nul. L'angle de résolution de montage définit le plus petit angle possible entre deux positions angulaires de satellite pour lesquelles le montage est possible :

$$\kappa = \frac{2\pi}{|Z_r| + Z_s} \quad 2-24$$

Il est intéressant de noter qu'une répartition angulaire uniforme des satellites n'est donc possible que dans certaines configurations, ce qui correspond à la condition mathématique suivante :

$$\Phi_j = \frac{2\pi}{N_p} (j - 1) \Rightarrow \frac{|Z_r| + Z_s}{N_p} = n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad 2-25$$

En se basant sur les travaux de Velez et Flamand [63], on détermine les positions relatives des différentes lignes de contact des différents engrènements, permettant d'en déduire les longueurs des lignes de contact dans leurs plans d'action respectifs, illustrés en figure 2-2 et figure 2-3. La différence de phase entre l'engrènement du planétaire avec le satellite n°j et l'engrènement du planétaire avec le satellite n°1 s'écrit :

$$\Delta_{s1}^{sj} = \|\mathbf{A}_{js}\mathbf{M}_{js}\| \bmod p_{bt} \quad 2-26$$

Avec :

$$\|\mathbf{A}_{js}\mathbf{M}_{js}\| = \varepsilon n p_{bt} - \varepsilon r_{bs} \Phi_j \quad n \in \mathbb{N} \quad 2-27$$

La différence de phase entre l'engrènement de la couronne avec le satellite n°j et l'engrènement du planétaire avec le satellite n°1 s'écrit :

$$\Delta_{s1}^{rj} = \|\mathbf{A}_r\mathbf{M}_{jr}\| \bmod p_{bt} \quad 2-28$$

Avec :

$$\|\mathbf{A}_r\mathbf{M}_{jr}\| = \|\mathbf{A}_{js}\mathbf{M}_{js}\| + \varepsilon n p_{bt} + s_{bj} - \|\mathbf{A}_{js}\mathbf{T}_{js}\| - r_{bj}(\alpha_s + \alpha_r) - \|\mathbf{T}_{jr}\mathbf{A}_r\| \quad n \in \mathbb{N} \quad 2-29$$

$s_{bj}$  représente l'épaisseur de dent du satellite n°j dans la direction tangentielle au cercle de base.

La normale théorique au contact peut être déterminée en fonction des paramètres géométriques des dentures, et les vecteurs structurels s'écrivent alors :

Pour les engrènements planétaire - satellites :

$$\mathbf{v}(M_m) = \left[ \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{l} \cos \beta_b \sin \rho_{sj} \\ \varepsilon \cos \beta_b \cos \rho_{sj} \\ -\varepsilon \sin \beta_b \\ \sin \beta_b \sin \rho_{sj} r_{bs} - \varepsilon \cos \rho_{sj} (\eta(M_m) + p_{sj}(M_m) \varepsilon \sin \beta_b) \\ \varepsilon \sin \beta_b \cos \rho_{sj} r_{bs} + \sin \rho_{sj} (\eta(M_m) + p_{sj}(M_m) \varepsilon \sin \beta_b) \\ \varepsilon \cos \beta_b r_{bs} \end{array} \right\}_{R_1} \\ \left\{ \begin{array}{l} -\cos \beta_b \sin \alpha_{sj} \\ -\varepsilon \cos \beta_b \cos \alpha_{sj} \\ \varepsilon \sin \beta_b \\ \sin \beta_b \sin \alpha_{sj} r_{bj} + \varepsilon \cos \alpha_{sj} (\eta(M_m) - p_{js}(M_m) \varepsilon \sin \beta_b) \\ \varepsilon \sin \beta_b \cos \alpha_{sj} r_{bj} - \sin \alpha_{sj} (\eta(M_m) - p_{js}(M_m) \varepsilon \sin \beta_b) \\ \varepsilon \cos \beta_b r_{bj} \end{array} \right\}_{R_j} \end{array} \right] \quad 2-30$$

Pour les engrènements couronne - satellites :

$$\mathbf{v}(M_m) = \left[ \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} -\cos \beta_b \sin \rho_{rj} \\ \varepsilon \cos \beta_b \cos \rho_{rj} \\ \varepsilon \sin \beta_b \\ \sin \beta_b \sin \rho_{rj} r_{br} - \varepsilon \cos \rho_{rj} (\eta(M_m) + p_{rj}(M_m) \varepsilon \sin \beta_b) \\ -\varepsilon \sin \beta_b \cos \rho_{rj} r_{br} - \sin \rho_{rj} (\eta(M_m) + p_{rj}(M_m) \varepsilon \sin \beta_b) \\ \varepsilon \cos \beta_b r_{br} \end{array} \right\}_{R_1} \\ \left\{ \begin{array}{c} \cos \beta_b \sin \alpha_{rj} \\ -\varepsilon \cos \beta_b \cos \alpha_{rj} \\ -\varepsilon \sin \beta_b \\ -\sin \beta_b \sin \alpha_{rj} r_{bj} + \varepsilon \cos \alpha_{rj} (\eta(M_m) + p_{jr}(M_m) \varepsilon \sin \beta_b) \\ \varepsilon \sin \beta_b \cos \alpha_{rj} r_{bj} + \sin \alpha_{rj} (\eta(M_m) + p_{jr}(M_m) \varepsilon \sin \beta_b) \\ -\varepsilon \cos \beta_b r_{bj} \end{array} \right\}_{R_j} \end{array} \right] \quad 2-31$$

Avec les angles de projection :

$$\begin{aligned} \rho_{sj} &= \alpha_{sj} - \varepsilon \Phi_j \\ \rho_{rj} &= \alpha_{rj} + \varepsilon \Phi_j \end{aligned} \quad 2-32$$

Les raideurs linéiques élémentaires  $k_m$  sont calculées en se basant sur les travaux de Weber et Banaschek [15], [16], et prennent en compte les contributions de la déformation du contact, de flexion de la dent et de la déformation du corps d'engrenage (cf. section 1.3.1.1, équations 1-1, 1-2 et 1-3).

### 2.1.2.2 Modèle de couronne flexible

En suivant les travaux de Abousleiman et Vexel [72], un modèle de couronne flexible est employé où un nœud est associé à chacune des dents de la couronne, reliés entre eux par des éléments de poutre. Chaque ligne de contact est associée à un nœud  $N_n$  situé sur le plan médian de la couronne à la base de chaque dent, et dont les degrés de liberté sont exprimés dans le repère  $R_{I0}$  lié à la couronne. Le vecteur structurel se réécrit alors :

$$\mathbf{v}(M_m) = \left[ \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} -\cos \beta_b \sin \gamma_{rj} \\ \varepsilon \cos \beta_b \cos \gamma_{rj} \\ \varepsilon \sin \beta_b \\ \sin \beta_b (\sin \gamma_{rj} r_{br} - \varepsilon Y_{N_n}) - \varepsilon \cos \gamma_{rj} (\eta(M_m) + p_{rj}(M_m) \varepsilon \sin \beta_b) \\ -\varepsilon \sin \beta_b (\cos \gamma_{rj} r_{br} - X_{N_n}) - \sin \gamma_{rj} (\eta(M_m) + p_{rj}(M_m) \varepsilon \sin \beta_b) \\ \varepsilon \cos \beta_b (r_{br} - X_{N_n} \cos \gamma_{rj} - \varepsilon Y_{N_n} \sin \gamma_{rj}) \end{array} \right\}_{R_{I0}} \\ \left\{ \begin{array}{c} \cos \beta_b \sin \alpha_{rj} \\ -\varepsilon \cos \beta_b \cos \alpha_{rj} \\ -\varepsilon \sin \beta_b \\ -\sin \beta_b \sin \alpha_{rj} r_{bj} + \varepsilon \cos \alpha_{rj} (\eta(M_m) + p_{jr}(M_m) \varepsilon \sin \beta_b) \\ \varepsilon \sin \beta_b \cos \alpha_{rj} r_{bj} + \sin \alpha_{rj} (\eta(M_m) + p_{jr}(M_m) \varepsilon \sin \beta_b) \\ -\varepsilon \cos \beta_b r_{bj} \end{array} \right\}_{R_j} \end{array} \right] \quad 2-33$$

L'angle  $\gamma_r$  est défini comme l'angle séparant le repère fixe  $R_{I0}$  lié à la couronne au repère mobile  $R_1$  lié aux centres du satellite n°1 et du porte-satellites, il est défini comme suit :

$$\gamma_{rj} = \alpha_{rj} + \varepsilon (\Phi_j - \lambda_r^1) - \vartheta_{c0} \quad 2-34$$

Avec  $\lambda_r^1$  l'angle de rotation de corps rigide de la couronne dans le repère mobile  $R_1$ , et  $\vartheta_{c0}$  l'angle initial séparant les repères  $R_{I0}$  et  $R_1$ . La figure 2-4 représente schématiquement les différents

nœuds du modèle de couronne flexible, ainsi que la position relative des repères  $R_{I0}$  et  $R_1$  et des différentes lignes de contact en position initiale, avec par convention le point de contact  $M_{1s1}$  situé à l'entrée de la fenêtre d'action du plan de base.

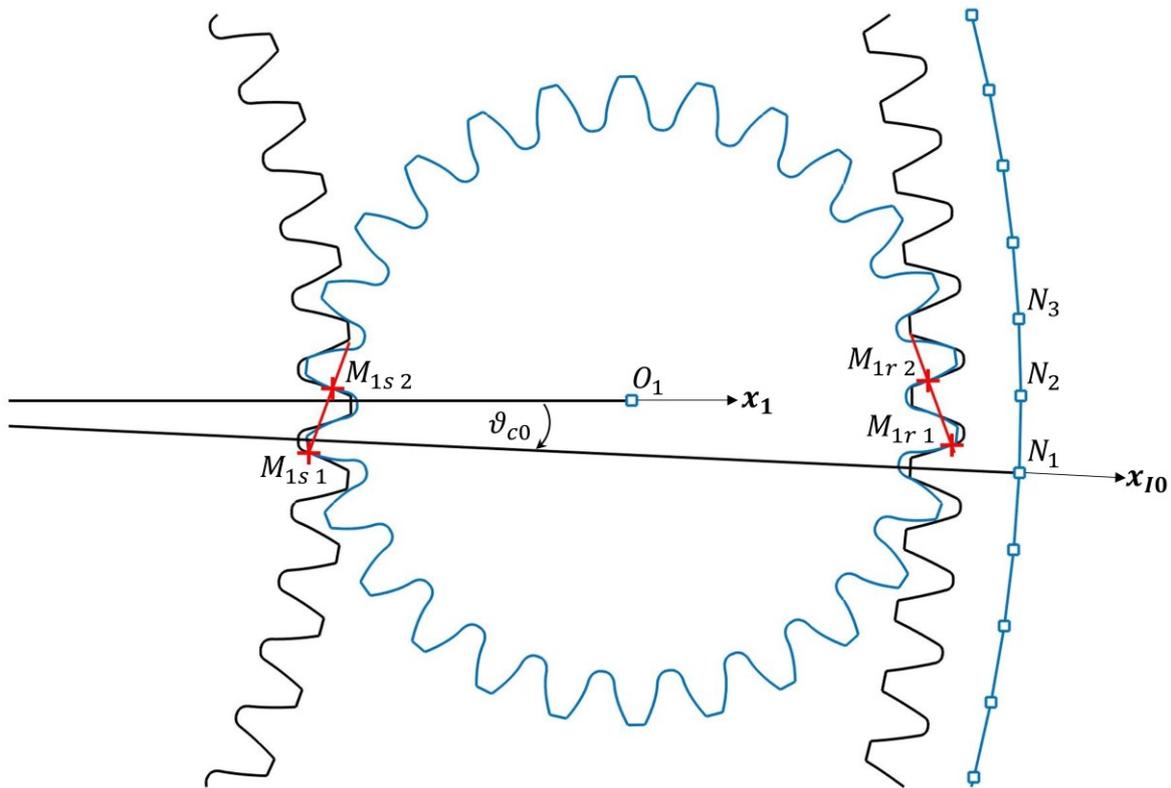


Figure 2-4 Représentation schématique du modèle de couronne flexible

### 2.1.2.3 Erreurs d'assemblage

L'architecture particulière des trains épicycloïdaux génère des couplages forts entre leurs différents engrènements. Une erreur d'assemblage peut donc par conséquent fortement dégrader les caractéristiques de la transmission, impactant le partage de la charge entre les satellites et les erreurs de transmission globales. Les erreurs d'assemblage proviennent des écarts de positionnement relatif des différents mobiles dus aux tolérances de montage et de fabrication de ces pièces. En suivant les travaux de Vexé et Maatar [62], Gu et Vexé [82], [83] et Chapron [93], les erreurs d'assemblages sont modélisées par un torseur de petits déplacements représentant la distance parcourue par le centre géométrique du solide concerné. Différents types d'erreurs d'assemblage sont traités dans cette étude :

- (1) Les erreurs de position, correspondant à un décalage de l'axe de rotation du solide
- (2) Les erreurs d'excentration, correspondant à un décalage du centre géométrique du solide par rapport à son axe de rotation
- (3) Les erreurs de désalignement, correspondant à un désalignement de l'axe de rotation du solide
- (4) Les erreurs de désaxage, correspondant à un désalignement de l'axe géométrique du solide par rapport à son axe de rotation

Ces erreurs d'assemblage sont définies en figure 2-5, et notamment illustrées en figure 1-8. Les torseurs des erreurs d'assemblage s'expriment :

Pour les membres centraux du train épicycloïdal :

$$\{S_g^{R_{I0}}(O_g)\} = \begin{cases} \omega_g^{R_{I0}} = e\phi_g \mathbf{x}_{I0} + e\psi_g \mathbf{y}_{I0} + e\xi_g \xi_g \\ u_g^{R_{I0}}(O_g) = ex_g \mathbf{x}_{I0} + ey_g \mathbf{y}_{I0} + ec_g \mathbf{c}_g \end{cases} \quad 2-35$$

Pour les satellites :

$$\{S_j^{R_j}(O_j)\} = \begin{cases} \omega_j^{R_j} = e\phi_j \mathbf{x}_j + e\psi_j \mathbf{y}_j + e\xi_j \xi_j \\ u_j^{R_j}(O_j) = ex_j \mathbf{x}_j + ey_j \mathbf{y}_j + ec_j \mathbf{c}_j \end{cases} \quad 2-36$$

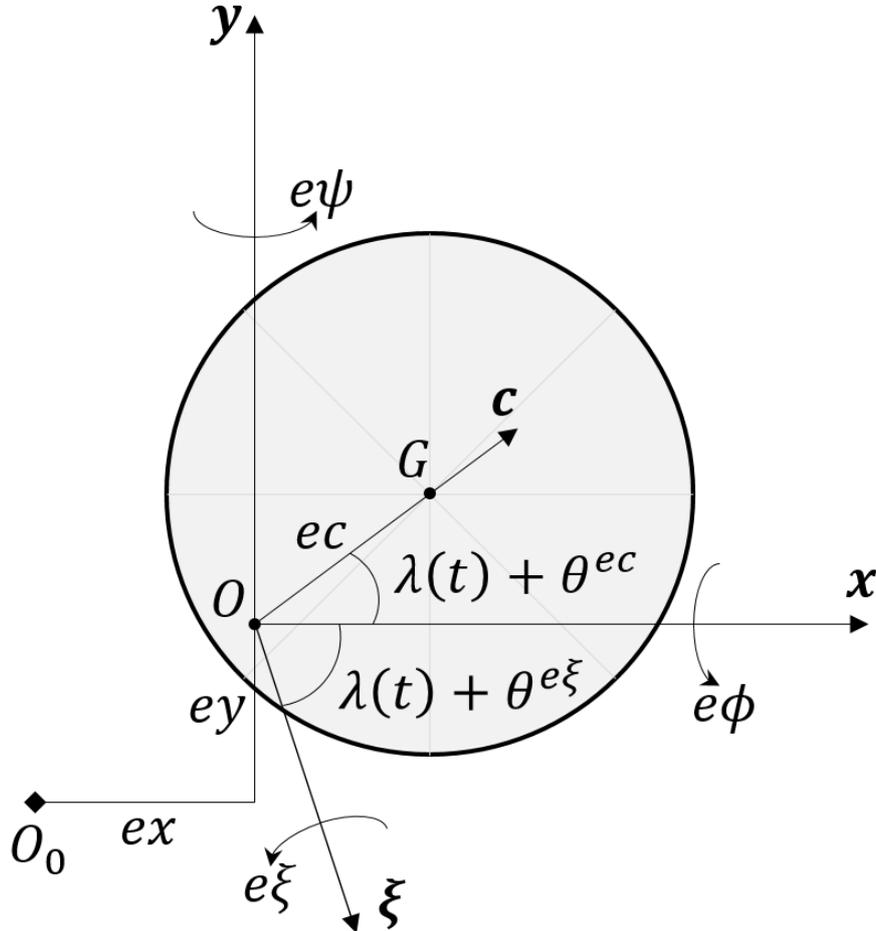


Figure 2-5 Représentation des erreurs d'assemblage d'un engrenage cylindrique, avec  $G$  centre géométrique de l'engrenage,  $O$  centre de rotation instantané réel de l'engrenage, et  $O_0$  centre de rotation instantané théorique et centre géométrique de l'engrenage en absence d'erreurs d'assemblage

L'écart normal à la denture engendré par ces petits déplacements s'écrit :

*Engrenements intérieurs*

Planétaire :

$$u_s^e(M_m) = \begin{pmatrix} \cos \beta_b \sin \sigma_s \\ \varepsilon \cos \beta_b \cos \sigma_s \\ \cos \beta_b \sin \zeta_s^{ec} \\ \sin \beta_b \sin \sigma_s r_{bs} - \varepsilon \cos \sigma_s (\eta(M_m) + p_{sj}(M_m) \varepsilon \sin \beta_b) \\ \varepsilon \sin \beta_b \cos \sigma_s r_{bs} + \sin \sigma_s (\eta(M_m) + p_{sj}(M_m) \varepsilon \sin \beta_b) \\ \sin \beta_b \sin \zeta_s^{e\xi} r_{bs} - \varepsilon \cos \zeta_s^{e\xi} (\eta(M_m) + p_{sj}(M_m) \varepsilon \sin \beta_b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ex_s \\ ey_s \\ ec_s \\ e\phi_s \\ e\psi_s \\ e\xi_s \end{pmatrix} \quad 2-37$$

Satellites :

$$u_{js}^e(M_m) = \begin{matrix} T \\ \left\{ \begin{array}{l} -\cos \beta_b \sin \alpha_{sj} \\ -\varepsilon \cos \beta_b \cos \alpha_{sj} \\ -\cos \beta_b \sin \zeta_{js}^{ec} \\ \sin \beta_b \sin \alpha_{sj} r_{bj} + \varepsilon \cos \alpha_{sj} (\eta(M_m) - p_{js}(M_m)\varepsilon \sin \beta_b) \\ \varepsilon \sin \beta_b \cos \alpha_{sj} r_{bj} - \sin \alpha_{sj} (\eta(M_m) - p_{js}(M_m)\varepsilon \sin \beta_b) \\ \sin \beta_b \sin \zeta_{js}^{e\xi} r_{bj} - \varepsilon \cos \zeta_{js}^{e\xi} (\eta(M_m) - p_{js}(M_m)\varepsilon \sin \beta_b) \end{array} \right\} \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} ex_j \\ ey_j \\ ec_j \\ e\phi_j \\ e\psi_j \\ e\xi_j \end{array} \right\} \quad 2-38$$

Porte-satellites :

$$u_{cs}^e(M_m) = \begin{matrix} T \\ \left\{ \begin{array}{l} -\cos \beta_b \sin \sigma_s \\ -\varepsilon \cos \beta_b \cos \sigma_s \\ -\cos \beta_b \sin \zeta_{cs}^{ec} \\ \sin \beta_b (\sin \sigma_s r_{bj} + \varepsilon \sin \sigma_c R_c) + \varepsilon \cos \sigma_s (\eta(M_m) - p_{js}(M_m)\varepsilon \sin \beta_b) \\ \varepsilon \sin \beta_b (\cos \sigma_s r_{bj} - \cos \sigma_c R_c) - \sin \sigma_s (\eta(M_m) - p_{js}(M_m)\varepsilon \sin \beta_b) \\ \sin \beta_b (\sin \zeta_{cs}^{e\xi} r_{bj} + \varepsilon \sin \zeta_c^{e\xi} R_c) + \varepsilon \cos \zeta_{cs}^{e\xi} (\eta(M_m) - p_{js}(M_m)\varepsilon \sin \beta_b) \end{array} \right\} \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} ex_c \\ ey_c \\ ec_c \\ e\phi_c \\ e\psi_c \\ e\xi_c \end{array} \right\} \quad 2-39$$

*Engrènements intérieurs*

Couronne :

$$u_r^e(M_m) = \begin{matrix} T \\ \left\{ \begin{array}{l} -\cos \beta_b \sin \sigma_r \\ \varepsilon \cos \beta_b \cos \sigma_r \\ -\cos \beta_b \sin \zeta_r^{ec} \\ \sin \beta_b (\sin \sigma_r r_{br} - \varepsilon Y_{N_n}) - \varepsilon \cos \sigma_r (\eta(M_m) + p_{rj}\varepsilon \sin \beta_b) \\ -\varepsilon \sin \beta_b (\cos \sigma_r r_{br} - X_{N_n}) - \sin \sigma_r (\eta(M_m) + p_{rj}\varepsilon \sin \beta_b) \\ \sin \beta_b (\sin \zeta_r^{e\xi} r_{br} + \varepsilon D_{N_n}) - \varepsilon \cos \zeta_r^{e\xi} (\eta(M_m) + p_{rj}\varepsilon \sin \beta_b) \end{array} \right\} \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} ex_r \\ ey_r \\ ec_r \\ e\phi_r \\ e\psi_r \\ e\xi_r \end{array} \right\} \quad 2-40$$

avec  $D_{N_n} = (X_{N_n} \cos \theta_r^{e\xi} - Y_{N_n} \sin \theta_r^{e\xi})$

Satellites :

$$u_{jr}^e(M_m) = \begin{matrix} T \\ \left\{ \begin{array}{l} \cos \beta_b \sin \alpha_{rj} \\ -\varepsilon \cos \beta_b \cos \alpha_{rj} \\ \cos \beta_b \sin \zeta_{jr}^{ec} \\ -\sin \beta_b \sin \alpha_{rj} r_{bj} + \varepsilon \cos \alpha_{rj} (\eta(M_m) + p_{jr}(M_m)\varepsilon \sin \beta_b) \\ \varepsilon \sin \beta_b \cos \alpha_{rj} r_{bj} + \sin \alpha_{rj} (\eta(M_m) + p_{jr}(M_m)\varepsilon \sin \beta_b) \\ -\sin \beta_b \sin \zeta_{jr}^{e\xi} r_{bj} + \varepsilon \cos \zeta_{jr}^{e\xi} (\eta(M_m) + p_{jr}(M_m)\varepsilon \sin \beta_b) \end{array} \right\} \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} ex_j \\ ey_j \\ ec_j \\ e\phi_j \\ e\psi_j \\ e\xi_j \end{array} \right\} \quad 2-41$$

Porte-satellites :

$$u_{cr}^e(M_m) = \begin{matrix} T \\ \left\{ \begin{array}{l} \cos \beta_b \sin \sigma_r \\ -\varepsilon \cos \beta_b \cos \sigma_r \\ \cos \beta_b \sin \zeta_{cr}^{ec} \\ -\sin \beta_b (\sin \sigma_r r_{bj} + \varepsilon \sin \sigma_c R_c) + \varepsilon \cos \sigma_r (\eta(M_m) + p_{jr}(M_m)\varepsilon \sin \beta_b) \\ \varepsilon \sin \beta_b (\cos \sigma_r r_{bj} + \cos \sigma_c R_c) + \sin \sigma_r (\eta(M_m) + p_{jr}(M_m)\varepsilon \sin \beta_b) \\ -\sin \beta_b (\sin \zeta_{cr}^{e\xi} r_{bj} + \varepsilon \sin \zeta_c^{e\xi} R_c) + \varepsilon \cos \zeta_{cr}^{e\xi} (\eta(M_m) + p_{jr}(M_m)\varepsilon \sin \beta_b) \end{array} \right\} \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} ex_c \\ ey_c \\ ec_c \\ e\phi_c \\ e\psi_c \\ e\xi_c \end{array} \right\} \quad 2-42$$

Avec les angles de projection suivants :

$$\begin{aligned}
 \sigma_s &= \alpha_{sj} - \varepsilon(\Phi_j + \lambda_c) & \sigma_r &= \alpha_{rj} + \varepsilon(\Phi_j + \lambda_c) \\
 \sigma_c &= \Phi_j + \lambda_c & \zeta_c^{e\xi} &= \Phi_j - \theta_c^{e\xi} \\
 \zeta_s^{ec} &= \alpha_{sj} + \varepsilon(\lambda_s^1 + \theta_s^{ec} - \Phi_j) & \zeta_r^{ec} &= \alpha_{rj} + \varepsilon(\Phi_j + \lambda_c - \theta_r^{ec}) \\
 \zeta_{js}^{ec} &= \alpha_{sj} + \varepsilon(\lambda_j^1 + \theta_j^{ec}) & \zeta_{jr}^{ec} &= \alpha_{rj} - \varepsilon(\lambda_j^1 + \theta_j^{ec}) \\
 \zeta_{cs}^{ec} &= \alpha_{sj} - \varepsilon(\Phi_j - \theta_c^{ec}) & \zeta_{cr}^{ec} &= \alpha_{rj} + \varepsilon(\Phi_j - \theta_c^{ec}) \\
 \zeta_s^{e\xi} &= \alpha_{sj} + \varepsilon(\lambda_s^1 + \theta_s^{e\xi} - \Phi_j) & \zeta_r^{e\xi} &= \alpha_{rj} + \varepsilon(\Phi_j + \lambda_c - \theta_r^{e\xi}) \\
 \zeta_{js}^{e\xi} &= \alpha_{sj} + \varepsilon(\lambda_j^1 + \theta_j^{e\xi}) & \zeta_{jr}^{e\xi} &= \alpha_{rj} - \varepsilon(\lambda_j^1 + \theta_j^{e\xi}) \\
 \zeta_{cs}^{e\xi} &= \alpha_{sj} - \varepsilon(\Phi_j - \theta_c^{e\xi}) & \zeta_{cr}^{e\xi} &= \alpha_{rj} + \varepsilon(\Phi_j - \theta_c^{e\xi})
 \end{aligned}
 \tag{2-43}$$

Les angles  $\lambda_g$  et  $\lambda_g^1$  sont les angles de rotation de corps rigide du solide  $g$  dans le repère fixe  $R_{I0}$  et le repère mobile  $R_1$  respectivement, et les angles  $\theta_g^{ec}$  et  $\theta_g^{e\xi}$  sont les angles initiaux des axes associés aux erreurs d'excentration et de désaxage  $c_g$  et  $\xi_g$  respectivement, illustrés en figure 2-5. Les différentes catégories d'erreurs d'assemblage sont également illustrées en figure 1-8.

#### 2.1.2.4 Erreurs de forme

Aux erreurs d'assemblage viennent s'ajouter les contributions des erreurs de forme. Ces erreurs de forme impactent directement la géométrie de la denture, et peuvent être classées en trois catégories :

- (1) Les erreurs liées aux tolérances de taillage de la denture, telles que les erreurs de pas ou les erreurs d'hélices. Ces erreurs sont fortement dépendantes du processus de taillage des dentures, et peuvent donc être individuelles dent à dent au sein d'une roue dentée.
- (2) Les défaillances générant des défauts de la surface d'engrènement, tels que des défauts d'écaillage, de corrosion, de grippage, etc. Ces défauts sont générés par des conditions d'engrènement extrêmes en termes de température, de lubrification, de pressions de contact ou de vitesses de glissement, ou bien amorcés par une anomalie de matière ou de fabrication.
- (3) Les corrections volontaires de la surface d'engrènement, tels que les corrections de profil ou les corrections longitudinales. Les corrections de profil permettent de retarder les instants d'entrée des lignes de contact dans le plan d'action, ou d'en accélérer leur sortie, et ainsi de limiter les chocs et les surcharges en tête et pied de dent. Les corrections longitudinales permettent de recentrer la zone de chargement de la denture afin d'éviter des surcharges localisées sur les bords, et permettent notamment d'assurer une certaine robustesse vis-à-vis de possibles erreurs de montage.

Ces erreurs de forme s'écrivent directement sous la forme de distance de séparation supplémentaire locale  $u_g^f$ , et les contributions des différentes erreurs de forme viennent s'ajouter à celles des erreurs d'assemblage :

$$u_g(M_m) = u_g^e(M_m) + u_g^f(M_m)
 \tag{2-44}$$

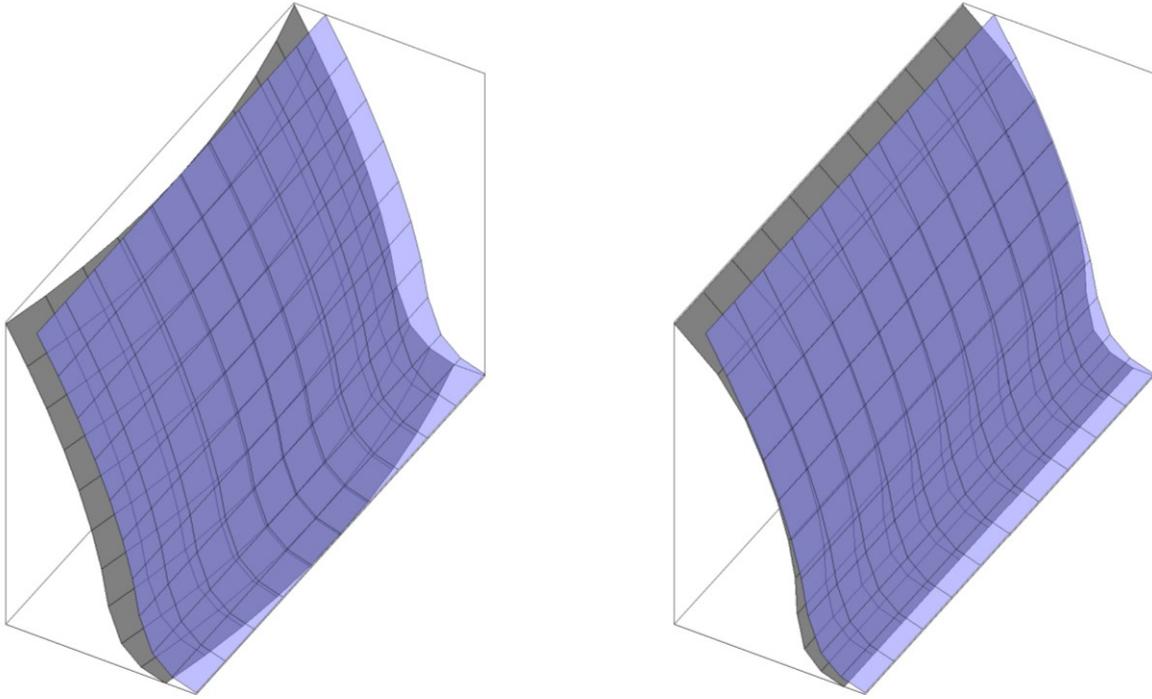


Figure 2-6 Représentation de flancs d'engrenages cylindriques théoriques (en bleu) et corrigés (en gris) avec un bombé longitudinal symétrique ou une correction de profil quadratique asymétrique

### 2.1.2.5 Distances de séparation initiales

Un certain nombre de conditions de contact doivent être satisfaites afin d'assurer la transmission de puissance dans le train épicycloïdal. Ces conditions de contact s'écrivent [82], [83], [93] :

- (1) Au moins une cellule de discrétisation est en contact pour chacun des engrènements du planétaire avec les satellites
- (2) Au moins une cellule de discrétisation est en contact dans l'ensemble des engrènements de la couronne avec les satellites

Les distances de séparation initiales s'écrivent alors, si les points de contact entre le satellite  $n^0j$  et le planétaire et entre le satellite  $n^0j$  et la couronne s'écrivent respectivement  $M_{jm}^s$  et  $M_{jm}^r$  :

Pour les engrènements extérieurs :

$$\delta_e(M_{jm}^s) = \max_m^j(U_{jm}^s) - U_{jm}^s \quad 2-45$$

Pour les engrènements intérieurs :

$$\delta_e(M_{jm}^r) = \max_{jm}(U_{jm}^r) - U_{jm}^r \quad 2-46$$

Avec :

$$\begin{aligned} U_{jm}^s &= u_{js}(M_{jm}^s) + u_{cs}^e(M_{jm}^s) - u_s(M_{jm}^s) \\ U_{jm}^r &= \max_m^j(u_{jm}^r) + u_{jm}^r \\ \text{avec } u_{jm}^r &= u_{jr}(M_{jm}^r) + u_{cr}^e(M_{jm}^r) - u_r(M_{jm}^r) \end{aligned} \quad 2-47$$

---

## 2.1.3 Engrenage spiroconique

En se basant toujours sur l'expression générale des efforts d'engrènement développée en section 2.1.1, un modèle de spiroconique est développé. Ce modèle de spiroconique est donc, de manière similaire au modèle d'engrenages cylindriques utilisé au sein du train épicycloïdal, centré sur la détermination de vecteurs structurels, distances de séparation et raideurs élémentaires.

Les dentures cylindriques offrent la possibilité de déterminer analytiquement les positions et normales théoriques des lignes de contact. Cette caractéristique des engrenages cylindriques à développante de cercle a permis l'emploi d'hypothèses simplificatrices sur la géométrie des contacts : les contacts sont supposés se produire selon les lignes de contact théoriques, et les normales sont supposées égales aux normales théoriques. Les géométries complexes des engrenages spiroconiques ne permettent cependant pas d'effectuer d'hypothèse sur la géométrie des contacts de manière similaire. L'étude de la littérature montre d'ailleurs que la détermination des trajectoires de contact dans les engrenages spiroconiques est toujours un sujet de recherche, notamment en présence d'erreurs d'assemblage ou d'erreurs de forme des flancs de denture.

Afin de s'affranchir de cette difficulté supplémentaire, le modèle présenté dans cette étude n'émet aucune hypothèse sur la géométrie du contact entre dentures spiroconiques. La totalité de la surface du flanc est considérée à chaque instant pour la recherche de contact. Les flancs de denture sont discrétisés en surfaces élémentaires, dont la position et la normale unitaire sortante du point central sont connues, soit par simulation théorique du taillage, soit par mesure sur une denture réelle. Chacune de ces surfaces élémentaires se voit attribuer une raideur élémentaire, une distance de séparation initiale et un vecteur structurel. Le modèle d'engrenages spiroconiques développé dans cette étude s'appuie donc sur la connaissance de la position et de la normale unitaire sortante d'un ensemble de points répartis sur les deux flancs d'une dent de chacun des engrenages.

### 2.1.3.1 Géométrie des dentures

La connaissance de certaines caractéristiques géométriques des dentures reste malgré tout nécessaire à l'implémentation de ce modèle d'engrenages spiroconiques. Cette sous partie détaille les manipulations géométriques des ensembles de points nécessaires au développement de cet élément.

#### *Expression des surfaces de contact*

Par convention, les positions et normales des points des flancs sont initialement exprimées dans un repère  $R_l$  dont l'origine est située au sommet du cône primitif, dont l'axe  $z_l$  est selon l'axe de révolution du cône primitif et dont le plan défini par les axes  $x_l$  et  $z_l$  passe par le point central de la surface. Un exemple d'ensemble de points sur un flanc de dent est donné figure 2-7.

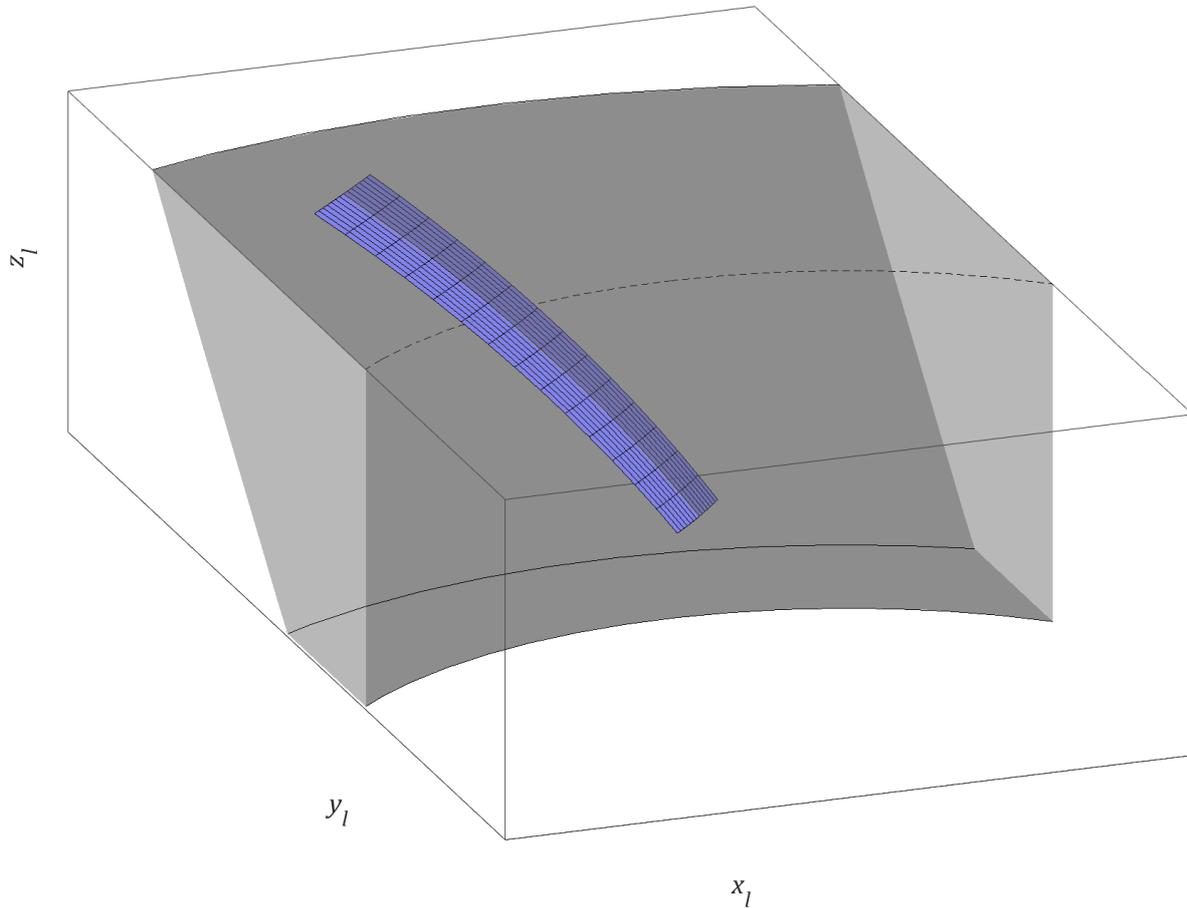


Figure 2-7 Représentation des points d'un flanc d'une dent sur son cône primitif, total de 225 points

On effectue un changement de repère afin d'exprimer les points et normales des deux flancs d'une dent dans un repère cartésien local à la dent  $R_t$ , dont la hauteur est selon  $z_t$  :

$$\begin{cases} x_t = -\sqrt{x_l^2 + y_l^2} \tan^{-1} \frac{\cos \alpha_{lt} x_l + \sin \alpha_{lt} y_l}{\cos \alpha_{lt} y_l - \sin \alpha_{lt} x_l} \\ y_t = \sin \delta_g \sqrt{x_l^2 + y_l^2} + \cos \delta_g z_l \\ z_t = \cos \delta_g \sqrt{x_l^2 + y_l^2} - \sin \delta_g z_l \end{cases} \quad 2-48$$

avec  $\alpha_{lt} = \frac{-\pi}{2Z_g}$  et  $\alpha_{lt} = \frac{\pi}{2Z_g}$  pour les flancs droits et gauches respectivement

La fibre neutre de la dent est approximée à une portion de cylindre de révolution dont l'axe est colinéaire à  $z_t$ , et on calcule son rayon  $r_{nf}$  dans ce nouveau repère, ainsi que les coordonnées  $[a_t \ b_t]$  de son centre. La géométrie d'une dent et de sa fibre neutre dans le repère  $R_t$  est illustrée en figure 2-8. Un autre changement de repère est ensuite effectué afin d'exprimer les coordonnées des points dans un repère cylindrique  $R_{tc}$  :

$$\begin{cases} r_{tc} = \sqrt{(x_t - a_t)^2 + (y_t - b_t)^2} \\ \theta_{tc} = \tan^{-1} \frac{(y_t - b_t)}{(x_t - a_t)} \\ z_t = z_t \end{cases} \quad 2-49$$

Pour chacun des flancs du pignon et de la roue, on approxime sur l'ensemble des points une surface polynomiale de la forme :

$$\begin{aligned} r_{tc} &= f_R(z_t, \theta_{tc}) \text{ pour le flanc droit} \\ r_{tc} &= f_L(z_t, \theta_{tc}) \text{ pour le flanc gauche} \end{aligned} \quad 2-50$$

La différence des surfaces polynomiales des deux flancs du pignon et des deux flancs de la roue permet d'obtenir une expression de l'épaisseur de la dent du pignon et de la roue respectivement :

$$t_{tc} = |f_R(z_t, \theta_{tc}) - f_L(z_t, \theta_{tc})| = f_t(z_t, \theta_{tc}) \quad 2-51$$

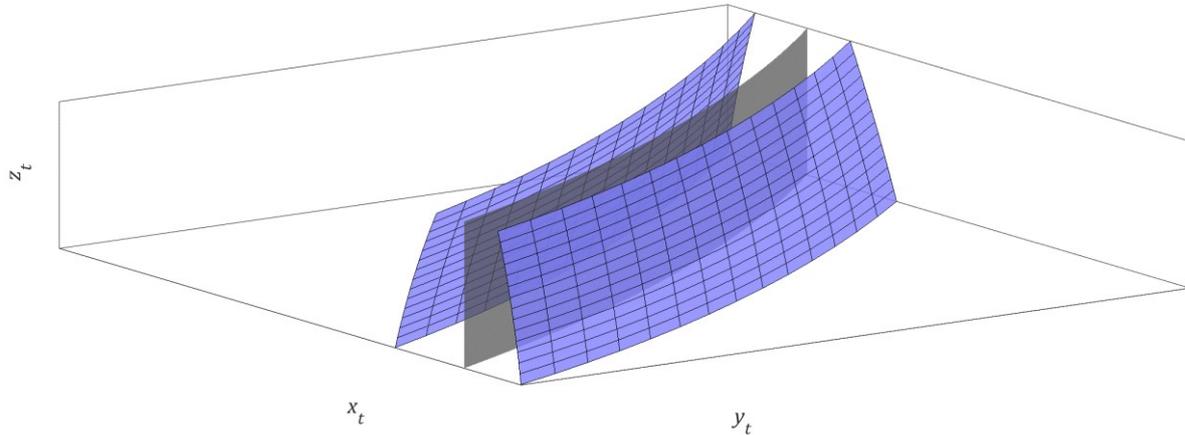


Figure 2-8 Représentation de chacun des flancs d'une dent, ainsi que l'approximation par une surface cylindrique de la fibre neutre, dans le repère cartésien  $R_t$

### *Approximation d'un nouvel ensemble de points*

Bien que ça ne soit pas systématiquement nécessaire, il peut être intéressant pour plusieurs raisons de définir un nouvel ensemble de points. Premièrement, il est nécessaire d'avoir des surfaces élémentaires dont les aires soient très inférieures à celle de la surface de contact, critère que la grille de points initiale peut ne pas remplir, surtout si celle-ci a été obtenue par mesure du flanc réel où il devient rapidement très coûteux de contrôler un très grand nombre de points. Deuxièmement, une grille de points répartis uniformément selon les axes  $z_t$  et  $\theta_{tc}$  simplifie grandement les intégrations nécessaires à la détermination des raideurs élémentaires, qui sont détaillées plus tard au paragraphe 2.1.3.4 de cette partie.

Pour chacun des flancs un nouvel ensemble de  $N_m$  points est donc défini, répartis uniformément selon  $z_t$  et  $\theta_{tc}$ , compris dans les bornes de l'ensemble de points initial, pour lesquels la coordonnée en  $r_{tc}$  est évaluée grâce aux fonctions  $f_R$  et  $f_L$  de l'équation 2-50.

On effectue le changement de repère inverse afin de repasser ces nouveaux ensembles de points dans le repère  $R_l$  :

$$\begin{cases} x_t = r_{tc} \cos \theta_{tc} + a_t \\ y_t = r_{tc} \sin \theta_{tc} + b_t \\ z_t = z_t \end{cases} \quad 2-52$$

$$\begin{cases} x_l = (\sin \delta_g y_t + \cos \delta_g z_t) \sin \left( \frac{-x_t}{(\sin \delta_g y_t + \cos \delta_g z_t)} - \alpha_{lt} \right) \\ y_l = (\sin \delta_g y_t + \cos \delta_g z_t) \cos \left( \frac{-x_t}{(\sin \delta_g y_t + \cos \delta_g z_t)} - \alpha_{lt} \right) \\ z_l = \cos \delta_g y_t - \sin \delta_g z_t \end{cases} \quad 2-53$$

avec  $\alpha_{lt} = \frac{-\pi}{2Z_g}$  et  $\alpha_{lt} = \frac{\pi}{2Z_g}$  pour les flancs droits et gauches respectivement

Les normales sortantes sont approximées par des fonctions polynomiales dans le repère  $R_l$ , qui sont ensuite évaluées sur le nouvel ensemble de points :

$$\begin{cases} n_{xR} = f_{nxR}(y_l, z_l) \\ n_{yR} = f_{nyR}(y_l, z_l) \\ n_{zR} = f_{nzR}(y_l, z_l) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} n_{xL} = f_{nxL}(y_l, z_l) \\ n_{yL} = f_{nyL}(y_l, z_l) \\ n_{zL} = f_{nzL}(y_l, z_l) \end{cases} \text{ pour les flancs droits et gauches} \quad 2-54$$

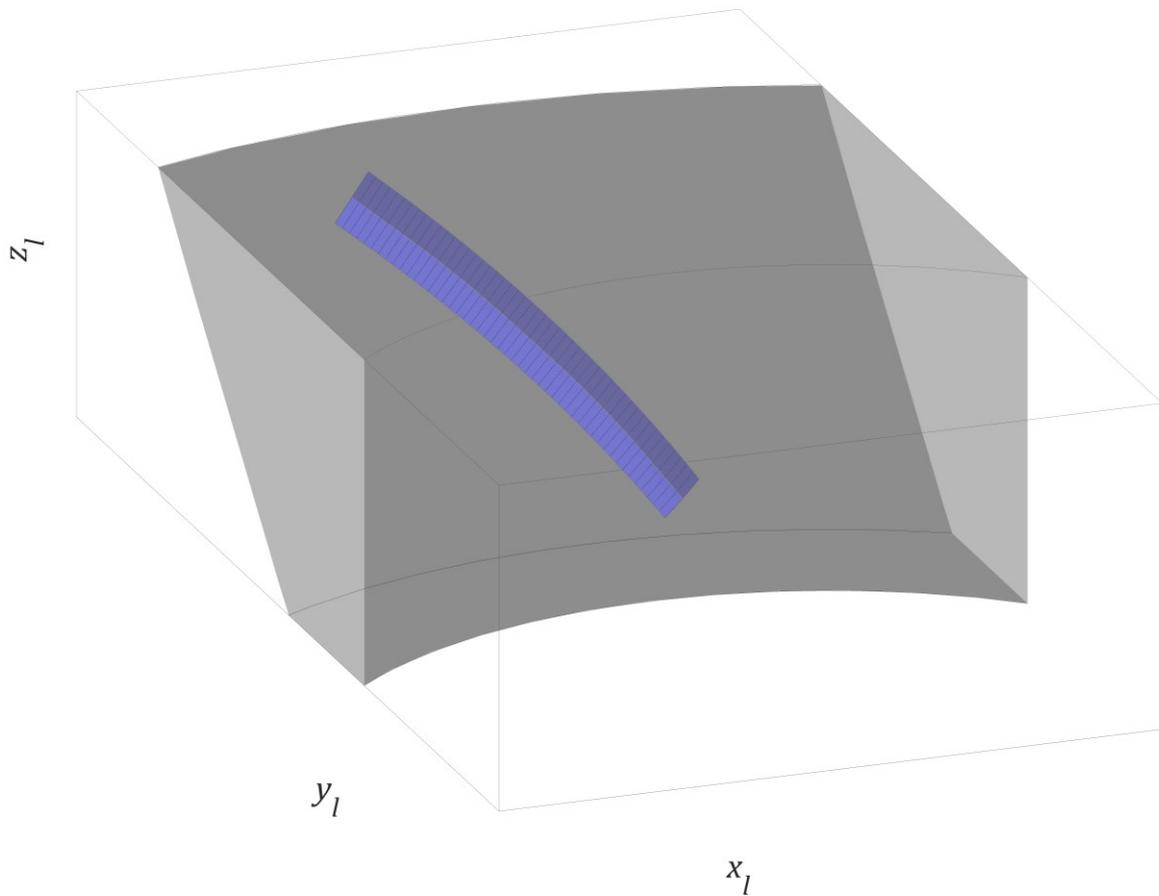


Figure 2-9 Représentation d'un nouvel ensemble de points d'un flanc d'une dent sur son cône primitif, total de 2500 points

### *Appairage et positionnement des dents*

Le nombre de paires de dents potentielles en contact  $N_t$  est déterminé à partir du rapport de conduite total. Le rapport de conduite total  $\varepsilon_t$  est déterminé en suivant la norme ISO 23509, il est ensuite majoré :

$$N_t = [\varepsilon_t] + 1 \quad 2-55$$

Le nombre de paires de dents potentielles en contact  $N_t$  est donc égal au nombre de paires de dent maximum en contact simultanément théoriquement plus une. Cette majoration permet de ne pas avoir à prédéterminer les instants d'entrée et de sortie des lignes de contact, ainsi que de détecter des contacts apparaissant en dehors de la fenêtre théorique.

Les points d'un seul des deux flancs sont conservés en fonction du sens de rotation. L'ensemble des points est ensuite dupliqué  $N_t$  fois, et les points sont passés du repère  $R_l$  au repère  $R_{I0}$  et  $R_{I1}$  pour la roue et le pignon conique respectivement :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{R_{I0}/R_{I1}} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{I0l} & -\sin \alpha_{I0l} & 0 \\ \sin \alpha_{I0l} & \cos \alpha_{I0l} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{R_l} \quad 2-56$$

avec  $\alpha_{I0l} = \alpha_n + \left( \lambda_{0p} \bmod \frac{2\pi}{Z_g} \right) + \frac{\pi}{2}$

L'angle de rotation  $\alpha_n$  dépend de l'indice  $n$  de la dent concernée :

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \left( n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \frac{1}{2} \right) \frac{2\pi}{Z_p} \text{ pour le pignon} \\ \alpha_n &= \left( N_t - n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \frac{1}{2} \right) \frac{2\pi}{Z_w} \text{ pour la roue} \end{aligned} \quad n \in [1 \ N_t] \quad 2-57$$

Enfin, les points du pignon conique sont passés dans le repère  $R_{I0}$  :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{R_{I0}} = \begin{bmatrix} \cos \Sigma & 0 & \sin \Sigma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \Sigma & 0 & \cos \Sigma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{R_{I1}} \quad 2-58$$

La figure 2-10 illustre les points de différentes dents d'un pignon et d'une roue conique exprimés dans le repère  $R_{I0}$  pour les deux sens de rotation.

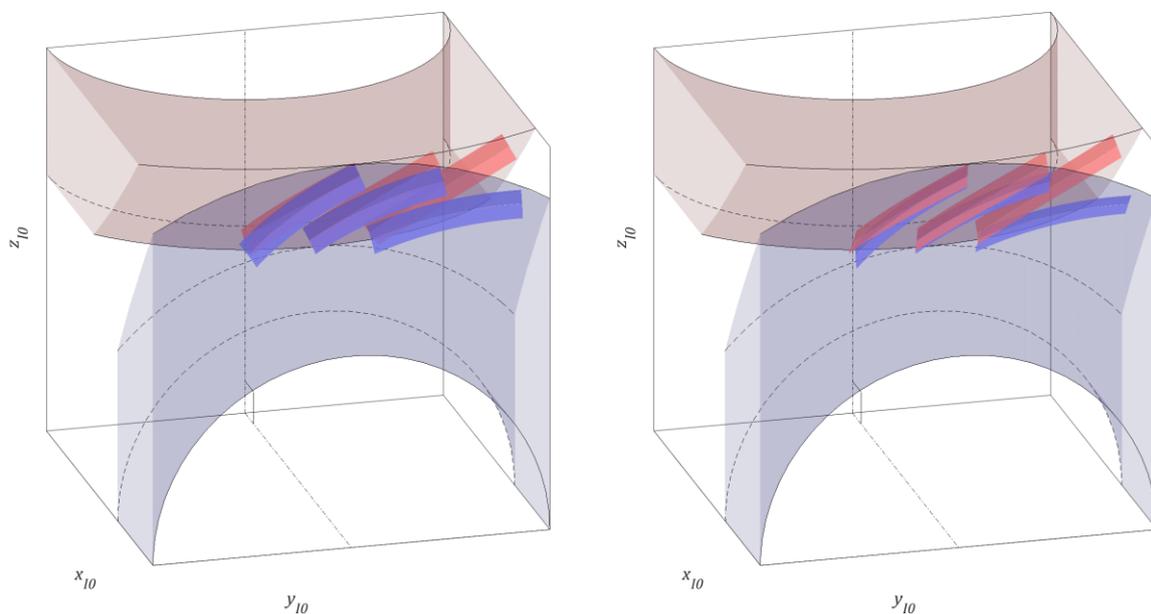


Figure 2-10 Représentation des surfaces de denture et des cônes primitifs d'un pignon (en bleu) et d'une roue (en rouge) conique présentant un angle entre axes de  $90^\circ$ , dans le repère commun  $R_{I0}$ , pour les deux sens de rotation

### 2.1.3.2 Erreurs d'assemblage

Les axes non parallèles des engrenages coniques génèrent de nombreuses problématiques de montage, facilitant souvent l'apparition d'erreurs d'assemblage. Dû à leur géométrie unique, les erreurs d'assemblage dans un engrenage spiroconique peuvent significativement modifier les zones de contact, impactant par conséquent les caractéristiques de la transmission. Les erreurs d'assemblage proviennent des écarts de positionnement relatif des deux spiroconiques dus à leurs tolérances de montage et de fabrication. Un engrenage spiroconique peut présenter différentes erreurs d'assemblage :

- (1) Les erreurs de position axiale, correspondant à un décalage de position de l'engrenage conique le long de son axe de rotation. Les erreurs de position radiale, correspondant à un décalage de position d'un engrenage conique dans l'axe du second engrenage conique, sont assimilables à un décalage de position axiale du second conique
- (2) Les erreurs d'hypoïde, correspondant à un décalage de position d'un engrenage conique perpendiculairement aux deux axes de rotation du couple d'engrenages coniques
- (3) Les erreurs d'excentration, correspondant à un décalage du centre géométrique du solide par rapport à son axe de rotation
- (4) Les erreurs de désalignement, correspondant à un désalignement de l'axe de rotation du solide
- (5) Les erreurs de désaxage, correspondant à un désalignement de l'axe géométrique du solide par rapport à son axe de rotation

Tout comme pour le train épicycloïdal, les erreurs d'assemblages sont modélisées par un torseur de petits déplacements représentant la distance parcourue par le centre géométrique du solide concerné :

Pour la roue conique :

$$\{S_w^{R_{I0}}(O_w)\} = \begin{cases} \omega_w^{R_{I0}} = e\phi_w \mathbf{x}_{I0} + e\psi_w \mathbf{y}_{I0} + e\xi_w \xi_w \\ u_w^{R_{I0}}(O_w) = ey_w \mathbf{y}_{I0} + ez_w \mathbf{z}_{I0} + ec_w \mathbf{c}_w \end{cases} \quad 2-59$$

Pour le pignon conique :

$$\{S_p^{R_{I1}}(O_p)\} = \begin{cases} \omega_p^{R_{I1}} = e\phi_p \mathbf{x}_{I1} + e\psi_p \mathbf{y}_{I1} + e\xi_p \xi_p \\ u_p^{R_{I1}}(O_p) = ey_p \mathbf{y}_{I1} + ez_p \mathbf{z}_{I1} + ec_p \mathbf{c}_p \end{cases} \quad 2-60$$

Ces torseurs de petits déplacements sont directement répercutés sur les positions des points des surfaces de contact des engrenages spiroconiques. Le calcul des distances de séparation initiales, détaillé dans la sous partie suivante, se base sur les positions des points des surfaces d'engrènement, et est donc impacté par la présence d'erreurs d'assemblage.

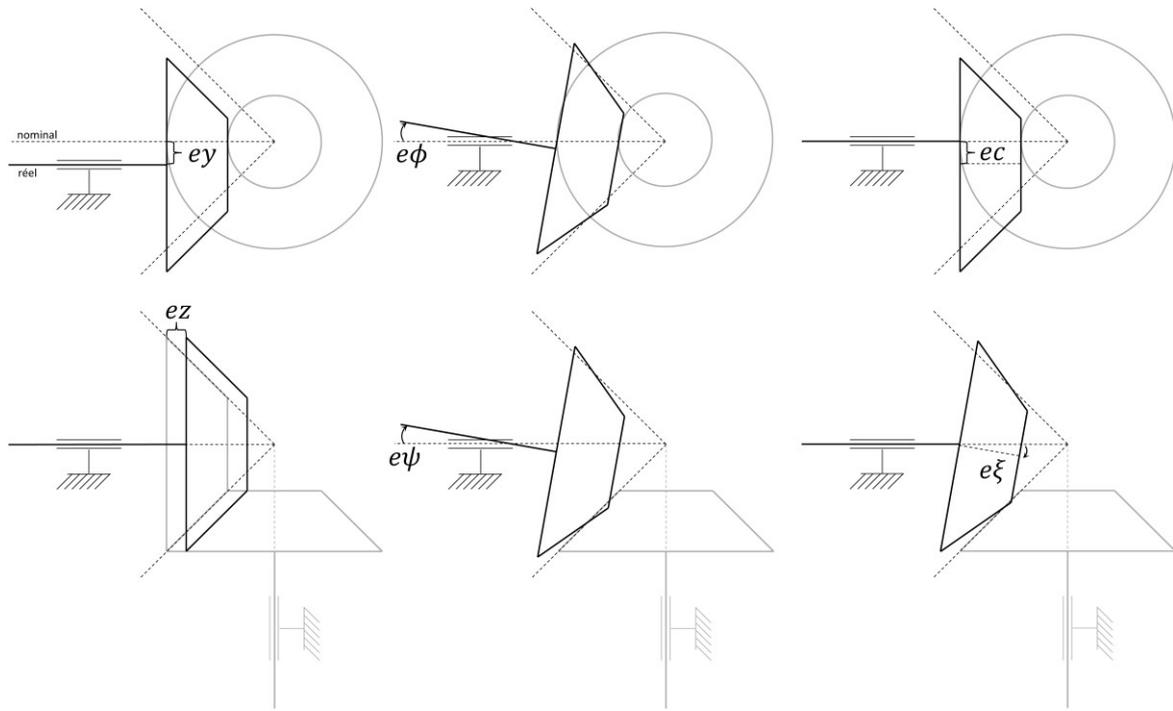


Figure 2-11 Représentation des erreurs d'assemblage d'un engrenage spiroconique

Les erreurs de forme sont directement modélisées par les ensembles de points renseignés en entrée du modèle. Ces ensembles de points pouvant être issus d'un contrôle de géométrie sur une denture réelle ou d'une simulation du taillage, la totalité des nombreuses erreurs de formes que peuvent manifester les engrenages spiroconiques sont par conséquent modélisables.

### 2.1.3.3 Distances de séparation initiales

Les distances de séparation initiales nécessaires au calcul des efforts de contact et du vecteur d'excitation sont calculées à partir des positions et des normales sortantes des ensembles de points du pignon et de la roue dans le repère  $R_{I_0}$ , dont l'origine  $O$  est située à l'intersection des axes des cônes.

Pour chacun des points du pignon  $M^p(z^p, i^p)$ , avec  $z^p \in [1 N_t]$  l'indice de la dent et  $i^p \in [1 N_m]$  l'indice du point sur le flanc, un calcul préliminaire de la distance euclidienne le séparant de chacun des points de la dent de la roue correspondante est effectué. Le point de la roue  $M_1^w(z^w, i_1^w)$  pour lequel cette distance euclidienne est minimale est potentiellement le point de contact.

Afin de diminuer les temps de calculs et d'éviter les cas particuliers pour lesquels le calcul des distances de séparation n'aurait pas de solution, il est nécessaire de définir une distance seuil  $s$ , très supérieure à l'écrasement, au-delà de laquelle le calcul de distance de séparation ne sera pas effectué. Si la distance euclidienne séparant  $M^p$  de  $M_1^w$  est supérieure au seuil  $s$ , le point est exclu du contact et sa distance de séparation est fixée à  $s$ .

Si la distance euclidienne séparant  $M^p$  de  $M_1^w$  est inférieure au seuil  $s$  :

- (1) L'indice  $i_1^w$  est relevé comme étant l'indice du point de la roue en contact avec le point  $M^p(z^p, i^p)$  du pignon.
- (2) Les deuxième et troisième points de la roue  $M_2^w(z^w, i_2^w)$  et  $M_3^w(z^w, i_3^w)$  les plus proches en distance euclidienne du point  $M^p$  sont recherchés, tels que les trois points soient directement voisins sur la grille de points du flanc de la roue, et forment un triangle.
- (3) Un plan  $\mathcal{P}$  est défini avec ces trois points, avec comme vecteur normal  $\mathbf{v}_{\mathcal{P}}$  tel que :

$$\mathbf{v}_{\mathcal{P}} = \mathbf{M}_1^w \mathbf{M}_2^w \wedge \mathbf{M}_1^w \mathbf{M}_3^w \quad 2-61$$

L'équation cartésienne du plan  $\mathcal{P}$  s'écrit alors :

$$G \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \mathbf{v}_{\mathcal{P}} \cdot \mathbf{OG} - \mathbf{v}_{\mathcal{P}} \cdot \mathbf{OM}_1^w = 0 \quad 2-62$$

(4) Une droite  $\mathcal{D}$  est définie, de vecteur directeur la normale sortante  $\mathbf{n}_p$  du flanc du pignon au point  $M^p$ , et passant par le point  $M^p$ , telle que :

$$G \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \mathbf{OG} = d(G) * \mathbf{n}_p + \mathbf{OM}^p \text{ avec } d(M) \in \mathbb{R} \quad 2-63$$

(5) Le point d'intersection  $G$  de la droite  $\mathcal{D}$  avec le plan  $\mathcal{P}$  vérifie alors :

$$G \in \mathcal{P} \cap \mathcal{D} \Leftrightarrow d(G) = \frac{\mathbf{v}_{\mathcal{P}} \cdot \mathbf{OM}_1^w - \mathbf{v}_{\mathcal{P}} \cdot \mathbf{OM}^p}{\mathbf{v}_{\mathcal{P}} \cdot \mathbf{n}_p} \quad 2-64$$

La distance de séparation pour le point  $M^p$  s'exprime alors :

$$\mathbf{M}^p \mathbf{G} \cdot \mathbf{n}_p = (\mathbf{OG} - \mathbf{OM}^p) \cdot \mathbf{n}_p = (d(G) \cdot \mathbf{n}_p) \cdot \mathbf{n}_p \quad 2-65$$

Or, comme  $\mathbf{n}_p$  est la normale unitaire sortante, la distance de séparation est directement égale à  $d(G)$ , et est négative lorsqu'il y a interférence entre le flanc du pignon et de la roue.

(6) Enfin, les coordonnées du point d'intersection  $G$  sont passées dans le repère cylindrique  $R_{tc}^w$  afin de vérifier qu'il se situe bien à l'intérieur des bornes du flanc de dent de la roue.

L'ensemble des distances  $d$  associées à l'ensemble des points  $M^p$  des surfaces de denture du pignon est noté  $U_m^p$ . Afin d'assurer la transmission de puissance, les distances de séparation initiales s'écrivent alors :

$$\delta_e(M_m^p) = U_m^p - \min_m(U_m^p) \quad 2-66$$

On obtient donc pour chacun des points du flanc du pignon une distance de séparation avec le flanc de la roue projetée selon la normale au point du pignon considéré.

### 2.1.3.4 Élément de coque

Afin de caractériser le comportement en flexion des dents d'engrenages spiroconiques, un élément de coque est implémenté. Cet élément de coque permet d'obtenir une expression semi-analytique des déplacements de la fibre neutre de la dent pour une répartition de pression donnée. Cet élément de coque se base sur les développements de Vaidyanathan *et al.* [33] et Kolivand et Kahraman [34]. En faisant l'approximation que la fibre neutre de la dent, autour de laquelle se répartit de manière égale l'épaisseur de la dent, est une surface cylindrique de rayon constant  $r_{nf}$  dans le repère  $R_{tc}$ , on peut calculer l'énergie de déformation  $SE$  ainsi que le travail des efforts extérieurs à la dent  $WF$ , qui s'écrivent [33], [34] :

$$SE = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_z \int_{\theta} \int_r (r_{nf} + r) \left[ (\varepsilon_z^2 + \varepsilon_{\theta}^2 + 2\nu\varepsilon_z\varepsilon_{\theta}) + \frac{1}{2}(1-\nu)(\gamma_{z\theta}^2 + \gamma_{zr}^2 + \gamma_{\theta r}^2) \right] dr d\theta dz \quad 2-67$$

$$WF = \int_z \int_{\theta} p_n W r_{nf} dz d\theta \quad 2-68$$

Avec  $W$  la déflexion normale de la fibre neutre.

Les déformations normales et de cisaillement s'expriment [33], [34] :

$$\begin{cases} \varepsilon_z = r \left[ \frac{\partial \beta_z}{\partial z} - \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right] \\ \varepsilon_\theta = \frac{r}{r_{nf}} \left[ \frac{\partial \beta_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{(r_{nf} + r)} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right] + \frac{W}{(r_{nf} + r)} \\ \gamma_{z\theta} = \frac{r(r_{nf} + r)}{r_{nf}} \frac{\partial \beta_\theta}{\partial z} - \frac{r(2r_{nf} + r)}{r_{nf}(r_{nf} + r)} \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \theta} + \frac{r}{(r_{nf} + r)} \frac{\partial \beta_z}{\partial \theta} \\ \gamma_{\theta r} = \frac{(r_{nf} + r)}{r_{nf}} \beta_\theta \\ \gamma_{zr} = \beta_z \end{cases} \quad 2-69$$

Il est intéressant de noter que la fibre neutre des dentures fabriquées avec certains procédés à génération discontinue, de type Gleason par exemple, est effectivement cylindrique de rayon constant égal au rayon de la fraise de taillage.

La déflexion normale et les rotations de cisaillement sont exprimées comme une combinaison linéaire d'un nombre fini de polynômes dont les coefficients sont à déterminer [33], [34] :

$$\begin{aligned} W(z, \theta) &= \sum_m \sum_n A_{mn} \cdot \Phi_m(z) \cdot \Psi_n(\theta) \\ \beta_x(z, \theta) &= \sum_m \sum_n B_{mn} \cdot \Phi_m(z) \cdot \Psi_n(\theta) \\ \beta_\theta(z, \theta) &= \sum_m \sum_n C_{mn} \cdot \Phi_m(z) \cdot \Psi_n(\theta) \end{aligned} \quad 2-70$$

Les fonctions de forme  $\Phi$  et  $\Psi$  imposent chacune les conditions aux limites de la dent : encastree-libre selon  $z_t$  et libre-libre selon  $\theta_{tc}$  pour  $\Phi$  et  $\Psi$  respectivement.

$$\Phi_m(z) = \left(\frac{z}{h}\right)^{m+1} \quad \Psi_n(\theta) = \left(\frac{\theta}{\zeta}\right)^{n-1} \quad 2-71$$

Où  $\zeta$  est l'angle maximal décrit par la dent selon  $e_\theta$ , et  $h$  la hauteur de dent selon  $z_t$ , possiblement fonction de  $\theta_{tc}$  selon la géométrie de la dent.

L'énergie potentielle de la dent  $PE$  correspond à la différence entre l'énergie de déformation et le travail des efforts extérieurs :

$$PE = SE - WF \quad 2-72$$

L'application de la méthode de Rayleigh-Ritz nous permet d'écrire [33], [34] :

$$\begin{aligned} \delta PE &= \frac{E}{(1-\nu^2)} \int_z \int_\theta \int_r (r_{nf} + r) \left[ (\varepsilon_z \delta \varepsilon_z + \varepsilon_\theta \delta \varepsilon_\theta + \nu(\varepsilon_z \delta \varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta \delta \varepsilon_z)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(1-\nu)(\gamma_{z\theta} \delta \gamma_{z\theta} + \gamma_{zr} \delta \gamma_{zr} + \gamma_{\theta r} \delta \gamma_{\theta r}) \right] dr d\theta dz \\ &\quad - \int_z \int_\theta p_n \delta W r_{nf} dz d\theta = 0 \end{aligned} \quad 2-73$$

En substituant 2-70 dans 2-69 puis 2-73, on peut définir une matrice de coefficients de raideur  $K_c$  dépendante uniquement des propriétés géométriques et matériau de la dent, telle que :

$$\mathbf{K}_c \begin{Bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^1 \\ \mathbf{F}^2 \\ \mathbf{F}^3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{11} & \mathbf{K}^{12} & \mathbf{K}^{13} \\ \mathbf{K}^{21} & \mathbf{K}^{22} & \mathbf{K}^{23} \\ \mathbf{K}^{31} & \mathbf{K}^{32} & \mathbf{K}^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^1 \\ \mathbf{F}^2 \\ \mathbf{F}^3 \end{Bmatrix} \quad 2-74$$

Avec  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  vecteurs des coefficients  $A_{mn}, B_{mn}$  et  $C_{mn}$ . L'intégration selon  $\mathbf{z}_t$  et  $\mathbf{e}_\theta$  est effectuée numériquement avec une méthode de quadrature. Le vecteur des termes  $\mathbf{F}^1$  dépend de la répartition de pression normale à la fibre neutre  $p_n(z, \theta)$ , l'équation 2-74 est donc résoluble pour une répartition de pression donnée, permettant de calculer la déformation normale à la fibre neutre  $W$  en tout point de coordonnées  $(z, \theta)$  de la dent.

Les expressions des différents termes de  $\mathbf{K}_c$  et de  $\mathbf{F}^1$  après intégration sur  $r$  sont données en annexe 1.

### 2.1.3.5 Calcul des raideurs élémentaires

Les raideurs élémentaires sont calculées à partir de l'effort de contact appliqué sur la surface élémentaire considérée, dont l'expression est donnée par l'équation 2-22, et de son déplacement total. Le déplacement total d'une surface élémentaire s'écrit comme la somme de la contribution des déplacements de flexion des dents du pignon et de la roue, et des déplacements de contact de cette surface élémentaire :

$$k_m = \frac{F_{c_m}}{\delta_{c_m} + \delta_{f_m}^p + \delta_{f_m}^w} \quad 2-75$$

#### *Calcul des déplacements en flexion*

En résolvant les équations 2-74 et 2-70, une expression semi-analytique des déplacements normaux à la fibre neutre  $W$  est obtenue pour une répartition de pression donnée. Le déplacement  $\delta_{f_{mi}}$  au point  $M_m$  de la grille dû à une pression uniforme  $p_i$  exercée sur la surface élémentaire n° $i$  de la grille est donc calculé pour chacune des combinaisons de point et de surface élémentaire, permettant d'obtenir les souplesses  $c_{mi}$  :

$$c_{mi} = \frac{\delta_{f_{mi}}}{F_{c_i}} \text{ avec } F_{c_i} = p_i s_i \quad 2-76$$

Pour une répartition de pression donnée, le déplacement en flexion total au point  $M_m$  de la grille s'écrit alors comme la somme de la contribution de chacun des efforts de contact :

$$\delta_{f_m} = \sum_{i=1}^{N_m} c_{mi} F_{c_i} \quad 2-77$$

Les coefficients  $c_{mi}$  correspondent à des coefficients de l'influence de l'effort appliqué sur la surface élémentaire n° $i$  sur les déplacements de la surface élémentaire n° $m$ .

#### *Calcul des déplacements de contact*

En se basant sur les travaux de Boussinesq [122] sur la déformation des solides élastiques, synthétisés par Sainot [123], on assimile la dent à un massif semi infini dont l'interface est découpée en  $N_m$  rectangles, de dimensions  $l_m$  et  $b_m$ , dont le point central est de coordonnées  $X_m$  et  $Y_m$ , soumis à une pression uniforme  $p_m$ . Les déplacements au point  $M_m$  s'expriment alors :

$$\delta_{c_m} = \frac{1}{\pi E_{eq}^*} \sum_{i=1}^{N_m} a_{mi} p_i \text{ avec } a_{mi} = \left[ Y \cdot \text{arcsch} \frac{X}{|Y|} + X \cdot \text{arcsch} \frac{Y}{|X|} \right]_{Y_{1i} X_{1i}}^{Y_{2i} X_{2i}} \quad 2-78$$

$$Y_{1i} = Y_i - Y_m - \frac{b_i}{2} \quad Y_{2i} = Y_i - Y_m + \frac{b_i}{2}$$

$$X_{1i} = X_i - X_m - \frac{l_i}{2} \quad X_{2i} = X_i - X_m + \frac{l_i}{2}$$

Les coefficients  $a_{mi}$  correspondent à des coefficients de l'influence de l'effort appliqué sur la surface élémentaire n<sup>o</sup>*i* sur les déplacements de la surface élémentaire n<sup>o</sup>*m*, et dépendent donc des distances entre ces deux points et de la surface sur laquelle l'effort est réparti. Afin de directement prendre en compte la contribution des déformations du pignon et de la roue, le module d'Young normalisé équivalent  $E_{eq}^*$  est utilisé, il s'exprime :

$$\frac{1}{E_{eq}^*} = \frac{1 - \nu_p^2}{E_p} + \frac{1 - \nu_w^2}{E_w} \quad 2-79$$

La figure 2-12 illustre les déplacements normaux de contact et de flexion sur la totalité du flanc de la géométrie de dent illustrée en figure 2-8, dont la surface a été divisée en 2500 surfaces élémentaires, et dont les coordonnées des points sont exprimées dans le repère cylindrique  $R_{tc}$ , pour un effort total de 100N appliqué sur une surface élémentaire centrale au flanc. La figure 2-13 illustre également les déplacements de contact et de flexion pour la même géométrie que précédemment, dans le cas où un effort total de 100N a été réparti de manière uniforme sur 400 surfaces élémentaires. Ces exemples illustrent clairement les différences de comportement de la contribution du contact et de celle de la flexion à la raideur d'engrènement, on observe notamment en figure 2-12 qu'un effort concentré amène à des déplacements de contact très importants, dix fois plus importants que les déplacements de flexion, et très localisés, les déplacements de la surface élémentaire chargée ayant relativement peu d'incidence sur ceux des surfaces élémentaires voisines, contrairement aux déplacements en flexion. Il est intéressant de noter que la différence de comportement des déplacements de contact entre les directions  $z_{tc}$  et  $\theta_{tc}$  est uniquement due à la différence d'échelle entre ces deux directions.

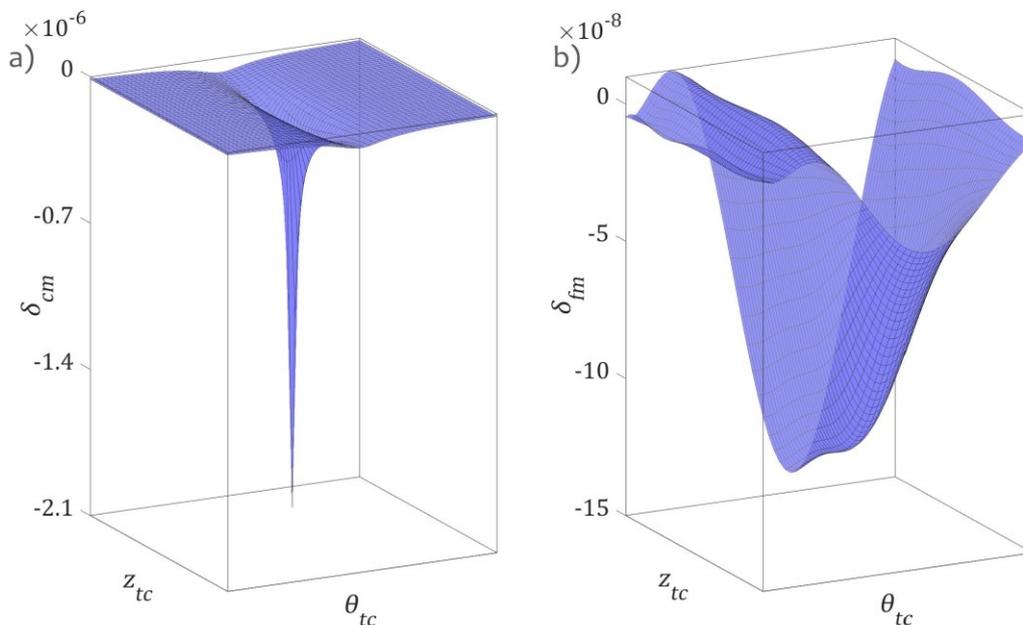


Figure 2-12 Exemple de déplacement a) de contact et b) de flexion des centres des surfaces élémentaires, en mètres, pour un effort normal de 100N répartis sur la surface élémentaire centrale de la dent

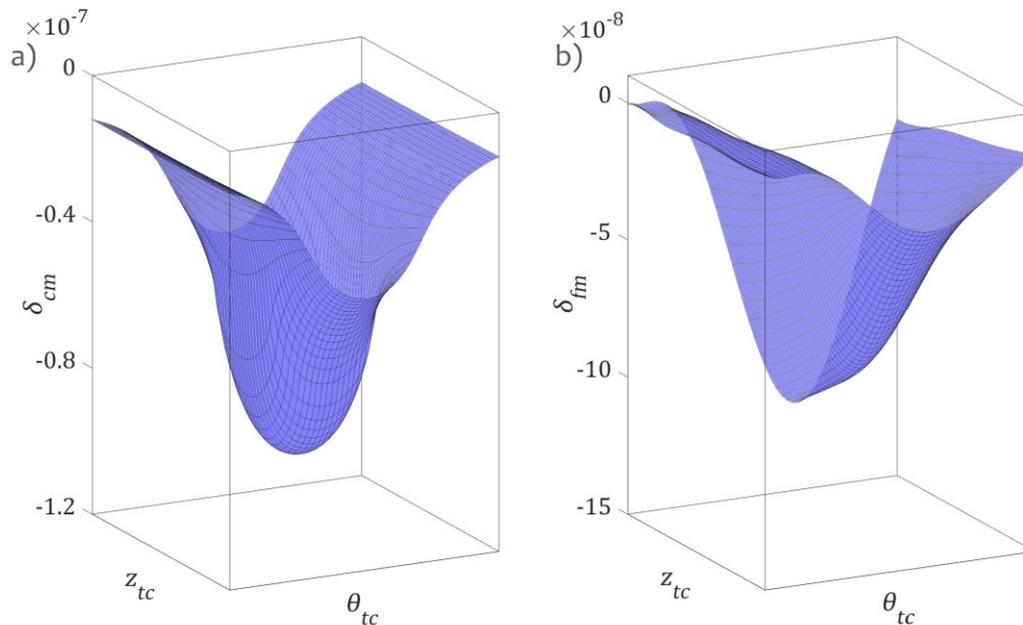


Figure 2-13 Exemple de déplacement a) de contact et b) de flexion des centres des surfaces élémentaires, en mètres, pour un effort normal total de 100N répartis de manière égale sur 400 surfaces élémentaires au centre de la dent

De plus, on observe, toujours sur la figure 2-12, que les déplacements en flexion sont asymétriques selon  $\theta_{tc}$  alors que l'effort est appliqué au centre du flanc. Cette asymétrie des déplacements est due à la variation de la géométrie de la section de la dent le long de cette direction, visible en figure 2-8. Il apparaît sur la figure 2-13 que le comportement en flexion de la dent a relativement peu varié lorsque l'effort a été réparti sur une plus grande surface, tant d'un point de vue de la déformée globale que de l'amplitude maximale des déplacements. Les déplacements de contact ont quant à eux sensiblement évolués et présentent dans ce cas-ci une amplitude du même ordre de grandeur que les déplacements de flexion. Ces deux cas de figure illustrent les comportements des différentes contributions aux déplacements normaux totaux, et par conséquent à la raideur d'engrènement.

Les déplacements normaux de toutes les cellules de discrétisation sont donc obtenus pour une répartition d'efforts normaux donnés, et permettent d'obtenir un ensemble de raideurs élémentaires indépendantes. La distribution de raideurs élémentaires indépendantes obtenues avec cette formulation n'est cependant valable que pour la distribution d'efforts de contact élémentaires avec laquelle elle a été obtenue. Lors de la résolution des équations du mouvement, détaillée en section 2.6, un algorithme de contact s'assure que cette contrainte soit toujours respectée.

## 2.1.4 Erreurs de transmission

La détermination des erreurs de transmission est un des objectifs principaux du modèle développé dans cette étude. Les erreurs de transmission des engrenages cylindriques sont très souvent exprimées en distance le long du plan d'action, elles seront également dans cette étude exprimées en angle sur la sortie. Exprimer les erreurs de transmission en angle permet de créer une référence commune entre le train épicycloïdal et l'engrenage spiroconique, pour lequel aucun plan d'action n'a été défini. Toutes les erreurs de transmission angulaires, et notamment celles de l'engrenage spiroconique, sont exprimées en angle en sortie du train épicycloïdal, faisant donc intervenir le rapport de réduction du train épicycloïdal.

### Erreurs de transmission angulaires sans charge

Pour le train épicycloïdal :

$$\theta_{NLTE}^{pgt} = - \frac{\max(U_{jm}^r) \cos \alpha_{rj} + \max(U_{jm}^s) \cos \alpha_{sj}}{r_{pr} + r_{ps}} \quad 2-80$$

Pour l'engrenage spiroconique :

$$\theta_{NLTE}^{sbg} = \frac{Z_s}{|Z_r| + Z_s} \frac{\min(U_m^p)}{r_{m\delta_e}} \quad 2-81$$

Avec  $r_{m\delta_e}$  le rayon du point pour lequel la distance de séparation initiale est maximale, c'est-à-dire la plus proche de zéro dans le cas où deux surfaces seraient séparées.

### Erreurs de transmission angulaires sous charge

Pour le train épicycloïdal :

$$\theta_{LTE}^{pgt} = \theta_{NLTE}^{pgt} + \varepsilon \left( \frac{Z_s}{|Z_r| + Z_s} \vartheta_s - \vartheta_c \right) \quad 2-82$$

Pour l'engrenage conique :

$$\theta_{LTE}^{sbg} = \theta_{NLTE}^{sbg} - \varepsilon \frac{Z_s}{|Z_r| + Z_s} \left( \frac{Z_p}{Z_w} \vartheta_p + \vartheta_w \right) \quad 2-83$$

Globales :

$$\theta_{GLTE} = \theta_{NLTE}^{pgt} + \theta_{NLTE}^{sbg} - \varepsilon \left( \frac{Z_s Z_p}{(|Z_r| + Z_s) Z_w} \vartheta_i + \vartheta_o \right) \quad 2-84$$

Avec  $\vartheta_i$  et  $\vartheta_o$  les degrés de liberté en rotation des nœuds d'entrée et de sortie du modèle complet.

---

## 2.1.5 Cinématique de corps rigides

La cinématique de corps rigide des différents composants du système est déterminée en imposant une condition de vitesse relative nulle des deux corps en contact aux différents points de contact des engrenements.

$$\mathbf{v}_{g_1}^{g_2} (M_{c_{g_2/g_1}}) \mathbf{n}_{c_{g_2/g_1}} (M_{c_{g_2/g_1}}) = 0 \quad 2-85$$

Le point  $M_{c_{g_2/g_1}}$  est un point de contact, pour lequel la distance de séparation est nulle :

$$\delta_e (M_{c_{g_2/g_1}}) = 0 \quad 2-86$$

Les distances de séparation maximales sont notées comme suit, avec  $j_r$  l'indice du satellite pour lequel la distance de séparation initiale maximale entre la couronne et un satellite  $\Delta_e^r$  est atteinte :

$$\Delta_e^s = \max_m^{j=j_r} (\delta_e (M_{jm}^s)) \quad 2-87$$

$$\Delta_e^r = \max_{jm} (\delta_e (M_{jm}^r)) \quad 2-88$$

$$\Delta_e^p = \max_m (\delta_e (M_m^p)) \quad 2-89$$

Les dérivées premières et secondes dans le temps de ces distances de séparation initiales maximales sont estimées pas à pas dans le temps par différences finies.

En développant l'équation 2-85, les vitesses et accélérations des différents composants s'écrivent alors :

*Vitesses :*

$$\Omega_w^0 = \frac{{}^T(\mathbf{O}_p \mathbf{M}_c \wedge \Omega_p^0) \mathbf{n}_p}{{}^T(\mathbf{O}_w \mathbf{M}_c \wedge \mathbf{z}_{I0}) \mathbf{n}_p} + \dot{\Delta}_e^p \frac{\|\mathbf{n}_p \wedge \mathbf{z}_{I0}\|}{\|\mathbf{O}_w \mathbf{M}_c \wedge \mathbf{z}_{I0}\|} \quad 2-90$$

$$\Omega_s^0 = \Omega_w^0 \quad 2-91$$

$$\Omega_c^0 = \frac{r_{bs}}{r_{bs} + r_{br}} \Omega_s^0 + \frac{\dot{\Delta}_e^s - \dot{\Delta}_e^r}{(r_{bs} + r_{br}) \cos \beta_b} \quad 2-92$$

$$\Omega_s^1 = \Omega_s^0 - \Omega_c^0 \quad 2-93$$

$$\Omega_j^1 = -\frac{r_{bs}}{r_{bj}} \Omega_s^1 - \frac{\dot{\Delta}_e^s}{r_{bj} \cos \beta_b} \quad 2-94$$

$$\Omega_r^1 = -\Omega_c^0 \quad 2-95$$

*Accélérations :*

$$\dot{\Omega}_s^0 = \dot{\Omega}_w^0 \quad 2-96$$

$$\dot{\Omega}_c^0 = \frac{r_{bs}}{r_{bs} + r_{br}} \dot{\Omega}_s^0 + \frac{\ddot{\Delta}_e^s - \ddot{\Delta}_e^r}{(r_{bs} + r_{br}) \cos \beta_b} \quad 2-97$$

$$\dot{\Omega}_s^1 = \dot{\Omega}_s^0 - \dot{\Omega}_c^0 \quad 2-98$$

$$\dot{\Omega}_j^1 = -\frac{r_{bs}}{r_{bj}} \dot{\Omega}_s^1 - \frac{\ddot{\Delta}_e^s}{r_{bj} \cos \beta_b} \quad 2-99$$

$$\dot{\Omega}_r^1 = -\dot{\Omega}_c^0 \quad 2-100$$

La vitesse de la roue conique, donnée à l'équation 2-90, faisant intervenir de nombreux termes géométriques variant au cours du temps, mais dont aucune expression analytique n'est connue, l'accélération  $\dot{\Omega}_w^0$  de la roue conique est évaluée par différences finies, de manière similaire aux dérivées des distances de séparation initiales maximales.

---

## 2.1.6 Conclusion

A partir d'une expression générale des efforts d'engrènement, des éléments d'engrenages ont été définis pour les engrènements intérieurs et extérieurs du train épicycloïdal ainsi que pour l'engrenage spiroconique. Ces éléments d'engrenages se basent sur la connaissance de trois grandeurs : les vecteurs structurels, les distances de séparation initiales et les raideurs élémentaires, pour lesquelles les différentes méthodes de détermination ont été explicitées.

## 2.2 ÉLÉMENTS DE PALIER

Bien que l'étude de l'influence des propriétés des paliers sur la transmission ne soit pas l'objectif de ces travaux, une modélisation réaliste des paliers est nécessaire pour correctement rendre compte des déplacements et flexion des arbres générés par les engrenages spiroconiques.

En se basant sur les travaux de Palmgren [19], la relation entre la charge et la déformation, dans la direction de la normale au contact, d'un élément roulant peut s'écrire :

$$Q(\delta) = k_b \delta^n \quad 2-101$$

Cette relation étant non linéaire, une approximation au premier ordre en est faite afin de linéariser cette relation autour d'une valeur d'écrasement de référence  $\delta_0$  :

$$Q(\delta) = (1 - n)k_b \delta_0^n + nk_b \delta_0^{n-1} \delta \quad 2-102$$

En projetant cette relation dans un repère dont l'axe  $z$  est défini comme colinéaire à l'axe de rotation du roulement, et en sommant la contribution de chacun des  $N_{RE}$  éléments roulants d'un palier, on obtient la relation :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{K}_b \mathbf{q} + \mathbf{F}_b \quad 2-103$$

$$\mathbf{K}_b = \sum_{RE=1}^{N_{RE}} nk_{b_{RE}} \delta_{0_{RE}}^{n-1} \mathbf{v}_{b_{RE}}^T \mathbf{v}_{b_{RE}} \quad 2-104$$

$$\mathbf{F}_b = \sum_{RE=1}^{N_{RE}} (1 - n)k_{b_{RE}} \delta_{0_{RE}}^n \mathbf{v}_{b_{RE}} \quad 2-105$$

Avec  $\mathbf{q}$  le vecteur des degrés de liberté de la bague intérieure relativement à la bague extérieure. L'écrasement de référence  $\delta_{0_{RE}}$  de l'élément roulant  $n^{\circ}RE$  est calculé à partir du vecteur des degrés de liberté du pas de temps précédent et des précharges axiales et radiales du roulement :

$$\delta_{0_{RE}} = {}^T \mathbf{v}_{b_{RE}} \mathbf{q}_{t-1} + \delta_{zp} \sin|\alpha_{IR}| + \delta_{rp} \cos|\alpha_{IR}| \quad 2-106$$

En étendant les travaux de Chapron [93], les paliers des satellites liant le porte-satellites aux satellites sont projetés comme suit :

$$\mathbf{K}_{support_j} = \mathbf{P}_j \mathbf{K}_{b_j}^T \mathbf{P}_j \quad 2-107$$

$$\mathbf{F}_{support_j} = \mathbf{P}_j \mathbf{F}_{b_j} \quad 2-108$$

Avec  $\mathbf{P}_j$  une matrice de projection :

$$\mathbf{P}_j = \begin{bmatrix} \cos \Phi_j & -\sin \Phi_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \Phi_j & \cos \Phi_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_c \sin \Phi_j & \cos \Phi_j & -\sin \Phi_j & 0 \\ 0 & 0 & -R_c \cos \Phi_j & \sin \Phi_j & \cos \Phi_j & 0 \\ 0 & R_c & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad 2-109$$

Les expressions de la constante de raideur  $k_b$  et du vecteur de projection  $\mathbf{v}_b$  dépendent du type de palier, et sont détaillées ci-dessous pour des géométries simplifiées de roulements à billes et de roulements à rouleaux coniques.

## 2.2.1 Roulements à billes

On considère que les contacts entre les billes et les bagues intérieures et extérieures sont ponctuels. D'après Palmgren [19], on a :

$$k_{b_{RE}} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \sqrt{D_{RE}} \quad 2-110$$

Pour des contacts ponctuels, l'indice  $n$  vaut [19] :

$$n = \frac{3}{2} \quad 2-111$$

Le vecteur de projection correspondant s'exprime :

$$\mathbf{v}_{b_{RE}} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{IR} \cos \phi_{RE} \\ \cos \alpha_{IR} \sin \phi_{RE} \\ \sin \alpha_{IR} \\ r_{IR} \sin \alpha_{IR} \sin \phi_{RE} \\ -r_{IR} \sin \alpha_{IR} \cos \phi_{RE} \\ 0 \end{bmatrix} \quad 2-112$$

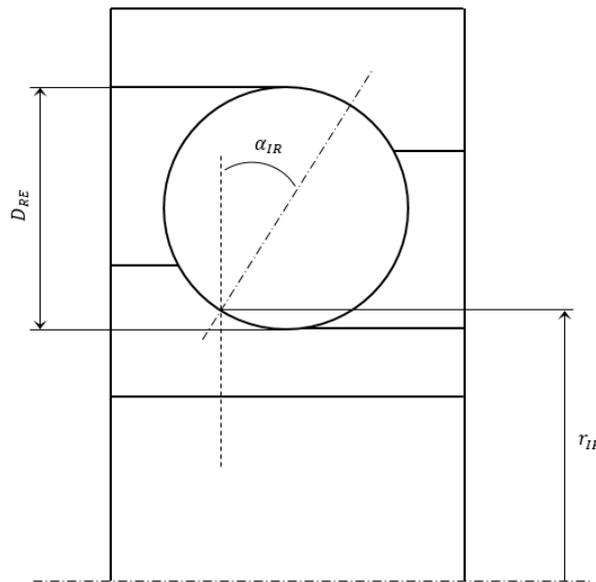


Figure 2-14 Paramètres géométriques des roulements à billes

## 2.2.2 Roulements à rouleaux coniques

On considère un contact linéique entre les rouleaux et les bagues intérieures et extérieures. Les rouleaux coniques sont découpés en un certain nombre  $N_l$  de tranches dans leur longueur, dont chaque tranche est d'une longueur  $l_{RE}$  et dont le centre est en contact avec la bague intérieure au rayon  $r_{IR_{RE}}$  et à une distance  $d_{RE}$  du centre du roulement. La contribution de chacune des tranches s'ajoute comme s'il s'agissait de plusieurs éléments roulants. D'après Palmgren [19], on a pour la tranche d'indice  $n^{\circ}RE$  :

$$k_{b_{RE}} = \frac{E}{8(1-\nu^2)} \frac{l_{RE}^{\frac{8}{9}}}{(2 * 0.39)^{\frac{10}{9}}} \quad 2-113$$

Pour des contacts linéiques, l'indice  $n$  vaut [19] :

$$n = \frac{10}{9} \quad 2-114$$

Le vecteur de projection correspondant s'exprime :

$$\mathbf{v}_{b_{RE}} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{IR} \cos \phi_{RE} \\ \cos \alpha_{IR} \sin \phi_{RE} \\ \sin \alpha_{IR} \\ (r_{IR_{RE}} \sin \alpha_{IR} - d_{RE} \cos \alpha_{IR}) \sin \phi_{RE} \\ -(r_{IR_{RE}} \sin \alpha_{IR} - d_{RE} \cos \alpha_{IR}) \cos \phi_{RE} \\ 0 \end{bmatrix} \quad 2-115$$

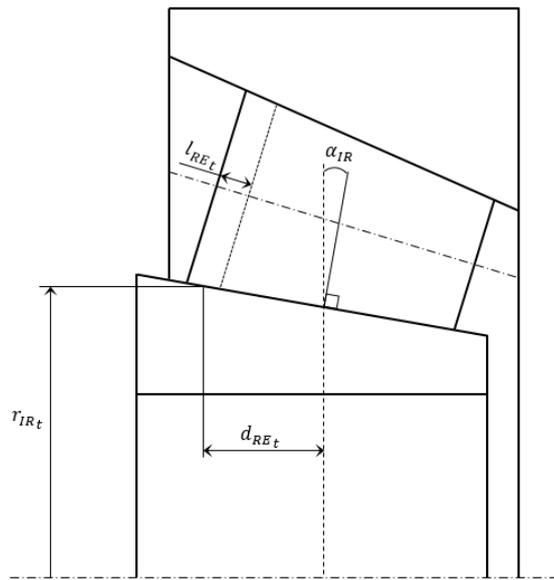


Figure 2-15 Paramètres géométriques des roulements à rouleaux coniques

## 2.3 AUTRES ELEMENTS ET STRUCTURES DEFORMABLES

### 2.3.1 Éléments d'arbre

Pour correctement rendre compte des interactions entre engrenages spiroconiques et train épicycloïdal, il est nécessaire de modéliser le plus justement possible la liaison entre ces deux étages de réduction. Pour cela, les arbres de la transmission sont modélisés par des poutres de Timoshenko à deux nœuds. Les contributions des différentes sollicitations mécaniques sont découplées, et les matrices de masse et de raideur totales s'écrivent :

$$\begin{aligned} M_a &= M_{tc} + M_{fs} + M_{ft} + M_{tr} \\ K_a &= K_{tc} + K_{fs} + K_{ft} + K_{tr} \end{aligned} \quad 2-116$$

Avec, en traction et compression :

$$\begin{aligned} M_{tc} &= \frac{\rho s_a l_a}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} \\ K_{tc} &= \frac{E s_a}{l_a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad 2-117$$

En flexion, incluant les effets dus au cisaillement :

$$\begin{aligned} M_{fs} &= \frac{\rho s_a l_a}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l_a & 54 & -13l_a \\ & 4l_a^2 & -13l_a & -3l_a^2 \\ \text{sym} & & 156 & 22l_a \\ & & & 4l_a^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ \phi_1 \\ x_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \\ K_{fs} &= \frac{EI_t}{(1+a)l_a^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_a & -12 & 6l_a \\ & (4+a)l_a^2 & -6l_a & (2-a)l_a^2 \\ \text{sym} & & 12 & -6l_a \\ & & & (4+a)l_a^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ \phi_1 \\ x_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \\ M_{ft} &= \frac{\rho s_a l_a}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l_a & 54 & -13l_a \\ & 4l_a^2 & -13l_a & -3l_a^2 \\ \text{sym} & & 156 & 22l_a \\ & & & 4l_a^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} y_1 \\ \psi_1 \\ y_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} \\ K_{ft} &= \frac{EI_t}{(1+a)l_a^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_a & -12 & 6l_a \\ & (4+a)l_a^2 & -6l_a & (2-a)l_a^2 \\ \text{sym} & & 12 & -6l_a \\ & & & (4+a)l_a^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} y_1 \\ \psi_1 \\ y_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad 2-118$$

En torsion :

$$\begin{aligned} M_{tr} &= \frac{\rho I_G l_a}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{Bmatrix} \\ K_{tr} &= \frac{GI_G}{l_a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad 2-119$$

Avec  $s_a$  section de l'arbre,  $l_a$  longueur de l'arbre et  $a$  facteur de cisaillement, s'exprimant :

$$a = \frac{12EI_t}{Gs_a l_a^2} \quad 2-120$$

Les degrés de liberté de la roue spiroconique en sortie de l'engrenage spiroconique étant exprimés dans le repère  $R_{I0}$ , et ceux du planétaire en entrée du train épicycloïdal dans le repère  $R_1$ , il est nécessaire de définir un élément d'arbre permettant de lier l'un à l'autre. A cette fin, on projette les matrices de masse et de raideur d'un élément d'arbre défini ci-dessus comme suit :

$$M_a = {}^t P M_a P$$

$$K_a = {}^t P K_a P$$

2-121

Avec :

$$P = \begin{bmatrix} P_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

avec  $\mathbf{0}$  matrice nulle,  $\mathbf{1}$  matrice identité,

$$\text{et } P_c = \begin{bmatrix} \cos \lambda_c & \sin \lambda_c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \lambda_c & \cos \lambda_c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \lambda_c & \sin \lambda_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \lambda_c & \cos \lambda_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2-122

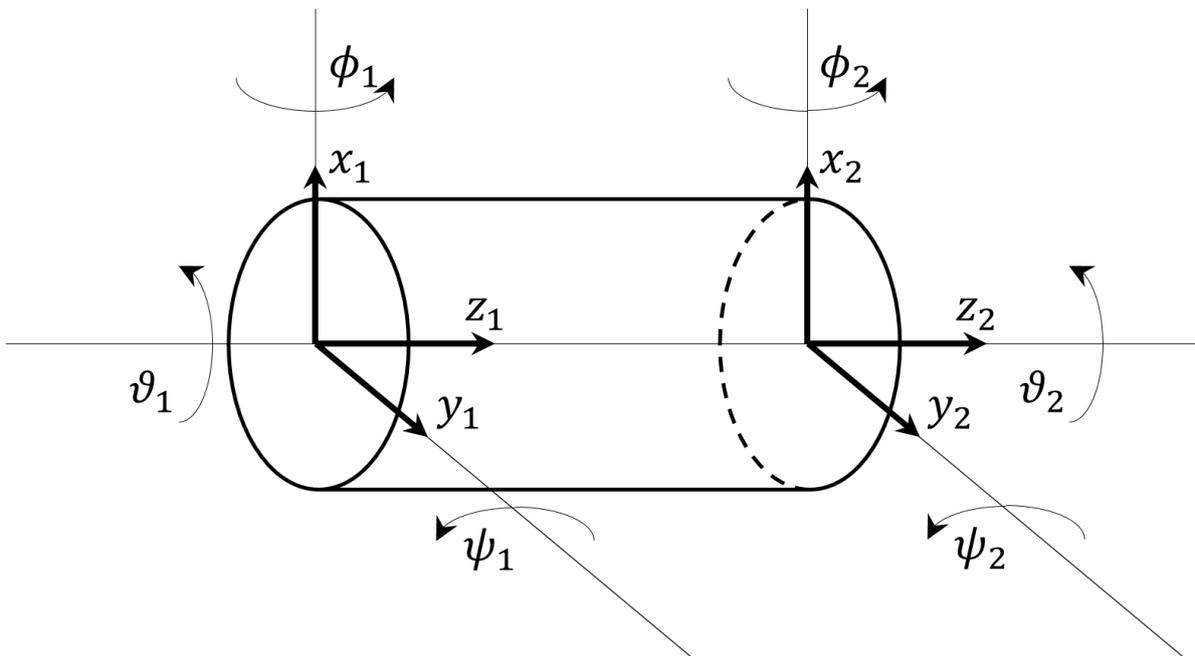


Figure 2-16 Degrés de liberté d'un élément de poutre à deux nœuds

### 2.3.2 Matrices de raideurs additionnelles

Afin d'empêcher tout déplacements de corps rigides, l'utilisation de matrices de raideurs additionnelles est nécessaire. Une raideur torsionnelle est ajoutée sur le nœud de sortie afin d'empêcher les rotations de corps rigides du système. De plus, afin d'immobiliser la couronne dans le repère fixe, une ou plusieurs matrices de raideurs lui sont appliquées. Dans le cas où la couronne est modélisée par un seul nœud, une seule matrice de raideur vient l'immobiliser. Lorsque la couronne est modélisée comme flexible, avec autant de nœuds que de dents, un nombre arbitraire de ces nœuds sont liés au repère fixe à l'aide d'une matrice de raideur.

## 2.4 MATRICES GYROSCOPIQUE, CENTRIFUGE, DE MASSE ET TERME EXCITATEUR

En supposant que les termes dépendants de l'accélération du porte-satellites  $\dot{\Omega}_c^0$  sont négligeables, l'application du principe fondamental de la dynamique amène aux torseurs dynamiques suivant :

Pour les satellites :

$$\begin{aligned}
 \left[ \begin{array}{c} \Sigma_j^0 \\ \delta_j^0(O_j) \end{array} \right] &= \left[ \begin{array}{cccccc} m_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ec_j \sin \lambda_j m_j & J_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ec_j \cos \lambda_j m_j & 0 & J_t & 0 \\ -ec_j \sin \lambda_j m_j & ec_j \cos \lambda_j m_j & 0 & 0 & 0 & J_G \end{array} \right] \ddot{X} + \\
 2\Omega_c^0 & \left[ \begin{array}{cccccc} 0 & -m_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -J_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_t & 0 & 0 \\ ec_j \cos \lambda_j m_j & ec_j \sin \lambda_j m_j & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \dot{X} - \\
 \Omega_c^{0^2} & \left[ \begin{array}{cccccc} m_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_t & 0 \\ -ec_j \sin \lambda_j m_j & ec_j \cos \lambda_j m_j & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] X - \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \Omega_c^{0^2} (ex_j + R_c + ec_c \cos(\Phi_j - \alpha_c))m_j + (\Omega_j^1 + \Omega_c^0)^2 ec_j \cos \lambda_j m_j + \dot{\Omega}_j^1 ec_j \sin \lambda_j m_j \\ \Omega_c^{0^2} (ey_j - ec_c \sin(\Phi_j - \alpha_c))m_j + (\Omega_j^1 + \Omega_c^0)^2 ec_j \sin \lambda_j m_j - \dot{\Omega}_j^1 ec_j \cos \lambda_j m_j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -J_G \dot{\Omega}_j^1 + \Omega_c^{0^2} ec_j [ey_j \cos \lambda_j - (ex_j + R_c) \sin \lambda_j - ec_c \sin(\Phi_j - \alpha_c + \lambda_j)]m_j - \dot{\Omega}_j^1 ec_j^2 m_j \end{array} \right\}
 \end{aligned}
 \tag{2-123}$$

Pour les membres centraux du train épicycloïdal :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \Sigma_g^0 \\ \delta_g^0(O_g) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m_g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ec_g \sin \lambda_g m_g & J_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ec_g \cos \lambda_g m_g & 0 & J_t & 0 & 0 \\ -ec_g \sin \lambda_g m_g & ec_g \cos \lambda_g m_g & 0 & 0 & 0 & 0 & J_G \end{bmatrix} \ddot{X} \\
 &+ 2\Omega_c^0 \begin{bmatrix} 0 & -m_g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -J_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_t & 0 & 0 \\ ec_g \cos \lambda_g m_g & ec_g \sin \lambda_g m_g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{X} \\
 &- \Omega_c^{0^2} \begin{bmatrix} m_g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_t & 0 \\ -ec_g \sin \lambda_g m_g & ec_g \cos \lambda_g m_g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X \\
 &- \begin{pmatrix} ec_g (\dot{\Omega}_g^1 \sin \lambda_g + \Omega_g^{0^2} \cos \lambda_g) m_g \\ ec_g (-\dot{\Omega}_g^1 \cos \lambda_g + \Omega_g^{0^2} \sin \lambda_g) m_g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -J_G \dot{\Omega}_g^1 - \dot{\Omega}_g^1 ec_g^2 m_g \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

2-124

Pour les engrenages coniques :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \Sigma_g^0 \\ \delta_g^0(O_g) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m_g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ec_g \sin \lambda_{0_g} m_g & J_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ec_g \cos \lambda_{0_g} m_g & 0 & J_t & 0 & 0 \\ -ec_g \sin \lambda_{0_g} m_g & ec_g \cos \lambda_{0_g} m_g & 0 & 0 & 0 & 0 & J_G \end{bmatrix} \ddot{X} \\
 &- \begin{pmatrix} ec_g (\dot{\Omega}_g^0 \sin \lambda_{0_g} + \Omega_g^{0^2} \cos \lambda_{0_g}) m_g \\ ec_g (-\dot{\Omega}_g^0 \cos \lambda_{0_g} + \Omega_g^{0^2} \sin \lambda_{0_g}) m_g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -J_G \dot{\Omega}_g^0 - \dot{\Omega}_g^0 ec_g^2 m_g \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

2-125

## 2.5 AMORTISSEMENT

L'amortissement conditionne en grande partie le comportement du système, notamment aux alentours des vitesses critiques. Il n'existe cependant que très peu de modèles d'amortissement dans la littérature, les nombreux phénomènes physiques contrôlant la dissipation d'énergie, représentés par l'amortissement, étant complexes à modéliser. Un modèle classique d'amortissement de Rayleigh est employé dans cette étude, exprimant la matrice d'amortissement comme une combinaison linéaire de la matrice de masse et de raideur moyennées dans le temps :

$$\mathbf{C}_R = \alpha_R \bar{\mathbf{M}} + \beta_R \bar{\mathbf{K}} \quad 2-126$$

Les coefficients d'amortissement de Rayleigh  $\alpha_R$  et  $\beta_R$  sont inconnus, ils peuvent être déterminés expérimentalement, ou estimés à partir du pourcentage d'énergie de déformation modale emmagasinée dans les engrènements. En supposant un facteur d'amortissement d'engrènement  $\eta_{mesh}$  et un facteur d'amortissement structurel  $\eta_{struct}$ , le facteur d'amortissement modal  $\zeta_i$  du mode n°i s'exprime :

$$\zeta_i = \eta_{mesh} \rho_i + \eta_{struct} (1 - \rho_i) \quad 2-127$$

Le pourcentage d'énergie de déformation modale emmagasinée dans les engrènements s'exprime pour le mode n°i :

$$\rho_i = \frac{{}^T \Phi_i \bar{\mathbf{K}}_{mesh} \Phi_i}{{}^T \Phi_i \bar{\mathbf{K}} \Phi_i} \quad 2-128$$

Avec :

$\Phi_i$  vecteur propre du mode n°i

$\bar{\mathbf{K}}_{mesh}$  matrice de raideur des engrènements moyennée dans le temps

En déterminant ainsi les facteurs d'amortissement modal  $\zeta_1, \zeta_2$  de deux modes, de vitesses critiques  $\omega_1, \omega_2$ , les coefficients d'amortissement de Rayleigh peuvent être identifiés :

$$\begin{aligned} \alpha_R &= 2\omega_1\omega_2 \frac{\zeta_2\omega_1 - \zeta_1\omega_2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \\ \beta_R &= 2 \frac{\zeta_1\omega_1 - \zeta_2\omega_2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \end{aligned} \quad 2-129$$

Ce modèle d'amortissement présente de nombreuses imperfections. Il repose notamment sur la détermination de facteurs d'amortissement réalistes, ce qui n'est réalisable que par mesure. La littérature indique cependant des facteurs d'amortissement d'engrènement  $\eta_{mesh}$  classiquement compris entre 0.03 et 0.10, et des facteurs d'amortissement structurel  $\eta_{struct}$  de l'ordre de 0.01 ou 0.02. Enfin, les propriétés de cette modélisation résultent en un amortissement trop important des modes dont les vitesses critiques se trouvent à l'extérieur de l'intervalle  $[\omega_1, \omega_2]$ , les modes utilisés pour l'identification des coefficients d'amortissement de Rayleigh doivent donc être choisis relativement à la plage de vitesses d'étude du système.

## 2.6 ARCHITECTURE DU MODELE ET RESOLUTION DES EQUATIONS DU MOUVEMENT

Les différents éléments développés plus tôt dans ce chapitre sont assemblés en un modèle global représenté sur la figure 2-17, de manière à reproduire le montage de la transmission modélisée. Une illustration d'une transmission correspondant à un tel système est donnée en figure 2-18. Le porte-satellites est monté en porte-à-faux sur l'arbre de sortie, et est non déformable, et les axes des satellites montés sur le porte-satellites sont modélisés par des éléments d'arbre. Des paliers viennent lier les axes des satellites aux satellites correspondant. La modélisation du porte-satellites ainsi que des axes et paliers des satellites est illustrée en figure 2-19. Le planétaire comme la roue spiroconique sont montés en porte-à-faux sur l'arbre intermédiaire, alors que le pignon conique est monté en chape entre deux roulements sur l'arbre traversant.

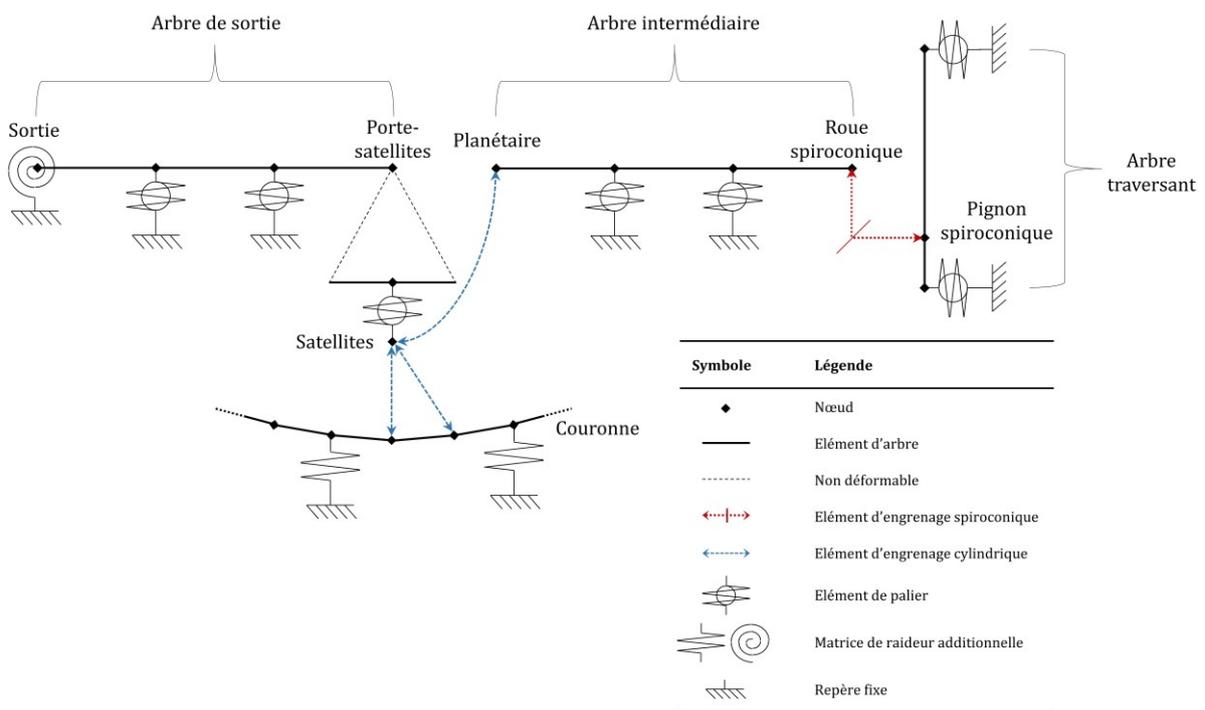


Figure 2-17 Représentation du modèle complet

Le système différentiel final s'écrit donc :

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_S(t) + \mathbf{M}_g(t)) \ddot{\mathbf{X}} + (\mathbf{C}_R + \mathbf{C}_G(t)) \dot{\mathbf{X}} + (\mathbf{K}_S(t) + \mathbf{K}_{mesh}(t, \mathbf{X}) + \mathbf{K}_b(t) + \mathbf{K}_C(t)) \mathbf{X} \\ = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_{\delta_e}(t, \mathbf{X}) + \mathbf{F}_{\dot{\Omega}}(t) + \mathbf{F}_b(t) \end{aligned} \quad 2-130$$

Avec :

- $\mathbf{M}_S, \mathbf{K}_S$  matrices de masse et de raideur du système, comprenant les arbres ainsi que les matrices de raideur additionnelles de la couronne et de la sortie, dépendant du temps pour les éléments d'arbres de repère mixte.
- $\mathbf{M}_g, \mathbf{C}_G, \mathbf{K}_C, \mathbf{F}_{\dot{\Omega}}$  matrices des termes de masse, gyroscopiques, centrifuges et vecteur des termes d'excitation provenant du torseur dynamique des éléments d'engrenages, variant avec les positions, vitesses et accélérations de corps rigide des différents éléments du système et donc dépendants du temps.

- $K_{mesh}, F_{\delta_e}$  matrice de raideur des engrènements et vecteur des termes d'excitation dus aux séparations initiales, dépendants du temps et des déformations du système.
- $K_b, F_b$  matrice de raideur et vecteur des efforts de linéarisation des paliers, dépendants du temps.
- $C_R$  matrice d'amortissement de Rayleigh.
- $F_0$  vecteur des efforts extérieurs.

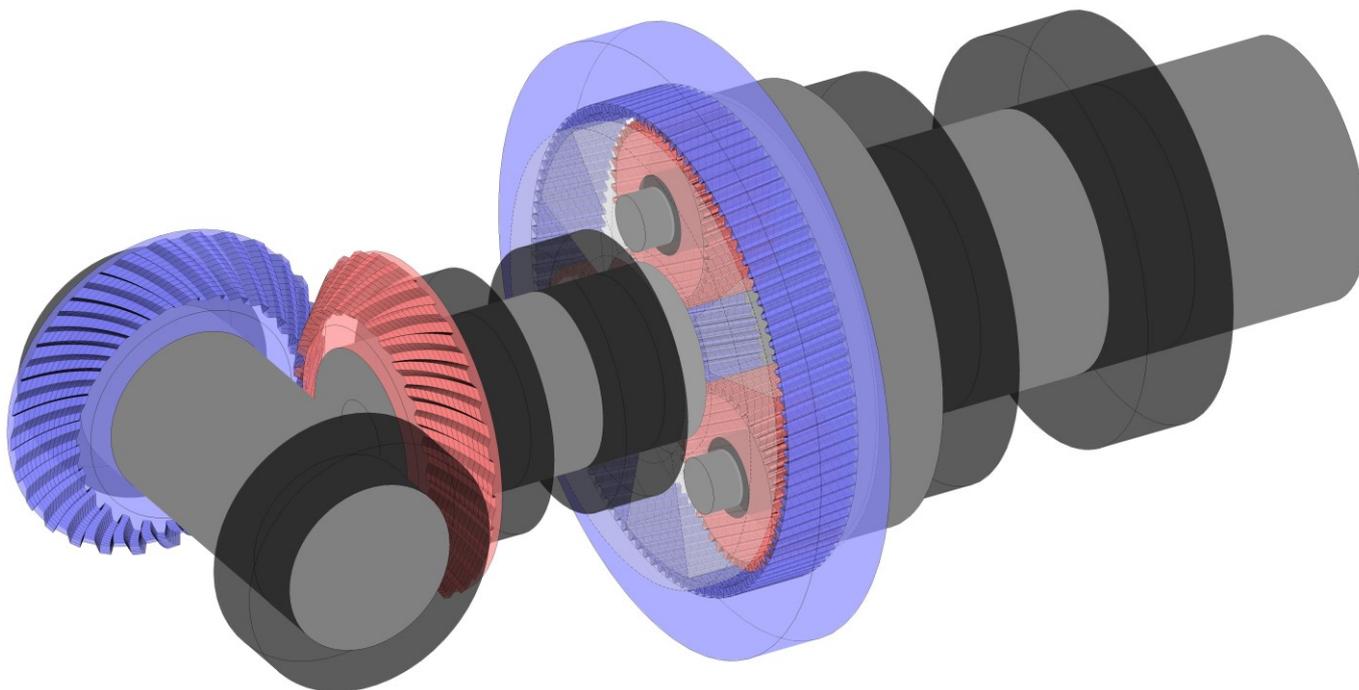


Figure 2-18 Illustration des constituants du système complet

■ Paliers - ■ Arbres - ■/■ Engrenages - [---] Porte-satellites (indéformable)

Un schéma d'intégration numérique de Newmark inconditionnellement stable est utilisé afin de résoudre le système pas à pas dans le temps. A ce schéma d'intégration est couplé un algorithme de contact s'assurant à chaque pas de temps que tous les efforts de contact sur les flancs de denture soient compressifs. La procédure de résolution est illustrée figure 2-21.

L'algorithme de contact, correspondant aux étapes 7 à 10 de la figure 2-21, résout pour une matrice de raideur donnée les équations du mouvement permettant d'obtenir le vecteur des degrés de liberté, et donc de calculer la déflexion normale au contact à chacune des interfaces d'engrènement du système. Les efforts de contact résultant de ces déflexions normales et des raideurs élémentaires sont ensuite calculés d'après l'équation 2-22. Cette nouvelle répartition d'efforts de contact est ensuite utilisée pour recalculer les raideurs élémentaires et la matrice de raideurs d'engrènement, et le processus est itéré jusqu'à convergence vers une solution assurant la cohérence entre les raideurs élémentaires, les efforts de contact et les déplacements.

La solution statique initiale, correspondant à l'étape 5 de la figure 2-21, permet d'initialiser le calcul dynamique. Pour le train épicycloïdal, une formulation de raideur simplifiée, constante par unité de longueur de ligne de contact, est utilisée, et la raideur de chacun des engrènements est moyennée dans le temps afin d'obtenir une matrice de raideur moyenne. Pour le train spiroconique, une résolution statique complète des équations du mouvement est effectuée, avec convergence de l'algorithme de contact, pour la position initiale des engrènements spiroconiques, afin de déterminer la matrice de raideur et le vecteur des efforts d'excitation initiaux.

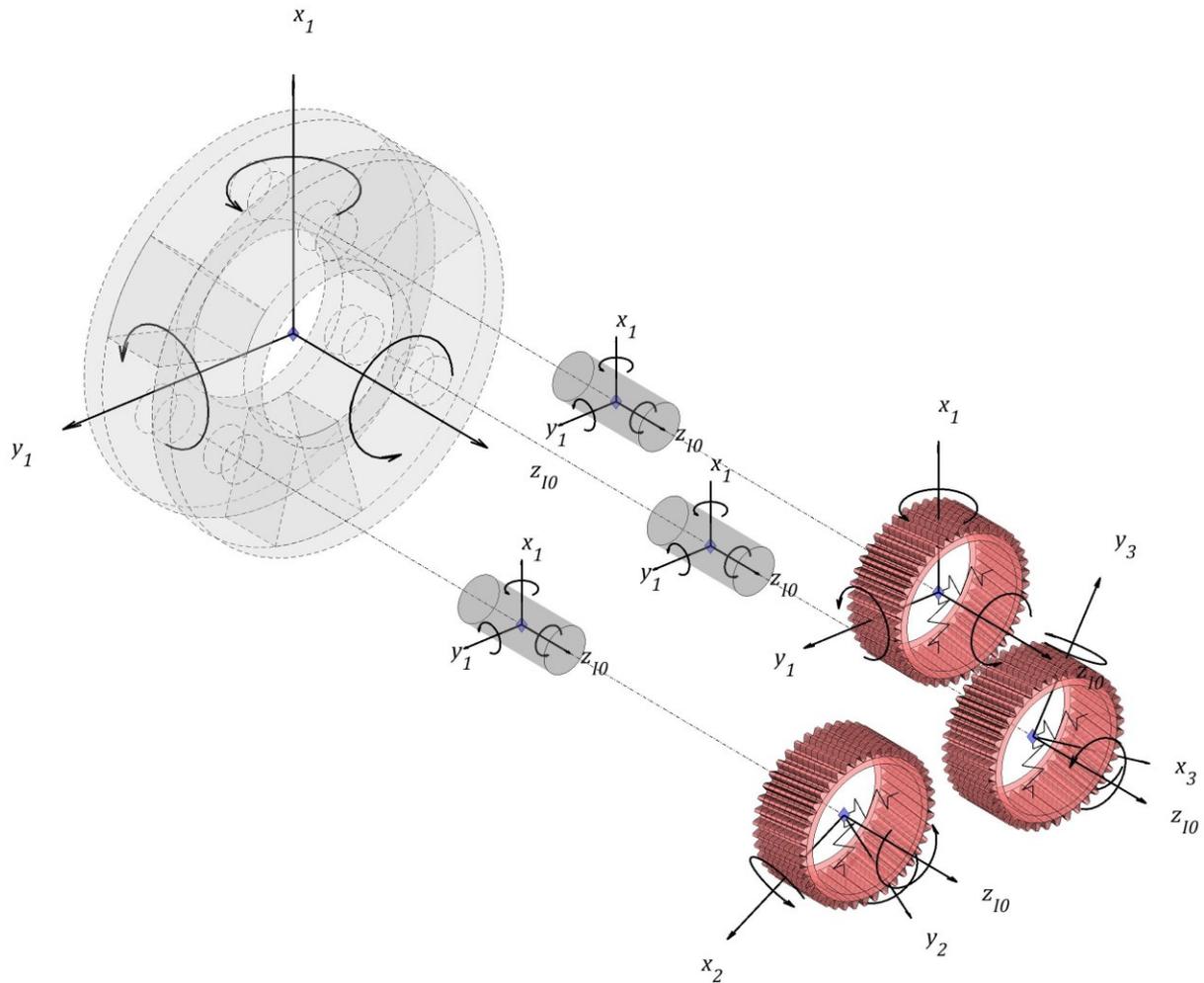


Figure 2-19 Illustration du montage des satellites sur le porte-satellites et des repères d'expression des degrés de liberté des satellites, dans une configuration à 3 satellites

◆ Nœuds - ■ Arbres - ⚙ Paliers - ■ Satellites - □ Porte-satellites (indéformable)

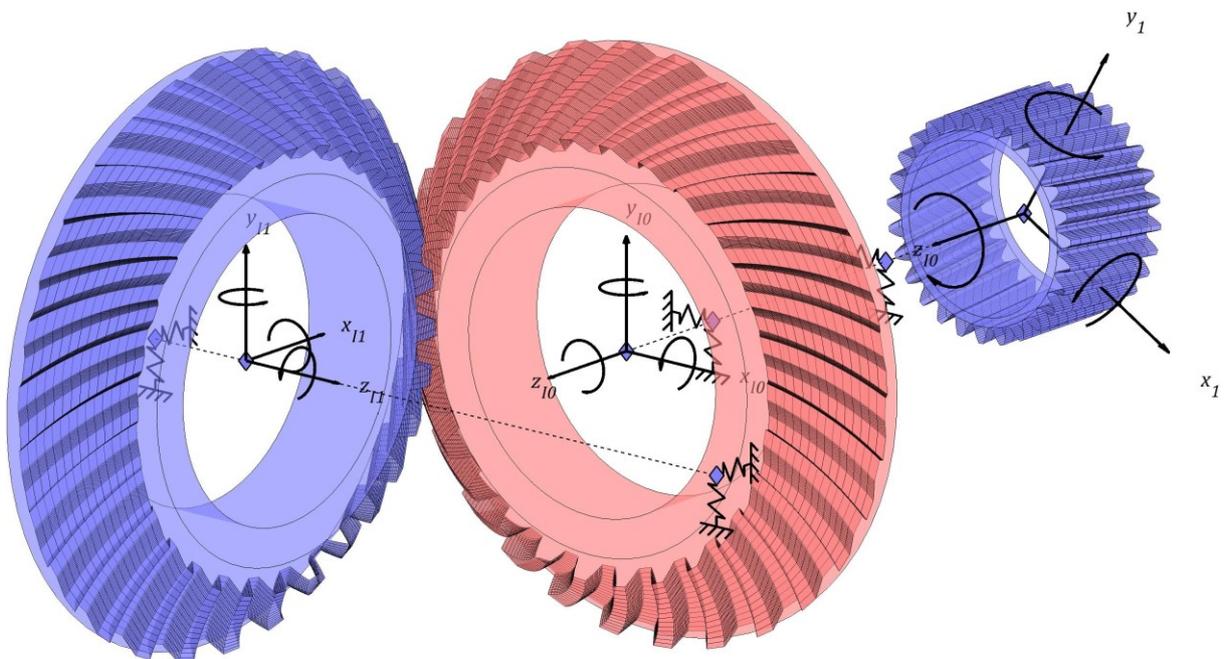


Figure 2-20 Illustration du montage des arbres traversant et intermédiaire, et des repères d'expression des degrés de liberté du pignon spiroconique, de la roue spiroconique et du planétaire

◆ Nœuds - --- Arbres - ⚙ Paliers - ■/■ Engrenages

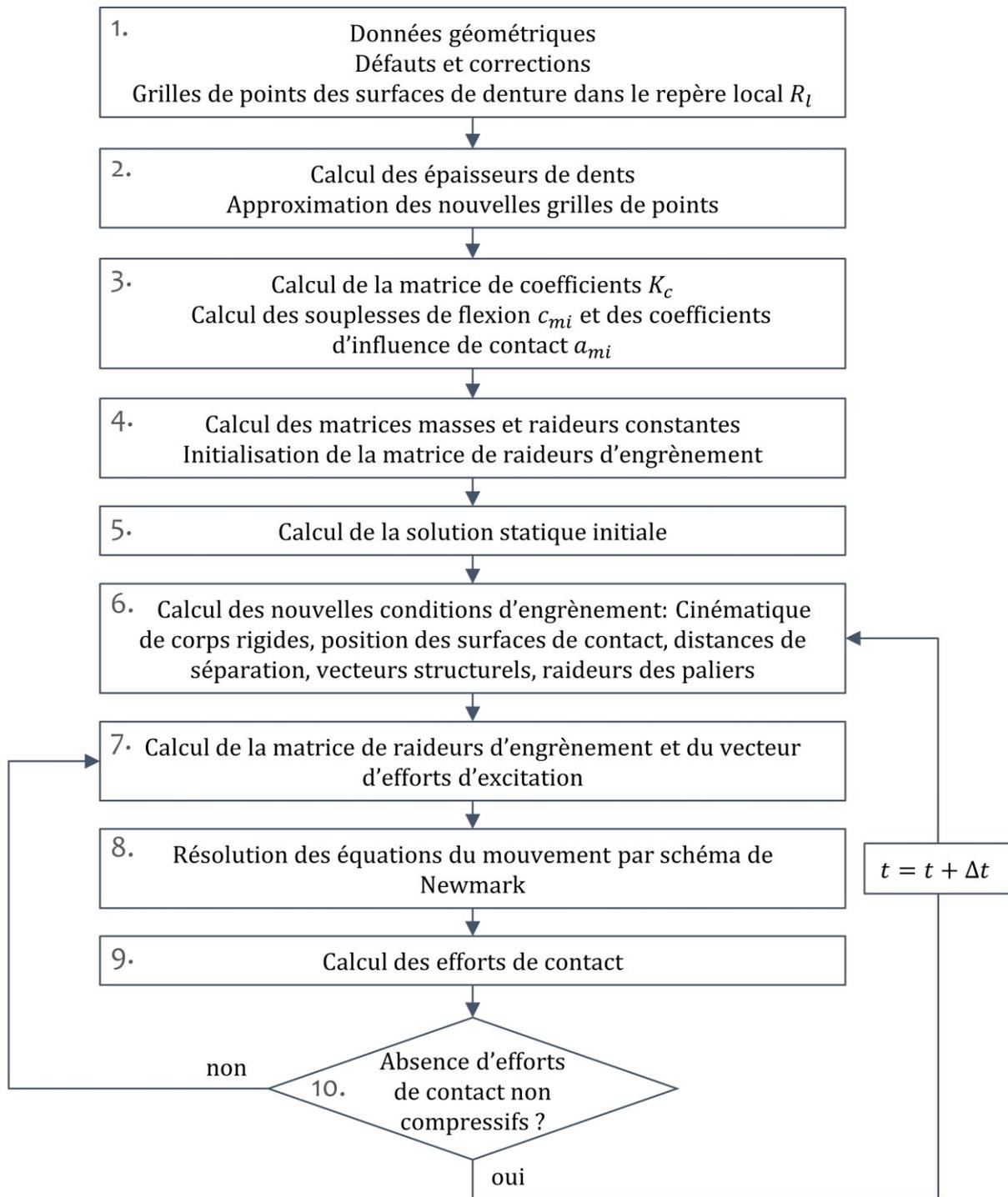


Figure 2-21 Procédure de résolution

## 2.7 CONCLUSION

Un modèle dynamique tridimensionnel à paramètres concentrés du système a été proposé dans ce chapitre. Ce modèle exploite des éléments d'engrenages cylindriques intérieurs et extérieurs, un élément d'engrenages spiroconiques spécifiquement développé pour cette étude, ainsi que des éléments d'arbres et de paliers.

Les modèles d'engrenages cylindriques et spiroconiques se basent sur une formulation commune des efforts d'engrènement. L'élément d'engrenages spiroconiques se sert d'un ensemble de points, obtenus par mesure ou par simulation du taillage, afin de définir les flancs de denture, permettant donc de modéliser toutes les géométries d'engrenages spiroconiques. Un algorithme de calcul des distances de séparation tridimensionnel est implémenté, permettant de s'affranchir des hypothèses sur la position et la forme des zones de contact classiquement rencontrées dans la littérature, et de modéliser fidèlement un grand nombre d'erreurs d'assemblage.

Le modèle est centré sur la résolution des conditions de contact simultanément entre les différents engrènements à l'aide d'un algorithme de contact, afin d'assurer un couplage dynamique complet entre ces multiples engrènements. Les paliers et arbres sont modélisés afin de correctement rendre compte de l'influence de leurs déformations sur le comportement statique et dynamique du système.

Les différents éléments sont ensuite assemblés en un modèle global. Les équations du mouvement du système complet sont résolues pas à pas dans le temps avec un schéma d'intégration de Newmark.

---

# CHAPITRE 3 ELEMENTS DE VALIDATION



Dans l'objectif de valider les différents éléments du modèle développé dans le chapitre précédent, un ensemble d'éléments de validation sont présentés dans ce chapitre. Ces éléments de validation se concentrent sur le train épicycloïdal, ainsi que sur l'élément d'engrenages spiroconiques.

Les résultats de l'élément d'engrenages spiroconiques sont d'abord confrontés à la théorie de Hertz dans l'objectif de valider le modèle de raideur distribuées de cet élément. Une comparaison entre un modèle par éléments finis tridimensionnels d'une dent d'engrenage spiroconique et l'élément de coque utilisé pour caractériser le comportement d'une dent en flexion est ensuite présentée. Enfin, des mesures de portée en présence d'erreurs d'assemblage volontaires sont présentées et comparées aux résultats du modèle.

Le modèle de train épicycloïdal est ensuite confronté à divers résultats de référence. Les accélérations radiales de la couronne sont relevées pour différentes configurations et comparées à des mesures issues de la littérature. Enfin, des mesures de partage de charge entre satellites en présence d'erreurs d'assemblages, elles aussi issues de la littérature, sont comparées aux résultats du modèle.

## 3.1 MODELE DE SPIROCONIQUES

### 3.1.1 Caractérisation du contact par la théorie de Hertz

Par définition, le contact entre deux solides indéformables non conformes est ponctuel ou linéique. Lorsque ces deux solides deviennent déformables, leur géométrie aux alentours de la zone de contact va être modifiée sous l'action de la charge les pressant l'un contre l'autre, et définir une surface de contact autour du contact ponctuel ou linéique initial. La théorie du contact de Hertz caractérise la déformation de solides élastiques en contact, et permet d'obtenir des résultats analytiques dans certains cas particuliers. La formulation de la contribution de la déformation du contact à la raideur d'engrènement d'engrenages cylindriques de Weber et Banaschek [16] introduite au paragraphe 1.3.1.1 est par exemple issue d'une solution particulière de la théorie de Hertz pour le contact de deux cylindres d'axes parallèles.

#### *Description géométrique*

Avant de présenter la théorie de Hertz, il est nécessaire d'introduire la géométrie des solides en contact. En suivant les travaux de Johnson [124], le premier point de contact est considéré comme l'origine d'un repère cartésien dont le plan  $xy$  est le plan tangent aux deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$ . En négligeant de possibles variations de l'état de surface à l'échelle micrométrique, les deux surfaces en contact peuvent être décrites de manière locale par les formes générales suivantes :

$$\begin{aligned} M \in S_1 &\Leftrightarrow z_1 = \frac{1}{2R'_1}x_1^2 + \frac{1}{2R''_1}y_1^2 \\ M \in S_2 &\Leftrightarrow z_2 = -\left(\frac{1}{2R'_2}x_2^2 + \frac{1}{2R''_2}y_2^2\right) \end{aligned} \quad 3-1$$

Les rayons  $R'$  et  $R''$  sont les rayons de courbure principaux des surfaces au point de contact, vérifiant  $R' \geq R''$ . Il est possible, en définissant un nouveau système d'axe, d'exprimer la distance de séparation entre ces deux surfaces de la forme suivante [124] :

$$h = Ax^2 + By^2 = \frac{1}{2R'_e}x^2 + \frac{1}{2R''_e}y^2 \quad 3-2$$

Les rayons  $R'_e$  et  $R''_e$  constituent les rayons de courbure principaux relatifs. Les relations liant les rayons de courbure principaux relatifs aux rayons de courbure principaux des deux surfaces s'écrivent, avec  $\alpha$  l'angle entre les directions des rayons de courbure  $R'$ , i.e. l'angle entre les axes  $x_1$  et  $x_2$  [124] :

$$\begin{aligned} A + B &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R'_e} + \frac{1}{R''_e} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R''_1} + \frac{1}{R'_2} + \frac{1}{R''_2} \right) \\ |B - A| &= \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R''_1} \right)^2 + \left( \frac{1}{R'_2} - \frac{1}{R''_2} \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R''_1} \right) \left( \frac{1}{R'_2} - \frac{1}{R''_2} \right) \cos \alpha} \end{aligned} \quad 3-3$$

avec  $B \geq A \geq 0$

#### *Théorie de Hertz*

En partant de ces observations sur la géométrie de solides en contact, la forme générale de la théorie de Hertz exprime la zone de contact comme une ellipse dont la longueur des demi axes dépend des rayons de courbure principaux équivalents des solides au point de contact initial. En nommant  $a$  la demi-longueur du grand axe de cette ellipse, Hertz émet les hypothèses suivantes [124] :

- (1) Les surfaces sont continues et non conformes :  $a \ll R_e''$
- (2) Les déformations sont faibles :  $a \ll R_e''$
- (3) Chaque solide peut être considéré comme un massif élastique semi-infini :  $a \ll R_e''$ ,  $a \ll l$
- (4) Les frottements entre les deux solides sont négligeables

La théorie de Hertz calcule alors les déformations d'un massif élastique semi-infini soumis à une distribution de pression dont les caractéristiques dépendent de la géométrie des solides. La pression maximale  $p_0$  et l'écrasement normal maximal  $\delta$  s'expriment en fonction de l'effort total  $P$ , du module d'Young normalisé équivalent  $E_{eq}^*$  et des demi-longueurs  $a$  et  $b$  des axes de l'ellipse de contact [124] :

$$p_0 = \frac{3P}{2\pi ab} \quad 3-4$$

$$\delta = \frac{3P}{2\pi a E_{eq}^*} K(e) \quad 3-5$$

L'écrasement normal maximal  $\delta$  et la demi-longueur  $a$  de l'ellipse de contact sont représentés schématiquement en figure 3-1.

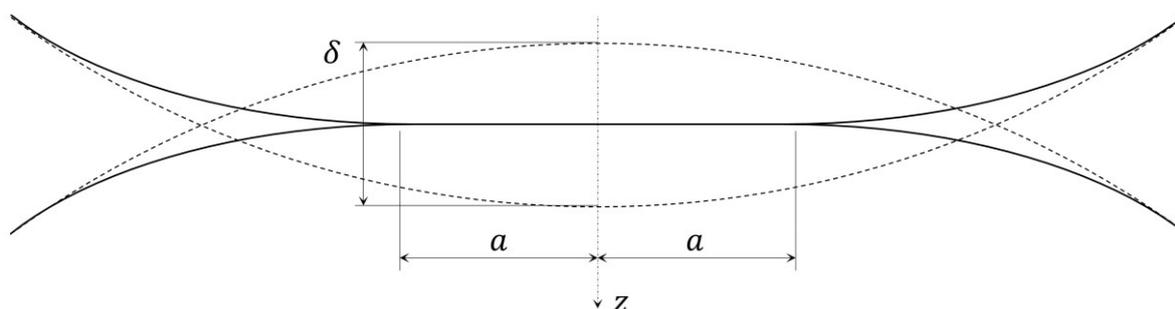


Figure 3-1 Représentation d'un contact hertzien

Les demi-longueurs  $a$  et  $b$  des axes de l'ellipse de contact s'obtiennent en résolvant les équations suivantes [124] :

$$\frac{B}{A} = \frac{R_e'}{R_e''} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2 E(e) - K(e)}{K(e) - E(e)} \quad 3-6$$

$$\sqrt{AB} = \frac{p_0}{E_{eq}^*} \frac{b}{a^2 e^2} \sqrt{\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2 E(e) - K(e)\right) (K(e) - E(e))} \quad 3-7$$

Les termes  $K(e)$  et  $E(e)$  correspondent aux intégrales elliptiques complètes, dont l'argument  $e$  s'exprime :

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}, b < a \quad 3-8$$

Il apparait alors que l'équation 3-6 ne dépend que du rapport  $a/b$ , pour lequel elle est résolue numériquement. L'équation 3-7 est ensuite résolue numériquement à son tour pour obtenir les valeurs des demi-longueurs  $a$  et  $b$  des axes de l'ellipse de contact.

### *Comparaison entre la théorie de Hertz et le modèle de raideurs distribuées*

Dans l'objectif de valider le modèle de raideurs distribuées mis en place pour le modèle d'engrenages spiroconiques, une comparaison entre les résultats du modèle et la théorie de Hertz est

proposée dans cette sous partie. Afin de se rapprocher au mieux des hypothèses de la théorie de Hertz, la contribution de la flexion des dentures est ignorée pour ne conserver que la contribution de la déformation au contact. Pour une position donnée, les rayons de courbure principaux équivalents des flancs de dentures sont calculés au point où l'effort de contact est maximal, et l'effort total est calculé par le modèle afin de pouvoir résoudre les équations 3-6 et 3-7, puis 3-4 et 3-5. Les demi-longueurs des axes de l'ellipse de contact obtenue par le modèle sont calculées en cherchant, pour le grand axe, la plus grande distance séparant deux surfaces élémentaires en contact, et pour le petit axe la plus grande distance séparant deux surfaces élémentaires en contact dans la direction orthogonale au grand axe. Une comparaison des résultats du modèle et de la théorie de Hertz est proposée dans le tableau 3-1.

	Dimensions de l'ellipse de contact			Ecrasement normal maximal $\delta$ (m)	Pression maximale $p_0$ (Pa)
	$a$ (m)	$b$ (m)	$a/b$		
Modèle (20Nm)	3,47E-03	2,65E-04	13,12	2,91E-06	4,85E+08
Hertz (20Nm)	3,74E-03	2,86E-04	13,09	4,01E-06	4,24E+08
Modèle (200Nm)	6,95E-03	7,57E-04	9,18	1,43E-05	1,11E+09
Hertz (200Nm)	6,63E-03	6,74E-04	9,83	2,18E-05	1,02E+09

Tableau 3-1 Comparaison entre les résultats de la théorie de Hertz et du modèle

Les dimensions de l'ellipse de contact obtenues par le modèle sont proches de celles prédites par la théorie de Hertz, avec uniquement 7% de différence sur les valeurs des deux demi-longueurs dans le cas d'un chargement correspondant à un couple de 20Nm sur le pignon conique. Lorsque ce chargement augmente à 200Nm, les dimensions de l'ellipse de contact augmentent logiquement, et bien que l'ordre de grandeur des écarts sur les valeurs de  $a$  et  $b$  reste similaire, le rapport  $a/b$ , qui présentait auparavant une différence inférieure à 1%, présente maintenant plus de 6% de d'écart. Pour les deux chargements, la théorie de Hertz prédit un écrasement supérieur à celui du modèle d'environ 45%, et une pression maximale inférieure d'environ 10%. Les pressions de contact obtenues par le modèle sont présentées en figure 3-2.

Ces différences importantes sont dues à la géométrie des dentures, qui s'écartent des hypothèses permettant l'établissement de la théorie de Hertz. En effet, les rayons de courbures principaux varient significativement au sein de la surface de contact, ce qui est dû au fait que le rapport entre la demi-longueur du grand axe de l'ellipse de contact et le rayon de courbure principal équivalent minimal  $R_e''/a$  n'est pas très grand comme supposé par la théorie de Hertz. Ce rapport a une valeur de 10.5 pour un couple de 20Nm sur le pignon conique, et de 5.8 pour un couple de 200Nm, trahissant une étendue de contact relativement élevée en comparaison avec la courbure des solides en contact. La zone de contact est donc suffisamment importante pour que les rayons de courbure varient significativement en son sein, amenant à une répartition de pression qui n'est pas parfaitement elliptique, observable en figure 3-2, influençant fortement la valeur d'écrasement obtenue par le modèle. Ce rapport explique également pourquoi les résultats du modèle sont légèrement plus proches de ceux de la théorie de Hertz pour le plus faible des deux chargements. Augmenter ce rapport en diminuant le chargement n'est cependant possible que dans une certaine mesure, car il est nécessaire de conserver un nombre important de surfaces élémentaires en contact pour conserver suffisamment de résolution sur les résultats du modèle.

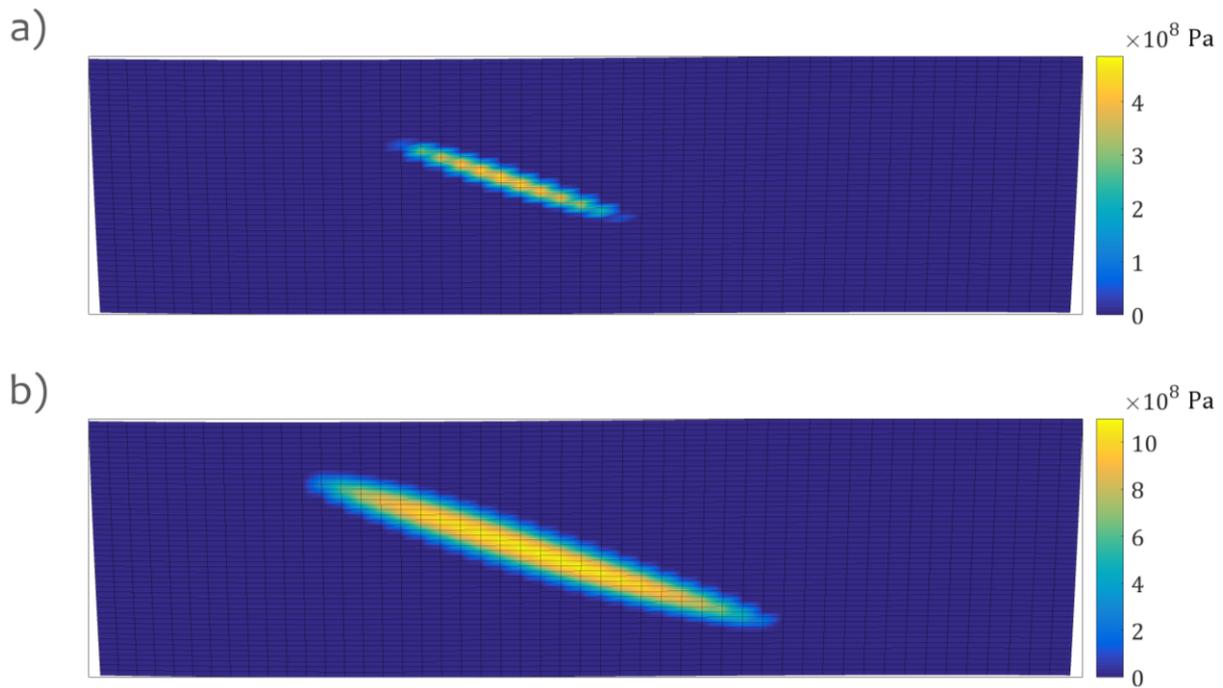


Figure 3-2 Pressions de contact obtenues par le modèle sur le flanc du pignon pour a) un couple de 20Nm b) un couple de 200Nm sur le pignon

Bien que d'importantes différences émergent entre le modèle de raideur proposé et la théorie de Hertz sur les valeurs d'écrasement normal maximal, les résultats montrent un bon accord général sur l'étendue du contact et la pression maximale. Les écarts peuvent partiellement s'expliquer par le fait que certaines hypothèses sur la géométrie des solides en contact ne sont pas vérifiées.

### 3.1.2 Validation du comportement en flexion des dentures par un modèle par éléments finis

Afin de valider la modélisation du comportement en flexion des dents du couple d'engrenages spiroconiques, cette sous-partie compare les résultats de l'élément de coque (cf. paragraphe 2.1.3.4) avec un modèle d'une dent par éléments finis tridimensionnels. La géométrie de la dent du pignon spiroconique dans le repère cartésien local  $R_t$  est exportée dans *ANSYS Workbench 17.1*. Le repère cylindrique  $R_{tc}$  (cf. paragraphe 2.1.3.1) est défini dans le modèle par éléments finis, et la dent est divisée en plusieurs sections uniformes selon  $e_\theta$  et  $z_t$ . Enfin, la dent est divisée selon sa fibre neutre, approximée à une portion de cylindre de rayon constant  $r_{nf}$ , et des points de mesure sont définis aux intersections de la fibre neutre avec les sections selon  $e_\theta$  et  $z_t$ . Ces points de mesure, au nombre de 100, sont représentés en figure 3-3, et le maillage par éléments finis de la dent est représenté en figure 3-4.

La dent est encastrée à sa base en  $z_t = 0$ , et est chargée sur une ou plusieurs sections du flanc par application d'une pression dirigée selon  $e_r$ , donc normale à la fibre neutre. Différents cas de chargements sont étudiés, correspondant à différentes sections chargées du flanc de dent. Pour tous les cas de chargement, la pression appliquée est de 1GPa. Pour chacun des cas de chargement, les déplacements selon  $e_r$ , normaux à la fibre neutre, sont relevés sur la totalité des points de mesure, et comparés aux déflexions normales  $W$  de la fibre neutre calculés par l'élément de coque (cf. équation 2-70) pour une répartition de pression identique selon  $e_\theta$  et  $z_t$ . Les déflexions normales de l'élément de coque présentées dans cette partie sont obtenues avec des degrés maximaux des fonctions de forme  $m_{max} = 8$  et  $n_{max} = 8$  (cf. équation 2-71), amenant à un total de 64 coefficients  $A_{mn}$  inconnus pour chacun des cas de chargement.

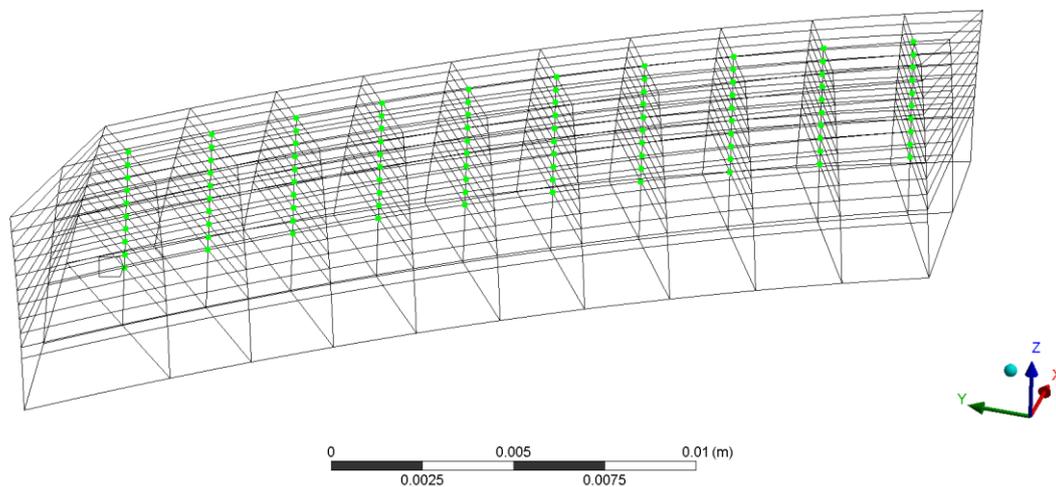


Figure 3-3 Géométrie de la dent dans le repère  $R_{tc}$ , avec ■ représentant les points de mesure sur la fibre neutre, aux intersections avec les sections selon  $e_\theta$  et  $z_t$

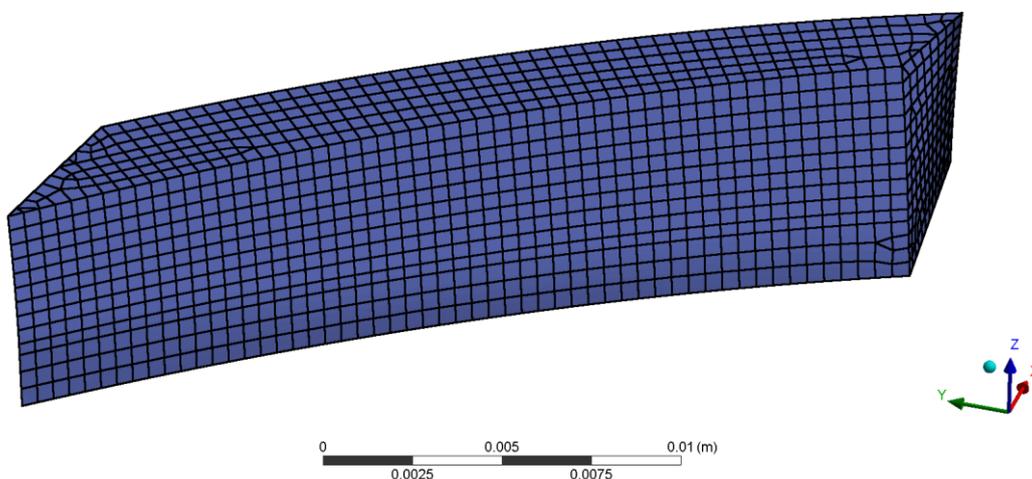


Figure 3-4 Maillage par éléments finis tridimensionnels de la dent du pignon spiroconique

La figure 3-5 présente une comparaison des résultats du modèle par éléments finis avec ceux du modèle de coque pour le premier cas de chargement. Les déflexions normales des deux modèles sont présentées, la différence entre les résultats des deux modèles est également tracée. La zone de chargement, mise en valeur sur le tracé des différences, est située sur le flanc concave de la dent. On constate un bon accord entre les deux modèles, avec  $1.2\mu\text{m}$  de différence maximale, soit un peu moins de 18% de différence, et une moyenne de la valeur absolue des différences de moins de  $0.4\mu\text{m}$ . Il apparaît que le modèle de coque sous-estime les déflexions sous la zone d'application de la charge.

La comparaison des résultats des deux modèles pour le deuxième cas de chargement est présentée en figure 3-6. Pour ce cas de chargement, une pression uniforme est appliquée sur la totalité de la partie supérieure du flanc de dent, toujours sur le flanc concave de la dent. La différence maximale constatée pour ce cas de chargement est cette fois-ci de plus de  $8\mu\text{m}$ , ce qui correspond à moins de 16% de différence, on obtient donc ici également un bon accord entre les deux modèles. Le modèle de coque semble ici aussi sous-estimer les déflexions, on constate également que les différences les plus importantes sont situées aux extrémités de la dent selon  $e_\theta$ , et plus particulièrement sur le petit bout de la dent. Les différences de technologies entre les deux modèles amènent logiquement à des différences plus importantes sur les extrémités, le modèle par éléments

finis présentant dans ce cas des déplacements aux extrémités selon  $e_\theta$  dont le modèle de coque ne peut rendre compte.

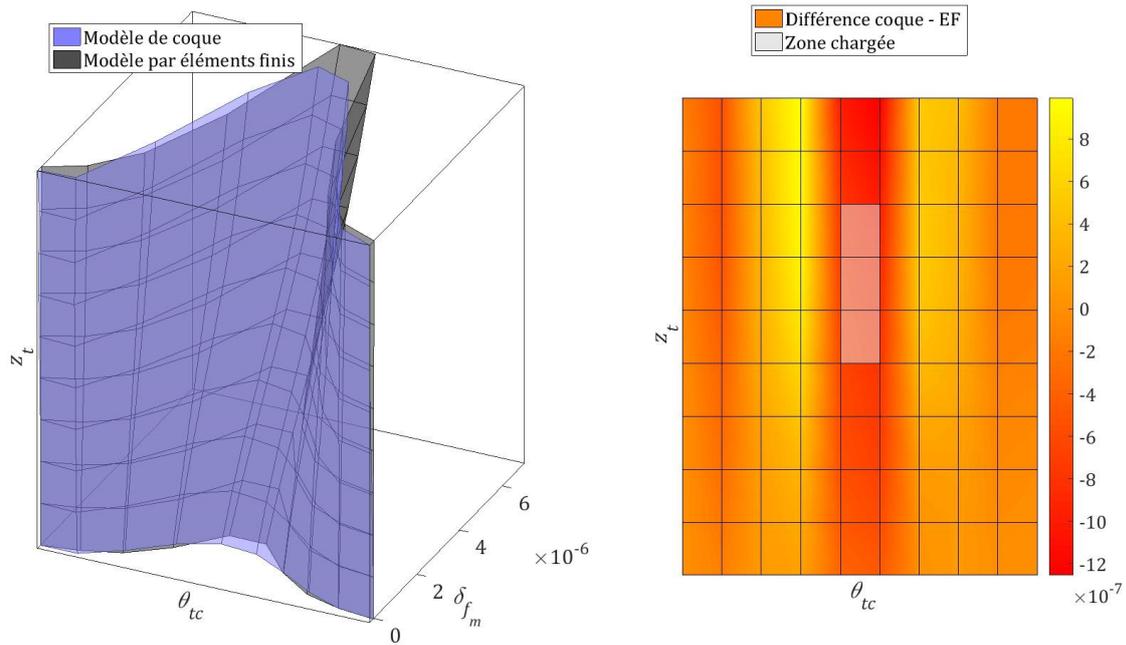


Figure 3-5 Comparaison des résultats de déflexion normale (en m) du modèle de coque et du modèle par éléments finis aux points de mesure pour le premier cas de chargement

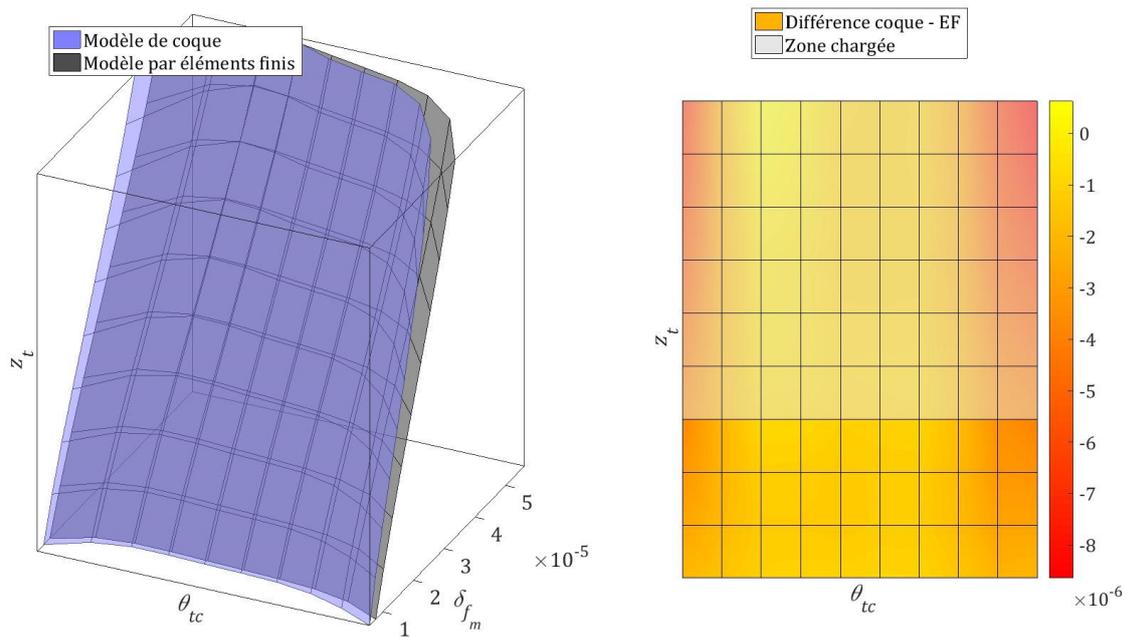


Figure 3-6 Comparaison des résultats de déflexion normale (en m) du modèle de coque et du modèle par éléments finis aux points de mesure pour le deuxième cas de chargement

Un troisième cas de chargement est étudié, présentant deux zones de chargement distinctes. Les résultats de ce cas de chargement sont donnés en figure 3-7. La pression est pour ce cas également appliquée sur le flanc concave de la dent. Les déflexions normales de l'élément de coque pour ce cas de chargement sont ici calculées deux fois pour les deux zones distinctes d'application de pression, puis sommés afin d'obtenir les déplacements totaux (cf. équation 2-77). On constate un moins bon accord que précédemment, avec jusqu'à 30% de différence. La différence entre les deux modèles est maximale pour ce cas, cependant nous avons avec le deuxième cas de chargement

constaté que le comportement aux extrémités de la dent présentait des différences logiques entre les deux modèles. Or le chargement est dans ce cas uniquement appliqué sur les bords, amenant logiquement à des différences plus importantes que pour les autres cas de chargement.

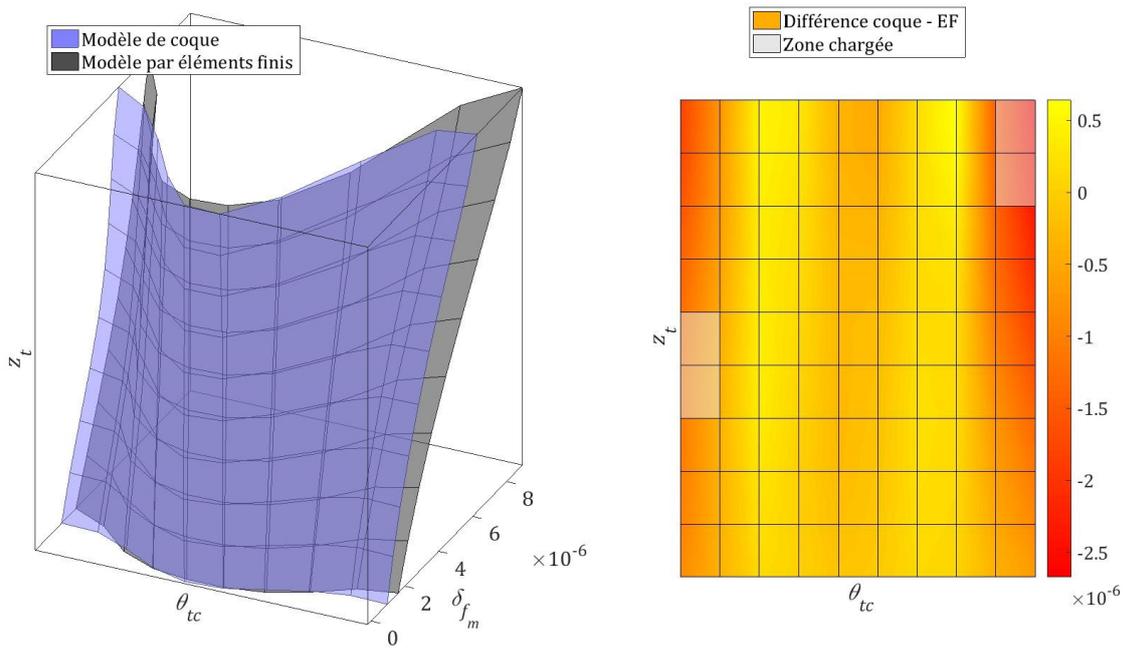


Figure 3-7 Comparaison des résultats de déflexion normale (en m) du modèle de coque et du modèle par éléments finis aux points de mesure pour le troisième cas de chargement

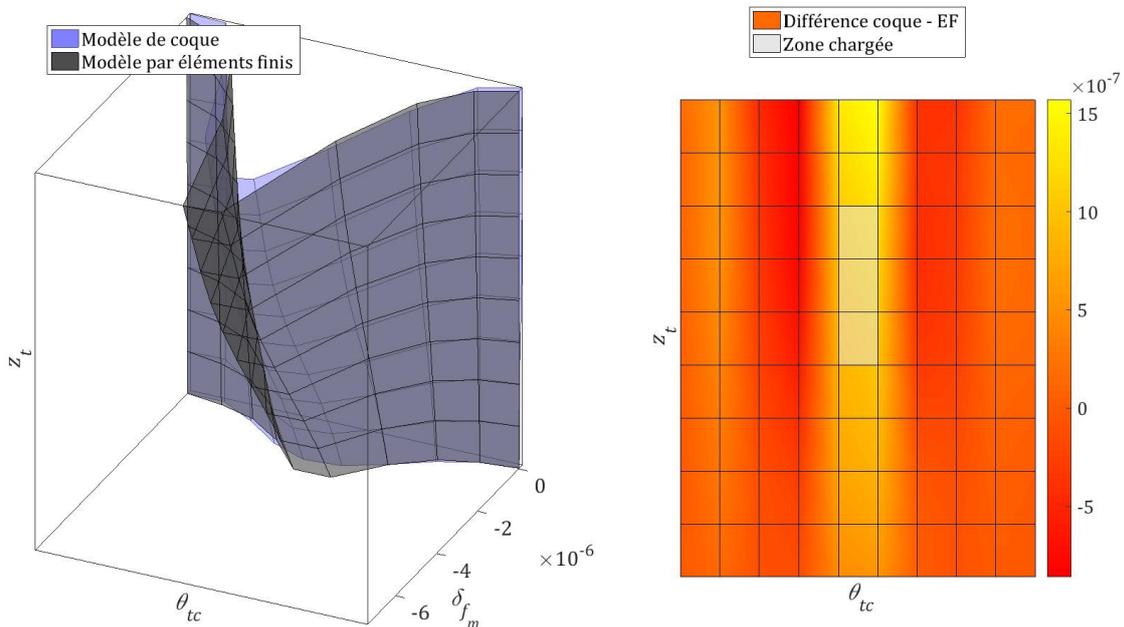


Figure 3-8 Comparaison des résultats de déflexion normale (en m) du modèle de coque et du modèle par éléments finis aux points de mesure pour le quatrième cas de chargement

Enfin, la figure 3-8 présente les déflexions normales pour le quatrième cas de chargement. Ce quatrième cas est identique au premier, à la différence que la pression est maintenant appliquée sur le flanc convexe de la dent. Cette différence ne se traduit pour le modèle de coque que par une différence de signe des déflexions normales. On constate que les différences entre les deux modèles sont comparables à celles du premier cas de chargement.

On constate donc un bon accord entre le modèle de coque présenté plus tôt dans cette étude et un modèle par éléments finis plus exhaustif mais sensiblement plus complexe. Le modèle de coque semble globalement sous-estimer les déflexions normales, et plus particulièrement aux extrémités de la dent au gros bout et petit bout.

### 3.1.3 Validation expérimentale par mesure de portée

Dans l'objectif de valider le modèle d'engrenages spiroconiques, des mesures de portée ont été effectuées sur un couple d'engrenages spiroconiques. Des erreurs d'assemblage sont imposées volontairement pour ces deux mesures, les configurations de ces mesures sont données dans le tableau 3-2. Ces mesures sont effectuées à très faible couple, estimé à 2.5Nm, et à vitesse suffisamment lente pour être considérées comme des mesures quasi-statiques.

Mesure	Erreur d'assemblage	Amplitude de l'erreur	Support de l'erreur	Sens de rotation
1	Axiale & Hypoïde	-50 & +50 $\mu\text{m}$	Pignon & Pignon	Horaire
2	Axiale & Hypoïde	-50 & +50 $\mu\text{m}$	Pignon & Pignon	Trigonométrique

Tableau 3-2 Configurations des mesures de portée

La figure 3-9 présente une comparaison de la mesure de portée avec la portée obtenue par modélisation pour la configuration 1 ; les résultats de la configuration 2 sont donnés en figure 3-10.

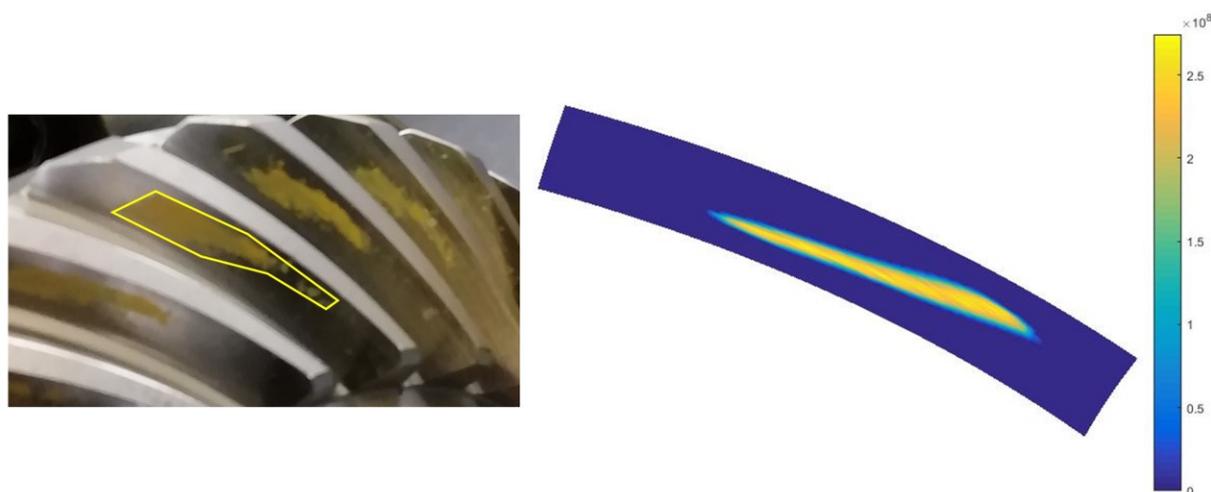


Figure 3-9 Comparaison de la mesure de portée avec la pression de contact maximale obtenue par simulation, pour la configuration 1

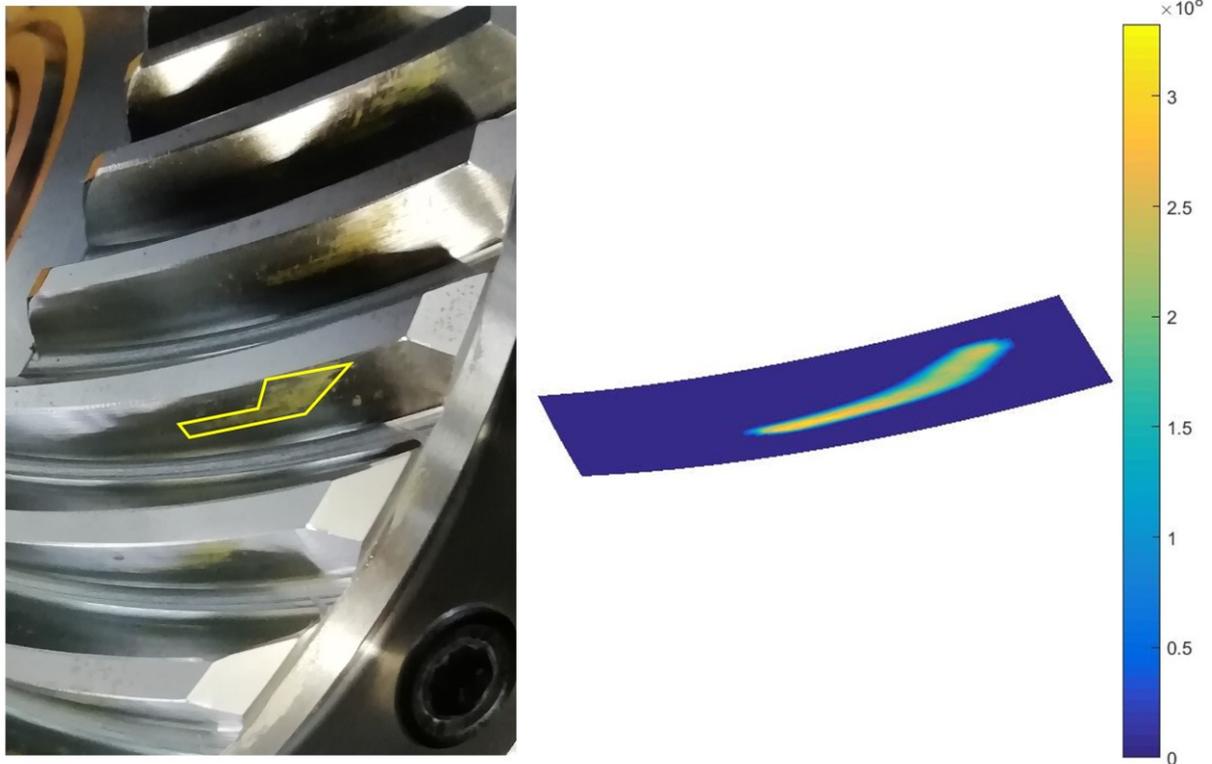


Figure 3-10 Comparaison de la mesure de portée avec la pression de contact maximale obtenue par simulation, pour la configuration 2

On constate pour la configuration 1 que la portée mesurée est plus importante du côté du gros bout que ce que le modèle prédit, on constate cependant une bonne concordance, le petit bout étant déchargé sur environ  $\frac{1}{5}$ <sup>ème</sup> du flanc de dent total, la portée suivant ensuite une diagonale partant de la tête de dent et en direction du pied de dent et du gros bout. Les résultats de mesure de la configuration 2 montrent une portée suivant une forme de « L » inversée, la zone de contact progressant initialement uniquement du petit bout vers le gros bout, avant de changer de direction pour se diriger vers la tête de dent ; la portée est fortement décalée vers le gros bout. Les résultats de simulation présentent le même comportement, en beaucoup moins marqué cependant. Le changement brusque de direction de la zone de contact observé sur les mesures est continu au cours de l'engrènement sur les résultats du modèle.

Les différences observées entre ces mesures et les résultats du modèle peuvent être imputables à l'approximation faite sur la géométrie des flancs de dent (cf. paragraphe 2.1.3.1). La figure 3-11 présente les différences de position selon  $e_r$ , dans le repère local cylindrique  $R_{tc}$ , entre points mesurés sur le flanc de denture et points approximatés pour le pignon spiroconique de cette étude ; la figure 3-12 présente les mêmes résultats pour la roue spiroconique. Ces graphiques représentent donc l'écart entre la position réelle d'un point sur le flanc telle qu'obtenue par relevé métrologique, et la position du point de même coordonnées  $(\theta_{tc}, z_t)$  sur la surface du flanc approximatée. Cet écart englobe donc différents phénomènes d'origines distinctes, notamment d'un côté les défauts de fabrication et les irrégularités de mesure, et de l'autre côté les défauts d'approximation. On constate des écarts maximums d'environ  $2\mu\text{m}$ , à l'exception d'un point sur le flanc gauche du pignon présentant  $7\mu\text{m}$  de différence, probablement dû à une irrégularité de mesure. La moyenne de la valeur absolue des différences est de  $0.5\mu\text{m}$  sur la totalité des points de mesure, l'approximation est donc généralement bonne. On observe cependant sur la totalité de ces graphiques des variations selon la hauteur de la dent bien plus importantes que les variations selon  $e_\theta$ . En effet, la moyenne de la variation maximale des différences selon  $e_\theta$  est de  $1.4\mu\text{m}$ , alors qu'elle est de  $2.7\mu\text{m}$  selon  $z_t$ . Cette différence témoigne d'une légère lacune de la méthode d'approximation.

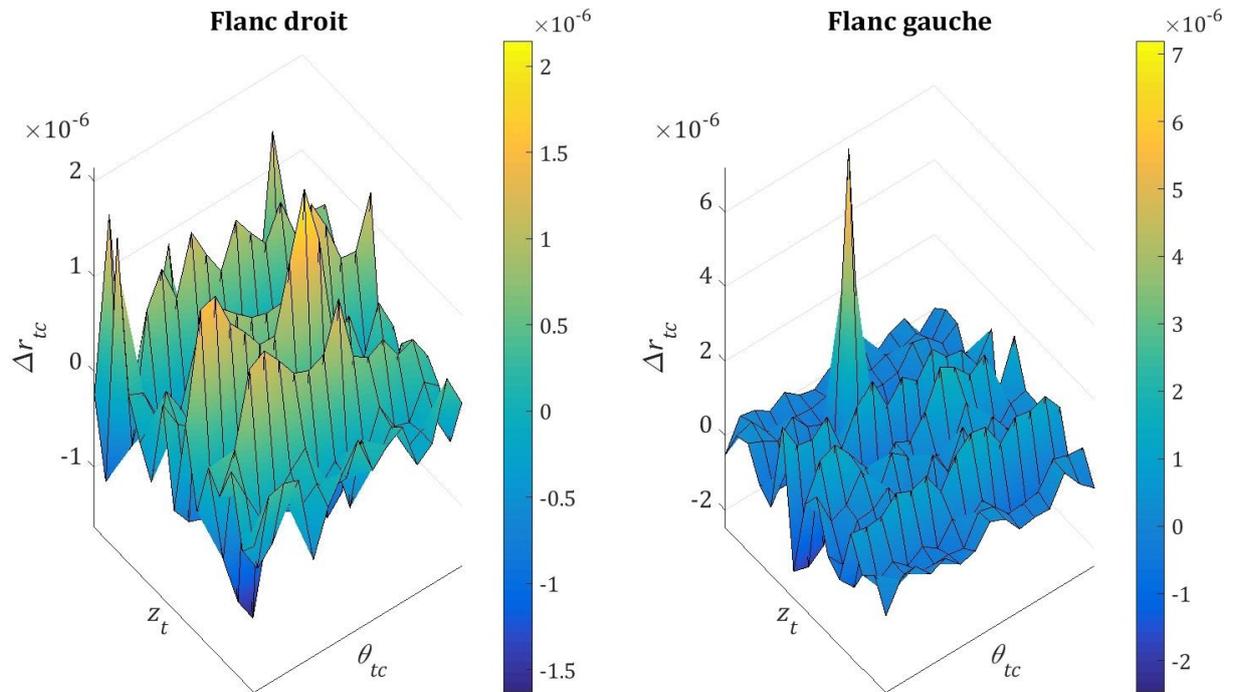


Figure 3-11 Différence de position selon  $e_r$ , dans le repère local cylindrique  $R_{tc}$ , entre points mesurés sur le flanc de denture et points approximatés pour le pignon spiroconique, en mètres

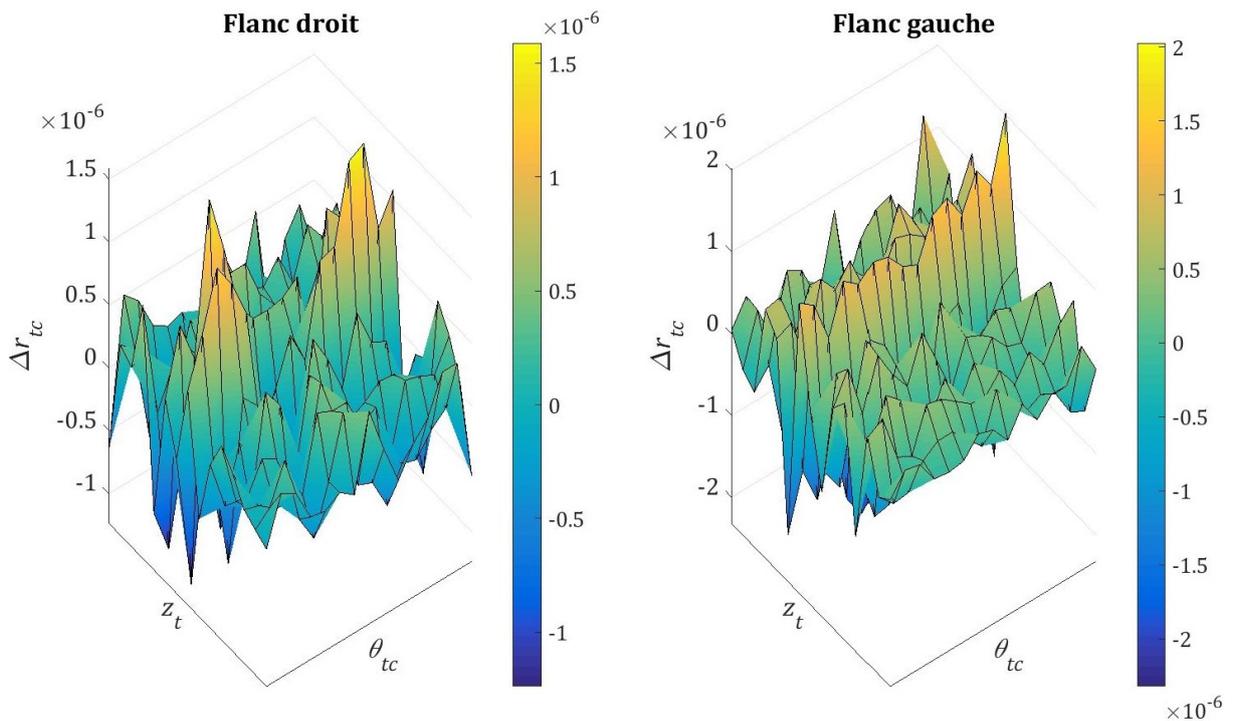


Figure 3-12 Différence de position selon  $e_r$ , dans le repère local cylindrique  $R_{tc}$ , entre points mesurés sur le flanc de denture et points approximatés pour la roue spiroconique, en mètres

Un bon accord général est donc observé entre les mesures de portée et les résultats du modèle. L'approximation faite sur la géométrie des flancs de dent s'est cependant révélée être une cause possible des différences constatées dans cette partie. L'approximation faite sur la géométrie des flancs de dent reste cependant nécessaire à la bonne résolution des conditions de contact en l'absence d'un ensemble de points mesurés très important sur le flanc de dent.

## 3.2 TRAIN EPICYCLOÏDAL

### 3.2.1 Validation expérimentale par mesure des accélérations radiales de la couronne

Nous nous intéressons dans cette sous partie aux accélérations radiales de la couronne. Dans l'objectif de valider le modèle de train planétaire, les résultats expérimentaux obtenus par Inalpolat et Kahraman [80], [125] sont comparés aux résultats du modèle de train épicycloïdal présenté dans ces travaux. Plusieurs configurations de montage des satellites sont étudiées. Les accélérations radiales des nœuds du modèle de couronne flexible sont directement comparées aux accélérations radiales mesurées par un accéléromètre fixé sur la couronne du dispositif expérimental. Dans le dispositif expérimental la couronne est fixée en 11 points répartis uniformément sur sa périphérie. Afin de reproduire au mieux ces conditions expérimentales lors de comparaisons avec des mesures issues de ce dispositif, le modèle de couronne flexible sera fixé en 11 nœuds correspondant aux indices de dents de la couronne  $n^o$ [11 23 34 45 57 68 80 91 102 114 125] répartis le plus uniformément possible étant donné que le nombre de dents de la couronne n'est pas divisible par 11. Enfin, en l'absence de détails sur leur géométrie, les paliers seront modélisés par des matrices de raideurs additionnelles constantes dans le temps. Les résultats sont présentés en ordre de porte-satellites, correspondant à la fréquence adimensionnée par la fréquence de rotation du porte-satellites. L'ordre de rotation du porte-satellites est alors de 1, et l'ordre d'engrènement apparaît à l'ordre correspondant au nombre de dents de la couronne  $Z_r$ .

#### 3.2.1.1 Satellites répartis uniformément et déphasés séquentiellement

Les paramètres de denture de cette configuration sont donnés dans le tableau 3-3. Il est possible pour ces paramètres de denture, lorsque le nombre de satellites est fixé à 3, d'obtenir une configuration où les satellites sont répartis uniformément avec des angles de montage de  $[0^\circ \ 120^\circ \ 240^\circ]$ . Dans ces conditions, les phases relatives des satellites deviennent alors  $2\pi[0 \ 1/3 \ 2/3]$  et sont donc déphasés de manière séquentielle.

		Planétaire	Satellites	Couronne
Nombre de dents	$Z$	73	26	125
Module normal (mm)	$m_n$	1.81	1.81	1.81
Angle de pression ( $^\circ$ )	$\alpha$	23.04		23.04
Angle d'hélice ( $^\circ$ )	$\beta$	13.12		13.12
Entraxe (mm)	$R_c$	92.12		
Largeur de denture active (mm)	$b$	25		25

Tableau 3-3 Paramètres de denture [125]

On observe sur la figure 3-13 que le modèle montre un très bon accord avec les mesures. Les ordres dus à l'engrènement, tous multiples du nombre de satellites dû à leur déphasage séquentiel, sont visibles sur les résultats de simulation. L'ordre 123 est dominant, et l'ordre d'engrènement 125 est quasi inexistant. Certains ordres additionnels dus aux conditions de fixation et aux déformations de la couronne, tels que les ordres 124 et 127, sont également présents. La tendance générale constatée sur les mesures de l'amplitude relative des différents pics est respectée, bien

que ces amplitudes relatives soient dépendantes d'un certain nombre de paramètres de simulation inconnus tel que l'amortissement, les possibles erreurs d'assemblage et de forme, ainsi que de paramètres de mesure tel que la fréquence d'échantillonnage ou encore la durée de la mesure.

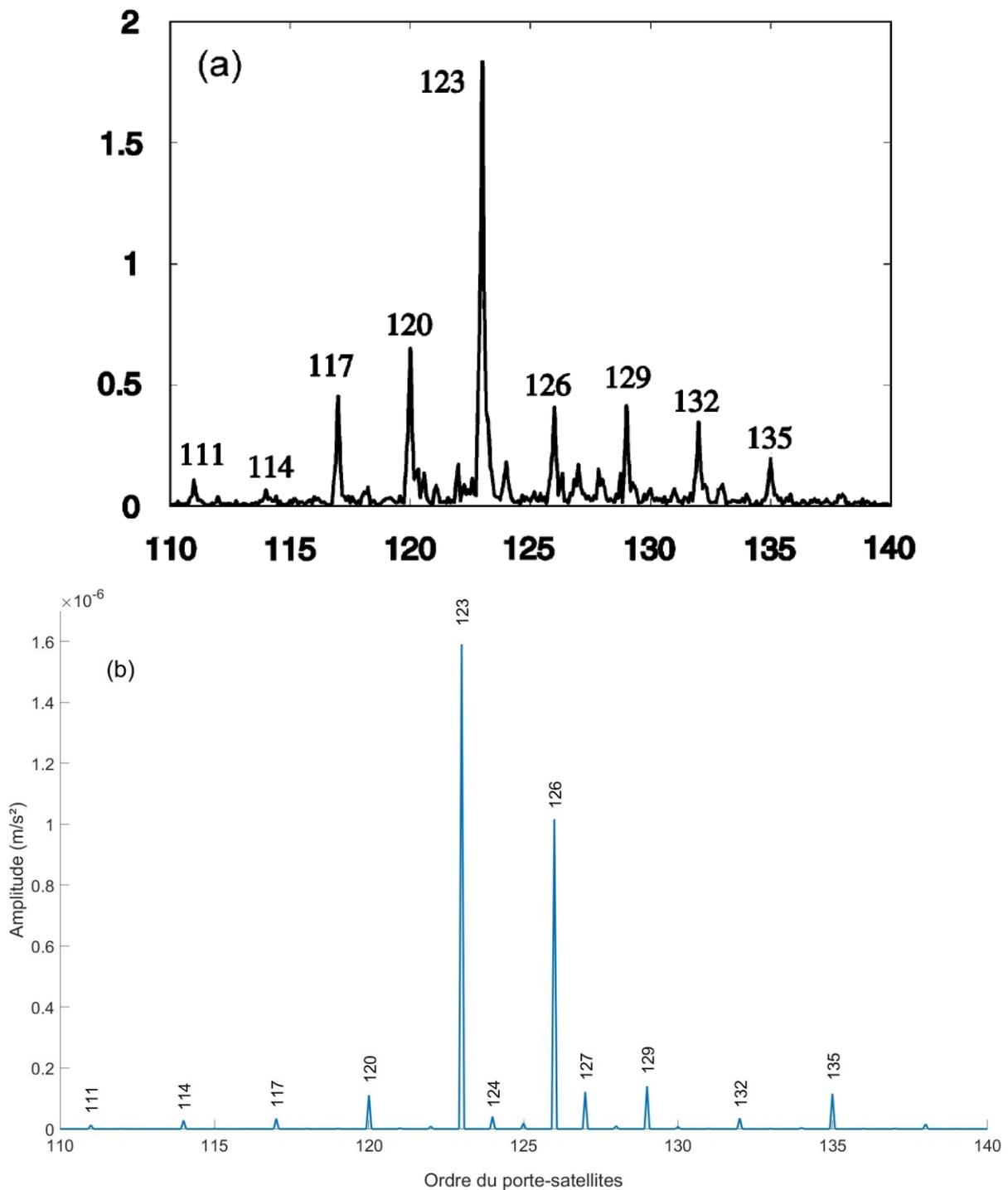


Figure 3-13 Spectre des accélérations radiales de la couronne (a) mesurées [125] et (b) obtenues par simulation sur la dent n°6 de la couronne, pour un couple d'entrée de 500Nm et une vitesse de rotation en entrée de 400rpm

### 3.2.1.2 Satellites répartis et déphasés arbitrairement

Les paramètres de denture de cette configuration sont donnés dans le tableau 3-3 de la sous partie précédente, mais dont le nombre de satellites est maintenant de 4. Ces satellites sont répartis

arbitrairement aux multiples [0 50 99 149] de l'angle de résolution de montage  $\kappa$  (cf. équation 2-24) et les phases relatives des satellites sont alors d'environ  $2\pi[0 \ 0.565 \ 0.5 \ 0.065]$ .

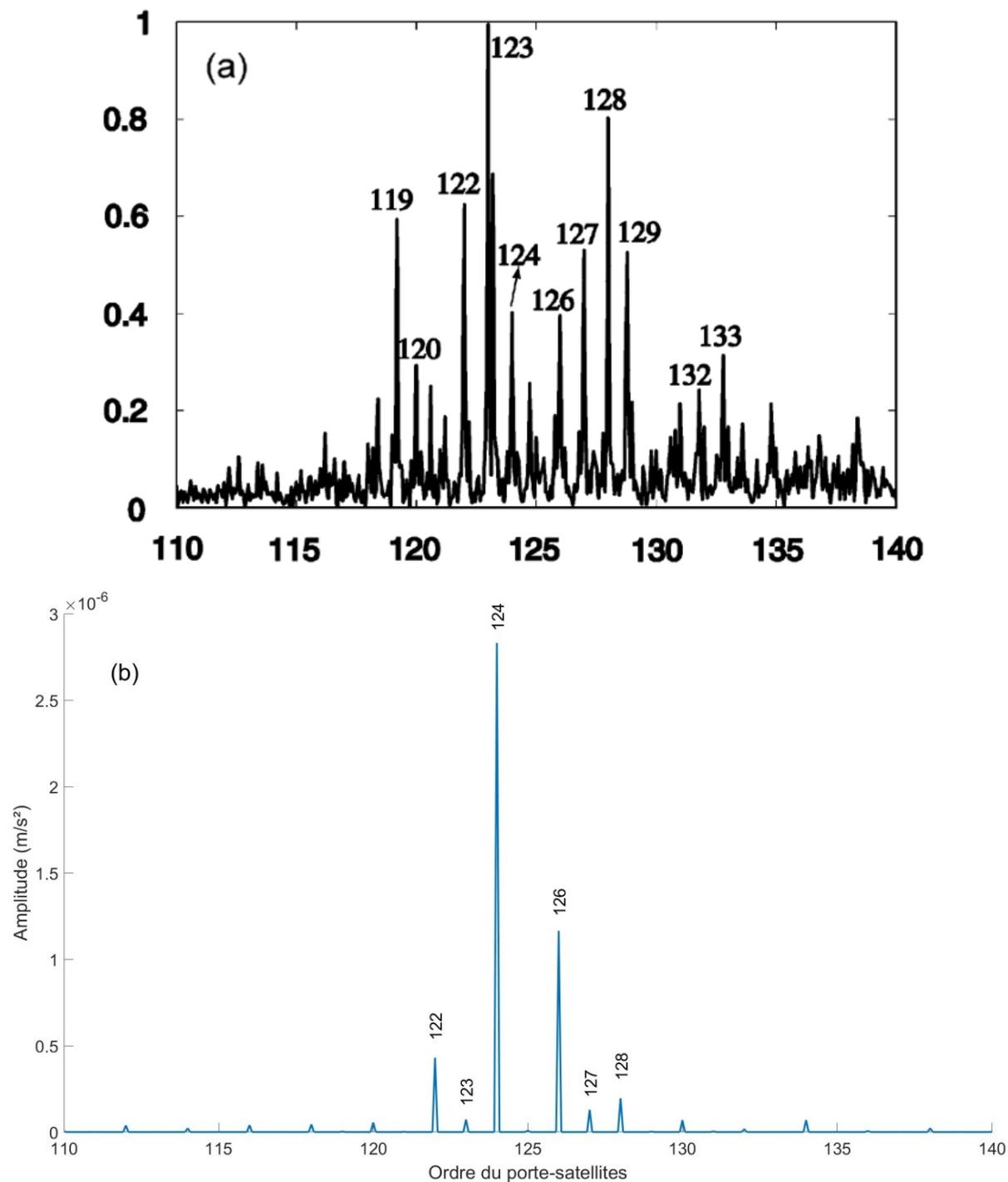


Figure 3-14 Spectre des accélérations radiales de la couronne (a) mesurées [125] et (b) obtenues par simulation sur la dent n°6 de la couronne, pour un couple d'entrée de 400Nm et une vitesse de rotation en entrée de 500rpm

Les résultats de simulation sont maintenant sensiblement plus éloignés des résultats de mesures que précédemment. Bien que faibles, les ordres impairs 123 et 127 apparaissent, dus à une répartition de charge inégale entre les différents satellites, et les ordres pairs dus à l'engrènement sont présents également. La présence de seconds pics suivant directement les ordres 122 et 123 visibles sur les mesures, ou précédant directement les ordres 126 et 127, laisse cependant penser qu'une erreur d'assemblage soit présente pour cette configuration. Cette potentielle erreur d'assemblage expliquerait les différences importantes constatées entre les résultats de simulation et

les mesures, les mesures présentant un spectre riche avec de nombreux ordres à forte amplitude n'apparaissant pas sur les simulations.

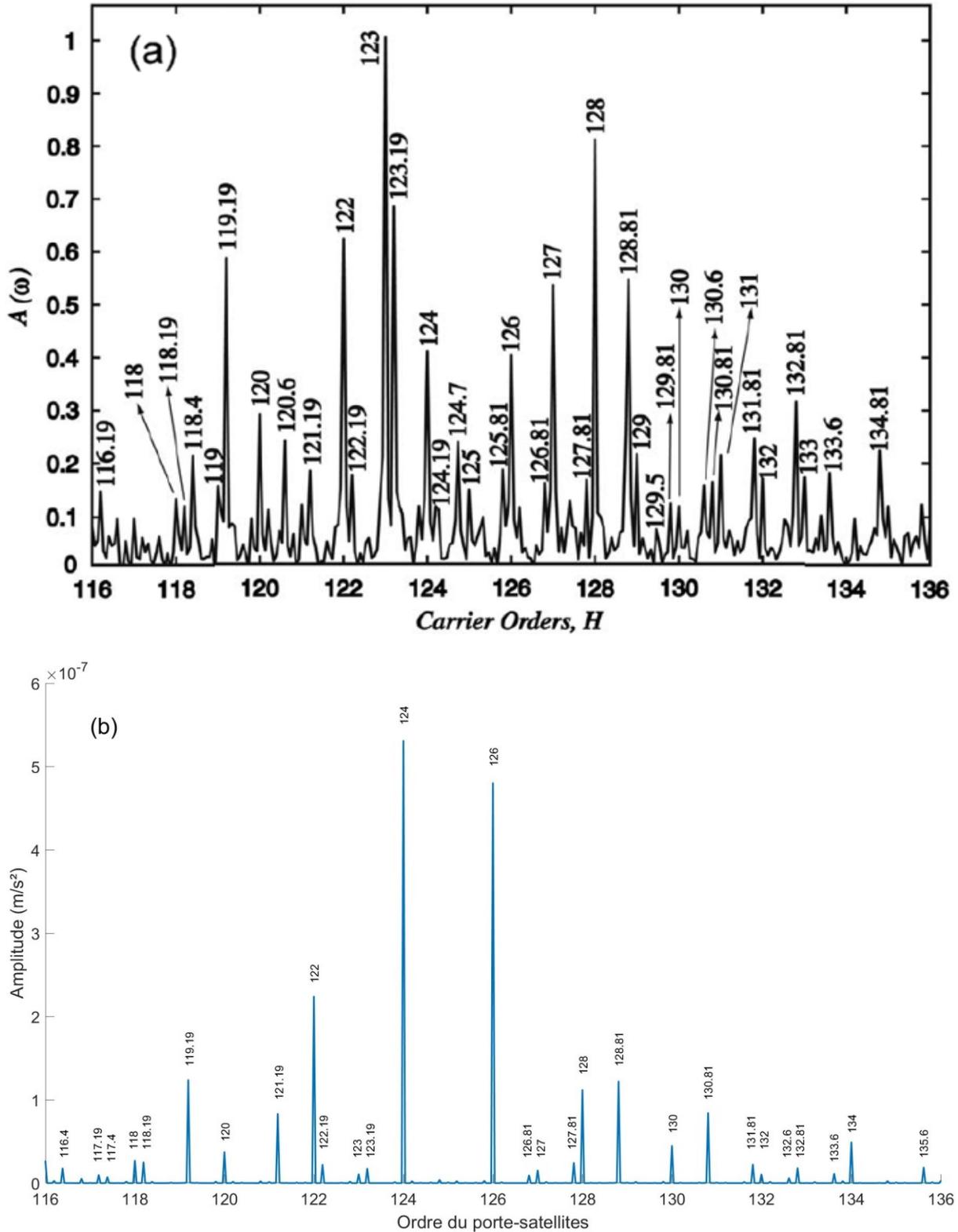


Figure 3-15 Spectre des accélérations radiales de la couronne (a) mesurées [80] et (b) obtenues par simulation sur la dent n°6 de la couronne, pour un couple d'entrée de 400Nm et une vitesse de rotation en entrée de 500rpm

La même configuration de satellites dans le même train planétaire a d'ailleurs été étudiée par Inalpolat et Kahraman dans une seconde publication [80] portant sur l'influence d'une erreur d'excentricité d'un des satellites sur le spectre des accélération radiales de la couronne. Le spectre

mesuré dans cette étude est donné en figure 3-15 (a), on constate qu'il est similaire au spectre de la figure 3-14 (a), avec notamment un double pic aux alentours de l'ordre 123. En figure 3-15 (b) est donné le spectre simulé de cette même configuration, dont le satellite n°1 présente une erreur d'excentration  $ec_1$  de  $20\mu\text{m}$ , égale à l'erreur constatée par Inalpolat et Kahraman lors de leurs mesures [80].

Bien que d'importantes différences subsistent entre les deux spectres de la figure 3-15, ils présentent un bien meilleur accord que ceux de la figure 3-14. Les ordres pairs, et notamment les ordres 124 et 126, dominent le spectre obtenu par simulation. Les ordres impairs, tels que les ordres 123 et 127, sont présents mais d'amplitudes négligeables, impactés par la présence de l'erreur d'excentration, alors même que ces ordres sont parmi les plus importants du spectre de mesures. L'erreur d'excentration venant moduler l'amplitude des accélérations radiales de la couronne, un ensemble de raies latérales supplémentaires apparaissent, créant à certains ordres ces doubles pics visibles sur les deux spectres. Pour certains ordres néanmoins, une seule raie est observée, comme l'ordre 120 qui ne présente pas de second pic à l'ordre 120.19 sur le spectre des mesures comme sur celui de la simulation, ou encore les ordres 119.19, 121.19 et 128.81 dont l'amplitude des seconds pics aux ordres 119, 121 et 129 respectivement est minime sur les résultats de mesures et nulle sur les résultats de simulation.

### 3.2.1.3 Satellites répartis arbitrairement et déphasés séquentiellement

Les paramètres de denture de cette configuration sont égaux à ceux de la configuration précédente, et donnés dans le tableau 3-3. Dans cette configuration cependant le nombre de satellites est de 5, ils sont répartis arbitrairement aux multiples  $[0 \ 40 \ 79 \ 119 \ 158]$  de l'angle de résolution de montage  $\kappa$  (cf. équation 2-24) et les phases relatives des satellites sont alors de  $2\pi[0 \ 1/5 \ 2/5 \ 3/5 \ 4/5]$ , et sont donc, comme pour la configuration avec 3 satellites, déphasés de manière séquentielle.

On observe que les résultats de simulation présentés en figure 3-16 (b) montrent un relativement bon accord avec les mesures. L'ordre d'engrènement est modulé à l'ordre du porte-satellites de manière asymétrique, et l'ordre 123 domine le spectre. On constate cependant une différence importante, l'ordre d'engrènement est quasi inexistant sur les résultats de simulation alors qu'il apparaît clairement sur les mesures, et inversement pour l'ordre 124, ce qui laisserait penser que des erreurs de forme ou d'assemblage aient pu influencer les mesures. De plus, on remarque sur la figure 3-16 (a) aux ordres 120 et 126 notamment des doubles pics rappelant les mesures de la sous partie précédente, qu'une erreur d'excentration d'un des satellites avait influencée.

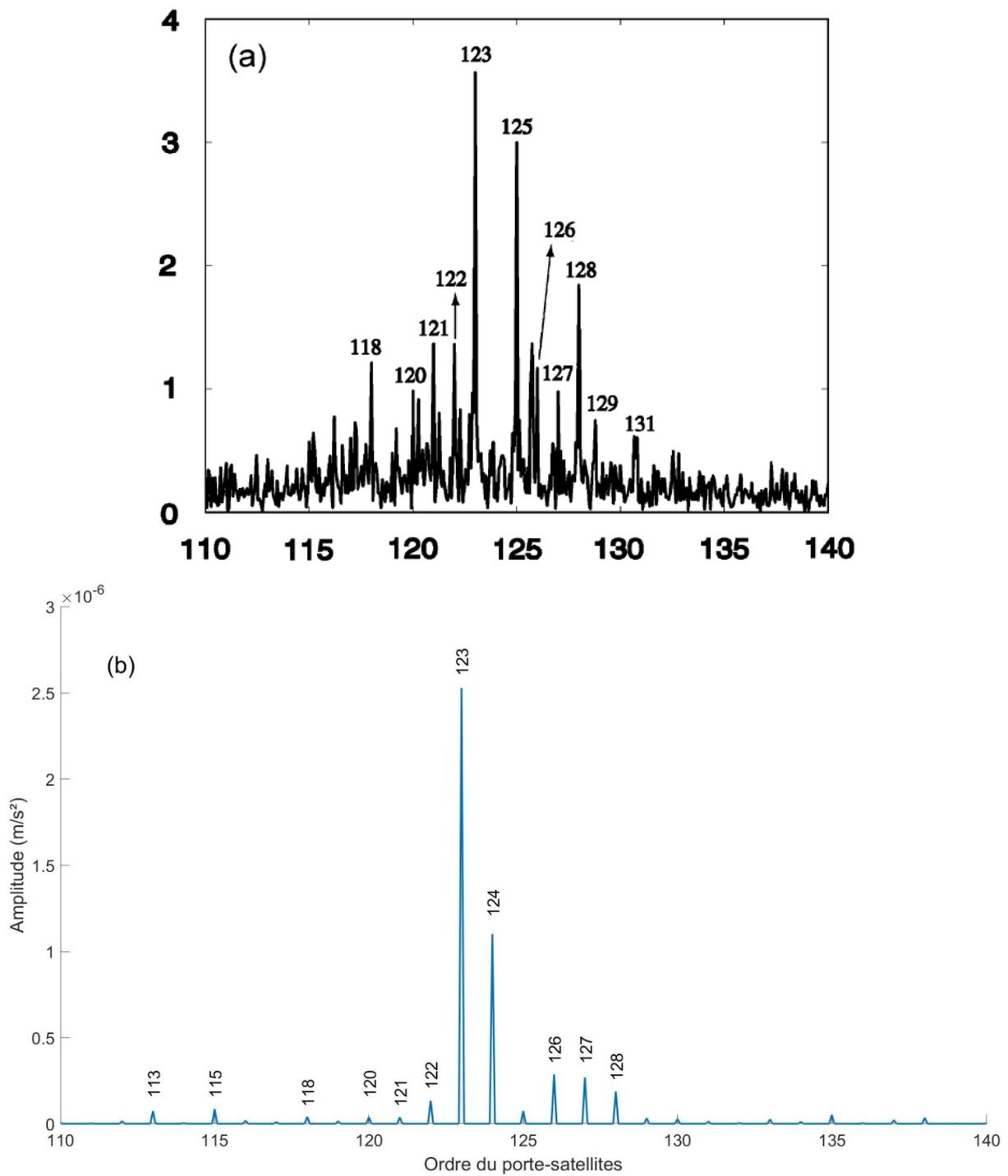


Figure 3-16 Spectre des accélérations radiales de la couronne (a) mesurées [125], (b) obtenues par simulation, relevées sur la dent n°6 de la couronne, pour un couple d'entrée de 400Nm et une vitesse de rotation en entrée de 500rpm

## 3.2.2 Caractérisation du partage de charges entre satellites en présence d'erreurs d'assemblage

L'architecture des trains planétaires et épicycloïdaux permet de transmettre des puissances élevées en répartissant les efforts à travers différents chemins de transmission. Pour maximiser la puissance transmise, il est donc important que les efforts se répartissent le plus uniformément possible entre les différents satellites. Le partage de la charge entre les satellites est donc un sujet d'étude important des trains épicycloïdaux.

Dans cette sous partie nous nous intéressons au partage de charge prédit par le modèle de trains épicycloïdaux de cette étude, que nous comparons aux résultats de mesures présentés par Ligata *et al.* [12]. Les paramètres de denture sont identiques à ceux de la sous partie précédente et sont donnés dans le tableau 3-3. Différentes configurations de satellites sont traitées, et pour chacune de ces configurations différentes valeurs d'erreurs de position des satellites sont étudiées. Ces erreurs de position correspondent à un défaut de positionnement de l'alésage de l'axe du satellite dans le porte-satellite ; dans cette sous partie ces erreurs de position seront dans la direction tangentielle (donc perpendiculairement aux directions radiale et axiale), et impacteront par convention systématiquement le satellite n°1, elles sont donc notées  $ey_1$ .

Pour caractériser le partage des charges entre satellites, un facteur de partage de charge est défini comme suit pour le satellite n° $i$ , avec  $\overline{F_{b_j}}$  l'effort moyen dans le temps au palier du satellite n° $j$  :

$$L_{pi} = \frac{\overline{F_{b_i}}}{\sum_{j=1}^{N_p} \overline{F_{b_j}}} \quad 3-9$$

Ce facteur de partage prend donc comme valeur  $1/N_p$  lorsque la charge est parfaitement répartie entre les  $N_p$  satellites d'une configuration, et la somme des facteurs de partage de charge des différents satellites d'une configuration est toujours égale à 1.

### 3.2.2.1 Train épicycloïdal à 4 satellites

Dans cette configuration les satellites sont répartis arbitrairement aux multiples  $[0 \ 50 \ 99 \ 149]$  de l'angle de résolution de montage  $\kappa$  (cf. équation 2-24), ce qui correspond approximativement aux angles  $[0^\circ \ 90,9^\circ \ 180^\circ \ 270,9^\circ]$  ; les satellites ne sont donc pas répartis uniformément.

La figure 3-17 présente une comparaison du partage de charges entre satellites mesuré [12] et prédit par le modèle. Le modèle présente un bon accord avec les mesures, le même comportement dissymétrique est observé entre les satellites pairs et impairs du à leur positionnement diamétralement opposé deux à deux ; le modèle prédit cependant une variation plus importante du facteur de partage de charge pour le satellite n°1 que ce que les mesures révèlent, notamment en comparaison du satellite n°3.

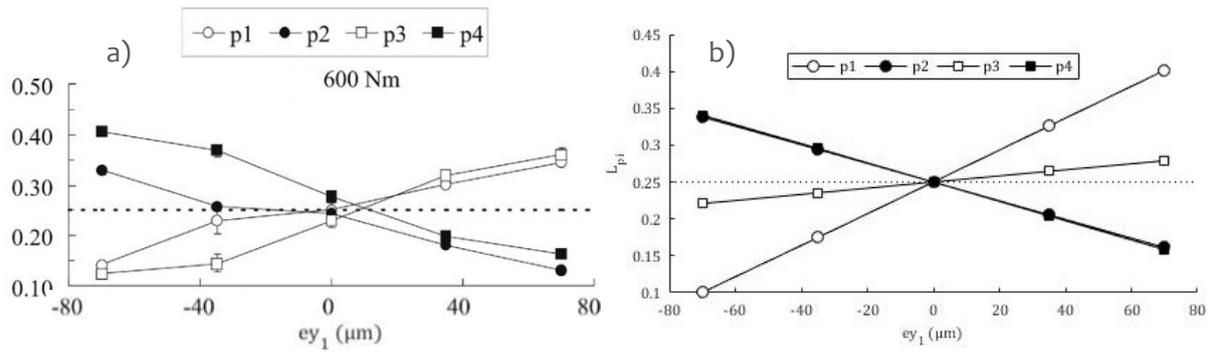


Figure 3-17 Facteurs de partage de charge entre satellites  $L_{pi}$  pour différentes erreurs de position du satellite n°1 a) mesurés [12] et b) obtenus par simulation pour un couple d'entrée de 600Nm et une vitesse de rotation en entrée de 500rpm

### 3.2.2.2 Train épicycloïdal à 5 satellites

Dans cette configuration les satellites sont répartis arbitrairement aux multiples [0 40 79 119 158] de l'angle de résolution de montage  $\kappa$  (cf. équation 2-24), ce qui correspond approximativement aux angles [0° 72,7° 143,6° 216,4° 287,3°] ; les satellites ne sont donc pas non plus répartis uniformément dans cette configuration.

La

figure 3-18 présente une comparaison du partage de charges entre satellites mesuré [12] et prédit par le modèle. Le modèle présente toujours un bon accord avec les mesures, le satellite n°1 présente les variations de facteur de partage de charge les plus importantes tandis que les satellites n°2 & 5 et n°3 & 4 ont le même comportement deux à deux.

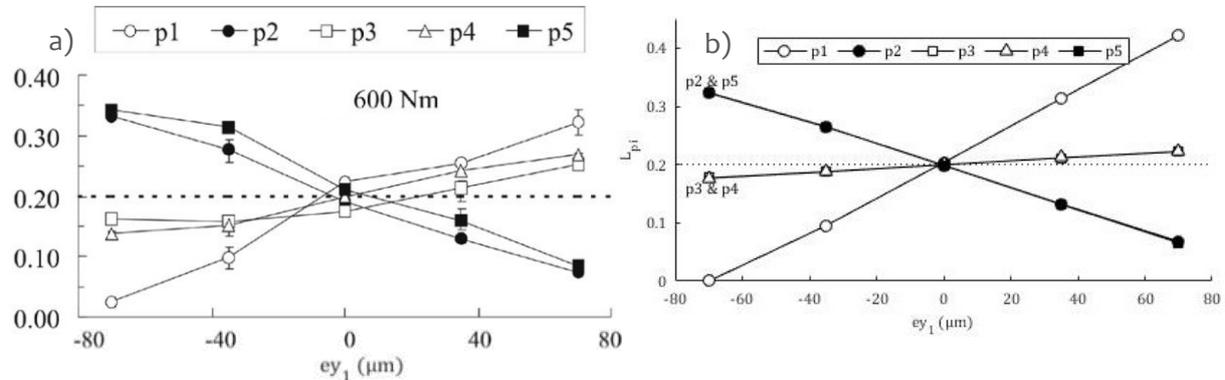


Figure 3-18 Facteurs de partage de charge entre satellites  $L_{pi}$  pour différentes erreurs de position du satellite n°1 a) mesurés [12] et b) obtenus par simulation pour un couple d'entrée de 600Nm et une vitesse de rotation en entrée de 500rpm

### 3.2.2.3 Train épicycloïdal à 6 satellites

Dans cette configuration à 6 satellites les nombres de dents du planétaire et de la couronne permettent une répartition uniforme des satellites, les lignes des centres des satellites sont donc séparées d'un angle constant de 60°.

La

figure 3-19 présente une comparaison du partage de charges entre satellites mesuré [12] et prédit par le modèle. Le modèle présente ici encore un bon accord avec les mesures, le satellite n°1 présente les variations de facteur de partage de charge les plus importantes, les satellites n°2 & 6 se

comportent de manière similaire, le modèle prédit cependant pour les satellites n°3 & 5 un même comportement tandis que le satellite n°4 est isolé, ce qui n'est pas retrouvé dans les mesures.

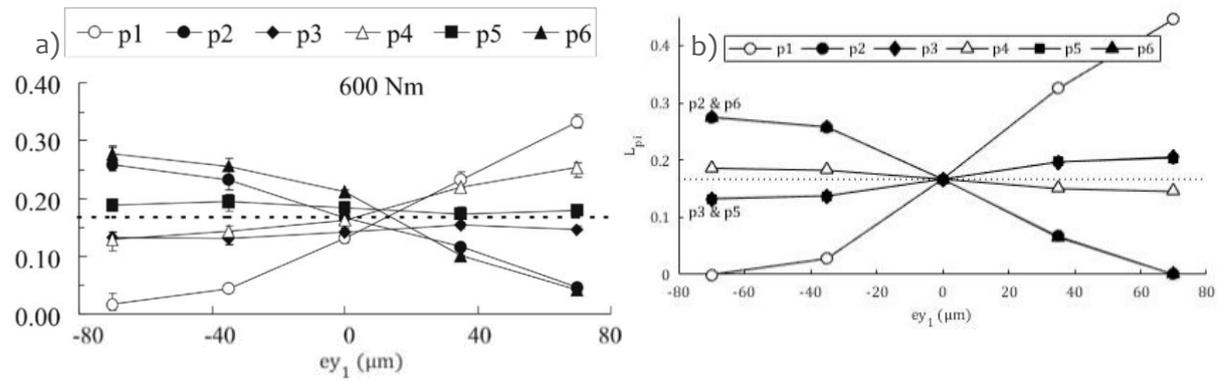


Figure 3-19 Facteurs de partage de charge entre satellites  $L_{pi}$  pour différentes erreurs de position du satellite n°1 a) mesurés [12] et b) obtenus par simulation pour un couple d'entrée de 600Nm et une vitesse de rotation en entrée de 500rpm

### 3.3 CONCLUSION

Différents aspects du modèle ont donc été validés. La comparaison menée entre le modèle d'engrenages spiroconiques et la théorie de Hertz a permis de valider la modélisation de la raideur de contact par une multitude de raideurs élémentaires indépendantes. Un modèle par éléments finis tridimensionnels de la dent a permis de valider la modélisation du comportement en flexion de la dent d'un engrenage spiroconique. Enfin, des comparaisons avec des mesures expérimentales de portée à vide ont permis de valider la méthode de détermination des distances de séparation initiale spécifique au modèle d'engrenages spiroconiques et l'approximation faite sur la géométrie des flancs de dents. Enfin, le modèle de train épicycloïdal a été validé grâce à des mesures expérimentales de la littérature portant sur des aspects – signaux d'accélération et partage de charges entre satellites – complexes du comportement des trains épicycloïdaux, et ce pour différentes configurations. Ces différents éléments de validation permettent ainsi de valider la stratégie de modélisation retenue dans cette étude.



---

# CHAPITRE 4 CARACTERISATION VIBRATOIRE D'UN REDUCTEUR



Ce chapitre s'intéresse au comportement vibratoire de la transmission étudiée, et notamment en présence d'erreurs d'assemblage.

Afin de mettre en évidence le couplage fort existant entre le couple d'engrenages spiroconiques et le train épicycloïdal, ces deux sous-systèmes seront d'abord étudiés séparément dans des modèles d'architectures simplifiées, avant que le système complet ne soit étudié.

Pour chacune de ces architectures, une première partie s'intéressera à l'analyse modale du système, une seconde partie s'intéressera au comportement dynamique du système étudié en l'absence d'erreurs, enfin l'influence de diverses erreurs d'assemblage en condition de fonctionnement nominal sera étudiée. Une étude des défauts d'écaillage dans les trains épicycloïdaux est également proposée, abordant les méthodes de détection adaptées à ce type de défaut.

## 4.1 COUPLE SPIROCONIQUE

Le système comprenant le couple d'engrenages spiroconiques étudié dans cette sous-partie est illustré en figure 4-1. Il est constitué d'un arbre traversant sur lequel est monté le pignon spiroconique en chape entre deux roulements, et sur lequel est appliqué le couple d'entrée, ainsi qu'un arbre de sortie sur lequel est montée la roue spiroconique, en porte-à-faux par rapport aux deux roulements de cet arbre. Les paramètres de dentures principaux des engrenages spiroconiques sont donnés dans le tableau 4-1 ci-dessous.

		Pignon	Roue
Nombre de dents		28	28
Module normal moyen	[mm]	2.9314	
Angle de pression normal	[°]	20	
Angle d'hélice moyen	[°]	35	
Largeur de denture	[mm]	28	
Angle entre axes	[°]	90	

Tableau 4-1 Paramètres de denture du couple d'engrenages spiroconique

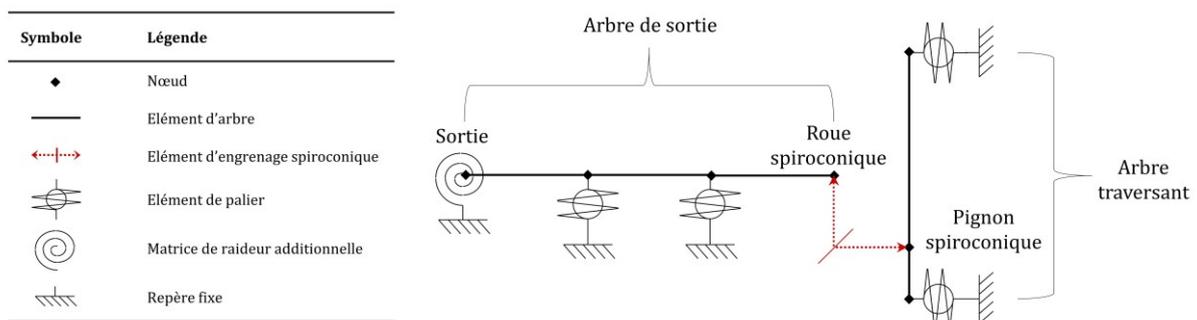


Figure 4-1 Architecture du modèle sans train épicycloïdal

### 4.1.1 Etude modale

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à l'étude modale du couple d'engrenages spiroconiques. L'étude modale consiste à analyser les valeurs et vecteurs propres d'un système mécanique libre, répondant à l'équation suivante :

$$(\bar{K} - \omega_m^2 \bar{M})\mathbf{X}_m = \mathbf{0} \quad 4-1$$

Avec  $\omega_m$  valeur propre et  $\mathbf{X}_m$  vecteur propre du système associé au mode n<sup>o</sup>  $m$ . Une énergie modale peut être calculée pour chaque mode, dont les contributions de chacun des sous-systèmes peuvent être dissociées afin d'obtenir le pourcentage d'énergie modale associé à chacun des sous-systèmes. L'énergie modale associée à un mode propre se calcule :

$$E_{m \text{ tot}} = {}^T \mathbf{X}_m \bar{K} \mathbf{X}_m \quad 4-2$$

Le pourcentage d'énergie modale d'un sous-système, dont la matrice de raideur moyennée dans le temps s'écrit  $\bar{K}_{SS}$ , se calcule alors :

$$E_{m\ ss} = \frac{^T X_m \bar{K}_{ss} X_m}{^T X_m \bar{K} X_m}$$

4-3

Les dix premières fréquences propres du système illustré en figure 4-1, ainsi que les pourcentages d'énergie modale conservés dans différents sous-système, soient l'arbre traversant, la denture du couple d'engrenages spiroconiques, et l'arbre de sortie, sont données dans le tableau 4-2 pour le sens de rotation trigonométrique, et dans le tableau 4-3 pour le sens de rotation horaire.

Numéro du mode propre	Fréquences propres (Hz)	Pourcentage d'énergie modale		
		Arbre traversant	Denture spiroconique	Arbre de sortie
1	853.25	6.4%	2.7%	90.8%
2	987.02	0.1%	0.1%	99.8%
3	1425.49	69.5%	1.8%	28.7%
4	1592.82	56.3%	0.4%	43.2%
5	1746.18	12.1%	1.6%	86.3%
6	3675.49	62.2%	13.6%	24.2%
7	3988.06	99.9%	0.1%	0.0%
8	4137.93	62.7%	11.4%	25.9%
9	4590.59	1.7%	0.3%	97.9%
10	4711.32	99.7%	0.0%	0.3%

Tableau 4-2 Fréquences et pourcentages d'énergies modales des modes propres du couple d'engrenages spiroconiques seul en sens de rotation trigonométrique

Il apparait que peu de modes propres sont effectivement liés à la denture des engrenages spiroconiques, avec sur les dix premiers modes propres seulement deux dont l'excitation est liée de manière non négligeable à la denture. Dans le sens de rotation trigonométrique, il s'agit des modes 6 et 8, et dans le sens de rotation horaire des modes 7 et 8, et même pour ces modes ci le pourcentage d'énergie modale provenant de la denture ne dépasse pas les 27% au maximum, et est entre 11% et 13% pour trois sur quatre de ces modes. Les arbres traversant et de sortie jouent donc un rôle prépondérant dans le comportement modal du système.

Il est intéressant de noter que bien que les modes propres des deux sens de rotation présentent beaucoup de similarités, les modes propres en commun présentent des fréquences propres parfois sensiblement décalées d'un sens de rotation à l'autre, et certains modes propres sont spécifiques à certains sens de rotation. Le mode propre n°1 est commun aux deux sens de rotation, et comme l'illustre la figure 4-2 il s'agit d'un mode de basculement de l'arbre de sortie accompagné d'un faible déplacement axial de l'arbre traversant, et qui est donc fortement dépendant des rayons de paliers.

Numéro du mode propre	Fréquences propres (Hz)	Pourcentage d'énergie modale		
		Arbre traversant	Denture spiroconique	Arbre de sortie
1	858.60	11.4%	3.6%	85.0%
2	1074.74	0.0%	0.0%	100.0%
3	1394.04	50.7%	4.0%	45.3%
4	1824.79	41.5%	0.2%	58.3%
5	1921.87	36.0%	1.0%	63.0%
6	3279.45	99.9%	0.1%	0.0%
7	3498.82	70.7%	12.9%	16.4%
8	4416.34	48.1%	26.8%	25.1%
9	4977.76	0.0%	0.0%	100.0%
10	5001.78	3.7%	3.7%	92.6%

Tableau 4-3 Fréquences et pourcentages d'énergies modales des modes propres du système en sens de rotation horaire

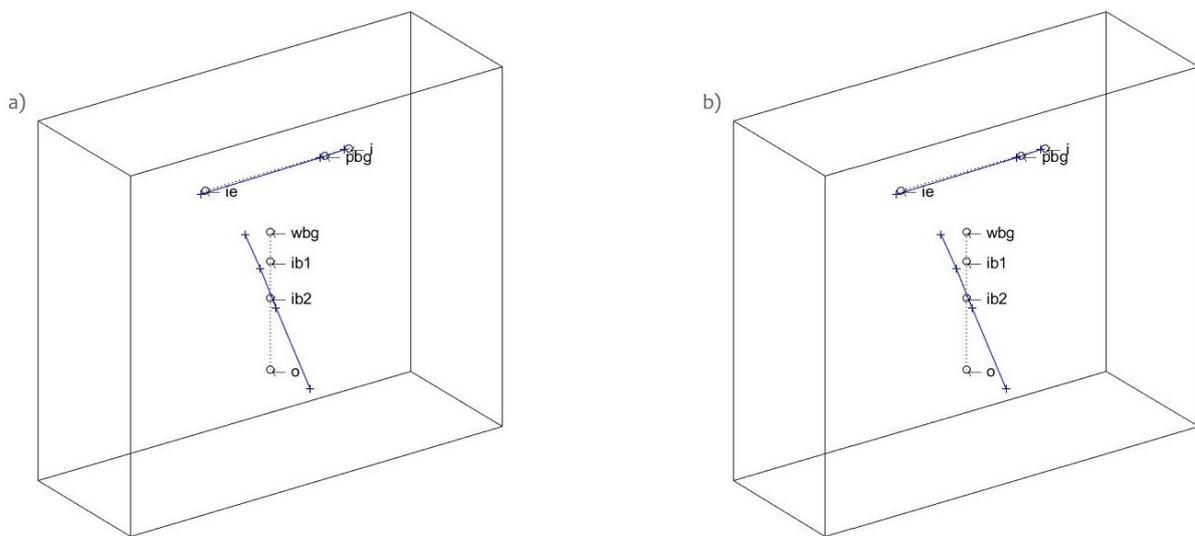


Figure 4-2 Déformées modales du premier mode des sens de rotation a) horaire et b) trigonométrique. Légende :  $\circ$  - position nominale des nœuds,  $+$  - position déformée des nœuds,  $i$  : nœud d'entrée et du premier roulement de l'arbre traversant,  $pbj$  : nœud du pignon spiroconique,  $ie$  : nœud du second roulement de l'arbre traversant,  $wbg$  : nœud de la roue spiroconique,  $ib1$ ,  $ib2$  : nœuds des roulements de l'arbre de sortie,  $o$  : nœud de sortie

Les modes faisant intervenir la denture s'accompagnent d'une flexion des arbres, leurs déformées modales sont illustrées en figure 4-3. Le tableau 4-4 donne une description rapide de chacun des modes présentés dans le tableau 4-2 et le tableau 4-3.

Mode	Description du mode	
	Sens horaire	Sens trigonométrique
1	Basculement de l'arbre de sortie et déplacement axial de l'arbre traversant	
2	Basculement de l'arbre de sortie	
3	Basculement de l'arbre de sortie et de l'arbre traversant	
4	Déplacement axial et léger basculement des arbres traversant et de sortie	
5	Déplacement axial de l'arbre de sortie et de l'arbre traversant	
6	Flexion de l'arbre traversant	Flexion des arbres traversant et de sortie
7	Flexion des arbres traversant et de sortie	Flexion de l'arbre traversant
8	Flexion des arbres traversant et de sortie	
9	Flexion de l'arbre de sortie	
10	Flexion de l'arbre de sortie	Flexion de l'arbre traversant

Tableau 4-4 Description des modes propres du système

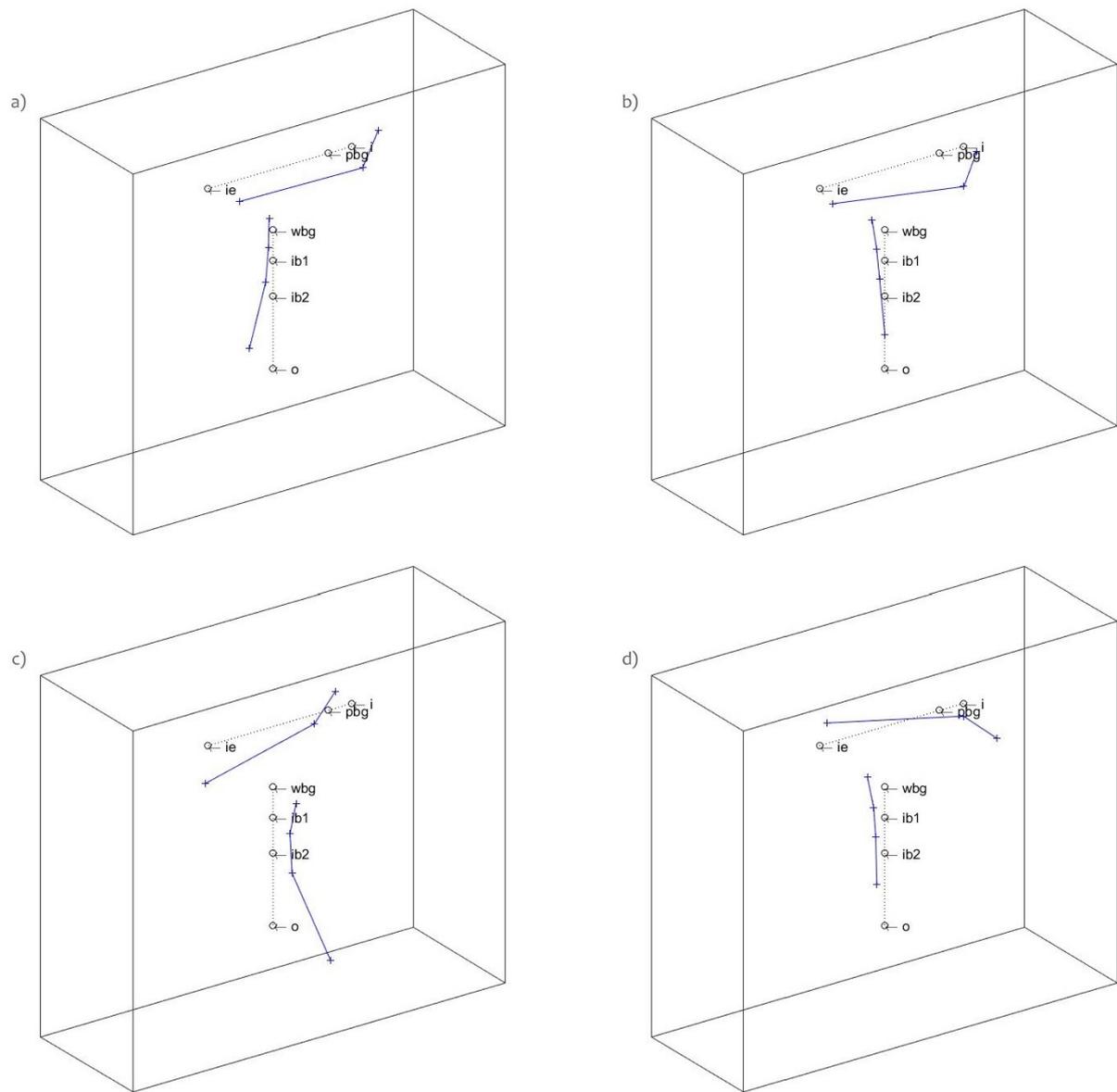


Figure 4-3 Déformées modales a) du mode n°7 en sens de rotation horaire, b) du mode n°6 en sens de rotation trigonométrique, c) du mode n°8 en sens de rotation horaire, d) du mode n°8 en sens de rotation trigonométrique, une légende détaillée de cette représentation est donnée en figure 4-2

## 4.1.2 Comportement dynamique

Cette sous-partie s'intéresse au comportement dynamique de l'engrenage spiroconique seul. A cette fin, une série de simulations a été effectuée couvrant une plage de vitesse allant de 100rpm à 8100rpm, avec un pas de 100rpm, pour un couple d'entrée fixé à 200Nm.

Dans l'objectif de caractériser le comportement du système de manière simple pour chacune des vitesses de rotation, deux indicateurs sont définis :

- (1) L'écart type des erreurs de transmission, notés  $\sigma(TE)$ , et le rapport entre l'écart type des erreurs de transmission dynamique et l'écart type des erreurs de transmission quasi-statique, appelé coefficient d'erreurs de transmission et noté  $TEC$
- (2) Le coefficient de surcharge dynamique, noté  $DC$ , défini comme la valeur maximale du rapport entre l'effort dynamique et l'effort quasi-statique vu par un engrènement

L'évolution de ces deux indicateurs avec la vitesse de rotation est donnée en figure 4-4 et figure 4-5. Plusieurs pics du coefficient de surcharge dynamique sont visibles en figure 4-4, plus particulièrement dans le sens de rotation horaire. Un pic est notamment présent aux alentours des 1800rpm, des 3000rpm, des 4500rpm et des 7000rpm dans le sens de rotation horaire. Dans le sens de rotation trigonométrique moins de pics sont visibles, avec un pic à 7800rpm, néanmoins le niveau global est plus élevé que dans le sens de rotation horaire.

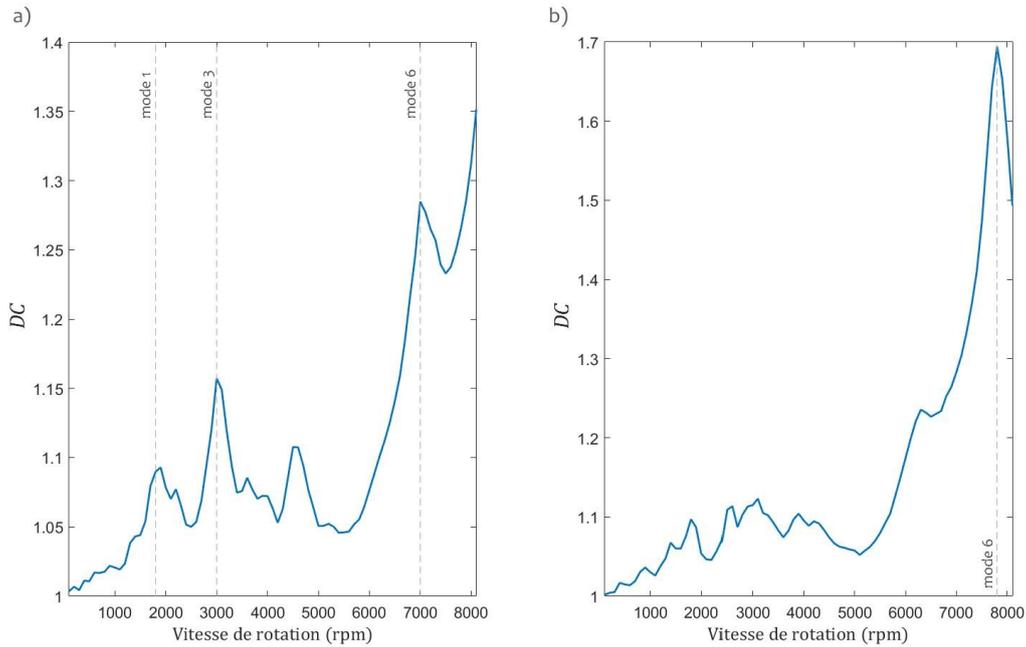


Figure 4-4 Evolution du coefficient de surcharge dynamique  $DC$  dans le sens de rotation a) horaire et b) trigonométrique

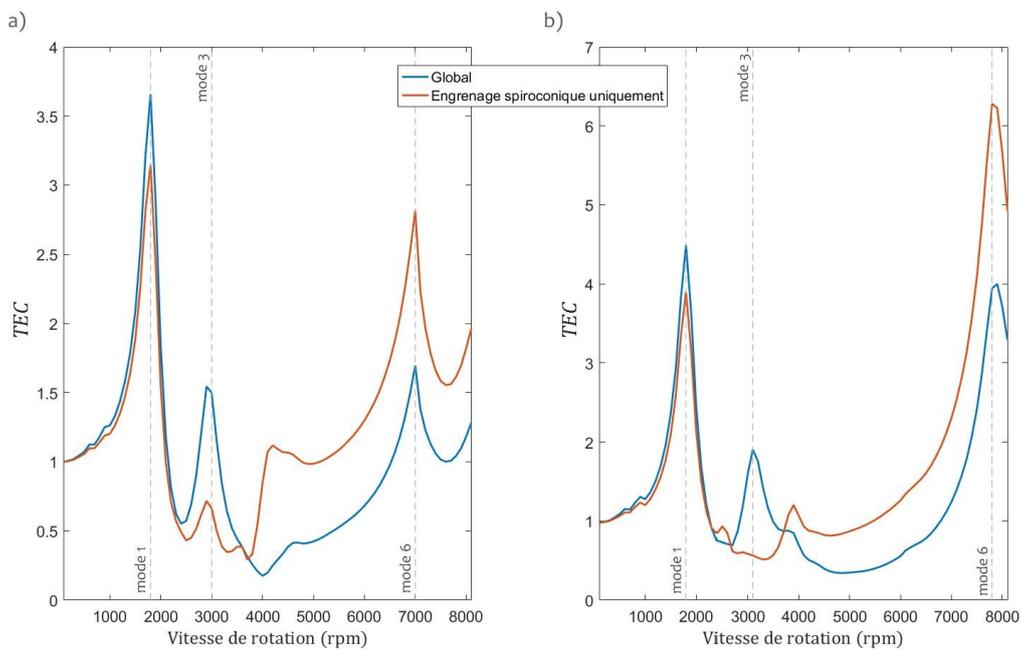


Figure 4-5 Evolution du coefficient d'erreurs de transmission  $TEC$  dans le sens de rotation a) horaire et b) trigonométrique, pour le système global (erreurs de transmission prises entre les nœuds d'entrée et de sortie) et pour l'engrènement uniquement (erreurs de transmission prises entre les nœuds du pignon et de la roue spiroconique uniquement)

De manière identique au coefficient de surcharge dynamique, le coefficient d'erreurs de transmission présente en figure 4-5 plusieurs pics. En sens de rotation horaire, ces pics correspondent à ceux constatés sur la courbe du coefficient de surcharge dynamique. En sens de rotation trigonométrique, des pics supplémentaires à celui des 7800rpm sont constatés aux alentours des 1800rpm, 3100rpm et 4000rpm. En s'intéressant à la fréquence d'engrènement à ces vitesses de rotation, on constate que les différents pics correspondent à des modes propres du système.

En effet, les pics à 1800rpm des deux sens de rotation correspondent au premier mode propre identifié dans la sous-partie précédente, la fréquence d'engrènement à cette vitesse étant de 840Hz. Il est d'ailleurs intéressant de noter que l'écart type des erreurs de transmission dues à l'engrènement est inférieur à celui des erreurs de transmission globales, les arbres viennent donc pour ce mode dégrader les erreurs de transmission.

Les pics constatés à 2900rpm et 3100rpm dans les sens de rotation horaire et trigonométrique respectivement correspondent au troisième mode propre, la fréquence d'engrènement étant à ces vitesses de 1353Hz et 1447Hz respectivement. Ce mode étant un mode d'arbre, l'engrènement joue ici encore un rôle secondaire dans les erreurs de transmission.

Aucun mode propre ne correspond aux pics présents aux alentours des 4500rpm et 4000rpm pour les sens de rotation horaires et trigonométriques respectivement, on observe cependant qu'à ces vitesses les erreurs de transmission dues à l'engrènement deviennent supérieures aux erreurs de transmission globales, et les arbres jouent à partir de ces vitesses un rôle d'amortisseur.

Enfin, les pics constatés à 7000rpm et 7800rpm dans les sens de rotation horaire et trigonométrique respectivement correspondent au sixième mode propre, la fréquence d'engrènement étant à ces vitesses de 3267Hz et 3640Hz respectivement. Ce mode propre fait intervenir en sens de rotation trigonométrique la denture du couple d'engrenages spiroconiques, impactant de manière non négligeable la répartition des pressions de contact sur le flanc de denture ; la répartition des pressions de contact sur le flanc de denture est illustrée en figure 4-6. On constate qu'à 7800rpm la répartition des pressions de contact se sépare en deux zones distinctes en conséquence du mode de denture intervenant à cette vitesse de rotation. Enfin, on constate à basse comme à haute vitesse une surpression localisée en tête de dent lors du dégagement de la dent de l'engrènement, cependant plus importante à basse qu'à haute vitesse.

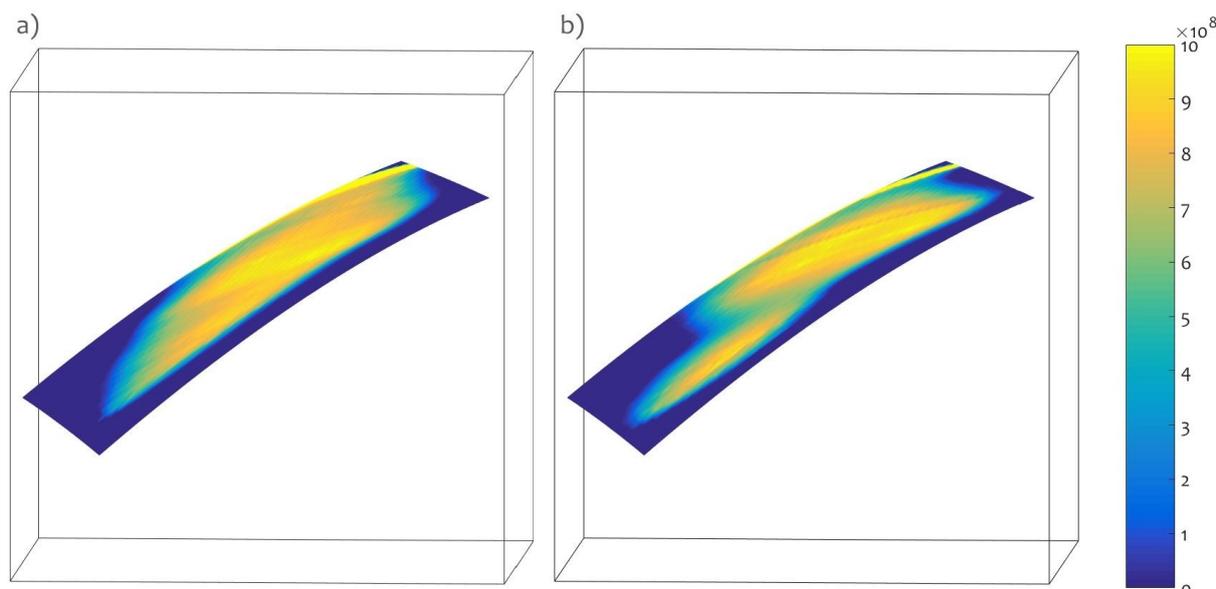


Figure 4-6 Répartition des pressions de contact (en Pascal) sur le flanc de denture du pignon spiroconique à a) 100rpm et b) 7800rpm en sens de rotation trigonométrique

On constate que certains modes propres ne sont pas visibles sur ces graphiques, c'est notamment le cas des deuxièmes, quatrièmes et cinquièmes modes propres. Etant donné que l'unique source d'excitation périodique du système est l'engrènement, la géométrie de la denture va fortement conditionner les modes propres sollicités. En l'occurrence les modes propres de déplacement axial des arbres, correspondant aux modes 4 et 5, ne sont pour cette géométrie de denture pas sollicités. L'étude du comportement dynamique du système vient donc compléter les informations fournies dans la sous-partie précédente par son analyse modale, précisant les modes propres réellement critiques pour les caractéristiques de la transmission.

### 4.1.3 Influence des erreurs d'assemblage

Ce paragraphe s'intéresse au comportement du couple d'engrenages spiroconique en présence de différentes erreurs d'assemblage. Afin de caractériser de manière simple l'impact d'une erreur d'assemblage spécifique sur le comportement du système, les deux indicateurs définis dans la sous partie précédente sont utilisés, à savoir le rapport entre l'écart type des erreurs de transmission dynamique et l'écart type des erreurs de transmission quasi-statique *TEC*, et le coefficient de surcharge dynamique *DC*.

Dans ce paragraphe, tous les résultats sont donnés pour un couple d'entrée de 200Nm et une vitesse de rotation en entrée de 1100rpm. Le tableau 4-5 présente l'influence des erreurs de position axiales, des erreurs d'hypôides et des erreurs d'excentration sur ces deux indicateurs pour le sens de rotation horaire.

Erreur d'assemblage	Amplitude de l'erreur	Support de l'erreur	Sens de rotation	<i>TEC</i>	<i>DC</i>
Pas d'erreur			Horaire	1.28	1.02
Axiale	50 $\mu\text{m}$	Pignon	Horaire	1.78	1.06
Axiale	50 $\mu\text{m}$	Roue	Horaire	1.22	1.03
Axiale	-50 $\mu\text{m}$	Pignon	Horaire	1.12	1.03
Axiale	-50 $\mu\text{m}$	Roue	Horaire	1.32	1.04
Hypoïde	50 $\mu\text{m}$	Pignon	Horaire	1.35	1.04
Hypoïde	50 $\mu\text{m}$	Roue	Horaire	1.59	1.02
Hypoïde	-50 $\mu\text{m}$	Pignon	Horaire	1.59	1.03
Hypoïde	-50 $\mu\text{m}$	Roue	Horaire	1.35	1.04
Excentration	50 $\mu\text{m}$	Pignon	Horaire	12.77	1.05
Excentration	50 $\mu\text{m}$	Roue	Horaire	15.91	1.06

Tableau 4-5 Influence des erreurs de position axiale, des erreurs d'hypoïde et des erreurs d'excentration sur les erreurs de transmission et les efforts d'engrènement – sens de rotation horaire

Il apparaît dans les résultats du tableau 4-5 que les erreurs d'excentration dégradent significativement les erreurs de transmission, ce sont cependant les seules erreurs de ce tableau générant une variation des conditions d'engrènement au cours du temps, expliquant cette influence particulièrement importante sur les erreurs de transmission. De plus, bien que la majorité des erreurs de ce tableau dégradent les erreurs de transmission, on observe qu'une erreur de position axiale positive sur la roue ou négative sur le pignon amènent à une légère amélioration des erreurs de transmission, en échange d'une dégradation du coefficient de surcharge dynamique de 1% seulement. Les deux autres cas d'erreurs de position axiales dégradent les erreurs de transmission et le coefficient de surcharge dynamique. On constate une similitude logique entre les erreurs d'hypoïde positives sur la roue et négatives sur le pignon, et vice versa.

Le tableau 4-6 présente les résultats pour les mêmes erreurs, mais pour un sens de rotation inversé. On constate une légère augmentation du coefficient de surcharge dynamique à l'inversion du sens de rotation, même en l'absence d'erreur. Les erreurs de position axiale positives sur la roue ou négatives sur le pignon amènent ici encore à des erreurs de transmission relativement peu dégradées, mais le coefficient de surcharge dynamique est maintenant 5% supérieur aux conditions de fonctionnement sans erreurs. Les erreurs d'excentration présentent le même niveau de criticité que précédemment.

Erreur d'assemblage	Amplitude de l'erreur	Support de l'erreur	Sens de rotation	<i>TEC</i>	<i>DC</i>
Pas d'erreur			Trigonométrique	1.28	1.05
Axiale	50 $\mu\text{m}$	Pignon	Trigonométrique	1.39	1.06
Axiale	50 $\mu\text{m}$	Roue	Trigonométrique	1.29	1.10
Axiale	-50 $\mu\text{m}$	Pignon	Trigonométrique	1.20	1.10
Axiale	-50 $\mu\text{m}$	Roue	Trigonométrique	1.71	1.08
Hypoïde	50 $\mu\text{m}$	Pignon	Trigonométrique	1.48	1.09
Hypoïde	50 $\mu\text{m}$	Roue	Trigonométrique	1.88	1.09
Hypoïde	-50 $\mu\text{m}$	Pignon	Trigonométrique	1.88	1.09
Hypoïde	-50 $\mu\text{m}$	Roue	Trigonométrique	1.46	1.09
Excentration	50 $\mu\text{m}$	Pignon	Trigonométrique	20.97	1.10
Excentration	50 $\mu\text{m}$	Roue	Trigonométrique	16.34	1.12

Tableau 4-6 Influence des erreurs de position axiale, des erreurs d'hypoïde et des erreurs d'excentration sur les erreurs de transmission et les efforts d'engrènement – sens de rotation trigonométrique

Le tableau 4-7 recense les résultats pour les erreurs de désalignement et de désaxage dans le sens de rotation trigonométrique. La différence entre les erreurs de désalignement  $e\phi$  et  $e\psi$  est illustrée en figure 2-11, et ces erreurs sont définies aux équations 2-59 et 2-60. Il apparaît que les erreurs de désalignement  $e\phi$  soient peu critiques, autant du point de vue des erreurs de transmission que du coefficient de surcharge dynamique. Les erreurs de désalignement  $e\psi$  sont en comparaison aussi peu critiques pour le coefficient de surcharge dynamique, elles amènent cependant à des erreurs de transmission globalement plus élevées que pour les erreurs de désalignement  $e\phi$ . Les erreurs de désaxage dégradent quant à elles sensiblement plus les erreurs de transmission, notamment parce que similairement aux erreurs d'excentration, les erreurs de désaxage génèrent une variation dans le temps des conditions d'engrènement. Dans le cas d'une erreur de désaxage portant sur la roue on constate que le coefficient de surcharge dynamique est significativement plus élevé que ceux de l'ensemble des autres erreurs de désalignement de la roue, signifiant qu'une ou plusieurs combinaisons particulières de désalignements selon  $e\phi$  et  $e\psi$  amènent à des conditions d'engrènement particulièrement mauvaises. Ainsi, même si ce niveau d'erreurs de désalignement paraît peu critique en comparaison avec les différentes erreurs de position présentées précédemment, certaines combinaisons peuvent amener à des coefficients de surcharge dynamiques très élevés.

Erreur d'assemblage	Amplitude de l'erreur	Support de l'erreur	Sens de rotation	<i>TEC</i>	<i>DC</i>
Pas d'erreur			Horaire	1.28	1.02
Désalignement $e\phi$	5.0E-04 rad	Pignon	Horaire	1.26	1.05
Désalignement $e\phi$	5.0E-04 rad	Roue	Horaire	1.26	1.02
Désalignement $e\phi$	-5.0E-04 rad	Pignon	Horaire	1.27	1.03
Désalignement $e\phi$	-5.0E-04 rad	Roue	Horaire	1.26	1.04
Désalignement $e\psi$	5.0E-04 rad	Pignon	Horaire	1.15	1.02
Désalignement $e\psi$	5.0E-04 rad	Roue	Horaire	1.27	1.04
Désalignement $e\psi$	-5.0E-04 rad	Pignon	Horaire	1.35	1.05
Désalignement $e\psi$	-5.0E-04 rad	Roue	Horaire	1.30	1.04
Désaxage	5.0E-04 rad	Pignon	Horaire	5.04	1.05
Désaxage	5.0E-04 rad	Roue	Horaire	5.14	1.24

Tableau 4-7 Influence des erreurs de désalignement et de désaxage – sens de rotation horaire

Comme le démontre les résultats du tableau 4-8, le comportement lié à ces erreurs angulaires est cependant fortement dépendant du sens de rotation. On constate qu'aucune erreur angulaire ne se distingue par un coefficient d'erreurs de transmission ou un coefficient de surcharge dynamique intéressant dans les deux sens de rotation. Il apparaît également que les erreurs de désaxage soient plus de deux fois moins critiques vis-à-vis des erreurs de transmission dans ce sens de rotation.

Erreur d'assemblage	Amplitude de l'erreur	Support de l'erreur	Sens de rotation	<i>TEC</i>	<i>DC</i>
Pas d'erreur			Trigonométrique	1.28	1.05
Désalignement $e\phi$	5.0E-04 rad	Pignon	Trigonométrique	1.38	1.09
Désalignement $e\phi$	5.0E-04 rad	Roue	Trigonométrique	1.17	1.07
Désalignement $e\phi$	-5.0E-04 rad	Pignon	Trigonométrique	1.16	1.08
Désalignement $e\phi$	-5.0E-04 rad	Roue	Trigonométrique	1.40	1.08
Désalignement $e\psi$	5.0E-04 rad	Pignon	Trigonométrique	1.33	1.08
Désalignement $e\psi$	5.0E-04 rad	Roue	Trigonométrique	1.09	1.08
Désalignement $e\psi$	-5.0E-04 rad	Pignon	Trigonométrique	1.30	1.09
Désalignement $e\psi$	-5.0E-04 rad	Roue	Trigonométrique	1.47	1.07
Désaxage	5.0E-04 rad	Pignon	Trigonométrique	1.91	1.10
Désaxage	5.0E-04 rad	Roue	Trigonométrique	2.17	1.11

Tableau 4-8 Influence des erreurs de désalignement et de désaxage – sens de rotation trigonométrique

Il ressort donc de cette étude que certaines erreurs d'assemblage sont particulièrement critiques, notamment les erreurs d'excentration et de désaxage qui doivent par conséquent faire l'objet d'une attention particulière, et à l'opposé certaines erreurs apparaissent comme très peu critiques, notamment les erreurs de position axiale positives sur la roue et négatives sur le pignon, et pouvant donc mener à des procédures de montage minimisant les probabilités d'erreurs d'assemblage critiques.

## 4.2 TRAIN EPICYCLOÏDAL

Dans cette sous partie le train épicycloïdal est étudié seul, le système est illustré en figure 4-7. Il est constitué d'un arbre d'entrée soutenu par deux roulements à rouleaux coniques, sur lequel est situé l'entrée de puissance, et à l'extrémité duquel est monté le planétaire dans un montage en porte-à-faux. Un arbre de sortie est également soutenu par deux roulements à rouleaux coniques, à l'extrémité duquel est monté le porte-satellites en porte-à-faux également. Les axes des satellites, solidaires du porte-satellites, supportent les satellites au moyen de roulements à aiguilles modélisés ici comme des roulements à rouleaux coniques dont l'angle d'inclinaison, et donc l'angle de cône également, est nul. Les satellites engrènent avec le planétaire et la couronne et présentent une correction longitudinale quadratique ainsi qu'une correction de profil quadratique sur les deux flancs ; le modèle de couronne flexible est employé. Les paramètres de denture principaux du train épicycloïdal sont donnés en tableau 4-9 ; le train épicycloïdal comprend 3 satellites.

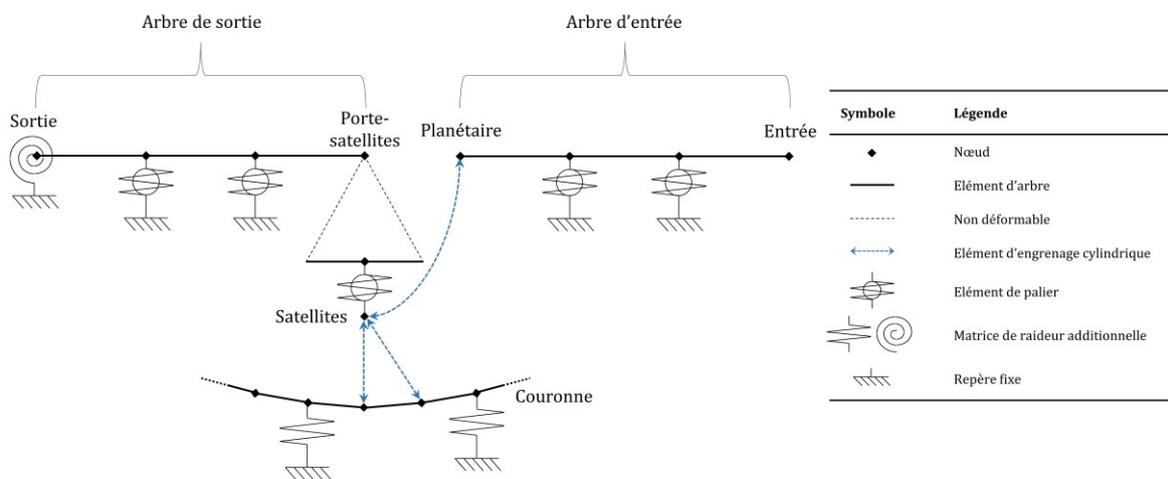


Figure 4-7 Architecture du modèle sans couple d'engrenages spiroconique

		Planétaire	Satellites	Couronne
Nombre de dents		27	40	108
Module normal	[mm]	1.5		
Angle de pression normal	[°]	20		
Angle d'hélice de base	[°]	6		
Largeur de denture	[mm]	26		
Entraxe	[mm]	51.15		
Rayon de base	[mm]	19.12	28.33	76.48

Tableau 4-9 Paramètres de denture du train épicycloïdal

### 4.2.1 Etude modale

Le comportement modal de ce système est étudié dans ce paragraphe. Les 29 premières fréquences propres du système illustré en figure 4-7, ainsi que les pourcentages d'énergie modale conservés dans différents sous-système, soient l'arbre d'entrée, la denture du train épicycloïdal,

et l'arbre de sortie, sont données dans le tableau 4-10 pour le sens de rotation trigonométrique, et dans le tableau 4-11 pour le sens de rotation horaire. L'arbre de sortie inclus le porte-satellites, et par conséquent les axes des satellites et leurs roulements à aiguilles ; la denture du train épicycloïdal inclus la couronne flexible.

Les trois premiers modes apparaissent à une fréquence très basse, il s'agit de modes de déplacement axial des satellites dus à la raideur axiale très basse, théoriquement nulle, des roulements à aiguilles. Ces modes ne vont cependant pas influencer le comportement du réducteur car la résultante des efforts axiaux appliqués sur un satellite est nulle à tout instant, la raideur axiale des roulements à aiguilles n'est donc dans les faits pas sollicitée.

Comme pour le couple d'engrenages spiroconiques, peu de modes propres, seulement 8 sur 29, font intervenir la denture du train épicycloïdal de manière significative. On constate cependant que le pourcentage d'énergie modale conservée dans les engrènements est sensiblement plus élevé que pour le couple d'engrenages spiroconique.

Numéro du mode propre	Fréquences propres (Hz)	Pourcentage d'énergie modale		
		Arbre d'entrée	Denture du train épicycloïdal	Arbre de sortie
1	7.96	3.1%	0.5%	96.4%
2	7.96	3.1%	0.5%	96.4%
3	7.96	12.3%	1.8%	85.9%
4	329.07	0.1%	0.8%	99.1%
5	559.50	15.1%	1.7%	83.2%
6	559.50	15.1%	1.7%	83.2%
7	686.54	0.0%	0.0%	100.0%
8	1557.45	8.9%	51.6%	39.5%
9	1645.43	84.5%	1.1%	14.5%
10	1645.43	84.5%	1.1%	14.5%
11	1691.25	10.6%	56.2%	33.1%
12	1695.84	10.8%	56.3%	32.9%
13	1698.60	41.9%	0.8%	57.3%
14	1698.60	41.9%	0.8%	57.3%
15	1896.38	82.9%	5.9%	11.2%
16	1896.38	82.9%	5.9%	11.2%
17	2299.42	100.0%	0.0%	0.0%
18	2431.02	0.3%	0.3%	99.3%
19	2431.02	0.3%	0.3%	99.3%
20	2751.71	16.9%	8.1%	75.0%
21	2751.71	16.9%	8.1%	75.0%
22	2907.42	18.6%	58.4%	23.0%
23	3043.04	0.2%	0.2%	99.6%
24	3043.04	0.2%	0.2%	99.6%
25	3216.24	9.4%	15.9%	74.7%
26	3216.24	9.4%	15.9%	74.7%
27	5549.49	0.0%	40.9%	59.1%
28	5615.75	0.0%	95.4%	4.6%
29	5845.83	0.1%	0.3%	99.6%

Tableau 4-10 Fréquences et pourcentages d'énergies modales des modes propres du système en sens de rotation trigonométrique

Numéro du mode propre	Fréquences propres (Hz)	Pourcentage d'énergie modale		
		Arbre d'entrée	Denture du train épicycloïdal	Arbre de sortie
1	7.96	26.5%	0.1%	73.4%
2	7.96	47.0%	0.1%	52.9%
3	7.96	47.7%	0.1%	52.2%
4	329.28	0.1%	0.8%	99.1%
5	498.03	55.8%	0.0%	44.2%
6	498.03	55.8%	0.0%	44.2%
7	686.54	0.0%	0.0%	100.0%
8	1405.91	92.3%	4.6%	3.1%
9	1405.93	92.3%	4.6%	3.1%
10	1566.58	33.4%	38.1%	28.5%
11	1659.87	78.6%	8.7%	12.7%
12	1660.29	78.5%	8.7%	12.8%
13	1688.07	65.2%	21.9%	12.9%
14	1693.04	67.3%	20.6%	12.1%
15	1695.18	75.6%	9.2%	15.2%
16	1695.20	75.6%	9.3%	15.1%
17	1815.39	99.4%	0.4%	0.2%
18	2427.97	0.3%	0.3%	99.4%
19	2427.97	0.3%	0.3%	99.4%
20	2727.39	18.9%	8.2%	72.9%
21	2727.39	18.9%	8.2%	72.9%
22	2885.78	15.5%	61.5%	23.0%
23	3039.85	0.1%	0.2%	99.7%
24	3039.85	0.1%	0.2%	99.7%
25	3218.05	12.7%	18.6%	68.7%
26	3218.05	12.7%	18.6%	68.7%
27	5491.63	0.0%	46.0%	54.0%
28	5623.55	0.0%	96.9%	3.1%
29	5847.54	0.1%	0.3%	99.6%

Tableau 4-11 Fréquences et pourcentages d'énergies modales des modes propres du système en sens de rotation horaire

Le comportement modal des trains planétaires et épicycloïdaux a déjà fait l'objet d'études, Eritenel et Parker [77] se sont notamment intéressés à la classification des modes propres de ces types de réducteurs. A l'aide d'un modèle à paramètres concentrés tridimensionnel, différents types de modes propres ont été mis en évidence, notamment des modes de type « Rotational-Axial » (abrégiés R-A), caractérisés par une torsion et une translation le long de leur axe de rotation des axes et membres centraux, et des modes de type « Translational-Tilting » (abrégiés T-T), caractérisés par un basculement et des déplacements perpendiculaires aux axes de rotation des axes et membres centraux. Des modes de type « Planets » (abrégiés P) faisant intervenir les satellites sont également mis en valeur pour les configurations possédant 4 satellites ou plus. En s'intéressant à l'influence d'un modèle de couronne flexible sur le comportement modal d'un train épicycloïdal, Chapron [93] a également mis en évidence des modes « Pure Ring » (abrégiés PR) ne sollicitant que la couronne flexible. En suivant cette classification, les modes propres listés dans le tableau 4-10 et le tableau 4-11 sont classés, leur classification est donnée dans le tableau 4-12.

Conformément aux conclusions d'Eritenel et Parker [77], la multiplicité des modes de type R-A et de type T-T sont respectivement de 1 et 2, le nombre de modes étant de 8 et 16 respectivement sur les 30 premiers modes propres. Des modes de type PR sont observés, mais interviennent à relativement haute fréquence. Les trois premiers modes propres ont été classifiés en modes de type P, ils ne correspondent cependant pas exactement aux modes identifiés dans [77], les modes de type P identifiés dans [77] n'apparaissant pas pour des configurations à trois satellites ou moins. Les modes observés ici font intervenir un déplacement axial ainsi qu'une rotation des satellites autour de leur axe, les déplacements axiaux ne sont cependant pas des multiples entiers du déplacement axial du premier satellite contrairement aux modes identifiés dans [77] ; le modèle employé dans [77] ne possédant que 36 degrés de liberté (dans le cas d'un train épicycloïdal à 3 satellites), il ne peut présenter que 36 modes propres, contre 732 pour le modèle de cette étude.

En excluant donc ces modes de type P, le premier mode propre apparaît à fréquence de 329Hz, soit à sensiblement plus basse fréquence que pour le couple d'engrenages spiroconiques seul pour lequel le premier mode propre était situé à 853Hz. Le premier mode sollicitant la denture de manière non négligeable est un mode de type R-A pour les deux sens de rotation, apparaissant à 1567Hz pour les deux sens de rotation ; il s'agit des modes 8 et 10 pour les sens de rotation trigonométrique et horaire respectivement, les déformées modales de ces modes sont données en figure 4-8.

Mode	Classification du mode	
	Sens horaire	Sens trigonométrique
1	P	P
2	P	P
3	P	P
4	R-A	R-A
5	T-T	T-T
6	T-T	T-T
7	R-A	R-A
8	T-T	R-A
9	T-T	T-T
10	R-A	T-T
11	T-T	R-A
12	T-T	R-A
13	R-A	T-T
14	R-A	T-T
15	T-T	T-T
16	T-T	T-T
17	R-A	R-A
18	T-T	T-T
19	T-T	T-T
20	T-T	T-T
21	T-T	T-T
22	R-A	R-A
23	T-T	T-T
24	T-T	T-T
25	T-T	T-T
26	T-T	T-T
27	PR	PR
28	PR	PR
29	R-A	R-A

Tableau 4-12 classification des modes propres du système sans couple d'engrenages spiroconiques

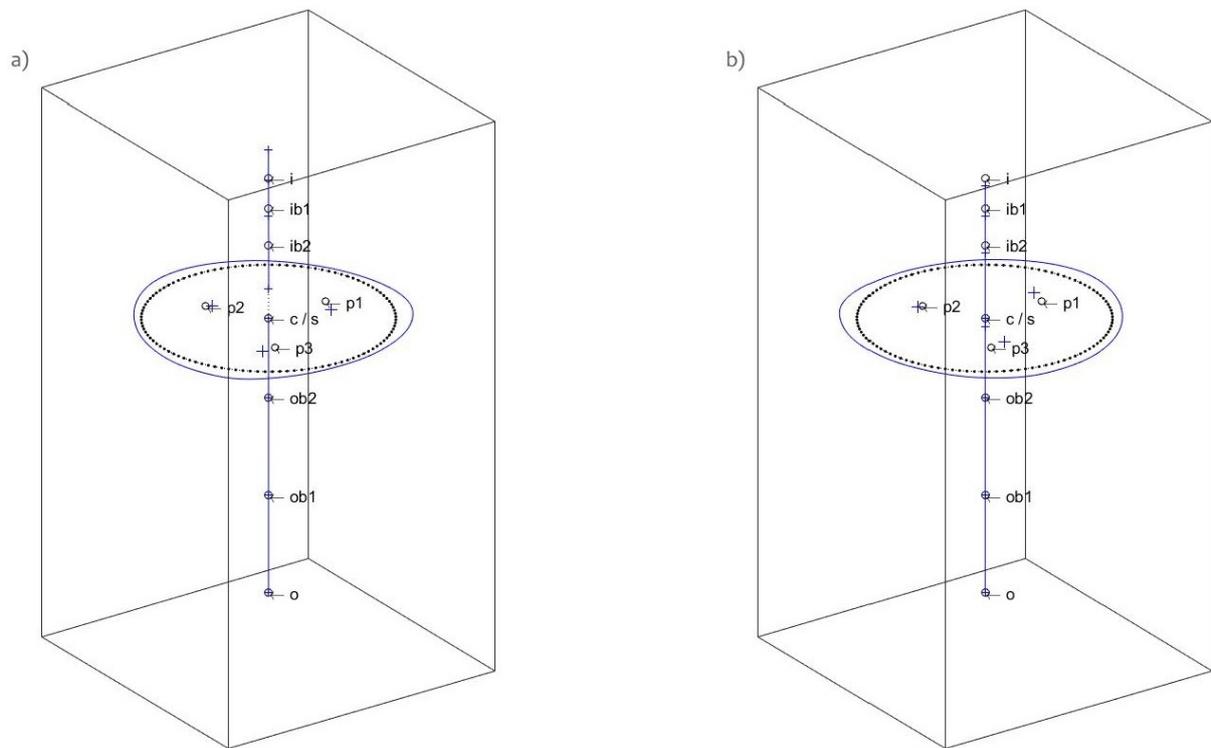


Figure 4-8 Déformées modales a) du mode 10 en sens de rotation horaire et b) du mode 8 en sens de rotation trigonométrique. Légende : o - position nominale des nœuds, + - position déformée des nœuds, i : nœud d'entrée, ib1, ib2 : nœuds des roulements de l'arbre d'entrée, c / s : nœuds du porte-satellites et du planétaire (deux nœuds différents mais géométriquement superposés), ob1, ob2 : nœuds des roulements de l'arbre de sortie, o : nœud de sortie, p1, p2, p3 : nœuds des satellites

On constate que la majorité des modes pour lesquels l'énergie de déformation modale conservée dans les engrènements est non négligeable sont des modes de type R-A. Certains modes de type T-T sollicitent malgré tout la denture, le basculement des arbres entraînant une déformation de la couronne. C'est notamment le cas du mode 25 pour les deux sens de rotation, dont la déformée modale est représentée en figure 4-9. La déformée modale de la couronne, lorsque celle-ci est sollicitée, pour les modes de type T-T se distingue de celle des modes de type R-A et PR ; la déformée modale de la couronne pour les modes de type T-T est de diamètre 2, alors qu'elle est de diamètre 3, correspondant au nombre de satellites, pour les modes de type R-A et PR. La déformée modale du mode 28, de type PR, est représentée en figure 4-10.

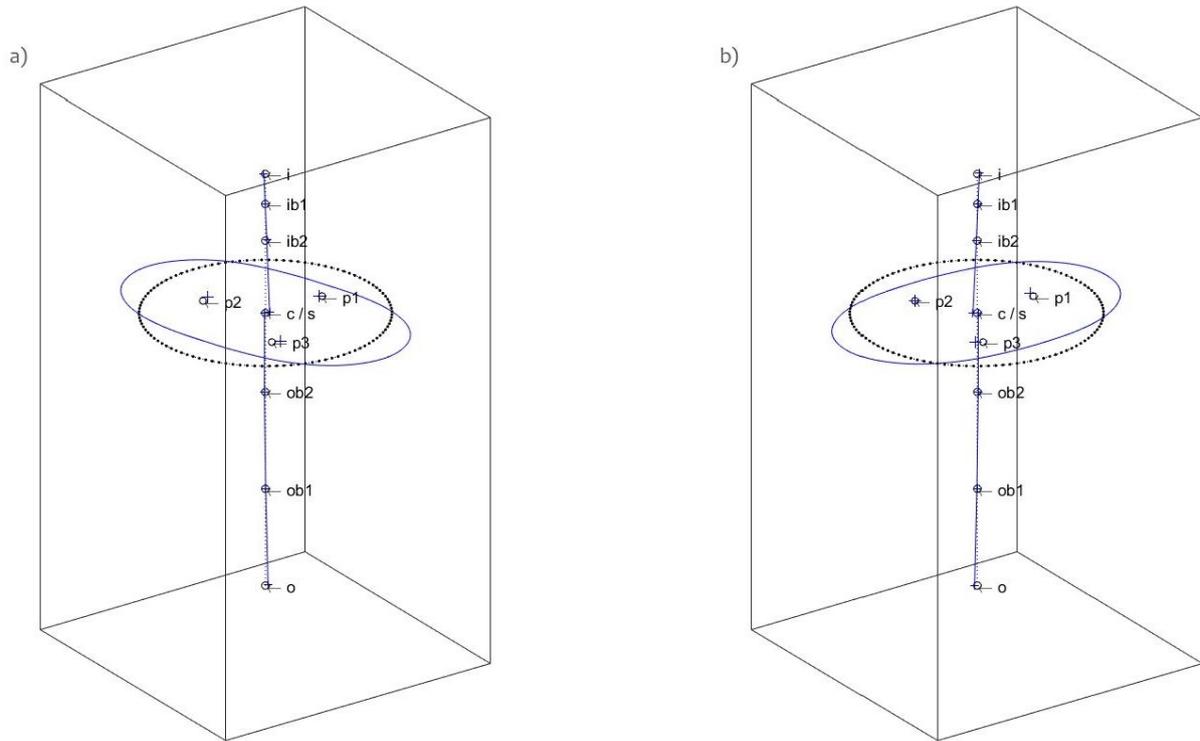


Figure 4-9 Déformées modales du mode 25 pour le sens de rotation a) horaire et b) trigonométrique, une légende détaillée de cette représentation est donnée en figure 4-8

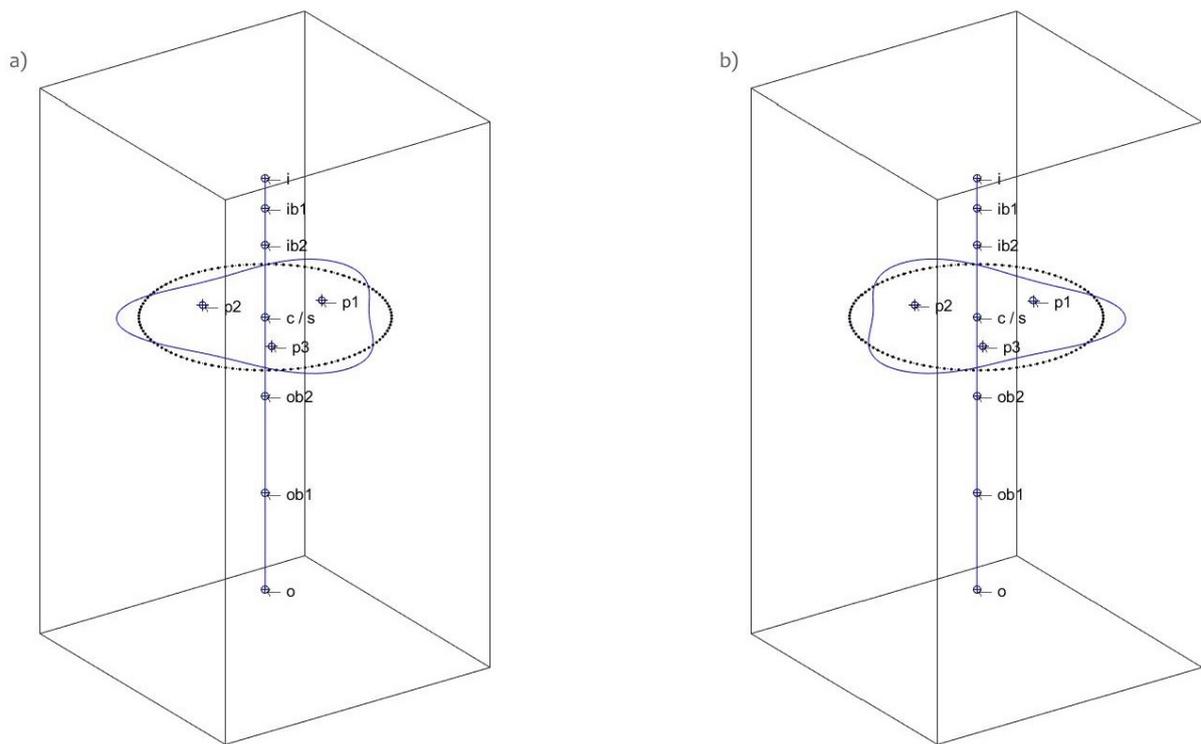


Figure 4-10 Déformées modales du mode 28 pour le sens de rotation a) horaire et b) trigonométrique, une légende détaillée de cette représentation est donnée en figure 4-8

Enfin, la dissymétrie constatée entre les deux sens de rotation pour le couple d'engrenages spiroconique est bien moindre pour le train épicycloïdal. Les fréquences propres des modes de type R-A ne sont que très peu modifiées, avec 6 des 8 modes propres de ce type dont la fréquence est inchangée d'un sens de rotation à l'autre.

## 4.2.2 Comportement dynamique

Cette sous-partie s'intéresse au comportement dynamique du train épicycloïdal seul. A cette fin, une série de simulations a été effectuée couvrant une plage de vitesse allant de 100rpm à 6000rpm, avec un pas de 100rpm, pour un couple d'entrée fixé à 200Nm. Les indicateurs définis au paragraphe 4.1.2, le coefficient de surcharge dynamique  $DC$  et le coefficient d'erreur de transmission  $TEC$ , sont réutilisés ici, leur évolution en fonction de la vitesse de rotation est donnée en figure 4-11 et figure 4-12.

Le coefficient de surcharge dynamique présente pour des vitesses inférieures à 3500rpm de faibles variations d'amplitude négligeable, l'amplitude du coefficient de surcharge dynamique reste en moyenne bien inférieure à celle de l'engrenage spiroconique seul présenté en paragraphe 4.1.2. Un léger pic est constaté à 2200rpm pour les deux sens de rotation. Au-delà de 3500rpm, plusieurs pics sont visibles, le principal étant à 4600rpm en sens horaire et 4500rpm en sens trigonométrique, avec un second pic à 5000rpm et 4900rpm en sens horaire et trigonométrique respectivement.

Le coefficient de surcharge dynamique des engrènements extérieurs et intérieurs suit la même tendance, on remarque cependant que les engrènements intérieurs manifestent un pic du coefficient de surcharge dynamique aux alentours des 5400rpm dans les deux sens de rotation qui n'est pas répercuté sur les engrènements extérieurs, et inversement aux alentours des 5800rpm pour les engrènements extérieurs.

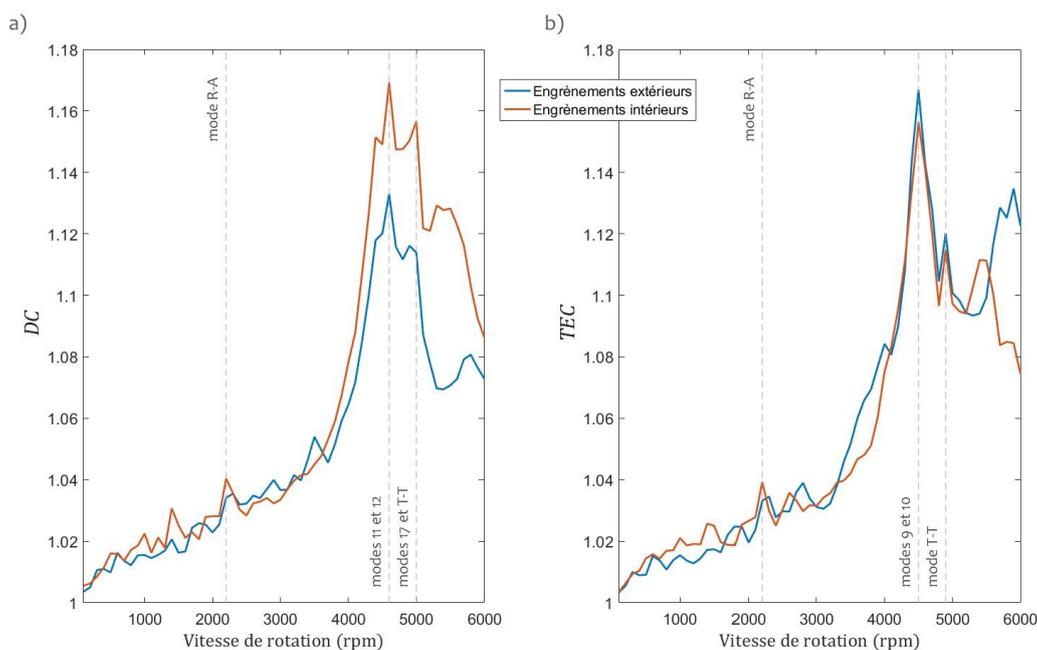


Figure 4-11 Evolution du coefficient de surcharge dynamique  $DC$  dans le sens de rotation a) horaire et b) trigonométrique, pour les engrènements extérieurs (planétaire/satellites) et les engrènements extérieurs (satellites/couronne)

Les coefficients d'erreurs de transmission global et de denture uniquement, visibles en figure 4-12, ne présentent que très peu de différences. Contrairement à l'engrenage spiroconique, les arbres jouent donc pour les erreurs de transmission du train épicycloïdal un rôle négligeable. Les courbes présentent un minimum à 700rpm dans les deux sens de rotation, ainsi que les mêmes deux pics visibles sur les courbes du coefficient de surcharge dynamique, le principal étant à

4600rpm et 4500rpm, le second à 5000rpm et 4900rpm en sens horaire et trigonométrique respectivement. Le léger pic à 2200rpm constaté sur les courbes du coefficient de surcharge dynamique est également présent ici.

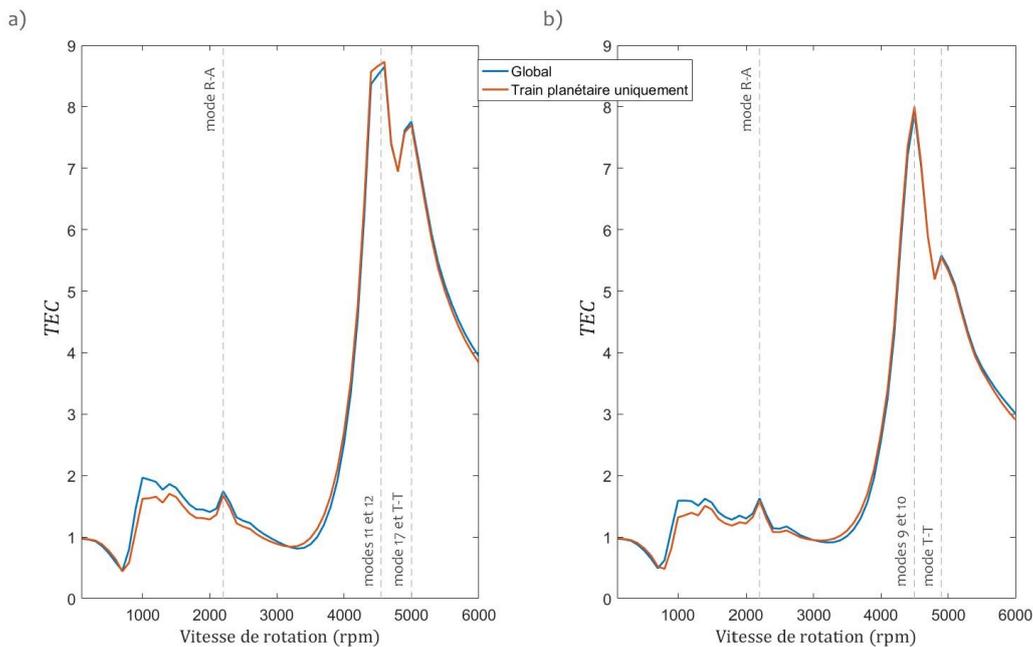


Figure 4-12 Evolution du coefficient d'erreurs de transmission  $TEC$  dans le sens de rotation a) horaire et b) trigonométrique, pour le système global (erreurs de transmission prises entre les nœuds d'entrée et de sortie) et pour l'engrènement uniquement (erreurs de transmission prises entre les nœuds du planétaire et du porte-satellites uniquement)

Le pic principal correspond, en sens horaire, aux modes 11 et 12, la fréquence d'engrènement du train planétaire étant de 1656Hz à 4600rpm, proche de la fréquence de 1660Hz à laquelle interviennent ces deux modes. Les modes 13 à 16 sont tous proches de ce pic, à des fréquences comprises entre 1688 et 1695Hz, les situant à environ 4700rpm. En sens trigonométrique, les modes 9 et 10 interviennent à une fréquence de 1645Hz, proche de la fréquence d'engrènement à 4500 et 4600rpm au niveau du pic principal. Les modes 11 à 14 sont proches de ce pic, à des fréquences comprises entre 1691 et 1699Hz.

En sens horaire, le second pic à 5000rpm ne correspond pas uniquement au mode 17, à cette vitesse de rotation la fréquence d'engrènement est de 1800Hz proche des 1815Hz de ce mode propre cependant les déplacements des différents nœuds à cette vitesse de rotation révèlent un mode de type T-T, avec un basculement des arbres d'entrée et de sortie. En sens de rotation trigonométrique, aucun mode propre ne correspond au pic visible à 4900rpm, l'analyse des déplacements des différents nœuds révèle cependant un basculement des arbres d'entrée et de sortie, ce pic correspondrait donc à un mode de type T-T non ou mal prédit par l'analyse modale.

Le pic constaté à 2200rpm dans les deux sens de rotation ne correspond pas non plus à un mode identifié lors de l'analyse modale, on constate cependant à cette vitesse des déplacements en torsion plus élevés qu'aux vitesses adjacentes, révélant un mode de type R-A également non ou mal prédit par l'analyse modale.

Les modes les plus critiques, autant pour le coefficient de surcharge dynamique que pour le coefficient d'erreurs de transmission, sont donc pour ce train épicycloïdal des modes de type T-T faisant intervenir des basculements des arbres et des éléments centraux. Ces modes vont donc être fortement dépendants de la conception des arbres et paliers.

### 4.2.3 Influence des erreurs d'assemblage

Ce paragraphe s'intéresse au comportement du train épicycloïdal en présence de différentes erreurs d'assemblage. Dans ce paragraphe, tous les résultats sont donnés pour un couple d'entrée de 200Nm et une vitesse de rotation en entrée de 1100rpm. Les différentes erreurs étudiées dans cette sous-partie sont définies au paragraphe 2.1.2.3, ainsi qu'illustrées en figure 1-8.

Le tableau 4-13 présente l'influence des erreurs de position et d'excentration sur les coefficients d'erreurs de transmission et de surcharge dynamique en sens horaire, le tableau 4-14 présente les mêmes résultats pour le sens de rotation trigonométrique. Les erreurs de position sont, à l'exception de celles placées sur le satellite n°1, selon  $x_{10}$ , cependant le nombre de tours du porte-satellites réalisé étant entier les résultats sont égaux à ceux d'une erreur de position selon  $y_{10}$ . On constate qu'aucune asymétrie n'est présente entre les deux sens de rotation.

Erreur d'assemblage	Amplitude de l'erreur	Support de l'erreur	Sens de rotation	TEC	DC
Pas d'erreur			Horaire	1.94	1.02
Position	50 $\mu\text{m}$	Planétaire	Horaire	10.39	1.22
Position	50 $\mu\text{m}$	Porte-satellites	Horaire	17.11	1.35
Position	50 $\mu\text{m}$	Couronne	Horaire	2.53	1.22
Position $ex_1$	50 $\mu\text{m}$	Satellite n°1	Horaire	1.93	1.02
Position $ey_1$	50 $\mu\text{m}$	Satellite n°1	Horaire	1.90	1.15
Excentration	50 $\mu\text{m}$	Planétaire	Horaire	10.31	1.22
Excentration ( $\theta_c^{ec} = 0$ )	50 $\mu\text{m}$	Porte-satellites	Horaire	1.92	1.09
Excentration	50 $\mu\text{m}$	Satellite n°1	Horaire	60.27	1.28

Tableau 4-13 Influence des erreurs de position et d'excentration sur les erreurs de transmission et les efforts d'engrènement – sens de rotation horaire

Les erreurs de position radiales des satellites, selon  $x_1$ , n'ont à cette amplitude aucun effet ni sur le coefficient des erreurs de transmission, ni sur le coefficient de surcharge dynamique, illustrant la propriété des profils à développante de cercle de maintenir un rapport de vitesse constant au cours du temps sur une plage d'entraxe autour de l'entraxe nominal. Les erreurs de position tangentielles des satellites dégradent quant à elles légèrement les coefficients d'erreurs de transmission et de surcharge dynamique, dû au fait qu'elles génèrent une inégalité dans le partage de charge des satellites ainsi qu'un léger décalage de phase de la raideur d'engrènement du satellite impacté ; cette inégalité dans le partage de charge entre satellites est cependant constante dans le temps, seul le décalage de phase généré par l'erreur vient donc impacter les erreurs de transmission. Les erreurs d'excentration sur le porte-satellites sont également très peu critiques, elles sont

cinématiquement assimilables à un ensemble d'erreurs de position radiales et tangentielles sur l'ensemble des satellites, différentes pour chacun des satellites, amenant donc à un comportement similaire à ces deux erreurs. Ces erreurs sont peu critiques car elles ne génèrent pas pour les satellites de variation des conditions d'engrènement au cours du temps.

Les erreurs d'excentration des satellites sont à l'inverse particulièrement critique, pour le coefficient d'erreurs de transmission comme pour le coefficient de surcharge dynamique. Ces erreurs génèrent un partage de charge entre satellites inégal et variable au cours du temps, ainsi qu'un déphasage de la raideur d'engrènement du satellite concerné, variable au cours du temps lui aussi. Ces variations particulières des conditions d'engrènement au cours du temps dégradent fortement les erreurs de transmission, tout en amenant à un coefficient de surcharge dynamique logiquement du même ordre qu'une erreur de position tangentielle du satellite. Les erreurs les plus critiques pour le coefficient de surcharge dynamique sont cependant les erreurs de position du porte-satellites. A l'instar des erreurs d'excentration sur le porte-satellites, les erreurs de position sur le porte-satellites sont également cinématiquement assimilables à un ensemble d'erreurs de position radiales et tangentielles sur l'ensemble des satellites, différentes pour chacun des satellites ; cet ensemble d'erreurs de position radiales et tangentielles des satellites est dans ce cas-ci variable au cours du temps, à la vitesse de rotation du porte-satellites, parcourant différentes configuration et notamment la configuration la plus défavorable du point de vue du partage des charges, amenant au coefficient de surcharge dynamique le plus défavorable. Cette configuration particulièrement défavorable est donc également atteignable avec une erreur d'excentration du porte-satellites, pour une valeur particulière de l'angle initial de l'erreur d'excentration  $\theta_c^{ec}$ .

Erreur d'assemblage	Amplitude de l'erreur	Support de l'erreur	Sens de rotation	TEC	DC
Pas d'erreur			Trigonométrique	1.59	1.02
Position	50 $\mu\text{m}$	Planétaire	Trigonométrique	10.30	1.23
Position	50 $\mu\text{m}$	Porte-satellites	Trigonométrique	16.97	1.35
Position	50 $\mu\text{m}$	Couronne	Trigonométrique	2.31	1.23
Position $ex_1$	50 $\mu\text{m}$	Satellite n°1	Trigonométrique	1.59	1.02
Position $ey_1$	50 $\mu\text{m}$	Satellite n°1	Trigonométrique	1.62	1.29
Excentration	50 $\mu\text{m}$	Planétaire	Trigonométrique	10.26	1.23
Excentration ( $\theta_c^{ec} = 0$ )	50 $\mu\text{m}$	Porte-satellites	Trigonométrique	1.60	1.09
Excentration	50 $\mu\text{m}$	Satellite n°1	Trigonométrique	59.92	1.28

Tableau 4-14 Influence des erreurs de position et d'excentration sur les erreurs de transmission et les efforts d'engrènement – sens de rotation trigonométrique

Le tableau 4-15 présente l'influence des erreurs de désalignement et de désaxage sur les coefficients d'erreurs de transmission et de surcharge dynamique en sens horaire, le tableau 4-16 présente les mêmes résultats pour le sens de rotation trigonométrique. On constate encore une fois une asymétrie négligeable entre les deux sens de rotation. On remarque également que ces erreurs angulaires n'ont qu'une très faible influence sur le coefficient de surcharge dynamique ; les coefficients d'erreur de transmission sont également faibles pour ce niveau d'erreur, ce qui est

notamment dû aux corrections longitudinales présentes sur les satellites, qui réduisent le coefficient d'erreur de transmission de 130% en moyenne pour ces erreurs angulaires.

Parmi les erreurs de désalignement, la plus critique pour les erreurs de transmission est l'erreur de désalignement  $e\psi_1$  sur un satellite, et la moins critique, qui se révèle même être favorable, est l'erreur de désalignement  $e\phi_1$  sur un satellite. Ces deux erreurs génèrent une perturbation du partage de charge entre satellites, cependant l'erreur de désalignement  $e\psi_1$  ne génère pas de déphasage des raideurs d'engrènement des satellites, alors que l'erreur de désalignement  $e\phi_1$  génère un déphasage de la raideur d'engrènement du satellite impacté qui, dans cette configuration où les raideurs d'engrènement de chacun des satellites avec le planétaire et la couronne sont en phase, est bénéfique aux erreurs de transmission.

Les erreurs de désaxage sont plus critiques pour le coefficient d'erreurs de transmission que les erreurs de désalignement. Les erreurs de désaxage et de désalignement sur le planétaire sont très similaires, la seule différence entre ces deux erreurs étant la vitesse de rotation de l'axe du défaut dans le repère  $R_1$ . L'erreur de désalignement du porte-satellites présente un coefficient d'erreur de transmission inférieur à celui de l'erreur de désaxage du porte-satellites, signifiant que l'angle initial de l'erreur de désaxage  $\theta_c^{e\xi}$  est à une valeur particulièrement défavorable. L'erreur de désaxage sur le satellite est la plus critique de toutes les erreurs angulaires, dû aux variations dans le temps des conditions d'engrènement générées par cette erreur, explicitées dans l'analyse des erreurs de désalignement sur le satellite.

Erreur d'assemblage	Amplitude de l'erreur	Support de l'erreur	Sens de rotation	TEC	DC
Pas d'erreur			Horaire	1.94	1.02
Désalignement	5E-04 rad	Planétaire	Horaire	2.11	1.05
Désalignement	5E-04 rad	Porte-satellites	Horaire	1.98	1.06
Désalignement	5E-04 rad	Couronne	Horaire	2.14	1.02
Désalignement $e\phi_1$	5E-04 rad	Satellite n°1	Horaire	1.15	1.03
Désalignement $e\psi_1$	5E-04 rad	Satellite n°1	Horaire	2.22	1.04
Désaxage	5E-04 rad	Planétaire	Horaire	2.11	1.06
Désaxage ( $\theta_c^{e\xi} = 0$ )	5E-04 rad	Porte-satellites	Horaire	2.27	1.05
Désaxage	5E-04 rad	Satellite n°1	Horaire	2.68	1.04

Tableau 4-15 Influence des erreurs de désalignement et de désaxage sur les erreurs de transmission et les efforts d'engrènement – sens de rotation horaire

Erreur d'assemblage	Amplitude de l'erreur	Support de l'erreur	Sens de rotation	TEC	DC
Pas d'erreur			Trigonométrique	1.59	1.02
Désalignement	5E-04 rad	Planétaire	Trigonométrique	1.81	1.05
Désalignement	5E-04 rad	Porte-satellites	Trigonométrique	1.71	1.06
Désalignement	5E-04 rad	Couronne	Trigonométrique	1.63	1.03
Désalignement $e\phi_1$	5E-04 rad	Satellite n°1	Trigonométrique	0.93	1.05
Désalignement $e\psi_1$	5E-04 rad	Satellite n°1	Trigonométrique	1.31	1.04
Désaxage	5E-04 rad	Planétaire	Trigonométrique	1.83	1.05
Désaxage ( $\theta_c^{e\xi} = 0$ )	5E-04 rad	Porte-satellites	Trigonométrique	1.98	1.06
Désaxage	5E-04 rad	Satellite n°1	Trigonométrique	2.48	1.04

Tableau 4-16 Influence des erreurs de désalignement et de désaxage sur les erreurs de transmission et les efforts d'engrènement – sens de rotation trigonométrique

#### 4.2.4 Influence et détection des erreurs d'écaillage

Cette sous-partie se concentre sur la modélisation et les méthodes de détection des défauts d'écaillage. Pour cette sous-partie uniquement, les paramètres de denture principaux sont ceux donnés en tableau 4-17 [126]. Le train épicycloïdal étudié possède 3 satellites, répartis uniformément ; la couronne est liée au repère fixe à travers 16 supports, modélisés par des matrices de raideurs additionnelles, répartis uniformément également, le premier support étant positionné par convention à la même position angulaire que la dent n°6 de la couronne. Dans ce paragraphe, tous les résultats sont donnés pour un couple d'entrée de 500Nm et une vitesse de rotation en entrée de 2000rpm.

		Planétaire	Satellites	Couronne
Nombre de dents		24	36	96
Module normal	[mm]	1.5		
Angle de pression normal	[°]	20		
Angle d'hélice de base	[°]	10		
Largeur de denture	[mm]	30		
Entraxe	[mm]	45.694		

Tableau 4-17 Paramètres de denture du train épicycloïdal pour l'étude des erreurs d'écaillage

L'écaillage est un défaut de forme se caractérisant par un enlèvement de matière localisé sur le flanc de denture [127]. La géométrie du défaut étudié ici est donnée en figure 4-13 ; le défaut occupe une surface importante du flanc de dent, sa profondeur est variable le long de la hauteur de

dent afin de se rapprocher de la géométrie réelle de ce type de défaut, et atteint un maximum de  $100\mu\text{m}$ .

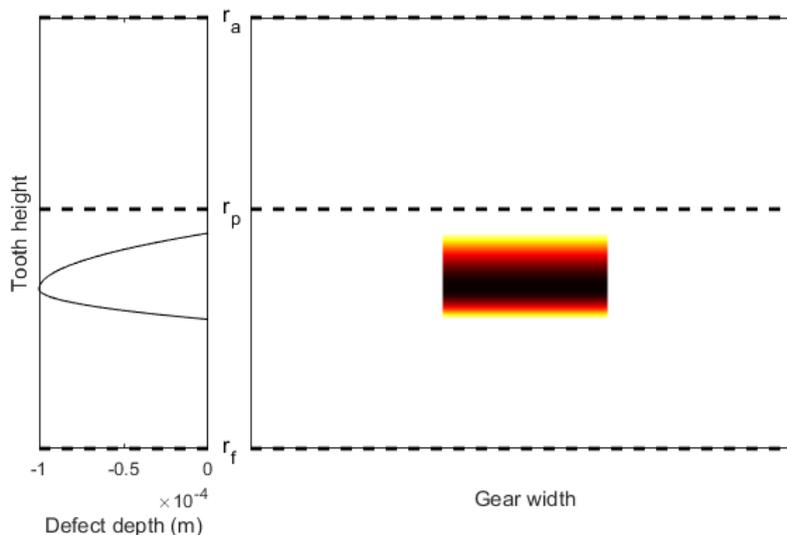


Figure 4-13 Géométrie du défaut d'écaillage étudié

Différentes simulations sont effectuées en localisant le défaut sur différents mobiles, les différentes configurations sont données dans le tableau 4-18.

Configuration	Support de l'erreur
a	Satellite n°1, flanc en contact avec la couronne
b	Satellite n°1, flanc en contact avec le planétaire
c	Couronne
d	Planétaire

Tableau 4-18 Position du défaut d'écaillage dans différentes configurations

#### 4.2.4.1 Signaux d'erreurs de transmission

Les erreurs de transmission générées par une erreur d'écaillage sont étudiées dans ce paragraphe. La figure 4-14 présente le spectre des erreurs de transmission globales pour un cas de référence en absence d'erreurs d'écaillage. La figure 4-15 présente les spectres des erreurs de transmission globales des simulations a) à d). L'abscisse est adimensionnée par la fréquence de rotation du porte-satellites, de telle sorte que la fréquence d'engrènement apparait à l'ordre 96 correspondant au nombre de dents de la couronne. En comparant la figure 4-14 avec la figure 4-15, il apparait une nouvelle famille d'harmoniques dues à la présence de l'erreur d'écaillage, dont l'ordre dépend du mobile supportant l'erreur. Les ordres d'apparition de l'erreur pour les différentes configurations sont donnés dans le tableau 4-19.

Configuration	Ordre d'apparition du défaut	
a, b	$8/3$	$= Z_r/Z_p$
c	3	$= N_p$
d	12	$= N_p Z_r/Z_s$

Tableau 4-19 Fréquence d'apparition du défaut dans les erreurs de transmission globales

On constate également que cette famille d'harmoniques liée au défaut d'écaillage forme des lobes sur le spectre des erreurs de transmission. Cette forme de lobe est liée à la géométrie du défaut, et peut être expliquée par le fait que la transformée de Fourier d'une fonction porte, représentatif d'une erreur d'écaillage, est une fonction sinus cardinal. L'étendue des lobes sur le spectre est ainsi reliée à la dimension de l'écaillage sur le plan de base :

$$\begin{aligned} \text{si } h \geq \tan \beta_b w : h &= \frac{Z_r}{l_{lobe}} \frac{p_{bn}}{\cos \beta_b} \\ \text{si } h \leq \tan \beta_b w : w &= \frac{Z_r}{l_{lobe}} \frac{p_{bn}}{\sin \beta_b} \end{aligned} \quad 4-4$$

Avec  $h$  et  $w$  hauteur et largeur du défaut d'écaillage dans le plan de base respectivement,  $l_{lobe}$  la taille en ordres des lobes, et  $p_{bn}$  le pas de base normal. Cette particularité offre la possibilité de surveiller l'évolution de l'étendue d'un défaut en surveillant l'évolution des lobes du spectre des erreurs de transmission.

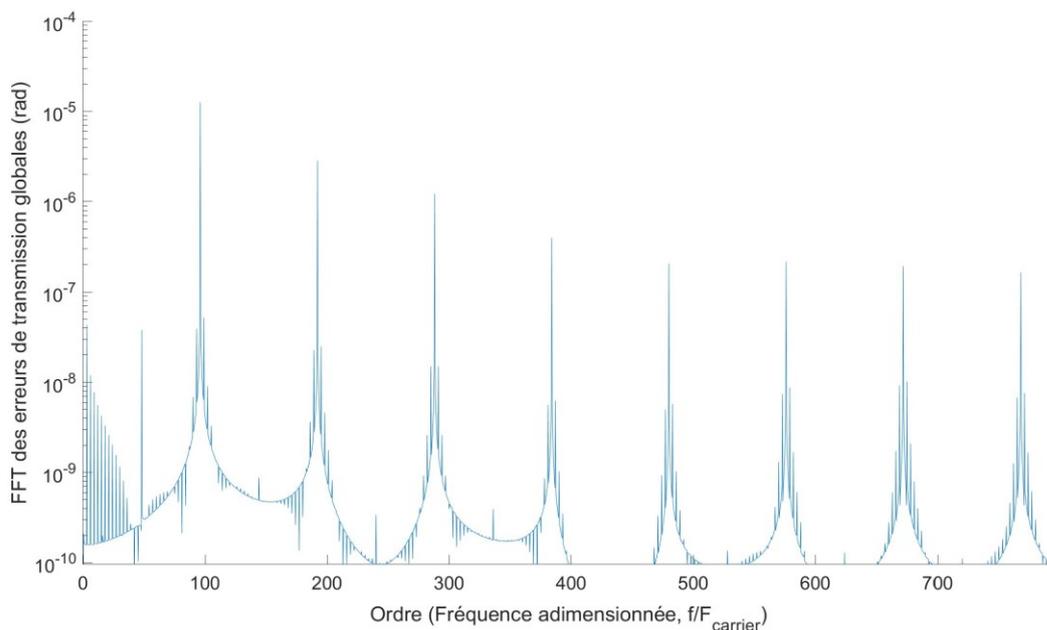


Figure 4-14 Spectre des erreurs de transmission globales d'une configuration de référence sans défaut

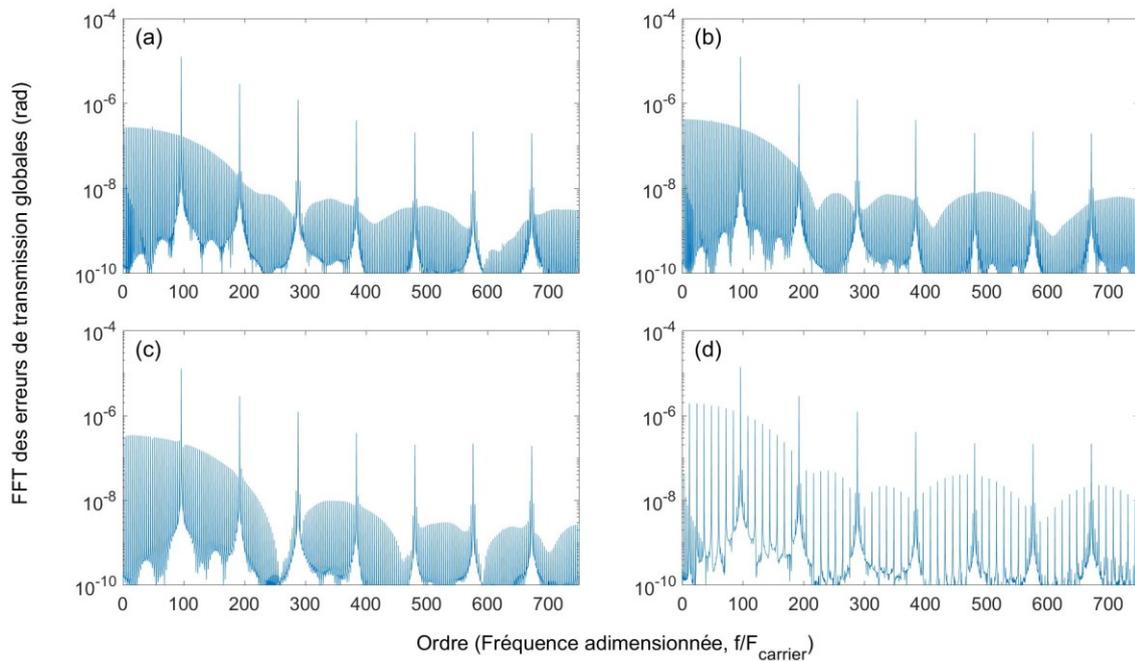


Figure 4-15 Spectres des erreurs de transmission globales des configurations a), b), c) et d)

#### 4.2.4.2 Signaux d'accélération radiale de la couronne

Les dispositifs de mesure des erreurs de transmission sont cependant souvent coûteux, nécessitant des codeurs angulaires haute fréquence précis dont l'acquisition en entrée et en sortie doit être synchronisée. Pour cette raison, ce paragraphe discute les possibilités de détection et de caractérisation d'un défaut d'écaillage par mesure des accélérations radiales de la couronne. Une transformée de Fourier du signal d'accélération ne permet cependant pas de révéler la présence du défaut, l'amplitude des accélérations causées par le défaut étant naturellement faibles, et répartis en un très grand nombre d'harmoniques. De plus le signal est mesuré sur un point fixe de la couronne, modulant fortement le possible signal de l'erreur. Le cepstre [128]–[131] des accélérations radiales permet cependant de s'affranchir de ces limitations et de correctement détecter le défaut et le mobile lui servant de support. Le cepstre est défini comme étant la transformée de Fourier inverse du logarithme de la transformée de Fourier du signal. Le cepstre conserve donc le signal dans le domaine temporel, cependant afin d'éviter toute confusion avec le signal temporel l'abscisse de ce signal est désigné comme étant une quéfrenc. Les principales propriétés du cepstre sont [130] :

- (1) Le cepstre comprend autant d'ensembles de pics que de mobiles, l'espacement des pics d'un ensemble correspondant à la période de rotation du mobile.
- (2) Les ensembles de pics sont uniquement dus aux périodicités du signal temporel.
- (3) L'amplitude d'un ensemble de pics augmente lorsque l'énergie émise par le mobile qui lui est associé augmente. L'amplitude du signal temporel n'affecte que l'amplitude du pic à l'origine du cepstre, à la quéfrenc 0.
- (4) La somme des premiers pics de chacun des ensembles de pics est constante, une augmentation d'amplitude d'un des pics amène donc à une diminution de l'amplitude des autres pics du cepstre.

Le cepstre des accélérations radiales de la couronne de la configuration de référence, sans erreur d'écaillage, est donné en figure 4-16 ; la figure 4-17 présente les cepstres des accélérations ra-

diales de la couronne des configurations a) à d). Les quéfrenes sont adimensionnées par la période d'engrènement de telle sorte que la quéfrence adimensionnée d'un pic corresponde au nombre de périodes d'engrènement séparant deux occurrences du phénomène à l'origine de ce pic. Les quéfrenes d'apparition du défaut pour les différentes configurations sont données dans le tableau 4-20, la figure 4-18 est focalisée sur les quéfrenes d'apparition du défaut.

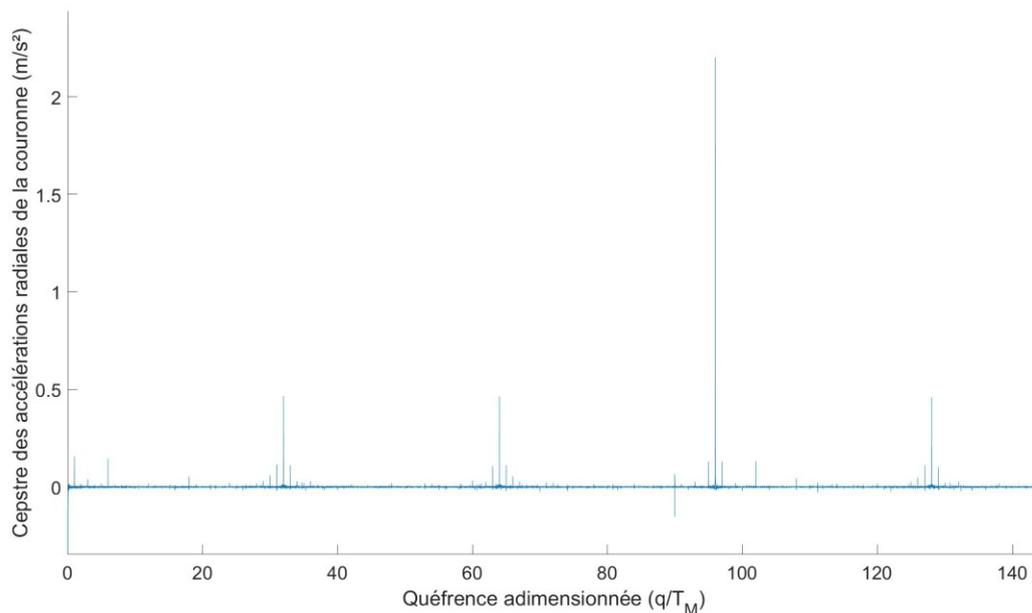


Figure 4-16 Cepstre des accélérations radiales de la couronne d'une configuration de référence sans défaut

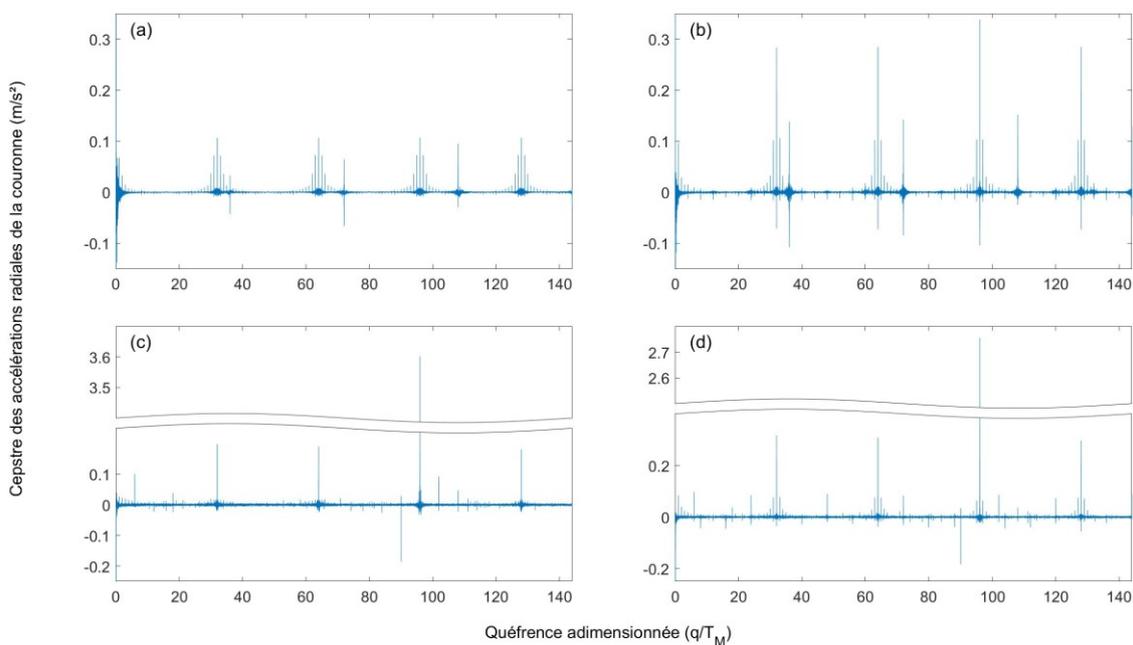


Figure 4-17 Cepstres des accélérations radiales de la couronne des configurations a), b), c) et d)

Configuration	Quéfrencé d'apparition du défaut $q/T_M$	
a, b	36	$= Z_p$
c	32	$= Z_r/N_p$
d	8	$= Z_s/N_p$

Tableau 4-20 Quéfrencé d'apparition du défaut dans les accélérations radiales de la couronne

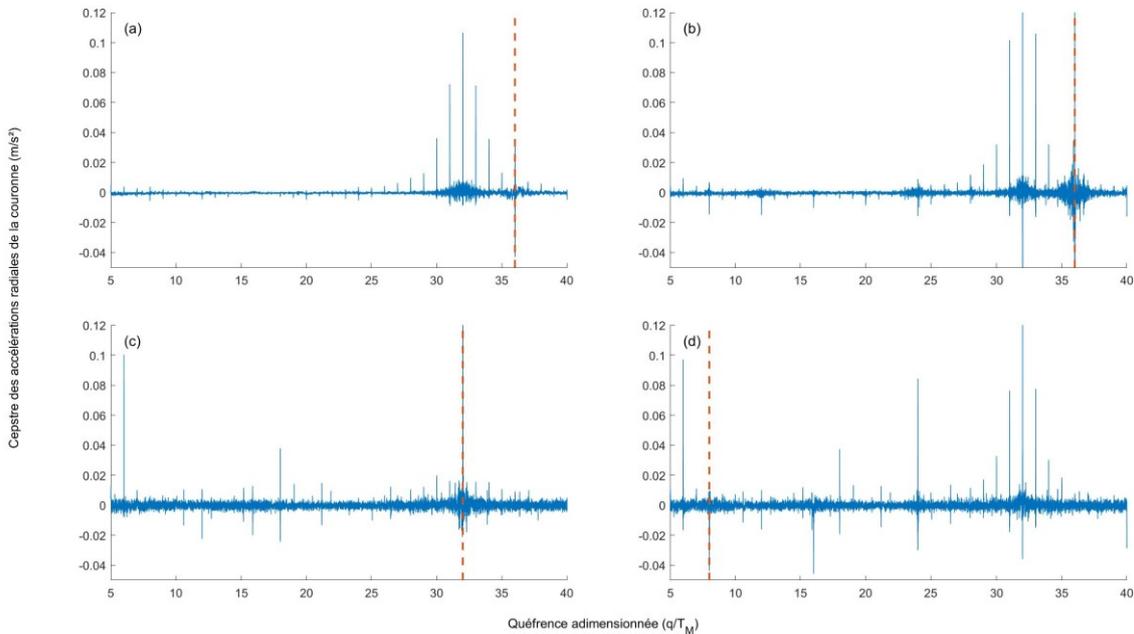


Figure 4-18 Cepstres des accélérations radiales de la couronne des configurations a), b), c) et d) à la quéfrencé d'apparition du défaut (- - Quéfrencé d'apparition du défaut)

Il est intéressant de noter que la quéfrencé 32 n'est pas seulement la quéfrencé d'apparition du défaut de la configuration c), mais également la quéfrencé de passage des satellites, apparaissant donc sur tous les cepstres de la figure 4-17 et de la figure 4-18. Cette coïncidence des quéfrences rend les défauts d'écaillage sur la couronne les moins facilement détectables, la seule différence entre les cepstres des accélérations radiales d'une couronne avec et sans un défaut d'écaillage étant l'amplitude de la quéfrencé 32 et de ses rhamoniques – désignant les pics secondaires d'un ensemble de pics du cepstre. La détection d'un défaut d'écaillage sur la couronne reste cependant possible en surveillant l'évolution relative des quéfrences 8, quéfrencé d'apparition d'un défaut d'écaillage du planétaire, et 96, la troisième rhamonique de la quéfrencé d'apparition d'un défaut d'écaillage de la couronne, et la quéfrencé la plus impactée par la présence de ce défaut. Un défaut d'écaillage sur la couronne peut être détecté dans le cas où l'amplitude du pic de la quéfrencé 96 augmente sans que celui de la quéfrencé 8 n'augmente.

La quéfrencé 96, correspondant à une rotation complète du porte-satellites, est dominante pour les configurations c) et d). Cela provient du fait que la quéfrencé 96 est un multiple entier de la quéfrencé d'apparition du défaut pour ces deux configurations, contrairement aux configurations a) et b). Le cepstre permet donc la détection du défaut et la détermination du mobile supportant le défaut à partir des signaux d'accélérations radiales de la couronne, alors que le spectre ne le permettait pas.

Pour toutes les configurations présentées, le défaut est placé de manière à être actif lorsque la dent n°4 de la couronne engrène avec satellite n°1 par convention, et les signaux d'accélération présentés sont calculés au nœud lié à la dent n°4 de la couronne. Cette position de calcul des accélérations peut sembler idéale pour maximiser les chances de détection du défaut, la figure 4-19 révèle qu'il s'agit d'une position de mesure des accélérations présentant une sensibilité à la présence du défaut plutôt moyenne. La figure 4-19 présente l'amplitude de la quéfrence d'apparition du défaut en fonction de la position angulaire du point de calcul des accélérations radiales sur la couronne. La totalité des nœuds du modèle de couronne flexible sont donc parcourus et l'amplitude de la quéfrence d'apparition du défaut sur le cepstre des accélérations relevées en chacun de ces nœuds est retranscrite sur ce graphique, qui peut donc être interprété comme une mesure de la position la plus favorable à la détection du défaut par le cepstre des accélérations radiales.

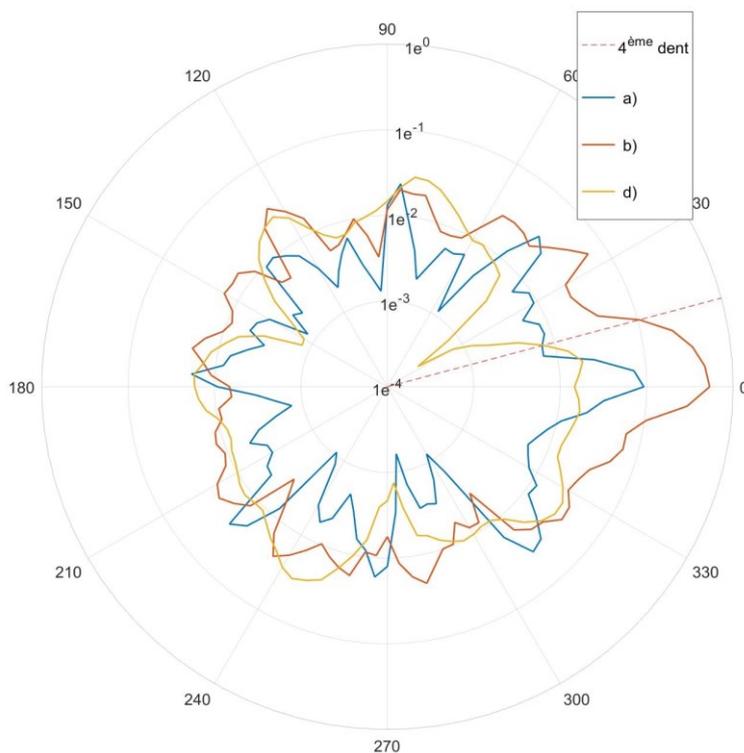


Figure 4-19 Amplitude ( $m/s^2$ ) de la quéfrence d'apparition du défaut (cas a) et b) :  $q=36$ , cas d) :  $q=8$ ) en fonction de la position angulaire sur la couronne du point de calcul des accélérations radiales ( $^\circ$ )

On observe une périodicité des courbes de la figure 4-19, liés aux nombre de supports de la couronne flexible, au nombre et à la répartition angulaire des satellites, et à la fréquence d'apparition du défaut dans les différentes fenêtres d'engrènement des plans d'actions du système se traduisant en différentes positions angulaires sur le pourtour de la couronne, les vibrations se propageant simultanément à travers les engrènements, et donc les satellites, et la couronne. La configuration c) est exclue de la figure 4-19 car l'amplitude de la quéfrence d'apparition du défaut ne peut être directement utilisée pour détecter la présence du défaut, comme souligné précédemment.

Bien que les courbes de la figure 4-19 présentent des maximums et des minimums, leur nombre et répartition angulaire sur la couronne dépendent également de la géométrie exacte du défaut, difficilement prédictible dans des applications réelles. Aucune conclusion générale ne peut donc être tirée quant aux positions angulaires des accéléromètres maximisant l'amplitude des quéfrences d'apparition du défaut.

## 4.3 SYSTEME COMPLET

Dans cette sous-partie le système complet, illustré en figure 2-17, est étudié. L'entrée de puissance se fait sur l'arbre traversant du couple d'engrenages, l'arbre intermédiaire assure le couplage entre le train épicycloïdal et le couple d'engrenages spiroconiques. La denture du train épicycloïdal comme du couple d'engrenages spiroconiques est inchangée, les paramètres de denture principaux sont donnés dans le tableau 4-1 pour le couple d'engrenages spiroconiques et dans le tableau 4-9 pour le train épicycloïdal.

### 4.3.1 Etude modale

Le comportement modal du système complet est étudié dans cette sous-partie. Les 38 premières fréquences propres du système illustré en figure 2-17, ainsi que les pourcentages d'énergie modale conservés dans différents sous-système, soient l'arbre traversant, la denture du couple d'engrenages spiroconiques, l'arbre intermédiaire, la denture du train épicycloïdal, et l'arbre de sortie, sont données dans le tableau 4-21 pour le sens de rotation horaire, et dans le tableau 4-22 pour le sens de rotation trigonométrique. L'arbre de sortie inclus le porte-satellites, et par conséquent les axes des satellites et leurs roulements à aiguilles ; la denture du train épicycloïdal inclus la couronne flexible.

Numéro du mode propre	Fréquence propre (Hz)	Pourcentage d'énergie modale				
		Arbre traversant	Denture spiroconique	Arbre intermédiaire	Denture du train épicycloïdal	Arbre de sortie
1	7.96	0.0%	0.0%	52.0%	0.2%	47.8%
2	7.96	0.0%	0.0%	52.0%	0.2%	47.8%
3	7.96	0.0%	0.0%	50.0%	0.2%	49.7%
4	174.60	0.5%	0.5%	5.2%	1.8%	92.0%
5	546.42	0.0%	0.0%	89.5%	0.1%	10.4%
6	550.86	0.0%	0.0%	88.3%	0.2%	11.5%
7	685.85	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	100.0%
8	1144.24	1.8%	0.3%	97.0%	0.5%	0.5%
9	1328.62	0.0%	0.0%	99.5%	0.3%	0.2%
10	1368.03	2.3%	0.2%	91.7%	2.7%	3.2%
11	1609.37	62.9%	0.6%	36.2%	0.1%	0.1%
12	1633.53	0.2%	0.0%	93.7%	2.4%	3.7%
13	1637.32	23.5%	0.1%	70.5%	2.1%	3.7%
14	1655.04	68.7%	0.3%	28.9%	1.3%	0.9%
15	1687.69	46.7%	0.1%	40.3%	1.4%	11.5%
16	1692.30	5.8%	0.0%	77.7%	1.8%	14.7%

17	1694.21	45.6%	0.0%	36.3%	1.5%	16.5%
18	1883.84	3.2%	0.1%	96.1%	0.2%	0.4%
19	2423.00	0.1%	0.0%	0.2%	0.3%	99.5%
20	2424.77	0.0%	0.0%	0.3%	0.3%	99.5%
21	2665.90	16.6%	13.1%	13.3%	7.3%	49.7%
22	2680.12	0.0%	0.0%	6.7%	10.3%	83.0%
23	2770.32	18.7%	15.8%	49.1%	9.8%	6.6%
24	3032.36	1.0%	0.7%	2.1%	0.1%	96.1%
25	3035.65	0.0%	0.0%	0.1%	0.1%	99.8%
26	3126.70	32.8%	19.8%	44.8%	0.6%	1.9%
27	3197.84	0.0%	0.0%	41.2%	15.4%	43.4%
28	3214.28	50.6%	18.2%	22.4%	1.4%	7.4%
29	3279.87	98.9%	0.4%	0.7%	0.0%	0.0%
30	3844.49	17.9%	0.1%	81.4%	0.4%	0.2%
31	3859.69	0.1%	0.0%	99.1%	0.5%	0.2%
32	4271.06	62.8%	23.8%	12.9%	0.3%	0.1%
33	5501.89	0.0%	0.0%	0.0%	42.9%	57.1%
34	5610.75	0.0%	0.0%	0.0%	98.5%	1.5%
35	5832.61	0.5%	0.1%	0.9%	1.0%	97.6%
36	6300.10	83.7%	0.4%	8.8%	5.5%	1.7%
37	6448.98	100.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
38	6596.47	50.9%	7.6%	24.3%	15.9%	1.4%

Tableau 4-21 Fréquences et pourcentages d'énergies modales des modes propres du système complet en sens de rotation horaire

Numéro du mode propre	Fréquence propre (Hz)	Pourcentage d'énergie modale				
		Arbre transversant	Denture spirocyclique	Arbre intermédiaire	Denture train épicycloïdal	Arbre de sortie
1	7.96	0.0%	0.0%	81.9%	0.2%	17.9%
2	7.96	0.0%	0.0%	81.9%	0.2%	17.9%
3	7.96	0.0%	0.0%	82.3%	0.2%	17.5%
4	174.80	0.2%	0.5%	6.3%	1.7%	91.2%
5	538.92	0.0%	0.0%	90.9%	0.1%	9.0%
6	540.75	0.0%	0.0%	90.7%	0.1%	9.2%

7	685.16	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	100.0%
8	1179.60	0.5%	0.2%	98.3%	0.5%	0.5%
9	1325.75	0.0%	0.0%	99.5%	0.3%	0.2%
10	1382.01	0.4%	0.1%	93.3%	2.9%	3.3%
11	1629.10	25.0%	0.6%	69.2%	1.4%	3.8%
12	1633.06	1.9%	0.1%	91.1%	3.3%	3.7%
13	1636.64	49.7%	0.9%	46.1%	1.9%	1.3%
14	1672.57	52.2%	0.4%	46.9%	0.2%	0.3%
15	1684.07	47.0%	0.2%	51.8%	0.4%	0.6%
16	1688.00	2.4%	0.0%	84.5%	1.5%	11.6%
17	1694.54	47.3%	0.1%	50.0%	0.5%	2.1%
18	1719.58	92.5%	0.0%	7.2%	0.1%	0.1%
19	2420.42	0.0%	0.1%	0.1%	0.2%	99.5%
20	2424.31	0.0%	0.0%	0.4%	0.3%	99.3%
21	2649.20	8.8%	14.7%	46.8%	4.4%	25.3%
22	2682.93	0.0%	0.0%	13.3%	9.5%	77.2%
23	2770.84	7.2%	11.4%	64.9%	8.7%	7.7%
24	3029.16	0.8%	1.0%	5.8%	0.1%	92.4%
25	3035.57	0.0%	0.0%	0.1%	0.1%	99.8%
26	3136.47	11.7%	13.4%	72.2%	0.6%	2.1%
27	3198.13	0.0%	0.0%	37.7%	16.1%	46.2%
28	3245.46	14.8%	14.8%	66.0%	0.5%	3.9%
29	3687.22	99.7%	0.0%	0.3%	0.0%	0.0%
30	3795.09	0.0%	0.0%	99.2%	0.4%	0.3%
31	3955.06	44.7%	2.0%	52.8%	0.4%	0.1%
32	4047.11	99.5%	0.1%	0.4%	0.0%	0.0%
33	4165.55	71.1%	8.1%	20.4%	0.3%	0.1%
34	5503.34	0.0%	0.0%	0.0%	42.9%	57.1%
35	5577.74	77.6%	12.2%	5.0%	2.0%	3.2%
36	5610.67	0.9%	0.2%	0.0%	97.9%	1.0%
37	5848.27	3.8%	1.4%	0.2%	0.3%	94.3%
38	6644.13	12.1%	16.8%	41.7%	27.5%	2.0%

Tableau 4-22 Fréquences et pourcentages d'énergies modales des modes propres du système complet en sens de rotation trigonométrique

Les trois premiers modes de satellites constatés sur le train épicycloïdal sont logiquement également présents ici, à la même fréquence propre et pour les deux sens de rotation. Aucune des autres fréquences propres du train épicycloïdal seul ou du couple d'engrenages spiroconiques seul ne se retrouvent ici. Certains modes propres restent cependant proches, c'est notamment le cas du mode 7 pour le train épicycloïdal et le système complet, qui est un mode de déplacement axial de l'arbre de sortie pour ces deux systèmes.

L'arbre intermédiaire apparaît être un composant clef du comportement modal du système, la moyenne du pourcentage d'énergie modale conservée dans ce sous-système pour les 38 modes étant d'environ 40%, alors que l'arbre d'entrée du train épicycloïdal seul ne comptait que pour 30% de l'énergie modale en moyenne pour un système ne comportant que 3 sous-systèmes. L'arbre intermédiaire étant sollicité par les engrènements des satellites avec le planétaire d'une part et par l'engrènement du couple d'engrenages spiroconiques de l'autre part, une très grande majorité des modes propres du système, 23 sur 38 en sens de rotation horaire et 24 sur 38 en sens de rotation trigonométrique, viennent le solliciter en flexion. C'est notamment le cas du mode 8 pour les deux sens de rotation, dont la déformée modale est représentée en figure 4-20.

La classification des modes propres présentée par Eritenel et Parker [77] et utilisée au paragraphe 4.2.1 n'est plus valable pour le système complet, très peu de modes présentent une multiplicité de 2 et un certain nombre de modes présentent des caractéristiques des modes de type R-A et de type T-T simultanément, c'est notamment le cas du mode 18 en sens de rotation horaire et du mode 14 en sens de rotation trigonométrique, représentés en figure 4-21, combinant notamment une translation axiale et une flexion de l'arbre intermédiaire. Des modes de type PR restent cependant existants, le mode 34 en sens de rotation horaire et 36 en sens de rotation trigonométrique en font partie et interviennent à une fréquence identique pour les deux sens de rotation ; leur déformée modale est représentée en figure 4-22.

La différence de comportement entre les deux sens de rotation se révèle être similaire à celle du train épicycloïdal seul. En comparant les modes propres du train épicycloïdal seul entre les deux sens de rotation, il apparaît que 18 des 30 modes propres étudiés, soit 60%, sont communs d'un sens de rotation à l'autre, avec des déformées modales similaires et des fréquences propres différentes de moins de 0.5% ; 22 des 38 modes propres étudiés du système complet, soit environ 58%, répondent aux mêmes critères alors qu'aucun des modes propres du couple d'engrenages spiroconiques seul n'y répondent.

Enfin, on constate que les modes propres sollicitant la denture des engrenages spiroconiques, tels que les modes 21 et 23, tendent à solliciter la totalité des sous-systèmes, illustrant l'influence du couple d'engrenages spiroconiques sur le système complet. Les modes dont l'énergie modale conservée dans l'engrènement du couple d'engrenages spiroconiques est supérieure à 3% font intervenir l'engrènement du train épicycloïdal ou l'arbre de sortie à plus de 3% dans 70% des cas. En comparaison, les modes dont l'énergie modale conservée dans l'engrènement du train épicycloïdal est supérieure à 3% ne font intervenir l'engrènement du couple d'engrenages spiroconiques ou l'arbre traversant à plus de 3% que dans 44% des cas. La déformée modale du mode 23 est représentée en figure 4-23.

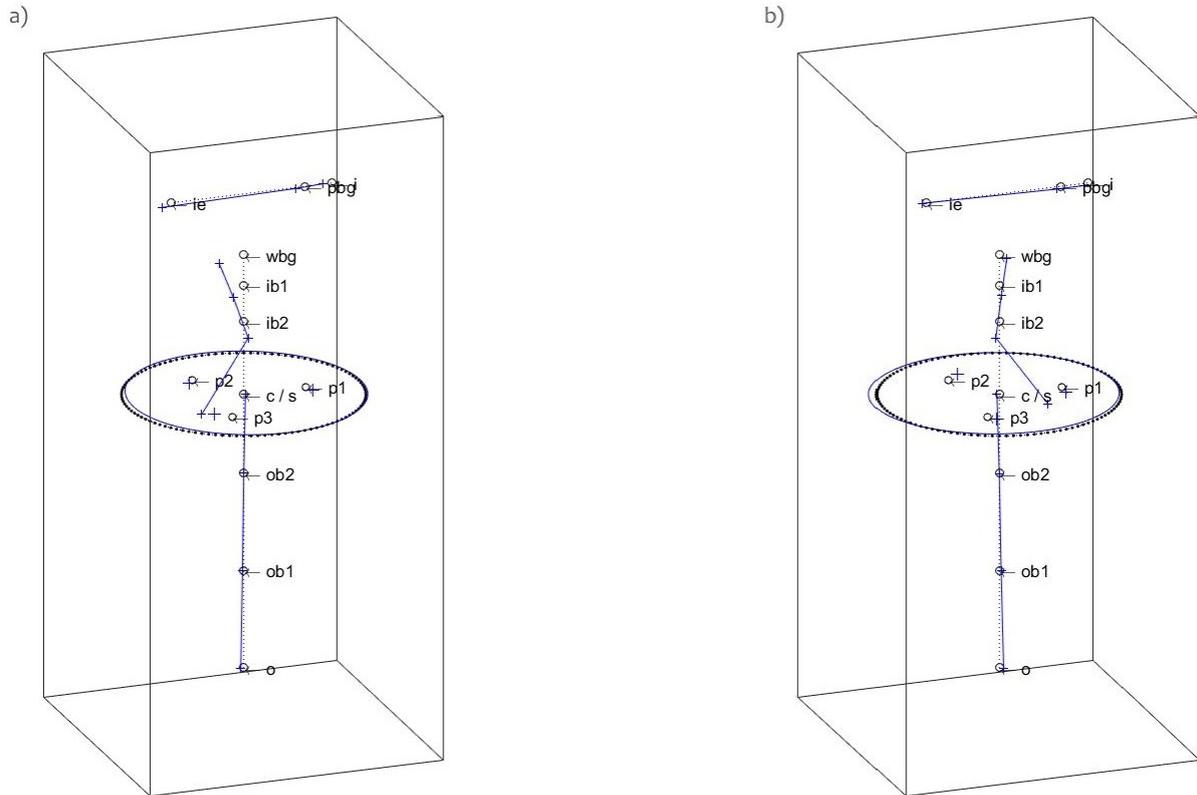


Figure 4-20 Déformées modales du mode 5 en sens de rotation a) horaire et b) trigonométrique.  
 Légende :  $\circ$  - position nominale des nœuds,  $+$  - position déformée des nœuds,  $i$  : nœud d'entrée et du premier roulement de l'arbre traversant,  $pbj$  : nœud du pignon spiroconique,  $ie$  : nœud du second roulement de l'arbre traversant,  $wbg$  : nœud de la roue spiroconique,  $ib1$ ,  $ib2$  : nœuds des roulements de l'arbre intermédiaire,  $c/s$  : nœuds du porte-satellites et du planétaire (deux nœuds différents mais géométriquement superposés),  $ob1$ ,  $ob2$  : nœuds des roulements de l'arbre de sortie,  $o$  : nœud de sortie,  $p1$ ,  $p2$ ,  $p3$  : nœuds des satellites

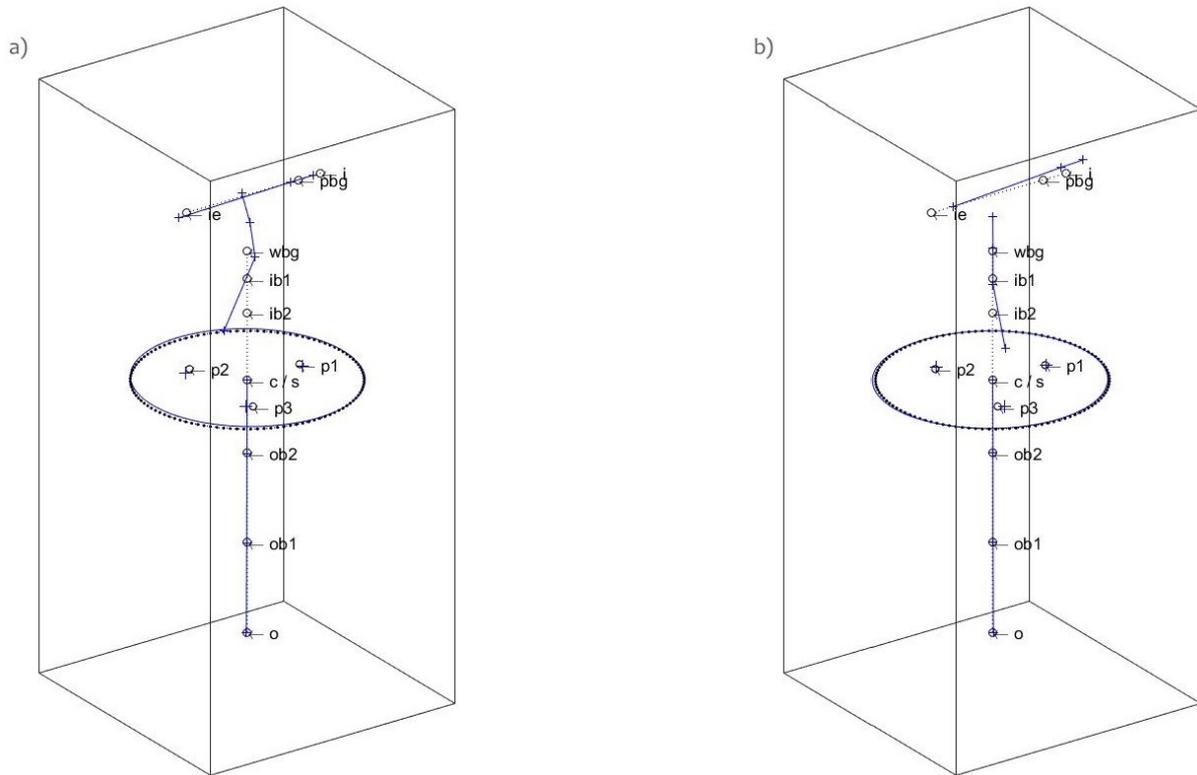


Figure 4-21 Déformées modales du mode a) 18 en sens de rotation horaire et b) 14 en sens de rotation trigonométrique, faisant intervenir des comportements de modes de type R-A et de type T-T simultanément. Une légende détaillée de cette représentation est donnée en figure 4-20

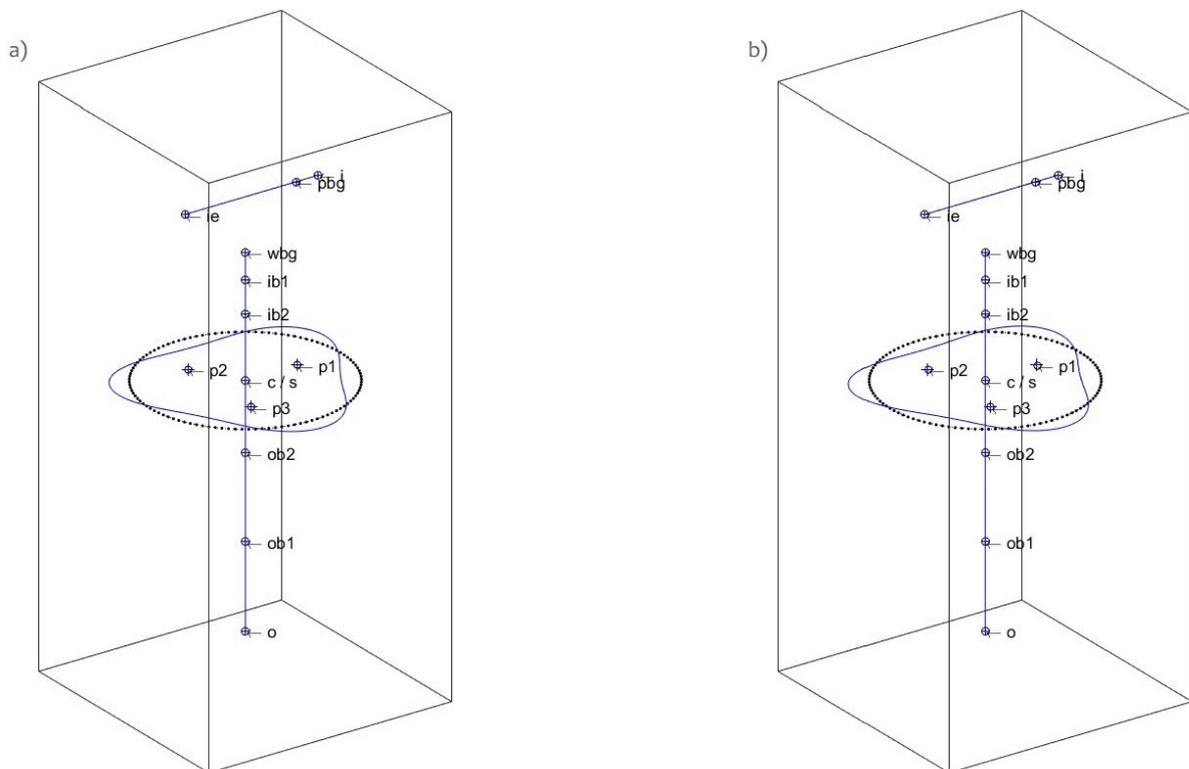


Figure 4-22 Déformées modales a) du mode 34 en sens de rotation horaire et b) du mode 36 en sens de rotation trigonométrique, de types PR. Une légende détaillée de cette représentation est donnée en figure 4-20

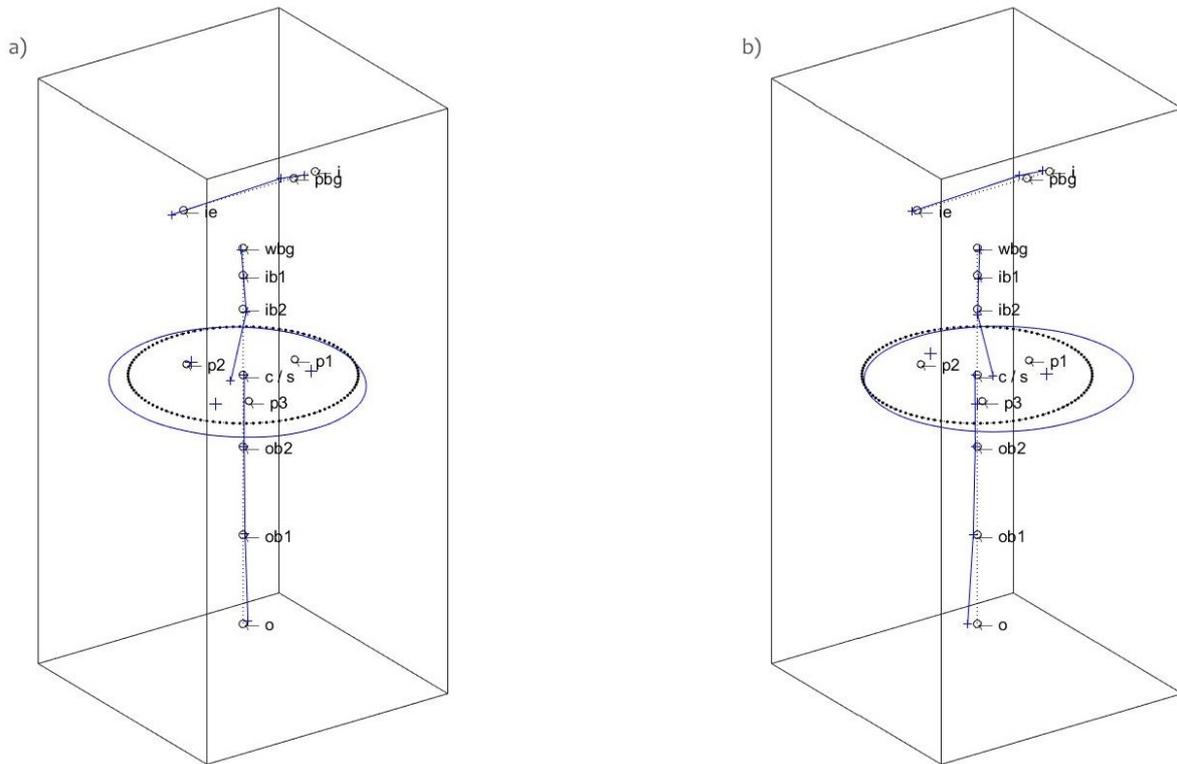


Figure 4-23 Déformées modales du mode 23 en sens de rotation a) horaire et b) trigonométrique, une légende détaillée de cette représentation est donnée en figure 4-20

### 4.3.2 Comportement dynamique

Cette sous-partie s'intéresse au comportement dynamique du système complet. A cette fin, une série de simulations a été effectuée couvrant une plage de vitesse allant de 100rpm à 6000rpm, avec un pas de 100rpm, pour un couple d'entrée fixé à 200Nm. Les indicateurs définis au paragraphe 4.1.2, le coefficient de surcharge dynamique  $DC$  et le coefficient d'erreur de transmission  $TEC$ , sont réutilisés ici :

Le coefficient de surcharge dynamique du couple d'engrenages spiroconiques est défini comme la valeur maximale du rapport entre l'effort dynamique vu par l'engrènement du couple d'engrenages spiroconiques du système complet et l'effort quasi-statique vu par l'engrènement du couple d'engrenages spiroconiques seul. Le coefficient de surcharge dynamique des engrènements extérieurs et intérieurs du train épicycloïdal dans le système complet sont définis par rapport aux efforts quasi-statiques des engrènements du train épicycloïdal seul.

De manière similaire :

- (1) Pour l'engrènement du couple d'engrenages spiroconiques, les erreurs de transmission sont mesurées entre les nœuds du pignon et de la roue spiroconiques, et le coefficient d'erreurs de transmission est défini par rapport aux erreurs de transmission quasi-statique de l'engrènement du couple d'engrenages spiroconiques seul.
- (2) Pour l'engrènement du train épicycloïdal, les erreurs de transmission sont mesurées entre les nœuds du planétaire et du porte-satellites, et le coefficient d'erreurs de transmission est défini par rapport aux erreurs de transmission quasi-statique des engrènements du train épicycloïdal seul.

- (3) Pour le système complet, les erreurs de transmission sont mesurées entre les nœuds d'entrée et de sortie, et le coefficient d'erreurs de transmission est défini par rapport aux erreurs de transmission quasi-statique du train épicycloïdal seul prises entre les nœuds d'entrée et de sortie.

L'évolution du coefficient de surcharge dynamique en fonction de la vitesse de rotation est donnée en figure 4-24, et l'évolution du coefficient d'erreurs de transmission en fonction de la vitesse de rotation est donnée en figure 4-25.

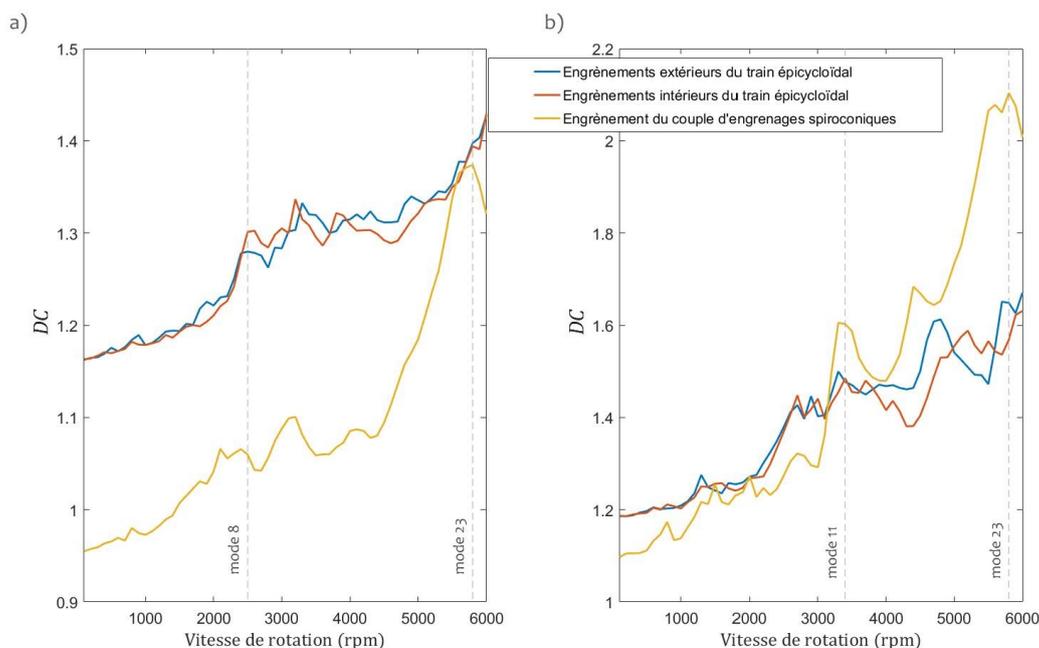


Figure 4-24 Evolution du coefficient de surcharge dynamique DC dans le sens de rotation a) horaire et b) trigonométrique, pour les engrenements extérieurs (planétaire/satellites) et les engrenements intérieurs (satellites/couronne) du train épicycloïdal, et l'engrenement du couple d'engrenages spiroconiques

On constate que le coefficient de surcharge dynamique des engrenements du train épicycloïdal est 15 à 20% plus élevé pour le système complet que pour le train épicycloïdal seul à 100rpm. Le coefficient de surcharge dynamique maximal sur la plage de vitesse étudiée est pour le train épicycloïdal seul d'environ 1.17 pour les deux sens de rotation, au sein du système complet le coefficient de surcharge est sensiblement plus élevé, avec une valeur maximale atteignant environ 1.43 en sens de rotation horaire et 1.67 en sens de rotation trigonométrique.

En comparant le coefficient de surcharge dynamique de l'engrenement du couple d'engrenages spiroconiques seul ou au sein du système complet, on constate qu'il diminue légèrement à basse vitesse en sens de rotation horaire. Il atteint cependant une valeur de 1.43, supérieure à la valeur maximale de 1.35 du système comprenant le couple d'engrenages spiroconiques seul alors que la plage de vitesse balayée est plus faible. En sens de rotation trigonométrique, le coefficient de surcharge dynamique de l'engrenement du couple d'engrenages spiroconique au sein du système complet est supérieur sur la totalité de la plage de vitesse à celui du couple d'engrenages spiroconiques seul. Il atteint une valeur maximale de 1.95 significativement supérieure à la valeur maximale de 1.69 constatée pour le couple d'engrenages spiroconiques seul dans le même sens de rotation. L'intégration du couple d'engrenages spiroconiques dans le système complet amène donc à une forte dissymétrie du coefficient de surcharge dynamique entre les deux sens de rotation, le

sens de rotation horaire étant significativement plus avantageux que le sens de rotation trigonométrique.

Un pic important du coefficient de surcharge dynamique de l'engrènement du couple d'engrenages spiroconiques apparaît aux alentours de 5800rpm pour les deux sens de rotation. En sens de rotation trigonométrique, deux autres pics sont discernables à 3300rpm et 4400rpm, en sens de rotation horaire un léger pic est visible à 3200rpm. Le coefficient de surcharge dynamique des engrènements du train épicycloïdal ne présente pas de pic aussi important que pour le couple d'engrenages spiroconiques, augmentant en suivant une tendance linéaire sur la plage de vitesse étudiée.

Le coefficient d'erreurs de transmission, donné en figure 4-25, évolue de manière plus complexe avec la vitesse de rotation. En sens de rotation horaire, on constate un premier pic des erreurs de transmission globales à 2400rpm correspondant à un pic des erreurs de transmission du couple d'engrenages spiroconiques. Les erreurs de transmission du couple d'engrenages spiroconiques présentent un second pic à 3400rpm, qui n'a cependant pas de répercussion sur les erreurs de transmission globales. Les erreurs de transmission globales présentent d'ailleurs un minimum à 3100rpm. Un second pic des erreurs de transmission globales apparaît à 3900rpm, superposé à un pic des erreurs de transmission du train épicycloïdal. Enfin, un troisième pic des erreurs de transmission globales est présent à 5900rpm, correspondant à un pic des erreurs de transmission du couple d'engrenages spiroconiques.

En sens de rotation trigonométrique, un faible premier pic des erreurs de transmission du train épicycloïdal apparaît à 1500rpm, sans impact sur les erreurs de transmission globales. Le premier pic des erreurs de transmission globales apparaît à 2500rpm, coïncidant avec un pic des erreurs de transmission du couple d'engrenages spiroconiques. Comme pour le sens de rotation trigonométrique, un second pic des erreurs de transmission du couple d'engrenages spiroconiques est présent à 3400rpm, sans impact sur les erreurs de transmission globales. Les erreurs de transmission globales présentent un minimum à 3100rpm, puis un second pic à 4000rpm correspondant à un pic des erreurs de transmission du train épicycloïdal. Enfin, on constate un pic des erreurs de transmission du couple d'engrenages spiroconiques à 5600rpm coïncidant avec un léger pic des erreurs de transmission du train épicycloïdal, et suivi à 5900rpm d'un pic des erreurs de transmission globales.

Enfin, on constate que les erreurs de transmission du train épicycloïdal au sein du système complet sont, à basse vitesse, plus faibles que lorsque le train épicycloïdal est seul d'environ 10% en sens de rotation horaire, et plus élevées que lorsque le train épicycloïdal est seul d'environ 26% en sens de rotation trigonométrique. Les erreurs de transmission du couple d'engrenages spiroconiques suivent la même tendance, elles sont 10% plus faibles lorsque le couple d'engrenages spiroconiques est au sein du système complet que seul en sens horaire, et 58% plus élevées lorsque le couple d'engrenages spiroconiques est au sein du système complet que seul en sens trigonométrique. Le sens de rotation trigonométrique est donc plus défavorable que le sens de rotation horaire, pour le coefficient de surcharge dynamique comme pour le coefficient d'erreurs de transmission.

Le pic constaté sur la courbe du coefficient d'erreurs de transmission à 2500rpm correspond au mode propre 8 dans les deux sens de rotation, à cette vitesse de rotation la fréquence d'engrènement du couple d'engrenages spiroconiques est de 1167Hz, proche des fréquences propres de 1144Hz et 1180Hz de ce mode en sens de rotation horaire et trigonométrique respectivement. Ce mode propre est un mode de flexion de l'arbre intermédiaire, excité périodiquement par l'engrènement du couple d'engrenages spiroconiques. Cette flexion périodique de l'arbre intermédiaire vient périodiquement augmenter les erreurs de transmission du couple d'engrenages spiroconiques, expliquant la superposition de ce pic du coefficient des erreurs de transmission globales

avec un pic du coefficient des erreurs de transmission de l'engrènement du couple d'engrenages spiroconique.

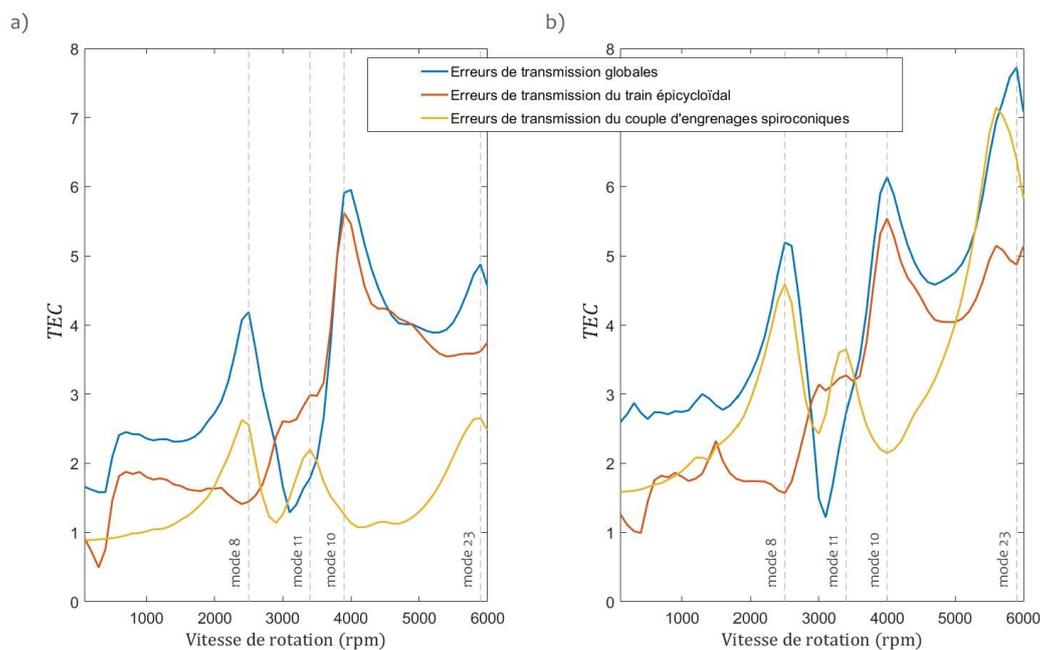


Figure 4-25 Evolution du coefficient d'erreurs de transmission  $TEC$  dans le sens de rotation a) horaire et b) trigonométrique, pour le système global, pour les engrènements du train épicycloïdal uniquement et pour l'engrènement du couple d'engrenages spiroconiques

Le minimum du coefficient des erreurs de transmission est atteint pour une vitesse de rotation de 3100rpm, dans les deux sens de rotation. A cette vitesse, les erreurs de transmission du train épicycloïdal présentent une composante à la fréquence d'engrènement du couple d'engrenages spiroconiques, ce dernier excitant la totalité du système. Cependant la composante à la fréquence d'engrènement du couple d'engrenages spiroconiques des erreurs de transmission du couple d'engrenages spiroconiques et de celles du train épicycloïdal se retrouvent en opposition de phase, résultant en une erreur de transmission globale ne comportant plus de composante à la fréquence d'engrènement du couple d'engrenages spiroconiques. On obtient donc une plage de vitesse autour de 3100rpm, correspondant à une plage de déphasage des erreurs de transmission du couple d'engrenages spiroconiques et du train épicycloïdal, pour laquelle le coefficient d'erreur de transmission globale est inférieur aux coefficients d'erreurs de transmission individuels du train épicycloïdal et du couple d'engrenages spiroconiques.

Le pic du coefficient d'erreurs de transmission du couple d'engrenages spiroconiques présent à 3400rpm correspond au 11<sup>ème</sup> mode propre du système complet, pour les deux sens de rotation. Ce mode propre est un mode de basculement de l'arbre traversant et de flexion de l'arbre intermédiaire, excité par l'engrènement du couple d'engrenages spiroconiques. A la différence du 8<sup>ème</sup> mode propre cependant les déplacements radiaux du planétaire comme du porte-satellites sont réduits, et le phénomène de déphasage des erreurs de transmission mentionné au paragraphe précédent a toujours à cette vitesse une influence non négligeable. Ce mode propre n'a donc pas ou peu d'influence sur les erreurs de transmission globales.

Le second pic du coefficient d'erreurs de transmission globales à 3900rpm et 4000rpm, pour le sens de rotation horaire et trigonométrique respectivement, correspond au mode propre 10, excité par l'engrènement du train épicycloïdal. Ce mode propre sollicite en flexion l'arbre intermédiaire, en basculement l'arbre de sortie, ainsi que la denture du train épicycloïdal et la couronne flexible.

Enfin, le troisième pic du coefficient d'erreurs de transmission globales est dû au mode propre 23 pour les deux sens de rotation. Ce mode propre, dont la déformée modale est illustrée en figure 4-23, sollicite la totalité des sous-systèmes. En sens de rotation trigonométrique, un pic du coefficient des erreurs de transmission de l'engrènement du train épicycloïdal et du couple d'engrenages spiroconiques est présent à 5600rpm, soit légèrement plus tôt que le mode propre 23 à 5900rpm. Les erreurs de transmission du train épicycloïdal et du couple d'engrenages spiroconiques se comportent à 5600rpm de manière similaire, mais dans une moindre mesure, au minimum présent à 3100rpm, décalant ainsi le pic du coefficient d'erreurs de transmission globales avec ceux des engrènements du train épicycloïdal et du couple d'engrenages spiroconiques.

La répartition des pressions de contact sur le flanc de denture des engrenages spiroconiques est fortement impactée par la présence du train épicycloïdal. La figure 4-26 illustre la répartition des pressions de contact sur le flanc de denture du pignon spiroconique, en sens de rotation trigonométrique et à différentes vitesses de rotation, correspondant aux divers pics du coefficient de surcharge dynamique et du coefficient d'erreurs de transmission. A titre de comparaison, la répartition des pressions de contact sur le flanc de denture du pignon spiroconique en l'absence du train épicycloïdal est donnée en figure 4-6. La répartition des pressions de contact est globalement déplacée vers la tête de dent, la pression maximale auparavant de 1.0GPa atteint maintenant 1.1GPa à hautes vitesses. La surcharge constatée au dégagement, en tête de dent, est également plus importante. La présence du train épicycloïdal complexifie le comportement du couple d'engrenages spiroconiques, qui auparavant présentait un seul mode impactant de manière significative les répartitions de pression sur une plage de vitesse allant jusqu'à 8100rpm ; on constate pour le système complet quatre modes propres ayant une forte influence sur les répartitions de pression, pour une plage de vitesse allant uniquement jusqu'à 6000rpm.

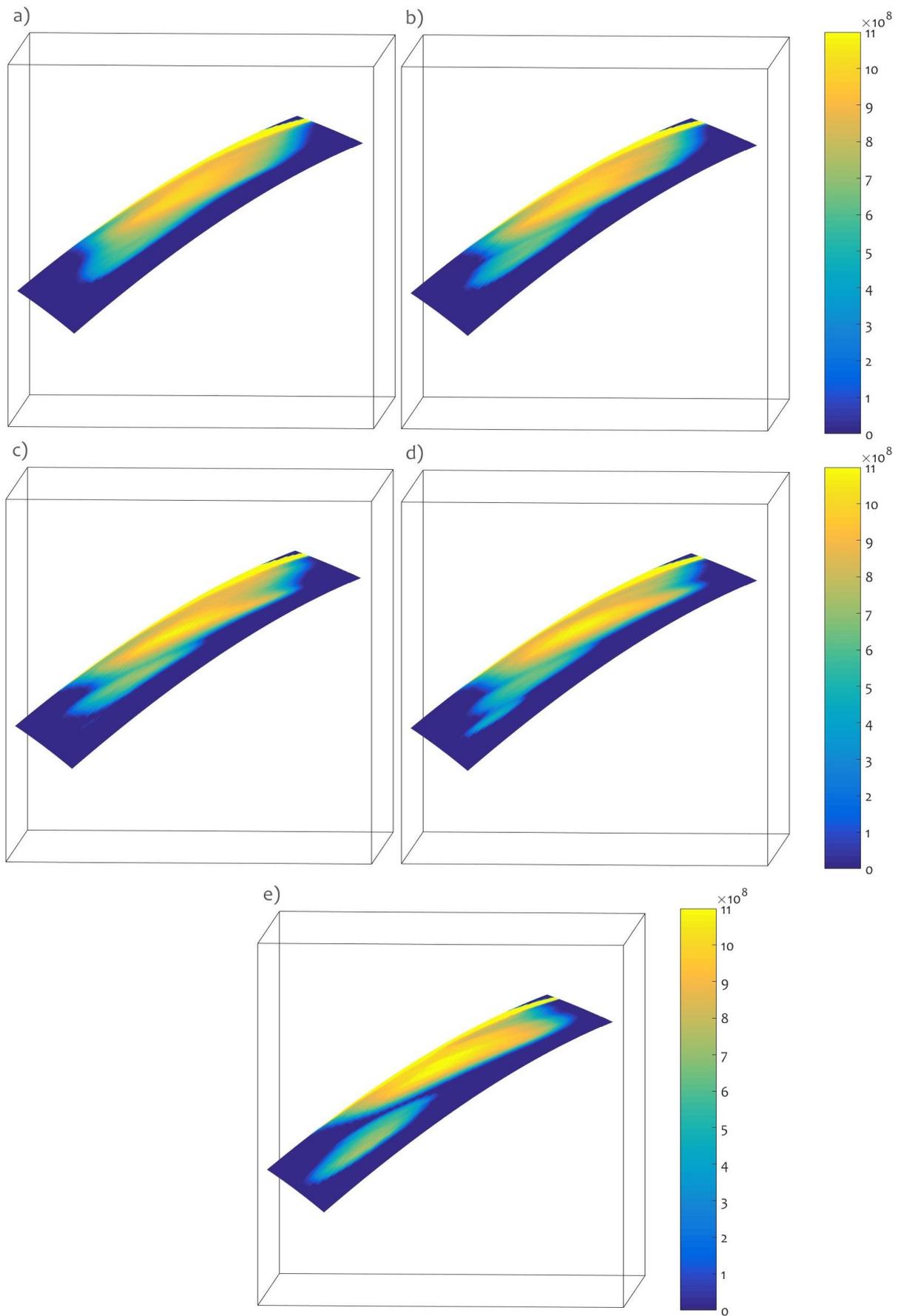


Figure 4-26 Répartition des pressions de contact (en Pascal) sur le flanc de denture du pignon spi-roconique à a) 100rpm, b) 250rpm, c) 330rpm, d) 440rpm et e) 560rpm en sens de rotation trigonométrique

### 4.3.3 Influence des erreurs d'assemblage

Ce paragraphe s'intéresse au comportement du système complet en présence de différentes erreurs d'assemblage du couple d'engrenages spiroconiques. Dans ce paragraphe, tous les résultats sont donnés pour un couple d'entrée de 200Nm et une vitesse de rotation en entrée de 1100rpm. Les différentes erreurs étudiées dans cette sous-partie sont illustrées en figure 2-11. Les définitions du coefficient d'erreurs de transmission *TEC* et du coefficient de surcharge dynamique *DC* données au paragraphe 4.3.2 pour le système complet sont utilisées ici.

Erreur d'assemblage	Amplitude de l'erreur	Support de l'erreur	<i>TEC</i>			<i>DC</i>	
			Globales	Train épicycloïdal	Engrenages spiroconiques	Train épicycloïdal	Engrenages spiroconiques
Pas d'erreur			2.33	1.76	1.04	1.18	1.01
Axiale	50 $\mu\text{m}$	Pignon	2.50	1.75	1.22	1.18	1.02
Axiale	50 $\mu\text{m}$	Roue	2.33	1.76	1.04	1.18	1.01
Axiale	-50 $\mu\text{m}$	Pignon	2.32	1.75	1.00	1.18	1.01
Axiale	-50 $\mu\text{m}$	Roue	2.34	1.76	1.05	1.18	1.02
Hypoïde	50 $\mu\text{m}$	Pignon	2.43	1.76	1.15	1.18	1.02
Hypoïde	50 $\mu\text{m}$	Roue	2.62	1.76	1.33	1.18	1.01
Hypoïde	-50 $\mu\text{m}$	Pignon	2.62	1.76	1.33	1.18	1.01
Hypoïde	-50 $\mu\text{m}$	Roue	2.43	1.76	1.15	1.18	1.02
Excentration	50 $\mu\text{m}$	Pignon	19.28	1.77	12.88	1.18	1.02
Excentration	50 $\mu\text{m}$	Roue	24.32	1.80	16.24	1.18	1.02

Tableau 4-23 Influence des erreurs de position axiale, des erreurs d'hypoïde et des erreurs d'excentration sur les erreurs de transmission et les efforts d'engrènement du système complet – sens de rotation horaire

Le tableau 4-23 présente l'influence des erreurs de position axiales, des erreurs d'hypoïdes et des erreurs d'excentration sur ces différents indicateurs en sens de rotation horaire, le tableau 4-24 présente les mêmes résultats en sens de rotation trigonométrique. Il apparaît que l'influence de ces erreurs sur le comportement du train épicycloïdal est à cette vitesse négligeable, autant du point de vue du coefficient d'erreurs de transmission que du coefficient de surcharge dynamique des engrènements du train épicycloïdal. Le coefficient d'erreurs de transmission globales, ainsi que celui du couple d'engrenages spiroconiques, restent cependant impactés par ces erreurs, de manière similaire au système du couple d'engrenages spiroconiques seul. Les variations du coefficient de surcharge dynamique sont, autant pour les engrènements du train épicycloïdal que pour celui du couple d'engrenages spiroconiques, négligeables, ce qui n'était pas le cas au sein du système du couple d'engrenages spiroconiques seul. Les erreurs d'excentration restent les plus critiques, impactant sensiblement les erreurs de transmission. Les observations faites au paragraphe 4.1.3 sur les erreurs de position axiales restent valables ici : les erreurs de position axiales positives sur la roue ou négatives sur le pignon sont bénéfiques aux erreurs de transmission, sinon

neutres, alors que les erreurs de position axiales négatives sur la roue ou positives sur le pignon dégradent les erreurs de transmission. De manière identique, les erreurs d'hypoïde positives sur le pignon ou négatives sur la roue sont moins critiques que les erreurs d'hypoïde négatives sur le pignon ou positives sur la roue.

Erreur d'assemblage	Amplitude de l'erreur	Support de l'erreur	TEC			DC	
			Globales	Train épicycloïdal	Engrenages spiroconiques	Train épicycloïdal	Engrenages spiroconiques
Pas d'erreur			2.76	1.74	1.93	1.22	1.08
Axiale	50 $\mu\text{m}$	Pignon	2.83	1.74	2.02	1.22	1.06
Axiale	50 $\mu\text{m}$	Roue	2.67	1.73	1.84	1.22	1.08
Axiale	-50 $\mu\text{m}$	Pignon	2.68	1.72	1.83	1.22	1.07
Axiale	-50 $\mu\text{m}$	Roue	3.17	1.75	2.31	1.22	1.06
Hypoïde	50 $\mu\text{m}$	Pignon	2.79	1.75	2.08	1.22	1.07
Hypoïde	50 $\mu\text{m}$	Roue	3.27	1.73	2.34	1.22	1.08
Hypoïde	-50 $\mu\text{m}$	Pignon	3.27	1.73	2.34	1.22	1.08
Hypoïde	-50 $\mu\text{m}$	Roue	2.78	1.75	2.06	1.22	1.07
Excentration	50 $\mu\text{m}$	Pignon	24.62	1.75	20.88	1.22	1.07
Excentration	50 $\mu\text{m}$	Roue	19.77	1.75	16.67	1.22	1.08

Tableau 4-24 Influence des erreurs de position axiale, des erreurs d'hypoïde et des erreurs d'excentration sur les erreurs de transmission et les efforts d'engrènement du système complet – sens de rotation trigonométrique

Le tableau 4-25 présente l'influence des erreurs de désalignement et de désaxage du pignon et de la roue spiroconique en sens de rotation horaire, le tableau 4-26 présente les mêmes résultats en sens de rotation trigonométrique. On constate que ces erreurs angulaires sont, à l'exception des erreurs de désaxage, très peu critiques, pour les erreurs de transmission comme pour le coefficient de surcharge dynamique. L'influence de ces mêmes erreurs au sein du système comprenant le couple d'engrenages spiroconiques seul était en comparaison bien plus importante, la présence du train épicycloïdal en sortie restreint donc fortement l'impact de ces erreurs sur le coefficient d'erreur de transmission et le coefficient de surcharge dynamique.

Certaines erreurs d'assemblages sont donc particulièrement critiques au sein du système complet comme au sein du couple d'engrenages spiroconiques seul, comme les erreurs d'excentration et de désaxage, d'autres erreurs apparaissent comme particulièrement peu critiques au sein de ces deux systèmes, comme certaines erreurs de position axiale. Enfin, l'impact des erreurs de désalignement est fortement influencé par la présence du train épicycloïdal en sortie du couple d'engrenages spiroconiques.

Erreur d'assemblage	Amplitude de l'erreur	Support de l'erreur	TEC			DC	
			Globales	Train épicycloïdal	Engrenages spiroconiques	Train épicycloïdal	Engrenages spiroconiques
Pas d'erreur			2.33	1.76	1.04	1.18	1.01
Désalignement $e\phi$	5.0E-04 rad	Pignon	2.32	1.76	1.03	1.18	1.03
Désalignement $e\phi$	5.0E-04 rad	Roue	2.35	1.76	1.05	1.18	1.01
Désalignement $e\phi$	-5.0E-04 rad	Pignon	2.35	1.76	1.05	1.19	1.01
Désalignement $e\phi$	-5.0E-04 rad	Roue	2.32	1.76	1.03	1.18	1.03
Désalignement $e\psi$	5.0E-04 rad	Pignon	2.31	1.76	0.99	1.18	1.01
Désalignement $e\psi$	5.0E-04 rad	Roue	2.32	1.76	1.04	1.18	1.02
Désalignement $e\psi$	-5.0E-04 rad	Pignon	2.36	1.76	1.07	1.18	1.02
Désalignement $e\psi$	-5.0E-04 rad	Roue	2.35	1.76	1.06	1.18	1.01
Désaxage	5.0E-04 rad	Pignon	8.04	1.76	5.21	1.18	1.03
Désaxage	5.0E-04 rad	Roue	2.96	1.76	1.59	1.18	1.03

Tableau 4-25 Influence des erreurs de désalignement et de désaxage sur les erreurs de transmission et les efforts d'engrènement du système complet – sens de rotation horaire

Erreur d'assemblage	Amplitude de l'erreur	Support de l'erreur	TEC			DC	
			Globales	Train épicycloïdal	Engrenages spiroconiques	Train épicycloïdal	Engrenages spiroconiques
Pas d'erreur			2.76	1.74	1.93	1.22	1.08
Désalignement $e\phi$	5.0E-04 rad	Pignon	2.81	1.74	2.01	1.23	1.08
Désalignement $e\phi$	5.0E-04 rad	Roue	2.71	1.74	1.84	1.22	1.09
Désalignement $e\phi$	-5.0E-04 rad	Pignon	2.72	1.74	1.84	1.22	1.09
Désalignement $e\phi$	-5.0E-04 rad	Roue	2.82	1.74	2.01	1.23	1.09
Désalignement $e\psi$	5.0E-04 rad	Pignon	2.77	1.73	1.95	1.22	1.08
Désalignement $e\psi$	5.0E-04 rad	Roue	2.62	1.74	1.76	1.22	1.09
Désalignement $e\psi$	-5.0E-04 rad	Pignon	2.77	1.74	1.93	1.22	1.07
Désalignement $e\psi$	-5.0E-04 rad	Roue	2.92	1.75	2.08	1.23	1.08
Désaxage	5.0E-04 rad	Pignon	3.21	1.74	2.38	1.23	1.09
Désaxage	5.0E-04 rad	Roue	8.05	1.74	6.72	1.22	1.09

Tableau 4-26 Influence des erreurs de désalignement et de désaxage sur les erreurs de transmission et les efforts d'engrènement du système complet – sens de rotation trigonométrique

## 4.4 CONCLUSION

Le modèle global présenté dans cette étude met donc en évidence un couplage fort entre le couple d'engrenages spiroconiques et le train épicycloïdal, et l'étude de ces deux systèmes séparés ne peut rendre compte du comportement dynamique du système complet.

Le comportement naturellement dissymétrique du couple d'engrenages spiroconiques entre les deux sens de rotation ne se traduit pas sur le comportement dynamique du système complet, qui reste très proche d'un sens de rotation à l'autre. Les différentes fréquences d'engrènement des deux sous-systèmes excitent le système complet sur des modes propres qui ne seraient autrement pas sollicités. Enfin, l'arbre intermédiaire liant ces deux sous-systèmes se révèle être un composant central du comportement dynamique du système global.

Enfin, l'impact d'un grand nombre d'erreurs d'assemblage sur le train épicycloïdal, le couple d'engrenages spiroconiques, et enfin le système complet a été étudié, mettant en évidence certaines erreurs peu critiques pouvant amener à des procédures de montage minimisant les risques d'erreurs d'assemblage critiques, tout comme certaines erreurs particulièrement critiques nécessitant une attention particulière, tant à la phase de conception qu'à celle de montage.



---

## CONCLUSION GENERALE

Un modèle dynamique de transmission pour machine-outil a donc été développé dans ces travaux de recherche, comprenant un train épicycloïdal et un couple d'engrenages spiroconiques. Ce modèle adopte une approche à paramètres concentrés, permettant de gérer de manière efficace les multiples engrènements du système tout en proposant une gestion satisfaisante des conditions aux limites, des arbres et des paliers. Les équations du mouvement sont résolues pas à pas dans le temps à l'aide d'un schéma de Newmark couplé à un algorithme de contact. Les contacts du train épicycloïdal comme du couple d'engrenages spiroconiques sont résolus simultanément pour la totalité des engrènements par l'algorithme de contact, assurant un couplage dynamique complet entre ces différents engrènements. L'influence de différentes erreurs de forme et d'assemblage des engrenages et mobiles du système est prise en compte sur les conditions de contact et les termes dynamiques. Enfin, les temps de calcul relativement faibles de ce modèle mathématique, comparativement aux modèles par éléments finis, permettent d'effectuer de vastes études paramétriques.

Le modèle d'engrenages spiroconiques innovant proposé dans ces travaux emploie des ensembles de points des surfaces de denture réelles, combinés à un calcul de distance de séparation tridimensionnel afin de déterminer les surfaces de contact à chaque instant. Dans une approche similaire à l'approche des fines tranches des engrenages cylindriques, le flanc de denture est discrétisé en cellules élémentaires auxquelles sont attribuées des raideurs élémentaires et des distances de séparation tenant compte des géométries des dentures et des erreurs de forme et d'assemblage. Cette approche générale par nature permet de modéliser une très grande diversité de géométries de dentures d'engrenages spiroconiques.

Les résultats de ce modèle sont confrontés à des résultats théoriques et expérimentaux afin d'en valider le comportement. Une étude du comportement dynamique du système est ensuite proposée, centrée sur le couplage existant entre le train épicycloïdal et le couple d'engrenages spiroconiques, et l'influence des erreurs d'assemblage de ces deux sous-systèmes. A cette fin, les deux sous-systèmes sont isolés et étudiés séparément puis comparés au système complet. Un couplage dynamique fort est mis en évidence entre le couple d'engrenages spiroconiques et le train épicycloïdal, et le modèle a permis d'identifier des erreurs particulièrement critiques comme particulièrement peu critiques.

Ce modèle reste toutefois perfectible sur de nombreux aspects, laissant entrevoir différents axes de développement. Le calcul des raideurs élémentaires du modèle d'engrenages spiroconiques prend en compte la composante de flexion des dents et de déformation au contact, il ignore cependant la contribution des déformations de fondation qu'il pourrait être intéressant d'étudier. De plus, le calcul de la contribution en flexion de la dent se base sur un certain nombre d'hypothèses sur la géométrie de la dent, et notamment sur la géométrie de la fibre neutre, dont il serait avantageux de s'affranchir. Le modèle de contact développé pour les engrenages spiroconiques ouvre cependant la perspective de modèles similaires pour engrenages cylindriques, dont la recherche de contact plus générale permettrait de caractériser les contacts en dehors du plan d'action existants pour certaines conceptions. La modélisation de certaines pièces souples pourrait être effectuée à l'aide de méthodes de sous-structuration [132]. Cela pourrait notamment permettre d'améliorer la modélisation de la couronne flexible et de ses conditions de fixation, et de prendre en compte les déformations du porte-satellites. Enfin, la prise en compte de l'amortissement, dont la modélisation reste ici simple, est l'objet de nombreux travaux de recherche qui pourraient être inclus à ce modèle.



---

# RÉFÉRENCES

- [1] F. L. Litvin, "Applied Theory of Gearing: State of the Art," *J. Vib. Acoust.*, vol. 117, no. B, pp. 128–134, Jun. 1995.
- [2] R. J. Drago, *Fundamentals of gear design*. Stoneham: Butterworth Publishers, 1988.
- [3] H. Stadtfeld and J. Saewe, "Non-Involute Gearing, Function and Manufacturing Compared to Established Gear Designs," *Gear Technol.*, no. February, pp. 42–51, 2015.
- [4] H. Strauch, "Zahnradswingungen," *Z. Ver. dtsch. Ing.*, no. 95, p. 159, 1953.
- [5] F. Küçükay, "Dynamic Behaviour of High Speed Gears.," *Proc. 3rd IMechE Int. Conf. Vib. Rotating Mach.*, vol. C317/84, pp. 81–90, 1984.
- [6] A. Saada and P. Velex, "An extended model for the analysis of the dynamic behavior of planetary trains," *J. Mech. Des. Trans. ASME*, vol. 117, no. 2A, pp. 241–247, 1995.
- [7] M. Maatar and P. Velex, "An analytical expression for the time-varying contact length in perfect cylindrical gears: Some possible applications in gear dynamics," *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, vol. 118, no. 4. pp. 586–589, 1996.
- [8] S. L. Harris, "Dynamic Loads on the Teeth of Spur Gears," *Proc. Inst. Mech. Eng.*, vol. 172, no. 1, pp. 87–112, Jun. 1958.
- [9] W. R. Moore, *Foundations of Mechanical Accuracy*, 1st ed. Bridgeport, Connecticut: Moore Special Tool Company, 1970.
- [10] P. Lynwander, *Gear drive systems : design and application*. New York: Marcel Dekker, Inc., 1983.
- [11] M. T. Wright, "The Antikythera Mechanism reconsidered," *Interdiscip. Sci. Rev.*, vol. 32, no. 1, pp. 27–43, 2007.
- [12] H. Ligata, A. Kahraman, and A. Singh, "An Experimental Study of the Influence of Manufacturing Errors on the Planetary Gear Stresses and Planet Load Sharing," *J. Mech. Des.*, vol. 130, no. 4, 2008.
- [13] A. Singh, "Load sharing behavior in epicyclic gears: Physical explanation and generalized formulation," *Mech. Mach. Theory*, vol. 45, no. 3, pp. 511–530, 2010.
- [14] A. Singh, A. Kahraman, and H. Ligata, "Internal gear strains and load sharing in planetary transmissions: Model and experiments," *J. Mech. Des. Trans. ASME*, vol. 130, no. 7, pp. 0726021–07260210, 2008.
- [15] C. Weber, "The Deformations of Loaded Gears and the Effects on their Load Carrying Capacity," 1949.
- [16] C. Weber and K. Banaschek, "Formänderung und Profilirücknahme bei gerad- und schrägverzahnten Rädern," *Schriftenr. Antriebstechnik*, vol. 11, 1953.
- [17] R. W. Cornell, "Compliance and stress sensitivity of spur gear teeth," *J. Mech. Des. Trans. ASME*, vol. 103, no. 2, pp. 447–459, 1981.
- [18] G. Lundberg, "Elastische Berührung zwei Halbräume," *Forsch. im Ingenieurwesens*, vol. 10, no. 5, pp. 201–211, 1939.
- [19] A. Palmgren, *Ball and roller bearing engineering*, 3rd ed. Philadelphia, Pa., S.H. Burbank, 1959.
- [20] H. H. Lin and C.-H. Liou, "A parametric study of spur gear dynamics," Memphis, Tennessee, 1998.
- [21] K. Umezawa, "The Meshing Test on Helical Gears under Load Transmission : 2nd Report, The Approximate Formula for Bending-Moment Distribution of Gear Tooth," *Trans. Japan*

- Soc. Mech. Eng.*, vol. 38, pp. 1602–1608, Jan. 1972.
- [22] W. J. O'donnell, "The additional deflection of a cantilever due to the elasticity of the support," *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, vol. 27, no. 3, pp. 461–464, 1960.
- [23] W. J. O'Donnell, "Stresses and deflections in built-in beams," *J. Manuf. Sci. Eng. Trans. ASME*, vol. 85, no. 3, pp. 265–272, 1963.
- [24] A. Y. Attia, "Deflection of spur gear teeth cut in thin rims," *J. Manuf. Sci. Eng. Trans. ASME*, vol. 86, no. 4, pp. 333–341, 1964.
- [25] P. Sainsot, P. Velez, and O. Duverger, "Contribution of Gear Body to Tooth Deflections—A New Bidimensional Analytical Formula," *J. Mech. Des. - J MECH Des.*, vol. 126, Jul. 2004.
- [26] H. Stadtfeld, *Gleason bevel gear technology: the science of gear engineering and modern manufacturing methods for angular transmissions*. Gleason Publication, 2014.
- [27] J. Klingelnberg, *Bevel Gear: Fundamentals and Applications*. Springer Vieweg, 2016.
- [28] G. Henriot, *Engrenages - 8e éd. : conception - fabrication - mise en oeuvre*. 2013.
- [29] E. J. Wellauer and A. Seireg, "Bending strength of gear teeth by cantilever-plate theory," *J. Manuf. Sci. Eng. Trans. ASME*, vol. 82, no. 3, pp. 213–220, 1960.
- [30] S. M. Wang and I. E. Morse, "Torsional response of a gear train system," *J. Manuf. Sci. Eng. Trans. ASME*, vol. 94, no. 2, pp. 583–592, 1972.
- [31] T. J. Krenzer, "Tooth Contact Analysis of Spiral Bevel and Hypoid Gears Under Load," *SAE Trans.*, vol. 90, pp. 2205–2216, 1981.
- [32] S. Vaidyanathan, H. R. Busby, and D. R. Houser, "A numerical approach to the static analysis of an annular sector mindlin plate with applications to bevel gear design," *Comput. Struct.*, vol. 51, no. 3, pp. 255–266, 1994.
- [33] S. Vaidyanathan, D. R. Houser, and H. R. Busby, "A Rayleigh-Ritz Approach to Determine Compliance and Root Stresses in Spiral Bevel Gears Using Shell Theory," *AGMA Technical Paper No.93FTM03*, 1993.
- [34] M. Kolivand and A. Kahraman, "A load distribution model for hypoid gears using ease-off topography and shell theory," *Mech. Mach. Theory*, vol. 44, no. 10, pp. 1848–1865, 2009.
- [35] H. Ding, J. Tang, W. Shao, and S. Peng, "An innovative determination approach to tooth compliance for spiral bevel and hypoid gears by using double-curved shell model and Rayleigh–Ritz approach," *Mech. Mach. Theory*, vol. 130, pp. 27–46, 2018.
- [36] C. Gosselin, L. Cloutier, and Q. D. Nguyen, "A general formulation for the calculation of the load sharing and transmission error under load of spiral bevel and hypoid gears," *Mech. Mach. Theory*, vol. 30, no. 3, pp. 433–450, 1995.
- [37] V. Simon, "FEM stress analysis in hypoid gears," *Mech. Mach. Theory*, vol. 35, no. 9, pp. 1197–1220, 2000.
- [38] H. Ding, J. Tang, J. Zhong, and Z. Zhou, "A hybrid modification approach of machine-tool setting considering high tooth contact performance in spiral bevel and hypoid gears," *J. Manuf. Syst.*, vol. 41, pp. 228–238, 2016.
- [39] H. J. Stadtfeld and U. Gaiser, "The ultimate motion graph," *J. Mech. Des. Trans. ASME*, vol. 122, no. 3, pp. 317–322, 2000.
- [40] W. A. Tuplin, "Gear tooth stresses at high speed," *Proc. Inst. Mech. Eng.*, vol. 163, pp. 162–175, 1950.
- [41] H. Özgüven and D. R. Houser, "Mathematical models used in gear dynamics—A review," *J. Sound Vib.*, vol. 121, no. 3, pp. 383–411, 1988.
- [42] D. B. Wallace and A. Seireg, "Computer Simulation of Dynamic Stress, Deformation, and Fracture of Gear Teeth," *J. Manuf. Sci. Eng.*, vol. 95, no. 4, pp. 1108–1114, Nov. 1973.
- [43] R. G. Parker, S. M. Vijayakar, and T. Imajo, "Non-linear dynamic response of a spur gear pair:

- modelling and experimental comparisons," *J. Sound Vib.*, vol. 237, no. 3, pp. 435–455, 2000.
- [44] G. W. Blankenship and R. Singh, "Comparative study of selected gear mesh interface dynamic models," in *1992 International Power Transmission and Gearing Conference*, 1992, pp. 137–146.
- [45] J. Wang, R. Li and, and X. Peng, "Survey of nonlinear vibration of gear transmission systems," *Appl. Mech. Rev.*, vol. 56, no. 3, pp. 309–329, May 2003.
- [46] C. G. Cooley and R. G. Parker, "A review of planetary and epicyclic gear dynamics and vibrations research," *Appl. Mech. Rev.*, vol. 66, no. 4, pp. 1–15, 2014.
- [47] F. Cunliffe, J. D. Smith, and D. B. Welbourn, "Dynamic Tooth Loads in Epicyclic Gears," *J. Manuf. Sci. Eng.*, vol. 96, no. 2, pp. 578–584, May 1974.
- [48] D. L. Seager, "Conditions for the Neutralization of Excitation by the Teeth in Epicyclic Gearing," *J. Mech. Eng. Sci.*, vol. 17, no. 5, pp. 293–299, Oct. 1975.
- [49] M. Botman, "Epicyclic Gear Vibrations," *J. Manuf. Sci. Eng.*, vol. 98, no. 3, pp. 811–815, Aug. 1976.
- [50] J. Frater, R. August, and F. B. Oswald, "Vibration in Planetary Gear Systems With Unequal Planet Stiffness," 1983.
- [51] J. L. Nikolajsen and M. Botman, "Dynamic Behavior of a Journal Bearing in a Planet Gear," *A S L E Trans.*, vol. 26, no. 1, pp. 87–93, Jan. 1983.
- [52] P. Ma and M. Botman, "Load Sharing in a Planetary Gear Stage in the Presence of Gear Errors and Misalignment," *J. Mech. Des.*, vol. 107, no. 1, pp. 4–10, Mar. 1985.
- [53] R. August and R. Kasuba, "Torsional Vibrations and Dynamic Loads in a Basic Planetary Gear System," *J. Vib. Acoust.*, vol. 108, no. 3, pp. 348–353, Jul. 1986.
- [54] A. Kahraman, "Planetary Gear Train Dynamics," *J. Mech. Des.*, vol. 116, no. 3, pp. 713–720, Sep. 1994.
- [55] A. Kahraman, "Natural modes of planetary gear trains," *Journal of Sound Vibration*, vol. 173, pp. 125–130, 01-May-1994.
- [56] A. Kahraman, "Load sharing characteristics of planetary transmissions," *Mech. Mach. Theory*, vol. 29, no. 8, pp. 1151–1165, 1994.
- [57] A. Kahraman and G. W. Blankenship, "Planet Mesh Phasing in Epicyclic Gear Sets," in *Proceedings of the International Gearing Conference*, 1994, pp. 99–104.
- [58] M. J. Valco, "Planetary Gear Train Ring Gear and Support Structure," Doctoral Dissertation, Cleveland State University, 1992.
- [59] P. Velez, V. Pichon, L. Randrianarivo, and R. Wittman, "Dynamic Behavior of Epicyclic Trains: Experimental and Numerical Analyses," in *Proceedings of the International Gearing Conference*, 1994, pp. 265–269.
- [60] M. Gradu, K. Langenbeck, and B. Breunig, "Planetary Gears with Improved Vibrational Behavior in Automatic Transmissions," in *VDI BERICHTE NR*, 1996, pp. 861–879.
- [61] A. Saada and P. Velez, "An Extended Model for the Analysis of the Dynamic Behavior of Planetary Trains," *J. Mech. Des.*, vol. 117, no. 2A, pp. 241–247, Jun. 1995.
- [62] P. Velez and M. Maatar, "A mathematical model for analyzing the influence of shape deviations and mounting errors on gear dynamic behaviour," *J. Sound Vib.*, vol. 191, no. 5, pp. 629–660, 1996.
- [63] P. Velez and L. Flamand, "Dynamic Response of Planetary Trains to Mesh Parametric Excitations," *J. Mech. Des.*, vol. 118, no. 1, pp. 7–14, Mar. 1996.
- [64] J. Lin and R. G. Parker, "Analytical Characterization of the Unique Properties of Planetary Gear Free Vibration," *J. Vib. Acoust.*, vol. 121, no. 3, pp. 316–321, Jul. 1999.
- [65] A. Kahraman, "Static Load Sharing Characteristics of Transmission Planetary Gear Sets:

Model and Experiment." SAE International , 1999.

- [66] R. G. Parker, V. Agashe, and S. M. Vijayakar, "Dynamic response of a planetary gear system using a finite element/contact mechanics model," *J. Mech. Des. Trans. ASME*, vol. 122, no. 3, pp. 304–310, 2000.
- [67] A. Kahraman, "Free torsional vibration characteristics of compound planetary gear sets," *Mech. Mach. Theory*, vol. 36, pp. 953–971, Aug. 2001.
- [68] A. Kahraman and S. Vijayakar, "Effect of internal gear flexibility on the quasi-static behavior of a planetary gear set," *J. Mech. Des. Trans. ASME*, vol. 123, no. 3, pp. 408–415, 2001.
- [69] A. Kahraman, A. A. Kharazi, and M. Umrani, "A deformable body dynamic analysis of planetary gears with thin rims," *J. Sound Vib.*, vol. 262, no. 3, pp. 752–768, 2003.
- [70] G.-J. Cheon and R. G. Parker, "Influence of bearing stiffness on the static properties of a planetary gear system with manufacturing errors," *KSME Int. J.*, vol. 18, no. 11, pp. 1978–1988, 2004.
- [71] G.-J. Cheon and R. G. Parker, "Influence of manufacturing errors on the dynamic characteristics of planetary gear systems," *KSME Int. J.*, vol. 18, no. 4, pp. 606–621, 2004.
- [72] V. Abousleiman and P. Velex, "A hybrid 3D finite element/lumped parameter model for quasi-static and dynamic analyses of planetary/epicyclic gear sets," *Mech. Mach. Theory*, vol. 41, no. 6, pp. 725–748, 2006.
- [73] V. Abousleiman, P. Velex, and S. Becquerelle, "Modeling of Spur and Helical Gear Planetary Drives With Flexible Ring Gears and Planet Carriers," *J. Mech. Des.*, vol. 129, no. 1, pp. 95–106, Feb. 2006.
- [74] V. K. Ambarisha and R. G. Parker, "Nonlinear dynamics of planetary gears using analytical and finite element models," *J. Sound Vib.*, vol. 302, no. 3, pp. 577–595, 2007.
- [75] D. R. Kiracofe and R. G. Parker, "Structured Vibration Modes of General Compound Planetary Gear Systems," *J. Vib. Acoust.*, vol. 129, no. 1, pp. 1–16, May 2006.
- [76] M. Inalpolat and A. Kahraman, "Dynamic Modelling of Planetary Gears of Automatic Transmissions," *Proc. Inst. Mech. Eng. Part K J. Multi-body Dyn.*, vol. 222, no. 3, pp. 229–242, Sep. 2008.
- [77] T. Eritenel and R. Parker, "Modal properties of three-dimensional helical planetary gears," *J. Sound Vib.*, vol. 325, pp. 397–420, Aug. 2009.
- [78] Y. Guo and R. Parker, "Purely rotational model and vibration modes of compound planetary gears," *Mech. Mach. Theory*, vol. 45, pp. 365–377, Mar. 2010.
- [79] Y. Guo and R. G. Parker, "Dynamic modeling and analysis of a spur planetary gear involving tooth wedging and bearing clearance nonlinearity," *Eur. J. Mech. / A Solids*, vol. 29, pp. 1022–1033, 2010.
- [80] M. Inalpolat and A. Kahraman, "A dynamic model to predict modulation sidebands of a planetary gear set having manufacturing errors," *J. Sound Vib.*, vol. 329, no. 4, pp. 371–393, 2010.
- [81] X. Gu and P. Velex, "A Lumped Parameter Model to Analyse the Dynamic Load Sharing in Planetary Gears with Planet Errors," *Appl. Mech. Mater.*, vol. 86, Aug. 2011.
- [82] X. Gu and P. Velex, "A dynamic model to study the influence of planet position errors in planetary gears," *J. Sound Vib.*, vol. 331, pp. 4554–4574, Sep. 2012.
- [83] X. Gu and P. Velex, "On the dynamic simulation of eccentricity errors in planetary gears," *Mech. Mach. Theory*, vol. 61, pp. 14–29, 2013.
- [84] C. G. Cooley and R. G. Parker, "Vibration Properties of High-Speed Planetary Gears With Gyroscopic Effects," *J. Vib. Acoust.*, vol. 134, no. 6, Oct. 2012.
- [85] T. Eritenel and R. G. Parker, "An investigation of tooth mesh nonlinearity and partial contact loss in gear pairs using a lumped-parameter model," *Mech. Mach. Theory*, vol. 56, pp. 28–

51, 2012.

- [86] W. Kim, Ji Lee, and J. Chung, "Dynamic analysis for a planetary gear with time-varying pressure angles and contact ratios," *J. Sound Vib.*, vol. 331, pp. 883–901, Feb. 2012.
- [87] Z. Bu, G. Liu, and L. Wu, "Modal analyses of herringbone planetary gear train with journal bearings," *Mech. Mach. Theory*, vol. 54, pp. 99–115, Aug. 2012.
- [88] P. Sondkar and A. Kahraman, "A dynamic model of a double-helical planetary gear set," *Mech. Mach. Theory*, vol. 70, pp. 157–174, Dec. 2013.
- [89] Z. Sheng, J. Tang, S. Chen, and Z. Hu, "Modal Analysis of Double-Helical Planetary Gears with Numerical and Analytical Approach," *J. Dyn. Syst. Meas. Control. Trans. ASME*, vol. 137, no. 4, 2015.
- [90] Z. Chen and Y. Shao, "Dynamic features of planetary gear train with tooth errors," *Proc. Inst. Mech. Eng. Part C J. Mech. Eng. Sci.*, vol. 229, no. 10, pp. 1769–1781, Sep. 2014.
- [91] D. C. Fyler and M. Inalpolat, "A Dynamic Model for Double-Planet Planetary Gearsets," *J. Vib. Acoust.*, vol. 138, no. 2, Jan. 2016.
- [92] L. Fan, S. Wang, X. Wang, F. Han, and H. Lyu, "Nonlinear dynamic modeling of a helicopter planetary gear train for carrier plate crack fault diagnosis," *Chinese J. Aeronaut.*, vol. 29, no. 3, pp. 675–687, 2016.
- [93] M. Chapron, "Comportement dynamique de train planétaire / épicycloïdal avec erreurs d'assemblage, écarts de forme et structures déformables - Optimisation des corrections de dentures," Thèse de Doctorat de l'Université de Lyon, 2016.
- [94] N. Leque and A. Kahraman, "A Three-Dimensional Load Sharing Model of Planetary Gear Sets Having Manufacturing Errors," *J. Mech. Des.*, vol. 139, no. 3, Jan. 2017.
- [95] X. Liu, Y. Yang, and J. Zhang, "Effects of tooth-crack-induced mesh stiffness on fault signals of a planetary gear train," *Procedia Comput. Sci.*, vol. 109, pp. 785–792, 2017.
- [96] F. Concli, L. Cortese, R. Vidoni, F. Nalli, and G. Carabin, "A mixed FEM and lumped-parameter dynamic model for evaluating the modal properties of planetary gearboxes," *J. Mech. Sci. Technol.*, vol. 32, no. 7, pp. 3047–3056, 2018.
- [97] G. He, K. Ding, X. Wu, and X. Yang, "Dynamics modeling and vibration modulation signal analysis of wind turbine planetary gearbox with a floating sun gear," *Renew. Energy*, vol. 139, pp. 718–729, 2019.
- [98] Y. Li, K. Ding, G. He, and X. Yang, "Vibration modulation sidebands mechanisms of equally-spaced planetary gear train with a floating sun gear," *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 129, pp. 70–90, 2019.
- [99] Y. Hu, D. Talbot, and A. Kahraman, "A Gear Load Distribution Model for a Planetary Gear Set With a Flexible Ring Gear Having External Splines," *J. Mech. Des.*, vol. 141, no. 5, Jan. 2019.
- [100] D. Astridge and M. Salzer, "Gearbox dynamics - Modelling of a spiral bevel gearbox," in *Third European Rotorcraft and Powered Lift Aircraft Forum*, 1977, pp. 1–10.
- [101] T. C. Lim and Y. Cheng, "A Theoretical Study of the Effect of Pinion Offset on the Dynamics of Hypoid Geared Rotor System," *J. Mech. Des.*, vol. 121, no. 4, pp. 594–601, Dec. 1999.
- [102] Y. Cheng and T. C. Lim, "Vibration analysis of hypoid transmissions applying an exact geometry-based gear mesh theory," *J. Sound Vib.*, vol. 240, no. 3, pp. 519–543, 2001.
- [103] M. Li, H. Y. Hu, P. L. Jiang, and L. Yu, "Coupled Axial–Lateral–Torsional Dynamics Of A Rotor–Bearing System Geared By Spur Bevel Gears," *J. Sound Vib.*, vol. 254, no. 3, pp. 427–446, 2002.
- [104] M. Li and H. Y. Hu, "Dynamic analysis of a spiral bevel-gear rotor-bearing system," *J. Sound Vib.*, vol. 259, no. 3, pp. 605–624, 2003.
- [105] Y. Cheng and T. C. Lim, "Dynamics of Hypoid Gear Transmission With Nonlinear Time-Varying Mesh Characteristics," *J. Mech. Des.*, vol. 125, no. 2, pp. 373–382, Jun. 2003.

- [106] J. Wang, T. C. Lim, and M. Li, "Dynamics of a hypoid gear pair considering the effects of time-varying mesh parameters and backlash nonlinearity," *J. Sound Vib.*, vol. 308, no. 1–2, pp. 302–329, 2007.
- [107] J. Wang and T. C. Lim, "Effect of tooth mesh stiffness asymmetric nonlinearity for drive and coast sides on hypoid gear dynamics," *J. Sound Vib.*, vol. 319, no. 3, pp. 885–903, 2009.
- [108] L. Yinong, L. Guiyan, and Z. Ling, "Influence of asymmetric mesh stiffness on dynamics of spiral bevel gear transmission system," *Math. Probl. Eng.*, vol. 2010, 2010.
- [109] T. Peng, "Coupled Multi-body Dynamic and Vibration Analysis of Hypoid and Bevel Geared Rotor System," University of Cincinnati, University of Cincinnati, 2010.
- [110] X. Hua, "Hypoid and Spiral Bevel Gear Dynamics with Emphasis on Gear-Shaft-Bearing Structural Analysis," University of Cincinnati, University of Cincinnati, 2010.
- [111] P. Y. Wang, S. C. Fan, and Z. G. Huang, "Spiral bevel gear dynamic contact and tooth impact analysis," *J. Mech. Des. Trans. ASME*, vol. 133, no. 8, pp. 1–6, 2011.
- [112] J. Wang, J. T. Alves, M. Guingand, J. P. De Vaujany, and P. Velex, "A static and dynamic model of spiral bevel gears," *Appl. Mech. Mater.*, vol. 86, pp. 35–38, 2011.
- [113] J. T. Alves, J. Wang, M. Guingand, J.-P. de Vaujany, and P. Velex, "Static and dynamic models for spiral bevel gears," *Mech. Ind.*, vol. 13, no. 5, pp. 325–335, 2012.
- [114] J. Wang, "Contribution à l'analyse du comportement dynamique d'engrenages spiro-coniques," Thèse de Doctorat de l'Université de Lyon, 2014.
- [115] Y. Wang, "Torque Load Effect on Multi-Point Mesh and Dynamics of Right-angle Geared Drives," University of Cincinnati, University of Cincinnati, 2013.
- [116] Y. Wang, J. Yang, D. Guo, and T. C. Lim, "Vibration and sound radiation analysis of the final drive assembly considering the gear-shaft coupling dynamics," *Proc. Inst. Mech. Eng. Part C J. Mech. Eng. Sci.*, vol. 230, no. 7–8, pp. 1258–1275, Feb. 2016.
- [117] C. Song, C. Zhu, H. Liu, and G. Ni, "Dynamic analysis and experimental study of a marine gearbox with crossed beveloid gears," *Mech. Mach. Theory*, vol. 92, pp. 17–28, 2015.
- [118] J. J. Yang, Z. H. Shi, H. Zhang, T. X. Li, S. W. Nie, and B. Y. Wei, "Dynamic analysis of spiral bevel and hypoid gears with high-order transmission errors," *J. Sound Vib.*, vol. 417, pp. 149–164, 2018.
- [119] S. D. Yavuz, Z. B. Saribay, and E. Cigeroglu, "Nonlinear time-varying dynamic analysis of a spiral bevel geared system," *Nonlinear Dyn.*, vol. 92, no. 4, pp. 1901–1919, 2018.
- [120] W. Cao, W. Pu, and J. Wang, "Tribo-dynamic model and fatigue life analysis of spiral bevel gears," *Eur. J. Mech. A/Solids*, vol. 74, no. September 2018, pp. 124–138, 2019.
- [121] A. D. Kerr, "Elastic and Viscoelastic Foundation Models," *J. Appl. Mech.*, vol. 31, no. 3, pp. 491–498, Sep. 1964.
- [122] J. Boussinesq, *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*. 1885.
- [123] P. Sainsot, "Analyse du contact entre dentures d'engrenages cylindriques de reducteurs," Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1989.
- [124] K. L. Johnson, *Contact Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
- [125] M. Inalpolat and A. Kahraman, "A theoretical and experimental investigation of modulation sidebands of planetary gear sets," *J. Sound Vib.*, vol. 323, no. 3–5, pp. 677–696, 2009.
- [126] Q. Thoret-Bauchet, P. Velex, M. Guingand, and P. Casanova, "Simulations of the dynamic response of planetary gears in the presence of localised tooth faults," *Proc. Inst. Mech. Eng. Part C J. Mech. Eng. Sci.*, vol. 233, no. 21–22, pp. 7212–7223, May 2019.
- [127] Y. Ding and N. F. Rieger, "Spalling formation mechanism for gears," *Wear*, vol. 254, no. 12, pp. 1307–1317, 2003.

- [128] R. B. Randall, "A history of cepstrum analysis and its application to mechanical problems," *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 97, pp. 3–19, 2017.
- [129] M. El Badaoui, "Contribution to the Vibratory Diagnosis of the Complex gears by the Cepstrum analysis," Université Jean Monnet - Saint-Etienne, 1999.
- [130] M. E. Badaoui, F. Guillet, and J. Danière, "New applications of the real cepstrum to gear signals, including definition of a robust fault indicator," *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 18, no. 5, pp. 1031–1046, 2004.
- [131] M. E. L. Badaoui, J. Antoni, F. Guillet, J. Danière, and P. Velez, "Use of the Moving Cepstrum Integral to detect and localise tooth spalls in gears," *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 15, no. 5, pp. 873–885, 2001.
- [132] D. N. Herting, "A general purpose, multi-stage, component modal synthesis method," *Finite Elem. Anal. Des.*, vol. 1, no. 2, pp. 153–164, 1985.



# ANNEXE 1

Cette annexe développe les expressions des coefficients de raideur composant la matrice  $\mathbf{K}_c$  et du vecteur des coefficients du travail des efforts extérieurs intervenant dans l'équation 2-74, dont les expressions générales sont rappelées ci-dessous :

$$\mathbf{K}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{11} & \mathbf{K}^{12} & \mathbf{K}^{13} \\ \mathbf{K}^{21} & \mathbf{K}^{22} & \mathbf{K}^{23} \\ \mathbf{K}^{31} & \mathbf{K}^{32} & \mathbf{K}^{33} \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^1 \\ \mathbf{F}^2 \\ \mathbf{F}^3 \end{Bmatrix}$$

Chacune des différentes sous-matrices de la matrice des coefficients de raideur  $\mathbf{K}_c$  est une matrice de taille  $m_{max}n_{max} \times m_{max}n_{max}$ ,  $m_{max}$  et  $n_{max}$  étant le nombre de fonctions de forme selon  $\mathbf{z}_t$  et  $\mathbf{e}_\theta$ , de telle sorte que  $\mathbf{K}_c$  soit de taille  $3m_{max}n_{max} \times 3m_{max}n_{max}$ . Chacun des coefficients de ces sous matrices s'obtiennent par intégration des différents termes de l'équation 2-73 sur le volume de la dent. Il est possible d'effectuer l'intégration sur  $r$ , dont les bornes d'intégration dépendent de l'expression approximée de l'épaisseur de dent  $f_t(z, \theta)$ , de manière analytique, amenant aux expressions suivantes des coefficients des sous-matrices, d'indice de ligne  $mn$  et d'indice de colonne  $kl$  :

$$\begin{aligned} K_{klmn}^{11} = & \int_z \int_\theta \left[ \frac{f_t(z, \theta)^3 \cdot r_{nf}}{12} \frac{d^2 \Phi_m(z)}{dz^2} \Psi_n(\theta) \frac{d^2 \Phi_k(z)}{dz^2} \Psi_l(\theta) \right. \\ & + \frac{v \cdot f_t(z, \theta)^3}{12r_{nf}} \left( \Phi_m(z) \frac{d^2 \Psi_n(\theta)}{d\theta^2} \frac{d^2 \Phi_k(z)}{dz^2} \Psi_l(\theta) + \frac{d^2 \Phi_m(z)}{dz^2} \Psi_n(\theta) \Phi_k(z) \frac{d^2 \Psi_l(\theta)}{d\theta^2} \right) \\ & + \left( \ln \left| \frac{2r_{nf} + f_t(z, \theta)}{2r_{nf} - f_t(z, \theta)} \right| - \frac{f_t(z, \theta)}{r_{nf}} \right) \left( \Phi_m(z) \frac{d^2 \Psi_n(\theta)}{d\theta^2} \Phi_k(z) \frac{d^2 \Psi_l(\theta)}{d\theta^2} \right. \\ & + \Phi_m(z) \frac{d^2 \Psi_n(\theta)}{d\theta^2} \Phi_k(z) \Psi_l(\theta) + \Phi_m(z) \Psi_n(\theta) \Phi_k(z) \frac{d^2 \Psi_l(\theta)}{d\theta^2} \left. \right) \\ & + \left( \ln \left| \frac{2r_{nf} + f_t(z, \theta)}{2r_{nf} - f_t(z, \theta)} \right| \right) \Phi_m(z) \Psi_n(\theta) \Phi_k(z) \Psi_l(\theta) \\ & + (1 - v) \left( \frac{f_t(z, \theta)^3}{8r_{nf}} - \frac{f_t(z, \theta) \cdot r_{nf}}{2} \right. \\ & \left. + \frac{r_{nf}^2}{2} \ln \left| \frac{2r_{nf} + f_t(z, \theta)}{2r_{nf} - f_t(z, \theta)} \right| \right) \frac{d\Phi_m(z)}{dz} \frac{d\Psi_n(\theta)}{d\theta} \frac{d\Phi_k(z)}{dz} \frac{d\Psi_l(\theta)}{d\theta} \Big] dzd\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{klmn}^{12} = & \int_z \int_\theta \left[ - \frac{f_t(z, \theta)^3 \cdot r_{nf}}{12} \frac{d\Phi_m(z)}{dz} \Psi_n(\theta) \frac{d^2 \Phi_k(z)}{dz^2} \Psi_l(\theta) \right. \\ & - \frac{v \cdot f_t(z, \theta)^3}{12r_{nf}} \frac{d\Phi_m(z)}{dz} \Psi_n(\theta) \Phi_k(z) \frac{d^2 \Psi_l(\theta)}{d\theta^2} \\ & - (1 - v) \left( \frac{f_t(z, \theta)^3}{24r_{nf}} - \frac{f_t(z, \theta) \cdot r_{nf}}{2} \right. \\ & \left. + \frac{r_{nf}^2}{2} \ln \left| \frac{2r_{nf} + f_t(z, \theta)}{2r_{nf} - f_t(z, \theta)} \right| \right) \Phi_m(z) \frac{d\Psi_n(\theta)}{d\theta} \frac{d\Phi_k(z)}{dz} \frac{d\Psi_l(\theta)}{d\theta} \Big] dzd\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{klmn}^{13} = \int_z \int_\theta & \left[ -\frac{v \cdot f_t(z, \theta)^3}{12} \Phi_m(z) \frac{d\Psi_n(\theta)}{d\theta} \frac{d^2\Phi_k(z)}{dz^2} \Psi_l(\theta) \right. \\
& - \frac{f_t(z, \theta)^3}{12r_{nf}^2} \Phi_m(z) \frac{d\Psi_n(\theta)}{d\theta} \Phi_k(z) \frac{d^2\Psi_l(\theta)}{d\theta^2} \\
& \left. - (1-v) \left( \frac{f_t(z, \theta)^3}{12} + \frac{f_t(z, \theta)^5}{160r_{nf}^2} \right) \frac{d\Phi_m(z)}{dz} \Psi_n(\theta) \frac{d\Phi_k(z)}{dz} \frac{d\Psi_l(\theta)}{d\theta} \right] dzd\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{klmn}^{21} = \int_z \int_\theta & \left[ -\frac{f_t(z, \theta)^3 \cdot r_{nf}}{12} \frac{d^2\Phi_m(z)}{dz^2} \Psi_n(\theta) \frac{d\Phi_k(z)}{dz} \Psi_l(\theta) \right. \\
& - \frac{v \cdot f_t(z, \theta)^3}{12r_{nf}} \Phi_m(z) \frac{d^2\Psi_n(\theta)}{d\theta^2} \frac{d\Phi_k(z)}{dz} \Psi_l(\theta) \\
& - (1-v) \left( \frac{f_t(z, \theta)^3}{24r_{nf}} - \frac{f_t(z, \theta) \cdot r_{nf}}{2} \right. \\
& \left. + \frac{r_{nf}^2}{2} \ln \left| \frac{2r_{nf} + f_t(z, \theta)}{2r_{nf} - f_t(z, \theta)} \right| \right) \frac{d\Phi_m(z)}{dz} \frac{d\Psi_n(\theta)}{d\theta} \Phi_k(z) \frac{d\Psi_l(\theta)}{d\theta} \left. \right] dzd\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{klmn}^{22} = \int_z \int_\theta & \left[ \frac{f_t(z, \theta)^3 \cdot r_{nf}}{12} \frac{d\Phi_m(z)}{dz} \Psi_n(\theta) \frac{d\Phi_k(z)}{dz} \Psi_l(\theta) \right. \\
& + (1-v) \left( -\frac{f_t(z, \theta) \cdot r_{nf}}{2} + \frac{r_{nf}^2}{2} \ln \left| \frac{2r_{nf} + f_t(z, \theta)}{2r_{nf} - f_t(z, \theta)} \right| \right) \Phi_m(z) \frac{d\Psi_n(\theta)}{d\theta} \Phi_k(z) \frac{d\Psi_l(\theta)}{d\theta} \\
& \left. + (1-v) \left( \frac{f_t(z, \theta) \cdot r_{nf}}{2} \right) \Phi_m(z) \Psi_n(\theta) \Phi_k(z) \Psi_l(\theta) \right] dzd\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{klmn}^{23} = \int_z \int_\theta & \left[ \frac{v \cdot f_t(z, \theta)^3}{12} \Phi_m(z) \frac{d\Psi_n(\theta)}{d\theta} \frac{d\Phi_k(z)}{dz} \Psi_l(\theta) \right. \\
& \left. + (1-v) \left( \frac{f_t(z, \theta)^3}{24} \right) \frac{d\Phi_m(z)}{dz} \Psi_n(\theta) \Phi_k(z) \frac{d\Psi_l(\theta)}{d\theta} \right] dzd\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{klmn}^{31} = \int_z \int_\theta & \left[ -\frac{f_t(z, \theta)^3}{12r_{nf}^2} \Phi_m(z) \frac{d^2\Psi_n(\theta)}{d\theta^2} \Phi_k(z) \frac{d\Psi_l(\theta)}{d\theta} \right. \\
& - \frac{v \cdot f_t(z, \theta)^3}{12} \frac{d^2\Phi_m(z)}{dz^2} \Psi_n(\theta) \Phi_k(z) \frac{d\Psi_l(\theta)}{d\theta} \\
& \left. - (1-v) \left( \frac{f_t(z, \theta)^3}{12} + \frac{f_t(z, \theta)^5}{160r_{nf}^2} \right) \frac{d\Phi_m(z)}{dz} \frac{d\Psi_n(\theta)}{d\theta} \frac{d\Phi_k(z)}{dz} \Psi_l(\theta) \right] dzd\theta
\end{aligned}$$

$$K_{klmn}^{32} = \int_z \int_\theta \left[ \frac{\nu \cdot f_t(z, \theta)^3}{12} \frac{d\Phi_m(z)}{dz} \Psi_n(\theta) \Phi_k(z) \frac{d\Psi_l(\theta)}{d\theta} + (1 - \nu) \left( \frac{f_t(z, \theta)^3}{24} \right) \Phi_m(z) \frac{d\Psi_n(\theta)}{d\theta} \frac{d\Phi_k(z)}{dz} \Psi_l(\theta) \right] dz d\theta$$

$$K_{klmn}^{33} = \int_z \int_\theta \left[ \frac{f_t(z, \theta)^3}{12r_{nf}} \Phi_m(z) \frac{d\Psi_n(\theta)}{d\theta} \Phi_k(z) \frac{d\Psi_l(\theta)}{d\theta} + (1 - \nu) \left( \frac{f_t(z, \theta)^3 \cdot r_{nf}}{24} + \frac{3f_t(z, \theta)^5}{160r_{nf}} \right) \frac{d\Phi_m(z)}{dz} \Psi_n(\theta) \frac{d\Phi_k(z)}{dz} \Psi_l(\theta) + (1 - \nu) \left( \frac{r_{nf} \cdot f_t(z, \theta)}{2} + \frac{f_t(z, \theta)^3}{8r_{nf}} \right) \Phi_m(z) \Psi_n(\theta) \Phi_k(z) \Psi_l(\theta) \right] dz d\theta$$

L'expression des coefficients du vecteur du travail des efforts extérieurs, de dimension  $3m_{max}n_{max} \times 1$ , est également développée ci-dessous :

$$F_{mn}^1 = \int_z \int_\theta p_n(z, \theta) \Phi_m(z) \Psi_n(\theta) r_{nf} dz d\theta$$

$$F_{mn}^2 = F_{mn}^3 = 0$$







## FOLIO ADMINISTRATIF

### THESE DE L'UNIVERSITE DE LYON OPEREE AU SEIN DE L'INSA LYON

NOM : THORET-BAUCHET

DATE de SOUTENANCE :

Prénoms : Quentin Pierre Luc

TITRE :

Simulations du comportement vibratoire de réducteurs d'entraînement pour machine-outil - Applications à la détection et à l'identification de défauts.

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : AAAALYSEIXXXX

Ecole doctorale : MEGA ED162

Spécialité : Génie Mécanique

RESUME :

Ces travaux de thèse sont le résultat de la collaboration entre la société REDEX et le Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures de l'INSA de Lyon. Ces travaux s'intéressent aux éléments de transmission de puissance du système de guidage d'une machine-outil, dont la conception va naturellement chercher à minimiser les erreurs de fabrication que la machine-outil pourrait générer.

Dans le cadre de cette étude, un modèle dynamique de transmission pour machine-outil a été développé, comprenant un couple d'engrenages spiroconiques et un train épicycloïdal, incorporant de nombreuses erreurs d'assemblages et de forme des différents engrenages du système. Ce modèle mathématique à paramètres concentrés exploite des éléments d'engrenages cylindriques, d'engrenages coniques, d'arbres et de paliers. Les arbres sont modélisés par des poutres de Timoshenko, et les éléments de paliers se basent sur une linéarisation des relations effort-déplacement de Palmgren. Les lignes de contact entre engrenages cylindriques sont discrétisées en segments élémentaires, auxquels sont attribués une raideur élémentaire et un écart normal initial. En adoptant le même formalisme, les flancs de dent des engrenages spiroconiques sont discrétisés en cellules élémentaires auxquelles sont également attribués une raideur élémentaire et un écart normal initial. Les écarts normaux initiaux des éléments d'engrenages sont mis à jour à chaque pas de temps pour prendre en compte les nouvelles positions angulaires relatives des composants et les potentielles erreurs de forme et d'assemblage. Les équations du mouvement sont résolues pas à pas dans le temps à l'aide d'un schéma de Newmark, couplé à un algorithme de gestion des contacts venant s'assurer de la bonne détermination des efforts de contact et des raideurs élémentaires des éléments d'engrenages. Les raideurs élémentaires des engrenages cylindriques sont déterminées suivant la méthode de Weber et Banaschek afin de prendre en compte la contribution des déformations de contact, de la flexion des dentures et de la fondation. Les raideurs élémentaires des engrenages spiroconiques sont déterminées à l'aide d'un élément de coque dont la géométrie a été ajustée, afin de rendre compte de la flexion de la dent, ainsi qu'à l'aide des théories de Boussinesq pour obtenir la contribution des déformations de contact. Un algorithme de calcul de distance de séparation tridimensionnel de type point sur plan est implémenté afin d'obtenir les écarts normaux initiaux des engrenages spiroconiques.

Différents éléments de validation du modèle sont ensuite présentés afin de juger de l'exactitude du modèle sur certains aspects de modélisation. Enfin, une étude du comportement dynamique du train épicycloïdal seul, du couple d'engrenages spiroconiques et du système complet est proposée, s'intéressant aux couplages existants entre ces deux éléments de la transmission, ainsi qu'à l'impact de différentes erreurs d'assemblages individuelles sur les erreurs de transmission et le coefficient de surcharge dynamique. Pour une même amplitude d'erreur, différents niveaux de criticité sont ainsi mis en valeur selon la nature de l'erreur et le mobile impacté.

MOTS-CLÉS :

Dynamique d'engrenages, Train épicycloïdal, Engrenages spiroconiques, Vibration, Erreur

Laboratoire (s) de recherche :

Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures (LaMCoS)

Directeurs de thèse : Philippe Velex, Michèle Guingand

Président de jury :

Composition du jury :

Paredes, Manuel	Professeur, INSA de Toulouse	Rapporteur
Lafon, Pascal	Professeur, UTT de Troyes	Rapporteur
Thomas, Olivier	Professeur, ENSAM de Lille	Examineur
Velex, Philippe	Professeur, INSA de Lyon	Directeur de thèse
Guingand, Michèle	Maître de Conférences, INSA de Lyon	Co-directrice de thèse
Casanova, Pierre	Responsable Technique R&D, REDEX	Invité