

THESE

**CONTRIBUTION A L'ANALYSE DU COMPORTEMENT
DYNAMIQUE DE MACHINES TOURNANTES EN REGIME
TRANSITOIRE**

APPROCHES METRIQUE ET EXPERIMENTALE

présentée devant

L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

pour obtenir

le grade de docteur

Ecole Doctorale MEGA de Lyon
(Mécanique – Energétique – Génie Civil – Acoustique)

Spécialité Mécanique

par

Arnaud ALLEZY

Soutenue le 17/01/2006 devant la Commission d'examen

Jury

AL MAJID Ahmad,	Maître de Conférences	(Université d'Alep – Syrie)	
COCHELIN Bruno,	Professeur	(LMA – Marseille)	<i>Rapporteur</i>
DUFOUR Régis,	Professeur	(LDMS – INSA – Lyon)	<i>Directeur de thèse</i>
PESEUX Bernard,	Professeur	(GeM – ECN – Nantes)	<i>Rapporteur</i>
MIZONY Michel,	Maître de Conférences – HDR	(IREM – Université Claude Bernard Lyon I)	
THOUVEREZ Fabrice,	Professeur	(LTDS – ECL – Lyon)	<i>Président</i>

Laboratoire de Dynamique des Machines et des Structures (LDMS)

UMR CNRS 5006

Insa Lyon

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

Directeur : STORCK A.

Professeurs :

AMGHAR Y.	LIRIS
AUDISIO S.	PHYSICOCHIMIE INDUSTRIELLE
BABOT D.	CONT. NON DESTR. PAR RAYONNEMENTS IONISANTS
BABOUX J.C.	GEMPPM****
BALLAND B.	PHYSIQUE DE LA MATIERE
BAPTISTE P.	PRODUCTIQUE ET INFORMATIQUE DES SYSTEMES MANUFACTURIERS
BARBIER D.	PHYSIQUE DE LA MATIERE
BASKURT A.	LIRIS
BASTIDE J.P.	LAEPSI*****
BAYADA G.	LaMCOS*****
BENADDA B.	LAEPSI*****
BETEMPS M.	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
BIENNIER F.	PRODUCTIQUE ET INFORMATIQUE DES SYSTEMES MANUFACTURIERS
BLANCHARD J.M.	LAEPSI*****
BOISSE P.	LAMCOS*****
BOISSON C.	VIBRATIONS-ACOUSTIQUE
BOIVIN M. (Prof. émérite)	LAMCOS*****
BOTTA H.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Développement Urbain
BOTTA-ZIMMERMANN M. (Mme)	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Développement Urbain
BOULAYE G. (Prof. émérite)	INFORMATIQUE
BOYER J.C.	LAMCOS*****
BRAU J.	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Thermique du bâtiment
BREMOND G.	PHYSIQUE DE LA MATIERE
BRISSAUD M.	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
BRUNET M.	LAMCOS*****
BRUNIE L.	INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION
BUFFIERE J-Y.	GEMPPM****
BUREAU J.C.	CEGELY*
CAMPAGNE J-P.	PRISMA
CAVILLE J.Y.	GEMPPM****
CHAMPAGNE J-Y.	LMFA
CHANTE J.P.	CEGELY* - Composants de puissance et applications
CHOCAT B.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Hydrologie urbaine
COMBESCURE A.	LAMCOS*****
COURBON	GEMPPM
COUSIN M.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Structures
DAUMAS F. (Mme)	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Energétique et Thermique
DJERAN-MAIGRE I.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL
DOUTHEAU A.	CHIMIE ORGANIQUE
DUBUY-MASSARD N.	ESCHIL
DUFOUR R.	MECANIQUE DES STRUCTURES
DUPUY J.C.	PHYSIQUE DE LA MATIERE
EMPTOZ H.	RECONNAISSANCE DE FORMES ET VISION
ESNOUF C.	GEMPPM****
EYRAUD L. (Prof. émérite)	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
FANTOZZI G.	GEMPPM****
FAVREL J.	PRODUCTIQUE ET INFORMATIQUE DES SYSTEMES MANUFACTURIERS
FAYARD J.M.	BIOLOGIE FONCTIONNELLE, INSECTES ET INTERACTIONS
FAYET M. (Prof. émérite)	LAMCOS*****
FAZEKAS A.	GEMPPM
FERRARIS-BESSO G.	MECANIQUE DES STRUCTURES
FLAMAND L.	LAMCOS*****
FLEURY E.	CITI
FLORY A.	INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATIONS
FOUGERES R.	GEMPPM****
FOUQUET F.	GEMPPM****
FRECON L. (Prof. émérite)	REGROUPEMENT DES ENSEIGNANTS CHERCHEURS ISOLES
GERARD J.F.	INGENIERIE DES MATERIAUX POLYMERES
GERMAIN P.	LAEPSI*****
GIMENEZ G.	CREATIS***
GOBIN P.F. (Prof. émérite)	GEMPPM****
GONNARD P.	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
GONTRAND M.	PHYSIQUE DE LA MATIERE
GOUTTE R. (Prof. émérite)	CREATIS***
GOUJON L.	GEMPPM****
GOURDON R.	LAEPSI*****
GRANGE G. (Prof. émérite)	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
GUENIN G.	GEMPPM****

GUICHARDANT M.	BIOCHIMIE ET PHARMACOLOGIE
GUILLOT G.	PHYSIQUE DE LA MATIERE
GUINET A.	PRODUCTIQUE ET INFORMATIQUE DES SYSTEMES MANUFACTURIERS
GUYADER J.L.	VIBRATIONS-ACOUSTIQUE
GUYOMAR D.	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
HEIBIG A.	MATHEMATIQUE APPLIQUEES DE LYON
JACQUET-RICHARDET G.	MECANIQUE DES STRUCTURES
JAYET Y.	GEMPPM****
JOLION J.M.	RECONNAISSANCE DE FORMES ET VISION
JULLIEN J.F.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Structures
JUTARD A. (Prof. émérite)	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
KASTNER R.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Géotechnique
KOULOUMDJIAN J. (Prof. émérite)	INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION
LAGARDE M.	BIOCHIMIE ET PHARMACOLOGIE
LALANNE M. (Prof. émérite)	MECANIQUE DES STRUCTURES
LALLEMAND A.	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Energétique et thermique
LALLEMAND M. (Mme)	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Energétique et thermique
LAREAL P. (Prof. émérite)	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Géotechnique
LAUGIER A. (Prof. émérite)	PHYSIQUE DE LA MATIERE
LAUGIER C.	BIOCHIMIE ET PHARMACOLOGIE
LAURINI R.	INFORMATIQUE EN IMAGE ET SYSTEMES D'INFORMATION
LEJEUNE P.	UNITE MICROBIOLOGIE ET GENETIQUE
LUBRECHT A.	LAMCOS*****
MASSARD N.	INTERACTION COLLABORATIVE TELEFORMATION TELEACTIVITE
MAZILLE H. (Prof. émérite)	PHYSICOCHIMIE INDUSTRIELLE
MERLE P.	GEMPPM****
MERLIN J.	GEMPPM****
MIGNOTTE A. (Mle)	INGENIERIE, INFORMATIQUE INDUSTRIELLE
MILLET J.P.	PHYSICOCHIMIE INDUSTRIELLE
MIRAMOND M.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Hydrologie urbaine
MOREL R. (Prof. émérite)	MECANIQUE DES FLUIDES ET D'ACOUSTIQUES
MOSZKOWICZ P.	LAEPSI*****
NARDON P. (Prof. émérite)	BIOLOGIE FONCTIONNELLE, INSECTES ET INTERACTIONS
NAVARRO Alain (Prof. émérite)	LAEPSI*****
NELIAS D.	LAMCOS*****
NIEL E.	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
NORMAND B.	GEMPPM
NORTIER P.	DREP
ODET C.	CREATIS**
OTTERBEIN M. (Prof. émérite)	LAEPSI*****
PARIZET E.	VIBRATIONS-ACOUSTIQUE
PASCAULT J.P.	INGENIERIE DES MATERIAUX POLYMERES
PAVIC G.	VIBRATIONS-ACOUSTIQUE
PECORARO S.	GEMPPM
PELLETIER J.M.	GEMPPM****
PERA J.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Matériaux
PERRIAT P.	GEMPPM****
PERRIN J.	INTERACTION COLLABORATIVE TELEFORMATION TELEACTIVITE
PINARD P. (Prof. émérite)	PHYSIQUE DE LA MATIERE
PINON J.M.	INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION
PONCET A.	PHYSIQUE DE LA MATIERE
POUSIN J.	MODELISATION MATHEMATIQUE ET CALCUL SCIENTIFIQUE
PREVOT P.	INTERACTION COLLABORATIVE TELEFORMATION TELEACTIVITE
PROST R.	CREATIS**
RAYNAUD M.	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Transferts Interfaces et Matériaux
REDARCE H.	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
RETIF J.M.	CEGELY*
REYNOUARD J.M.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Structures
RICHARD C.	LGEF
RIGAL J.F.	LAMCOS*****
RIEUTORD E. (Prof. émérite)	MECANIQUE DES FLUIDES
ROBERT-BAUDOY J. (Mme) (Prof. émérite)	GENETIQUE MOLECULAIRE DES MICROORGANISMES
ROUBY D.	GEMPPM****
ROUX J.J.	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Thermique de l'Habitat
RUBEL P.	INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION
SACADURA J.F.	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Transferts Interfaces et Matériaux
SAUTEREAU H.	INGENIERIE DES MATERIAUX POLYMERES
SCAVARDA S. (Prof. émérite)	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
SOUIFI A.	PHYSIQUE DE LA MATIERE
SOUROUILLE J.L.	INGENIERIE INFORMATIQUE INDUSTRIELLE
THOMASSET D.	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
THUDEROZ C.	ESCHIL - Equipe Sciences Humaines de l'Insa de Lyon
UBEDA S.	CENTRE D'INNOV. EN TELECOM ET INTEGRATION DE SERVICES
VELEX P.	LAMCOS*****
VERMANDE P. (Prof. émérite)	LAEPSI

VIGIER G.
VINCENT A.
VRAY D.
VUILLERMOZ P.L. (Prof. émérite)

GEMPPM^{****}
GEMPPM^{****}
CREATIS^{**}
PHYSIQUE DE LA MATIERE

Directeurs de recherche C.N.R.S. :

BERTHIER Y.
CONDEMIN G.
COTTE-PATAT N. (Mme)
ESCUDIE D. (Mme)
FRANCIOSI P.
MANDRAND M.A. (Mme)
POUSIN G.
ROCHE A.
SEGUELA A.
VERGNE P.

LAMCOS^{*****}
UNITE MICROBIOLOGIE ET GENETIQUE
UNITE MICROBIOLOGIE ET GENETIQUE
CENTRE DE THERMIQUE DE LYON
GEMPPM^{****}
UNITE MICROBIOLOGIE ET GENETIQUE
BIOLOGIE ET PHARMACOLOGIE
INGENIERIE DES MATERIAUX POLYMERES
GEMPPM^{****}
LAMCOS^{*****}

Directeurs de recherche I.N.R.A. :

FEBVAY G.
GRENIER S.
RAHBE Y.

BIOLOGIE FONCTIONNELLE, INSECTES ET INTERACTIONS
BIOLOGIE FONCTIONNELLE, INSECTES ET INTERACTIONS
BIOLOGIE FONCTIONNELLE, INSECTES ET INTERACTIONS

Directeurs de recherche I.N.S.E.R.M. :

KOBAYASHI T.
PRIGENT A.F. (Mme)
MAGNIN I. (Mme)

PLM
BIOLOGIE ET PHARMACOLOGIE
CREATIS^{**}

* CEGELY
** CREATIS
*** GEMPPM
**** LAEPSI
***** LAMCOS

CENTRE DE GENIE ELECTRIQUE DE LYON
CENTRE DE RECHERCHE ET D'APPLICATIONS EN TRAITEMENT DE L'IMAGE ET DU SIGNAL
GROUPE D'ETUDE METALLURGIE PHYSIQUE ET PHYSIQUE DES MATERIAUX
LABORATOIRE D'ANALYSE ENVIRONNEMENTALE DES PROCES ET SYSTEMES INDUSTRIELS
LABORATOIRE DE MECANIQUE DES CONTACTS ET DES SOLIDES

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
	CHIMIE DE LYON Responsable : M. Denis SINOÛ	M. Denis SINOÛ Université Claude Bernard Lyon 1 Lab Synthèse Asymétrique UMR UCB/CNRS 5622 Bât 308 2 ^{ème} étage 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.44.81.83 Fax : 04 78 89 89 14 sinou@univ-lyon1.fr
E2MC	ECONOMIE, ESPACE ET MODELISATION DES COMPORTEMENTS Responsable : M. Alain BONNAFOUS	M. Alain BONNAFOUS Université Lyon 2 14 avenue Berthelot MRASH M. Alain BONNAFOUS Laboratoire d'Economie des Transports 69363 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.69.72.76 Alain.bonnafous@ish-lyon.cnrs.fr
E.E.A.	ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE M. Daniel BARBIER	M. Daniel BARBIER INSA DE LYON Laboratoire Physique de la Matière Bâtiment Blaise Pascal 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43.64.43 Fax 04 72 43 60 82 Daniel.Barbier@insa-lyon.fr
E2M2	EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2M2 M. Jean-Pierre FLANDROIS	M. Jean-Pierre FLANDROIS UMR 5558 Biométrie et Biologie Evolutive Equipe Dynamique des Populations Bactériennes Faculté de Médecine Lyon-Sud Laboratoire de Bactériologie BP 1269600 OULLINS Tél : 04.78.86.31.50 Fax 04 72 43 13 88 E2m2@biomserv.univ-lyon1.fr
EDIIS	INFORMATIQUE ET INFORMATION POUR LA SOCIETE http://www.insa-lyon.fr/ediis M. Lionel BRUNIE	M. Lionel BRUNIE INSA DE LYON EDIIS Bâtiment Blaise Pascal 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43.60.55 Fax 04 72 43 60 71 ediis@insa-lyon.fr
EDISS	INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE http://www.ibcp.fr/ediss M. Alain Jean COZZONE	M. Alain Jean COZZONE IBCP (UCBL1) 7 passage du Vercors 69367 LYON Cedex 07 Tél : 04.72.72.26.75 Fax : 04 72 72 26 01 cozzone@ibcp.fr
	MATERIAUX DE LYON http://www.ec-lyon.fr/sites/edml M. Jacques JOSEPH	M. Jacques JOSEPH Ecole Centrale de Lyon Bât F7 Lab. Sciences et Techniques des Matériaux et des Surfaces 36 Avenue Guy de Collongue BP 163 69131 ECULLY Cedex Tél : 04.72.18.62.51 Fax 04 72 18 60 90 Jacques.Joseph@ec-lyon.fr
Math IF	MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE FONDAMENTALE http://www.ens-lyon.fr/MathIS M. Franck WAGNER	M. Franck WAGNER Université Claude Bernard Lyon1 Institut Girard Desargues UMR 5028 MATHEMATIQUES Bâtiment Doyen Jean Braconnier Bureau 101 Bis, 1 ^{er} étage 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43.27.86 Fax : 04 72 43 16 87 wagner@desargues.univ-lyon1.fr
MEGA	MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE http://www.lmfa.ec-lyon.fr/autres/MEGA/index.html M. François SIDOROFF	M. François SIDOROFF Ecole Centrale de Lyon Lab. Tribologie et Dynamique des Systèmes Bât G8 36 avenue Guy de Collongue BP 163 69131 ECULLY Cedex Tél : 04.72.18.62.14 Fax : 04 72 18 65 37 Francois.Sidoroff@ec-lyon.fr

*« Leur allure n'avait pas varié au cours
de l'ascension : c'était toujours cette
longue et souple foulée accompagnée par
une flexion du genou, foulée qui paraît
lente au débutant pressé d'arriver comme
si la lutte avec la montagne tolérait
l'impatience ! Et qui est cependant si
bien réglée qu'elle permet de marcher des
heures et des heures sans sentir la
fatigue. »*

Roger Frison-Roche, Premier de cordée

Resumé

Cette thèse concerne l'effet de sollicitations à fréquence variable sur le comportement dynamique de systèmes mécaniques. L'approche est analytique, numérique et expérimentale. L'attention a été portée sur les phénomènes de résonance observés lorsque que la fréquence d'excitation franchit une ou plusieurs fréquences propres du système. Les différences entre calcul et mesure au niveau de la réponse ont pu être réduites de façon significative en introduisant dans le modèle un amortissement variable issu de la méthode métrique originale proposée dans [AL MAJID, A. 2002]. Il est montré que cette méthode constitue en effet un excellent moyen de recalage d'un modèle dans le cas où une erreur d'identification a été commise sur les paramètres du système étudié (système à un degré de liberté et système à trois degrés de liberté) mais que la rapidité du transitoire n'est pas, a priori, une condition suffisante pour observer une différence calcul-mesure. L'étude de rotors soumis à des rampes en montée et en descente a nécessité de nombreux développements de logiciels, afin, principalement, de pouvoir étudier un rotor quelconque en transitoire, sous réserve de connaître ses matrices caractéristiques dans une de ses bases modales. Les investigations expérimentales sur un rotor flexible ont permis de mettre en évidence les phénomènes mis en jeu lors d'un transitoire de vitesse (sollicitations dues aux harmoniques de la vitesse de rotation, décalage de la vitesse critique, variation de l'amplitude maximale de la vibration, différences montée-descente...). Après équilibrage du rotor, les niveaux de vibrations ont été traités pour valider le modèle sur une série de rampes en vitesse. L'identification précise des caractéristiques du système étudié (paliers, balourds, amortissements modaux, accouplement...) ne garantit pas une adéquation parfaite calcul-mesure. L'introduction d'un amortissement variable via la méthode métrique permet là aussi de caler la réponse transitoire calculée du rotor sur celle relevée expérimentalement.

Abstract

This thesis is about the effect of a time varying forcing frequency on the behavior of mechanical systems. The approach has been theoretical and numerical as well as experimental. The focus has been put on the resonance phenomenon which occurs each time the forcing frequency equals one of the system's natural frequencies.

The gap between numerical and experimental results has been significantly reduced by introducing a time varying damping function in the model using a original metric method proposed in [AL MAJID, A. 2002]. It has been shown that this method is, on one hand, an excellent way to tune a model in the case where a mistake has been made in identifying one of the parameters of the system in question for one-degree-of-freedom and three-degree-of-freedom systems. On the other hand, the intensity of the transient motion is not sufficient to generate a significant gap between the model and the experimental responses.

The study of rotors submitted to increasing and decreasing speed has required various software developments, especially for studying a rotor of any kind in transient motion, assuming that its characteristics matrices are known in one of its modal bases. The experimental investigations conducted on a flexible rotor showed the phenomena involved during transient motion (harmonic speed excitations, critical speed lag, variation of the maximum amplitude of the vibration, differences between increasing and decreasing speed, etc...). Once the rotor was balanced, the vibration levels were processed to validate the model for various transient motions. The accuracy with which the characteristics of the rotor (bearings, mass unbalance, modal damping coefficients, coupling, etc...) were determined did not guarantee that the model and the measured responses matched each other. The introduction of a time varying damping function using the metric method is again a way to tune the model to get a transient response which matches the measured one.

Remerciements

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Dynamique des Machines et des Structures (LDMS – Unité Mixte de Recherche CNRS 5006) de l'INSA de Lyon. Plusieurs personnes y ont contribué et je voudrais leur exprimer ici toute ma gratitude.

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur le professeur Régis DUFOUR, directeur du LDMS et directeur de thèse, pour l'accueil au sein du laboratoire et pour sa disponibilité. Il a toujours été sensible à mon épanouissement et à mon bien-être dans le laboratoire, je lui en suis très reconnaissant. Qu'il trouve aussi ici l'expression de ma reconnaissance pour la qualité de son encadrement et pour l'aide qu'il m'a apportée au cours de cette thèse. Il a su me guider dans mes recherches de manière intelligente et souvent très attentionnée. J'espère que le fruit de ce travail est à la hauteur de ce qu'il attendait.

J'ai eu des discussions intéressantes et fructueuses avec Monsieur le professeur Nalinaksh S. VYAS (Indian Institute of Technology - Kanpur, India) qui m'a judicieusement conseillé, je lui adresse mes sincères remerciements.

Je suis extrêmement sensible à l'honneur que me fait Monsieur Fabrice THOUVEREZ en acceptant de présider le jury de cette thèse.

Je remercie également Monsieur le professeur Bernard PESEUX (Ecole Centrale de Nantes), d'avoir bien voulu accepter de considérer mon travail et d'être rapporteur.

Je remercie par ailleurs Monsieur le professeur Bruno COCHELIN (Laboratoire de mécanique et d'Acoustique, Marseille) d'avoir bien voulu accepter d'être rapporteur et de m'avoir apporté de précieuses indications.

Je remercie vivement Monsieur Michel MIZONY pour sa participation au jury et pour l'intérêt porté à mon travail.

Ahmad AL MAJID, pour sa gentillesse et sa disponibilité, pour ses compétences scientifiques et humaines, mérite toute ma reconnaissance.

Cependant, ces remerciements ne pourraient être complets sans une attention particulière au personnel du LDMS, et plus particulièrement aux personnes suivantes :

Monique, je te remercie pour ta gentillesse et tes attentions...

Pierre-Yves, pour les moments passés ensemble, aussi bien dans notre bureau que sur les pentes enneigées des Alpes.

L'ensemble des-doctorants et ex-doctorants pour l'ambiance qui règne au laboratoire.

Bien sûr, qu'aucun des membres du laboratoire ni toutes les personnes qui m'ont également aidées (de près ou de loin dans mon travail) ne soit oublié, que tous trouvent ici l'expression de ma profonde amitié.

Enfin, toute ma reconnaissance s'adresse à trois personnes qui me sont si chères et qui ont participé à leur manière à l'aboutissement de ce travail :

Robin, pour ton invitation à découvrir le monde, notre relation s'épanouit de jour en jour, tu m'apportes un réel bonheur sans lequel il m'aurait été difficile d'en arriver à ce point, merci ma puce.

Papa et Maman pour votre aide tout au long de mon parcours. C'est en grande partie grâce à vous si je suis arrivé à ce stade aujourd'hui, merci.

Table des matières

Liste des tableaux	15
Liste des figures	16
Introduction générale	22
I Théorie : de la métrique aux équations du mouvement	26
I.1 Equation de Lagrange	26
I.1.1 Démonstration - cas d'une variable	26
I.1.2 Généralisation au cas de plusieurs variables	29
I.2 Espace cartésien – Espace curviligne – Métrique d'un espace	30
I.2.1 Définition d'une surface	30
I.2.2 Définition d'une ligne sur une surface, notion de trajet	31
I.2.3 Exemple d'une surface curviligne	31
I.2.4 Métrique d'un espace	32
I.2.5 Exemple de métrique sur la surface terrestre	33
I.3 Equations d'Euler, de Lagrange et géodésiques d'une métrique associée	37
I.3.1 Equations d'Euler et géodésiques	37
I.3.2 Equations de Lagrange et géodésiques	40
I.3.3 Métrique et systèmes tournants	41
I.4 Modélisation métrique d'un système continu	46
II Systèmes discrets en transitoire	51
II.1 Etude d'un système à un degré de liberté	51
II.1.1 Aspect expérimental	51
II.1.2 Modèle classique	56
II.1.3 Modèle métrique	63
II.1.3.a Définition du jeu de coordonnées	64
II.1.3.b Présentation de la métrique de l'espace considéré	64
II.1.3.c Equations du mouvement	65
II.1.4 Réponses stationnaires classiques et mesurées	66
II.1.5 Réponses transitoires classiques et métriques	69
II.1.6 Réponses transitoires classiques et mesurées	74
II.1.7 Perturbation des données	80
II.1.7.a Influence du pourcentage sur la réponse en transitoire, recalage	81
II.1.7.b Influence de la rampe sur la réponse avec erreur, recalage	87
II.1.7.c Conclusions	93
II.1.8 Conclusions du 1 DDL	94

II.2	Exemple d'un système à trois degrés de liberté.....	94
III	Dynamique des rotors en transitoire	102
III.1	Modèle adimensionné.....	102
III.2	Expérimentation.....	107
III.2.1	Description du banc d'essai.....	108
III.2.2	Système de commande et de surveillance.....	111
III.2.3	Mesure - Capteurs.....	112
III.2.3.a	Déplacement.....	112
III.2.3.b	Vitesse de rotation.....	114
III.2.4	Équilibrage.....	115
III.2.4.a	Définition des coefficients d'influence.....	116
III.2.4.b	Détermination des coefficients d'influence et des balourds de correction.....	118
III.2.4.c	Minimisation par les moindres carrés.....	118
III.2.4.d	Prise en compte du faux-rond électrique.....	120
III.2.4.e	Conventions angulaires.....	120
III.2.4.f	Résultats.....	121
	Acquisition avec l'analyseur HP35670A.....	122
	Etat du rotor avant équilibrage.....	122
	Calcul du balourd de correction.....	123
III.2.5	Dynamique à l'arrêt – analyse modale.....	125
III.2.5.a	Rotor libre-libre.....	125
III.2.5.b	Rotor monté sur ses paliers.....	125
	Réponse forcée.....	125
	Réponse impulsionnelle.....	127
III.2.6	Réponse transitoire au balourd.....	128
III.2.6.a	Acquisition.....	128
III.2.6.b	Traitement des données.....	130
III.2.6.c	Résultats Waterfall.....	130
III.2.6.d	Résultats rampes ordre 1.....	133
III.2.6.e	Amplitude à la résonance et vitesse critique.....	139
III.2.6.f	Résultats rampes ordre 2.....	141
III.2.6.g	Orbites 3D.....	142
III.2.6.h	Conclusions sur les réponses transitoires expérimentales.....	144
III.3	Modèle classique.....	144
III.3.1	Conception et recalage.....	145

III.3.1.a	Présentation du logiciel.....	145
III.3.1.b	Modélisation du rotor étudié.....	145
III.3.1.c	Paliers.....	146
	Formules de Palmgren – raideurs radiale et axiale	146
	Formules de Krämer – raideurs radiale et latérale.....	147
	Conclusion.....	148
III.3.1.d	Accouplement	150
III.3.2	Réponse en régime permanent.....	151
III.3.3	Validation en régime permanent	158
III.3.4	Réponse en transitoire	159
III.3.4.a	Le balourd	160
III.3.4.b	Equations de mouvement.....	161
III.3.4.c	Résolution du système d'équations	162
III.3.4.d	Procédure.....	163
III.3.4.e	Résultats.....	163
III.3.4.f	Bilan réponses classique et mesurée	171
III.3.5	Conclusions.....	171
III.4	Modèle métrique	171
III.5	Conclusion	181
	Conclusions et Perspectives	182
	Références bibliographiques	184
	Annexes	187
A	La gravitation, phénomène métrique – coordonnées cartésiennes	188
B	Equations de champs d'Einstein	191
B.1	Poisson – espace plein	191
B.2	Laplace – espace vide	194
C	Notions tensorielles	195
C.1	Tenseur de premier rang.....	195
C.2	Tenseur de deuxième rang	195
C.3	Symboles de Christoffel	195
C.3.1	Symbole de Christoffel du premier genre.....	195
C.3.2	Symbole de Christoffel du second genre.....	195
C.4	Dérivation covariante	196
C.5	Opérateurs vectoriels et dérivées covariantes.....	197
C.5.1	Gradient.....	197
C.5.2	Rotationnel.....	197
C.5.3	Divergence.....	197
C.6	Tenseur de courbure de Riemann	198

C.7	Tenseur de Ricci.....	199
C.8	Espace de Riemann	199
C.9	Espace euclidien & pseudo euclidien.....	200
D	Plans du banc rotor	201
E	Etalonnage des capteurs à courant de Foucault du rotor (CDCF)	205
F	Exemples de rotors étudiés en régime permanent	207
F.1	Rotor p117_f53.....	207
F.2	Rotor p147_7.1.....	210
G	Exemples de rotors étudiés en régime transitoire	213
G.1	Rotor p012_f21.....	213
G.2	Rotor p200_8.5.....	217

Liste des tableaux

Tableau 1 : $F1$ et $\alpha1$ en fonction de la bande fréquentielle étudiée	55
Tableau 2 : ρ en fonction de x	87
Tableau 3 : ρ en fonction de l'intensité I	93
Tableau 4 : variable et paramètres du système à trois degrés de liberté.....	95
Tableau 5 : fréquences propres du système	96
Tableau 6 : caractéristiques CDCF	114
Tableau 7 : déformée électrique	122
Tableau 8 : déformée initiale.....	123
Tableau 9 : balourd d'essai dans le plan 1	123
Tableau 10 : balourd d'essai dans le plan 2.....	123
Tableau 11 : positions angulaires et sensibilités des CDCF	123
Tableau 12 : balourds correcteurs	124
Tableau 13 : fréquences de flexion à l'arrêt, en Hz.....	127
Tableau 14 : fréquences naturelles de flexion (mesure d'après réponse impulsionnelle)	127
Tableau 15 : coefficients d'amortissement	128
Tableau 16 : fréquences naturelles.....	133
Tableau 17 : paramètres des rampes	134
Tableau 18 : amplitudes maximales (mm)	139
Tableau 19 : formules de Palmgren.....	146
Tableau 20 : variables Krämer	148
Tableau 21 : formules de Palmgren dans le cas où $\alpha = 0$	148
Tableau 22 : caractéristiques du palier côté moteur (palier 1)	149
Tableau 23 : caractéristiques du palier côté opposé au moteur (palier 2).....	149
Tableau 24 : amortissements des paliers	150
Tableau 25 : comparaison fréquences calculées (ROTORINSA) et mesurées.....	151
Tableau 26 : comparaison calcul-mesure des amplitudes maximales (mm).....	171
Tableau 27 : recalage métrique des amplitudes maximales (mm).....	174
Tableau 28 : valeur de ρ en fonction de la rampe	174

Liste des figures

Figure 1 : plan de recherche.....	24
Figure 2 : exemple de surface curviligne.....	32
Figure 3 : surface sphérique	34
Figure 4 : dispositif expérimental à un degré de liberté de rotation	52
Figure 5 : face avant de l'analyseur HP35670A – in situ.....	52
Figure 6 : générateur de fonctions HP33120A	53
Figure 7 : exemple de profil d'excitation en fréquence.....	54
Figure 8 : pilotage du pot d'excitation	55
Figure 9 : fonction de transfert mesurée – 15 - 25 Hz.....	56
Figure 10 : modèle proposé	56
Figure 11 : réponses adimensionnées du modèle 1DDL	60
Figure 12 : balayage sinus 5 - 100 Hz.....	66
Figure 13 : balayage sinus 15 - 25 Hz.....	67
Figure 14 : 5 Hz	67
Figure 15 : 10 Hz	68
Figure 16 : 20 Hz – Amplitude log	68
Figure 17 : $\rho = 1$	69
Figure 18 : $\rho = 2 \times 10^{-5}$	70
Figure 19 : $\rho = 8 \times 10^{-6}$	70
Figure 20 : $\rho = 4 \times 10^{-6}$	71
Figure 21 : $\rho = 1$	72
Figure 22 : $\rho = 2 \times 10^{-5}$	72
Figure 23 : $\rho = 8 \times 10^{-6}$	73
Figure 24 : $\rho = 4 \times 10^{-6}$	73
Figure 25 : $t_m = 1 s / t_p = 1 s$ force	74
Figure 26 : $t_m = 1 s / t_p = 1 s$ déplacement	75
Figure 27 : $t_m = 1 s / t_p = 1 s$ analyse fréquentielle	75
Figure 28 : $t_m = 0.5 s / t_p = 0.5 s$ force.....	76
Figure 29 : $t_m = 0.5 s / t_p = 0.5 s$ déplacement	76

Figure 30 : $t_m = 0.2 \text{ s} / t_p = 0.8 \text{ s}$ force	77
Figure 31 : $t_m = 0.2 \text{ s} / t_p = 0.8 \text{ s}$ déplacement	77
Figure 32 : $t_m = 0.2 \text{ s} / t_p = 0.8 \text{ s}$ analyse fréquentielle	78
Figure 33 : $t_m = 0.1 \text{ s} / t_p = 0.9 \text{ s}$ force	78
Figure 34 : $t_m = 0.1 \text{ s} / t_p = 0.9 \text{ s}$ déplacement	79
Figure 35 : $t_m = 0.05 \text{ s} / t_p = 0.95 \text{ s}$ force	79
Figure 36 : $t_m = 0.05 \text{ s} / t_p = 0.95 \text{ s}$ déplacement	80
Figure 37 : $x = 0$ fonction de transfert	81
Figure 38 : $x = 0$ réponses	81
Figure 39 : $x = 5$ fonction de transfert	82
Figure 40 : $x = 5$ réponses	82
Figure 41 : $x = 10$ fonction de transfert	83
Figure 42 : $x = 10$ réponses	83
Figure 43 : $x = 20$ fonction de transfert	84
Figure 44 : $x = 20$ réponses	84
Figure 45 : $x = 50$ fonction de transfert	85
Figure 46 : $x = 50$ réponses	85
Figure 47 : $t_m = 1 \text{ s} / t_p = 1 \text{ s}$, $\rho = 3.1 \times 10^{-5}$	86
Figure 48 : $t_m = 1 \text{ s} / t_p = 1 \text{ s}$, $x = 50$, $\rho = 3.1 \times 10^{-5}$	87
Figure 49 : $t_m = 1 \text{ s} / t_p = 1 \text{ s}$ réponses	88
Figure 50 : $t_m = 1 \text{ s} / t_p = 1 \text{ s}$ analyse fréquentielle	88
Figure 51 : $t_m = 0.5 \text{ s} / t_p = 0.5 \text{ s}$ réponses	89
Figure 52 : $t_m = 0.2 \text{ s} / t_p = 0.8 \text{ s}$ réponses	89
Figure 53 : $t_m = 0.2 \text{ s} / t_p = 0.8 \text{ s}$ analyse fréquentielle	90
Figure 54 : $t_m = 0.1 \text{ s} / t_p = 0.9 \text{ s}$ réponses	90
Figure 55 : $t_m = 0.05 \text{ s} / t_p = 0.95 \text{ s}$ réponses	91
Figure 56 : $\rho = 4.5 \times 10^{-5}$	91
Figure 57 : $\rho = 5 \times 10^{-6}$	92
Figure 58 : $\rho = 2.3 \times 10^{-5}$	92
Figure 59 : $\rho = 6 \times 10^{-6}$	93
Figure 60 : schéma du dispositif expérimental	94
Figure 61 : force d'excitation (0 - 50 Hz)	96
Figure 62 : réponse du modèle classique comparée à la réponse expérimentale	100
Figure 63 : réponses métrique calculée (pointillé) et expérimentale (continu)	100

Figure 64 : coefficients d'amortissement modaux métriques (continu) et classique (pointillé)..	101
Figure 65 : schéma du rotor simple	103
Figure 66 : pas d'amortissement	106
Figure 67 : amortissement moyen	106
Figure 68 : amortissement fort	107
Figure 69 : banc perspective.....	108
Figure 70 : moteur	109
Figure 71 : frettes et disque	109
Figure 72 : détails des frettes	110
Figure 73 : accouplement	110
Figure 74 : plan du milieu de l'arbre ($C1$ et $C2$).....	112
Figure 75 : plan du disque ($C3$ et $C4$).....	113
Figure 76 : implantation capteurs	113
Figure 77 : top et capteur de top	114
Figure 78 : compteur impulsif.....	115
Figure 79 : répartition du balourd sur le rotor	116
Figure 80 : modélisation de la répartition du balourd sur le rotor.....	116
Figure 81 : conventions et notations angulaires.....	120
Figure 82 : déphasage entre CDCF et capteur de top	121
Figure 83 : efficacité théorique du balourd correcteur à 3114 tr/min	124
Figure 84 : protocole de l'analyse dans le plan vertical	125
Figure 85 : résultats de l'analyse dans le plan vertical 0 – 800 Hz	126
Figure 86 : protocole de l'analyse dans le plan horizontal	126
Figure 87 : résultats de l'analyse dans le plan horizontal 0 – 800 Hz	127
Figure 88 : face avant du frontal d'acquisition SCADAS III	129
Figure 89 : $C1$ vue 3D isométrique, représentation en fréquence.....	130
Figure 90 : $C1$ vue 3D isométrique, représentation en ordre	131
Figure 91 : $C1$ vue 3D de dessus	132
Figure 92 : $C1 + C2 + C3 + C4$ dessus	133
Figure 93 : rampe $i = 0$ - résultats 180 s, ordre 1.....	134
Figure 94 : rampe $i = 1$ - résultats 060 s, ordre 1	135
Figure 95 : rampe $i = 2$ - résultats 060 s, ordre 1	135
Figure 96 : rampe $i = 3$ - résultats 010 s, ordre 1.....	136
Figure 97 : rampe $i = 4$ - résultats 005 s, ordre 1.....	136
Figure 98 : rampe $i = 5$ - résultats 001 s, ordre 1.....	137
Figure 99 : résultats montée, ordre 1	137

Figure 100 : résultats descente, ordre 1.....	138
Figure 101 : résultats montée et descente en linéaire	138
Figure 102 : X_r et Ω_r en fonction de la rampe	139
Figure 103 : $\frac{X_r^i}{X_r^0}$ et $\frac{\alpha_i}{\alpha_0}$ en fonction de $\frac{I_i}{I_0}$	140
Figure 104 : résultats montée.....	141
Figure 105 : résultats descente	141
Figure 106 : évolution de l'orbite dans le plan du milieu de l'arbre au cours du transitoire de 0 à 6000 tr/min, ordre 1	142
Figure 107 : évolution de l'orbite dans le plan du milieu de l'arbre au cours du transitoire de 0 à 6000 tr/min, ordre 1 – vue de face.....	143
Figure 108 : évolution de l'orbite dans le plan du milieu de l'arbre au cours du transitoire de 0 à 6000 tr/min, ordre 2	143
Figure 109 : évolution de l'orbite dans le plan du milieu de l'arbre au cours du transitoire de 0 à 6000 tr/min, ordre 2 – vue de face	144
Figure 110 : géométrie du modèle	145
Figure 111 : modèle éléments finis	146
Figure 112 : recalage de l'accouplement	150
Figure 113 : mode 1 précession inverse.....	152
Figure 114 : mode 1 précession directe.....	152
Figure 115 : mode 2 précession inverse.....	153
Figure 116 : mode 5 précession directe.....	153
Figure 117 : mode 3 précession inverse.....	154
Figure 118 : mode 5 précession directe.....	154
Figure 119 : mode 4 précession inverse.....	155
Figure 120 : mode 5 précession directe.....	155
Figure 121 : mode 5 précession inverse.....	156
Figure 122 : mode 5 précession directe.....	156
Figure 123 : diagramme de Campbell.....	157
Figure 124 : diagramme de Campbell - agrandissement	157
Figure 125 : réponse au balourd.....	158
Figure 126 : réponses au balourd ROTORINSA et MATLAB-SIMULINK montée $i = 0$ représentation logarithmique.....	159
Figure 127 : paramétrage du balourd.....	160
Figure 128 : réponses au balourd ROTORINSA et MATLAB-SIMULINK montée $i = 1$ représentation logarithmique.....	164
Figure 129 : réponses au balourd ROTORINSA et MATLAB-SIMULINK montée $i = 2$ représentation logarithmique.....	164

Figure 130 : réponses au balourd ROTORINSA et MATLAB-SIMULINK montée $i = 3$ représentation logarithmique.....	165
Figure 131 : réponses au balourd ROTORINSA et MATLAB-SIMULINK montée $i = 4$ représentation logarithmique.....	165
Figure 132 : réponses au balourd ROTORINSA et MATLAB-SIMULINK montée $i = 5$ représentation linéaire.....	166
Figure 133 : réponses au balourd descente $i = 0$ représentation logarithmique.....	166
Figure 134 : réponses au balourd descente $i = 1$ représentation logarithmique.....	167
Figure 135 : réponses au balourd descente $i = 2$ représentation logarithmique.....	167
Figure 136 : réponses au balourd descente $i = 3$ représentation logarithmique.....	168
Figure 137 : réponses au balourd descente $i = 4$ représentation logarithmique.....	168
Figure 138 : réponses au balourd descente $i = 5$ représentation logarithmique.....	169
Figure 139 : réponses au balourd MATLAB-SIMULINK, montées.....	169
Figure 140 : réponses au balourd MATLAB-SIMULINK, descentes.....	170
Figure 141 : réponses MATLAB-SIMULINK montées-descentes.....	170
Figure 142 : $i = 0$, montée.....	175
Figure 143 : $i = 0$, descente.....	175
Figure 144 : $i = 1$, montée.....	176
Figure 145 : $i = 1$, descente.....	176
Figure 146 : $i = 2$, montée.....	177
Figure 147 : $i = 2$, descente.....	177
Figure 148 : $i = 3$, montée.....	178
Figure 149 : $i = 3$, descente.....	178
Figure 150 : $i = 4$, montée.....	179
Figure 151 : $i = 4$, descente.....	179
Figure 152 : $i = 5$, montée.....	180
Figure 153 : $i = 5$, descente.....	180
Figure 154 : base curviligne.....	196
Figure 155 : rotor + bâti - face.....	201
Figure 156 : rotor + bâti.....	201
Figure 157 : disque + frettes.....	202
Figure 158 : palier côté moteur.....	202
Figure 159 : palier côté moteur zoom.....	203
Figure 160 : usinage palier côté opposé au moteur.....	203
Figure 161 : palier côté opposé au moteur.....	204
Figure 162 : étalonnage des CDCF TQ102.....	205

Figure 163 : étalonnage des CDCF TQ103.....	206
Figure 164 : modèle EF.....	207
Figure 165 : diagramme de Campbell.....	208
Figure 166 : réponse au balourd ROTORINSA.....	208
Figure 167 : réponses au balourd ROTORINSA et MATLAB-SIMULINK de 0 à 50000 tr/min en 900 s.....	209
Figure 168 : modèle EF.....	210
Figure 169 : diagramme de Campbell.....	210
Figure 170 : réponse au balourd.....	211
Figure 171 : réponses au balourd ROTORINSA et MATLAB-SIMULINK de 0 à 60000 tr/min en 300 s.....	212
Figure 172 : modèle EF 18 éléments	213
Figure 173 : 12s.....	214
Figure 174 : 4s	214
Figure 175 : 1s	215
Figure 176 : $\beta = 0.015$	215
Figure 177 : $\beta = 0$	216
Figure 178 : 12 s	216
Figure 179 : 4 s	217
Figure 180 : 1 s	217
Figure 181 : modèle EF.....	218
Figure 182 : diagramme de Campbell.....	218
Figure 183 : réponse transitoire – disques d'aluminium.....	219
Figure 184 : réponse transitoire – disques d'acier.....	219

Introduction générale

La dissipation a des effets complexes : effet amortissant dans les zones d'amplification proches des phénomènes de résonance, effet amplifiant dans les zones d'atténuation, effet déstabilisant si trop d'amortissement comme dans le cas de la dynamique des rotors [LALANNE, M. et FERRARIS, G. 1998].

La réponse des systèmes mécaniques est grandement influencée par l'amortissement, qui a un effet dissipatif.

Plus généralement, l'amortissement dans les systèmes mécaniques est délicat et compliqué à modéliser ; il dépend particulièrement du type de l'excitation voir par exemple [EVAN-IWANOWSKI, R. M. 1976; IRRETIER, H. et BALASHOV, D. 1999] et [MITROPOL'SKI, Y., A. 1964]

La dissipation de l'énergie dépend d'un grand nombre de facteurs [EVAN-IWANOWSKI, R. M. 1976; LALANNE, M. *et al.* 1983; NASHIF, A. D. *et al.* 1985; GJIKA, K. 1994; JONES, D. G. 2001] :

- facteurs internes : type de matériaux, composition chimique, structure cristalline ou amorphe...
- facteurs externes : température, charge initiale, contrainte initiale...
- facteurs liés au mouvement : amplitude et fréquence de déformation, état de l'effort...
- facteurs propres au spécimen : géométrie, état de surfaces...

L'amortissement est souvent introduit de manière artificielle dans les calculs prévisionnels pour les recaler au mieux avec les résultats expérimentaux. Ainsi, dans le cas de l'hypothèse de modes découplés, les termes d'amortissement sont directement introduits dans les équations modales.

Par ailleurs, les machines tournantes actuelles, de plus en plus légères et performantes comportent une ou plusieurs vitesses critiques dans leur plage de fonctionnement. Le passage d'une ou plusieurs vitesse(s) critique(s) est alors inévitable pour atteindre la vitesse de fonctionnement et lors de l'arrêt de la machine.

Le passage d'une vitesse critique (correspondance entre la fréquence de rotation et une fréquence propre du rotor) implique un accroissement important des vibrations qui peuvent alors détériorer, voire conduire à la rupture de la machine.

Quantifier l'amortissement au passage d'une vitesse critique est donc primordial.

Dans [LACROIX, J. 1988], les phénomènes apparaissant au passage d'une vitesse critique ont été mis en évidence expérimentalement et étudiés. Ainsi, l'amplitude de la réponse à la résonance est d'autant plus petite que l'accélération est importante. Par ailleurs, le retard de l'apparition du maximum d'amplitude croît avec l'accélération.

Ces résultats avaient été mis en évidence sur des modèles par [TIMOSHENKO, S. 1955] pour le cas d'un système à un degré de liberté en transitoire et par [LEWIS, F. M. 1932] et [VYAS, S. et al. 1987] dans le cas de rotors.

Il a aussi été observé que lors de montées en vitesse (ou descente) rapides, l'amplitude des vibrations expérimentales restait en deça des prévisions du modèle, même en tenant compte de l'amplitude décroissante des vibrations au passage de la vitesse critique due à l'accélération et en bénéficiant d'un modèle bien recalé en régime permanent.

Il est difficile d'obtenir, avec une grande satisfaction des réponses calculées qui correspondent bien aux résultats expérimentaux tant en régime permanent que transitoire.

La thèse [AL MAJID, A. 2002] a notamment porté sur les régimes transitoires rapides et a démontré que perturber la métrique, c'est à dire courber l'espace, permettait de caler les réponses calculées de systèmes mécaniques sur les réponses mesurées. L'hypothèse de départ a été d'introduire une fonction de la variation de la fréquence d'excitation pour perturber la métrique. En utilisant les outils de la relativité il a été établi les équations du mouvement classiques couplées à des équations différentielles générant un amortissement variable au cours de l'évolution en fréquence à condition de caler un coefficient non calculable a priori.

Fort de cette première approche, la thèse présentée ici s'est attachée à monter des expérimentations les plus fines possibles (système mécanique discret à un degré de liberté et un continu de dynamique des rotor) afin de savoir si un régime transitoire élevé génère un amortissement supplémentaire variable et ainsi, de valider et d'étendre la méthode proposée par [AL MAJID, A. 2002] aux machines tournantes soumises à des transitoires de vitesse rapides.

Afin de prévoir efficacement le comportement dynamique de rotors en transitoire, il s'agit d'établir des modèles mécaniques basés sur :

- des fondements mathématiques solides afin d'éviter les problèmes de résolution
- des observations expérimentales qui prennent en compte qualitativement et quantitativement les facteurs et effets mentionnés préalablement,
- des résultats expérimentaux afin de caler et de valider (voir figure 1).

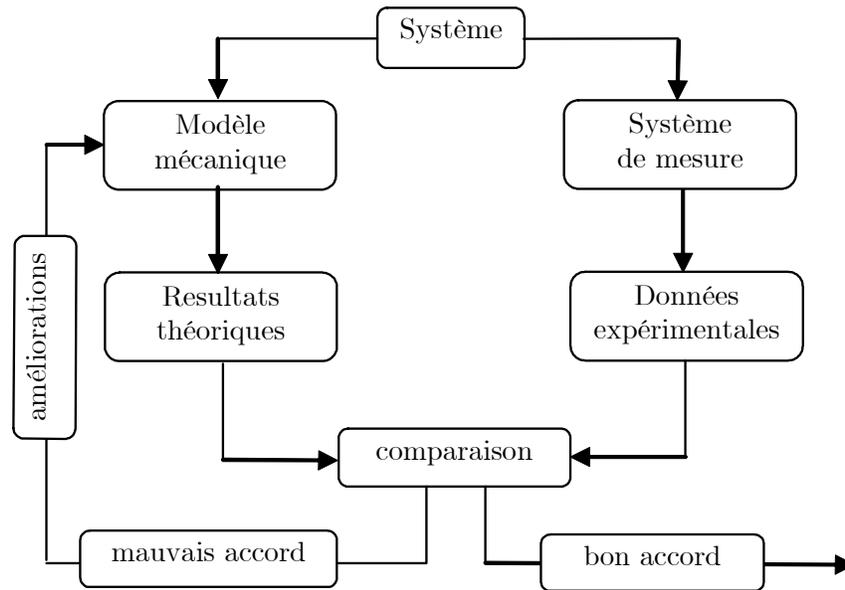


Figure 1 : plan de recherche

Le mémoire se divise en trois parties.

La partie I présente la méthode métrique pour obtenir les équations du mouvement d'un système influencé par un paramètre. Mais auparavant cette partie est consacrée, chapitre I.1, à la méthode d'obtention des équations d'Euler par minimisation d'une distance. Le chapitre I.2 s'intéresse plus particulièrement aux espaces courbes. Par la suite, au chapitre I.3, le calcul de distance au moyen d'une métrique dans un espace courbe est traité. Au chapitre I.4, la méthode de modélisation d'un système continu est abordée sous l'approche métrique, avec notamment, l'utilisation de la base modale.

La partie II aborde le cas de systèmes discrets en transitoire. L'étude est développée en profondeur sur un système à un degré de liberté (chapitre II.1), l'aspect expérimental est traité puis, après la modélisation classique et la mise en œuvre de la méthode métrique, les résultats calcul-mesure sont comparés. Un système à trois degrés de liberté est ensuite traité en exemple au chapitre II.2.

Dans la partie III, il s'agit d'étudier le comportement dynamique de rotors en régime transitoire. Le chapitre III.1, afin de fixer la problématique et d'appréhender le comportement de machines tournantes en transitoire, présente le cas d'un rotor académique simple, traité sous forme adimensionnée. Les phénomènes dus au transitoire de vitesse sont mis en évidence. Au chapitre III.2, le banc d'essai développé dans le cadre de cette thèse est présenté et finement caractérisé. Au chapitre III.3, la modélisation classique du rotor étudié est présentée. Son modèle éléments finis est validé et utilisé pour vérifier son comportement en transitoire. L'utilisation d'un modèle métrique de rotor est présentée dans le chapitre III.4. Les conclusions de cette partie figurent au chapitre III.5.

Les annexes, une fois l'exemple de la gravitation traitée comme phénomène métrique (annexe A), présentent les équations de champ d'Einstein, équations à la base de la détermination des coefficients de la métrique (annexe B). Quelques notions tensorielles sont ensuite présentées pour une bonne compréhension des étapes de l'établissement des équations géodésiques (annexe C). Les annexes suivantes (D et E) représentent des compléments à l'étude expérimentale. Lors de la validation du modèle d'étude de rotors en régime transitoire, plusieurs rotors, aussi bien académiques qu'industriels, ont été traités (voir annexes F et G).

I Théorie : de la métrique aux équations du mouvement

Pour étudier l'influence du mouvement transitoire sur le comportement dynamique de structure ou système, il semble important de construire les équations du mouvement en les formalisant à partir de la minimisation d'une fonctionnelle et en mettant en évidence le rôle de la métrique de l'espace et des dimensions de ce dernier.

Lier la géométrie différentielle avec la mécanique, en particulier en dynamique est un problème qui déjà suscité les intérêts scientifiques et met rapidement en jeu les principes relativistes (voir notamment [FOCK, V. 1961; BAUSSET, M. 1982; ELBAZ, E. 1986; LEITE LOPES, J. 1993; MC COMB, W. D. 1999; GURTIN, M. E. 2000]). Si des ouvrages comme [CHILOV, G. 1975; DOUBROUVINE, B. *et al.* 1979; TALPAERT, Y. 1993] permettent d'aborder sereinement le domaine de la géométrie différentielle, de comprendre les notations tensorielles et offrent quelques exemples d'applications, cette démarche n'est pas familière au mécanicien et ce chapitre s'attache à décrire en détails le cheminement qui permet d'établir les équations du mouvement.

I.1 Equation de Lagrange

Afin d'appréhender les étapes de l'obtention des équations du mouvement à partir de la minimisation d'une distance, l'exemple des équations d'Euler est tout d'abord pris en compte.

I.1.1 Démonstration - cas d'une variable

Soit une application x^k , de classe C^1 par morceaux de $[p_1, p_2]$ dans \mathbb{R} , définie par (1).

$$\begin{aligned} x^k : \quad [p_1, p_2] &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto x^k(p) \end{aligned} \tag{1}$$

Soit E l'ensemble des fonctions x^k , de classe C^1 par morceaux de $[p_1, p_2]$ dans \mathbb{R} , telles que (2) soit vérifiée.

$$\begin{aligned}x^k(p_1) &= x_1 \\x^k(p_2) &= x_2\end{aligned}\tag{2}$$

Soit la fonction J définie par (3).

$$\begin{aligned}J : E &\rightarrow \mathbb{R} \\x^k &\mapsto J_k = \int_{p_1}^{p_2} L(x^k(p), \dot{x}^k(p), p) dp\end{aligned}\tag{3}$$

Avec :

$$\dot{x}^k(p) = \frac{d}{dp}(x^k(p))\tag{4}$$

Les notions de voisinage et de minimum d'une fonction sont maintenant abordées.

$V_\mu \subset E$ est un voisinage ouvert de la fonction x^m si et seulement s'il vérifie (5).

$$\exists \mu \geq 0 / \forall x^k \in V_\mu, \forall p \in [p_1, p_2], |x^k(p) - x^m(p)| < \mu\tag{5}$$

La fonction $x^m \in E$ fournit alors un minimum (relatif) pour J s'il existe un voisinage ouvert $V_\mu \subset E$ de la fonction X^m tel que (6) est vérifiée.

$$\forall x^k \in V_\mu, J_k \geq J_m\tag{6}$$

L'étape suivante de la démonstration est de considérer, sous réserve d'existence, une fonction x^m qui fournit un minimum (relatif) pour J .

Dans ce cas, il existe un voisinage ouvert $V_\mu \subset E$ de la fonction x^m tel que (6) soit vérifiée.

A l'aide de cette fonction x^m , d'une fonction η , de classe C^1 par morceaux de $[p_1, p_2]$ dans \mathbb{R} , s'annulant en p_1 et p_2 et de $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction x^α est définie par (7).

$$x^\alpha = x^m + \alpha\eta\tag{7}$$

Ainsi, les conditions (8) et (9) sont vérifiées.

$$x^\alpha \in E\tag{8}$$

$$\forall p \in [p_1, p_2], |x^\alpha(p) - x^m(p)| = |\alpha\eta(p)|\tag{9}$$

Ce qui conduit à (10).

$$\exists \alpha_{\max} \geq 0 / \forall \alpha \leq \alpha_{\max}, \forall p \in [p_1, p_2], |x^\alpha(p) - x^m(p)| < \mu \quad (10)$$

Soit :

$$\forall \alpha \leq \alpha_{\max}, x^\alpha \in V_\mu \quad (11)$$

Donc :

$$\forall \alpha \leq \alpha_{\max}, J_\alpha \geq J_m \quad (12)$$

La fonction I est alors définie par (13).

$$\begin{aligned} I : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\mapsto I(\alpha) = J_\alpha \end{aligned} \quad (13)$$

Comme par hypothèse, x^m fournit un minimum (relatif) pour J , la condition suivante doit être respectée :

$$\lim_{x^\alpha \rightarrow x^m} \frac{J_\alpha - J_m}{x^\alpha - x^m} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{I(\alpha) - I(0)}{\alpha} = \frac{dI}{d\alpha}(0) = 0 \quad (14)$$

Qui, explicitée, donne les équations suivantes :

$$\frac{dI}{d\alpha}(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \left(\int_{p_1}^{p_2} L(x^\alpha(p), \dot{x}^\alpha(p), p) dp \right) \quad (15)$$

$$\frac{dI}{d\alpha}(\alpha) = \int_{p_1}^{p_2} \left(\frac{\partial L(x^\alpha, \dot{x}^\alpha, p)}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial L(x^\alpha, \dot{x}^\alpha, p)}{\partial \dot{x}^\alpha} \frac{\partial \dot{x}^\alpha}{\partial \alpha} \right) dp \quad (16)$$

$$\frac{dI}{d\alpha}(\alpha) = \int_{p_1}^{p_2} \left(\frac{\partial L(x^m + \alpha\eta, \dot{x}^m + \alpha\dot{\eta}, p)}{\partial (x^m + \alpha\eta)} \eta + \frac{\partial L(x^m + \alpha\eta, \dot{x}^m + \alpha\dot{\eta}, p)}{\partial (\dot{x}^m + \alpha\dot{\eta})} \dot{\eta} \right) dp \quad (17)$$

D'où :

$$\frac{dI}{d\alpha}(0) = \int_{p_2}^{p_1} \left(\frac{\partial L(x^m, \dot{x}^m, p)}{\partial x^m} \eta + \frac{\partial L(x^m, \dot{x}^m, p)}{\partial \dot{x}^m} \dot{\eta} \right) dp \quad (18)$$

Or :

$$\begin{aligned} \int_{p_1}^{p_2} \frac{\partial L(x^m, \dot{x}^m, p)}{\partial \dot{x}^m} \dot{\eta} dp &= \left[\frac{\partial L(x^m, \dot{x}^m, p)}{\partial \dot{x}^m} \eta(p) \right]_{p_1}^{p_2} - \int_{p_1}^{p_2} \frac{d}{dp} \left(\frac{\partial L(x^m, \dot{x}^m, p)}{\partial \dot{x}^m} \right) \eta(p) dp \\ \int_{p_1}^{p_2} \frac{\partial L(x^m, \dot{x}^m, p)}{\partial \dot{x}^m} \dot{\eta} dp &= - \int_{p_1}^{p_2} \frac{d}{dp} \left(\frac{\partial L(x^m, \dot{x}^m, p)}{\partial \dot{x}^m} \right) \eta(p) dp \end{aligned} \quad (19)$$

Donc :

$$\frac{dI}{d\alpha}(0) = \int_{p_1}^{p_2} \left(\frac{\partial L(x^m, \dot{x}^m, p)}{\partial x^m} - \frac{d}{dp} \left(\frac{\partial L(x^m, \dot{x}^m, p)}{\partial \dot{x}^m} \right) \right) \eta(p) dp \quad (20)$$

En conclusion, si la fonction x^m fournit un minimum (relatif) pour J alors elle vérifie l'équation d'Euler :

$$\frac{\partial L(x^m, \dot{x}^m, p)}{\partial x^m} - \frac{d}{dp} \left(\frac{\partial L(x^m, \dot{x}^m, p)}{\partial \dot{x}^m} \right) = 0 \quad (21)$$

I.1.2 Généralisation au cas de plusieurs variables

Le cas où J , définie par (22), dépend de plusieurs fonctions $(x^1, x^2 \dots x^r)$ est maintenant considéré.

$$\begin{aligned} J : \quad E \times E \dots E &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x^1, x^2 \dots x^r) &\mapsto J_k = \int_{p_1}^{p_2} L(x^1, x^2 \dots x^r, \dot{x}^1, \dot{x}^2 \dots \dot{x}^r, p) dp \end{aligned} \quad (22)$$

Si la ligne définie par $p \mapsto x^m(p) = (x^1(p), x^2(p) \dots x^r(p))$ fournit un minimum (relatif) pour J , alors elle est telle que les équations d'Euler (23) sont vérifiées.

$$\forall j \in [1, r], \frac{\partial L}{\partial x^j} - \frac{d}{dp} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j} \right) = 0 \quad (23)$$

I.2 Espace cartésien – Espace curviligne – Métrique d'un espace

L'utilisation d'un espace courbe en mécanique reste peu fréquente. L'objectif de ce chapitre est de présenter les définitions d'espace courbe et de métrique d'un espace afin d'appréhender ces notions.

I.2.1 Définition d'une surface

Soient $(O, y^1, y^2 \dots y^N)$ le repère cartésien et $(P, x^1, x^2 \dots x^n)$ le repère curviligne.

$x^k, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ sont les paramètres de la surface de dimension n . Cette surface est déterminée par les N équations de liaison (24).

$$\begin{aligned} y^1 &= y^1(x^1, x^2 \dots x^n) \\ y^2 &= y^2(x^1, x^2 \dots x^n) \\ &\vdots \\ y^N &= y^N(x^1, x^2 \dots x^n) \end{aligned} \tag{24}$$

Il est possible d'écrire N équations de liaison (24) définissant la surface curviligne sous la forme vectorielle présentée en (25) et (26).

$$\vec{r} = \overrightarrow{r(x)} \tag{25}$$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^N \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} \tag{26}$$

Les \vec{r}_k , n vecteurs linéairement indépendants et tangents à la surface de dimension n , sont alors définis par (27).

$$\vec{r}_k = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^k}, \quad k \in \llbracket 1, n \rrbracket \tag{27}$$

Ainsi, $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, \vec{r}_k est tangent à la ligne “ x^k varie et $x^{\mu \neq k}$ constant”. $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n)$ est une base de la surface de dimension n . Les vecteurs \vec{e}_k sont maintenant définis par (28) et (29).

$$\vec{e}_k = \frac{\vec{r}_k}{\|\vec{r}_k\|} = \frac{\vec{r}_k}{h_k} \quad (28)$$

$$h_k = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^k} \right\| \quad (29)$$

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est donc une base normée de la surface de dimension n .

I.2.2 Définition d’une ligne sur une surface, notion de trajet

Soit L une ligne (de dimension 1) de la surface de dimension n .

Cette ligne peut être définie par les n équations paramétriques suivantes :

$$x^k = x^k(p), (k, p) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times [a, b] \quad (30)$$

Sous forme vectorielle, elles deviennent :

$$\vec{r} = \overline{r(x(p))} \quad (31)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dp} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^k} \frac{dx^k}{dp} = \sum_{k=1}^n \dot{x}^k \vec{r}_k \quad (32)$$

$$d\vec{r} = \sum_{k=1}^n dx^k \vec{r}_k \quad (33)$$

$$d\vec{r} = \sum_{k=1}^n h_k dx^k \vec{e}_k \quad (34)$$

I.2.3 Exemple d’une surface curviligne

Dans (O, y^1, y^2, y^3) , $N = 3$ et la surface de dimension 2 ($n = 2$) définie par (35) et (36) est considérée.

$$\begin{aligned}
 y^1 &= \frac{1}{1000}(x^1 - 10)^3 \\
 y^2 &= \frac{1}{100}(x^1 + x^2 + 10)^2 \\
 y^3 &= \frac{1}{2}x^1 + x^2
 \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
 x^1 &\in [-10, 10] \\
 x^2 &\in [-10, 10]
 \end{aligned} \tag{36}$$

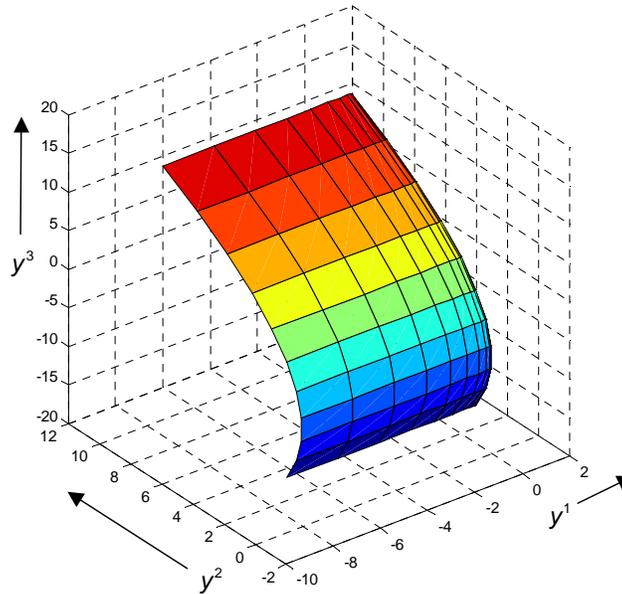


Figure 2 : exemple de surface curviligne

I.2.4 Métrique d'un espace

La longueur s de la ligne L pour p variant entre p_1 et p_2 est donnée par l'intégrale suivante S définie par (37).

$$S = \int_{p_1}^{p_2} \left\| \frac{d\vec{r}}{dp} \right\| dp \tag{37}$$

L'intervalle entre deux points infiniment voisins sur la courbe est défini par (38).

$$ds = \left\| \frac{d\vec{r}}{dp} \right\| dp = \|d\vec{r}\| \quad (38)$$

En écrivant (39) puis (40), la matrice g est définie, c'est la métrique de l'espace curviligne.

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = h_j \vec{e}_j dx^j \times h_k \vec{e}_k dx^k = g_{jk} dx^j dx^k \quad (39)$$

$$g_{jk} = h_j h_k \vec{e}_j \cdot \vec{e}_k \quad (40)$$

I.2.5 Exemple de métrique sur la surface terrestre

Dans (O, y^1, y^2, y^3) , $N = 3$ et la surface de dimension 2, définie par (41) et (42) est considérée.

$$\begin{aligned} y^1 &= R \cos \varphi \cos \theta \\ y^2 &= R \cos \varphi \sin \theta \\ y^3 &= R \sin \varphi \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \theta &\in [-\pi, \pi] \\ \varphi &\in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \end{aligned} \quad (42)$$

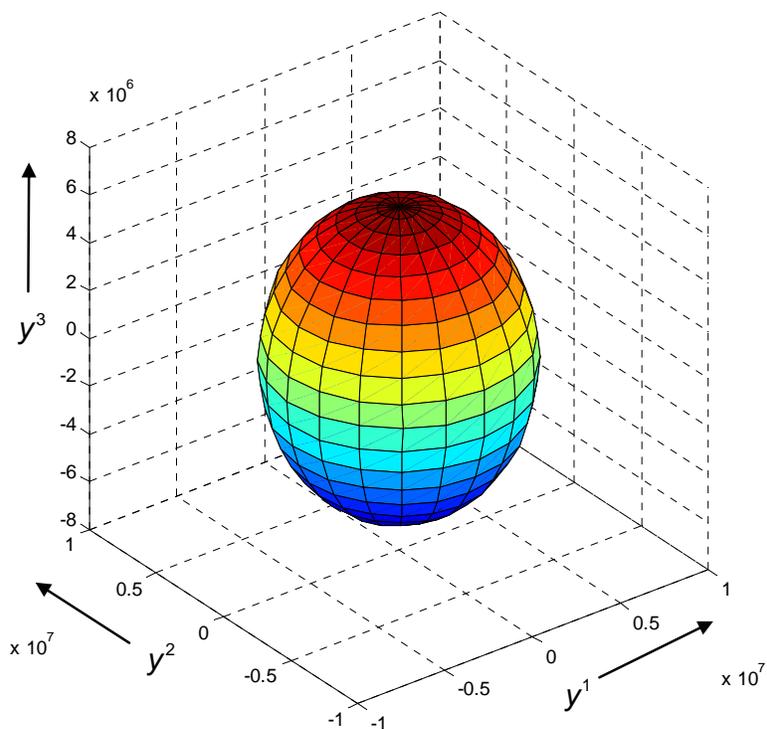


Figure 3 : surface sphérique

Dans le cas où $R = 6380 \text{ km}$, c'est la surface du globe terrestre, supposée sphérique, qui est considérée.

\vec{r} et \vec{x} sont définis par (43).

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (43)$$

\vec{n}_1 et \vec{n}_2 sont définis par :

$$\vec{n}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} -R \cos \varphi \sin \theta \\ R \cos \varphi \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} -R \sin \varphi \cos \theta \\ -R \sin \varphi \sin \theta \\ R \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (44)$$

\overrightarrow{dr} est défini par (45).

$$d\vec{r} = d\theta\vec{r}_1 + d\varphi\vec{r}_2 \quad (45)$$

\vec{e}_1 et \vec{e}_2 sont définis par (46).

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{\vec{r}_1}{\|\vec{r}_1\|} \\ \vec{e}_2 &= \frac{\vec{r}_2}{\|\vec{r}_2\|} \end{aligned} \quad (46)$$

(\vec{e}_1, \vec{e}_2) est une base normée de la surface de dimension 2.

(45) devient (47).

$$d\vec{r} = \|\vec{r}_1\| d\theta\vec{e}_1 + \|\vec{r}_2\| d\varphi\vec{e}_2 = h_1 d\theta\vec{e}_1 + h_2 d\varphi\vec{e}_2 \quad (47)$$

\vec{e}_1, \vec{e}_2 est bien une base orthonormée de la surface de dimension 2, en effet :

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = \begin{bmatrix} -R \cos \varphi \sin \theta \\ R \cos \varphi \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -R \sin \varphi \cos \theta \\ -R \sin \varphi \sin \theta \\ R \cos \varphi \end{bmatrix} = 0 \quad (48)$$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0 \quad (49)$$

Une ligne L (de dimension 1) de la surface de dimension 2, paramétrée par p , est maintenant considérée.

La longueur S de la ligne L pour p variant entre p_1 et p_2 est donnée par l'intégrale (50).

$$S = \int_{p_1}^{p_2} \left\| \frac{d\vec{r}}{dp} \right\| dp \quad (50)$$

L'intervalle entre deux points infiniment voisins sur la courbe est donné par (51).

$$ds = \left\| \frac{d\vec{r}}{dp} \right\| dp = \|d\vec{r}\| \quad (51)$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (h_1 d\theta \vec{e}_1 + h_2 d\varphi \vec{e}_2) \cdot (h_1 d\theta \vec{e}_1 + h_2 d\varphi \vec{e}_2) \\
 ds^2 &= (h_1 d\theta)^2 + (h_2 d\varphi)^2 \\
 ds^2 &= \|\vec{r}_1\|^2 (d\theta)^2 + \|\vec{r}_2\|^2 (d\varphi)^2 \\
 ds^2 &= R^2 \cos^2 \varphi (d\theta)^2 + R^2 (d\varphi)^2
 \end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= \begin{bmatrix} d\theta & d\varphi \end{bmatrix} g \begin{bmatrix} d\theta \\ d\varphi \end{bmatrix} \\
 g &= \begin{bmatrix} R^2 \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & R^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{53}$$

g est la matrice de la métrique de l'espace curviligne modélisant la surface du globe.

Le même résultat est obtenu en appliquant directement (40) :

$$\begin{aligned}
 g_{jk} &= h_j h_k \vec{e}_j \cdot \vec{e}_k = \vec{r}_j \cdot \vec{r}_k \\
 g_{11} &= \begin{bmatrix} -R \cos \varphi \sin \theta \\ R \cos \varphi \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -R \cos \varphi \sin \theta \\ R \cos \varphi \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} = R^2 \cos^2 \varphi \\
 g_{12} &= 0 \\
 g_{21} &= 0 \\
 g_{22} &= \begin{bmatrix} -R \sin \varphi \cos \theta \\ -R \sin \varphi \sin \theta \\ R \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -R \sin \varphi \cos \theta \\ -R \sin \varphi \sin \theta \\ R \cos \varphi \end{bmatrix} = R^2
 \end{aligned} \tag{54}$$

D'où :

$$g = \begin{bmatrix} R^2 \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & R^2 \end{bmatrix} \tag{55}$$

La métrique g ainsi calculée constitue l'outil de mesure de distance sur la surface courbe considérée.

I.3 Equations d'Euler, de Lagrange et géodésiques d'une métrique associée

L'introduction de la notion de distance dans les équations d'Euler permet d'établir les équations des géodésiques de l'espace considéré. L'introduction de la notion de Lagrangien dans les équations d'Euler permet d'établir les équations du mouvement sous forme géodésique.

I.3.1 Equations d'Euler et géodésiques

La longueur S de la courbe L pour p variant entre p_1 et p_2 est donnée par l'intégrale (56).

$$S = \int_{p_1}^{p_2} \frac{ds}{dp} dp \quad (56)$$

L'intervalle entre deux points infiniment voisins sur la courbe est donné par (39).

g est la métrique de l'espace curviligne, donnée par (40).

Ainsi, la relation (57) est obtenue.

$$ds = \sqrt{g_{jk} dx^j dx^k} = \sqrt{g_{jk} \frac{dx^j}{dp} \frac{dx^k}{dp}} dp \quad (57)$$

(56) devient (58).

$$S = \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{g_{jk} \frac{dx^j}{dp} \frac{dx^k}{dp}} dp = \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{g_{jk} \dot{x}^j \dot{x}^k} dp \quad (58)$$

En mettant en jeu la fonction F définie par (59), la relation (60) est obtenue :

$$F(x^1, x^2 \dots x^n, \dot{x}^1, \dot{x}^2 \dots \dot{x}^n) = \sqrt{g_{jk} \dot{x}^j \dot{x}^k} \quad (59)$$

$$S = \int_{p_1}^{p_2} F(x^1, x^2 \dots x^n, \dot{x}^1, \dot{x}^2 \dots \dot{x}^n) dp \quad (60)$$

Si la fonction x^m fournit un minimum (relatif) pour S , alors les équations d'Euler (61) sont vérifiées.

$$\frac{\partial F}{\partial x^m} - \frac{d}{dp} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^m} \right) = 0 \quad (61)$$

En dérivant l'équation (59) par rapport à x^q et en prenant en compte la relation (57) :

$$\frac{\partial F}{\partial x^q} = \frac{1}{2\dot{s}} \dot{x}^j \dot{x}^k \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^q} \right) \quad (62)$$

Dans l'espace considéré, dit de Riemann, en dérivant l'équation (59) par rapport à \dot{x}^q et en prenant en compte (57), les équations suivantes sont obtenues :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^q} &= \frac{1}{2\dot{s}} g_{jk} (\delta_q^j \dot{x}^k + \delta_q^k \dot{x}^j) \\ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^q} &= \frac{1}{2\dot{s}} (g_{qk} \dot{x}^k + g_{jq} \dot{x}^j) \end{aligned} \quad (63)$$

Comme la métrique est symétrique :

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^q} = \frac{1}{\dot{s}} g_{jq} \dot{x}^j \quad (64)$$

En considérant les équations (62) et (64), la relation suivante est obtenue en multipliant (61) par -1 :

$$\frac{d}{dp} \left(\frac{g_{jq} \dot{x}^j}{\dot{s}} \right) - \frac{1}{2\dot{s}} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^q} \right) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0 \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \dot{s} \frac{d}{dp} \left(\frac{g_{jq} \dot{x}^j}{\dot{s}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^q} \right) \dot{x}^j \dot{x}^k &= 0 \\ \dot{s} \left[\frac{d}{dp} \left(\frac{g_{jq} \dot{x}^j}{\dot{s}} \right) \right] - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^q} \right) \dot{x}^j \dot{x}^k &= 0 \\ \dot{s} \left[\frac{d}{dp} (g_{jq}) \frac{\dot{x}^j}{\dot{s}} + g_{jq} \frac{d}{dp} \left(\frac{\dot{x}^j}{\dot{s}} \right) \right] - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^q} \right) \dot{x}^j \dot{x}^k &= 0 \\ \frac{d}{dp} (g_{jq}) \dot{x}^j + g_{jq} \ddot{x}^j - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^q} \right) \dot{x}^j \dot{x}^k &= g_{jq} \dot{x}^j \frac{\ddot{s}}{\dot{s}} \\ \frac{\partial g_{jq}}{\partial x^k} \dot{x}^j \dot{x}^k + g_{jq} \ddot{x}^j - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^q} \right) \dot{x}^j \dot{x}^k &= g_{jq} \dot{x}^j \frac{\ddot{s}}{\dot{s}} \end{aligned} \quad (66)$$

Si la métrique est symétrique la relation (67) est vérifiée et la relation (68) est obtenue.

$$g_{jq} = g_{qj} \quad (67)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_{jq}}{\partial x^k} \dot{x}^j \dot{x}^k &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jq}}{\partial x^k} \dot{x}^j \dot{x}^k + \frac{\partial g_{jq}}{\partial x^k} \dot{x}^j \dot{x}^k \right) \\
\frac{\partial g_{jq}}{\partial x^k} \dot{x}^j \dot{x}^k &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jq}}{\partial x^k} \dot{x}^j \dot{x}^k + \frac{\partial g_{kq}}{\partial x^j} \dot{x}^k \dot{x}^j \right) \\
\frac{\partial g_{jq}}{\partial x^k} \dot{x}^j \dot{x}^k &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jq}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kq}}{\partial x^j} \right) \dot{x}^j \dot{x}^k
\end{aligned} \tag{68}$$

La relation (66) devient alors (69).

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jq}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kq}}{\partial x^j} \right) \dot{x}^j \dot{x}^k + g_{qj} \ddot{x}^j - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^q} \right) \dot{x}^j \dot{x}^k &= g_{jq} \dot{x}^j \frac{\ddot{s}}{\dot{s}} \\
g_{qj} \ddot{x}^j + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jq}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kq}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^q} \right) \dot{x}^j \dot{x}^k &= g_{jq} \dot{x}^j \frac{\ddot{s}}{\dot{s}}
\end{aligned} \tag{69}$$

Si le paramètre p est proportionnel à l'abscisse curviligne s (voir (70)), l'équation (69) devient (71).

$$\begin{aligned}
\dot{s} &= \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\
\ddot{s} &= 0
\end{aligned} \tag{70}$$

$$g_{qj} \ddot{x}^j + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jq}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kq}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^q} \right) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0 \tag{71}$$

L'expression (71) peut être simplifiée en utilisant le symbole de Christoffel du second genre, défini par (72).

$$\Gamma_{jk}^l = \frac{1}{2} g^{lq} \left(\frac{\partial g_{jq}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kq}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^q} \right) \tag{72}$$

La relation (71) est multipliée par g^{lq} pour donner (73).

$$g^{lq} g_{qj} \ddot{x}^j + \frac{1}{2} g^{lq} \left(\frac{\partial g_{jq}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kq}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^q} \right) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0 \tag{73}$$

Soit encore, en utilisant les symboles de Christoffel :

$$g^{lq} g_{qj} \ddot{x}^j + \Gamma_{jk}^l \dot{x}^j \dot{x}^k = 0 \tag{74}$$

Si (75) est vérifiée alors (76) est obtenue.

$$g^{lq} g_{qj} = \delta_j^l \tag{75}$$

$$\ddot{x}^l + \Gamma_{jk}^l \dot{x}^j \dot{x}^k = 0 \quad (76)$$

Donc si la longueur S de la courbe L pour p variant entre p_1 et p_2 est minimale, et que, de plus, g est symétrique, inversible et que le paramètre considéré est proportionnel à l'abscisse curviligne, alors les équations d'Euler-Lagrange se confondent avec les équations des géodésiques (76).

I.3.2 Equations de Lagrange et géodésiques

Soit un espace à n dimensions.

Soit un point $X = (x^q(t), x^2(t) \dots x^n(t))$ de masse unité. L'énergie cinétique correspondante est donnée par (77).

$$T = \frac{1}{2} g_{jk} \dot{x}^j \dot{x}^k \quad (77)$$

Supposons qu'il existe une énergie potentielle $V(x^1, x^2 \dots)$ qui donne la force généralisée F , donnée par (78) et (79).

$$F = (F_1, F_2 \dots) \quad (78)$$

$$F_j = -\frac{\partial V}{\partial x^j} \quad (79)$$

En utilisant le Lagrangien L exprimé en (80) :

$$L = T - V \quad (80)$$

Les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x^k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} \right) &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial x^k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k} \right) &= \frac{\partial V}{\partial x^k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}^k} \right) \end{aligned} \quad (81)$$

Le membre de gauche correspond aux équations des géodésiques de la métrique g (associée au Lagrangien T) tandis que le membre de droite correspond aux forces généralisées.

$$\ddot{x}^l + \Gamma_{jk}^l \dot{x}^j \dot{x}^k = F^l \quad (82)$$

Dans les équations du mouvement (82) le terme $\Gamma_{jk}^l \dot{x}^j \dot{x}^k$, souvent associé à un phénomène d'amortissement, disparaît dans le cas d'un espace plat ($\Gamma_{jk}^l = 0$).

I.3.3 Métrique et systèmes tournants

Les coordonnées d'un espace-temps cartésien peuvent être définies par :

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \quad (83)$$

Ainsi, la distance ds entre deux points infiniment voisins de cet espace est définie par :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (84)$$

La métrique associée, aussi appelée métrique de Minkowski, est alors définie par (85).

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (85)$$

Pour les systèmes tournants, les coordonnées cylindriques $(r, \bar{\phi}, z)$ sont utilisées :

$$\begin{aligned} x &= r \cos \bar{\phi} \\ y &= r \sin \bar{\phi} \\ z &= z \end{aligned} \quad (86)$$

La longueur infinitésimale de l'arc se définit alors par (87).

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\bar{\phi}^2 - dz^2 \quad (87)$$

Si ϕ est sous la forme (88) (projection du repère tournant au repère de référence), (87) devient (89).

$$\phi = \bar{\phi} - \omega t \quad (88)$$

Dès lors, la longueur infinitésimale de l'arc est donnée par :

$$ds^2 = (c^2 - \omega^2 r^2) dt^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2 - 2\omega r^2 d\phi dt - dz^2 \quad (89)$$

La minimisation de la quantité ds^2 donnée par (89) (formulation métrique) permet d'écrire (90) formulation Lagrangienne).

$$0 = \delta \int \left((c^2 - \omega^2 r^2) \frac{dt^2}{ds^2} - \frac{dr^2}{ds^2} - r^2 \frac{d\phi^2}{ds^2} - 2\omega r^2 \frac{d\phi dt}{ds^2} - \frac{dz^2}{ds^2} \right) ds \quad (90)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \int \left((c^2 - \omega^2 r^2) (\dot{t})^2 - (\dot{r})^2 - r^2 (\dot{\phi})^2 - 2\omega r^2 \dot{\phi} \dot{t} - (\dot{z})^2 \right) ds \\ 0 &= \delta \int L(t, r, \phi, z, \dot{t}, \dot{r}, \dot{\phi}, \dot{z}) ds \end{aligned} \quad (91)$$

L'équation d'Euler-Lagrange pour ce problème variationnel est (92).

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = 0 \quad (92)$$

Cette équation est appliquée pour différentes valeurs de μ pour obtenir (93).

$$\begin{aligned} L &= (c^2 - r^2 \omega^2) (\dot{t})^2 - (\dot{r})^2 - r^2 (\dot{\phi})^2 - 2\omega r^2 \dot{\phi} \dot{t} - (\dot{z})^2 \\ \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} - \frac{1}{c} \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} &= 0 \Leftrightarrow c^2 \dot{t} = \omega \frac{d}{ds} (r^2 (\dot{\phi} + \omega t)) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= 0 \Leftrightarrow \ddot{r} = r (\dot{\phi} + \omega t)^2 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= 0 \Leftrightarrow \frac{d}{ds} (r^2 (\dot{\phi} + \omega t)) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} &= 0 \Leftrightarrow \ddot{z} = 0 \end{aligned} \right. \quad (93) \end{aligned}$$

Puis :

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{t} &= 0 \\ 2(\dot{\phi} + \omega t) \dot{r} + r \ddot{\phi} &= 0 \\ \ddot{r} &= r (\dot{\phi} + \omega t)^2 \\ \ddot{z} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (94)$$

Et enfin :

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{t} &= 0 \\ \ddot{r} - r \dot{\phi}^2 &= 0 \\ r \ddot{\phi} + 2\dot{r} \dot{\phi} &= 0 \\ \ddot{z} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (95)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{t} = 0 \Leftrightarrow \frac{dt}{ds} = A \Leftrightarrow t = As + t_0 \\ \ddot{r} = r\dot{\phi}^2 \Rightarrow \frac{d^2r}{dt^2} = r \left(\frac{d\bar{\phi}}{dt} \right)^2 \\ r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} = 0 \Rightarrow r \left(\frac{d^2\bar{\phi}}{dt^2} \right) = -2 \frac{dr}{dt} \frac{d\bar{\phi}}{dt} \\ \ddot{z} = 0 \Leftrightarrow \dot{z} = B \Leftrightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{B}{A} \Leftrightarrow z = Ct + z_0 \end{array} \right. \quad (96)$$

Les expressions de la force centrifuge et de la force de Coriolis classiques sont retrouvées, comme présenté dans (97). Ainsi, à partir de considérations géométriques, l'expression des forces mises en jeu est retrouvée ; la liaison avec la dynamique est effectuée.

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{r} = r\dot{\phi}^2 \Rightarrow \frac{d^2r}{dt^2} = r \left(\frac{d\bar{\phi}}{dt} \right)^2 \\ r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} = 0 \Rightarrow r \left(\frac{d^2\bar{\phi}}{dt^2} \right) = -2 \frac{dr}{dt} \frac{d\bar{\phi}}{dt} \end{array} \right. \quad (97)$$

L'utilisation des équations géodésiques, associée à la définition de la métrique de l'espace considéré, donne les mêmes résultats. En effet, en s'appuyant sur l'équation (89), le jeu de coordonnées étant donné par (98), la métrique de l'espace considéré peut s'écrire sous la forme (99).

$$x^0 = ct, \quad x^1 = r, \quad x^2 = \phi, \quad x^3 = z \quad (98)$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2} & 0 & -\frac{r^2\omega}{c} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{r^2\omega}{c} & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (99)$$

Pour appliquer l'équation de la géodésique, il faut calculer l'inverse de g , donnée par (100), puis les symboles de Christoffel en (101).

$$g^{-1} = \begin{bmatrix} +1 & 0 & -\frac{\omega}{c} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{\omega}{c} & 0 & \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (100)$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^1 &= -\frac{r\omega^2}{c^2} \\
\Gamma_{02}^1 &= \Gamma_{20}^1 = -\frac{r\omega}{c} \\
\Gamma_{22}^1 &= -r \\
\Gamma_{01}^2 &= \Gamma_{10}^2 = \frac{\omega}{rc} \\
\Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}
\end{aligned} \tag{101}$$

Tous les autres $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ sont nuls. En introduisant les valeurs de ces symboles de Christoffel dans l'équation des géodésiques (76), la relation (102) est obtenue.

$$\begin{cases}
t'' = 0 \Leftrightarrow dt = Ads \\
r'' = r(\omega t' + \phi')^2 \Leftrightarrow \frac{d^2 r}{dt^2} = r \left(\frac{d\bar{\phi}}{dt} \right)^2 \\
r\phi'' = -2r'(\omega t' + \phi') \Leftrightarrow r \frac{d^2 \bar{\phi}}{dt^2} = -2 \frac{dr}{dt} \frac{d\bar{\phi}}{dt} \\
z'' = 0
\end{cases} \tag{102}$$

Les résultats de (97) sont ainsi retrouvés.

Le terme croisé $-2\omega r^2 d\phi dt$ présente une difficulté mathématique, car il génère un terme extra diagonal dans la métrique. Pour le supprimer, il faut redéfinir la différentielle de temps. Ainsi, la diagonalisation de la métrique est obtenue en posant le changement de variable (103).

$$dt = dt^* + \lambda d\phi \tag{103}$$

En introduisant (103) dans (89), le changement de temps à opérer devient (104).

$$\begin{aligned}
ds^2 &= (c^2 - \omega^2 r^2) dt^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2 - 2\omega r^2 d\phi dt - dz^2 \\
ds^2 &= (c^2 - r^2 \omega^2) (dt^* + \lambda d\phi)^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2 \\
&\quad - 2\omega r^2 d\phi (dt^* + \lambda d\phi) - dz^2 \\
ds^2 &= (c^2 - r^2 \omega^2) dt^{*2} + (c^2 - r^2 \omega^2) \lambda^2 d\phi^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2 \\
&\quad + 2(c^2 - r^2 \omega^2) \lambda d\phi dt^* - 2r^2 \omega d\phi dt^* - 2\omega r^2 \lambda d\phi^2 - dz^2 \\
\lambda &= \frac{r^2 \omega}{c^2 - r^2 \omega^2} \\
dt^* &= dt - \frac{r^2 \omega}{c^2 - r^2 \omega^2} d\phi
\end{aligned} \tag{104}$$

La relation (105) est alors obtenue.

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}\right) c^2 dt^{*2} - dr^2 - \frac{1}{1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}} r^2 d\phi^2 - dz^2 \quad (105)$$

Le jeu de coordonnées (106) est alors considéré.

$$x^0 = ct^*, \quad x^1 = r, \quad x^2 = r\phi, \quad x^3 = z \quad (106)$$

La métrique de cet espace est donc donnée par (107). Elle est bien diagonale.

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (107)$$

Dans le cas où la vitesse de rotation est telle que la vitesse périphérique est négligeable devant la vitesse de la lumière, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Ainsi, l'espace considéré est muni d'une métrique diagonale.

Pour aller plus loin, si deux événements de mêmes coordonnées spatiales (r, ϕ, z) sont considérées, ds , $d\phi$ et dz sont alors nuls et l'équation (108) est obtenue à partir de (105).

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}\right) c^2 dt^{*2} \quad (108)$$

Alors le temps propre τ est défini par (109).

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}} dt^* \quad (109)$$

Si le temps propre est défini à partir de (89), l'équation peut être écrite.

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}} dt \quad (110)$$

(109) et (110) donnent $dt^* = dt$ ce qui n'est pas surprenant puisque $d\phi = 0$.

I.4 Modélisation métrique d'un système continu

Un système mécanique discret est soumis à une force extérieure $F = F_0 e^{i\phi(t)}$ dont la fréquence varie en fonction du temps et la fréquence forcée est supposée être le seul paramètre influant sur le mouvement.

Soit $\mathbf{x} = {}^t(x^1, x^2 \dots x^n)$, le vecteur des variables réelles correspondant au système à plusieurs degrés de liberté étudié.

L'intervalle entre deux positions est exprimé, en notation tensorielle, par un élément infinitésimal ds :

$$ds = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}, (\mu, \nu) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad (111)$$

$g_{\mu\nu}$ est le tenseur métrique.

$q = {}^t(q^1, q^2 \dots q^n)$ est le vecteur des variables modales tel que :

$$x = \Phi q \quad (112)$$

La matrice Φ est la matrice de passage dans la base modale. Alors, en supposant que les modes sont découplés, chaque équation modale obtenue peut être indépendamment traitée.

Pour prendre en compte l'influence de la fréquence force sur l'espace, le repère de référence est équipé de coordonnées modales supplémentaires.

La première variable, q^0 , représentant le temps, est définie comme au paragraphe II.1.

En supposant qu'il n'y a qu'un seul paramètre influent, une seule variable supplémentaire est considérée par degré de liberté du système discret :

$$q^{-\mu} = i\rho_{\mu^*} \theta^\mu, \mu \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mu^* = \mu \quad (113)$$

$$\frac{dq^{-\mu}}{ds} = i\rho_{\mu^*} \dot{\theta}^\mu, \mu \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mu^* = \mu \quad (114)$$

ρ_{μ^*} et θ^μ sont respectivement le rayon constant et l'angle de rotation.

Par conséquent, $\dot{\theta}^\mu$ correspond à la fréquence du mouvement du degré de liberté μ .

Une fois le jeu de coordonnées défini, il reste à déterminer les coefficients de la métrique.

En premier lieu, supposons que l'espace considéré n'est que faiblement courbé, le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ peut alors être exprimé sous la forme diagonale (115).

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \varepsilon\gamma_{\mu\nu}(q^{-1}, q^{-2} \dots q^{-n}) \quad (115)$$

Avec $\varepsilon\gamma_{\mu\nu}(q^{-1}, q^{-2} \dots q^{-n})$, une petite perturbation.

Pour faire correspondre les équations géodésiques et celles de Lagrange, il est nécessaire d'introduire l'énergie potentielle $U(q^0, q^1, q^2 \dots q^n)$, dans la métrique.

Le tenseur métrique obtenu est alors :

$$g = \begin{pmatrix} I + \varepsilon\gamma_{-n-n} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & I + \varepsilon\gamma_{-l-l} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & I + \varepsilon\gamma_{00} + 2H \frac{U}{a^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & I + \varepsilon\gamma_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & I + \varepsilon\gamma_{nn} \end{pmatrix} \quad (116)$$

Dès lors, les équations de champ d'Einstein en champ libre peuvent être écrites (voir annexe B, sachant que tenseur d'énergie impulsion $T^{\mu\nu}$ est nul dans le cas présent puisque seules l'énergie cinétique et l'énergie potentielle sont considérées et l'énergie potentielle est déjà prise en compte dans la métrique) :

$$G_{\mu\nu} = 0 \quad (117)$$

Or le tenseur d'Einstein $G_{\mu\nu}$ est donné par :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (118)$$

R est la trace du tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$.

D'où :

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (119)$$

Le tenseur de Ricci s'exprimant par la relation :

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}}{\partial x^{\sigma}} + \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\lambda}^{\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \quad (120)$$

Les équations d'Einstein deviennent :

$$\frac{\partial \Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}}{\partial x^{\sigma}} + \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\lambda}^{\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = 0 \quad (121)$$

Or, comme vu au chapitre I.3, les symboles de Christoffel présents dans l'équation (121) s'expriment directement en fonction des coefficients de la métrique, l'expression des équations d'Einstein fournit donc un ensemble d'équations mettant en jeu les coefficients de la métrique.

Néanmoins, il n'est pas suffisant pour les déterminer complètement, $\gamma_{\mu\nu}$ et H sont donc maintenant exprimés comme des fonctions d'une seule fonction inconnue h qui peut être déterminée en normalisant la métrique par rapport à son coefficient g_{-1-1} après résolution des équations d'Einstein.

Suite à de nombreux développements analytiques et logiciels effectués dans [AL MAJID, A. 2002], notamment sous MATLAB et MAPLE, les coefficients de la métrique sont obtenus et, pour chaque degré de liberté, le jeu d'équations du mouvement suivant est obtenu :

$$\begin{cases} \ddot{q}^j + 2\alpha\dot{\theta}_j\dot{q}^j + \omega_j^2 q^j = \frac{1}{m_j} f(t) \\ \ddot{\theta}^j - 2\frac{\alpha_j}{\rho_j^2} \left(\frac{1}{2} \omega_j^2 (q^j)^2 - \frac{1}{m_j} f_j(t) q^j + \frac{1}{2} (\dot{q}^j)^2 \right) = 0 \end{cases} \quad (122)$$

où, associé à chaque degré de liberté j , m_j , α_j , and $f_j(t)$ sont respectivement la masse modale, le coefficient d'amortissement visqueux et la force. ω_j est la fréquence naturelle.

Si $\ddot{\theta}^j = 0$, l'équation (122) est réduite à celle d'un modèle classique et l'amortissement est constant.

La formulation d'état du jeu d'équations (122) fournit le système :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU \\ Y &= CX + DU \end{aligned} \quad (123)$$

Avec :

$$X = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (124)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & Id & 0 & 0 \\ -M_{mod}^{-1} K_{mod} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Id \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4n \times 4n} \quad (125)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{mod}^{-1} V_{mod} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2\alpha_j}{\rho_j^2} M_{mod}^{-1} V_{mod} & \frac{\alpha_j}{\rho_j^2} M_{mod}^{-1} K_{mod} & \frac{\alpha_j}{\rho_j^2} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4n \times (1+4n)} \quad (126)$$

$$C = Id_{4n \times 4n} \quad (127)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ M_{mod}^{-1} V_{mod} \end{bmatrix} \quad (128)$$

$$U = \begin{bmatrix} f(t) \\ qf(t) \\ q^2 \\ \dot{q}^2 \\ \dot{q}\dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (129)$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \dots 0 \\ \vdots \ddots \vdots \\ 0 \dots \alpha_n \end{bmatrix} \quad (130)$$

Avec :

$$t=0 \Rightarrow \theta^j = 0, q^j = 0, \dot{q}^j = 0 \quad (131)$$

$$t=t_j \Rightarrow \dot{\theta}^j = \Omega_j \quad (132)$$

t_j est le temps lorsque $\Omega = \omega_j$.

Les constantes ρ_j restent inconnues mais sont supposées d'une valeur négligeable devant l'unité en vertu du principe de moindre action [AL MAJID, A. et DUFOUR, R. 2003].

II Systèmes discrets en transitoire

II.1 Etude d'un système à un degré de liberté

Ce chapitre comporte plusieurs analyses, en premier lieu, le cas d'un système à un degré de liberté est traité (aspect expérimental et théorique, approches classique et métrique). En second lieu, l'exemple de l'étude d'un système à trois degrés de liberté est présenté.

II.1.1 Aspect expérimental

L'objectif est ici d'apporter par des expérimentations une possible validation de l'hypothèse avancée : la fréquence influe sur le mouvement et est à l'origine d'un amortissement supplémentaire. L'aspect expérimental a été traité avec le plus grand soin.

Pour quantifier finement la réponse transitoire, il est conçu un système expérimental à un degré de liberté de rotation le plus simple possible. Il est constitué d'une poutre disposée horizontalement sur un bâti. Elle est articulée au bâti à une extrémité et reliée à un ressort vertical à l'autre extrémité (voir figure 4). La poutre est un profilé en « U ».

La liaison appui entre la poutre et le bâti est réalisée à l'aide d'un couple de roulements à billes.

Un pot d'excitation équipé d'un capteur de force permet d'exciter la structure en un point de la poutre et un capteur sans contact à courant de Foucault (CDCF) permet de mesurer le déplacement en un autre.

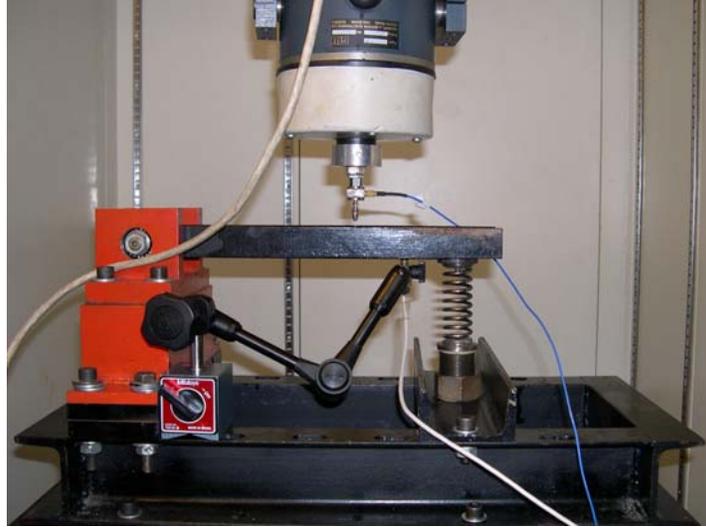


Figure 4 : dispositif expérimental à un degré de liberté de rotation

Le CDCF est un modèle VIBROMETER - TQ102. Sa calibration a été effectuée sur la structure à l'aide d'un comparateur.

La tension aux bornes du CDCF est relevée à l'aide de l'analyseur dynamique de signal HP35670A (voir figure 5), en mode HISTOGRAM/TIME. La fonction Densité de Probabilité (PDF) a été utilisée.



Figure 5 : face avant de l'analyseur HP35670A – in situ

Ainsi, la sensibilité du CDCF est $sens_depla = -7.640 \times 10^3 V/m$ sur une plage linéaire de $\pm 1 mm$.

Le calibrage du capteur de force s'effectue en deux temps. Un calibre d'excitation Bruël & Kjær Type 4294 est utilisé en premier lieu pour étalonner un accéléromètre. En second lieu, une

masse m connue est fixée à un pot d'excitation. L'accéléromètre étalonné et le capteur de force à étalonner sont fixés à cette masse. Ainsi, la sensibilité $sens_force$ est déterminée :

$$sens_force = -85.92 \times 10^{-3} \text{ V/N}.$$

Le pilotage du pot d'excitation s'effectue à l'aide du générateur de fonctions HP 33120A (voir figure 6).



Figure 6 : générateur de fonctions HP33120A

D'une bande bassante de 15 MHz, il génère des signaux carrés, triangles, sinusoidaux, des rampes linéaires et logarithmiques, du bruit, mais aussi des profils complètement arbitraires codés sur 12 bits, pouvant contenir jusqu'à 16000 points. Pour les besoins de l'étude, le profil de la fréquence d'excitation doit évoluer sur plusieurs plages temporelles. Ainsi, divers profils sont imposables au cours d'un essai : montée linéaire en fréquence, descente linéaire en fréquence, ou bien plage temporelle pendant laquelle la fréquence est constante. Un programme a été développé sous MATLAB pour répondre à ce cahier des charges et permet, par exemple, de générer un profil à quatre plages temporelles distinctes présenté sur la figure 7.

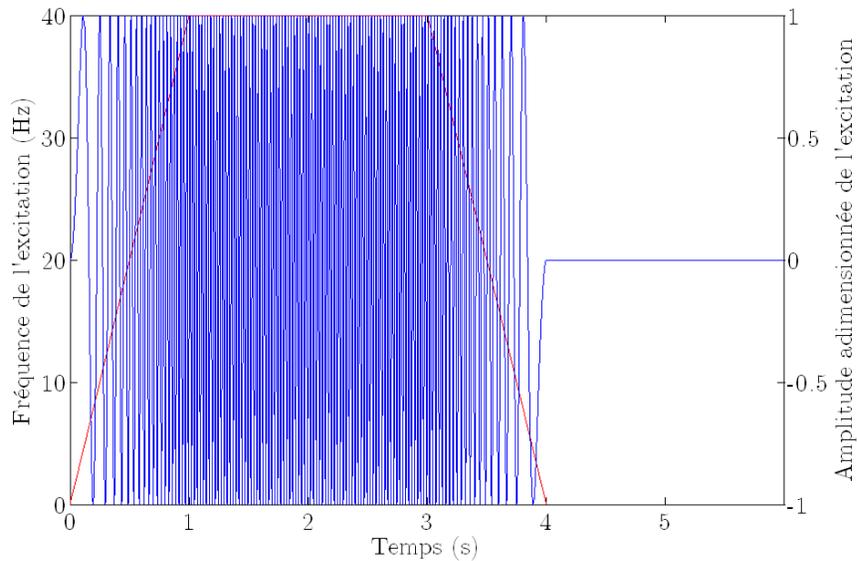


Figure 7 : exemple de profil d'excitation en fréquence

Durant chacune de ces phases, la fréquence de l'excitation passe de :

- 0 à 40 Hz, phase 1 : montée en fréquence,
- 40 à 40 Hz, phase 2 : palier en fréquence,
- 40 à 0 Hz, phase 3 : descente en fréquence,
- 0 à 0 Hz, phase 4 : palier en fréquence.

Sur la figure 7 sont tracées à la fois l'évolution "linéaire par morceaux" de la fréquence et l'amplitude du profil de l'excitation en fonction du temps.

Une fois ce profil généré et enregistré sous la forme d'un fichier de points (16000 points), le logiciel INTUILINK de chez Agilent est utilisé pour pouvoir l'implémenter sur la carte HPIB de l'ordinateur.

La liaison HPIB entre l'ordinateur et le générateur de fonctions permet de récupérer le profil arbitraire sur le générateur qui va ensuite piloter le pot d'excitation (voir figure 8).

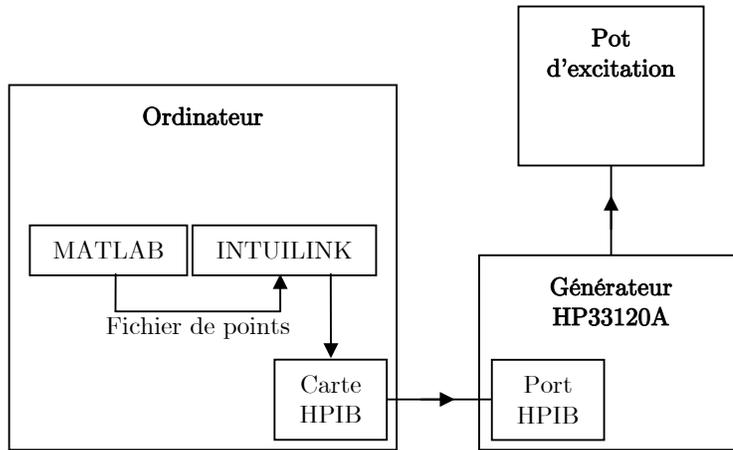


Figure 8 : pilotage du pot d'excitation

Les raideurs du ressort (traction et compression) ont été déterminées en statique, le déplacement étant relevé au comparateur. Les résultats expérimentaux donnent les valeurs $k_t = 1.147 \times 10^4$ N/m (le ressort a un comportement linéaire en traction sur la plage 0 – 5.5 mm) et $k_c = 1.074 \times 10^4$ N/m (le ressort a un comportement linéaire en compression sur la plage 0 – 2.3 mm). k_t est 4% plus importante que k_c . Dans la suite de l'étude, $k = k_t$ tout en s'assurant que la plage des déplacements de la structure correspond bien à la plage linéaire de fonctionnement du ressort. La raideur dynamique est supposée égale à la raideur statique.

Le cas d'une excitation harmonique par balayage sinus est considéré. Les résultats présentés dans le tableau 1 sont issus d'essais sur lesquels les influences de la résolution et de la bande fréquentielle étudiée ont été testées. Les mesures sont reproductibles (cinq essais).

	5 - 100 Hz	5 - 40 Hz	15 - 25 Hz
$F1$	19.98 Hz	19.90 Hz	19.94 Hz
$\alpha1$	9.3×10^{-3}	8.5×10^{-3}	7.0×10^{-3}

Tableau 1 : $F1$ et $\alpha1$ en fonction de la bande fréquentielle étudiée

Les valeurs retenues sont : $F1 = 19.94$ Hz et $\alpha1 = 7.02 \times 10^{-3}$ (voir figure 9), avec 800 points sur la bande fréquentielle.

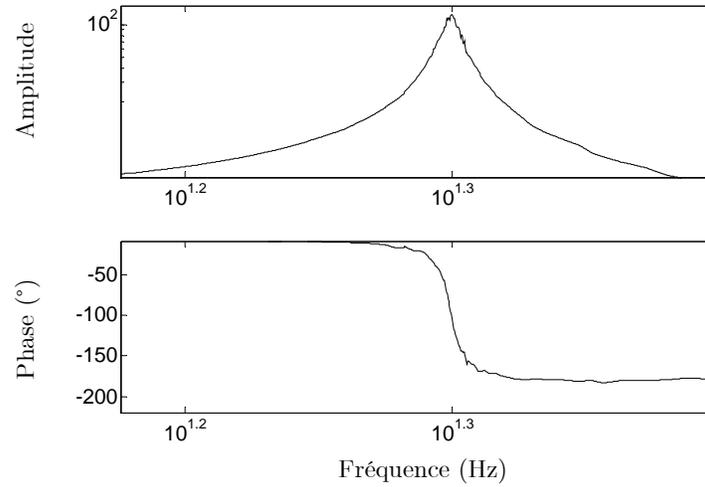


Figure 9 : fonction de transfert mesurée – 15 - 25 Hz

Le dispositif expérimental est assimilable à un système à un degré de liberté dans le cas de petites rotations. Ses caractéristiques ont été déterminées avec une précision satisfaisante.

II.1.2 Modèle classique

La modélisation proposée du système expérimental étudié est présentée figure 10.

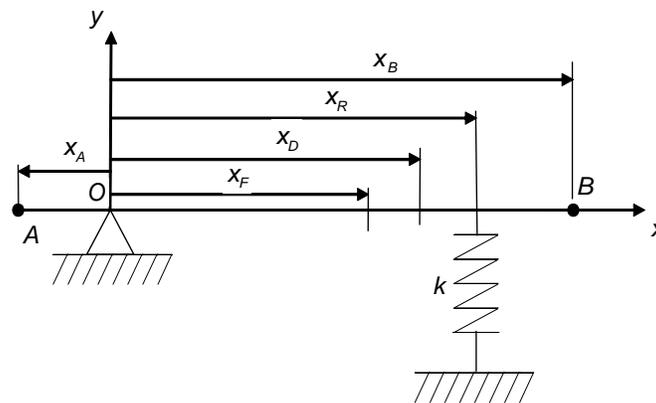


Figure 10 : modèle proposé

Par hypothèse, les mouvements sont petits, et le profilé en « U » est supposé infiniment rigide dans la gamme de fréquence considérée.

Les caractéristiques de la poutre AB sont les suivantes :

- S , aire de la section,
- ρ , masse volumique,
- G , centre d'inertie, $x_G = \frac{x_A + x_B}{2}$
- L , longueur,
- $m = \rho SL$, masse.

La force est appliquée en x_F et le déplacement est mesuré en x_D .

L'hypothèse des petits mouvements donne :

$$\begin{cases} \theta \simeq \sin \theta = \frac{v(x_R, t)}{x_R} = \frac{v(x_G, t)}{x_G} = \frac{v(x_D, t)}{x_D} \\ 1 \simeq \cos \theta \end{cases} \quad (133)$$

Le théorème de la résultante dynamique appliqué à la poutre AB , en projection sur y donne :

$$F_{appui_y} + f(t) - k(v(x_R, t) - l_0) - mg = m \frac{x_G}{x_D} \ddot{v}(x_D, t) \quad (134)$$

Soit encore :

$$x_R F_{appui_y} + x_R f(t) - x_R k(v(x_R, t) - l_0) - x_R mg = \frac{m x_R x_G}{x_D} \ddot{v}(x_D, t) \quad (135)$$

Le théorème du moment dynamique appliqué à la poutre AB en O donne :

$$x_F f(t) - x_R k \left(\frac{x_R}{x_D} v(x_D, t) - l_0 \right) - x_G mg = \frac{I}{x_D} \ddot{v}(x_D, t) \quad (136)$$

La prise en compte de conditions initiales nulles dans les équations (135) et (136) donne :

$$x_R F_{appui_y} + x_R k l_0 - x_R mg = 0 \quad (137)$$

Et :

$$x_R k l_0 - x_G mg = 0 \quad (138)$$

Donc :

$$F_{appui_y} = \left(1 - \frac{x_G}{x_R}\right) mg \quad (139)$$

De plus :

$$I = mgx_Gx_R \quad (140)$$

Ainsi :

$$m \frac{x_G}{x_D} \ddot{v}(x_d, t) + k \frac{x_R}{x_D} v(x_D, t) = \frac{x_F}{x_R} f(t) \quad (141)$$

La forme générale de l'équation d'un système à un degré de liberté est retrouvée, en posant

$$M = m \frac{x_G}{x_D}, \quad K = k \frac{x_R}{x_D}, \quad x(t) = \ddot{v}(x_D, t) \quad \text{et} \quad F(t) = \frac{x_F}{x_R} f(t) :$$

$$M\ddot{x}(t) + Kx(t) = F(t) \quad (142)$$

La pulsation propre du système conservatif est alors donnée par (143).

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{x_R}{x_G} \frac{k}{m}} \quad (143)$$

α_1 étant le coefficient d'amortissement mesuré expérimentalement, l'amortissement $C = 2 \times \alpha_1 \times \sqrt{KM}$ est introduit dans (142) pour donner l'équation finale :

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = F(t) \quad (144)$$

Dans le cas d'une excitation harmonique, la force $F(t)$ est de la forme $F(t) = F \sin(\Omega t)$, avec F une constante. La solution de l'équation différentielle (144) est alors de la forme

$$x(t) = X \sin(\Omega t - \Phi) \quad \text{avec} \quad X = \frac{F}{\sqrt{(K - M\Omega^2)^2 + C^2\Omega^2}} \quad \text{et la fonction de transfert du système}$$

est alors donnée par (145).

$$\frac{X}{X_{st}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right)^2 + \left(2\alpha \frac{\Omega}{\omega}\right)^2}}, \quad \text{avec} : X_{st} = \frac{F}{K} \quad (145)$$

Dans le cas d'une excitation à fréquence variable, la force $F(t)$ est de la forme $F(t) = F \sin(\Omega(t)t)$. Par exemple, pour une montée linéaire en fréquence, $F(t) = F \sin(\lambda t^2)$,

avec λ une constante strictement positive. La solution analytique de l'équation différentielle (144) n'existe pas a priori, une approche numérique est menée.

L'objectif est ici de quantifier l'influence de $\Omega(t)$ sur le comportement d'un système ; M , C et K étant fixés.

Soit la force d'excitation sinusoïdale :

$$F(t) = F_0 \sin\left(\int \Omega dt\right) \quad (146)$$

Dans le cas de montées et descentes linéaires, $\Omega(t)$ est de la forme (147).

$$\Omega(t) = \Omega_0 + at \quad (147)$$

$$\int \Omega dt = \Omega_0 t + \frac{a}{2} t^2 \quad (148)$$

Avec le temps adimensionné :

$$\tau = \omega t \quad (149)$$

$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$ et $\Omega(\tau)$ s'exprime sous la forme :

$$\Omega(\tau) = \Omega_0 + \frac{a}{\omega} \tau \quad (150)$$

Comme :

$$X_{st} = \frac{F_0}{k} \quad (151)$$

Alors la déflexion adimensionnée est donnée par :

$$\eta = \frac{x}{X_{st}} \quad (152)$$

L'équation adimensionnée du mouvement est alors :

$$\eta'' + 2\alpha\eta' + \eta = \sin\left(\left(\frac{\Omega_0}{\omega} + \frac{a}{2\omega^2}\tau\right)\tau\right) \quad (153)$$

Les conditions initiales sont déduites de la solution analytique du système soumis à une force harmonique de pulsation Ω_0 .

Les données sont les suivantes :

- la fréquence propre $F1$ du système et le coefficient d'amortissement α ont été déterminés au paragraphe II.1.1.
- $\omega = 2\pi \times F1$, la pulsation propre du système.
- $F_0 = 2.5$ N, l'amplitude de la force d'excitation,
- $\frac{a}{2\pi}$, l'intensité de la rampe, en Hz/s.

Dans le cas d'une montée linéaire en fréquence : $\Omega_0=0$ et $\Omega_{final}=2\omega$. Dans le cas d'une descente linéaire en fréquence : $\Omega_0=2\omega$ et $\Omega_{final}=0$. En posant $\underline{\lambda} = 2\pi \frac{a}{\omega^2}$, les résultats obtenus sont présentés figure 11.

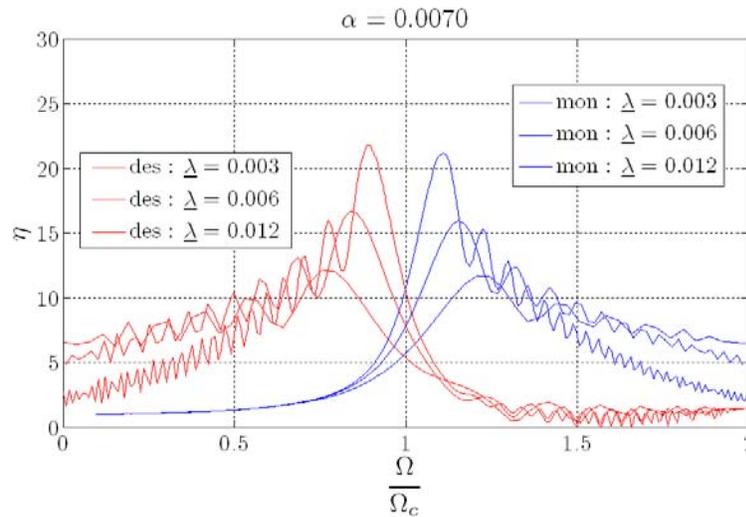


Figure 11 : réponses adimensionnées du modèle 1DDL

Qu'il s'agisse de la montée ou de la descente, plus l'accélération est importante, plus l'amplitude à la résonance est faible et plus le maximum est décalé dans le temps. Il faut multiplier l'accélération par 4 pour diviser l'amplitude par 2. Les résultats de [TIMOSHENKO, S. 1955] sont retrouvés.

Il est intéressant maintenant d'étudier la solution analytique autour de la résonance afin de mettre en évidence le phénomène de battement.

Le cas d'une excitation harmonique près de la résonance est donc considéré :

$$M\ddot{x} + 2\alpha M\omega\dot{x} + Kx = F_0 \sin(\Omega t) \quad (154)$$

Avec, ε étant petit :

$$\Omega = \omega_a + 2\varepsilon \quad (155)$$

La solution $x_{ESSM}(t)$ de l'équation (154) sans second membre est donnée par :

$$x_{ESSM}(t) = e^{-\alpha\omega t} (A \sin(\omega_a t) + B \cos(\omega_a t)) \quad (156)$$

Avec $\omega_a = \omega\sqrt{1-\alpha^2}$.

La solution $x_{EASM}(t)$ de l'équation (154) avec second membre est de la forme :

$$x_{EASM}(t) = C \sin(\Omega t) + D \cos(\Omega t) \quad (157)$$

En introduisant $x_{EASM}(t)$ dans (154), les expressions de C et D vont être déterminées.

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2 (C \sin(\Omega t) + D \cos(\Omega t)) + 2\alpha \frac{\Omega}{\omega} (C \cos(\Omega t) - D \sin(\Omega t)) \\ + (C \sin(\Omega t) + D \cos(\Omega t)) = \frac{F_0}{k} \sin(\Omega t) \end{aligned} \quad (158)$$

Soit :

$$\begin{aligned} \left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right) C - 2\alpha \frac{\Omega}{\omega} D &= X_{st} \\ \left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right) D + 2\alpha \frac{\Omega}{\omega} C &= 0 \end{aligned} \quad (159)$$

$$\begin{aligned} C &= X_{st} \frac{\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right)}{\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right)^2 + \left(2\alpha \frac{\Omega}{\omega}\right)^2} \\ D &= X_{st} \frac{-2\alpha \frac{\Omega}{\omega}}{\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right)^2 + \left(2\alpha \frac{\Omega}{\omega}\right)^2} \end{aligned} \quad (160)$$

D'où :

$$C = \left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right) X_a \quad (161)$$

Et :

$$D = -2\alpha \frac{\Omega}{\omega} X_a \quad (162)$$

Avec :

$$X_a = \frac{X_{st}}{\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right)^2 + \left(2\alpha \frac{\Omega}{\omega}\right)^2} \quad (163)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\alpha\omega t} (A \sin(\omega_a t) + B \cos(\omega_a t)) \\ &+ \left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right) X_a \sin(\Omega t) - 2\alpha \frac{\Omega}{\omega} X_a \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (164)$$

Les conditions initiales nulles permettent de déterminer A et B :

$$A = \frac{\left(2\alpha^2 - \left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right)\right) \Omega}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \frac{X_a}{\omega} \quad (165)$$

$$B = 2\alpha \frac{\Omega}{\omega} X_a \quad (166)$$

La solution de (154) s'exprime alors sous la forme :

$$\begin{aligned} x(t) &= X_a \frac{\Omega}{\omega} e^{-\alpha\omega t} \left(\frac{\left(2\alpha^2 - \left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right)\right)}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \sin(\omega_a t) + 2\alpha \cos(\omega_a t) \right) \\ &+ X_a \left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right) \sin(\Omega t) - X_a 2\alpha \frac{\Omega}{\omega} \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (167)$$

α est, compte tenu de l'expérience, considéré petit, dès lors $\omega_a \sim \omega$ et :

$$\begin{aligned} x(t) &= X_a e^{-\alpha\omega t} \left(\frac{2\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha^2}} \sin(\omega_a t) + 2\alpha \cos(\omega_a t) \right) - X_a 2\alpha \cos(\Omega t) \\ x(t) &= X_a 2\alpha e^{-\alpha\omega t} \cos(\omega_a t) - X_a 2\alpha \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (168)$$

En régime établi :

$$\begin{aligned} x(t) &= 2\alpha X_a (\cos(\omega_a t) - \cos((\omega_a + 2\varepsilon)t)) \\ x(t) &= -4\alpha X_a \sin(\varepsilon t) \sin(\omega_a t) \end{aligned} \quad (169)$$

Ainsi, autour de la résonance, la vibration sur la pulsation ω est accompagnée d'un phénomène de battement de pulsation faible ε .

II.1.3 Modèle métrique

Ce chapitre reprend les travaux menés dans [AL MAJID, A. 2002]. Il s'agit de mettre en équation le mouvement lorsque l'espace est courbé par l'introduction d'un paramètre influent, ici : la fréquence d'excitation.

Dans [AL MAJID, A. 2002], les auteurs ont étudié l'adéquation calcul-mesure dans le cas d'un système à un degré de liberté soumis à une force dont la fréquence varie grandement avec le temps. Il a été montré que, pour les données considérées, l'utilisation d'un modèle classique ne donne pas de résultat satisfaisant par rapport à l'expérimentation. Inspirée par le principe de la relativité générale, [FOCK, V. 1961; ADLER, R. *et al.* 1965; EINSTEIN, A. 1971; EINSTEIN, A. 1971; ELBAZ, E. 1986; APPELQUIST, T. *et al.* 1987; MC COMB, W. D. 1999], une méthode originale a été élaborée pour identifier, justifier et évaluer un amortissement supplémentaire dû à une force d'excitation variant avec la fréquence d'excitation.

Cette méthode, basée sur l'utilisation d'une dimension supplémentaire dans un espace pseudo-Riemannien (espace non euclidien) est utilisée afin de prédire la réponse d'un système. L'espace de travail est muni d'une dimension supplémentaire puis le problème variationnel de la métrique de l'espace pseudo-Riemannien ainsi construit permet d'écrire les équations géodésiques qui sont équivalentes, sous certaines conditions aux équations du mouvement du système considéré.

Soit un système mécanique discret soumis à une force externe $F = F_0 e^{i\phi(t)}$ dont la fréquence varie en fonction du temps.

II.1.3.a Définition du jeu de coordonnées

La fréquence d'excitation est supposée être le seul paramètre influant sur l'espace.

Si $\mathbf{x}=x^j$ est le vecteur des variables réelles du système à un degré de liberté étudié, l'intervalle entre deux positions successives est exprimé, en notation tensorielle par un élément de longueur infinitésimal $ds=dx$.

La première variable, q^0 représentant le temps, est définie par (170).

$$q^0 = iat \quad (170)$$

a représente une grande vitesse, t représente le temps et $i=\sqrt{-1}$.

Si l'hypothèse de l'existence d'un seul et unique paramètre influant sur le mouvement est vérifiée, une seule et unique dimension est associée au seul et unique degré de liberté du système étudié.

$$q^{-1} = i\rho\theta \quad (171)$$

$$\frac{dq^{-1}}{ds} = i\rho\dot{\theta} \quad (172)$$

ρ et θ sont respectivement le rayon constant et l'angle de rotation. Par conséquent, $\dot{\theta}$ correspond à la fréquence du mouvement du degré de liberté.

Une fois le jeu de coordonnées défini, il reste à déterminer les coefficients de la métrique.

II.1.3.b Présentation de la métrique de l'espace considéré

En appliquant la méthode exposée dans le chapitre I.4 à un seul degré de liberté et un seul paramètre influent, la forme de la métrique est la suivante :

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \varepsilon\gamma_{\mu\nu}(q^{-1}) \quad (173)$$

$\varepsilon\gamma_{\mu\nu}(q^{-1})$ est une petite perturbation du tenseur métrique.

Pour obtenir une correspondance parfaite entre les équations géodésiques et les équations de Lagrange, il convient d'introduire l'énergie potentielle $U(q^0, q^I)$ et donc de remplacer (174) par (175).

$$g_{00} = I + \varepsilon \gamma_{00}(q^{-I}) \quad (174)$$

$$g_{00} = I + \varepsilon \gamma_{00}(q^{-I}) + 2H(q^{-I}) \frac{U(q^0, q^I)}{a^2} \quad (175)$$

Le tenseur métrique prend alors la forme (176).

$$g = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon \gamma_{-1-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \varepsilon \gamma_{00} + 2H \frac{U}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \varepsilon \gamma_{11} \end{bmatrix} \quad (176)$$

II.1.3.c Equations du mouvement

En utilisant la méthode développée au chapitre I.4, les coefficients de la métrique $g_{\mu\nu}$ sont obtenus et les équations géodésiques donnent les équations du mouvement.

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\alpha\dot{\theta}\dot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{M} F(t) \\ \ddot{\theta} - 2\frac{\alpha}{\rho^2} \left(\frac{1}{2} \omega^2 x^2 - \frac{1}{M} F(t)x + \frac{1}{2} \dot{x}^2 \right) = 0 \end{cases} \quad (177)$$

Avec les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \\ x(0) = x_0 \\ \dot{\theta}(t_n) = \omega \\ \theta(0) = 0 \end{cases} \quad (178)$$

t_n étant l'instant de la résonance. Ainsi, si $\rho \rightarrow +\infty$, $\dot{\theta} = \omega$ et la formulation classique est retrouvée.

II.1.4 Réponses stationnaires classiques et mesurées

La première étape de la validation du modèle classique est de vérifier si la fonction de transfert du modèle est bien la même que celle du système expérimental dans la gamme de fréquence considérée. Dans le cas d'une excitation harmonique, le module adimensionné $\left(\frac{X}{X_{st}}\right)_{\text{mod}}$ de la fonction de transfert du modèle à un degré de liberté, est donné par (179).

$$\left(\frac{X}{X_{st}}\right)_{\text{mod}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right)^2 + \left(2\alpha \frac{\Omega}{\omega}\right)^2}} \quad (179)$$

Il est ensuite comparé à celui de celle du système expérimental.

Φ_{mod} , la phase de la fonction de transfert du modèle 1DDL, en degrés, est comparée à Φ_{exp} , la phase de la fonction de transfert du système expérimental.

$$\tan \Phi_{\text{mod}} = \frac{2\alpha \frac{\Omega}{\omega}}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} \quad (180)$$

La fréquence propre du modèle classique et son coefficient d'amortissement sont ceux déterminés au paragraphe II.1.1. Les résultats sont présentés figures 12 et 13.

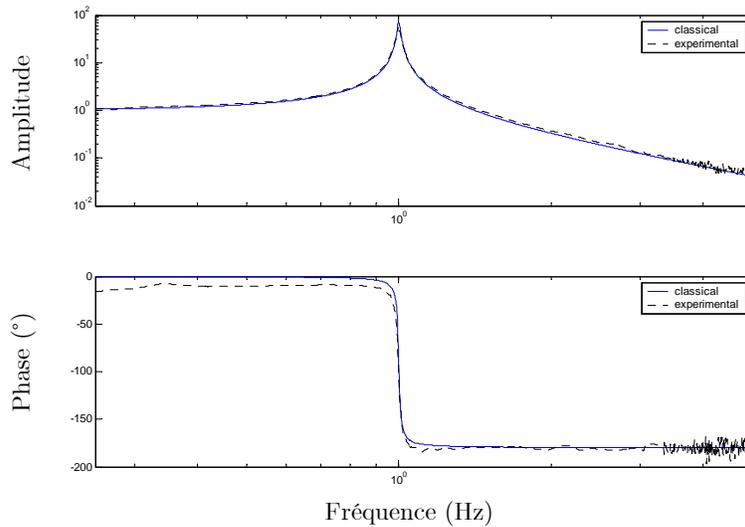


Figure 12 : balayage sinus 5 - 100 Hz

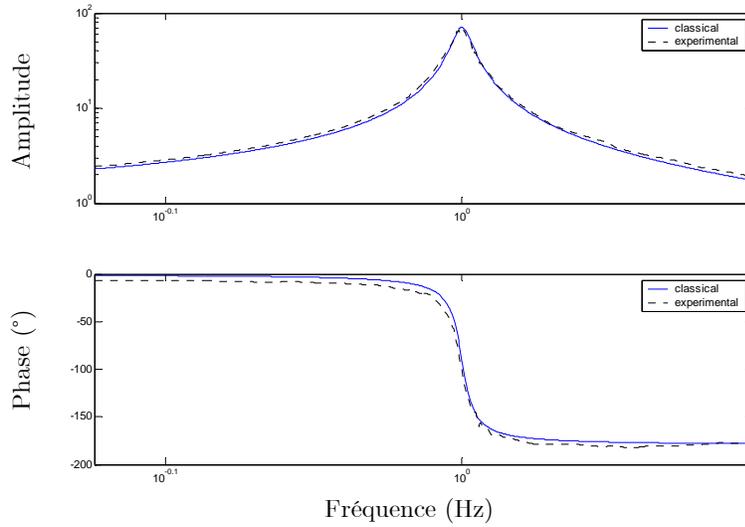


Figure 13 : balayage sinus 15 - 25 Hz

L'adéquation calcul-mesure est quasi parfaite, et sur une large gamme de fréquence (5-100 Hz). L'hypothèse de la modélisation du dispositif par un système à un degré de liberté est justifiée.

Le cas d'une excitation sinus fixe est maintenant considéré. Les résultats pour le cas d'un excitation sinus d'amplitude constante sont présentés figures 14 et 15.

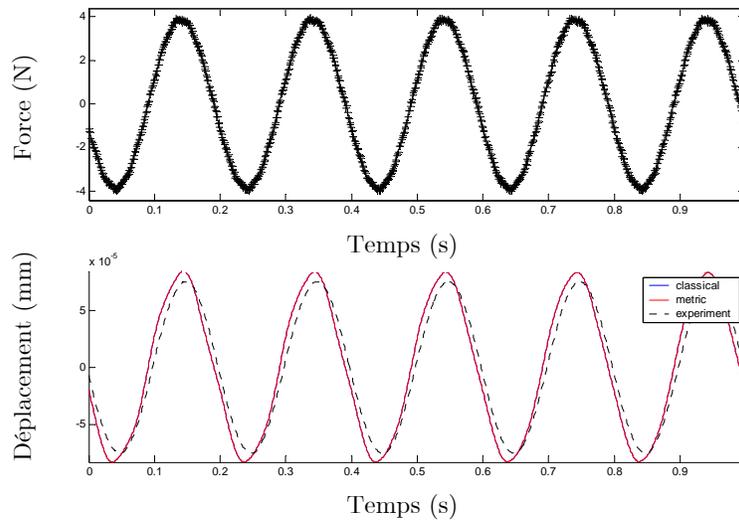


Figure 14 : 5 Hz

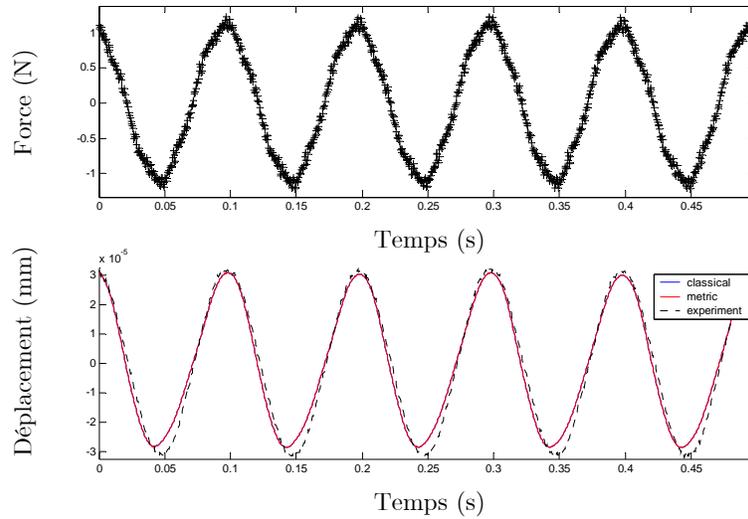


Figure 15 : 10 Hz

Dans le cas d'un signal de fréquence principale 20 Hz et d'amplitude variant de façon logarithmique, la figure 16 montre bien l'efficacité du modèle classique.

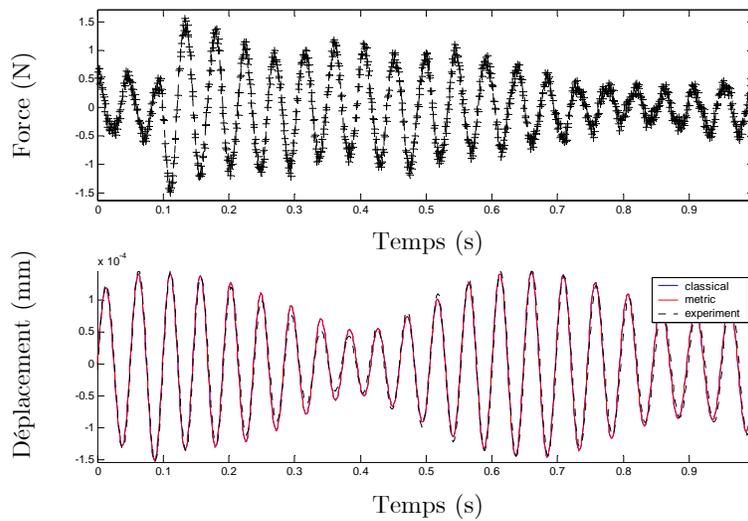


Figure 16 : 20 Hz – Amplitude log

L'adéquation est quasi parfaite entre les courbes expérimentales et les courbes du modèle.

II.1.5 Réponses transitoires classiques et métriques

Le modèle est soumis à une force dont la fréquence dépend du temps. Il s'agit ici d'étudier l'influence du paramètre ρ sur la réponse. L'amplitude de la force numérique est donnée par (181).

$$F = 0.1 N \tag{181}$$

Les paramètres retenus sont donnés par (182).

$$\begin{aligned} m &= 1.594 \text{ kg} \\ k &= 11470 \text{ N/m} \\ x_r &= 0.302 \text{ m} \\ L &= 0.375 \text{ m} \\ \alpha &= 7.024 \times 10^{-3} \end{aligned} \tag{182}$$

Les résultats sont présentés figures 17 à 20.

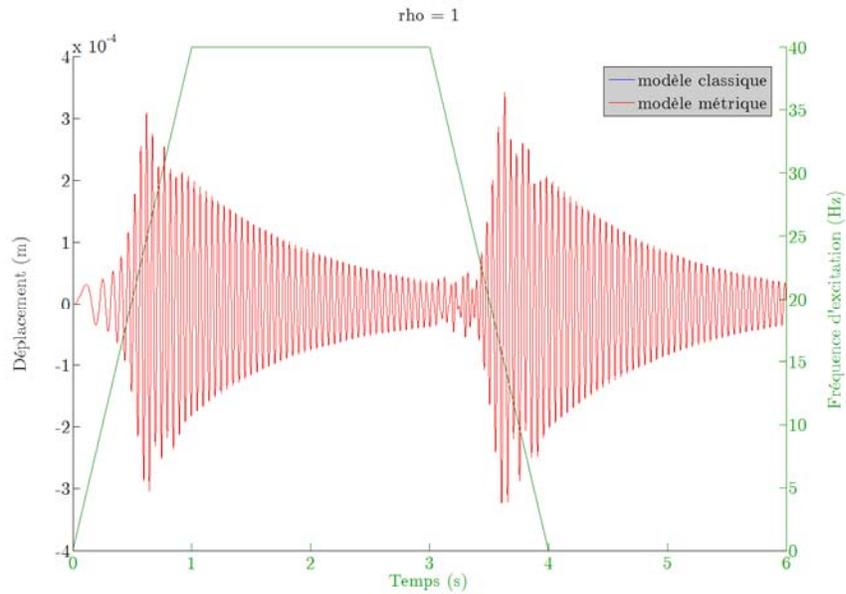


Figure 17 : $\rho = 1$

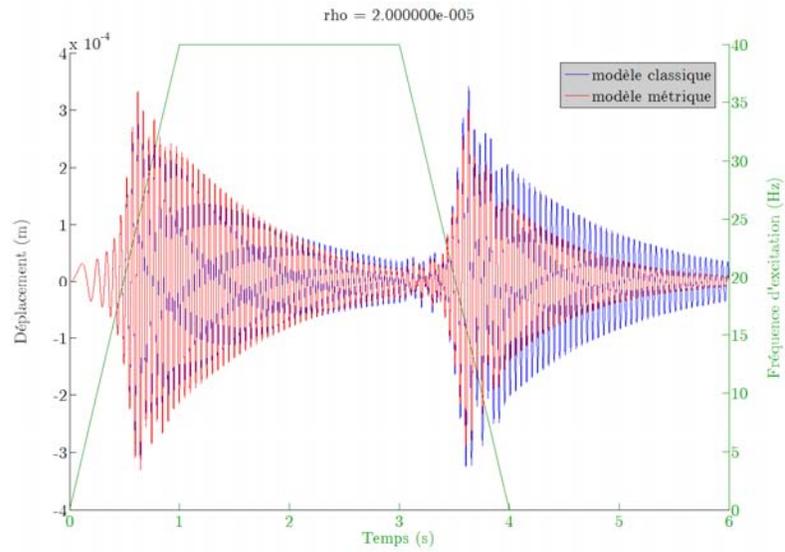


Figure 18 : $\rho = 2 \times 10^{-5}$

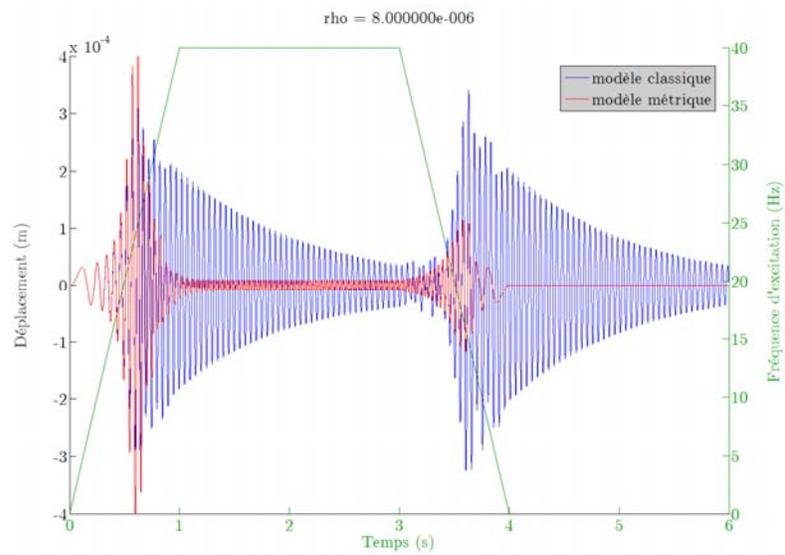


Figure 19 : $\rho = 8 \times 10^{-6}$

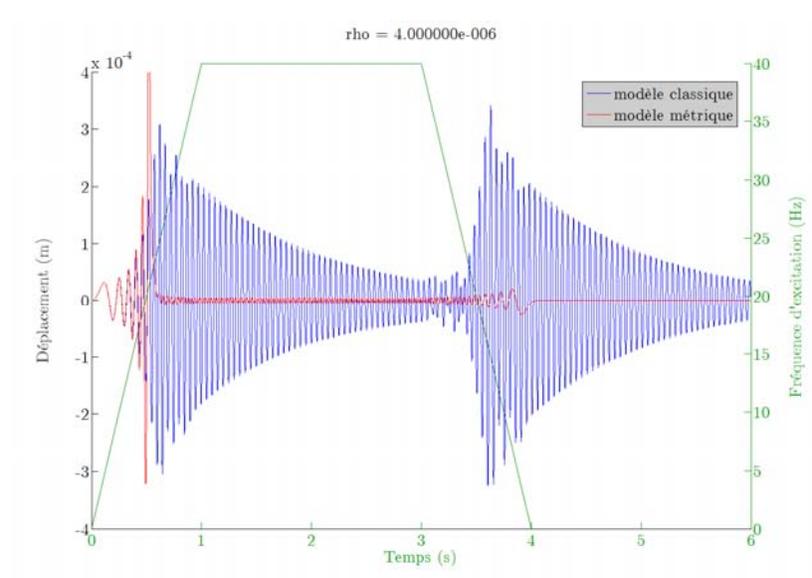


Figure 20 : $\rho = 4 \times 10^{-6}$

Pour des valeurs de ρ importantes (voir figure 17) la réponse donnée par le modèle métrique correspond parfaitement avec celle donnée par le modèle classique. Plus ρ diminue, plus l'amortissement supplémentaire augmente. La méthode proposée permet de diminuer le niveau de vibration après la résonance mais tend à l'augmenter avant la résonance en montée. En descente, le phénomène de résonance peut être très atténué grâce au paramètre ρ . La méthode proposée introduit un amortissement variable dans le modèle, dont l'évolution au cours de la sollicitation peut être déterminée a posteriori. Ainsi, pour chaque résultat des figures 17 à 20, le profil de l'amortissement peut être représenté (voir figures 21 à 24).

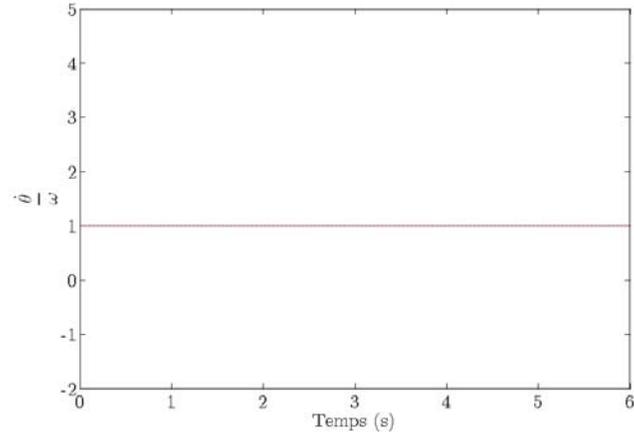


Figure 21 : $\rho = 1$

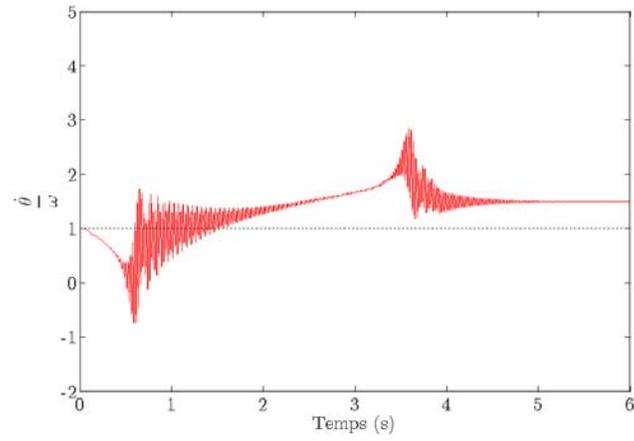


Figure 22 : $\rho = 2 \times 10^{-5}$

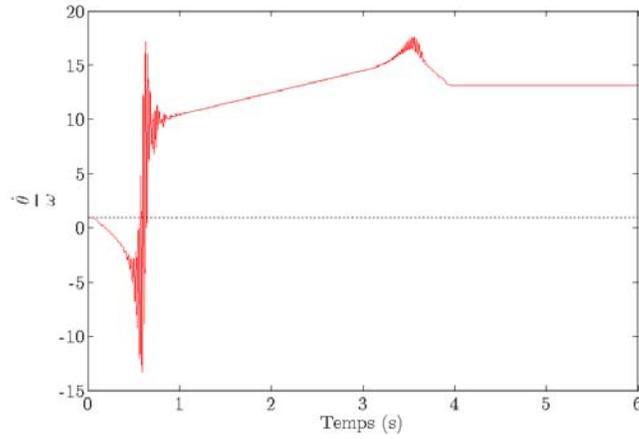


Figure 23 : $\rho = 8 \times 10^{-6}$

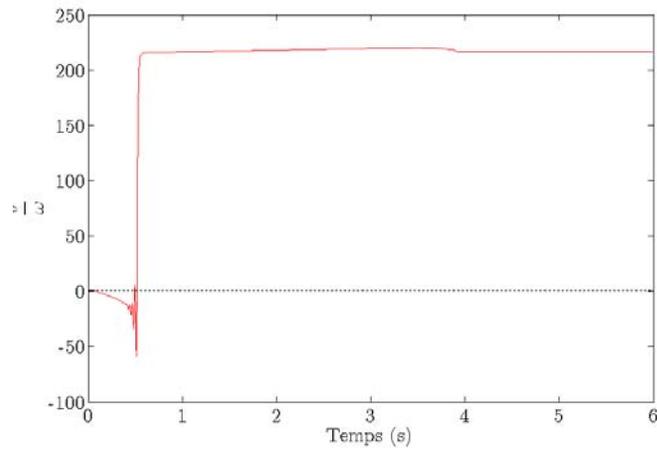


Figure 24 : $\rho = 4 \times 10^{-6}$

Dans le cas de $\rho = 1$, l'amortissement est bien constant et égal à l'amortissement classique puisque $\dot{\theta} = \omega$. Pour ρ très petit, l'amortissement proposé est plus faible que l'amortissement classique avant la résonance et plus important après. La condition $\dot{\theta} = \omega$ à la résonance est vérifiée à la montée mais pas à la descente.

Le modèle métrique permet donc, le cas échéant et pour une valeur de ρ appropriée de prendre en compte un éventuel amortissement supplémentaire dû à la fréquence.

II.1.6 Réponses transitoires classiques et mesurées

Il s'agit ici de tester la fiabilité des modèles en imposant des rampes sévères de montées en fréquence. En prenant $\rho = 1$, les réponses classiques et métriques sont confondues ; l'efficacité du modèle classique est testée.

Chaque montée est constituée de deux phases :

- la phase de montée proprement dite, de 0 à 40 Hz et caractérisée par sa durée t_m ,
- un palier de stabilisation, caractérisé par sa durée t_p , pendant lequel la fréquence est constante et égale à la fréquence maximale (40 Hz).

L'objectif est ici de vérifier la robustesse de la modélisation lorsque t_m diminue.

Pour le cas d'une montée à 40 Hz en une seconde, l'aquedation calcul-mesure est satisfaisante (voir figures 25 à 27).

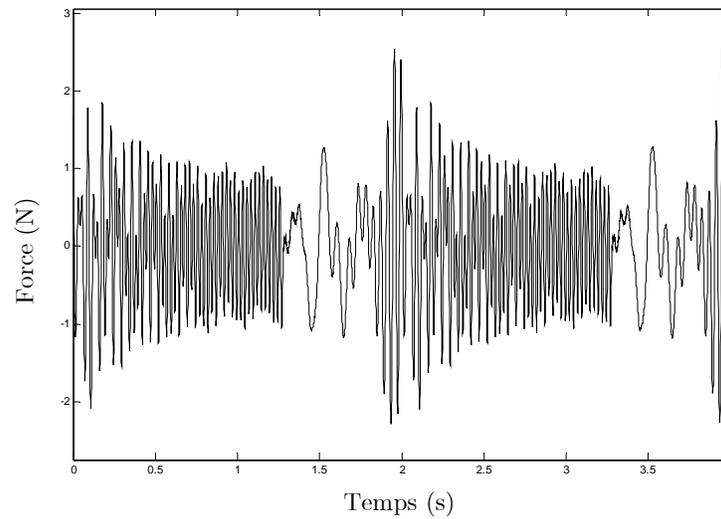


Figure 25 : $t_m = 1 \text{ s}$ / $t_p = 1 \text{ s}$ force

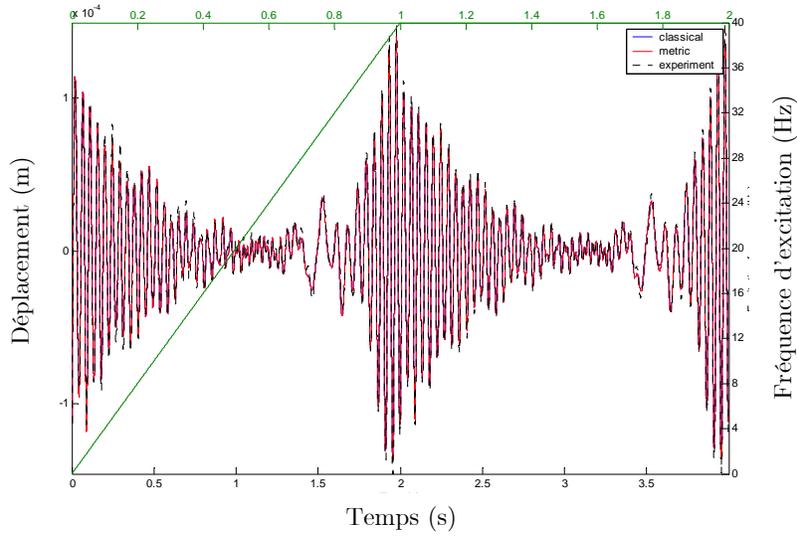


Figure 26 : $t_m = 1\text{ s} / t_p = 1\text{ s}$ déplacement

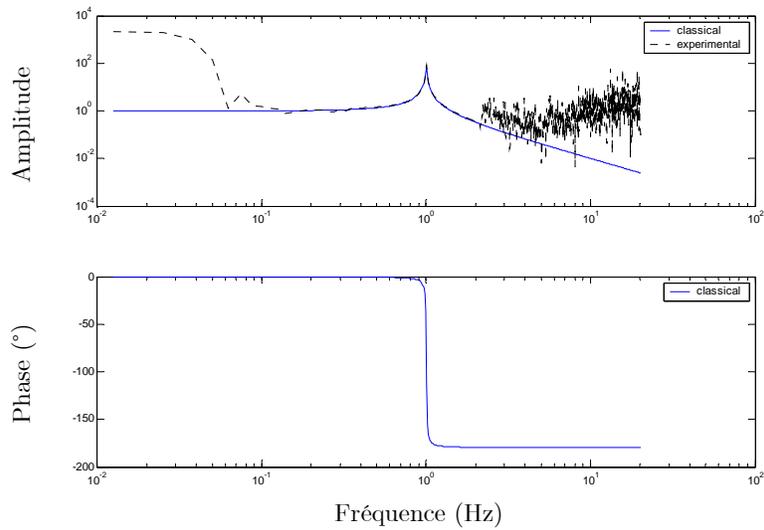


Figure 27 : $t_m = 1\text{ s} / t_p = 1\text{ s}$ analyse fréquentielle

La durée de simulation étant maintenant fixée à $t_m + t_p = 1\text{ s}$, les résultats présentés figures 28 à 36 montre l'influence d'une diminution de t_m sur la réponse.

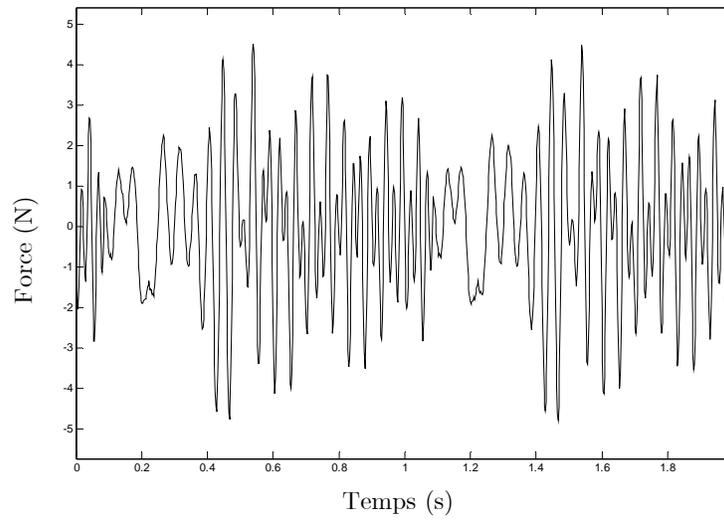


Figure 28 : $t_m = 0.5 s / t_p = 0.5 s$ force

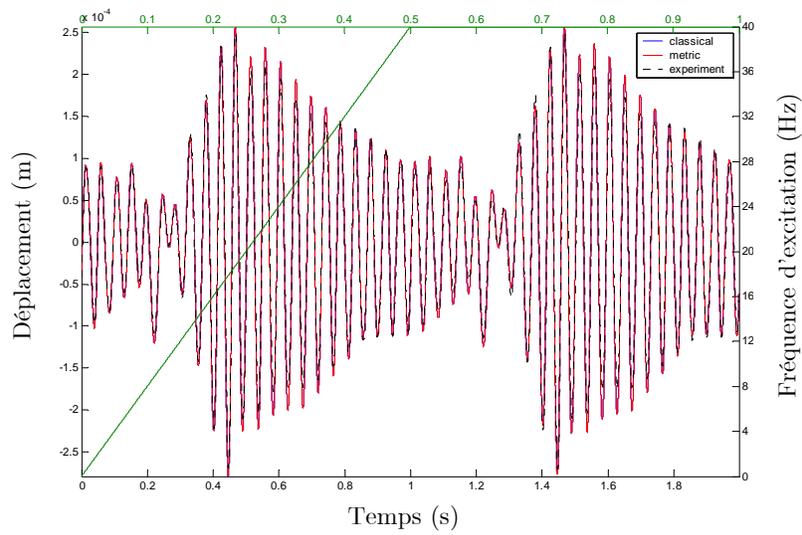


Figure 29 : $t_m = 0.5 s / t_p = 0.5 s$ déplacement

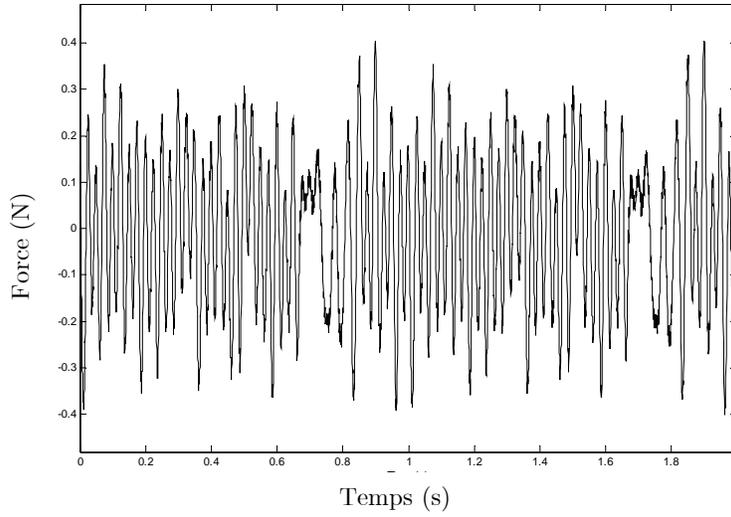


Figure 30 : $t_m = 0.2 \text{ s} / t_p = 0.8 \text{ s}$ force

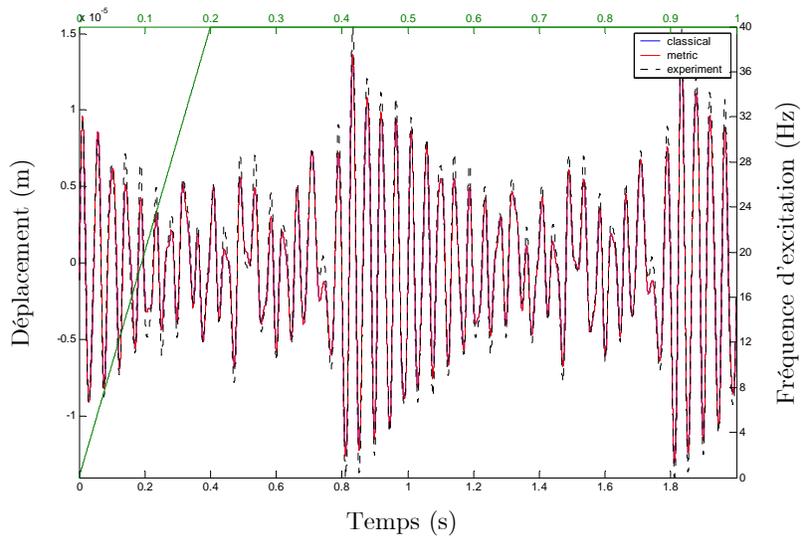


Figure 31 : $t_m = 0.2 \text{ s} / t_p = 0.8 \text{ s}$ déplacement

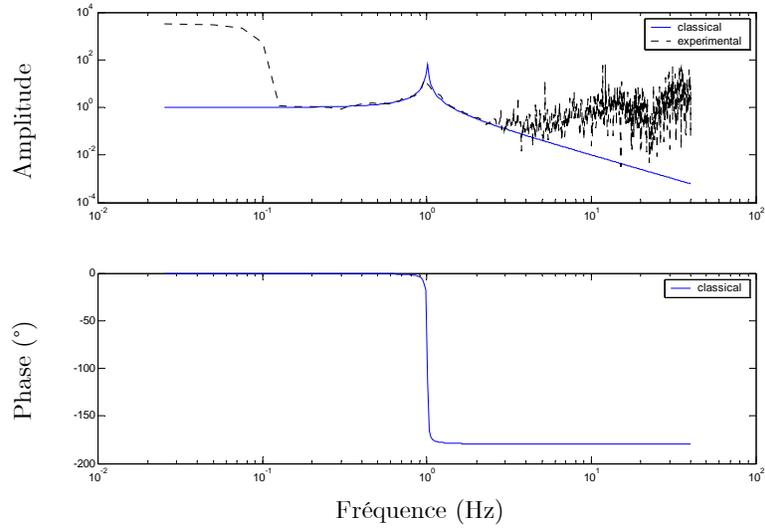


Figure 32 : $t_m = 0.2 \text{ s}$ / $t_p = 0.8 \text{ s}$ analyse fréquentielle

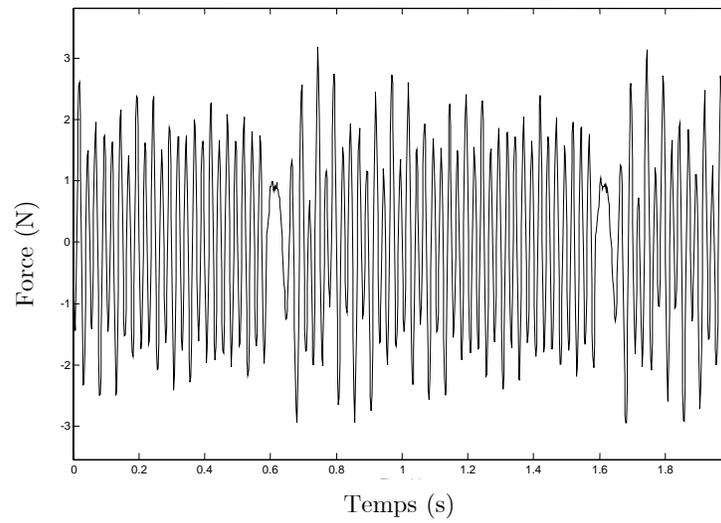


Figure 33 : $t_m = 0.1 \text{ s}$ / $t_p = 0.9 \text{ s}$ force

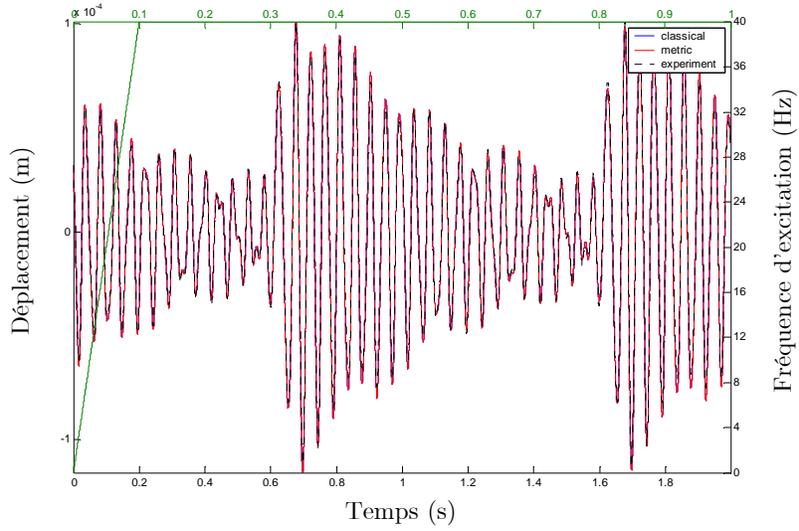


Figure 34 : $t_m = 0.1 \text{ s} / t_p = 0.9 \text{ s}$ déplacement

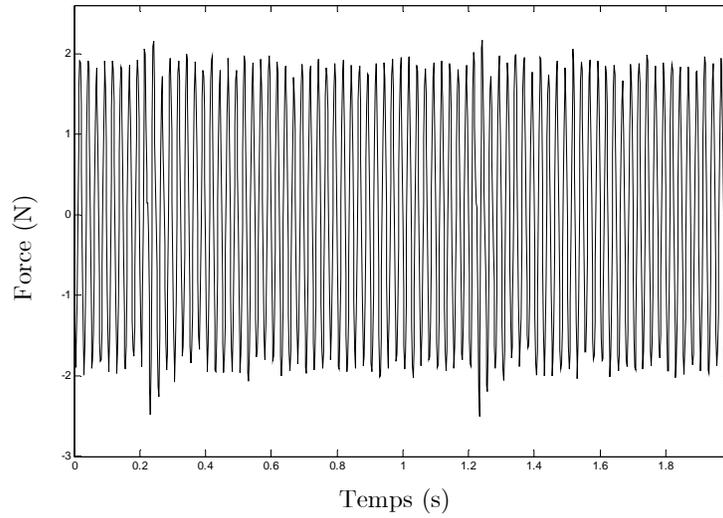


Figure 35 : $t_m = 0.05 \text{ s} / t_p = 0.95 \text{ s}$ force

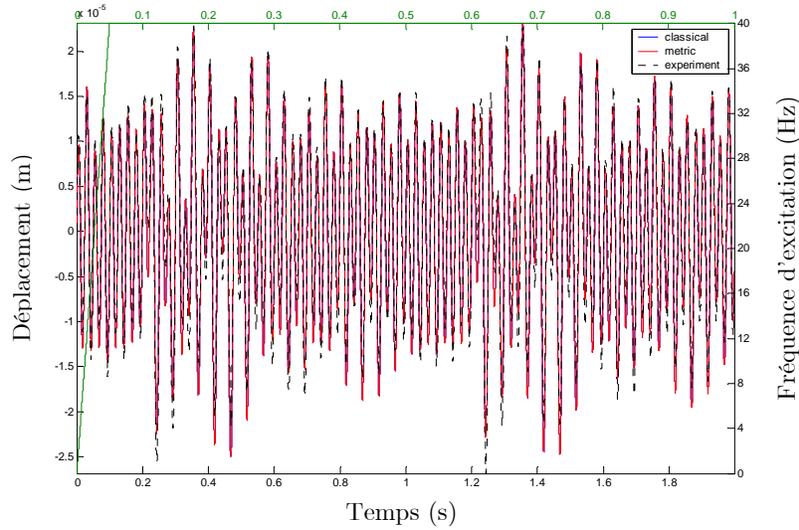


Figure 36 : $t_m = 0.05 \text{ s}$ / $t_p = 0.95 \text{ s}$ déplacement

Dès lors, il apparaît que pour des rampes comprises entre 40 Hz/s et 800 Hz/s, l'adequation calcul-mesure est satisfaisante. La forte variation en fréquence de l'excitation n'est donc pas une condition suffisante pour faire apparaître un amortissement supplémentaire.

II.1.7 Perturbation des données

Compte tenu des résultats précédents, il convient de vérifier dans quelle mesure la précision des données concernant le système étudié influe sur la qualité de la réponse du modèle par rapport à l'expérimental

Un pourcentage d'erreur est introduit sur la raideur du modèle, sa fréquence propre restant inchangée.

Le pourcentage d'erreur x sur la raideur est tel que $K \rightarrow K \times \left(1 - \frac{x}{100}\right)$, sachant que

$$M = \frac{K(1 - \alpha^2)}{(2\pi F1)^2}.$$

II.1.7.a Influence du pourcentage sur la réponse en transitoire, recalage

L'objectif est ici d'étudier l'influence du pourcentage d'erreur en transitoire, pour une rampe donnée de 0 à 40 Hz, avec $t_m = 1 \text{ s} / t_p = 1 \text{ s}$.

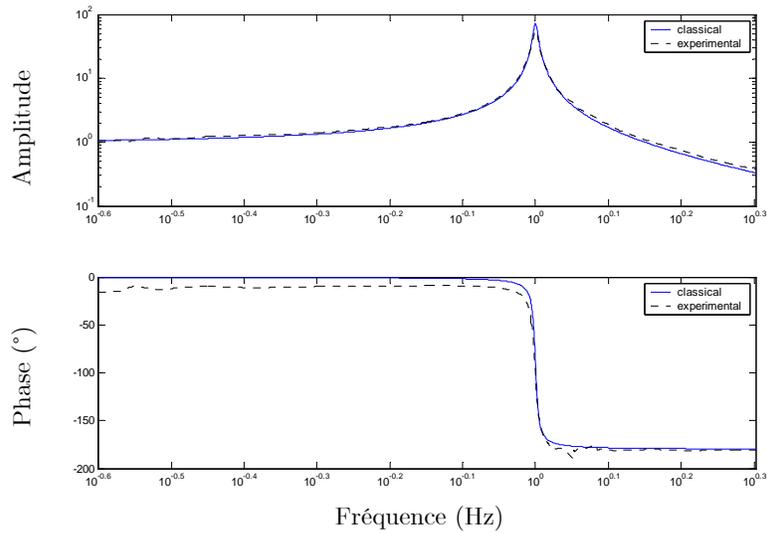


Figure 37 : $x = 0$ fonction de transfert

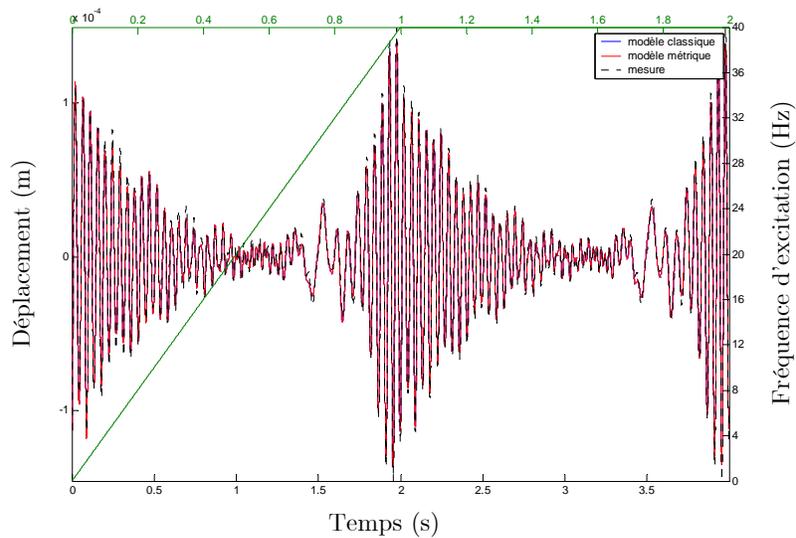


Figure 38 : $x = 0$ réponses

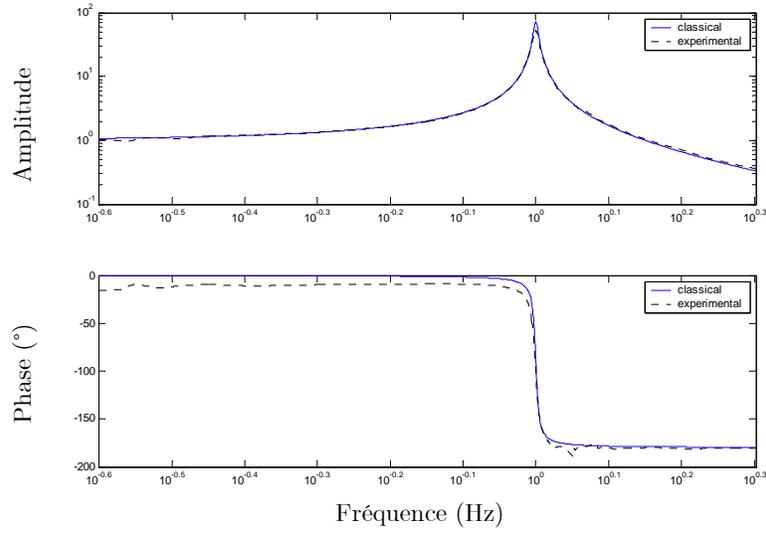


Figure 39 : $x = 5$ fonction de transfert

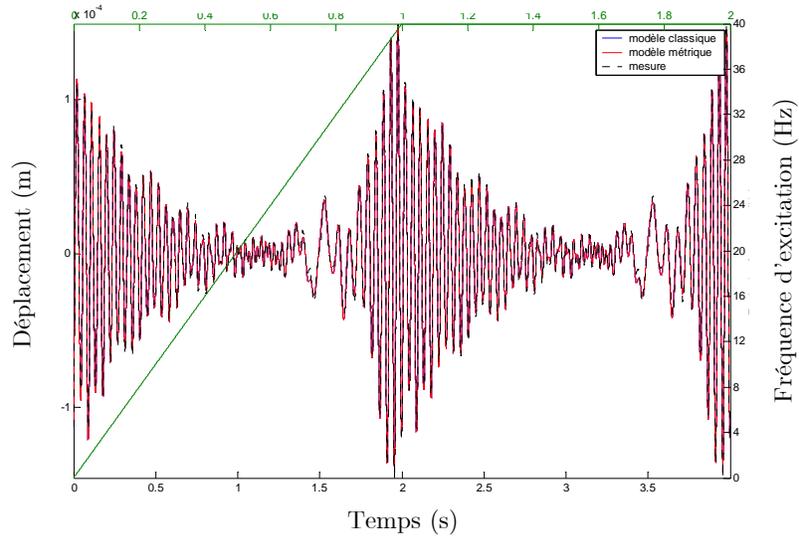


Figure 40 : $x = 5$ réponses

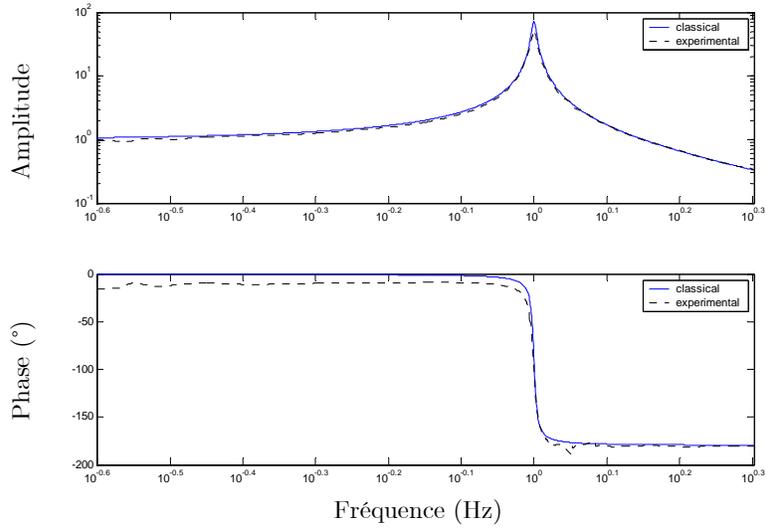


Figure 41 : $x = 10$ fonction de transfert

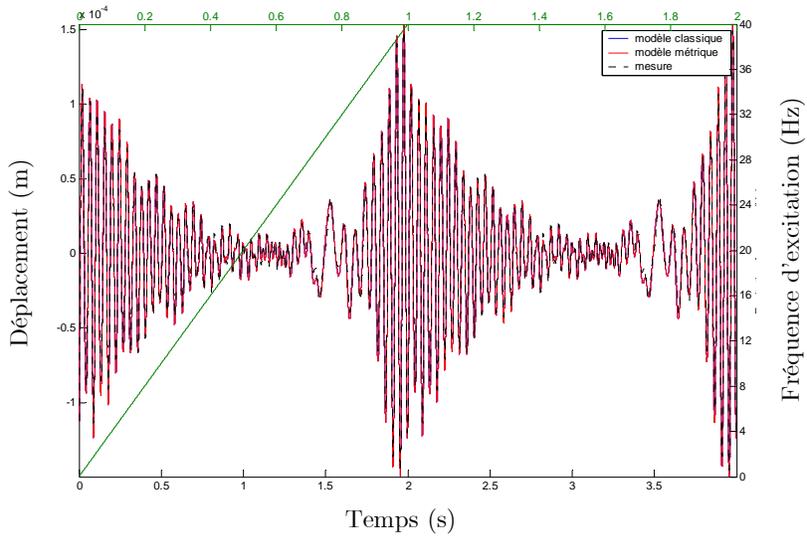


Figure 42 : $x = 10$ réponses

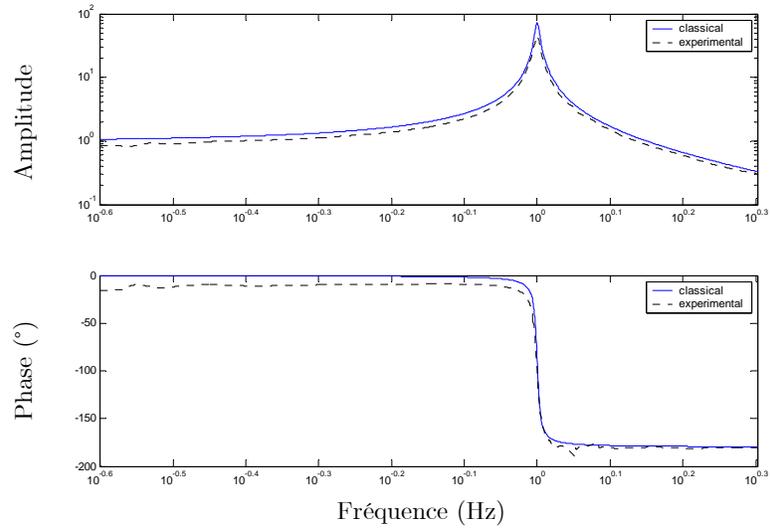


Figure 43 : $x = 20$ fonction de transfert

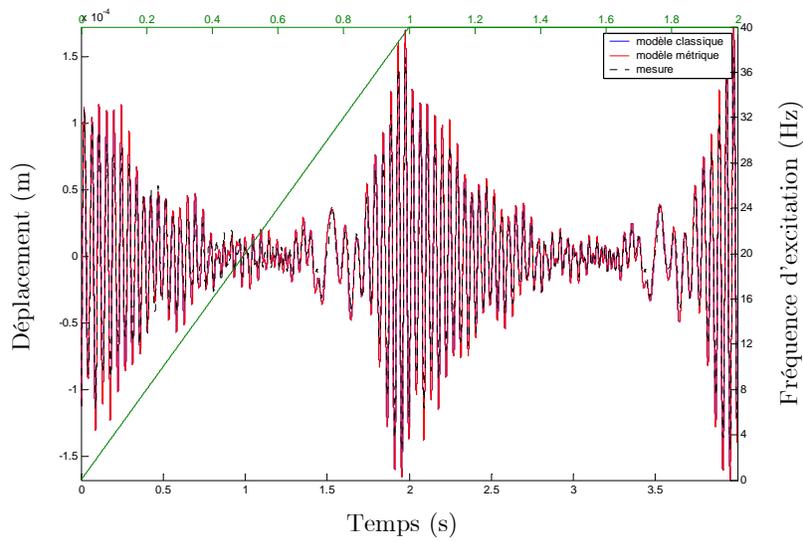


Figure 44 : $x = 20$ réponses

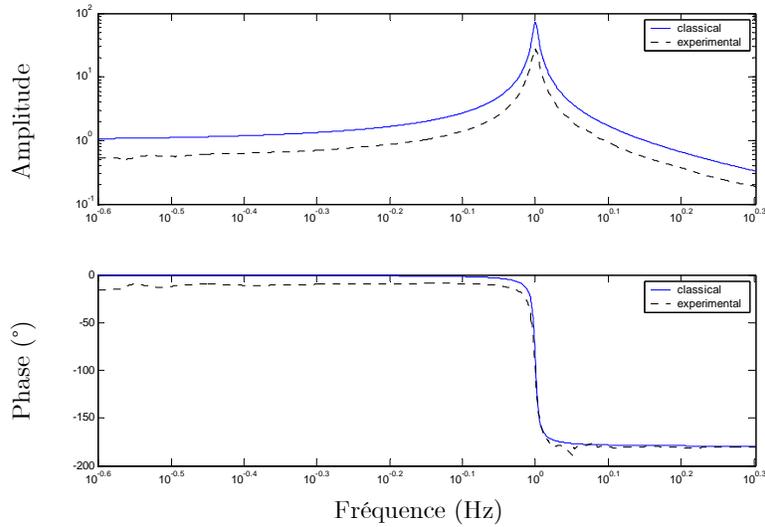


Figure 45 : $x = 50$ fonction de transfert

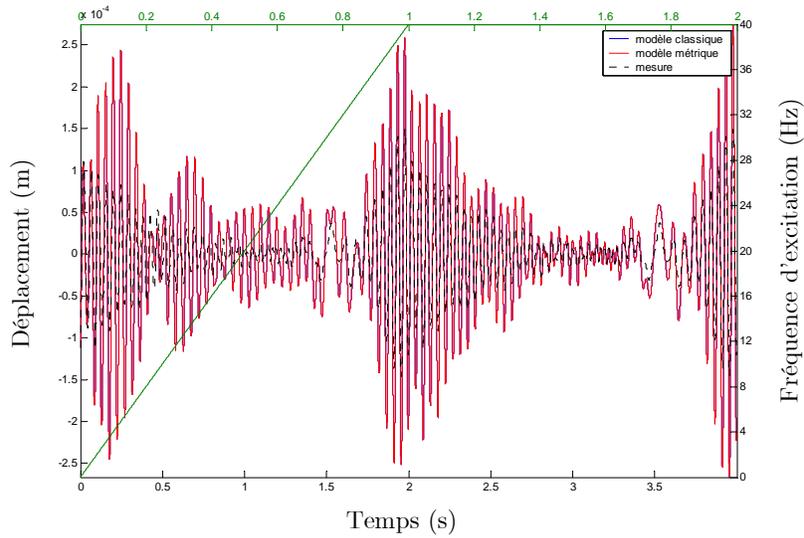


Figure 46 : $x = 50$ réponses

Pour une rampe de $t_m = 1 \text{ s} / t_p = 1 \text{ s}$, la différence entre la réponse du modèle classique et celle du système expérimental est négligeable pour un pourcentage d'erreur inférieur à 10%. A partir de 20%, cette différence devient significative.

A l'aide du paramètre ρ , le recalage par la méthode d'essai-erreur du modèle métrique est possible.

Une erreur de 20% est considérée, la différence calcul-mesure a été présentée figure 44. Avec la valeur recalée $\rho = 3.1 \times 10^{-5}$, l'adéquation entre le calcul métrique et l'expérimental est satisfaisante (voir figure 47).

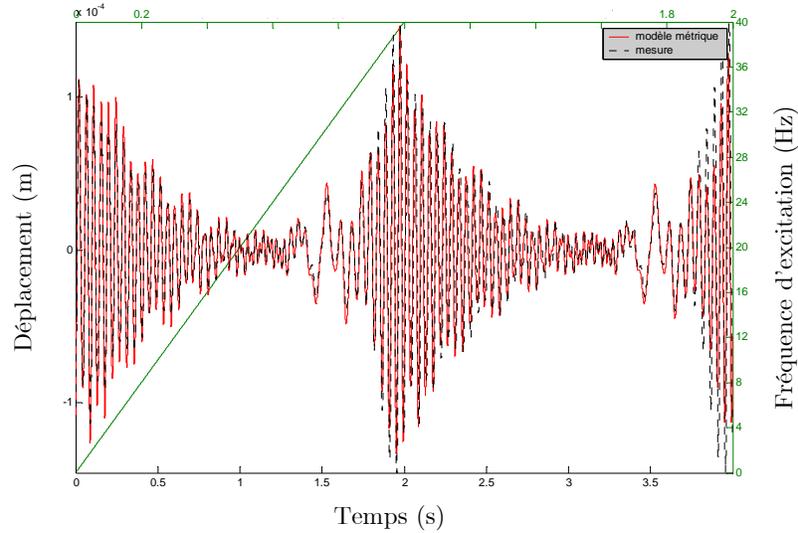


Figure 47 : $t_m = 1 \text{ s} / t_p = 1 \text{ s}$, $\rho = 3.1 \times 10^{-5}$

Le cas d'une erreur de 50% est maintenant considéré, les résultats du modèle classique ont été présentés figure 46. Après recalage, les résultats obtenus sont présentés figure 48.

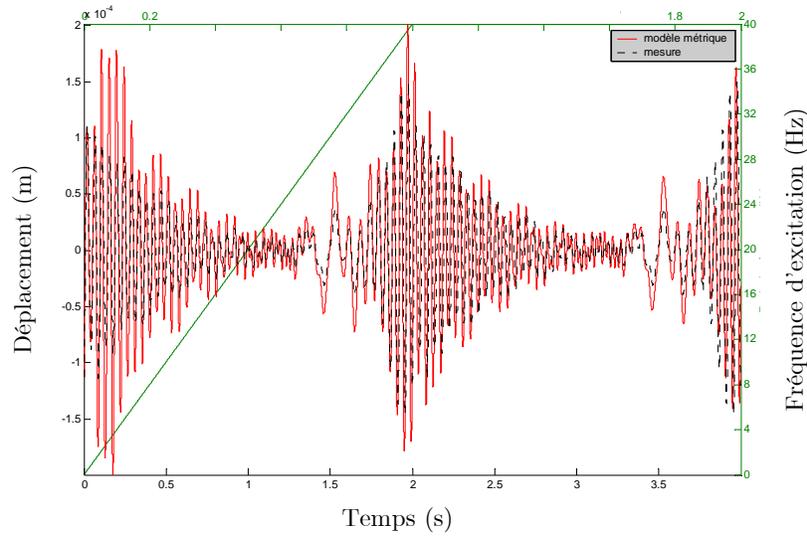


Figure 48 : $t_m = 1 \text{ s} / t_p = 1 \text{ s}$, $x = 50$, $\rho = 3.1 \times 10^{-5}$

Encore une fois, le paramètre ρ permet donc de recalibrer le modèle métrique pour que sa réponse coïncide avec celle du système expérimental. Le tableau 2 récapitule les valeurs de ρ en fonction de x .

x	ρ
20	3.1×10^{-5}
50	3.1×10^{-5}

Tableau 2 : ρ en fonction de x .

Si, a priori, dans la gamme d'erreur considérée, le paramètre ρ optimal ne dépend pas de x , la procédure de recalage (dichotomie) montre néanmoins que pour la valeur $\rho = 1 \times 10^{-4}$, la différence entre les réponses classique et métrique est plus importante dans le cas $x = 50\%$ que dans le cas $x = 20\%$. Ainsi, plus l'erreur est importante, plus l'influence de ρ sur la réponse augmente.

II.1.7.b Influence de la rampe sur la réponse avec erreur, recalage

Il convient maintenant d'étudier l'influence de l'intensité d'une rampe de 0 à 40 Hz sur la réponse d'un modèle comportant une erreur de 20%.

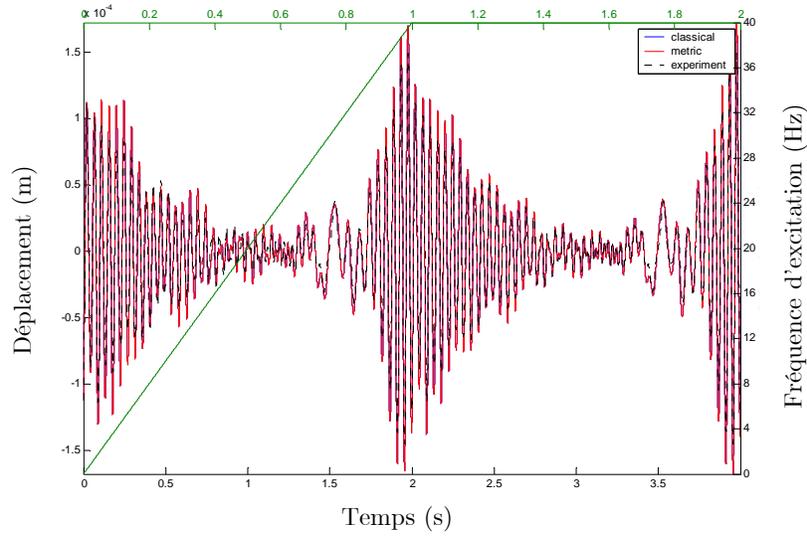


Figure 49 : $t_m = 1 \text{ s} / t_p = 1 \text{ s}$ réponses

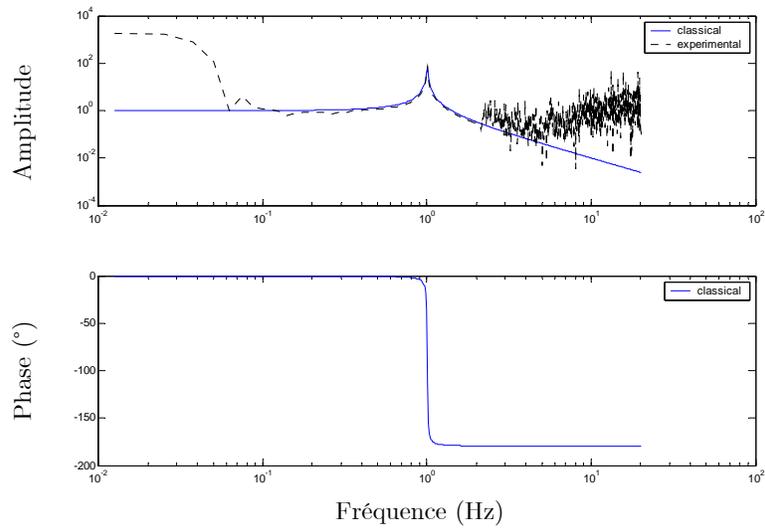


Figure 50 : $t_m = 1 \text{ s} / t_p = 1 \text{ s}$ analyse fréquentielle

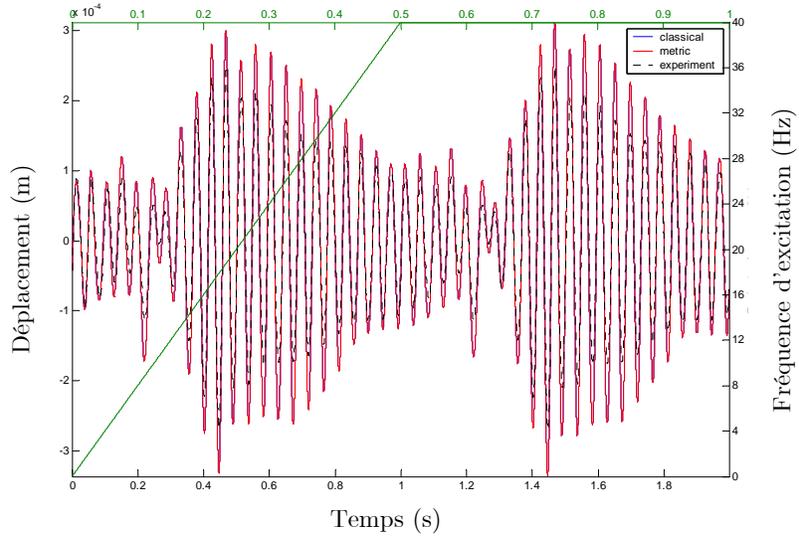


Figure 51 : $t_m = 0.5 \text{ s}$ / $t_p = 0.5 \text{ s}$ réponses

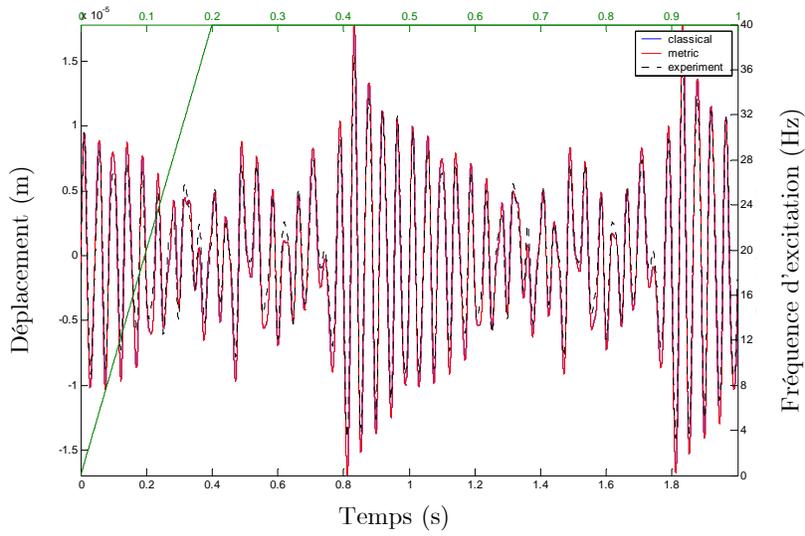


Figure 52 : $t_m = 0.2 \text{ s}$ / $t_p = 0.8 \text{ s}$ réponses

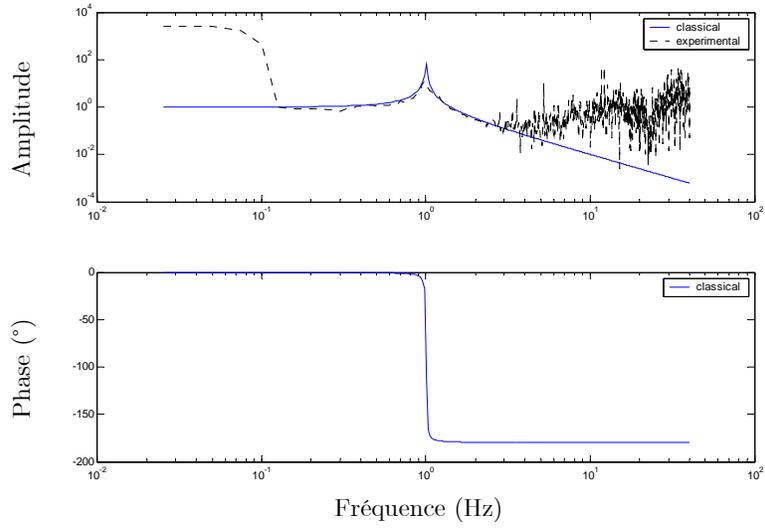


Figure 53 : $t_m = 0.2 \text{ s}$ / $t_p = 0.8 \text{ s}$ analyse fréquentielle

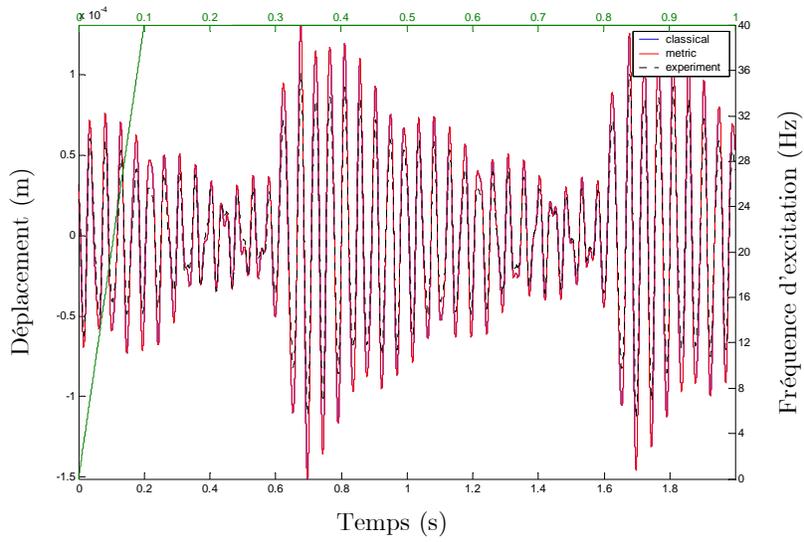


Figure 54 : $t_m = 0.1 \text{ s}$ / $t_p = 0.9 \text{ s}$ réponses

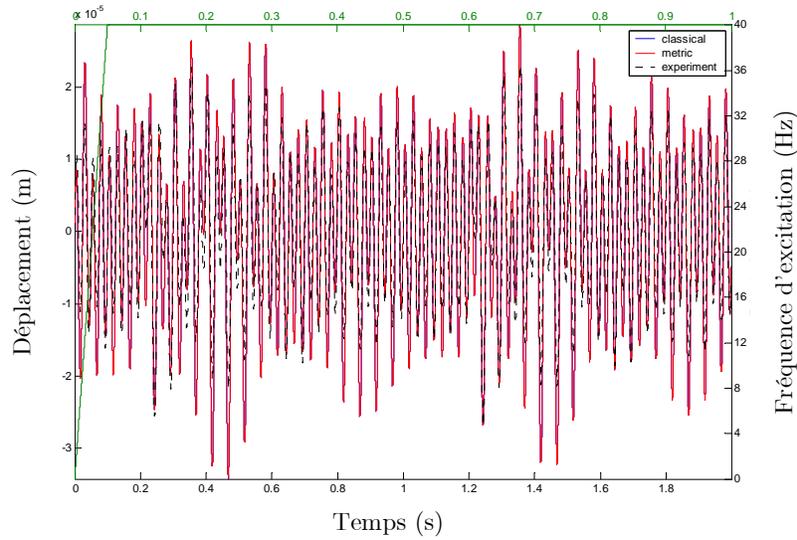


Figure 55 : $t_m = 0.05 \text{ s} / t_p = 0.95 \text{ s}$ réponses

L'intensité de la rampe n'influe pas de façon significative sur l'erreur entre la réponse du modèle et celle du dispositif expérimental.

Néanmoins, un recalage du modèle métrique est toujours possible afin que la réponse du modèle métrique et celle du dispositif expérimental correspondent. Ainsi, pour une rampe $t_m = 0.5 \text{ s} / t_p = 0.5 \text{ s}$, la valeur de ρ recalé est $\rho = 4.5 \times 10^{-5}$ (voir figure 56).

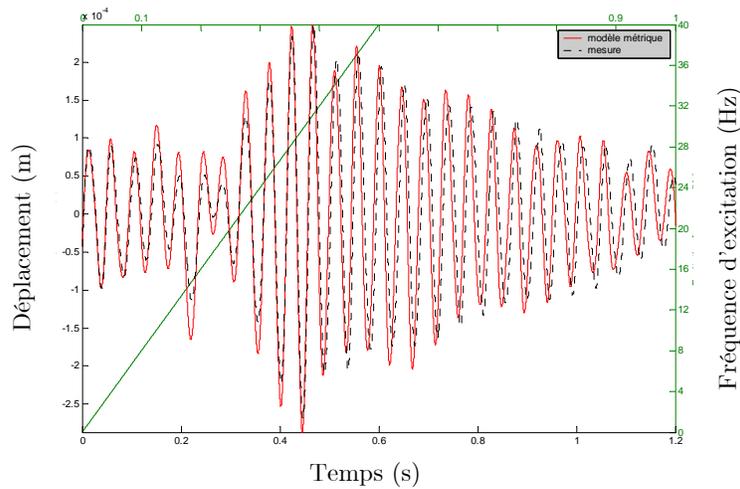


Figure 56 : $\rho = 4.5 \times 10^{-5}$

Ainsi, pour une rampe $t_m = 0.2 \text{ s} / t_p = 0.8 \text{ s}$, la valeur de ρ recalé est $\rho = 5 \times 10^{-6}$.

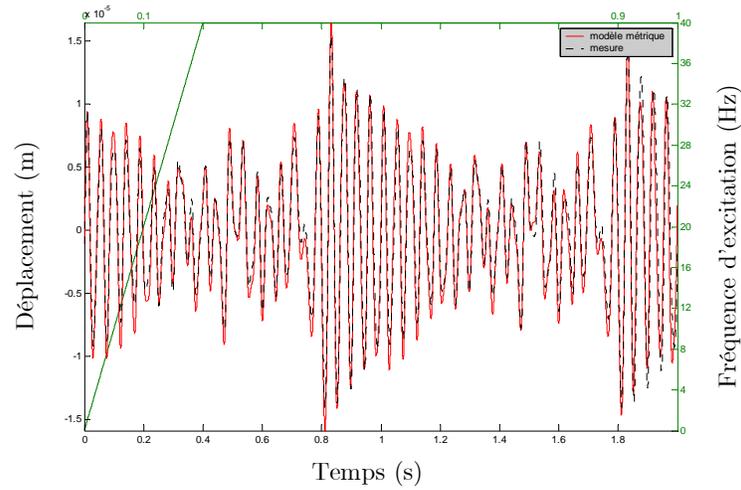


Figure 57 : $\rho = 5 \times 10^{-6}$

Ainsi, pour une rampe $t_m = 0.1 \text{ s} / t_p = 0.9 \text{ s}$, la valeur de ρ recalé est $\rho = 2.3 \times 10^{-5}$.

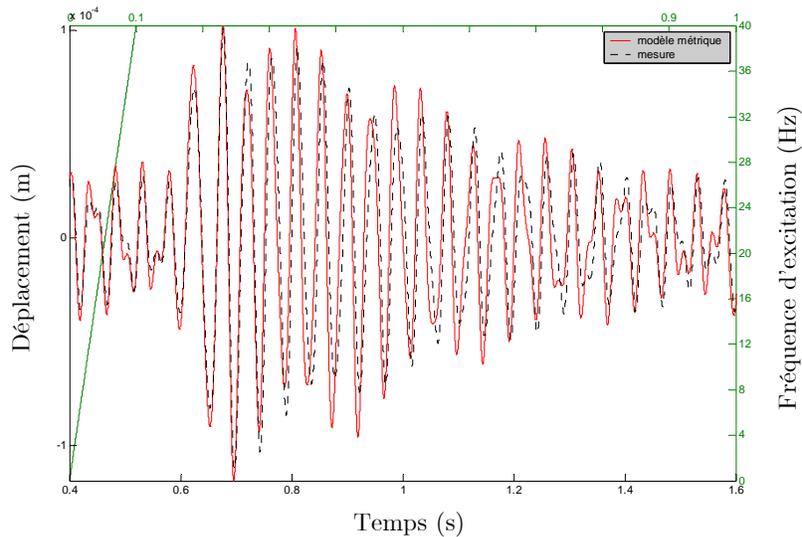


Figure 58 : $\rho = 2.3 \times 10^{-5}$

Ainsi, pour une rampe $t_m = 0.05 \text{ s} / t_p = 0.95 \text{ s}$, la valeur de ρ recalé est $\rho = 6 \times 10^{-6}$.

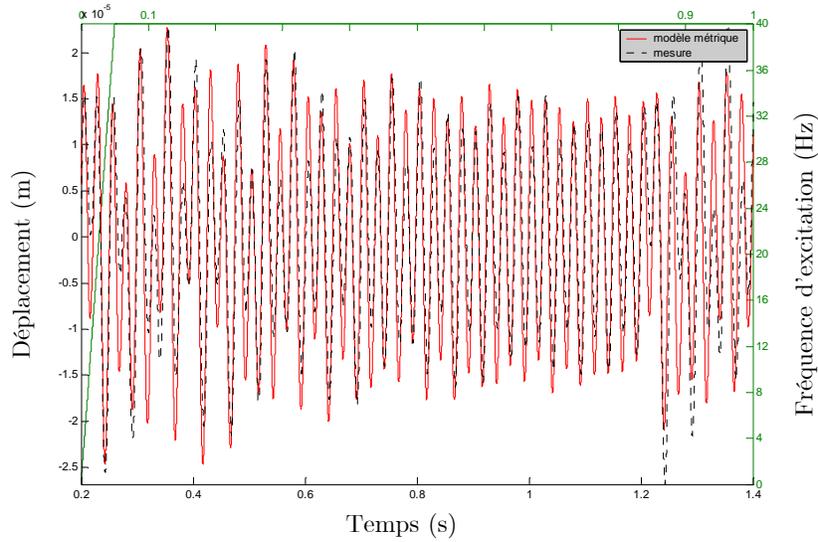


Figure 59 : $\rho = 6 \times 10^{-6}$

ρ ne semble pas suivre de loi d'évolution particulière en fonction de l'intensité de la rampe. Le tableau 3 récapitule les valeurs de ρ en fonction de l'intensité I de la rampe.

I , en Hz/s	ρ
40	31×10^{-6}
80	45×10^{-6}
200	5×10^{-6}
400	23×10^{-6}
800	6×10^{-6}

Tableau 3 : ρ en fonction de l'intensité I

II.1.7.c Conclusions

Le modèle est robuste, néanmoins, il a été montré que la méthode métrique permet, le cas échéant de recalibrer le modèle, et ce même dans le cas d'erreur importante sur les données.

II.1.8 Conclusions du 1 DDL

Dans la mesure où les paramètres du système sont définis avec précision, le modèle classique est efficace, même en transitoire rapide. La forte variation de fréquence n'est donc pas a priori une condition suffisante pour mettre en évidence un défaut de modélisation par rapport à l'expérimental. La méthode métrique reste néanmoins un outil original pour recalibrer le modèle dans le cas où une erreur, même grossière, est commise au niveau de la détermination des paramètres du système (erreurs de 20%, 50%).

II.2 Exemple d'un système à trois degrés de liberté

Dans ce chapitre, la méthode proposée dans [AL MAJID, A. et DUFOUR, R. 2003] et appliquée dans le cas d'un système à un degré de liberté (voir chapitre II.1) est étendue à un système à trois degrés de liberté. Une partie des résultats qui suivent ont fait l'objet de la publication [AL MAJID, A. *et al.* 2005 (acceptée)].

Le système mécanique étudié est composé de trois pendules liés au bâti par des roulements à billes aux points O_1 , O_2 et O_3 . Ils sont connectés l'un à l'autre par des ressorts identiques. La position des masses M peut être modifiée afin d'ajuster les fréquences naturelles du système. Dans la gamme de fréquence considérée, ce système peut être modélisé par un système à trois degrés de liberté (voir figure 60).

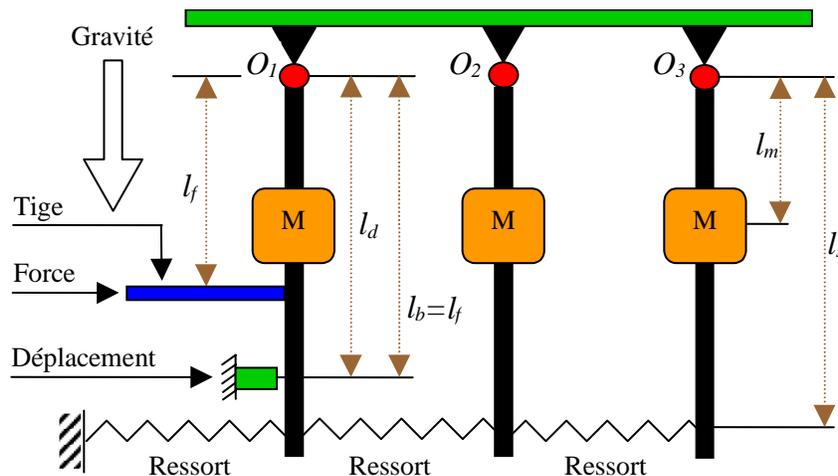


Figure 60 : schéma du dispositif expérimental

Les valeurs caractéristiques de ce système sont présentées dans le tableau 4.

Définition	Variable	Valeur
Position du CDCF	l_d	0.374 m
Longueur de la poutre	l_d	0.400 m
Position de la masse M	l_m	0.327 m
Position de la tige	l_b	0.362 m
Position de la force	l_f	0.362 m
Position des ressorts	l_s	0.390 m
Longueur de la tige	L_b	0.240 m
Rayon de l'axe de rotation	r_a	0.008 m
rayon de la masse	r_m	0.025 m
Masse M	m	0.860 kg
Masse de la tige	m_b	0.040 kg
Masse du ressort	m_s	0.080 kg
Masse de la poutre	m_t	0.333 kg
Masse de l'axe de rotation	m_a	0.120 kg
Raideur des trois ressorts	$k_1 = k_2 = k_3$	10500 kg.m ⁻¹
Coefficient d'amortissement modal	α_1	0.001
Coefficient d'amortissement modal	α_2	0.002
Coefficient d'amortissement modal	α_3	0.002
Accélération de la gravité	g	9.81m.s ⁻²

Tableau 4 : variable et paramètres du système à trois degrés de liberté

Un pot d'excitation permet d'appliquer une force sur le premier sous-système (i.e. premier degré de liberté) dont le déplacement est mesuré à l'aide d'un CDCF (Capteur de Déplacement à Courants de Foucault). Un analyseur de signal dynamique génère un signal « chirp » et permet l'enregistrement dans le temps de la force d'excitation et du déplacement. La réponse mesurée

est obtenue en utilisant la force transmise représentée figure 61 et dont la fréquence varie de 0 à 50 Hz.

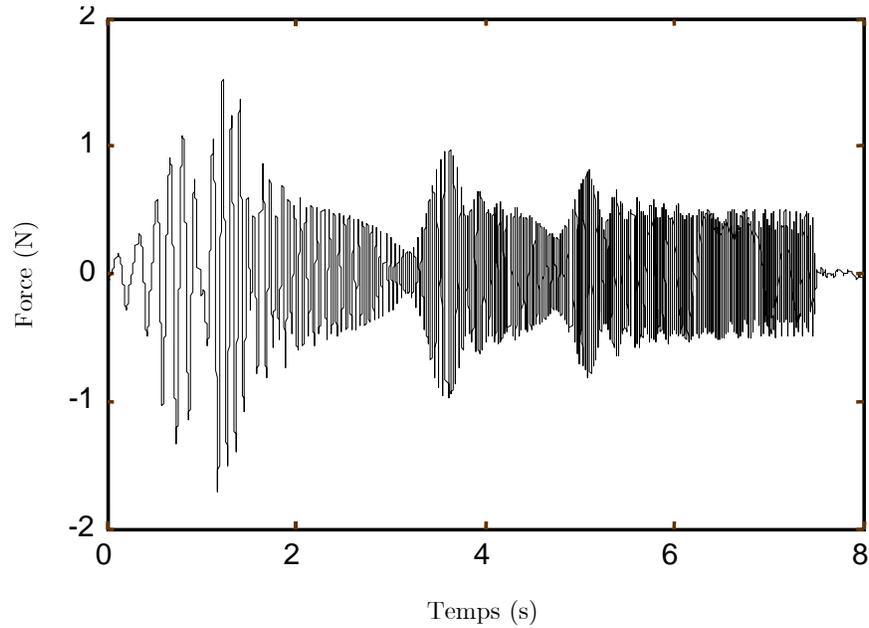


Figure 61 : force d'excitation (0 - 50 Hz)

Les fréquences propres du système expérimental sont données dans le tableau 5.

Fréquences	Valeur (Hz)
ν_1	8.26
ν_2	22.96
ν_3	33.60

Tableau 5 : fréquences propres du système

Le mouvement du système est régi par l'ensemble d'équations différentielles linéaires suivant :

$$M\ddot{x} + Kx = Vf(t) \quad (183)$$

Avec x , le vecteur des déplacements donné par :

$$x = {}^t(x^1 \quad x^2 \quad x^3) \quad (184)$$

$Vf(t)$ est de vecteur des force, avec :

$$V = {}^t(l_f/l_d \quad 0 \quad 0) \quad (185)$$

M , la matrice de masse, est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{I_1 + 2m_s l_s^2/3}{l_d^2} & \frac{1}{6} \frac{m_s l_s^2}{l_d^2} & 0 \\ \frac{1}{6} \frac{m_s l_s^2}{l_d^2} & \frac{I_2 + 2m_s l_s^2/3}{l_d^2} & \frac{1}{6} \frac{m_s l_s^2}{l_d^2} \\ 0 & \frac{1}{6} \frac{m_s l_s^2}{l_d^2} & \frac{I_3 + 2m_s l_s^2/3}{l_d^2} \end{pmatrix} \quad (186)$$

Avec :

$$I_1 = \frac{1}{3} m_t l_t^2 + m \left(\frac{1}{4} r_m^2 + l_m^2 \right) + \frac{1}{2} m_a r_a^2 + m_b l_b^2 \quad (187)$$

Et :

$$I_2 = I_3 = \frac{1}{3} m_t l_t^2 + m \left(\frac{1}{4} r_m^2 + l_m^2 \right) + \frac{1}{2} m_a r_a^2 \quad (188)$$

K , la matrice de raideur, est donnée par :

$$K = \begin{pmatrix} \frac{Q_1 g + k_1 l_s^2 + k_2 l_s^2}{l_d^2} & -\frac{k_2 l_s^2}{l_d^2} & 0 \\ -\frac{k_2 l_s^2}{l_d^2} & \frac{Q_2 g + k_2 l_s^2 + k_3 l_s^2}{l_d^2} & -\frac{k_3 l_s^2}{l_d^2} \\ 0 & -\frac{k_3 l_s^2}{l_d^2} & \frac{Q_3 g + k_3 l_s^2}{l_d^2} \end{pmatrix} \quad (189)$$

Avec :

$$Q_1 = m l_m + \frac{1}{2} m_t l_t + m_s l_s + m_b \sqrt{l_b^2 + L_b^2} \quad (190)$$

$$Q_2 = Q_3 = m l_m + \frac{1}{2} m_t l_t + m_s l_s \quad (191)$$

Le passage dans la base modale à l'aide du changement de variable (112) fournit les équations modales suivantes :

$${}^t\Phi M \Phi \ddot{q} + {}^t\Phi K \Phi q = {}^t\Phi V f(t) \quad (192)$$

Avec :

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0.36 & 0.80 & -0.61 \\ 0.64 & 0.31 & 0.82 \\ 0.80 & -0.66 & -0.40 \end{pmatrix} \quad (193)$$

Et :

$${}^t\Phi V = \begin{pmatrix} 0.35 \\ 0.77 \\ -0.59 \end{pmatrix} \quad (194)$$

La forme modale (192) permet l'introduction de la matrice d'amortissement modal \mathbf{C}_{mod} , dont les coefficients sont exprimés à partir des coefficients d'amortissement visqueux mesurés en utilisant la fonction de transfert en régime permanent.

$$M_{mod} \ddot{q} + C_{mod} \dot{q} + K_{mod} q = {}^t\Phi V f(t) \quad (195)$$

Avec :

$$M_{mod} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (196)$$

$$K_{mod} = \begin{pmatrix} \Omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \Omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_3^2 \end{pmatrix} \quad (197)$$

$$C_{mod} = \begin{pmatrix} 2\alpha_1\Omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha_2\Omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha_3\Omega_3 \end{pmatrix} \quad (198)$$

La formulation d'état (123) est utilisée avec :

$$X = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} \quad (199)$$

$$U = f(t) \quad (200)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & Id \\ -M_{mod}^{-1}K_{mod} & -M_{mod}^{-1}C_{mod} \end{bmatrix} \quad (201)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ M_{mod}^{-1}V_{mod} \end{bmatrix} \quad (202)$$

$$C = Id \quad (203)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ M_{mod}^{-1}V_{mod} \end{bmatrix} \quad (204)$$

Le logiciel MATLAB-SIMULINK, qui est utilisé pour résoudre les équations d'état (123) met à disposition un éventail de plusieurs schémas numériques pour résoudre ces équations différentielles. Il a été montré que tous les algorithmes utilisés ont fourni des réponses similaires : la réponse prédite par une modélisation classique montre une grande différence avec la réponse expérimentale (voir figure 62)

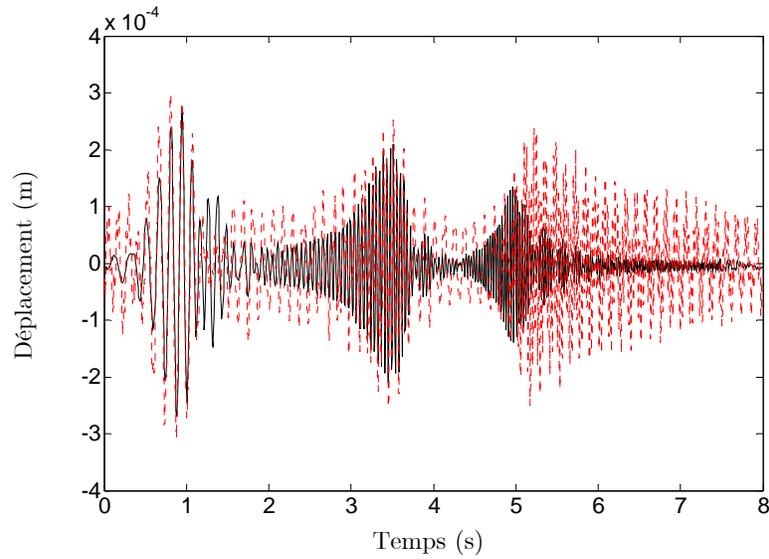


Figure 62 : réponse du modèle classique comparée à la réponse expérimentale

La simulation est menée avec $\rho_1 = 3.3 \times 10^{-6}$, $\rho_2 = 6.4 \times 10^{-6}$, et $\rho_3 = 2.1 \times 10^{-6}$. Une variation de ces paramètres de l'ordre de $\pm 1 \times 10^{-7}$ n'influe pas sur la réponse de façon significative.

L'efficacité du modèle métrique est montrée figure 63.

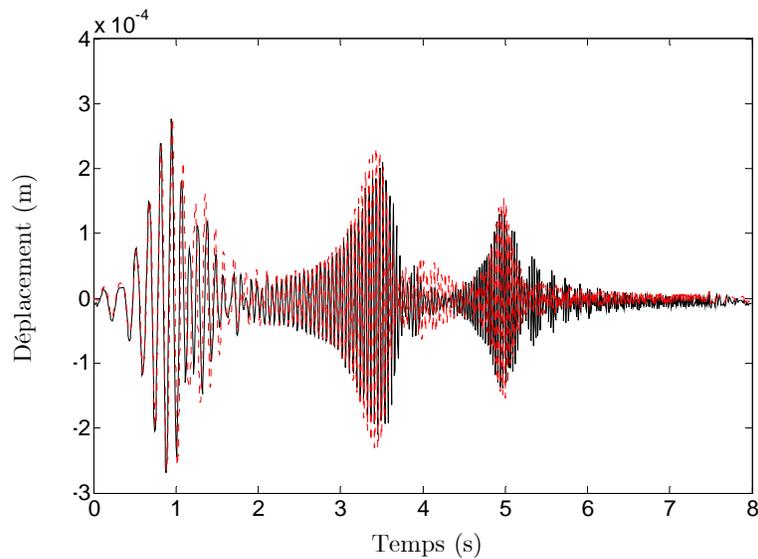


Figure 63 : réponses métrique calculée (pointillé) et expérimentale (continu)

Un complément d'information est apporté par la simulation. La figure 64 montre l'amortissement classique comparé à l'amortissement métrique.

Il peut être observé que l'amortissement variable introduit par la méthode métrique est plus faible que l'amortissement classique avant la résonance et plus important après. Recaler un modèle avec la méthode métrique est donc utile si le modèle n'apporte pas assez d'amortissement après la résonance. Il convient néanmoins de s'assurer qu'avant la résonance, la réduction d'amortissement apporté par la méthode métrique n'est pas néfaste sur la qualité de la réponse.

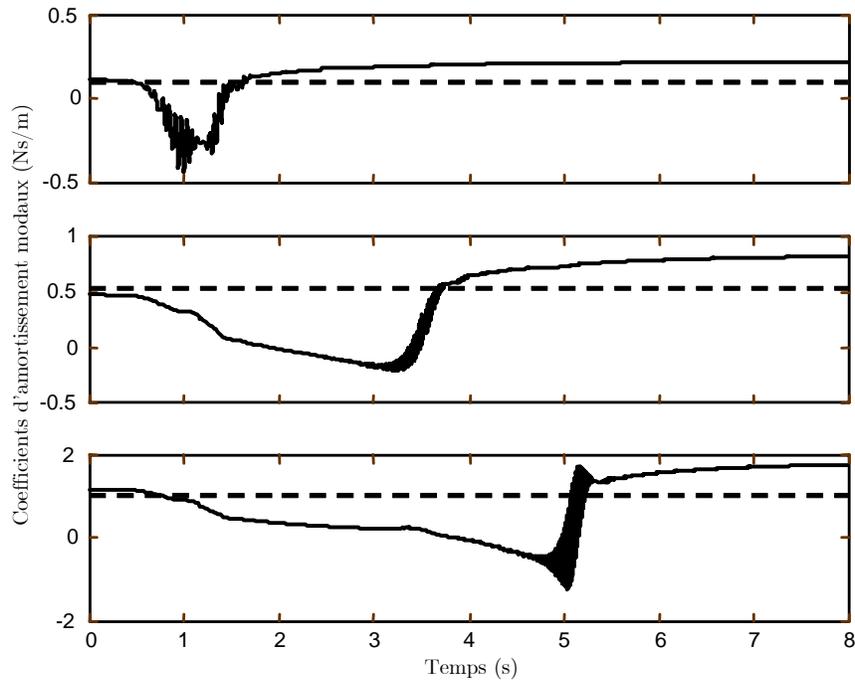


Figure 64 : coefficients d'amortissement modaux métriques (continu) et classique (pointillé)

III Dynamique des rotors en transitoire

De nombreuses applications dans le domaine des machines tournantes ont à affronter des régimes transitoires rapides, notamment lors de cycles mise en route / arrêt fréquents. Les sollicitations au niveau de la machine concernée sont importantes et il convient d'avoir un modèle précis pour prévoir le comportement de la machine.

Les machines tournantes ont un comportement dynamique spécifique vis à vis d'autres systèmes continus, en particulier à cause de la présence de l'effet gyroscopique. Leur modélisation est rendu complexe par les effets de rotation, les variations de caractéristiques en fonction de la vitesse de rotation (raideurs, amortissements...) et d'autres paramètres tels que la température de fonctionnement...

Ici, il s'agit de confronter l'aspect expérimental avec la modélisation classique (largement développée dans [LALANNE, M. et FERRARIS, G. 1998]) et voir ce que peut apporter un modèle métrique adapté à la dynamique des rotors.

Aussi, il faut disposer d'un banc d'essai dont les paramètres sont identifiés de façon précise (répétabilité, rapport signal sur bruit...) afin de fournir des mesures de grande qualité.

En premier lieu, le modèle adimensionné d'un rotor simple est envisagé afin d'appréhender le comportement d'un rotor en régime transitoire de vitesse (montées et descentes). Un accent particulier est ensuite mis sur la description de la mise au point du banc d'essai et le traitement des données du dispositif expérimental étudié. La modélisation classique de ce rotor est traitée avant de présenter enfin, le modèle métrique et la confrontation des réponses expérimentales avec celles des modèles.

III.1 Modèle adimensionné

Le rotor étudié est présenté figure 65.

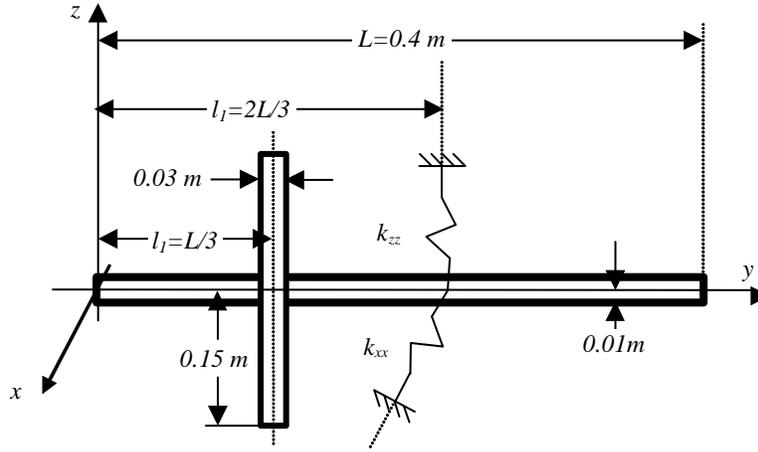


Figure 65 : schéma du rotor simple

Les équations de ce rotor sont inspirées de [LALANNE, M. et FERRARIS, G. 1998]. L'influence du palier n'est pas pris en compte ($k_{xx} = k_{zz} = 0$), le rotor est donc symétrique. En ajoutant les termes d'amortissement, les équations de comportement du rotor sont obtenues (voir (205)). La raideur gyroscopique n'est pas prise en compte dans cet exemple, elle n'influe sur le comportement du rotor pour des intensités de rampes bien plus importantes que celles considérées dans ce qui suit.

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 - a\dot{\phi}\dot{q}_2 + c_1\dot{q}_1 + kq_1 &= m^*d\dot{\phi}^2 \sin \phi \\ m\ddot{q}_2 + a\dot{\phi}\dot{q}_1 + c_2\dot{q}_2 + kq_2 &= m^*d\dot{\phi}^2 \cos \phi \end{aligned} \quad (205)$$

Les valeurs numériques suivantes sont considérées pour l'application étudiée : $m = 14.29$, $a = 2.871$, $k = 1.195 \times 10^6$, $c_1 = 1.5 \times 10^5 \beta$, $c_2 = 3.75 \times 10^5 \beta$ et $m^*d = 1.299 \times 10^{-5}$.

La vitesse de rotation $\dot{\phi}(t)$ est alors supposée de la forme :

$$\dot{\phi}(t) = \Omega_0 + \lambda t \quad (206)$$

Donc :

$$\phi(t) = \Omega_0 t + \frac{\lambda}{2} t^2 \quad (207)$$

La vitesse critique ω_c de ce rotor est donnée par :

$$\omega_c = \sqrt{\frac{k}{m - a}} \quad (208)$$

Le temps τ adimensionnel est défini en posant :

$$\tau = \omega_c t \quad (209)$$

D'où :

$$\dot{\phi}(\tau) = \Omega_0 + \frac{\lambda}{\omega_c} \tau \quad (210)$$

Et, sachant que $\phi(\tau = 0) = 0$:

$$\phi(\tau) = \frac{\Omega_0}{\omega_c} \tau + \frac{\lambda}{2\omega_c^2} \tau^2 \quad (211)$$

Ainsi, la vitesse de rotation est obtenue sous forme adimensionnelle :

$$\phi'(\tau) = \frac{\Omega_0}{\omega_c} + \underline{\lambda} \tau = \frac{\dot{\phi}(\tau)}{\omega_c} \quad (212)$$

Avec $\underline{\lambda} = \frac{\lambda}{\omega_c^2}$.

En définissant la masse adimensionnelle par :

$$\underline{m} = \frac{m\omega_c^2}{k} \quad (213)$$

Les équations suivantes sont obtenues :

$$\begin{aligned} \underline{m}q_1'' - \frac{a}{k}\omega_c^2\phi'q_2' + \frac{c_1}{k}\omega_c q_1' + q_1 &= \frac{m^*d}{k}\omega_c^2\phi'^2 \sin \phi \\ \underline{m}q_2'' + \frac{a}{k}\omega_c^2\phi'q_1' + \frac{c_2}{k}\omega_c q_2' + q_2 &= \frac{m^*d}{k}\omega_c^2\phi'^2 \cos \phi \end{aligned} \quad (214)$$

En posant $\underline{q} = \frac{q}{Q_{st}}$ et $\underline{a} = \frac{a}{k}\omega_c^2$, elles deviennent :

$$\begin{aligned} \underline{m}q_1'' - \underline{a}\phi'q_2' + \frac{c_1}{k}\omega_c q_1' + q_1 &= \frac{m^*d}{k}\Omega_c^2\phi'^2 \sin \phi \\ \underline{m}q_2'' + \underline{a}\phi'q_1' + \frac{c_2}{k}\omega_c q_2' + q_2 &= \frac{m^*d}{k}\Omega_c^2\phi'^2 \cos \phi \end{aligned} \quad (215)$$

Par ailleurs, en posant $\underline{c}_1 = \frac{c_1}{k}\omega_c$ et $\underline{c}_2 = \frac{c_2}{k}\omega_c$ ainsi que $Q_{st} = \frac{m^*d\omega_c^2}{k}$ alors les équations adimensionnées du rotor étudié sont obtenues en (216).

$$\begin{aligned} \underline{m}\underline{q}_1'' - \underline{a}\tau\underline{q}_2' + \underline{c}_1\underline{q}_1' + \underline{q}_1 &= \phi'^2 \sin\left(\left(\frac{\Omega_0}{\omega_c} + \frac{\lambda}{2\omega_c^2}\tau\right)\tau\right) \\ \underline{m}\underline{q}_2'' + \underline{a}\tau\underline{q}_1' + \underline{c}_2\underline{q}_2' + \underline{q}_2 &= \phi'^2 \cos\left(\left(\frac{\Omega_0}{\omega_c} + \frac{\lambda}{2\omega_c^2}\tau\right)\tau\right) \end{aligned} \quad (216)$$

Les conditions initiales en montée sont alors données par (217) et celles en descente par (218).

$$\begin{cases} \underline{q}_1'(\tau = 0) = \underline{q}_2'(\tau = 0) = 0 \\ \underline{q}_1(\tau = 0) = \underline{q}_2(\tau = 0) = 0 \end{cases} \quad (217)$$

$$\begin{aligned} \underline{q}_1'(\tau = 0) &= \frac{Q_1}{X_{st}} \frac{\Omega_0}{\omega_c} \\ \underline{q}_2'(\tau = 0) &= 0 \\ \underline{q}_1(\tau = 0) &= 0 \\ \underline{q}_2(\tau = 0) &= \frac{Q_2}{X_{st}} \end{aligned} \quad (218)$$

Avec Q_1 et Q_2 donnés par (219).

$$Q_1 = Q_2 = \frac{m^* d \Omega_0^2}{k + (a - m) \Omega_0^2} \quad (219)$$

Les résultats sont présentés figures 66 à 68 , avec :

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{c_1}{2\sqrt{km}} \\ \alpha_2 = \frac{c_2}{2\sqrt{km}} \end{cases} \quad (220)$$

et :

$$\underline{q} = \sqrt{\underline{q}_1^2 + \underline{q}_2^2} \quad (221)$$

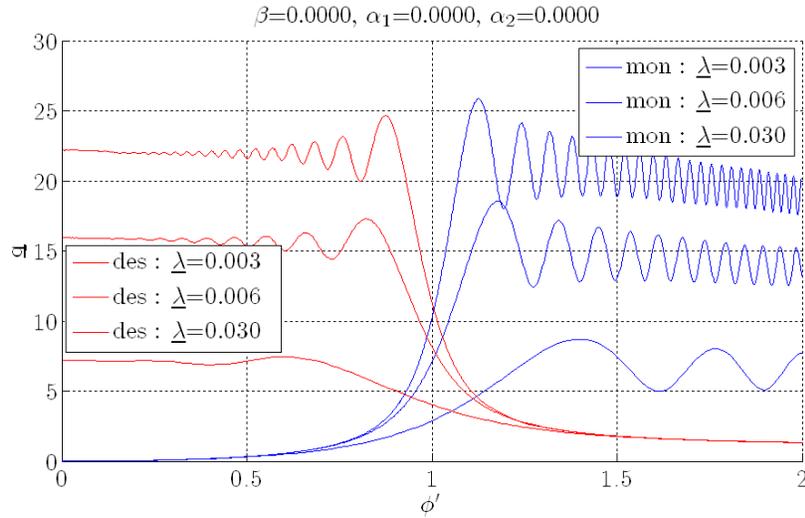


Figure 66 : pas d'amortissement

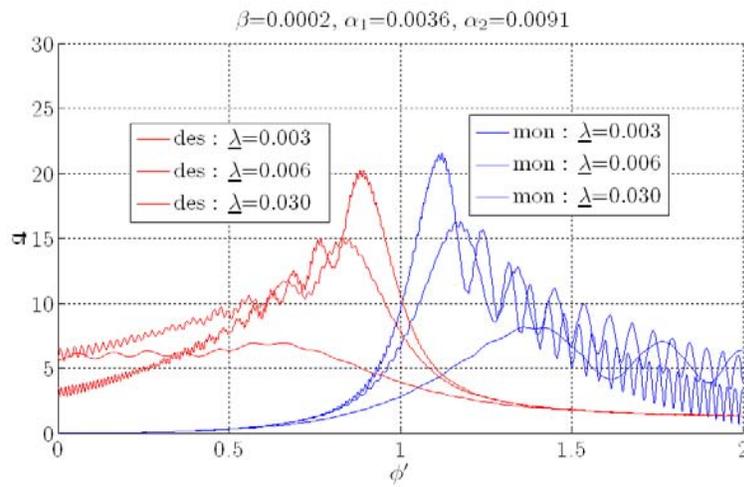


Figure 67 : amortissement moyen

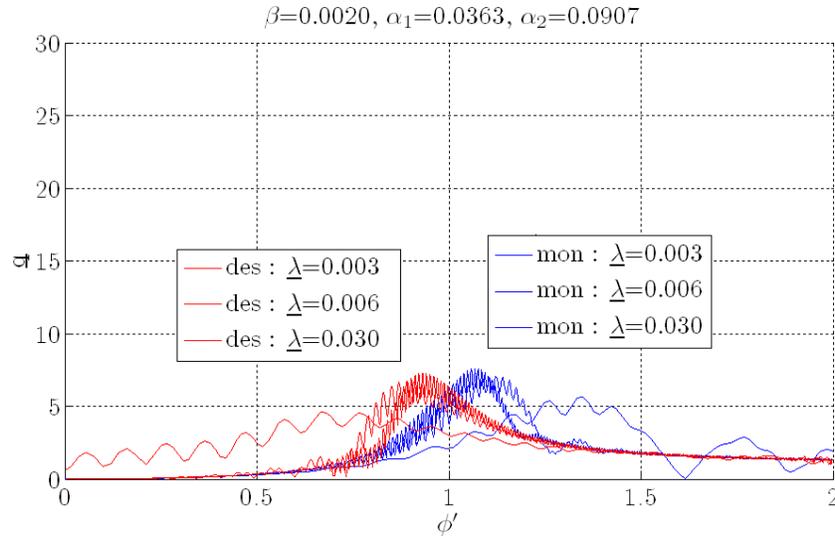


Figure 68 : amortissement fort

L'étude adimensionnée montre que plus l'intensité de la rampe en vitesse est grande, plus le maximum d'amplitude diminue, plus l'instant auquel il se produit est décalé dans le temps. Les comportements à la montée et à la descente sont relativement similaires, à l'exception de niveaux d'amplitude des vibrations légèrement inférieurs dans le cas de la descente.

III.2 Expérimentation

Les outils de simulation numérique développés au cours de cette étude doivent être testés par comparaison avec des résultats expérimentaux. Par ailleurs, l'objectif est de mettre en évidence expérimentalement les phénomènes appréhendés au paragraphe III.1. A cet effet, un banc de simulation expérimental a été utilisé.

La description du banc et des chaînes de commande et de mesure est tout d'abord précisée, puis l'équilibrage du rotor est traité. L'identification dynamique et le recalage de modèle sur le rotor sont ensuite présentés. Enfin, une série de mesures en transitoire est effectuée afin de servir de base à la validation des modèles et outils numériques développés.

III.2.1 Description du banc d'essai

Le banc d'essai, élaboré en grande partie lors de la thèse [ISMEURT, O. 1995], est développé afin d'en améliorer son comportement. L'ensemble mécanique est présenté par la figure 69.



Figure 69 : banc perspective

Le châssis de répartition des charges au sol permet à l'ensemble de répondre aux normes de sécurité en vigueur dans ce domaine. Huit plots de suspension, supportant une charge totale de deux tonnes, permettent en outre d'isoler le montage du bâtiment (découplage aux environs de cinq Hertz).

Le berceau rotor, très rigide, réalisé en fonte lamellaire, reçoit à ses extrémités deux cloches d'adaptation dans lesquelles sont logés les paliers : un roulement à rouleaux côté opposé au moteur et un roulement à billes côté moteur. La distance entre les portées est de 900 mm environ.

Le moteur électrique asynchrone à grande vitesse est présenté sur la figure 70. Il est commandé via une électronique associée (onduleur, microprocesseur) assurant une erreur maximale de 0.2% de la consigne sur la vitesse de rotation indépendamment de la charge. Il est capable d'atteindre une vitesse de 15000 tr/min en délivrant une puissance de 11 kW en nominal, et de 15 kW en surcharge pendant trente minutes.



Figure 70 : moteur

Le rotor est de type assemblé pour répondre de façon économique à la spécification de modularité du dispositif : il est composé d'un arbre en Stub de diamètre 20 mm, sur lequel sont fixés par l'intermédiaire de frettes mécaniques le seul et unique disque ainsi que les bagues permettant de reconstituer des portées de roulement. Le système de frettes mécaniques est présenté figures 71 et 72 dans le cas de la fixation du disque.

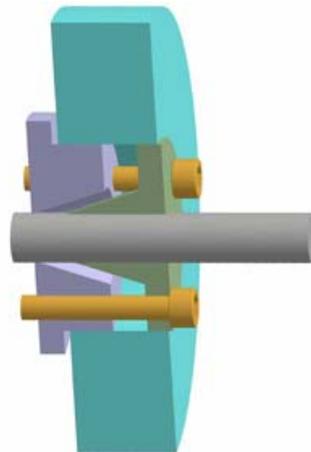


Figure 71 : frettes et disque

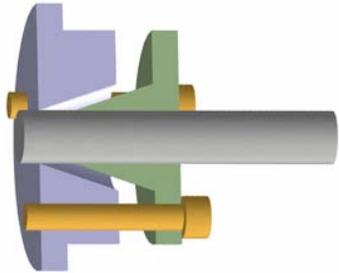


Figure 72 : détails des frettes

L'accouplement est présenté sur la figure 73. Il possède deux groupes de membranes souples en flexion et rigides en torsion pour lier de façon homocinétique le rotor au moteur d'entraînement.

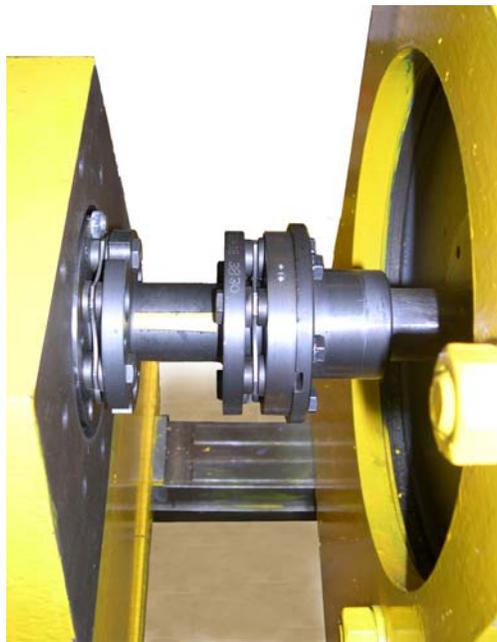


Figure 73 : accouplement

Un arceau de sécurité équipé de bagues en nylon assure la rétention du rotor en cas d'instabilité, et un compresseur d'air associé à un huileur génère le brouillard d'huile nécessaire à la lubrification des paliers moteurs.

Pour plus de flexibilité, l'ensemble de la machine a été redessiné sur AUTOCAD 14 (voir annexe D).

Pour des raisons de stabilité du rotor, l'ensemble de serrage par cônes du palier côté opposé au moteur a été supprimé et remplacé par un ensemble entretoise + bague + roulement à rouleaux de type NU204 ETN P6 (voir annexe D).

Dans cette configuration, la machine permet d'atteindre l'accélération (positive ou négative de 100 Hz/s sur la plage 0-6000 tr/min.

III.2.2 Système de commande et de surveillance

La commande et la surveillance du dispositif sont assurées par un micro-ordinateur équipé de cartes de conversion analogique/digital et digital/analogique et un logiciel de surveillance développé en assembleur (50%) et en FORTRAN (50%).

La commande est ici réduite au pilotage du moteur électrique via son électronique propre : le logiciel génère une tension analogique continue proportionnelle à la vitesse de rotation désirée. Il autorise des montées/descente en vitesse linéaires.

La surveillance peut être effectuée sur 32 voies maximum. Elle consiste à vérifier, sur des signaux de nature diverses (déplacements, accélérations) le non dépassement de seuils prééglés par un fichier de données propre à chaque essai.

Deux niveaux de détection sont pris en compte :

- Seuil 1 (pré-alarme) : la vitesse de rotation est stabilisée et l'initiative de continuer ou d'arrêter est laissée à l'appréciation de l'opérateur.
- Seuil 2 (arrêt d'urgence) : la machine est décélérée rapidement sans intervention de l'opérateur.

En outre, un boîtier logique annexe assure la surveillance des différents accessoires (huile et air au niveaux des paliers du moteur) de façon binaire (marche/arrêt). En cas d'anomalie sur ces paramètres, ce boîtier est prioritaire sur le logiciel et déclenche un arrêt d'urgence. Ce boîtier permet aussi le pilotage manuel du moteur.

III.2.3 Mesure - Capteurs

III.2.3.a Déplacement

Le dispositif est instrumenté au moyen de CDCF VIBROMETER (TQ102 et TQ103).

Dans le but d'obtenir l'orbite d'une section du rotor, les CDCF sont couplés deux à deux et montés à 90° à l'aide de supports spécifiques liés au bâti, dans un plan perpendiculaire à l'axe du rotor. Une installation de ce type constitue un plan de mesure.

Deux plans de mesure sont utilisés : le plan du milieu de l'arbre (voir figure 74), équipé de deux CDCF TQ102 (*C1* et *C2*) et le plan du disque (voir figure 75), équipé de deux CDCF TQ103 (*C3* et *C4*).



Figure 74 : plan du milieu de l'arbre (*C1* et *C2*)



Figure 75 : plan du disque (*C3* et *C4*)

Les quatre CDCF sont implantés selon la figure 76. Le repère utilisé est celui du paragraphe III.1. Ces quatre CDCF sont conditionnés puis étalonnés (voir tableau 6).

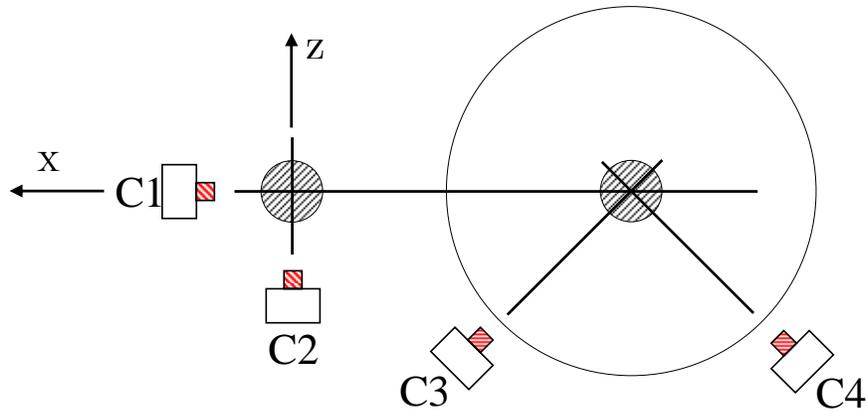


Figure 76 : implantation capteurs

CDCF	Nature	Diamètre (<i>mm</i>)	Plage de mesure (<i>mm</i>)	Sensibilité (<i>V/mm</i>)
<i>C1</i>	<i>TQ102</i>	7.9	0.3 → 2.1	-8.510
<i>C2</i>	<i>TQ102</i>	7.9	0.3 → 2.1	-8.428
<i>C3</i>	<i>TQ103</i>	18.0	0.7 → 4.2	-4.002
<i>C4</i>	<i>TQ103</i>	18.0	0.7 → 4.2	-4.012

Tableau 6 : caractéristiques CDCF

III.2.3.b Vitesse de rotation

Un capteur magnétique de vitesse est installé près du palier côté opposé au moteur. Le collage d'une dent de métal (top-tour) sur l'arbre dans le plan de mesure de ce capteur permet d'obtenir un top électrique une fois par tour qui, traité par un compteur impulsionnel (voir figure 78), donne entre-autres, un retour d'information sur la vitesse de rotation de la machine.



Figure 77 : top et capteur de top



Figure 78 : compteur impulsionnel

III.2.4 Equilibrage

Plusieurs méthodes existent pour équilibrer un rotor flexible. Dans des études récentes, [ZHOU, S. et SHI, S. 2001; ZHOU, S. et SHI, J. 2002], les auteurs ont passé en revue l'activité de recherche dans le domaine de l'équilibrage.

La méthode modale d'équilibrage et la méthode des coefficients d'influence sont les principales méthodes pour équilibrer un rotor flexible, [BISHOP, R. E. D. et GLADWELL, G. M. L. 1959; LUND, J. W. et TONNESEN, J. 1972 ; PARKINSON, A. G. *et al.* 1980]. La première méthode utilise les paramètres modaux et la réduction modale du balourd continu initial, le rotor est équilibré à ses vitesses critiques, étape par étape, mode après mode. [SAITO, S. et AZUMA, T. 1981]. Cette méthode est surtout utilisée pour des machines à vitesse rapide et présentant un grand nombre de vitesses critiques dans leur plage de fonctionnement.

L'objectif est ici d'équilibrer le rotor étudié afin d'obtenir un balourd résiduel faible devant un balourd introduit ensuite, connu, qui servira de référence et sera introduit dans les modèles pour une comparaison adéquate entre calculs et mesures.

Dans notre cas, le rotor tourne à faible vitesse (3000 tr/min maximum) et ne croise qu'une seule vitesse critique dans sa plage de fonctionnement : la méthode des coefficients d'influence va être utilisée (voir aussi [DUFOUR, R. *et al.* 1995]).

Elle est de type inverse : la construction d'un modèle matriciel de la structure est réalisée à partir de mesures de sensibilité au balourd. Elle s'applique à l'équilibrage de rotors supposés linéaires, rigides ou flexibles, amortis ou non amortis.

Son objectif est d'annuler les vibrations en un certain nombre de points de mesure, en décomposant le balourd à corriger en un certain nombre de plans d'équilibrage. Ces vibrations peuvent être annulées pour une ou plusieurs vitesses de fonctionnement, appelées vitesses d'équilibrage, [GOODMAN, T. P. 1964; PARKINSON, A. G. *et al.* 1980].

III.2.4.a Définition des coefficients d'influence

Le balourd initial est généralement réparti de manière continue et quelconque sur le rotor (voir figure 79).

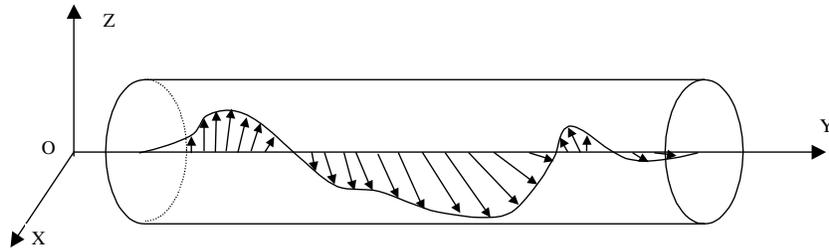


Figure 79 : répartition du balourd sur le rotor

Pour modéliser simplement ce balourd, il est décomposé en masses concentrées situées dans différents plans (figure 80). Ces masses sont supposées avoir le même effet que le balourd continu sur le comportement dynamique du rotor.

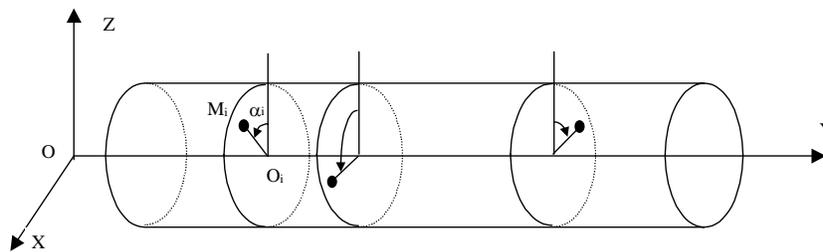


Figure 80 : modélisation de la répartition du balourd sur le rotor

A l'arrêt, la position M_i de chaque masse m_i est définie par :

- son abscisse sur l'axe Y_i ,
- la distance $r_i = O_i M_i$, O_i étant le centre de la section de l'arbre,
- l'angle α_i que fait la position de la masse par rapport au repère tournant de référence.

Ainsi, en s'appuyant sur l'hypothèse de linéarité du système, et en utilisant les notations de [ALAUZE, C. 1998] et [MAHFOUDH, J. 1990], les relations (222) sont obtenues.

$$\begin{aligned} V_i &= CBi + D \\ V_e &= CBe + Vi = C(Be + Bi) + D \end{aligned} \quad (222)$$

Les notations sont les suivantes :

- Bi , vecteur des balourds initiaux inconnus, de dimension NP ,
- Be , vecteur des balourds d'essai connus, de dimension NP ,
- Vi , vecteur des vibrations initiales, de dimension $NM \times NV$,
- Ve , vecteur des vibrations avec le balourd d'essai, de dimension $NM \times NV$,
- C , matrice des coefficients d'influence de dimension $(NM \times NV) \times NP$,
- D , biais (faux-ronde électrique par exemple),
- NP , nombre de plans d'équilibrage,
- NM , nombre de points de mesure de vibrations,
- NV , nombre de vitesses d'équilibrage.

Ici, $NV = 1$.,

Afin de tenir compte de la phase et de l'amplitude des variables, des grandeurs complexes sont utilisées. La forme de la matrice C est donnée par la relation (223).

$$C = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \cdots & C_{1,NP} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & \cdots & C_{2,NP} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ C_{NM,1} & C_{NM,2} & \cdots & C_{NM,NP} \end{bmatrix} \quad (223)$$

Le coefficient $C_{i,j}$ est défini par le rapport de la vibration résultante au point de mesure i et du balourd situé dans le plan d'équilibrage j , à une vitesse de rotation Ω (équilibrage monovitesse).

III.2.4.b Détermination des coefficients d'influence et des balourds de correction

Les coefficients de la colonne j de la matrice C sont déterminés en effectuant le rapport des vibrations Ve résultantes à l'ajout d'un balourd d'essai Be_j dans les plans d'équilibrage j , et du balourd d'essai.

$$C_{i,j} = \frac{Ve_i - Vi}{Be_j} \quad (224)$$

Trois cas se présentent alors :

- $NP = NM \times NV$: la matrice C est inversible ; la solution est donc unique. Equilibrer revient alors à résoudre la relation (225).

$$\begin{aligned} D &= C(Bc + Bi) + D \\ 0 &= CBc + Vi - D \\ Bc &= -C^{-1}(Vi - D) \end{aligned} \quad (225)$$

Avec Bc , le vecteur des balourds de correction recherché.

- $NP > NM \times NV$: ce cas ne se rencontre pas dans la pratique car les plans accessibles pour l'équilibrage sont plus rares que les plans accessibles pour la mesure.
- $NP < NM \times NV$: la matrice C est rectangulaire et n'est donc pas inversible. Il faut utiliser une méthode spécifique permettant de minimiser les vibrations résiduelles.

III.2.4.c Minimisation par les moindres carrés

La méthode des moindres carrés permet de minimiser les vibrations en des points discrets lorsque la matrice C est rectangulaire. Les méthodes présentées dans [GOODMAN, T. P. 1964], [MAHFOUDH, J. et al. 1988] et [MAHFOUDH, J. 1990] minimisent la norme quadratique des vibrations résiduelles.

Le vecteur des vibrations résiduelles ε est donné par la relation (226).

$$\begin{aligned}\varepsilon &= C(Bc + Bi) \\ \varepsilon &= CBc + (Vi - D)\end{aligned}\quad (226)$$

La norme quadratique des vibrations résiduelles s'exprime par la relation (227).

$$y = \sum_{i=1}^{NM \times NV} \varepsilon_i^2 \quad (227)$$

La relation (227) est développée à partir de la relation (226).

$$\begin{aligned}y &= {}^t(\varepsilon^*)\varepsilon \\ y &= {}^t(C^*Bc^* + (Vi - D)^*)(CBc + Vi - D) \\ y &= ({}^t(Bc^*){}^t(C^*) + {}^t((Vi - D)^*)){}^t(CBc + Vi - D) \\ y &= {}^t(Bc^*){}^t(C^*)CBc + {}^t((Vi - D)^*)CBc \\ &+ {}^t(Bc^*){}^t(C^*)(Vi - D) + {}^t((Vi - D)^*)(Vi - D) \\ y &= {}^t(Bc^*){}^t(C^*)CBc + {}^t((Vi - D)^*)CBc \\ &+ {}^t((CBc)^*)(Vi - D) + {}^t((Vi - D)^*)(Vi - D)\end{aligned}\quad (228)$$

où le symbole $*$ est celui du conjugué. La norme étant commutative, ${}^t(A^*)B = {}^t(B^*)A$ et l'expression de y est donnée par la relation (229).

$$y = {}^t(Bc^*){}^t(C^*)CBc + 2{}^t((Vi - D)^*)CBc + {}^t((Vi - D)^*)(Vi - D) \quad (229)$$

La recherche du vecteur Bc qui minimise y est réalisée à partir de la relation (230).

$$\frac{\partial y}{\partial Bc} = 0 \quad (230)$$

Le balourd correcteur obtenu est alors donné par (231).

$$\begin{aligned}0 &= {}^t(C^*)CBc + {}^t(Bc^*){}^t(C^*)C + 2{}^t((Vi - D)^*)C \\ 0 &= {}^t(C^*)CBc + {}^t((CBc)^*)C + 2{}^t((Vi - D)^*)C \\ Bc &= -[{}^t(C^*)C]^{-1}{}^t(C^*)(Vi - D)\end{aligned}\quad (231)$$

L'application des balourds Bc dans les plans d'équilibrage diminue les vibrations dans les plans de mesure.

III.2.4.d Prise en compte du faux-rond électrique

Le comportement du système est mesuré par des capteurs de déplacement dont le signal de sortie n'est pas forcément l'image du déplacement de la structure. En effet les CDCF sont sensibles à l'hétérogénéité du matériau ainsi qu'à la déformation initiale du rotor. Le faux-rond électrique D qui en résulte est alors le déplacement mesuré à une vitesse suffisamment basse pour que le rotor puisse être considéré comme rigide. Il est soustrait vectoriellement aux déplacements à minimiser.

III.2.4.e Conventions angulaires

Lors d'une campagne d'équilibrage, la rigueur de notation et de mesure au niveau des angles est primordiale, voir [PUGNET, J.-M. 1998]. Les éléments de base de la compréhension des phases dans une campagne d'équilibrage sont présentés figure suivante.

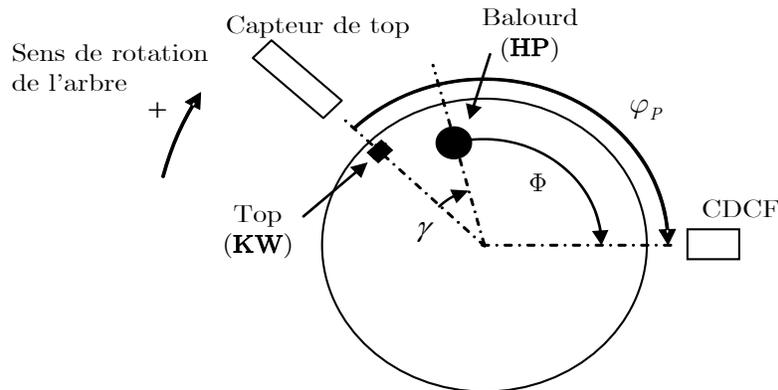


Figure 81 : conventions et notations angulaires

Les angles sont évidemment orientés, la convention est telle que l'angle est positif s'il est dans le sens de rotation de l'arbre. L'angle orienté γ est défini par la relation (232).

$$\gamma = \langle \text{KW}, \text{HP} \rangle \quad (232)$$

Sur des considérations purement géométriques, la position γ du balourd par rapport au top est obtenue.

$$\gamma = \varphi_P - \Phi \quad (233)$$

Du point de vue électrique, la tension aux bornes du capteur de proximité est inversement proportionnelle à la distance qui le sépare de la machine.

Ainsi, lorsque le balourd passe devant le capteur de déplacement, un maximum de tension est observé, Φ est alors le déphasage entre la tension au capteur de top et la tension aux bornes du capteur de proximité (cf figure ci-dessous).

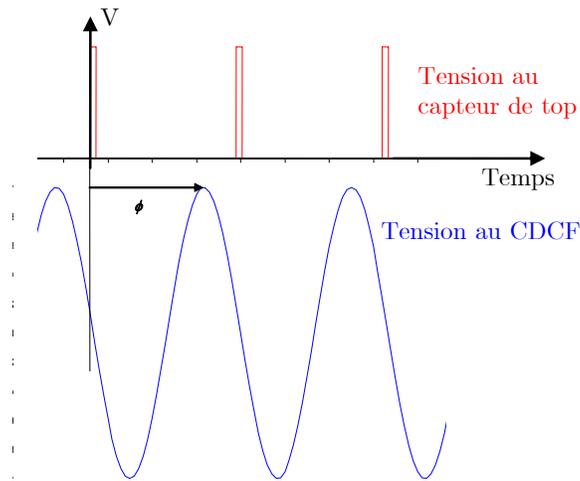


Figure 82 : déphasage entre CDCF et capteur de top

Le développement de programmes existants (voir [ALAUZE, C. 1998]) a permis l'élaboration d'un logiciel convivial et plus complet qui permet de résoudre le problème inverse et de calculer les balourds de correction à poser sur le rotor.

Ce programme requiert la saisie des amplitudes des signaux provenant CDCF mais également leurs phases γ (après relevé sur l'analyseur de signal à une vitesse donnée) et bien entendu, la sensibilité des capteurs utilisés (voir aussi [ADAMS, M. L. J. 2001]). Le programme fournira alors, après calcul, les balourds de correction et sa phase γ dans chaque plan d'équilibrage.

III.2.4.f Résultats

Compte tenu de la géométrie de notre rotor, deux plans d'équilibrage ont pu être choisis. Les deux faces du disque d'épaisseur 40 mm sont donc considérées comme plans d'équilibrage ($NP = 2$). Les quatre CDCF sont les points de mesure ($NM = 4$).

Avant équilibrage, il est impossible d'atteindre la première vitesse critique et donc a fortiori de la passer. Pour un équilibrage efficace, il faut mesurer les niveaux de vibration lorsque le rotor a un comportement stable, i.e. à des orbites stables. Par ailleurs, il faut aussi que le niveau de vibration soit important pour que la solution du problème inverse soit de bonne qualité. La vitesse d'équilibrage est donc choisie égale à 3114 tr/min, c'est à dire légèrement inférieure à la première vitesse critique. Après vérification, les orbites sont stables à cette vitesse.

Acquisition avec l'analyseur HP35670A

L'acquisition de l'état vibratoire du rotor avant équilibrage a été réalisée à l'aide d'un analyseur dynamique HP33670A (voir paragraphe II.1.1) en mode ORDER ANALYSIS. En face avant se trouvent les voies d'acquisitions pour chacun des quatre CDCF. En face arrière se trouve la voie d'acquisition du tachymètre.

Pour effectuer un équilibrage de qualité satisfaisante, il convient d'effectuer des mesures très précises en phase et d'activer l'option suivi d'ordre de l'analyseur. Ainsi, l'axe des abscisses est gradué en tours par minute, l'ordre 1 est suivi et un moyennage sur vingt acquisitions est effectué en mode déclenchement automatique.

Etat du rotor avant équilibrage

La mesure du faux-rond (ou déformée) électrique est effectuée à 300 tr/min, les résultats sont donnés dans le tableau 7.

	<i>C1</i>	<i>C2</i>	<i>C3</i>	<i>C4</i>
Amplitude (<i>mV</i>)	105	108	85	85
Φ (°)	142	45	175	92
γ (°)	-52.0	135.0	-40.0	133.0

Tableau 7 : déformée électrique

La mesure de la déformée initiale à la vitesse d'essai : 3114 tr/min est ensuite effectuée, les résultats sont donnés dans le tableau 8.

	<i>C1</i>	<i>C2</i>	<i>C3</i>	<i>C4</i>
Amplitude (<i>mV</i>)	1939.0	1238.0	273.0	264
Φ ($^{\circ}$)	127.0	27.0	107.0	353
γ ($^{\circ}$)	-37.0	153.0	28.0	-128.0

Tableau 8 : déformée initiale

Un balourd d'essai de 98.67 g.mm est introduit à 0° dans le plan 1 (face du disque opposée au moteur). Les résultats sont donnés dans le tableau 9.

	<i>C1</i>	<i>C2</i>	<i>C3</i>	<i>C4</i>
Amplitude (<i>mV</i>)	1215	3645	625	437
Φ ($^{\circ}$)	176	126	143	107
γ ($^{\circ}$)	-86.0	54.0	-8.0	118.0

Tableau 9 : balourd d'essai dans le plan 1

Un balourd d'essai de 98.67 g.mm est introduit à 100° dans le plan 2 (face du disque côté moteur). Les résultats sont donnés dans le tableau 10.

	<i>C1</i>	<i>C2</i>	<i>C3</i>	<i>C4</i>
Amplitude (<i>mV</i>)	407	1390	198	290
Φ ($^{\circ}$)	300	139	160	126
γ ($^{\circ}$)	-210.0	41.0	-25.0	99.0

Tableau 10 : balourd d'essai dans le plan 2

Calcul du balourd de correction

Le calcul du balourd de correction s'établit à partir de l'état vibratoire initial du rotor en amplitude et en phase. Il convient donc d'introduire la position et la sensibilité des CDCF (voir tableau 11).

	<i>C1</i>	<i>C2</i>	<i>C3</i>	<i>C4</i>
φ_P ($^{\circ}$)	90	180	135	225
Sensibilité (<i>V/mm</i>)	-8.510	-8.428	-4.002	-4.012

Tableau 11 : positions angulaires et sensibilités des CDCF

Les résultats du programme d'équilibrage développé sous MATLAB donnent les balourds correcteurs minimisant les vibrations, présentés figure 83 et tableau 12.

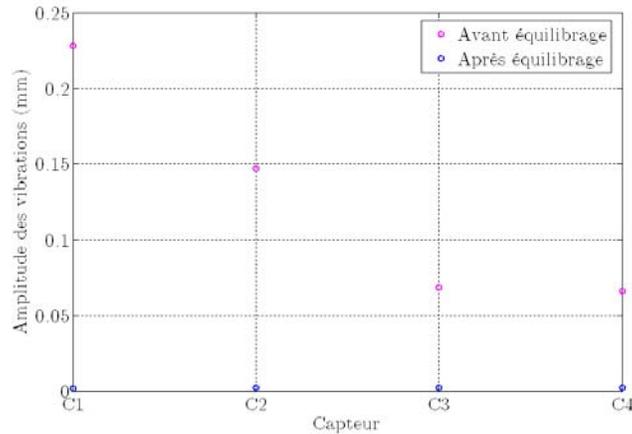


Figure 83 : efficacité théorique du balourd correcteur à 3114 tr/min

	Plan 1	Plan 2
Balourd (<i>g.mm</i>)	0.674	1.683
Phase (°)	-161.3	112.1

Tableau 12 : balourds correcteurs

Une fois ces balourds correcteurs collés sur le rotor, ce dernier est supposé être équilibré, aux balourds résiduels près. Un balourd test, noté B_{T1} , de 52.8 g.mm à 0 ° dans le plan 1 est alors apposé sur le rotor. Le balourd du rotor est donc maintenant supposé connu, il est constitué :

- du balourd test dans le plan 1
- du balourd résiduel dans le plan 1, noté B_{R1} (11.9 g.mm à 5 °)
- du balourd résiduel dans le plan 2, noté B_{R2} (18.5 g.mm à -80 °)

III.2.5 Dynamique à l'arrêt – analyse modale

III.2.5.a Rotor libre-libre

Plusieurs analyses à l'arrêt ont été menées afin de déterminer les principales caractéristiques du rotor : $\rho = 7836 \text{ kg/m}^3$ et $E = 2 \times 10^{11} \text{ Pa}$.

III.2.5.b Rotor monté sur ses paliers

Réponse forcée

Deux analyses ont été menées : l'une dans le plan vertical, l'autre dans le plan horizontal, afin de déterminer le comportement dynamique du rotor à l'arrêt et sur ses paliers, dans les deux directions.

Pour la première, la force est appliquée verticalement et le CDCF C2 est utilisé (voir figure 84).

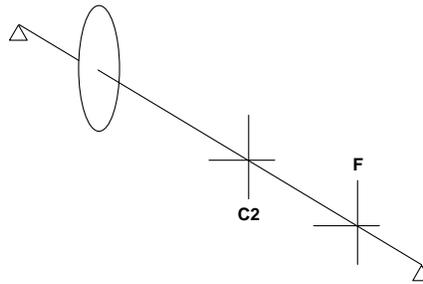


Figure 84 : protocole de l'analyse dans le plan vertical

Les résultats d'un balayage sur la gamme de fréquences 0-800 Hz permettent d'identifier clairement les pics correspondant aux fréquences naturelles du rotor (voir figure 85).

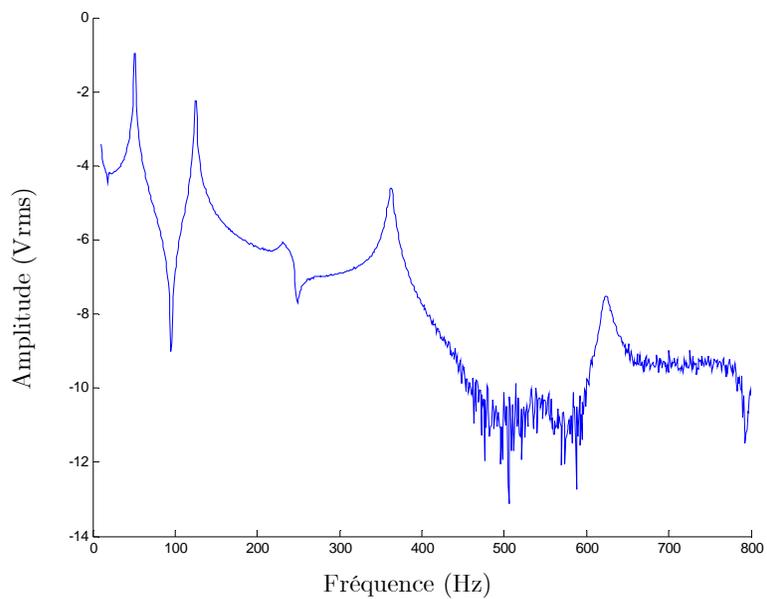


Figure 85 : résultats de l'analyse dans le plan vertical 0 – 800 Hz

Pour la deuxième analyse, le pot d'excitation est disposé horizontalement et le CDCF *C1* est utilisé (voir figure 86).

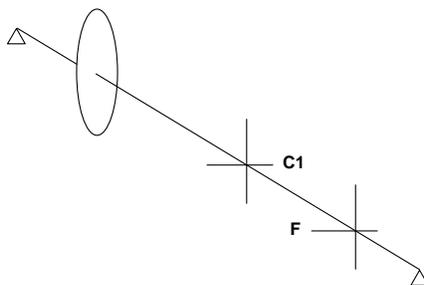


Figure 86 : protocole de l'analyse dans le plan horizontal

Les résultats d'un balayage sur la gamme de fréquences 0-800 Hz permettent d'identifier clairement les pics correspondant aux fréquences naturelles du rotor (voir figure 87).

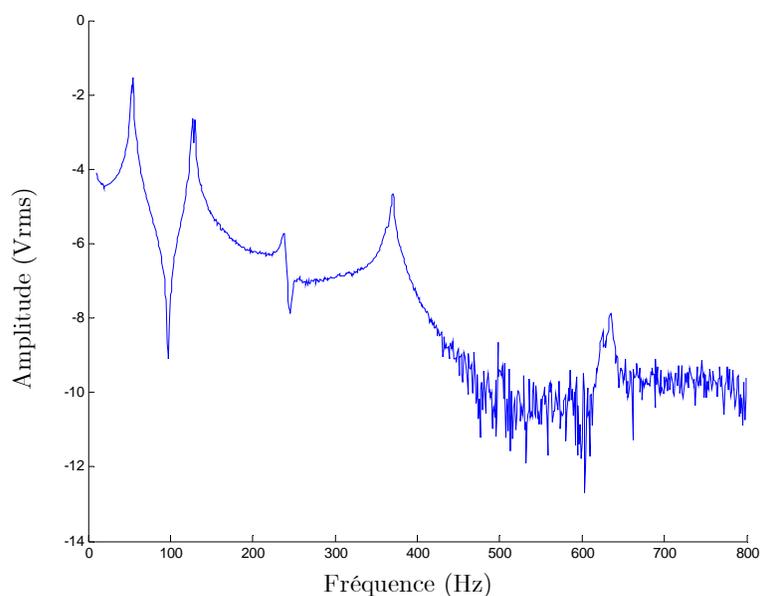


Figure 87 : résultats de l'analyse dans le plan horizontal 0 – 800 Hz

Ainsi les fréquences naturelles du rotor sont déterminées (voir tableau 13).

fréquence	vertical	horizontal	moyenne
$F1$	50.67	54.3	52.5
$F2$	124.5	128.5	126.5
$F3$	238.8	242.2	240.5
$F4$	360.5	368.4	364.5
$F5$	623.3	632.4	627.9

Tableau 13 : fréquences de flexion à l'arrêt, en Hz

Réponse impulsionnelle

L'acquisition du signal issu du CDCF $C2$, effectué à l'aide de LMS FMON, alors que le rotor est soit à l'arrêt, soit en rotation, permet l'analyse de la réponse à un choc appliqué verticalement. L'analyse du contenu fréquentiel du signal obtenu après un choc sur le rotor permet de déterminer les deux premières fréquences naturelles du rotor (voir tableau 14).

$F1$	50.7 Hz
$F2$	123.0 Hz

Tableau 14 : fréquences naturelles de flexion (mesure d'après réponse impulsionnelle)

Les coefficients d'amortissement sont obtenus par régression linéaire après filtrage du signal autour de la fréquence considérée (voir tableau 15). Une mesure est effectuée après mise en route du moteur (0001 tr/min) afin de prendre en compte un éventuel amortissement supplémentaire introduit par l'asservissement de ce dernier. En écartant les résultats de mauvaise qualité et en s'assurant d'un coefficient de dispersion faible (inférieur à 5%), les valeurs finales suivantes sont obtenues.

	0000 tr/min	0001 tr/min	1500 tr/min	3000 tr/min
α_1	0.80×10^{-2}	0.60×10^{-2}	1.78×10^{-2}	1.01×10^{-2}
α_2	0.43×10^{-2}	0.28×10^{-2}	1.20×10^{-2}	1.07×10^{-2}

Tableau 15 : coefficients d'amortissement

Les valeurs prises en compte dans le modèle seront celles de 3000 tr/min puisque l'intérêt se porte sur le franchissement de la vitesse critique.

III.2.6 Réponse transitoire au balourd

Le balourd étant maintenant quasi parfaitement déterminé (voir paragraphe III.2.4), une série de montées et descentes en vitesse de 0 à 6000 tours/min est effectuée afin d'appréhender le comportement du rotor en transitoire et d'établir un ensemble de mesures pour la validation du modèle.

III.2.6.a Acquisition

L'acquisition des mesures est effectuée avec le frontal d'acquisition SCADAS III, présenté figure 88.



Figure 88 : face avant du frontal d'acquisition SCADAS III

Ce frontal est équipé des éléments suivants.

- une carte d'acquisition tachymétrique « 2 voies » (Programmable Dual Tacho).

Celle-ci permet de réaliser aussi bien du suivi d'ordre que des analyses spectrales par octave en fonction de la vitesse de rotation.

La fréquence maximale pour le tachymètre est de 15 kHz, la carte supporte jusqu'à 1024 impulsions par tour. Le calibrage automatique des entrées et le conditionnement programmable des signaux permettent de traiter des signaux analogiques de catégories industrielles (bruit, amplitude variable) pour obtenir une lisibilité stable des résultats.

Cette carte permet par ailleurs d'effectuer une compensation du biais électrique, de prendre en compte les impulsions en double ou manquantes et de lisser le signal représentant la vitesse de rotation.

Dans notre étude, une seule voie d'acquisition tachymétrique est utilisée.

- 1 carte programmable d'amplification (Programmable Quad Amplifier)

C'est un module de conditionnement « 4 voies » Volts/ICP®. Chaque voie possède un calibrage propre, avec couplage AC/DC/ICP® et filtrage analogique possibles. La connection des quatre voies s'effectue par des fiches BNC.

Dans notre étude, les quatre voies seront utilisées.

III.2.6.b Traitement des données

Le traitement des données et quelques manipulations simples du post-traitement (extraction d'ordre...) sont réalisés avec le logiciel LMS CADA-X, en particulier le module Signature Monitor (SMON), qui permet de réaliser du suivi d'ordre.

III.2.6.c Résultats Waterfall

Une première montée en vitesse a été réalisée. Le rotor monte de 0 tr/min à 6000 tr/min en 3 minutes. L'objectif est ici de déterminer le comportement de la machine (et de sa chaîne de mesure) lors d'un transitoire en vitesse relativement lent.

Les résultats obtenus pour le CDCF C1 sont présentés sous la forme de waterfall (voir figure 89 et 90).

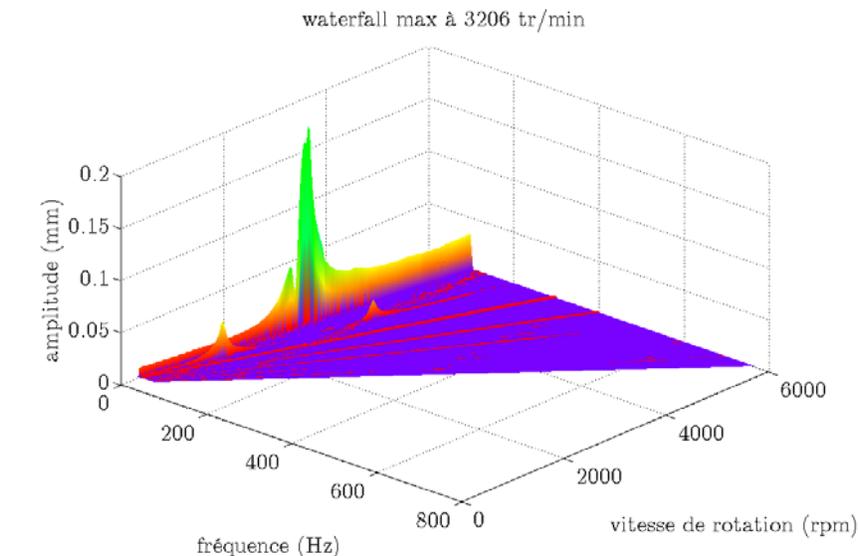


Figure 89 : C1 vue 3D isométrique, représentation en fréquence

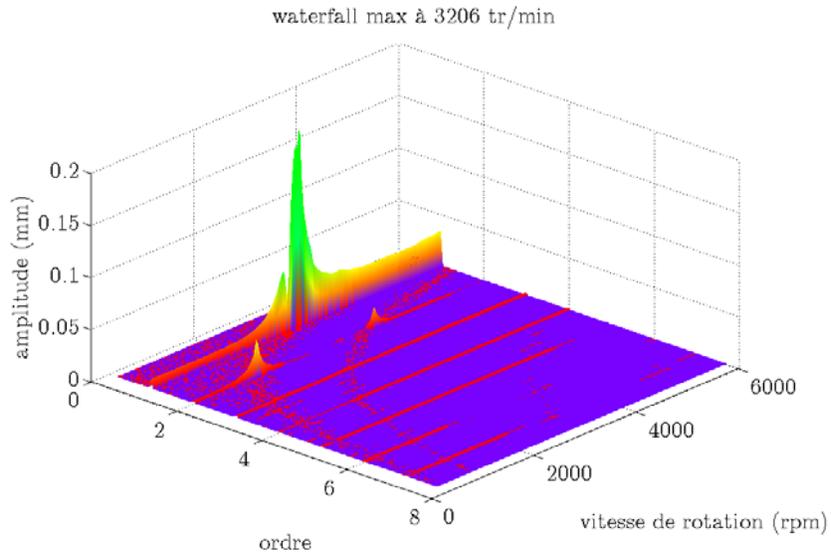


Figure 90 : $C1$ vue 3D isométrique, représentation en ordre

Le pic de résonance au passage de la première vitesse critique (3160 tr/min) est clairement identifiable, avec ses deux précessions, le rotor vibre alors sur son premier mode.

Par ailleurs, l'ordre 2 de la vitesse agit lui aussi de façon significative, faisant vibrer le rotor un peu plus sur son premier mode à 1580 tr/min et aussi légèrement sur son deuxième mode à 3920 tr/min.

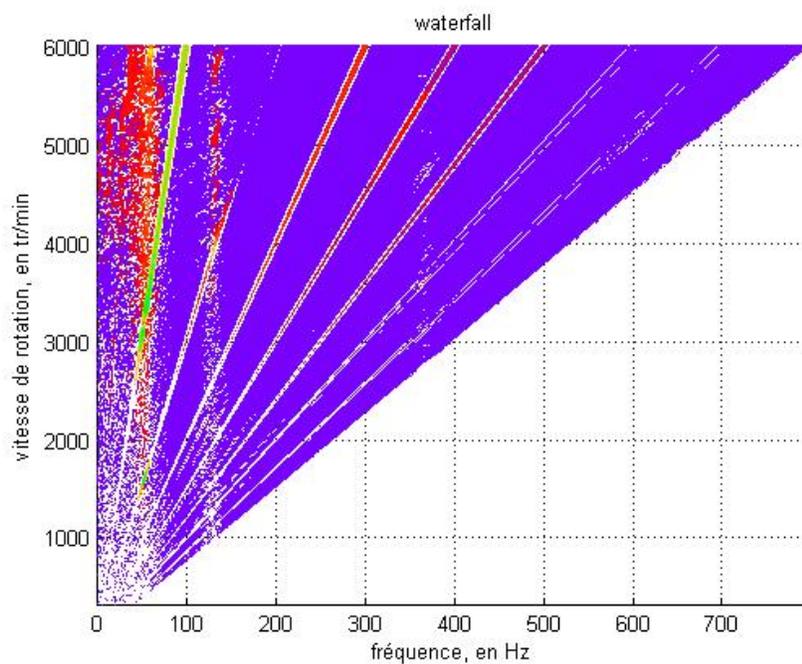
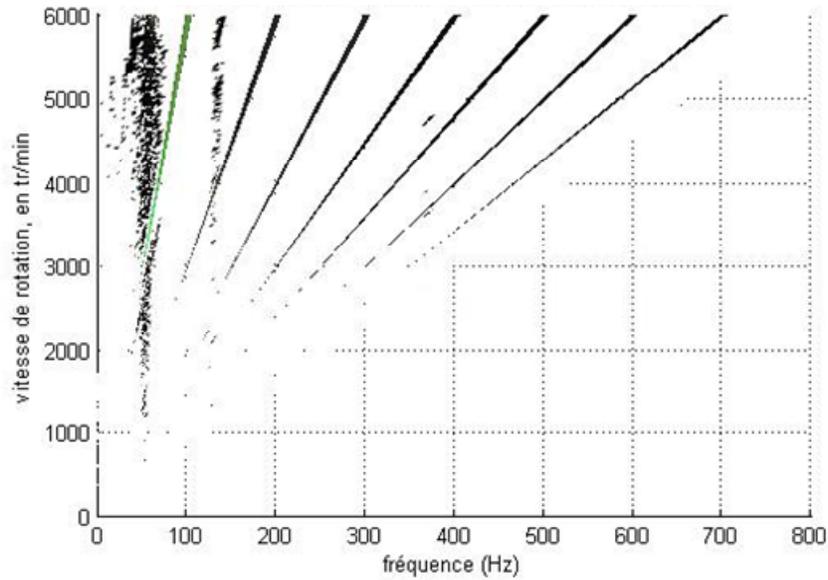


Figure 91 : C1 vue 3D de dessus

La sommation des signaux issus des quatre CDCF, associée au choix d'une palette de couleurs judicieuse, permet de retrouver quatre premières fréquences naturelles du rotor (voir figure 92 et tableau 16), comme vu au paragraphe III.2.5.b. La figure 92 est aussi directement assimilable au diagramme de Campbell expérimental du rotor.

Figure 92 : $C1 + C2 + C3 + C4$ dessus

Fréquences (Hz)	
$F1$	52.6
$F2$	130.8
$F3$	370.5
$F4$	659.8

Tableau 16 : fréquences naturelles

III.2.6.d Résultats rampes ordre 1

La vitesse de rotation qui sera introduite dans le modèle sera pure, i.e. sans harmonique. Il convient donc d'extraire des mesures la réponse qui correspond à l'ordre 1 de la vitesse de rotation.

Dans le cas d'une montée i en vitesse, la loi de vitesse Ω_i en fonction du temps t est donnée par l'équation (234), dans le cas d'une descente en vitesse par l'équation (235).

$$\Omega_{i,m}(t) = \Omega_{\max} \frac{t}{D_i} \quad (234)$$

$$\Omega_{i,d}(t) = \Omega_{\max} \left(1 - \frac{t}{D_i} \right) \quad (235)$$

$\Omega_{\max} = 6000 \text{ tr/min}$, D_i est la durée de la rampe i .

Il a été vérifié expérimentalement que la vitesse réelle mesurée respectait le profil de la consigne, conformément à l'équation (235). Plusieurs durées ont été expérimentées, à chaque fois en montée et en descente (voir tableau 17). L'intensité I_i est définie par (236).

$$I_i = \frac{\Omega_{\max}}{60D_i} \quad (236)$$

Rampe	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
D_i (s)	180	60	30	10	5	1
I (Hz/s)	0.556	1.667	3.333	10	20	100

Tableau 17 : paramètres des rampes

L'objectif est ici de déterminer l'influence de la rampe en vitesse sur la réponse.

Les acquisitions sont effectuées de 200 tr/min à 6000 tr/min tous les 25 tr/min (soit 233 points). Chaque spectre acquis contient 1024 points, de 0 au 32ème ordre.

Dans les figures 93 à 98 sont présentées les amplitudes maximales de vibration correspondant à l'ordre 1. Elles sont définies par la longueur du demi grand-axe de l'ellipse décrite par la fibre neutre du rotor lors de la vibration dans le plan de mesure considéré. Les ellipses ont été reconstruites à partir des signaux des capteurs du plan considéré et ensuite post traitées avec MATLAB. La montée et la descente sont comparées pour l'ordre 1.

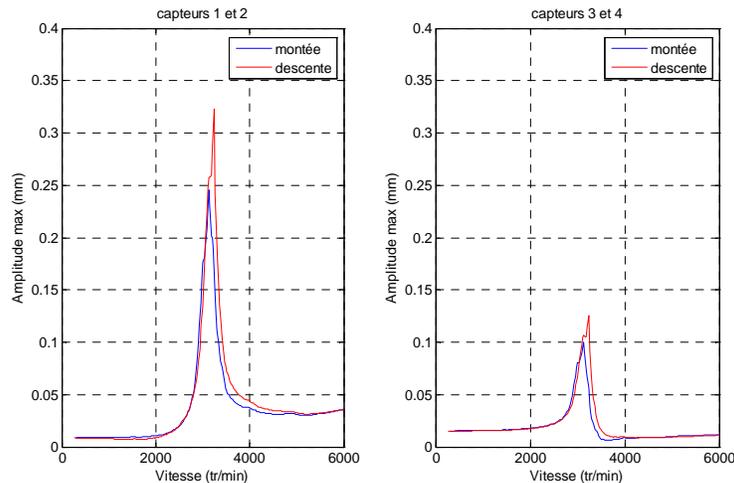


Figure 93 : rampe $i = 0$ - résultats 180 s, ordre 1

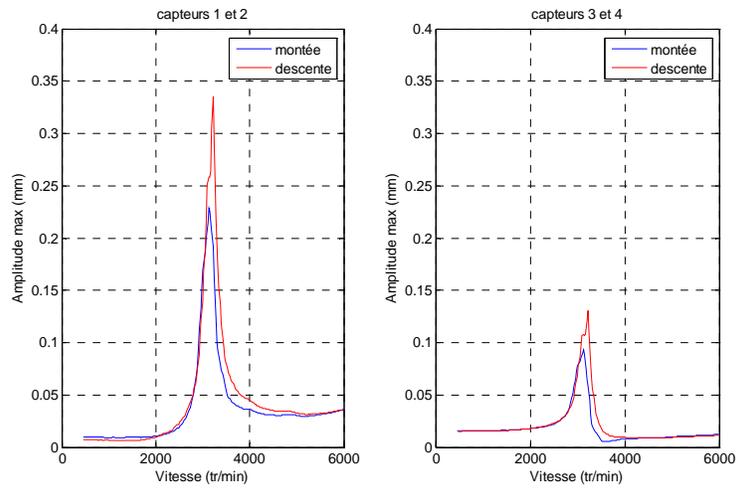


Figure 94 : rampe $i = 1$ - résultats 060 s, ordre 1

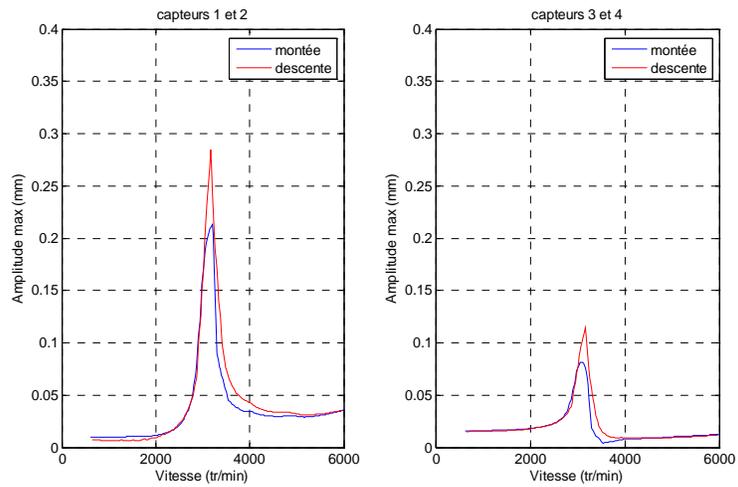


Figure 95 : rampe $i = 2$ - résultats 060 s, ordre 1

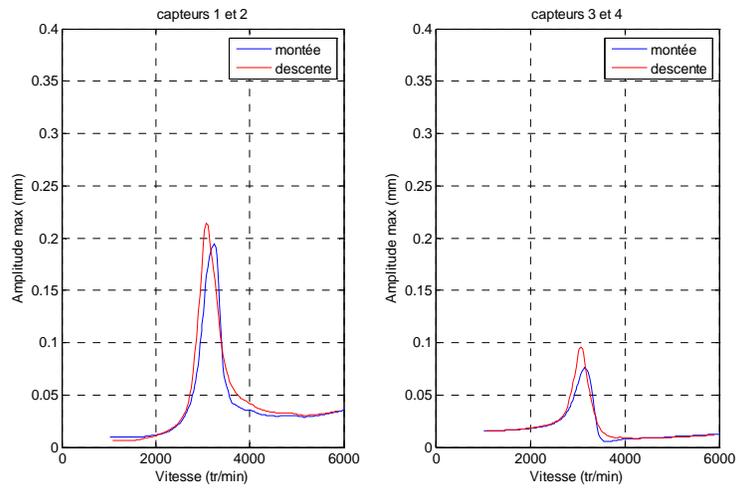


Figure 96 : rampe $i = 3$ - résultats 010 s, ordre 1

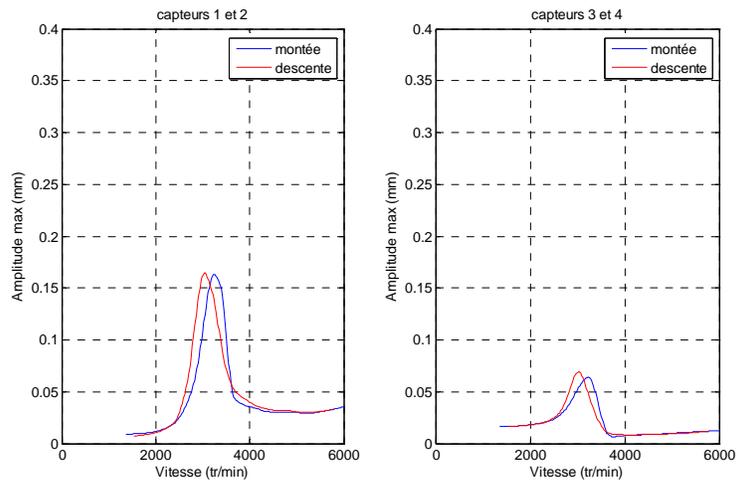


Figure 97 : rampe $i = 4$ - résultats 005 s, ordre 1

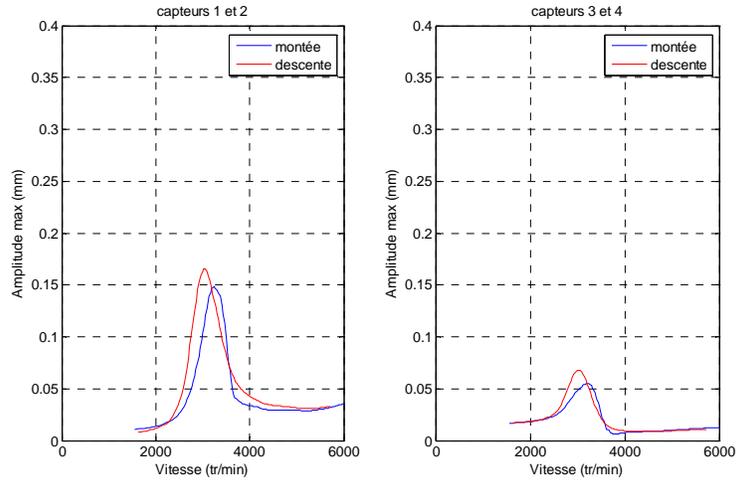


Figure 98 : rampe $i = 5$ - résultats 001 s, ordre 1

La figure 99 permet de voir l'influence de l'intensité de la montée sur la réponse. La figure 100 permet de voir l'influence de l'intensité de la descente.

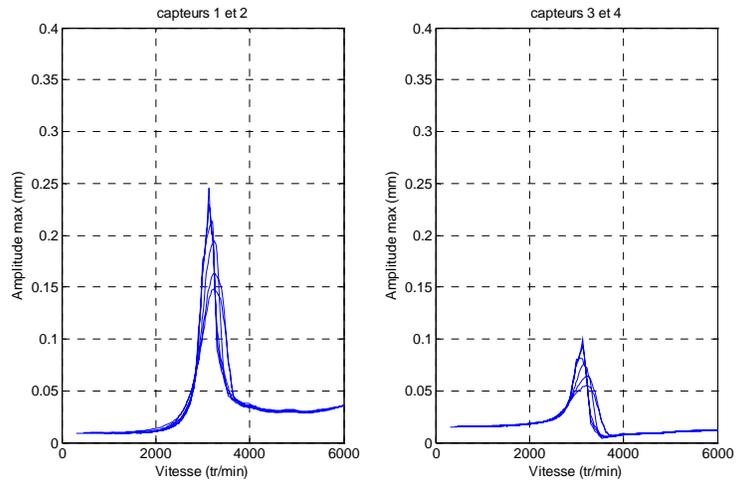


Figure 99 : résultats montée, ordre 1

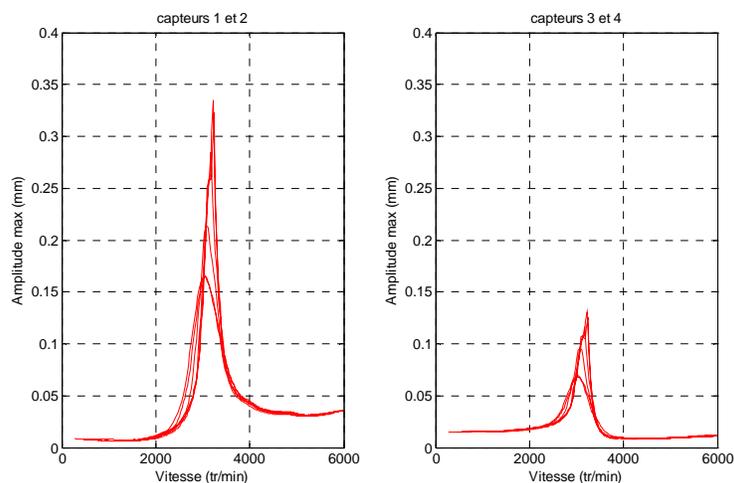


Figure 100 : résultats descente, ordre 1

Qu'il s'agisse de la montée ou de la descente, plus l'accélération est importante, plus l'amplitude à la résonance est faible et plus le maximum est décalé dans le temps. Il y a décalage de la vitesse critique

La figure 101 permet de comparer les réponses en montée aux réponses en descente.

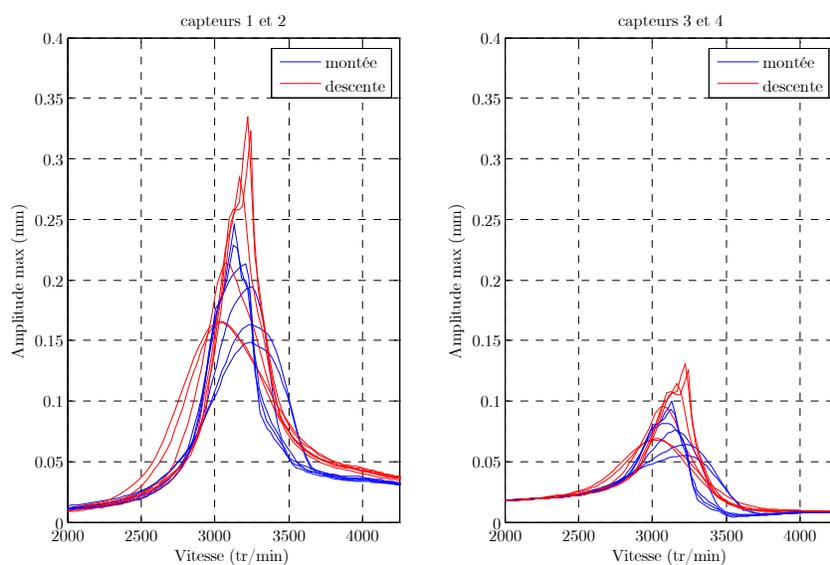


Figure 101 : résultats montée et descente en linéaire

La comparaison des courbes en montée avec celles en descente met en évidence le fait que la vitesse critique dépend à la fois de l'intensité de la rampe mais aussi de son signe. Pour une intensité de rampe donnée, le niveau de vibration à la descente est plus important que celui à la montée ; la vitesse critique à la descente est supérieure à la vitesse critique à la montée.

III.2.6.e Amplitude à la résonance et vitesse critique

Les amplitudes maximales de la vibration sont présentées dans le tableau 18.

	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
Montée	0.25	0.23	0.21	0.19	0.16	0.15
Descente	0.33	0.32	0.28	0.21	0.17	0.16

Tableau 18 : amplitudes maximales (mm)

Soit X_r l'amplitude à la résonance et Ω_r la vitesse de rotation (en tr/min) de l'arbre lorsque la résonance apparaît.

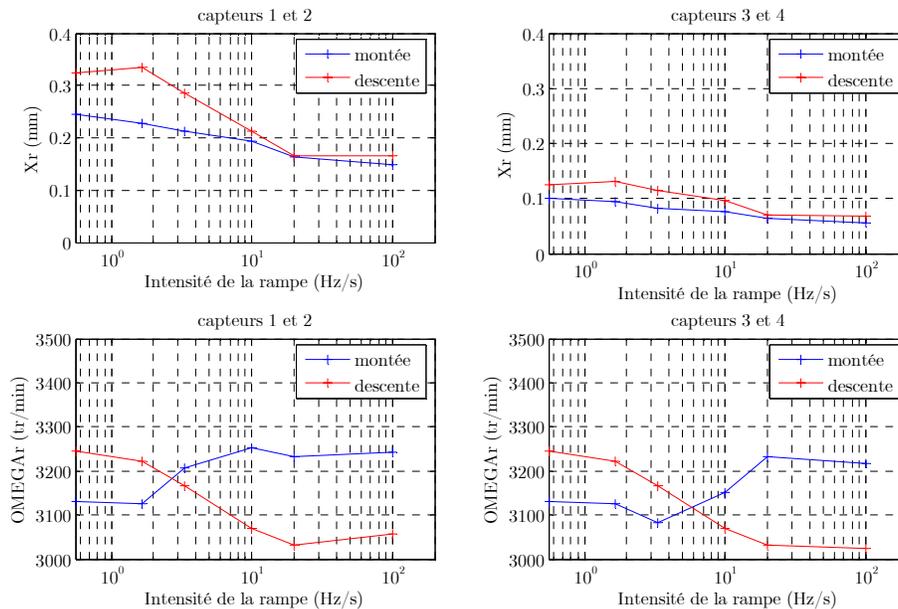


Figure 102 : X_r et Ω_r en fonction de la rampe

Dès lors, il apparaît que :

- plus l'intensité de la rampe augmente, plus X_r diminue.

- en montée, si la rampe augmente, Ω_r augmente.
- en descente, si la rampe augmente, Ω_r diminue.

Soit X_r^0 correspondant à la rampe $i = 0$, et X_r^i correspondant à une rampe $i \in \llbracket 0,5 \rrbracket$. Alors, en introduisant les facteurs d'amortissement correspondants :

$$\frac{\alpha_i}{\alpha_0} = \frac{X_r^0}{X_r^i} \quad (237)$$

Pour aller un peu plus loin dans l'adimensionnement, le rapport $\frac{I_i}{I_0}$ est considéré et les résultats sont présentés figure 103.

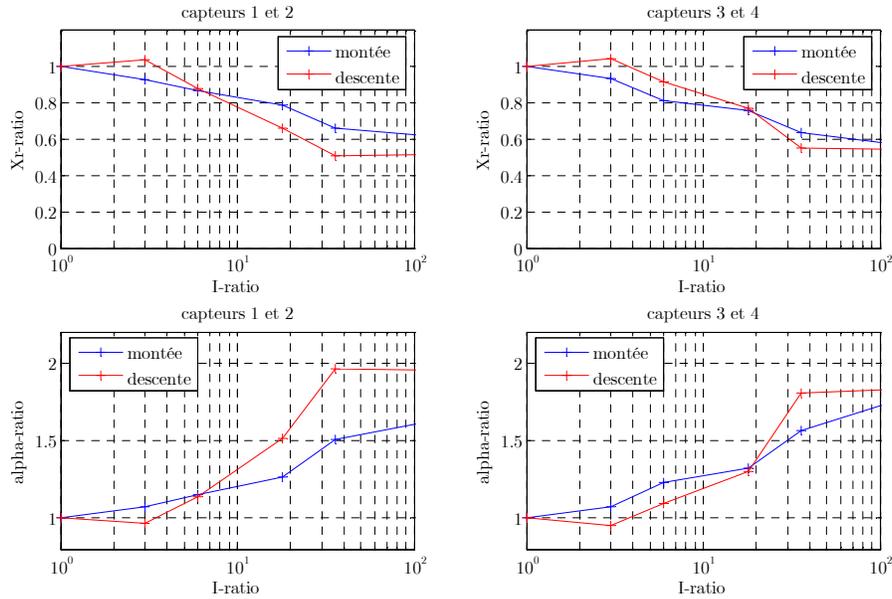


Figure 103 : $\frac{X_r^i}{X_r^0}$ et $\frac{\alpha_i}{\alpha_0}$ en fonction de $\frac{I_i}{I_0}$

Si l'intensité de la rampe est 100 fois plus importante, le maximum d'amplitude est deux fois moins important et l'amortissement deux fois plus.

III.2.6.f Résultats rampes ordre 2

Comme vu au paragraphe III.2.6.c, l'ordre 2 de la vitesse de rotation influe sur la réponse du rotor lors du transitoire de vitesse. Les figures 104 et 105 montrent l'évolution de l'amplitude due à l'ordre 2 en montée et en descente.

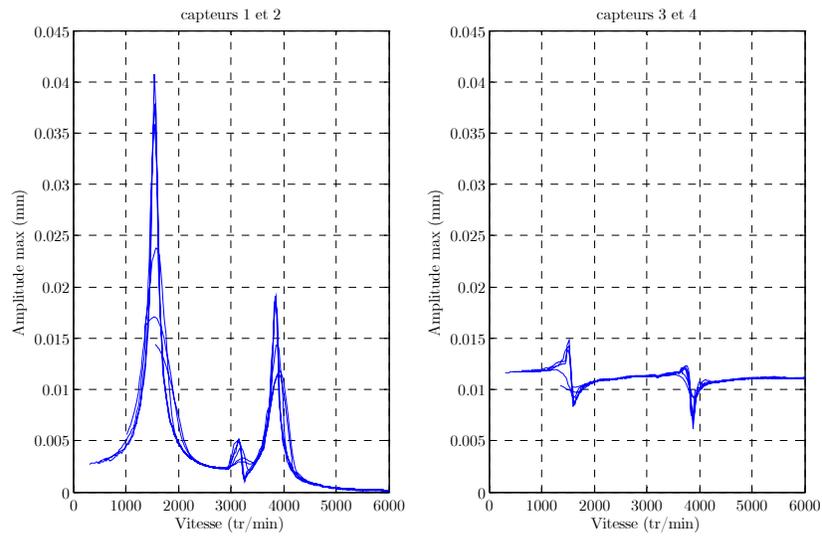


Figure 104 : résultats montée

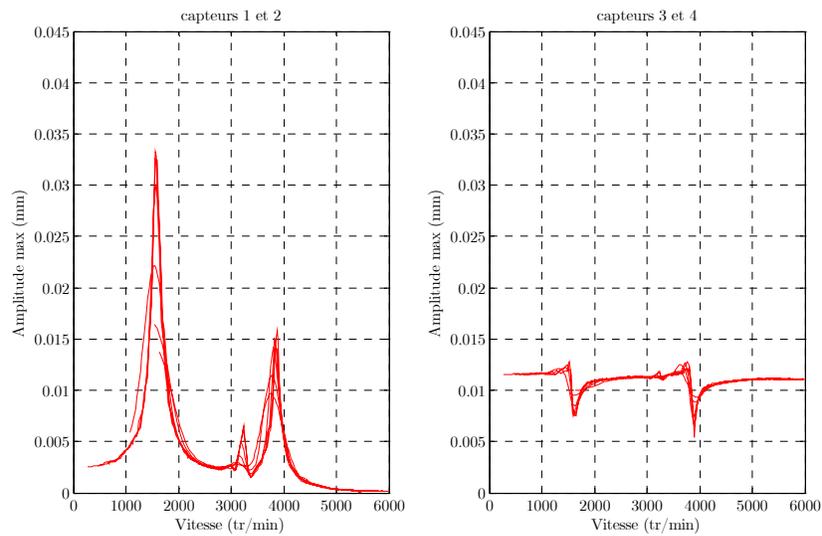


Figure 105 : résultats descente

Si les amplitudes mises en jeu dans ce cas sont moins importantes que dans le cas de l'ordre 1 ; les phénomènes observés sont de même nature : plus l'intensité est importante, plus le maximum d'amplitude diminue plus le pic de résonance est décalé.

III.2.6.g Orbites 3D

La reconstruction des orbites expérimentales a été effectuée à partir des signaux des CDCF $C1$ à $C4$. L'ordre 1 est présenté figure 107, l'ordre 2 figure 109.

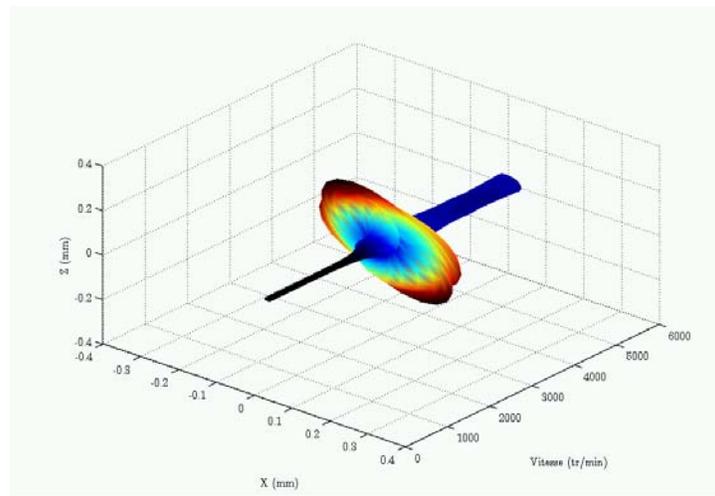


Figure 106 : évolution de l'orbite dans le plan du milieu de l'arbre au cours du transitoire de 0 à 6000 tr/min, ordre 1

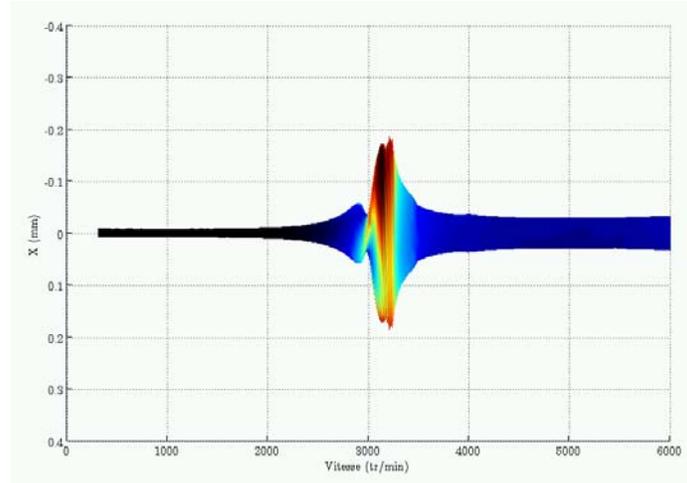


Figure 107 : évolution de l'orbite dans le plan du milieu de l'arbre au cours du transitoire de 0 à 6000 tr/min, ordre 1 – vue de face

Comme vu au paragraphe III.2.6.c, les harmoniques de la vitesse de rotation jouent un rôle important dans l'interprétation de la réponse vibratoire du rotor lors du transitoire de vitesse, en particulier l'ordre 2 de la vitesse qui engendre successivement la vibration du rotor sur son premier mode, puis sur son deuxième mode de flexion. Ces deux phénomènes sont clairement identifiables sur les figures 108 et 109.

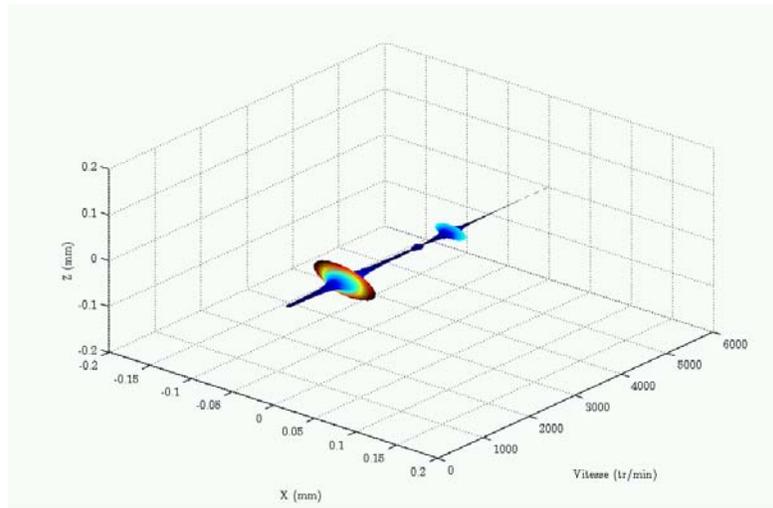


Figure 108 : évolution de l'orbite dans le plan du milieu de l'arbre au cours du transitoire de 0 à 6000 tr/min, ordre 2

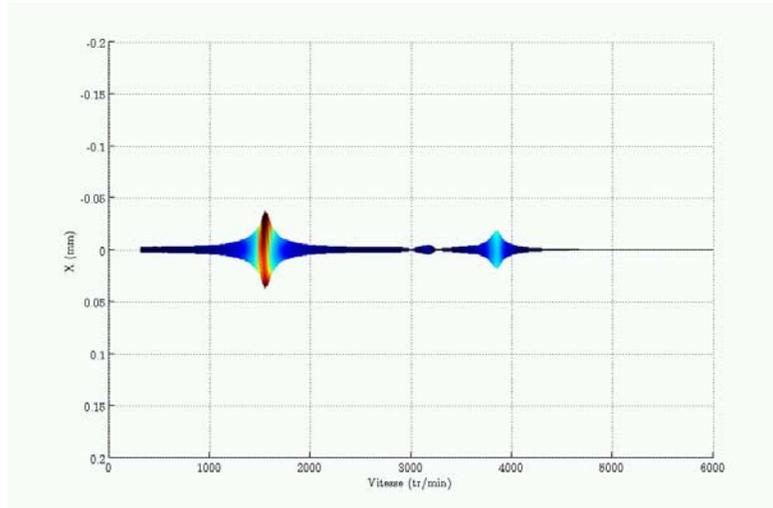


Figure 109 : évolution de l'orbite dans le plan du milieu de l'arbre au cours du transitoire de 0 à 6000 tr/min, ordre 2 – vue de face

L'observation en trois dimensions permet une bonne appréhension des phénomènes mis en jeu lors du transitoire, notamment le passage entre les deux précessions.

III.2.6.h Conclusions sur les réponses transitoires expérimentales

Un bon nombre d'outils a été développé pour effectuer des mesures précises et un traitement efficace des données. Ainsi la visualisation et la quantification des phénomènes mis en jeu a été possible. De nombreuses mesures ont été effectuées afin de pouvoir valider le modèle.

III.3 Modèle classique

L'étude qui suit s'appuie largement sur les travaux de [LALANNE, M. et FERRARIS, G. 1998]. Pour l'étude du régime permanent, le logiciel ROTORINSA a été utilisé. Pour la partie transitoire, les outils ont été développés sous MATLAB-SIMULINK.

III.3.1 Conception et recalage

III.3.1.a Présentation du logiciel

ROTORINSA® est un logiciel d'éléments finis destiné à prévoir le comportement dynamique de rotors en flexion. Il fonctionne sous Windows et comprend trois grands modules : préprocesseur, calcul et postprocesseur.

III.3.1.b Modélisation du rotor étudié

Le préprocesseur permet de créer la géométrie du rotor et de générer son modèle éléments finis.

La modélisation du rotor est effectuée à partir des dessins techniques présentés en annexe D et à partir de la géométrie présentée figure 110.

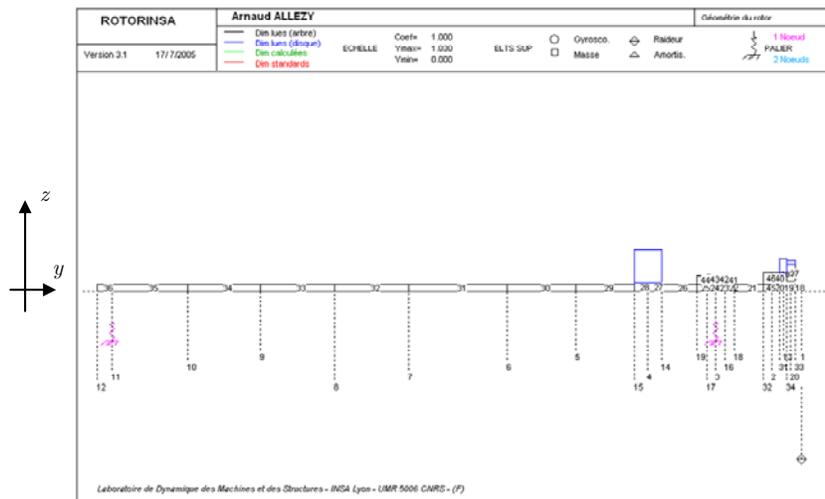


Figure 110 : géométrie du modèle

La géométrie permet ensuite de générer le modèle éléments finis du rotor (voir figure 111). Sont utilisés des éléments finis de poutre à deux nœuds, des éléments finis de disque à un nœud, des éléments de paliers à deux nœuds, chaque nœud ayant quatre degrés de liberté de flexion dans les deux plans.

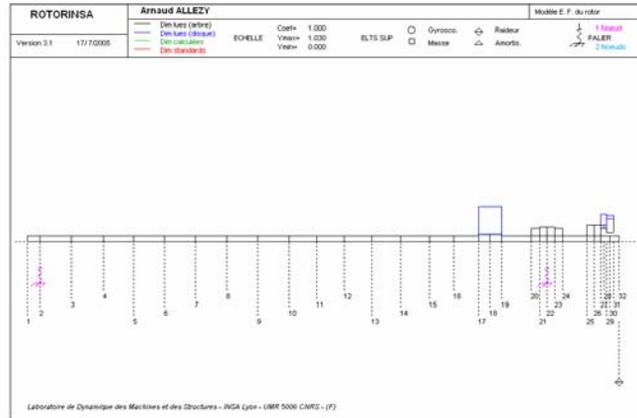


Figure 111 : modèle éléments finis

III.3.1.c Paliers

L'utilisation conjointe des formules de Palmgren et celle de Krämer permet de déterminer les caractéristiques d'un palier.

Formules de Palmgren – raideurs radiale et axiale

Les résultats présentés dans le tableau 19 sont issus de [PALMGREN, A. 1967].

	charge radiale : $\delta_a = 0$
Charge sur éléments roulants	$Q = \frac{5F_r}{iZ \cos \alpha}$
Type de roulement	
Rigides à billes	$\delta_r = 0.0020 Q^{\frac{2}{3}} D_w^{-\frac{1}{3}}$
Rouleaux à contacts linéaire sur les deux pistes	$\delta_r = \frac{0.0006}{\cos \alpha} l_a^{-0.8} Q^{0.9}$

Tableau 19 : formules de Palmgren

Avec :

- δ_r , déplacement radial (mm)

- δ_a , déplacement axial (mm)
- F_r , charge radiale (daN)
- F_a , charge axiale (daN)
- D_w , diamètre des éléments roulants (mm)
- l_a , longueur effective des rouleaux (mm)
- Z , nombre d'éléments roulants
- i , nombre de rangées d'éléments roulants
- α , angle de contact
- Q , charge maximale sur les éléments roulants (daN)

Les forces sont converties en Newtons, les distances en mètres et les formules développées deviennent :

- Rigides à billes

$$\delta_r = \left[10^{-4} \frac{0.0020}{(\cos \alpha)^{\frac{2}{3}}} \left(\frac{5}{10} \right)^{\frac{2}{3}} \right] F_r^{\frac{2}{3}} D_w^{\frac{1}{3}} (iZ)^{-\frac{2}{3}} \quad (238)$$

- Rouleaux à contacts linéaire sur les deux pistes

$$\delta_r = \left[10^{-4} \frac{0.0006}{(\cos \alpha)^{1.9}} \left(\frac{5}{10} \right)^{0.9} \right] l_a^{-0.8} F^{0.9} (iZ)^{-0.9} \quad (239)$$

Formules de Krämer – raideurs radiale et latérale

Les formules suivantes sont issues de [KRÄMER, E. 1993]. Dans ces les roulements à billes sont rigides et les roulements à rouleaux sont à contact linéaire sur les deux pistes.

La raideur radiale k_r des roulements est donnée par (240).

$$k_r = \frac{nF}{x_r} \quad (240)$$

Les valeurs de n et x_r sont données dans le tableau 20.

Roulements	n	x_r
à billes	$\frac{3}{2}$	$1.2 \times 10^{-7} \times d^{-\frac{1}{3}} \times Z^{-\frac{2}{3}} \times F^{\frac{2}{3}}$
à rouleaux	$\frac{1}{0.9}$	$1.11 \times 10^{-9} \times l^{-0.8} \times Z^{-0.9} \times F^{0.9}$

Tableau 20 : variables Krämer

Avec :

- x_r , déplacement (m),
- d , diamètre billes (m),
- l , longueur rouleaux (m),
- Z , nombre d'éléments roulants,
- F , charge (N).

Le ratio r de la raideur latérale sur la raideur radiale est donné par la relation (241) pour un roulement à billes et par (242) pour un roulement à rouleaux.

$$r = -0.0028Z^2 + 0.0987Z - 0.12 \quad (241)$$

$$r = -0.0028Z^2 + 0.1012Z - 0.17 \quad (242)$$

Conclusion

Les formules de raideur radiale de Krämer et celles de Palmgren se complètent et sont, pour certaines d'entre elles, équivalentes.

Ainsi, il suffit de prendre les formules de Palmgren dans le cas où $\alpha = 0$ et $i = 1$ (voir tableau 21). Il est remarquable de constater que dans le cas d'un roulement à billes (à contact oblique ou non) l'expression de δ_r (Palmgren) est la même que celle de x_r (Krämer).

Type de roulement	δ_r
Rigides à billes	$1.26 \times 10^{-7} \times F_r^{\frac{2}{3}} D_w^{-\frac{1}{3}} (iZ)^{-\frac{2}{3}}$
Rouleaux à contacts linéaire sur les deux pistes	$1.28 \times 10^{-9} \times l_a^{-0.8} F^{0.9} (iZ)^{-0.9}$

Tableau 21 : formules de Palmgren dans le cas où $\alpha = 0$

Pour notre étude, le palier côté moteur est un roulement à billes à gorge profonde et le palier côté opposé au moteur est un roulement à rouleaux.

k_{zz} est la raideur radiale. k_{xx} est la raideur latérale. La raideur axiale n'est pas prise en compte dans le logiciel ROTORINSA.

Les raideurs statiques des paliers sont supposées égales à leurs raideurs dynamiques. F est donc la charge statique appliquée sur les paliers (supposée égale à la moitié du poids du rotor).

Les caractéristiques du palier côté moteur sont donc données dans le tableau 22.

Roulement à billes	
d	9 mm
F	29.43 N
z	14
x	$9.42 \times 10^{-7} m$
k_{xx}	$3.47 \times 10^7 N/m$
k_{zz}	$4.87 \times 10^7 N/m$

Tableau 22 : caractéristiques du palier côté moteur (palier 1)

Les caractéristiques du palier côté opposé au moteur sont donc données dans le tableau 23.

Roulement à rouleaux	
l	8 mm
F	29.43 N
z	12
x	$1.19 \times 10^{-7} m$
k_{xx}	$1.83 \times 10^8 N/m$
k_{zz}	$2.77 \times 10^8 N/m$

Tableau 23 : caractéristiques du palier côté opposé au moteur (palier 2)

Le coefficient d'amortissement α_1 ayant été déterminé expérimentalement (voir paragraphe II.1.1), les amortissements des paliers (voir tableau 24) sont obtenus grâce à la relation (243), m étant la demi masse du rotor.

$$c_{ii} = 2\alpha_1 \sqrt{k_{ii} m} \quad (243)$$

	c_{rx} (N.s/m)	c_{zz} (N.s/m)
Palier côté moteur	1.65×10^2	1.95×10^2
Palier côté opposé au moteur	3.79×10^2	4.66×10^2

Tableau 24 : amortissements des paliers

III.3.1.d Accouplement

Les fréquences propres du rotor ayant été déterminées expérimentalement (voir paragraphe II.1.1), un recalage est effectué sur celles-ci à partir de deux paramètres : la raideur en translation et la raideur en rotation de l'accouplement.

La figure 112 présente la méthode de recalage des raideurs en rotation et en translation de l'accouplement. Sur cette figure apparaissent les fréquences du rotor déterminées expérimentalement (trait pointillé) et, pour une série de sa raideur en rotation, l'évolution des fréquences en fonction de la raideur en translation de l'accouplement (lignes continues).

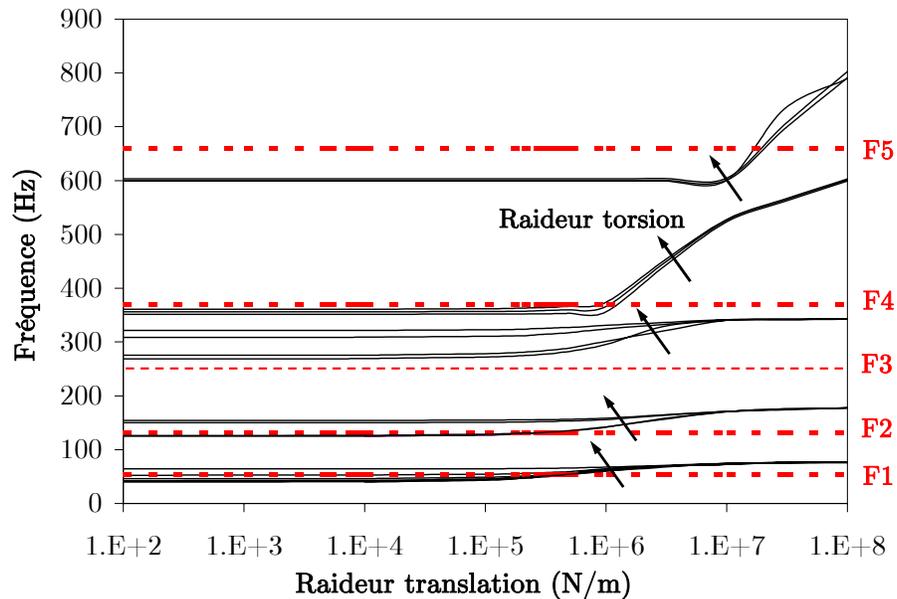


Figure 112 : recalage de l'accouplement

Sur l'abaque ainsi constitué point par point, la raideur en translation est choisie égale à 4.0×10^5 N/m et la raideur en rotation est choisie égale à 9.5×10^2 Nm/rad. Ce choix est

effectué de sorte que l'erreur par rapport à l'expérimental soit la plus faible possible au niveau de la première fréquence naturelle et que les erreurs sur les trois premières fréquences naturelles soient à peu près du même ordre. Expérimentalement, l'effet gyroscopique est négligeable, la valeur d'une fréquence naturelle expérimentale est donc comparée à la moyenne des fréquences du modèle correspondant à la précession directe et à la précession inverse.

Les valeurs des fréquences du modèle et celles des fréquences expérimentales sont présentées dans le tableau 25 associées aux erreurs correspondantes.

fréquence	Balayage sinus	ROTORINSA Précession inverse	ROTORINSA Précession directe	Erreur
F_1	52.50 Hz	52.55 Hz	52.66 Hz	0.2%
F_2	126.50 Hz	133.61 Hz	133.70 Hz	5.7%
F_3	240.50 Hz	273.32 Hz	280.99 Hz	15.2%
F_4	364.47 Hz	351.74 Hz	365.07 Hz	1.7%
F_5	627.87 Hz	598.73 Hz	617.15 Hz	3.2%

Tableau 25 : comparaison fréquences calculées (ROTORINSA) et mesurées

L'erreur relativement importante au niveau de la troisième fréquence naturelle vient du fait que le jeu de capteurs utilisé est placé sur des nœuds de vibration du troisième mode du rotor étudié.

III.3.2 Réponse en régime permanent

La modélisation éléments finis a été présentée figure 111. La base modale contient huit modes. L'allure des cinq premiers modes du rotor sont présentés figures 113 à 122.

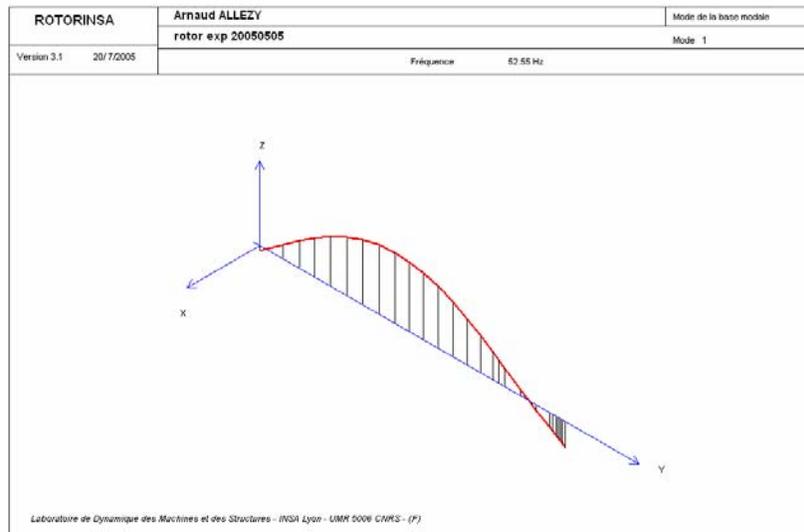


Figure 113 : mode 1 précession inverse

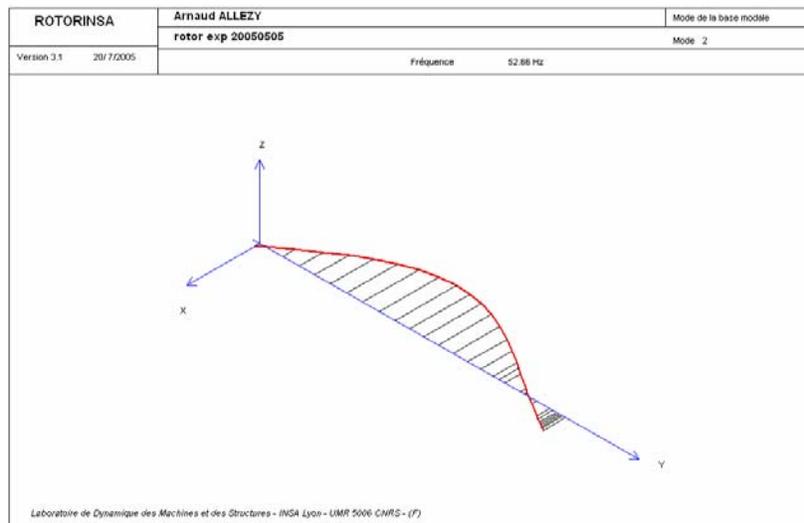


Figure 114 : mode 1 précession directe

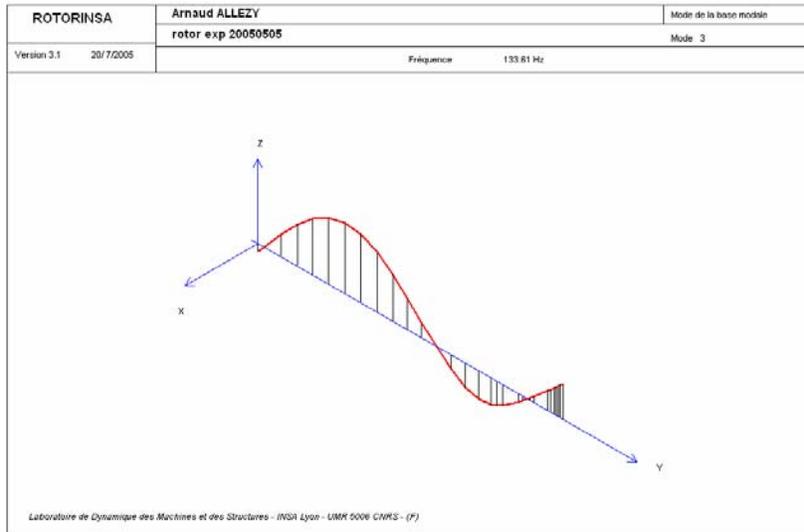


Figure 115 : mode 2 précession inverse

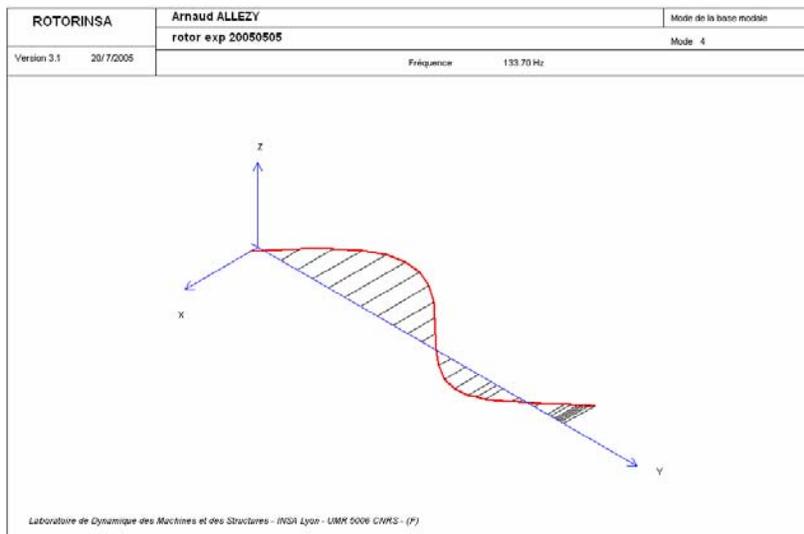


Figure 116 : mode 5 précession directe

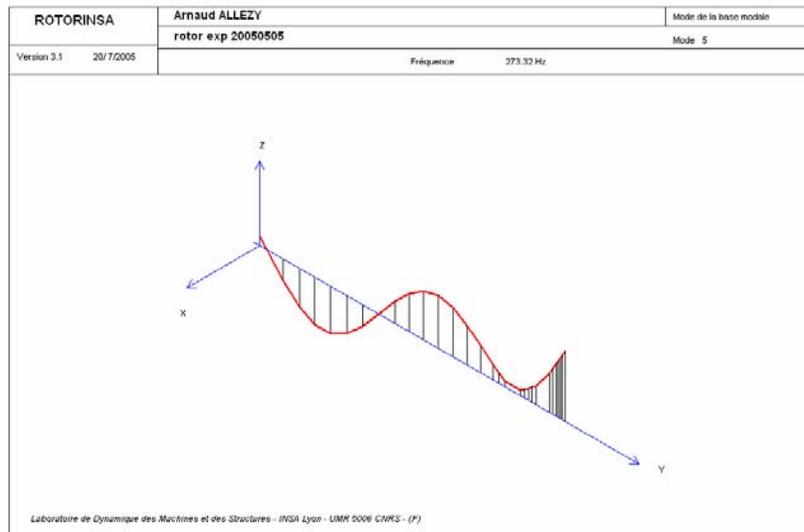


Figure 117 : mode 3 précession inverse

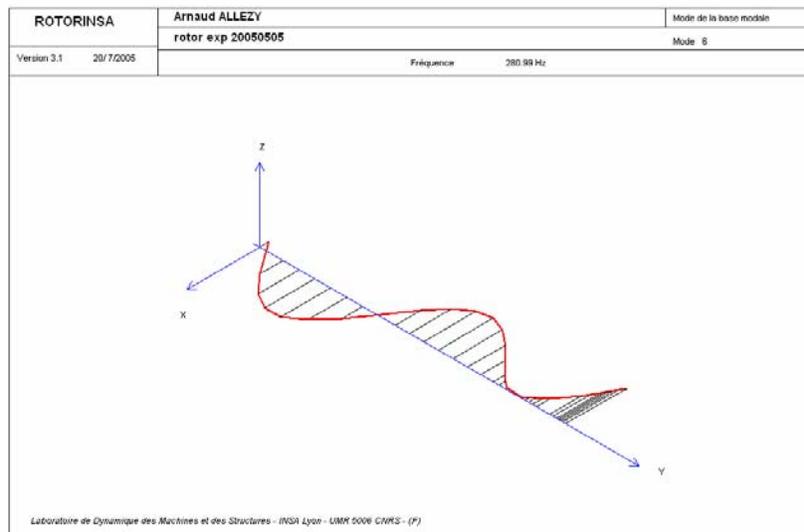


Figure 118 : mode 5 précession directe

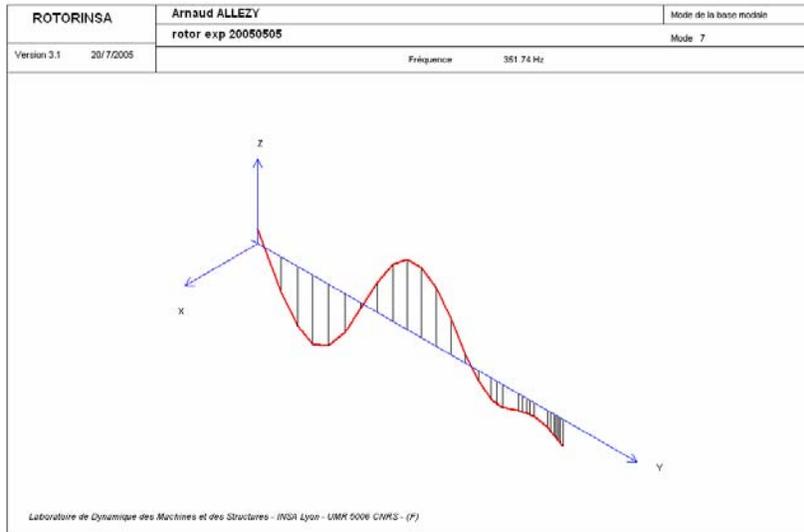


Figure 119 : mode 4 précession inverse

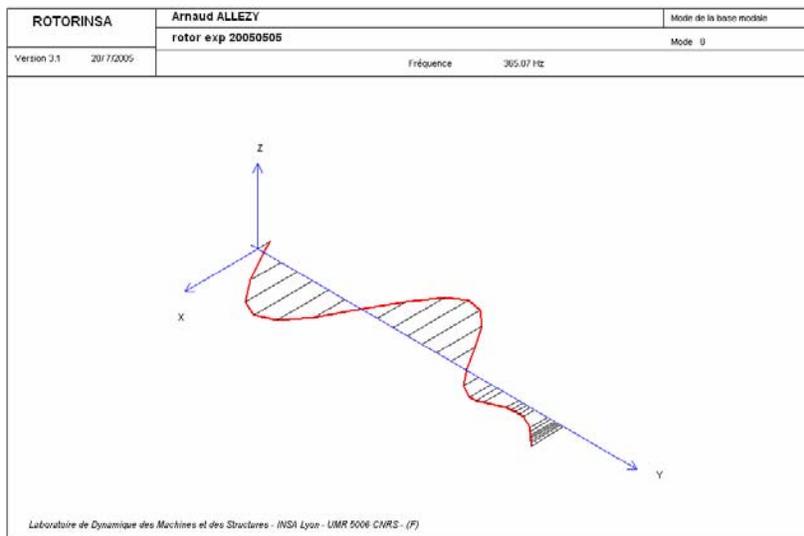


Figure 120 : mode 5 précession directe

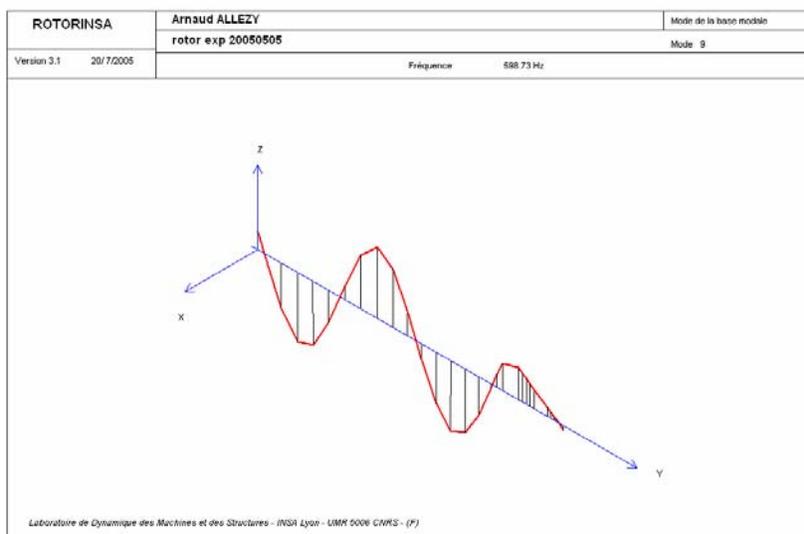


Figure 121 : mode 5 précession inverse

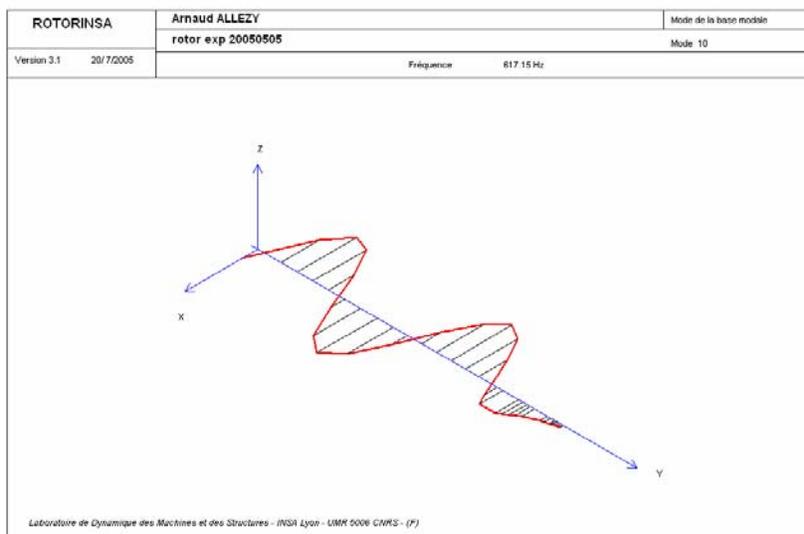


Figure 122 : mode 5 précession directe

Le diagramme de Campbell est présenté figure 123, les ordres de 1 à 5 y sont tracés. Sur la figure 124, un agrandissement du diagramme de Campbell est présenté ; il s'agit de mettre en évidence la zone concernée expérimentalement. En effet, les transitoires expérimentaux sont des montées, ou descentes, entre 0 et 6000 tr/min (100 Hz). Seuls les ordres 1 à 3 influent sur la

réponse (voir paragraphe III.2.6.c), une seule vitesse critique est franchie. Cette figure montre que l'effet gyroscopique est faible.

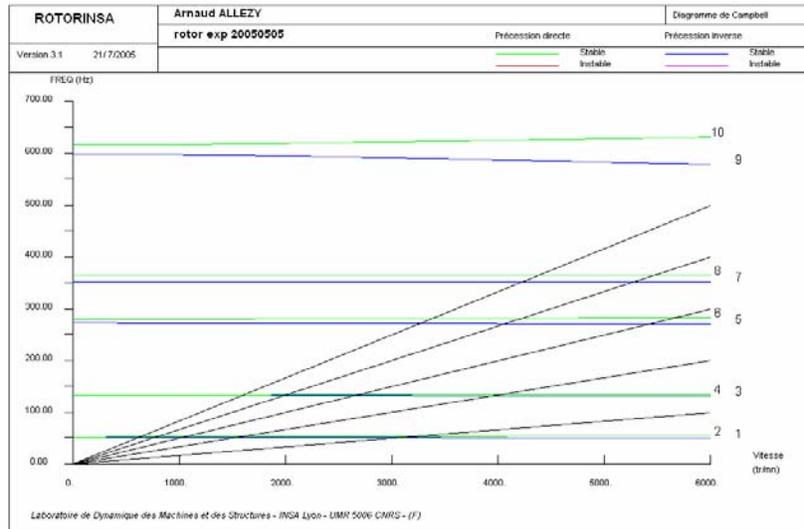


Figure 123 : diagramme de Campbell

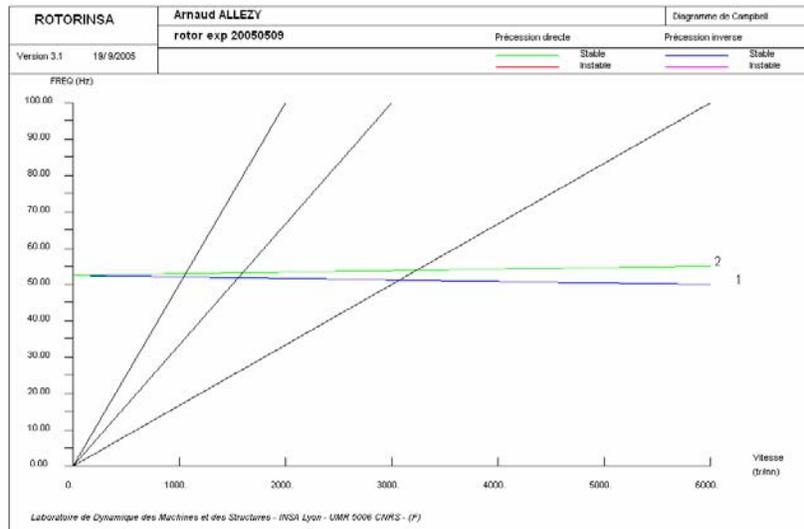


Figure 124 : diagramme de Campbell - agrandissement

Le nœud 4 correspond physiquement au point de la fibre neutre du rotor dont le déplacement est mesuré par les CDCF C3 et C4. De la même façon, le nœud 7 correspond au point dont le déplacement est mesuré par C1 et C2.

La réponse du modèle au balourd est donc calculée aux nœuds 4 et 7.

Le balourd total introduit dans le modèle est constitué des balourds discrets suivants :

- B_{R2} au nœud 14 (voir paragraphe III.2.4.f),
- $B_{T1} + B_{R1}$ au nœud 15 (64.7 g.mm à 1 °),
- et un balourd de 6.7 g.mm à 0 ° pour prendre en compte le balourd généré par le top-tour (voir paragraphe III.2.3.b).

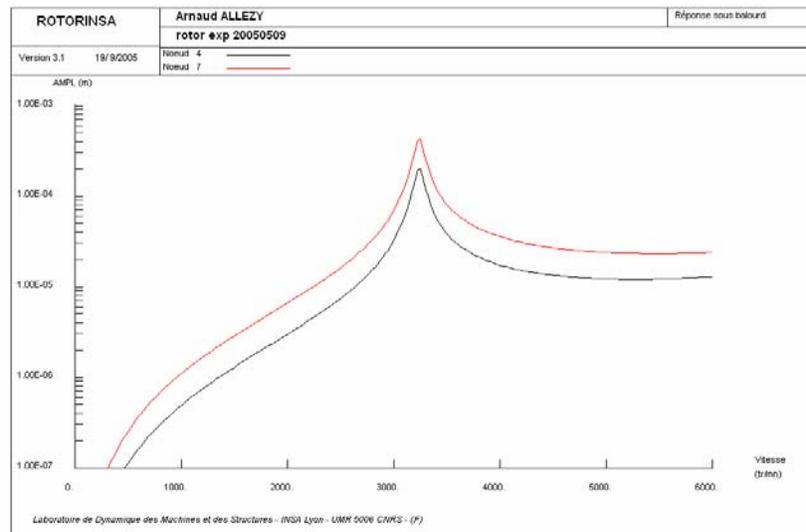


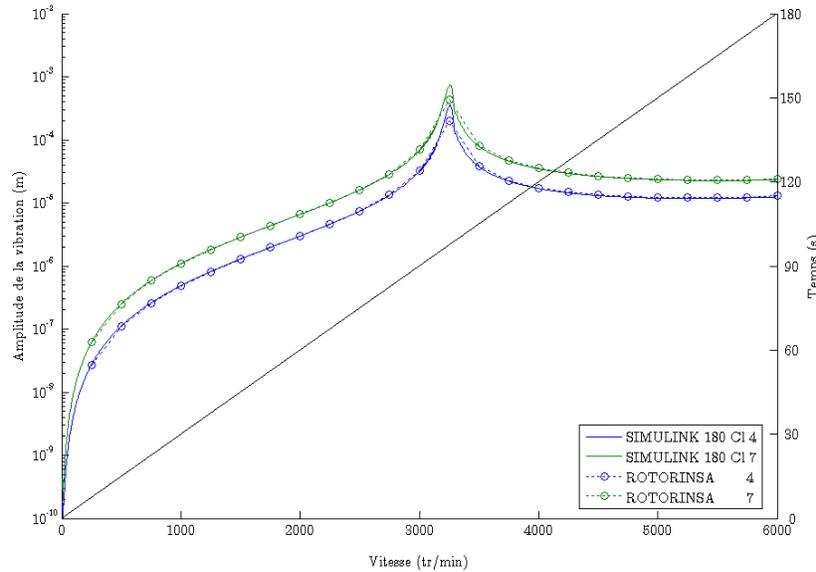
Figure 125 : réponse au balourd

La réponse en régime permanent montre la présence de la seule et unique vitesse critique dans la plage de fonctionnement : 0 – 6000 tr/min. Peu d'effet gyroscopique se manifeste.

III.3.3 Validation en régime permanent

Afin de valider le programme développé sur MATLAB-SIMULINK permettant d'étudier un système continu en transitoire, une comparaison des résultats de ce programme en transitoire infiniment lent avec les résultats du régime permanent donnés par ROTORINSA a été menée sur quelques exemples représentatifs (voir annexe F).

La figure 126 montre l'adéquation quasi parfaite entre la réponse en régime permanent donnée par ROTORINSA et celle donnée par le programme MATLAB-SIMULINK dans le cas d'un régime transitoire lent (0.6 Hz/s).



**Figure 126 : réponses au balourd ROTORINSA et MATLAB-SIMULINK
montée $i = 0$ représentation logarithmique**

Par ailleurs, les outils développés sous MATLAB-SIMULINK ont aussi été validés en comparant leurs résultats à ceux publiés dans [LALANNE, M. et FERRARIS, G. 1998] dans le cas d'un rotor académique et d'un rotor industriel soumis à des profils de vitesse linéaires ou exponentiels (voir annexe G).

III.3.4 Réponse en transitoire

Les outils développés sous MATLAB-SIMULINK permettent, à partir des matrices issues de la modélisation éléments finis du rotor, ou à défaut, de ses matrices modales, d'étudier le comportement de ce dernier lorsqu'il est soumis à un profil de vitesse quelconque.

III.3.4.a Le balourd

Lors de la rotation du rotor, chaque masse m_i du balourd discrétisé est liée à l'arbre en position déformée.

Le vecteur de déplacement et la vitesse associée s'écrivent :

$$\{O_i M_i\} = \begin{Bmatrix} u + r_i \sin(\phi + \alpha_i) \\ 0 \\ w + r_i \cos(\phi + \alpha_i) \end{Bmatrix}_{R_0} \quad (244)$$

$$\{V\} = \frac{d\{O_i M_i\}}{dt} = \begin{Bmatrix} \dot{u} + \dot{\phi} r_i \cos(\phi + \alpha_i) \\ 0 \\ \dot{w} - \dot{\phi} r_i \sin(\phi + \alpha_i) \end{Bmatrix}_{R_0}$$

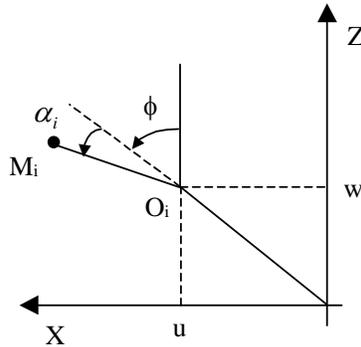


Figure 127 : paramétrage du balourd

L'énergie cinétique du balourd i qui participe à la construction du vecteur force d'excitation est :

$$T_B = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \dot{\phi} (\dot{u} \cos(\phi + \alpha_i) - \dot{w} \sin(\phi + \alpha_i)) \quad (245)$$

L'application des équations de Lagrange permet de déterminer les efforts dus au balourd dans le cas général d'un transitoire de vitesse :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} F_u \\ F_w \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} m_i r_i \cos \alpha_i \\ -m_i r_i \sin \alpha_i \end{Bmatrix} \dot{\phi}^2 \sin \phi + \begin{Bmatrix} m_i r_i \sin \alpha_i \\ m_i r_i \cos \alpha_i \end{Bmatrix} \dot{\phi}^2 \cos \phi \\ &+ \begin{Bmatrix} m_i r_i \sin \alpha_i \\ m_i r_i \cos \alpha_i \end{Bmatrix} \ddot{\phi} \sin \phi + \begin{Bmatrix} -m_i r_i \cos \alpha_i \\ m_i r_i \sin \alpha_i \end{Bmatrix} \ddot{\phi} \cos \phi \end{aligned} \quad (246)$$

avec $\ddot{\phi}$, accélération angulaire du rotor.

III.3.4.b Equations de mouvement

Les équations de Lagrange utilisent l'expression des énergies calculées à partir d'une formulation de type éléments finis. Le vecteur des déplacements nodaux du rotor est noté X . Il comprend les degrés de liberté u , w , θ et ψ de tous les nœuds du rotor, soit n_{ddl} degrés de liberté.

Le système différentiel à résoudre est :

$$\begin{aligned} M\ddot{X} + (\dot{\phi}C_g + C_p)\dot{X} + ((K_r + K_p) + \ddot{\phi}K_g)X \\ = \dot{\phi}^2[F_{11} \sin \phi + F_{12} \cos \phi] + \ddot{\phi}[F_{21} \sin \phi + F_{22} \cos \phi] = F \end{aligned} \quad (247)$$

\dot{X} et \ddot{X} sont les vecteurs vitesse et accélération du modèle, fonction du temps.

Les matrices du système sont :

- M : matrice de masse symétrique,
- C_g : matrice gyroscopique antisymétrique,
- C_p : matrice non symétrique d'amortissement visqueux dû aux paliers,
- K_r : matrice de raideur symétrique de l'arbre,
- K_p : matrice raideur non symétrique des paliers linéaires,
- K_g : matrice de raideur gyroscopique,
- F_{11} , F_{12} , F_{21} et F_{22} : vecteurs des forces extérieures
- ϕ , $\dot{\phi}$, $\ddot{\phi}$: angle, vitesse et accélération angulaires : fonctions du temps.

La relation (247) est un système d'équations de dimension n_{ddl} . Il doit être résolu à chaque pas de temps compte tenu de l'évolution de l'angle, de la vitesse et de l'accélération angulaires. L'utilisation d'une méthode de réduction est nécessaire pour permettre un gain important de place mémoire et de temps de calcul.

III.3.4.c Résolution du système d'équations

Deux méthodes sont couramment utilisées en dynamique des rotors : la sous-structuration et la réduction modale. Une méthode particulière appelée méthode pseudo-modale a été développée. Dans cette méthode, la réduction du nombre de degrés de liberté est effectuée à partir des modes du système conservatif associé à l'arrêt.

Si la matrice Φ formée par les nb_{mod} premiers modes est considérée, le changement de variable suivant est effectué :

$$X = \Phi q \quad (248)$$

q est le vecteur des coordonnées généralisées, son introduction dans les énergies cinétique et de déformation ainsi que dans le travail des forces extérieures donne, après application des équations de Lagrange, la relation (249).

$$\bar{M}\ddot{q} + (\dot{\phi}\bar{C}_g + \bar{C}_p)\dot{q} + (\bar{K} + \ddot{\phi}\bar{K}_g)q = {}^t\Phi F \quad (249)$$

Avec :

- $\bar{M} = {}^t\Phi M \Phi$: matrice de masse réduite,
- $\bar{C}_g = {}^t\Phi C_g \Phi$: matrice gyroscopique réduite,
- $\bar{C}_p = {}^t\Phi C_p \Phi$: matrice d'amortissement réduite,
- $\bar{K}_g = {}^t\Phi K_g \Phi$: matrice de raideur gyroscopique réduite,
- $\bar{K} = {}^t\Phi (K_p + K_r) \Phi$: matrice de raideur réduite,
- F : vecteur des forces extérieures.

La résolution du système d'équations (249) de taille nb_{mod} permet la détermination de q . Le vecteur de déplacement X est ensuite calculé à partir de la relation (248).

Dans le cas de cette étude, les variables sont des fonctions du temps. L'équation du mouvement doit être résolue à chaque pas de temps en suivant l'évolution de $\phi(t)$, $\dot{\phi}(t)$ et $\ddot{\phi}(t)$. Une méthode d'intégration pas-à-pas doit donc être utilisée, elle sera choisie en fonction du logiciel employé pour les simulations. Les conditions initiales sont nulles. Les lois de variation de la vitesse de rotation correspondent aux rampes effectuées expérimentalement. Le choix du pas de temps est déterminant pour la précision et pour la rapidité des calculs. Il sera déterminé en fonction de la fréquence de rotation et de la plus haute fréquence contenue dans les modes utilisés afin que la plus faible période soit décrite par une dizaine de pas de temps.

III.3.4.d Procédure

Le rotor étudié expérimentalement est modélisé sous le logiciel ROTORINSA, les matrices modales calculées par ce logiciel sont récupérées sous MATLAB-SIMULINK à l'aide de programmes développés dans le cadre de cette étude et validés sur un nombre conséquent d'exemples en vue d'une utilisation généralisée au laboratoire. De la même façon, les programmes de simulation ont été écrits afin d'être utilisables à partir de la base modale de n'importe quel rotor. L'étude de la machine en régime transitoire peut ainsi être menée, à l'aide notamment de la représentation d'état du système, les résultats obtenus à sa suite permettent la validation de l'outil et l'étude plus particulière du rotor concerné.

III.3.4.e Résultats

En vue d'une comparaison avec l'expérimental, les rampes présentées dans le tableau 17 ont été appliquées sur le modèle. Le cas de la rampe $i = 0$ a été présenté en montée figure 126, les résultats des autres rampes en montée sont présentés sur les figures 128 à 132.

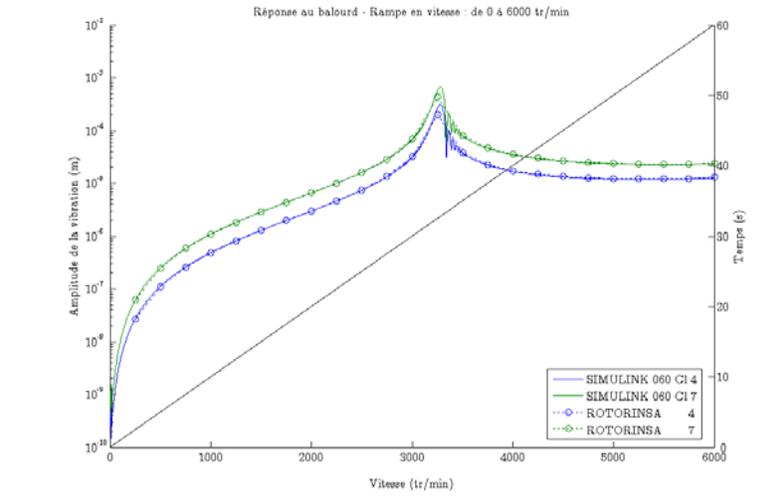


Figure 128 : réponses au balourd ROTORINSA et MATLAB-SIMULINK
montée $i = 1$ représentation logarithmique

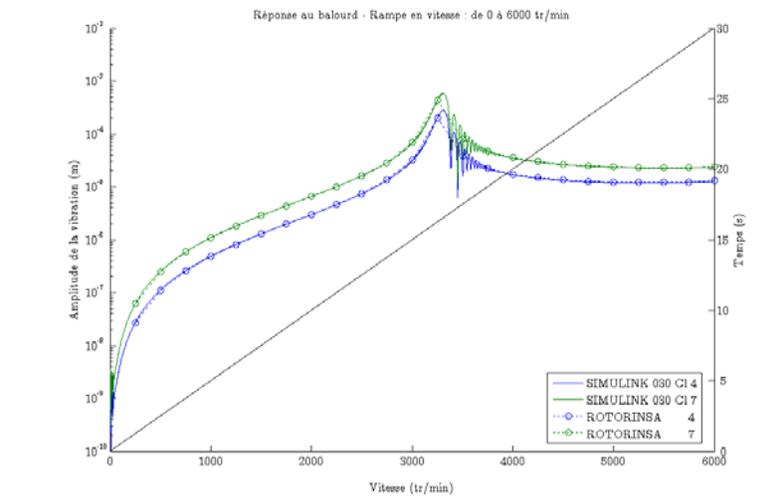


Figure 129 : réponses au balourd ROTORINSA et MATLAB-SIMULINK
montée $i = 2$ représentation logarithmique

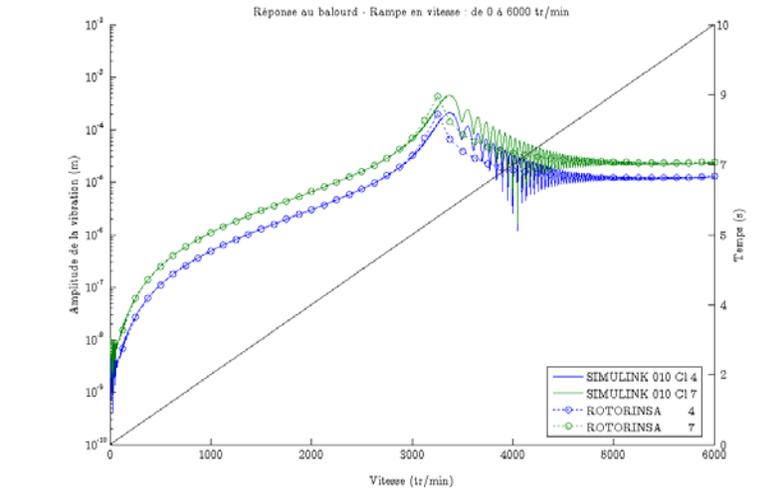


Figure 130 : réponses au balourd ROTORINSA et MATLAB-SIMULINK
montée $i = 3$ représentation logarithmique

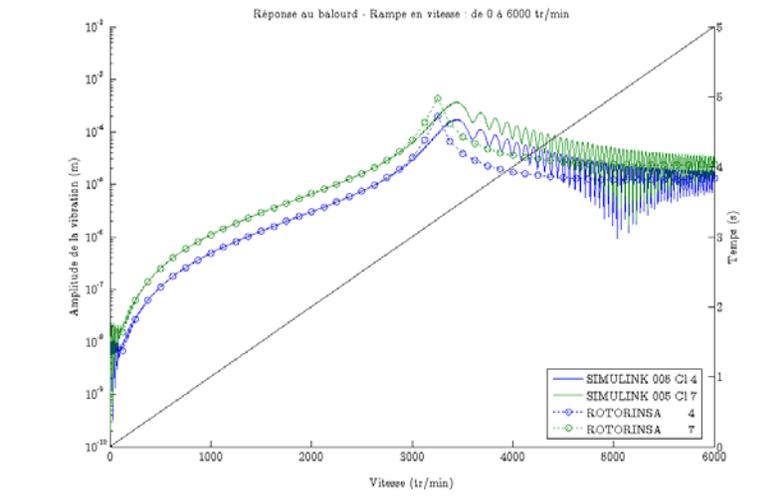


Figure 131 : réponses au balourd ROTORINSA et MATLAB-SIMULINK
montée $i = 4$ représentation logarithmique

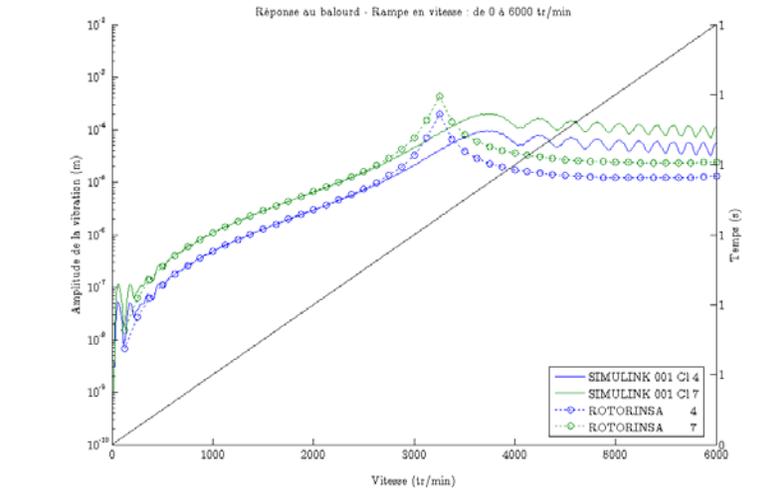


Figure 132 : réponses au balourd ROTORINSA et MATLAB-SIMULINK
montée $i = 5$ représentation linéaire

L'étude a aussi été menée en descente, voir figures 133 à 138.

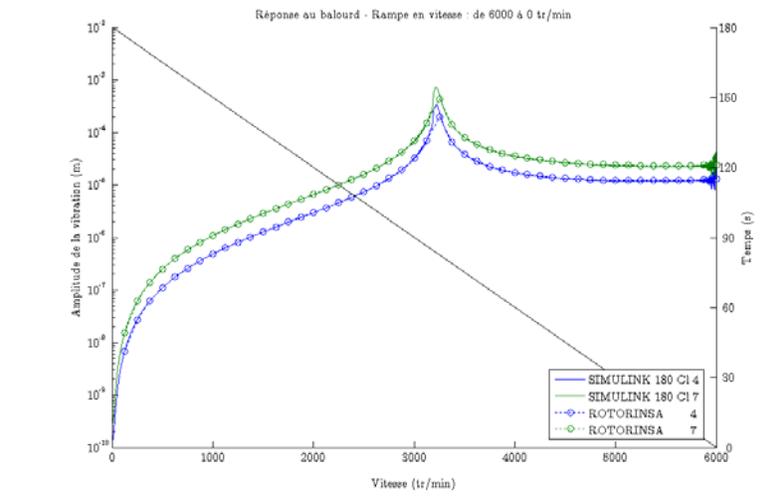


Figure 133 : réponses au balourd descente $i = 0$ représentation logarithmique

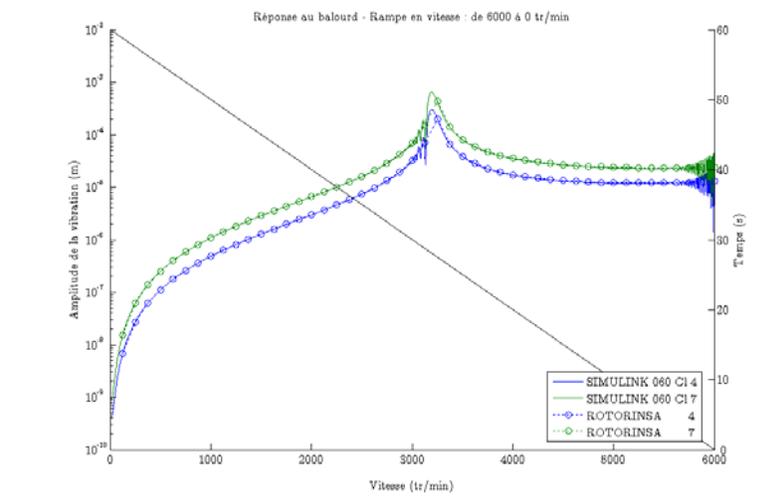


Figure 134 : réponses au balourd descente $i = 1$ représentation logarithmique

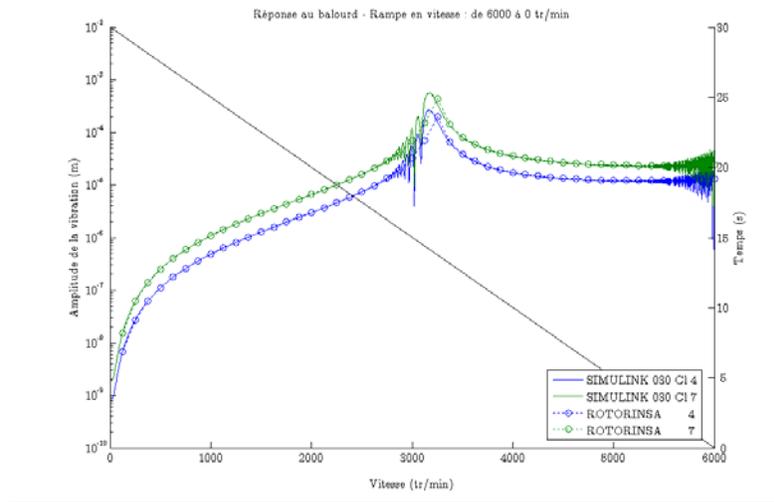


Figure 135 : réponses au balourd descente $i = 2$ représentation logarithmique

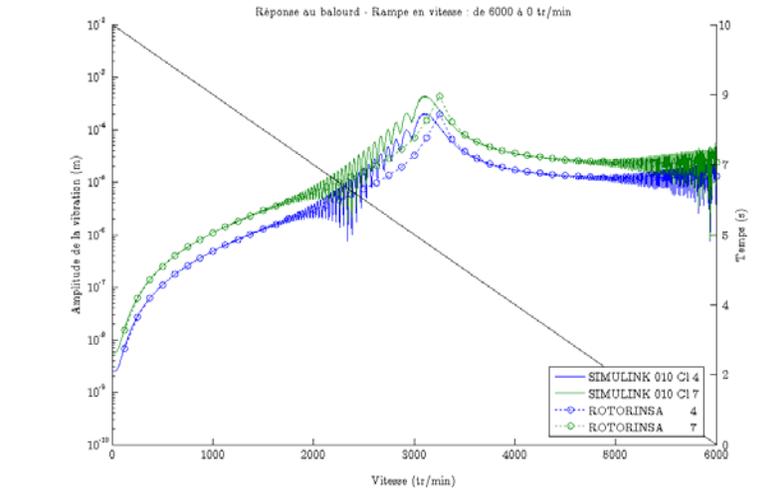


Figure 136 : réponses au balourd descende $i = 3$ représentation logarithmique

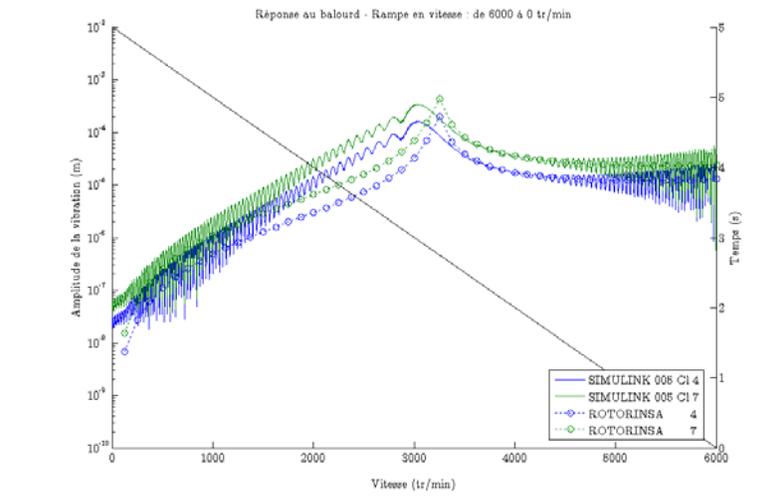


Figure 137 : réponses au balourd descende $i = 4$ représentation logarithmique

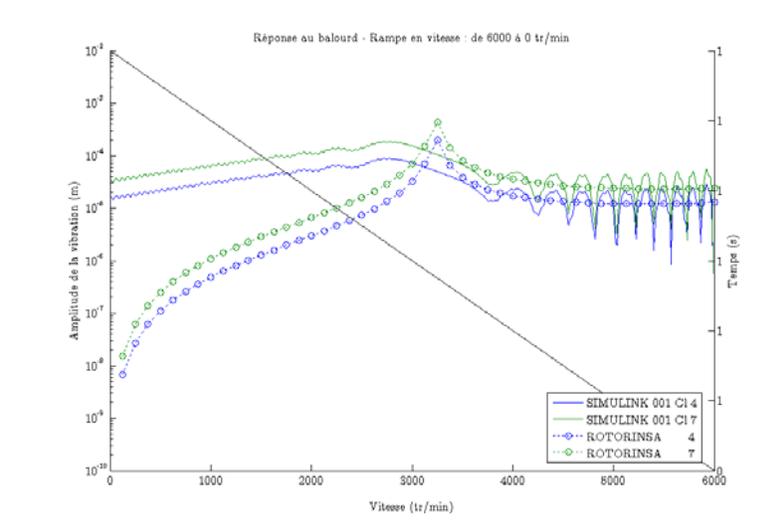


Figure 138 : réponses au balourd descende $i = 5$ représentation logarithmique

En regroupant les résultats précédents et en ne prenant en compte que les résultats au nœud 7, les figures 139 à 141 sont obtenues.

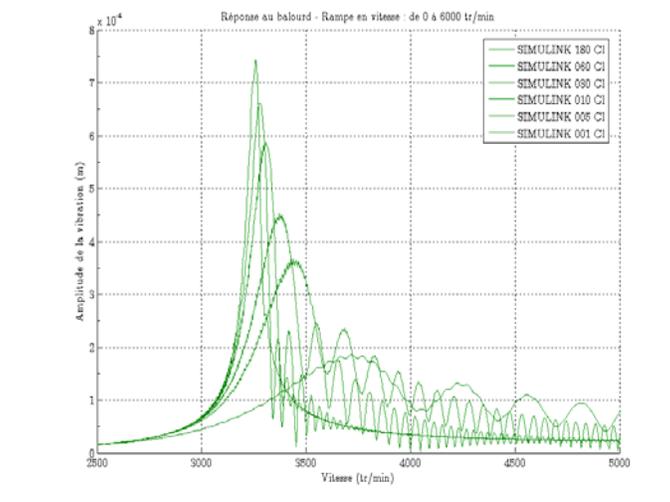


Figure 139 : réponses au balourd MATLAB-SIMULINK, montées

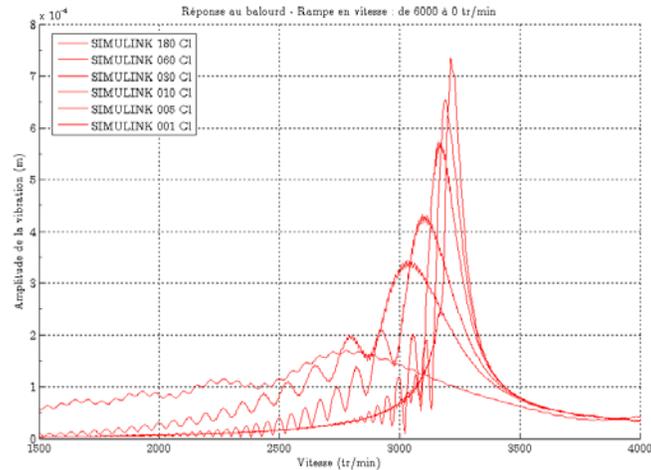


Figure 140 : réponses au balourd MATLAB-SIMULINK, descentes

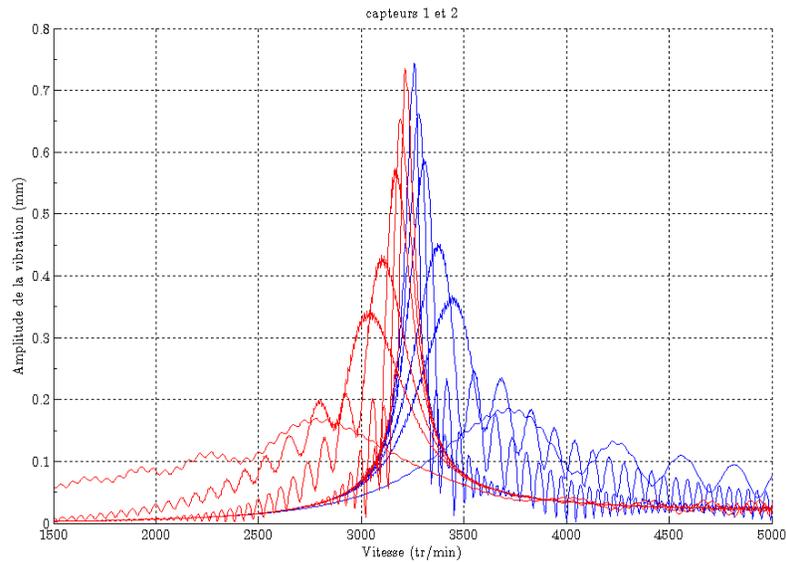


Figure 141 : réponses MATLAB-SIMULINK montées-descentes

Les comportements à la montée et à la descente sont similaires, a priori, le comportement est donc linéaire.

III.3.4.f Bilan réponses classique et mesurée

La mise en parallèle des amplitudes maximales de la vibration, paramètre critique pour un dimensionnement éventuel de machine, entre calcul et mesure donne le tableau 26.

Rampe	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
Durée (s)	180	60	30	10	5	1
Montée expérimentale (mm)	0.104	0.094	0.082	0.076	0.064	0.055
Montée modèle classique (mm)	0.354	0.312	0.278	0.214	0.174	0.088
Ecart/expérimental (%)	250	232	239	182	172	60
Descente expérimentale (mm)	0.134	0.134	0.124	0.096	0.069	0.068
Descente modèle classique (mm)	0.354	0.314	0.274	0.204	0.162	0.080
Ecart/expérimental (%)	169	138	125	113	135	18

Tableau 26 : comparaison calcul-mesure des amplitudes maximales (mm)

Les amplitudes calculées sont supérieures à celles observées expérimentalement, et ce d'autant plus que l'intensité de la rampe diminue, l'intensité de la rampe atténuée donc les différences calcul-mesure. Par ailleurs, en comparant les figures 101 et 141, il apparaît que les oscillations après la résonance du modèle n'apparaissent pas expérimentalement.

III.3.5 Conclusions

La validation du modèle en régime permanent a été effectuée. L'étude du comportement du modèle en transitoire a été menée, aussi bien en montée qu'en descente. Une différence significative entre calcul et mesure a été observé, tant au niveau quantitatif (différence entre les amplitudes maximales) que qualitatif (pas d'oscillation après la résonance dans le cas expérimental).

III.4 Modèle métrique

Le modèle métrique est établi selon la méthode développée au paragraphe I.4, il s'appuie sur la base modale mentionnée au paragraphe III.3.2 et sur les équations du rotor traitées au paragraphe III.3.4.b.

Ainsi, le système d'équations à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} \ddot{q} + (\dot{\phi}\bar{M}^{-1}\bar{C}_g + 2\alpha\dot{\theta})\dot{q} + (\bar{M}^{-1}\bar{K} + \ddot{\phi}\bar{M}^{-1}\bar{K}_g)q = \bar{M}^{-1}{}^t\Phi F \\ \ddot{\theta} = 2\frac{\alpha}{\rho^2}\left(\frac{1}{2}(\bar{M}^{-1}\bar{K} + \ddot{\phi}\bar{M}^{-1}\bar{K}_g)q^2 - \bar{M}^{-1}{}^t\Phi F q + \frac{1}{2}\dot{q}^2\right) \end{cases} \quad (250)$$

Soit encore :

$$\begin{cases} \ddot{q} = +\bar{M}^{-1}{}^t\Phi F - (\bar{M}^{-1}\bar{C}_g\dot{\phi}\dot{q} + 2\alpha\dot{\theta}\dot{q}) - (\bar{M}^{-1}\bar{K}q + \bar{M}^{-1}\bar{K}_g\ddot{\phi}q) \\ \ddot{\theta} = \frac{\alpha}{\rho^2}(\bar{M}^{-1}\bar{K}q^2 + \bar{M}^{-1}\bar{K}_g\ddot{\phi}q^2) - 2\frac{\alpha}{\rho^2}\bar{M}^{-1}{}^t\Phi F q + \frac{\alpha}{\rho^2}\dot{q}^2 \end{cases} \quad (251)$$

La formulation d'état (252) est ensuite utilisée.

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU \\ Y &= CX + DU \end{aligned} \quad (252)$$

Avec :

$$X = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ q \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} \quad (253)$$

Et :

$$U = {}^t \left[{}^t\Phi F \quad \dot{\phi}\dot{q} \quad \ddot{\phi}q \quad {}^t\Phi F q \quad q^2 \quad \ddot{\phi}q^2 \quad \dot{q}^2 \quad \dot{q}\dot{\theta} \right] \quad (254)$$

Par ailleurs :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (255)$$

Avec :

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{M}^{-1}\bar{K} \\ Id & 0 \end{bmatrix} \quad (256)$$

$$A_{21} = A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (257)$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Id & 0 \end{bmatrix} \quad (258)$$

Et :

$$B = [B_{11} \quad B_{12} \quad B_{13}] \quad (259)$$

Avec :

$$B_{11} = \begin{bmatrix} \bar{M}^{-1} & -\bar{M}^{-1}\bar{C}_g & -\bar{M}^{-1}\bar{K}_g \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (260)$$

$$B_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2\frac{\alpha}{\rho^2}\bar{M}^{-1} & \frac{\alpha}{\rho^2}\bar{M}^{-1}\bar{K} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (261)$$

$$B_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha}{\rho^2}\bar{M}^{-1}\bar{K}_g & \frac{\alpha}{\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (262)$$

Enfin :

$$C = [Id] \quad (263)$$

Et :

$$D = 0 \quad (264)$$

α est une matrice diagonale, de taille 8 (nombre de modes considéré) dont les premières valeurs sont les coefficients d'amortissement modaux déterminés expérimentalement (α_1 et α_2 , voir paragraphe III.2.5.b). Lors des transitoires étudiés, seuls les deux premiers modes de vibration

sont mis en jeu de façon significative (voir notamment le paragraphe III.2.6.c), les autres coefficients de α n'ont donc qu'une influence négligeable dans le comportement du rotor. Par conséquent, la valeur $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$ leur a été affectée.

ρ est aussi une matrice diagonale de taille 8. Les huit coefficients non nuls de ρ sont des paramètres qui peuvent être recalés indépendamment les uns par rapports aux autres pour modifier le comportement du rotor sur le mode considéré. Pour des raisons analogues à celles mentionnées dans le paragraphe précédent et parce que seule la première vitesse critique est franchie lors des transitoires étudiés, la matrice ρ est prise proportionnelle à l'identité et dans la suite directement assimilée à son seul et unique coefficient ρ qui permettra le recalage de la réponse du modèle métrique par rapport à la réponse mesurée.

La sensibilité du modèle métrique aux divergences numériques a requis l'utilisation d'une formulation d'état discrète.

Pour $\rho = 1$, comme dans le cas de systèmes discrets, les résultats de la méthode métrique se confondent avec ceux de la méthode classique. En diminuant ρ , le recalage des amplitudes est possible (voir tableaux 27 et 28).

Rampe	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
Montée modèle métrique (mm)	0.114	0.092	0.081	0.077	0.067	0.049
Ecart/expérimental (%)	14	2	1	1	5	11
Descente modèle métrique (mm)	0.134	0.134	0.0134	0.098	0.068	0.065
Ecart/expérimental (%)	3	3	12	2	1	4

Tableau 27 : recalage métrique des amplitudes maximales (mm)

Rampe	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
ρ montée	30×10^{-4}	15×10^{-4}	9×10^{-4}	5×10^{-4}	3×10^{-4}	1×10^{-4}
ρ descente	50×10^{-4}	30×10^{-4}	20×10^{-4}	10×10^{-4}	5×10^{-4}	3×10^{-4}

Tableau 28 : valeur de ρ en fonction de la rampe

Ainsi, l'erreur entre calcul et mesure passe en-dessous de 15% au niveau de la valeur de l'amplitude maximale des vibrations.

L'ordre 1 de la vibration est considéré dans le plan du milieu de l'arbre et il s'agit ici de comparer la réponse mesurée (i. e. évolution de l'amplitude du demi grand axe de l'ellipse

décrite par la fibre neutre) dans ce plan avec celle des modèles classique et métrique. Les résultats obtenus pour chaque rampe sont présentés figures 142 à 153.

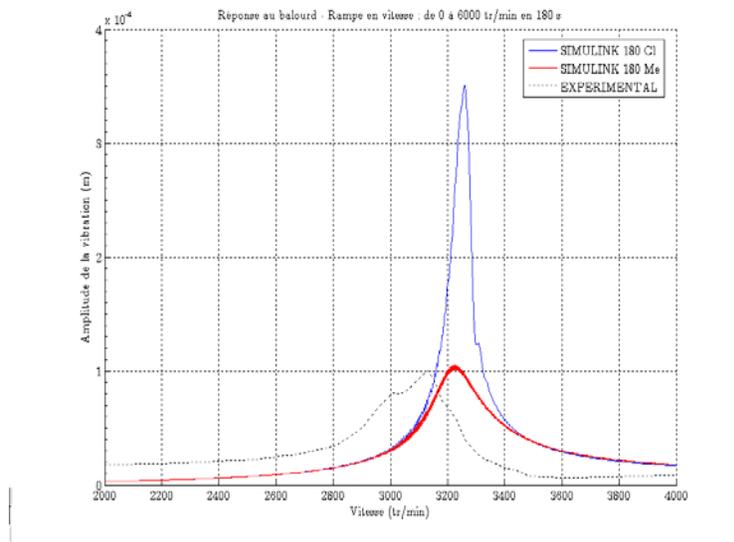


Figure 142 : $i = 0$, montée

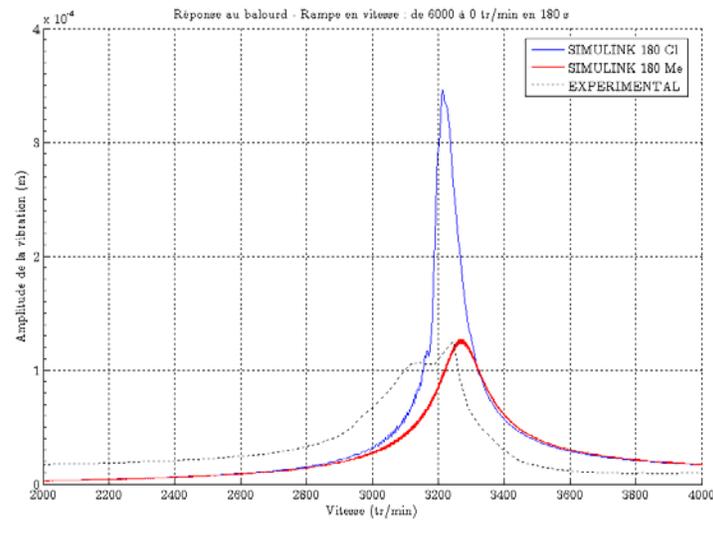
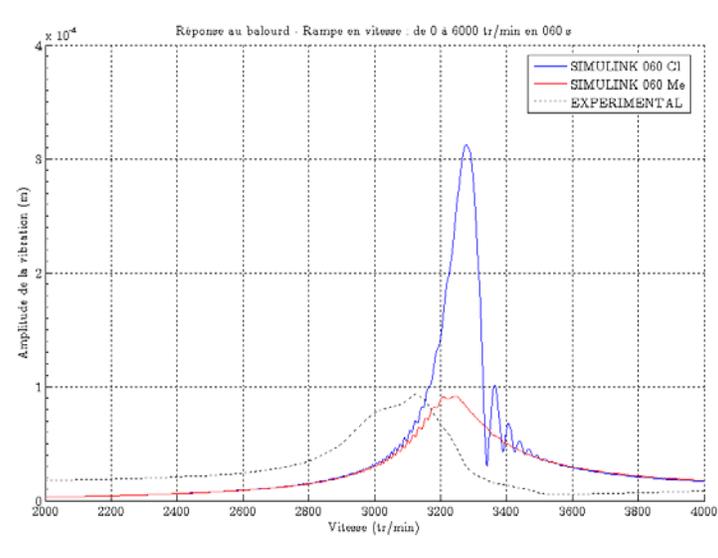
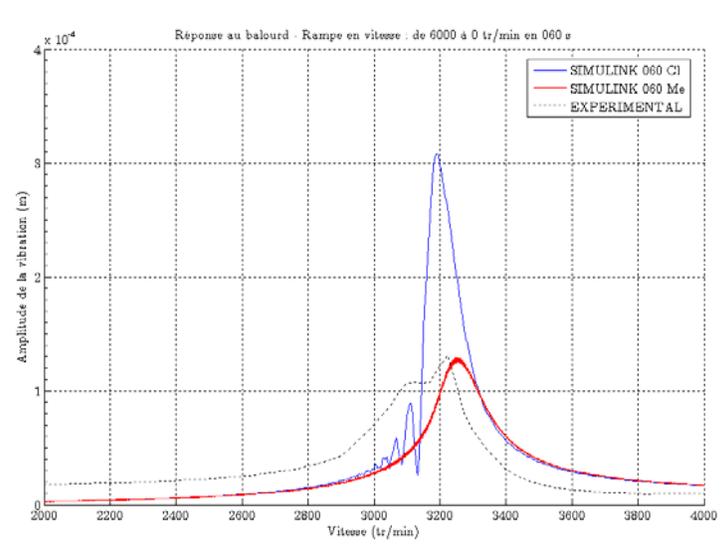
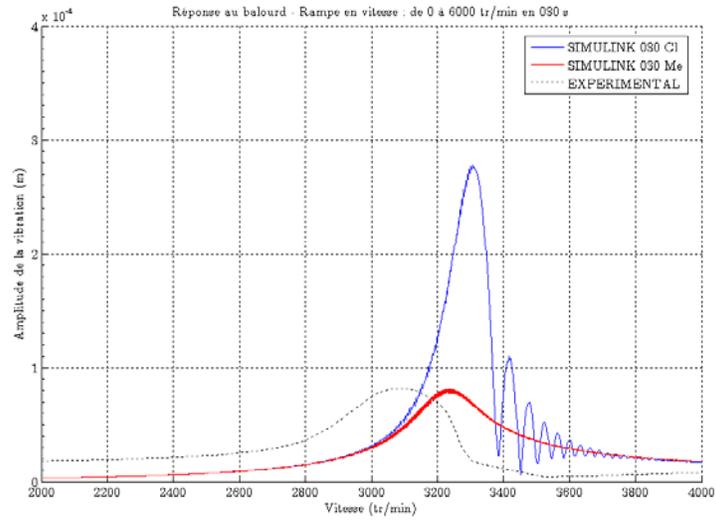
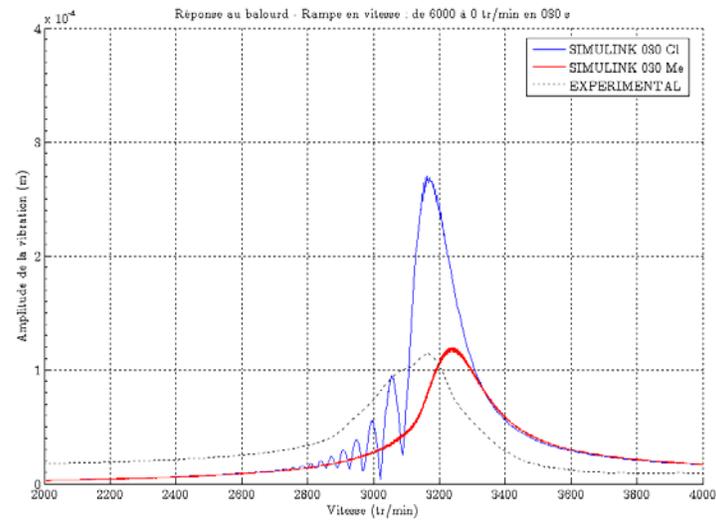
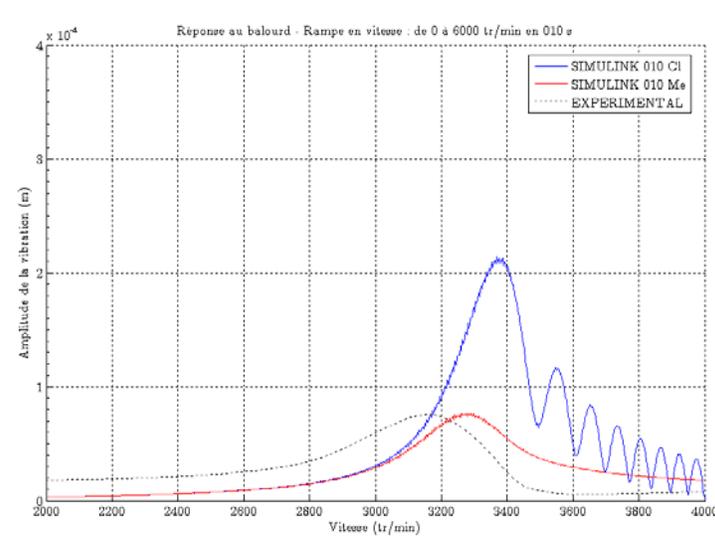
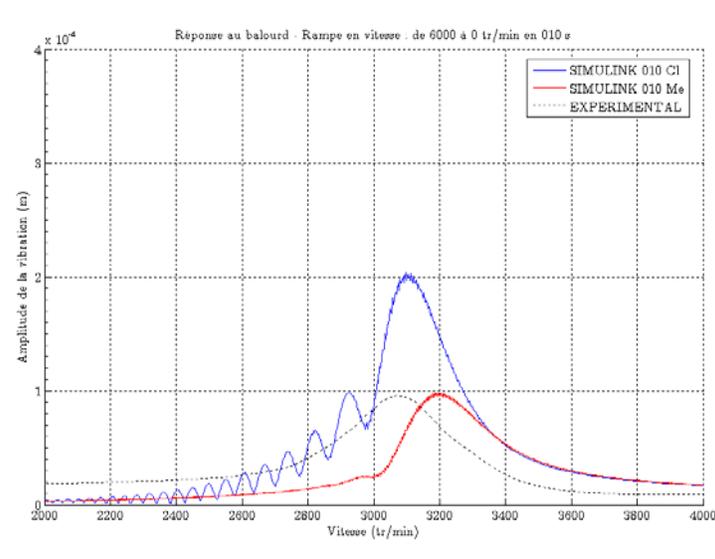


Figure 143 : $i = 0$, descente

Figure 144 : $i = 1$, montéeFigure 145 : $i = 1$, descente

Figure 146 : $i = 2$, montéeFigure 147 : $i = 2$, descente

Figure 148 : $i = 3$, montéeFigure 149 : $i = 3$, descente

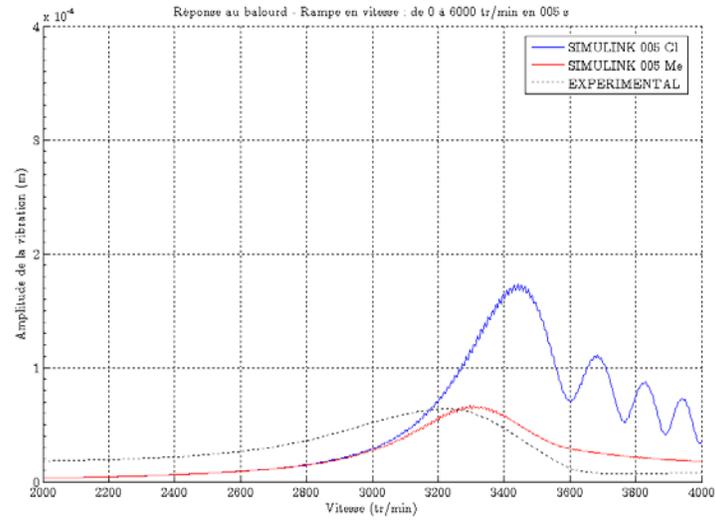


Figure 150 : $i = 4$, montée

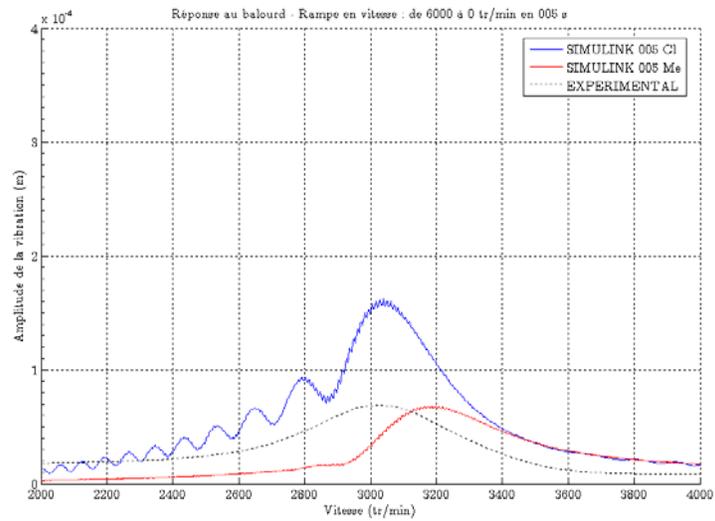
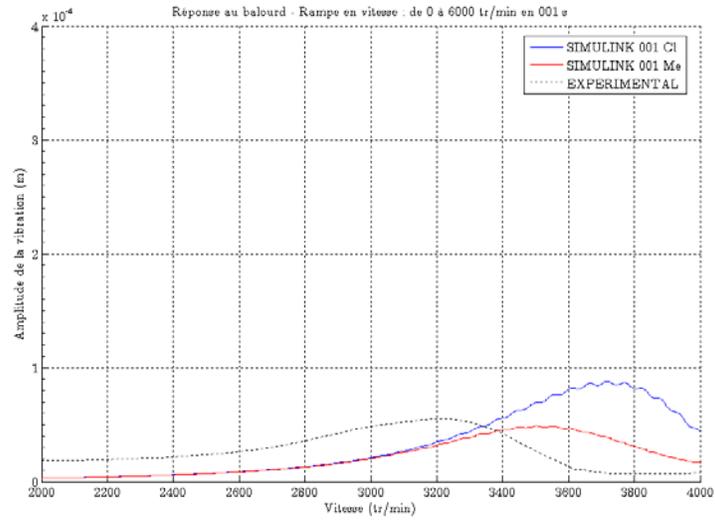
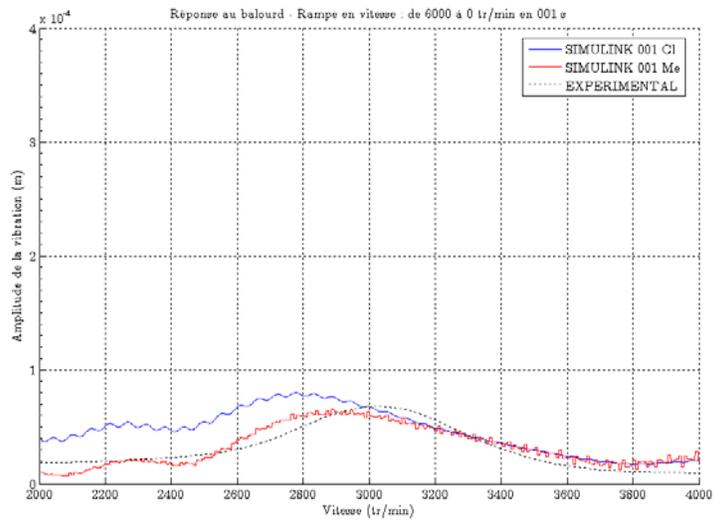


Figure 151 : $i = 4$, descente

Figure 152 : $i = 5$, montéeFigure 153 : $i = 5$, descente

III.5 Conclusion

Le modèle éléments finis du rotor a été conçu à partir de la géométrie du dispositif expérimental. Un recalage efficace des fréquences du modèle par rapport à celle du dispositif expérimental a été effectué.

Les réponses en transitoire du modèle classique ont été étudiées et comparées aux réponses expérimentales. Les différences au niveau de l'amplitude maximale des vibrations peuvent être aisément réduite significativement à l'aide du modèle métrique.

Néanmoins, comme la vitesse critique dépend de la rampe considérée, un recalage des fréquences du modèle en régime permanent (balayage sinus , voir paragraphe III.2.5.b) n'est pas suffisant pour obtenir une adéquation calcul-mesure satisfaisante en transitoire.

Conclusions et Perspectives

La mise en œuvre de la méthode métrique dans le cas de systèmes continus a nécessité de nombreux développements logiciels, qu'il s'agissent du domaine de la simulation numérique, de l'acquisition expérimentale ou bien du calcul éléments finis. L'utilisation conjointe de ces trois domaines d'activité a aussi conduit à la mise en place d'outils de transfert de données et de passerelles entre appareils.

La validation et la précision des outils a toujours été prise en compte, conjointement à un souci d'ergonomie d'utilisation et de convivialité des interfaces. Une attention particulière a été portée sur l'importance du transfert du savoir-faire, d'où la création de notices d'utilisation et ma mise en place d'exemples de démonstration.

L'étude approfondie du comportement d'un système à un degré de liberté en régime transitoire a montré, à la suite de nombreuses confrontations calcul-mesure, que la variation rapide de la fréquence d'excitation n'est pas un paramètre suffisant pour mettre en évidence une quelconque influence sur la métrique.

La méthode métrique offre néanmoins, à l'aide du paramètre ρ , l'avantage d'une possibilité de recalage du modèle, en cas d'incertitude sur ses paramètres.

Une investigation expérimentale poussée a montré l'influence de la rampe de montée (ou descente) en vitesse sur un rotor flexible : la vitesse critique et l'amplitude à la résonance évoluent en fonction de celle-ci.

D'une part, les amplitudes maximales mesurées sont plus faibles que celles prédites par un modèle éléments finis, même soigneusement recalé. La méthode métrique permet dans ce cas de recalculer efficacement par rapport à l'expérimental et d'obtenir ainsi par le calcul, les amplitudes expérimentales.

En effet, la méthode métrique permet, en courbant l'espace-temps, d'introduire un amortissement variable dans le modèle, et en particulier plus important après la résonance afin de limiter l'amplitude des vibrations calculées par le modèle.

D'autre part, les vitesses critiques évoluent dans le sens de la rampe et, prenant en considération à la fois la montée et la descente, donnent naissance à une fenêtre de vitesses critiques dont il faut tenir compte lors d'un éventuel dimensionnement de machine.

La méthode métrique, et en particulier l'idée originale de réécrire les équations du mouvement d'un système dynamique à partir de la métrique de l'espace-temps mets à jour un outil versatile dont les applications peuvent être nombreuses. L'établissement des équations du mouvement reste néanmoins délicate, en particulier au niveau du choix de la forme des coefficients de la métrique pour satisfaire aux équations d'Einstein.

Le recalage du paramètre ρ est bien entendu un élément qu'il faudrait automatiser. L'utilisation de réseaux de neurones, associée à la logique floue, peut être un moyen efficace pour en déterminer la valeur, notamment dans le cas de systèmes continus.

L'étude du rotor en transitoire a été riche de conclusions, et a notamment montré l'efficacité de l'adimensionnement des grandeurs, dont il faudrait généraliser l'emploi, notamment dans le cas d'une mobilisation importante de moyens de calcul et d'une recherche de compréhension des phénomènes. Le dispositif expérimental associé aux outils de traitement et de calcul développés, offrent, grâce à leur modularité, leur validation et leur convivialité le moyen de poursuivre plus en avant l'étude d'un rotor flexible. L'étude de l'influence de l'effet gyroscopique et des dissymétries en transitoire rapide semble être une étude future intéressante à mener.

Références bibliographiques

- ADAMS, M. L. J.** (2001). *Rotating machinery vibration*, Marcel Dekker.
- ADLER, R., BAZIN, M. et al.** (1965). *Introduction to general relativity*. USA, McGraw-Hill.
- AL MAJID, A.** (2002). *Dissipation de l'énergie en mécanique vibratoire : opérateur d'hystérésis - phénomène métrique*. *Laboratoire de Dynamique des Machines et des Structures*. Villeurbanne, INSA de Lyon: 162.
- AL MAJID, A., ALLEZY, A. et al.** (2005 (acceptée)). "*Metric Damping of MDOF Systems in High Transient Motion*." *Journal of Vibration and Acoustics* **VIB-03-1039**.
- AL MAJID, A. et DUFOUR, R.** (2003). "*Damping in high transient motion*." *Journal of Vibration and Acoustics* **125**: 223-227.
- ALAUZE, C.** (1998). *Equilibrage actif des Machines Tournantes : Application aux Grandes Lignes d'arbres*. Villeurbanne, INSA de Lyon.
- APPELQUIST, T., CHODOS, A. et al.** (1987). *Modern Kaluza-Klein theories vol I et II*. Menlo Park, California, Addison-Wesley Publishing Company.
- BAUSSET, M.** (1982). *Dynamiques Principes classiques et relativistes milieux solides et indéformables*. Paris, Hermann.
- BISHOP, R. E. D. et GLADWELL, G. M. L.** (1959). "*The vibration and balancing of an unbalance flexible rotor*." *Journal of Mechanical Engineering for Science* **1**: 66-77.
- CHILOV, G.** (1975). *Analyse mathématique - Fonctions de plusieurs Variables réelles 1ère et 2ème parties*. Moscou, Editions MIR.
- DOUBROUVINE, B., NOVIKOV, S. et al.** (1979). *Géométrie contemporaine - Méthodes et Applications* 'première partie' *géométrie des surfaces, des groupes de transformations et des champs*. Moscou, Editions MIR.
- DUFOUR, R., DER HAGOPIAN, J. et al.** (1995). "*Transient and steady state dynamic behaviour of single cylinder compressors : prediction and experiments*." *Journal of Sound and Vibration* **181**(1): 23-41.
- EINSTEIN, A.** (1971). *La théorie de la relativité restreinte et générale*, Gauthier-Villars.
- EINSTEIN, A.** (1971). *Quatre conférences sur la théorie de la relativité faites à l'université de Princeton*. Paris, Gauthier-Villars.
- ELBAZ, E.** (1986). *Relativité générale et gravitation*, ellipses-marketing.

- EVAN-IWANOWSKI, R. M.** (1976). *Resonance oscillations in mechanical systems*. Amsterdam, Elsevier scientific publishing company.
- FOCK, V.** (1961). *The theory of space, time and gravitation*. Oxford, Pergamon Press.
- GJIKA, K.** (1994). *Comportement dynamique de structures localement non linéaires - cas des suspensions*. Laboratoire de Dynamique des Machines et des Structures. Villeurbanne, INSA de Lyon: 114.
- GOODMAN, T. P.** (1964). "A Least-Squares Method for Computing Balance Corrections Masses." ASME Journal of Engineering for Industry: 273-279.
- GURTIN, M. E.** (2000). *Configuration forces as basic concepts of continuum physics*. New York, springer.
- IRRETIER, H. et BALASHOV, D.** (1999). *Transient resonance oscillations of a mechanical system with regard to non linear damping effect*. ASME Conference on Mechanical Vibration and Noise DET99.
- ISMEURT, O.** (1995). *Contribution à l'étude de l'influence du frottement rotor/stator sur le comportement dynamique des machines tournantes*. Laboratoire de Dynamique des Machines et des Structures. Villeurbanne, INSA de Lyon: 228.
- JONES, D. G.** (2001). *Handbook of viscoelastic vibration damping*. Arizona, John Wiley.
- KRÄMER, E.** (1993). *Dynamics of Rotors and foundations*. Berlin, Springer-Verlag.
- LACROIX, J.** (1988). *Comportement dynamique d'un rotor au passage d'une vitesse critique*. Laboratoire de Dynamique des Machines et des Structures. Villeurbanne, INSA de Lyon: 161.
- LALANNE, M., BERTHIER, P. et al.** (1983). *Mechanical vibrations for engineers*. Belfast, Northern Ireland, John Wiley & Sons.
- LALANNE, M. et FERRARIS, G.** (1998). *Rotordynamics Prediction in Engineering*. Baffin's Lane, Chichester, John Wiley & Sons.
- LEITE LOPES, J.** (1993). *Théorie relativiste de la gravitation*. Paris, Masson.
- LEWIS, F. M.** (1932). *Vibration during acceleration through a critical speed*. 2nd national Meeting of the ASME Applied mechanics division, new haven, Connecticut USA.
- LUND, J. W. et TONNESEN, J.** (1972). "Analyses and experiments on multiplane balancing of a flexible rotor." ASME Journal of Engineering for Industry **94**: 233-242.
- MAHFOUDH, J.** (1990). *Contribution à l'équilibrage de machines tournantes*. Villeurbanne, INSA de Lyon: 139.
- MAHFOUDH, J., DER HAGOPIAN, J. et al.** (1988). "Equilibrage Multiplans-Multivitesse avec des contraintes Imposées sur les déplacements." *Matériaux Mécanique Electricité* **427**(38-42).
- MC COMB, W. D.** (1999). *Dynamics and Relativity*.

- MITROPOL'SKI, Y., A.** (1964). Problems of the asymptotic theory of nonstationary vibrations. Moscow, Nauka.
- NASHIF, A. D., JONES, D. I. G. et al.** (1985). Vibration Damping. New York, Wiley.
- PALMGREN, A.** (1967). Les roulements, descriptions, théorie, applications. SKF PARIS: 120.
- PARKINSON, A. G., DARLOW, M. S. et al.** (1980). "A Theoretical Introduction to the Development of a Unified Approach to Flexible Rotor Balancing." Journal of Sound and Vibration **68**: 489-506.
- PUGNET, J.-M.** (1998). "Equilibrage des rotors rigides et flexibles." Techniques de l'ingénieur **BM 5**(130): 1-15.
- SAITO, S. et AZUMA, T.** (1981). "Balancing of flexible rotors by the complex modal method." ASME Journal of Mechanical Design **105**: 94-105.
- TALPAERT, Y.** (1993). Leçons et Applications de Géométrie différentielle et de Mécanique analytique. Toulouse, Cépaduès Editions.
- TIMOSHENKO, S.** (1955). Vibration problems in engineering. new york, van nostrand reinhold company.
- VYAS, S., GUPTA, K. et al.** (1987). Transient Response of Turbine Blade. The Theory of Machines and Mechanisms - Seventh World Congress, Sevilla, Spain, BAUTISTA, Emilio; GARCIA-LOMAS, Javier; NAVARRO, Alfredo.
- ZHOU, S. et SHI, J.** (2002). "Optimal one-plane active balancing of a rigid rotor during acceleration." Journal of Sound and Vibration **249**(1): 196-205.
- ZHOU, S. et SHI, S.** (2001). "Active balancing and vibration control of rotating machinery: a survey." The Shock and Vibration Digest **5**: 361-371.

Annexes

A La gravitation, phénomène métrique – coordonnées cartésiennes

Ce paragraphe montre que l'effet de champ de gravitation de force peut être traduit par l'équation de la géodésique du mouvement si la métrique d'espace diffère un peu de la métrique de Minkowski.

Ainsi une métrique indépendante du temps est considérée en (265).

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon\gamma_{\mu\nu} \quad (265)$$

η est le tenseur de la métrique de Minkowski.

$\varepsilon\gamma_{\mu\nu}$ est une très petite perturbation indépendante du temps qui est due à la présence de la gravitation, $\varepsilon \ll 1$.

Le jeu de coordonnées (266) est considéré.

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \quad (266)$$

La vitesse v est définie par (267).

$$v = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}} \quad (267)$$

Le coefficient β est défini par (268).

$$\beta = \frac{v}{c} \quad (268)$$

(269) donne alors (270) puis en première approximation (271).

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + \varepsilon\gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (269)$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = c^2 - v^2 + \varepsilon\gamma_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = c^2 \left(1 - \beta^2 + \varepsilon\gamma_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dx^0} \frac{dx^\nu}{dx^0}\right) \quad (270)$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \simeq c^2 (1 + \varepsilon\gamma_{00}) \quad (271)$$

La même approximation est effectuée pour l'équation des géodésiques, les relations (272) étant écrites, l'équation des géodésiques devient, en première approximation (273).

$$\begin{aligned} \frac{dx^\eta}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} &= \frac{dx^\eta}{dt} \frac{dx^\sigma}{dt} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \simeq \frac{dx^\eta}{dt} \frac{dx^\sigma}{dt} \frac{1}{c^2 (1 + \varepsilon\gamma_{00})} \\ \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} &= \frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} \frac{1}{c^2 (1 + \varepsilon\gamma_{00})} \end{aligned} \quad (272)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} + \Gamma_{\eta\rho}^\alpha \frac{dx^\eta}{dt} \frac{dx^\rho}{dt} &= 0 \\ \frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} + \Gamma_{00}^\alpha \left(\frac{dx^0}{dt}\right)^2 &= 0 \\ \frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} + \Gamma_{00}^\alpha c^2 &= 0 \end{aligned} \quad (273)$$

Le calcul des symboles de Christoffel donne (274).

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^l &= \frac{1}{2} g^{lq} \left(2 \frac{\partial g_{0q}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^q} \right) = -\frac{1}{2} g^{lq} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^q} \\ \Gamma_{00}^l &= -\frac{1}{2} \varepsilon (\eta_{lq} - \varepsilon\gamma_{lq}) \frac{\partial \gamma_{00}}{\partial x^q} \simeq -\frac{1}{2} \varepsilon \eta_{lq} \frac{\partial \gamma_{00}}{\partial x^q} \\ \Gamma_{00} &\simeq -\frac{1}{2} \varepsilon \eta \nabla \gamma_{00} \end{aligned} \quad (274)$$

(275) est alors obtenue.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^0}{dt^2} &= 0 \\ \frac{d^2 x^l}{dt^2} &= \frac{1}{2} \varepsilon \eta_{lq} \frac{\partial \gamma_{00}}{\partial x^q} c^2 \Leftrightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = -\varepsilon \frac{c^2}{2} \nabla \gamma_{00} \end{aligned} \quad (275)$$

En utilisant la notation vectorielle, (275) devient (276).

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\nabla \Phi \\ x &= (x^1, x^2, x^3) \end{aligned} \quad (276)$$

Cette équation est identique (principe d'équivalence d'Einstein) à l'équation de Newton qui décrit le mouvement dans un champ de gravitation qui dérive du potentiel scalaire massique classique Φ , $[\Phi] = m^2 \cdot s^{-2}$.

$$\Phi = \frac{c^2}{2} \varepsilon \gamma_{00} \quad (277)$$

Donc pour un potentiel donné, le mouvement d'une particule va être sur une géodésique de dimension quatre. Le terme g_{00} de la métrique a la forme donnée en (278).

$$g_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2} \quad (278)$$

B Equations de champs d'Einstein

B.1 Poisson – espace plein

Entre la mécanique classique et la relativité générale, deux analogies peuvent être établies.

L'une au niveau du potentiel : Φ représente le potentiel massique classique et g le potentiel relativiste.

L'autre au niveau de la force : $-\nabla\Phi$ représente la force massique classique et Γ la force relativiste.

En mécanique classique, Poisson a établi la relation (279).

$$\Delta\Phi = 4\pi\rho G \quad (279)$$

ρ est un scalaire qui représente la densité de la matière, $[\rho] = kg.m^{-3}$.
 $G = 6.67 \times 10^{-11} m^3.s^{-2}.kg^{-1}$ est la constante de gravitation générale.

Pour aller plus loin, (278) permet d'écrire (280)

$$\Delta g_{00} = \frac{8\pi G}{c^2} \rho \quad (280)$$

Pour trouver les équations de champs d'Einstein, il faudrait trouver une équation qui serait l'analogie de l'équation de Poisson en mécanique classique. Le membre de gauche devra avoir un sens purement géométrique. Celui de droite devra exprimer la distribution de matière et d'énergie, un candidat idéal est le tenseur d'énergie impulsion T . Le schéma « fluide parfait » est choisi et présenté en (281).

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= p(u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu}) + \rho c^2 u^\mu u^\nu \\ T^{\mu\nu} &= (p + \rho c^2) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - p g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (281)$$

Avec p la pression, $[p] = kg.m^{-1}.s^{-2}$, et ρ_e la densité d'énergie, $[\rho_e] = kg.m^{-1}.s^{-2}$. Compte tenu de (265) et (271), (281) donne, en première approximation, les résultats (282).

$$\begin{aligned}
T^{\mu\nu} &= \left(\frac{p}{c^2} + \rho \right) \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} - p(\eta_{\mu\nu} - \varepsilon\gamma_{\mu\nu}) \\
\mu \neq \nu &\Rightarrow T^{\mu\nu} = \rho \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \simeq 0 \\
T^{\mu\mu} &= \left(\frac{p}{c^2} + \rho \right) \left(\frac{dx^\mu}{dt} \right)^2 - p(\eta_{\mu\mu} - \varepsilon\gamma_{\mu\mu}) \\
\mu = 0 &\Rightarrow T^{00} = p + \rho c^2 - p = \rho c^2 \\
\mu \neq 0 &\Rightarrow T^{\mu\mu} = p
\end{aligned} \tag{282}$$

Dans un espace plein, les équations du champ doivent donc être de la forme (283).

$$S^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu} \tag{283}$$

κ , $[\kappa] = kg^{-1}.m^{-1}.s^2$ est une constante à déterminer. $S^{\mu\nu}$ est un tenseur symétrique d'ordre deux, fonction des $g^{\mu\nu}$ et de leurs dérivées et, les propriétés de T se répercutant sur S , de divergence nulle et, en première approximation, diagonal. Elie CARTAN a montré en 1922 l'unicité du tenseur vérifiant ces propriétés : c'est le tenseur d'Einstein $G^{\mu\nu}$ défini par (284).

$$G^{\mu\nu} = h \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (R + 2\Lambda) \right) \tag{284}$$

Du fait de l'introduction de la constante κ , h peut toujours être considéré égal à un ; ce qui permet d'écrire (285)

$$\begin{aligned}
G^{\mu\nu} &= R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (R + 2\Lambda) \\
\mu \neq \nu &\Rightarrow G^{\mu\nu} = 0 \\
G^{\mu\mu} &= R^{\mu\mu} - \frac{1}{2} g^{\mu\mu} (R + 2\Lambda) \\
\mu = 0 &\Rightarrow G^{00} = R^{00} - \frac{1}{2} g^{00} (R + 2\Lambda) \\
\mu \neq 0 &\Rightarrow G^{\mu\mu} = R^{\mu\mu} - \frac{1}{2} g^{\mu\mu} (R + 2\Lambda)
\end{aligned} \tag{285}$$

La contraction de (283) donne (286) puis (287)

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (R + 2\Lambda) g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} &= \kappa g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \\
R - \frac{1}{2} (R + 2\Lambda) 4 &= \kappa T \\
-(R + 4\Lambda) &= \kappa T
\end{aligned} \tag{286}$$

$$R^{\mu\nu} = \kappa \left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(T + \frac{2\Lambda}{\kappa} \right) \right) \tag{287}$$

Poursuivons l'analogie pour déterminer κ

$$R^{00} = \kappa \left(\frac{\rho c^2 - 3p}{2} - \frac{\Lambda}{\kappa} \right) \quad (288)$$

Le tenseur d'Einstein étant défini par (284), les relations (289) et (290) sont considérées.

$$R_{00} = g^{\lambda\lambda} R_{\lambda 0 \lambda 0} \quad (289)$$

$$R = \sum_{\mu=0}^3 R_{\mu\mu} = \sum_{\mu=0}^3 g^{\lambda\sigma} R_{\lambda\mu\sigma\mu} = \sum_{\mu=0}^3 (g^{\lambda\lambda} R_{\lambda\mu\lambda\mu}) \quad (290)$$

Le tenseur de courbure est ensuite exprimé en fonction des coefficients de la métrique.

$$R_{\lambda\mu\nu k} = g_{\lambda\rho} R_{\rho\mu\nu k} \quad (291)$$

$$R_{\rho\mu\nu k}^{\rho} = (\Gamma_{k\mu}^{\rho})_{,\nu} - (\Gamma_{\nu\mu}^{\rho})_{,k} + \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} \Gamma_{\lambda k}^{\rho} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\rho} \Gamma_{k\mu}^{\lambda} \quad (292)$$

Ce qui permet d'aboutir enfin à (293).

$$R_{\lambda\mu\nu k} = \frac{1}{2} (g_{\lambda\mu,k\nu} - g_{\mu\nu,k\lambda} - g_{\lambda k,\mu\nu} + g_{\mu k,\nu\lambda}) + g_{\eta\rho} (\Gamma_{\nu\lambda}^{\eta} \Gamma_{\mu k}^{\rho} - \Gamma_{k\lambda}^{\eta} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}) \quad (293)$$

Comme le champ est faible et statique, l'hypothèse d'une métrique de la forme (265) est toujours prise en compte. Le tenseur de courbure est donc limité à sa partie linéaire (294).

$$R_{\lambda\mu\nu k} = \frac{1}{2} (g_{\lambda\mu,k\nu} - g_{\mu\nu,k\lambda} - g_{\lambda k,\mu\nu} + g_{\mu k,\nu\lambda}) \quad (294)$$

Sachant que la métrique ne dépend pas du temps, et donc ne dépend pas de x^0 , les calculs donnent (295).

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\lambda\mu} &= \frac{1}{2} (-g_{\lambda\mu,\mu\lambda} + g_{\mu\mu,\lambda\lambda}) \\ R_{\lambda 0 \lambda 0} &= \frac{1}{2} g_{00,\lambda\lambda} \end{aligned} \quad (295)$$

Alors :

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{1}{2} g^{\lambda\lambda} g_{00,\lambda\lambda} \\ R_{00} &= \frac{1}{2} \Delta g_{00} \end{aligned} \quad (296)$$

D'où (288) devient (297).

$$\frac{8\pi G}{c^4} \rho = \kappa \left(\rho - \frac{3p}{c^2} - \frac{2\Lambda}{\kappa c^2} \right) \quad (297)$$

Lorsque $p = 0$ (schéma énergétique « matière pure ») et $\Lambda = 0$, la relation (298) est enfin obtenue.

$$\frac{8\pi G}{c^4} = \kappa \quad (298)$$

Les équations d'Einstein sont alors complètement déterminées : (299).

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (R + 2\Lambda) = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} \quad (299)$$

B.2 Laplace – espace vide

Les équations de champ d'Einstein s'établissent à partir d'équation de Laplace (300).

$$\Delta\Phi = 0 \quad (300)$$

Donc (300) devient (301).

$$\Delta g_{00} = 0 \quad (301)$$

Le tenseur énergie impulsion est nul.

$$T^{\mu\nu} = 0 \quad (302)$$

$$R^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} \Lambda \quad (303)$$

Si $\Lambda = 0$ alors le tenseur de Ricci est nul.

$$R^{\mu\nu} = 0 \quad (304)$$

C Notions tensorielles

C.1 Tenseur de premier rang

$$V_\mu = g_{\mu\nu}V^\nu \quad (305)$$

C.2 Tenseur de deuxième rang

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma}T^{\lambda\sigma} \quad (306)$$

C.3 Symboles de Christoffel

C.3.1 Symbole de Christoffel du premier genre

$$[\mu\nu, \lambda] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right) \quad (307)$$

La forme (308) est équivalente.

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right) \quad (308)$$

C.3.2 Symbole de Christoffel du second genre

Le symbole de Christoffel du second genre est un tenseur associé au symbole de Christoffel du premier genre.

$$\left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \mu\nu \end{array} \right\} = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\sigma} \right) = g^{\sigma\lambda} [\mu\nu, \sigma] \quad (309)$$

La forme (310) est équivalente.

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = -\frac{1}{2}g^{\sigma\lambda}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^{\sigma}}\right) = g^{\sigma\lambda}\Gamma_{\mu\nu\sigma} \quad (310)$$

C.4 Dérivation covariante

Soit $(P, u^1 \dots u^N)$ le repère curviligne de vecteurs unités $\vec{e}_k, k \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Si l'espace est plat, la direction des vecteurs de base est toujours la même, l'opération de dérivation n'affecte pas la direction de ces vecteurs. Si l'espace est courbe, par contre, la direction du vecteur \vec{e}_k change quand le passage d'un point à un point infiniment voisin est considéré.

Error! Objects cannot be created from editing field codes.

Figure 154 : base curviligne

La dérivation covariante permettra de conserver cette propriété.

Un champ scalaire ψ , défini en tout point x^μ est considéré. La dérivée partielle par rapport à x^μ est le gradient de ψ , qui est un vecteur covariant.

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} dx^\mu = \psi_{,\mu} dx^\mu = \partial_\mu \psi dx^\mu \quad (311)$$

Soit un vecteur V de composantes contra variantes V^μ donné par (312).

$$V = V^\mu \vec{e}_\mu \quad (312)$$

La dérivation donne (313) et (314).

$$dV = dV^\mu \vec{e}_\mu + V^\mu d\vec{e}_\mu \quad (313)$$

$$dV^\mu = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu = V^\mu_{,\nu} dx^\nu \quad (314)$$

La dérivée du vecteur de base peut être explicitée comme une combinaison linéaire des vecteurs de base, à l'aide du symbole de Christoffel.

$$d\vec{e}_\mu = -\Gamma_{\mu\nu}^\alpha dx^\nu \vec{e}_\alpha \quad (315)$$

(315) donne (316).

$$\begin{aligned} dV &= (V^\mu{}_{,\nu} - \Gamma_{\nu\sigma}^\mu V^\sigma) dx^\nu \vec{e}_\mu \\ dV &= V^\mu{}_{,\nu} dx^\nu \vec{e}_\mu \end{aligned} \quad (316)$$

La dérivée covariante du vecteur V^μ est la quantité DV^μ telle que (317) soit vérifiée.

$$\frac{DV^\mu}{dx^\nu} = V^\mu{}_{;\nu} = V^\mu{}_{,\nu} - \Gamma_{\nu\sigma}^\mu V^\sigma \quad (317)$$

Si l'espace est plat la dérivée covariante est la dérivée normale. Il est intéressant de définir la dérivation covariante, car elle est valable quel que soit le repère de référence.

C.5 Opérateurs vectoriels et dérivées covariantes

C.5.1 Gradient

S est un scalaire.

$$S_{;\mu} = \frac{\partial S}{\partial x^\mu} = S_{,\mu} \quad (318)$$

C.5.2 Rotationnel

$$V_{\mu;\nu} - V_{\nu;\mu} = V_{\mu,\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda V_\lambda - V_{\nu,\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda V_\lambda = V_{\mu,\nu} - V_{\nu,\mu} \quad (319)$$

C.5.3 Divergence

$$V^\mu{}_{;\mu} = V^\mu{}_{,\mu} - \Gamma_{\mu\lambda}^\mu V^\lambda \quad (320)$$

La divergence covariante d'un tenseur peut être calculée de façon analogue.

$$T^\mu{}_{;\mu} = T^\mu{}_{,\mu} - \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T^{\lambda\nu} - \Gamma_{\mu\lambda}^\nu T^{\mu\lambda} \quad (321)$$

C.6 Tenseur de courbure de Riemann

Après permutation des indices de dérivation covariante du second ordre, la valeur est changée. En effet, soit un vecteur V^α défini par (322).

$$V^\alpha_{;\beta} = V^\alpha_{,\beta} - \Gamma^\alpha_{\beta\eta} V^\eta \quad (322)$$

$$\begin{aligned} V^\alpha_{;\beta;\sigma} &= V^\alpha_{,\beta,\sigma} - \left(\Gamma^\alpha_{\beta\eta}\right)_{,\sigma} V^\eta - \Gamma^\alpha_{\beta\eta} V^\eta_{,\sigma} - \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} V^\mu_{,\beta} - \\ &\quad - \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} \Gamma^\mu_{\beta\eta} V^\eta + \Gamma^\lambda_{\beta\sigma} V^\alpha_{,\lambda} - \Gamma^\lambda_{\beta\sigma} \Gamma^\alpha_{\lambda\eta} V^\eta \end{aligned} \quad (323)$$

Si l'ordre de la dérivée est permuté, la relation (324) est obtenue.

$$\begin{aligned} V^\alpha_{;\sigma;\beta} &= V^\alpha_{,\sigma,\beta} - \left(\Gamma^\alpha_{\sigma\eta}\right)_{,\beta} V^\eta - \Gamma^\alpha_{\sigma\eta} V^\eta_{,\beta} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta} V^\mu_{,\sigma} - \\ &\quad - \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \Gamma^\mu_{\sigma\eta} V^\eta + \Gamma^\lambda_{\sigma\beta} V^\alpha_{,\lambda} - \Gamma^\lambda_{\sigma\beta} \Gamma^\alpha_{\lambda\eta} V^\eta \end{aligned} \quad (324)$$

La différence (323)-(324) donne (325) et (326).

$$V^\alpha_{;\beta;\sigma} - V^\alpha_{;\sigma;\beta} = R^\alpha_{\eta\beta\sigma} V^\eta \quad (325)$$

$$R^\alpha_{\eta\beta\sigma} = \left(\Gamma^\alpha_{\sigma\eta}\right)_{,\beta} - \left(\Gamma^\alpha_{\beta\eta}\right)_{,\sigma} + \Gamma^\lambda_{\beta\eta} \Gamma^\alpha_{\lambda\sigma} - \Gamma^\alpha_{\lambda\beta} \Gamma^\lambda_{\sigma\eta} \quad (326)$$

$R^\alpha_{\eta\beta\sigma}$ est le tenseur de courbure de Riemann.

Dans l'espace plat la relation (327) est vérifiée.

$$V^\alpha_{;\beta;\sigma} - V^\alpha_{;\sigma;\beta} = 0 \quad (327)$$

Un tenseur de Riemann nul constitue la condition nécessaire pour que l'espace soit plat. Le tenseur de Riemann possède les propriétés d'antisymétrie (voir (328)), il est entièrement covariant (voir (329)). Il vérifie aussi la relation (330).

$$R^\lambda_{\mu\nu\sigma} = -R^\lambda_{\mu\sigma\nu} \quad (328)$$

$$R^\lambda_{\lambda\mu\nu\eta} = g_{\lambda\sigma} R^\sigma_{\mu\nu\eta} \quad (329)$$

$$R^\lambda_{\mu\nu\sigma} + R^\lambda_{\nu\sigma\mu} + R^\lambda_{\sigma\mu\nu} = 0 \quad (330)$$

Identité de Bianchi est présentée en (331).

$$R_{\lambda\mu\nu\sigma ; \eta} + R_{\lambda\mu\nu\sigma ; \sigma} + R_{\lambda\mu\sigma\eta ; \nu} = 0 \quad (331)$$

C.7 Tenseur de Ricci

Par contraction de deux indices du tenseur de Riemann un tenseur de rang deux symétrique est obtenu, c'est le tenseur de Ricci.

$$R_{\mu\nu} = g^{\lambda\sigma} R_{\lambda\mu\sigma\nu} \quad (332)$$

$$R_{\mu\nu} = (\Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma})_{,\nu} - (\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma})_{,\sigma} + \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\lambda}^{\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \quad (333)$$

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} \quad (334)$$

La contraction de tenseur de Riemann est unique.

C.8 Espace de Riemann

C'est l'espace défini par la métrique g . $g^{\mu\nu}$ est la métrique conjuguée de $g_{\mu\nu}$.

$$g^{\mu\nu} = \frac{G(\mu, \nu)}{\text{Det}(g)} \quad (335)$$

$G(\mu, \nu)$ est le déterminant mineur de $g_{\mu\nu}$. Tous les espaces de Riemann, qui sont donc des espaces courbes, vérifient donc la propriété (336).

$$g_{\mu\nu} g^{\lambda\nu} = \delta_{\mu}^{\lambda} \quad (336)$$

Si de plus le système curviligne est orthogonal, la relation (337) est obtenue.

$$\vec{e}_j \vec{e}_k = \delta_{jk} \quad (337)$$

Alors, la métrique est une matrice diagonale.

$$\forall j \neq k, g_{jk} = 0 \quad (338)$$

C.9 Espace euclidien & pseudo euclidien

L'espace est euclidien s'il vérifie (339).

$$g_{jk} = \delta_{jk} \quad (339)$$

L'espace est pseudo-euclidien si au moins un des termes diagonaux $g_{jj} = -1$ et tous les termes extra-diagonaux $g_{jk} = 0$. L'espace de Minkowski, utilisé en relativité restreinte, est un espace plat. Sa métrique est donnée en (340).

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (340)$$

D Plans du banc rotor

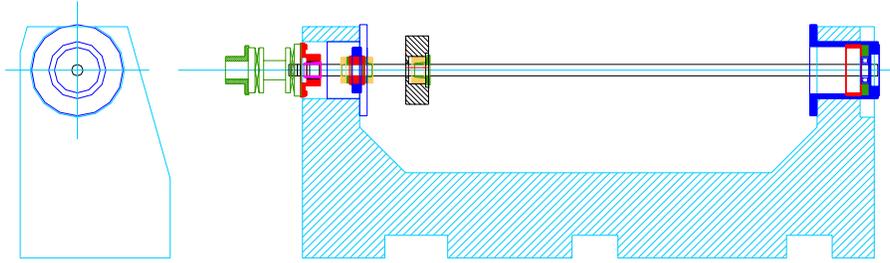


Figure 155 : rotor + bâti - face

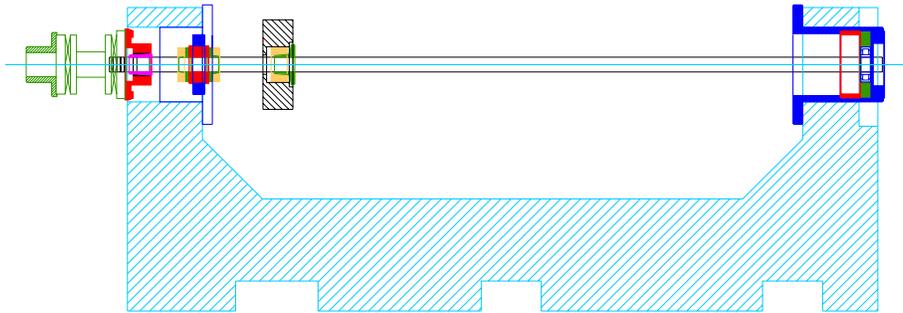


Figure 156 : rotor + bâti

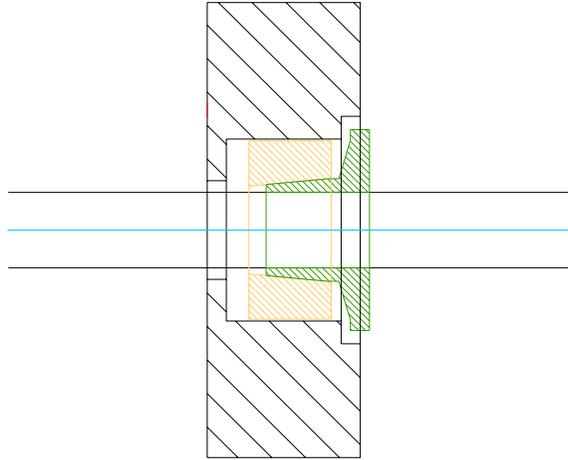


Figure 157 : disque + frettes

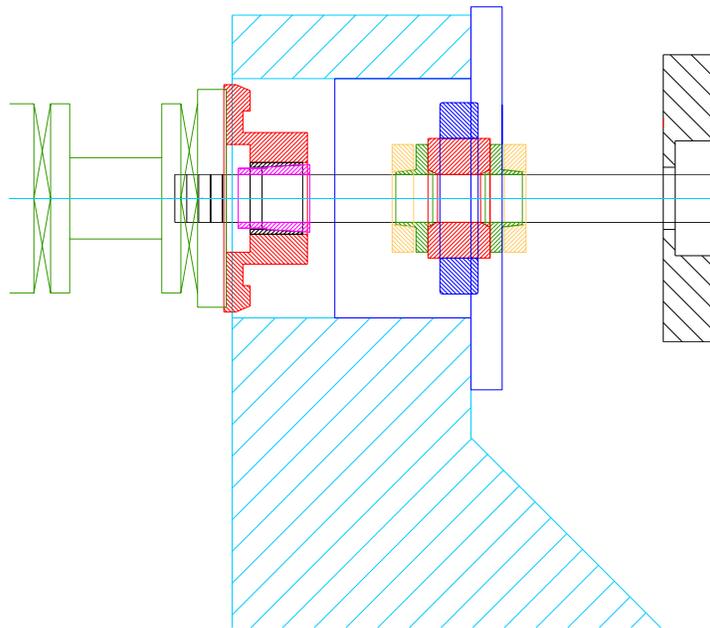


Figure 158 : palier côté moteur

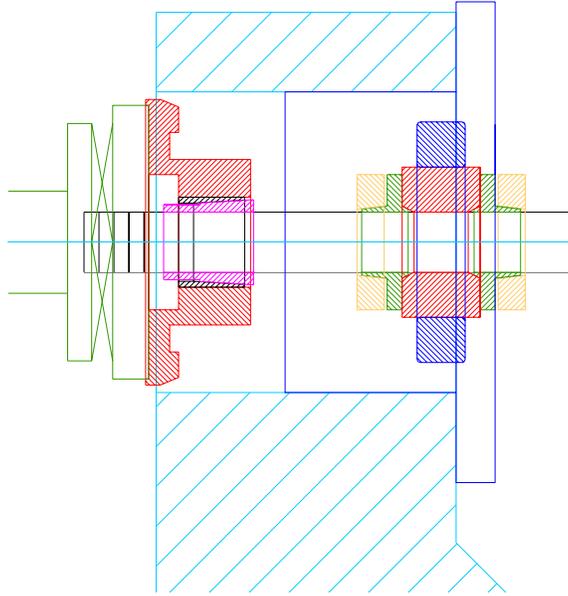


Figure 159 : palier côté moteur zoom

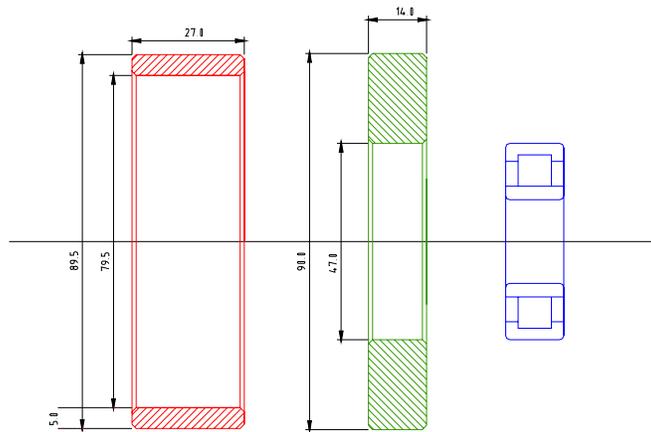


Figure 160 : usinage palier côté opposé au moteur

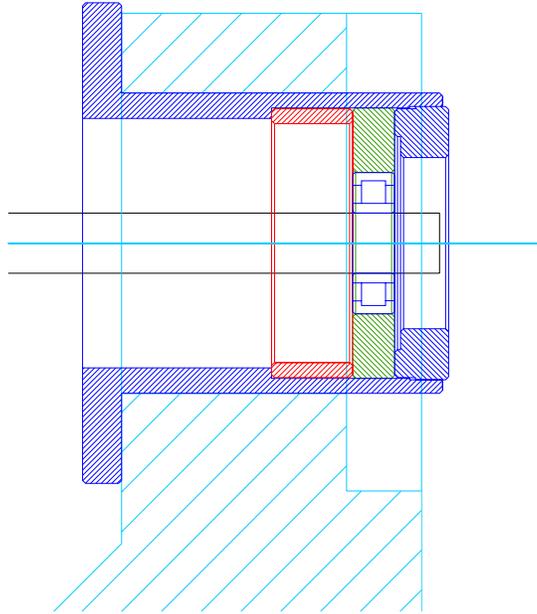


Figure 161 : palier côté opposé au moteur

E Etalonnage des capteurs à courant de Foucault du rotor (CDCF)

Les CDCF sont étalonnés en face du même métal que celui qu'il auront en regard lors des essais ultérieurs sur la machine (métal de l'arbre pour $C1$ et $C2$, métal du disque pour $C3$ et $C4$). Les résultats de l'étalonnage des CDCF est présenté figures 162 et 163. Sur ces figures, les zones linéaires et non linéaire de fonctionnement sont clairement identifiables. Pour un positionnement optimal du CDCF sur la machine, il suffira de s'assurer que la tension aux bornes du CDCF correspond bien au milieu de la zone linéaire de celui-ci.

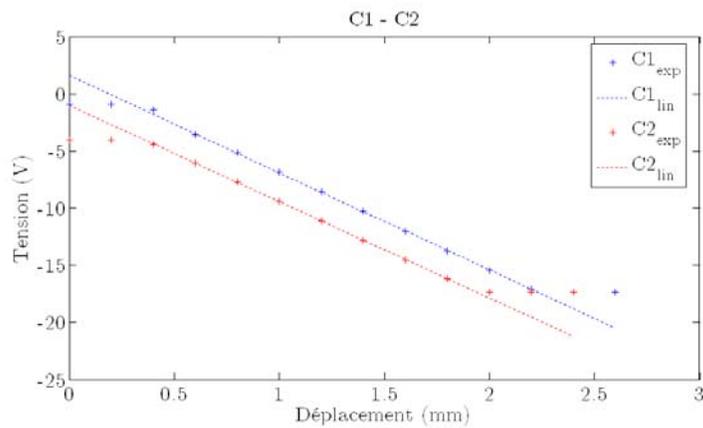


Figure 162 : étalonnage des CDCF TQ102

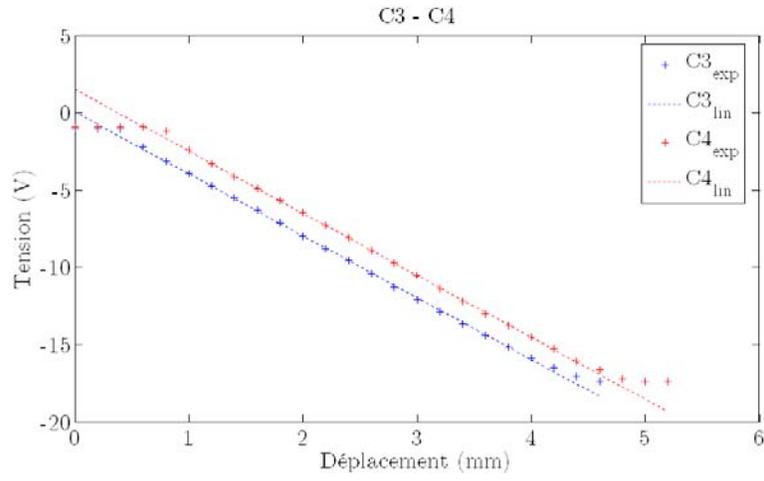


Figure 163 : étalonnage des CDCF TQ103

Après régression linéaire, les sensibilités des CDCF est déterminée.

F Exemples de rotors étudiés en régime permanent

F.1 Rotor p117_f53

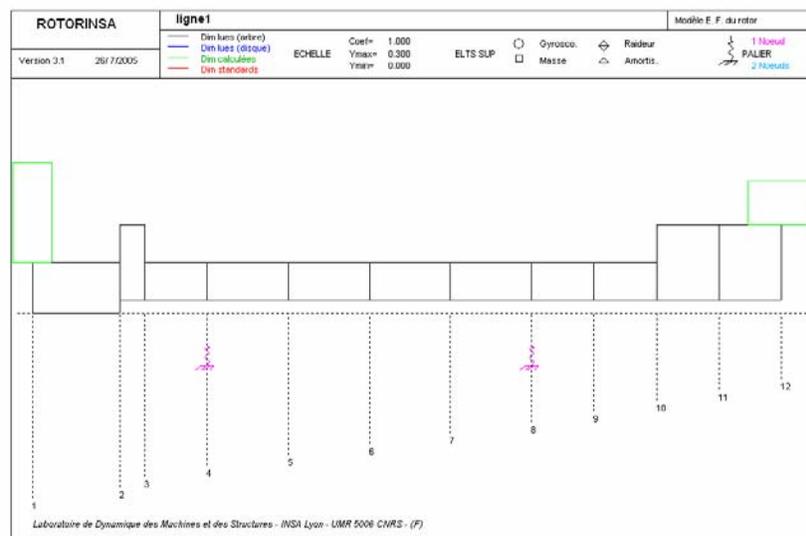


Figure 164 : modèle EF

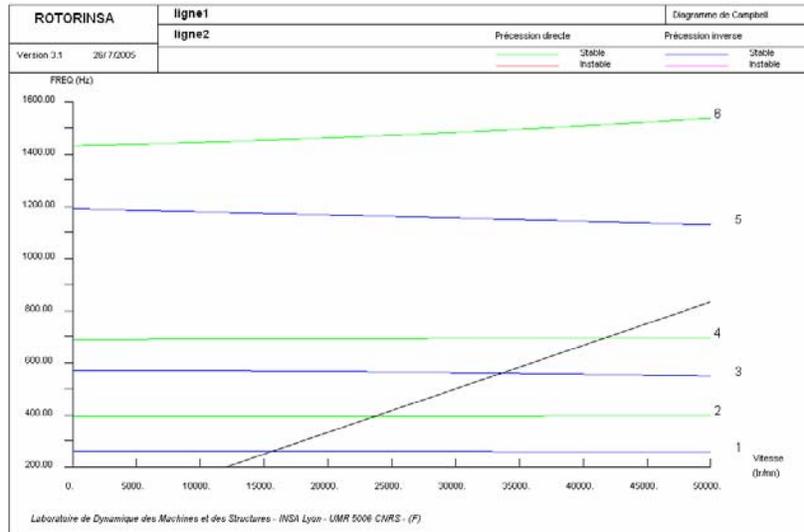


Figure 165 : diagramme de Campbell

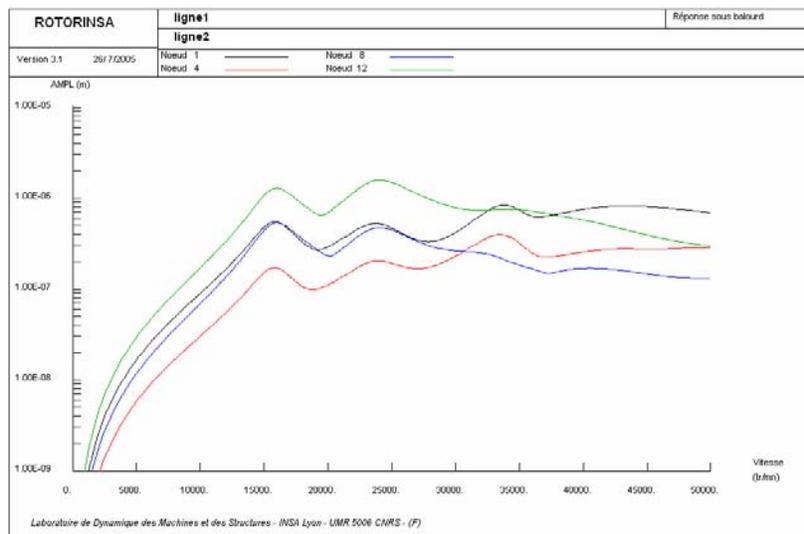


Figure 166 : réponse au balourd ROTORINSA

La figure 167 montre l'adéquation quasi parfaite entre la réponse en régime permanent donnée par ROTORINSA et celle donnée par le programme MATLAB-SIMULINK dans le cas d'un régime transitoire lent (1 Hz/s).

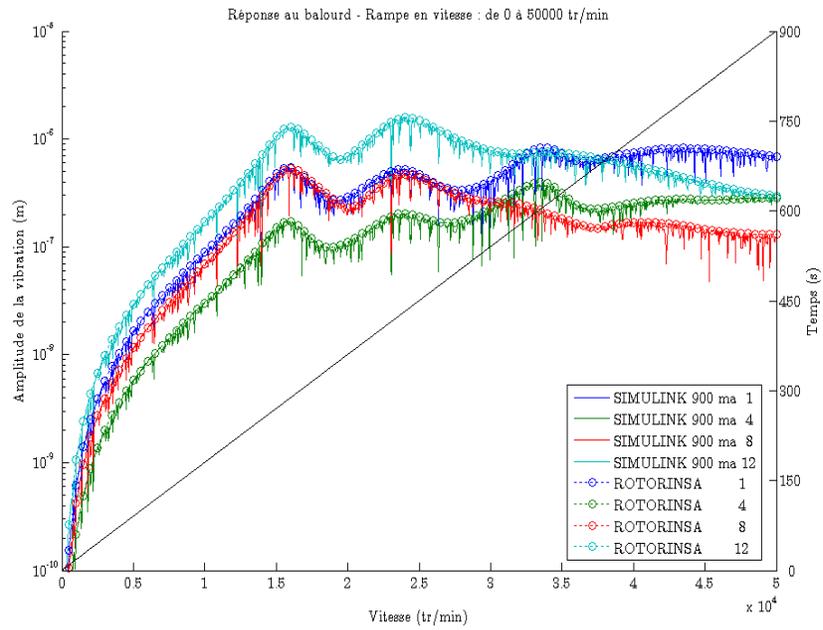


Figure 167 : réponses au balourd ROTORINSA et MATLAB-SIMULINK de 0 à 50000 tr/min en 900 s

F.2 Rotor p147_7.1

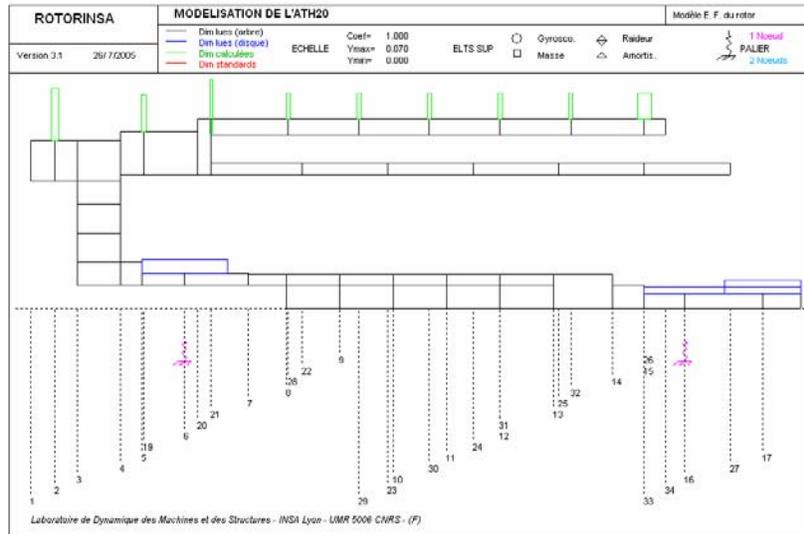


Figure 168 : modèle EF

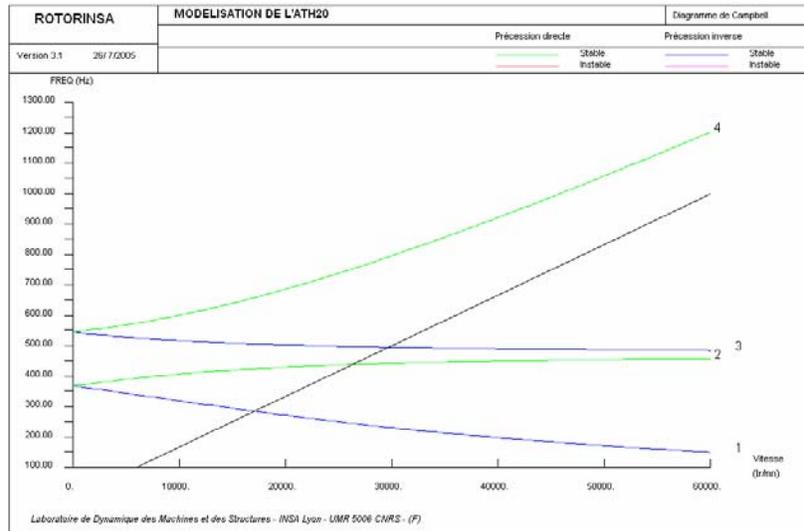


Figure 169 : diagramme de Campbell

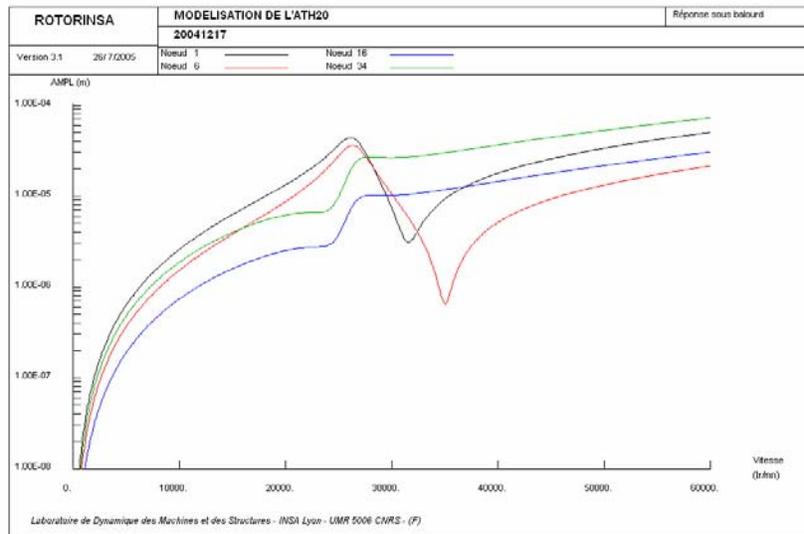


Figure 170 : réponse au balourd

La figure 171 montre l'adéquation quasi parfaite entre la réponse en régime permanent donnée par ROTORINSA et celle donnée par le programme MATLAB-SIMULINK dans le cas d'un régime transitoire lent (3 Hz/s).

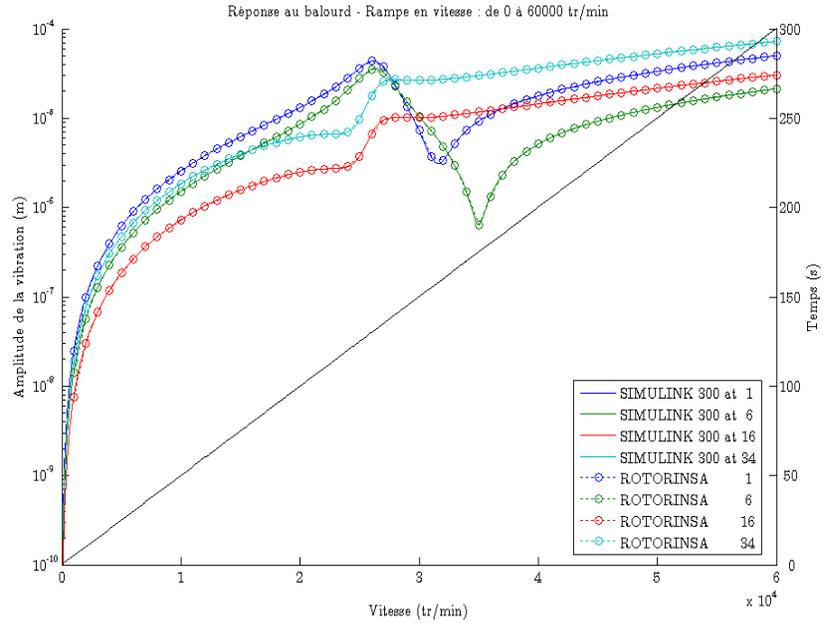


Figure 171 : réponses au balourd ROTORINSA et MATLAB-SIMULINK de 0 à 60000 tr/min en 300 s

G Exemples de rotors étudiés en régime transitoire

G.1 Rotor p012_f21

Le rotor étudié dans cette partie est le rotor p012_f21. Il est présenté figure 73. Il a été étudié précédemment (voir [LALANNE, M. et FERRARIS, G. 1998]) et permet, outre d'observer le comportement d'un rotor simple en transitoire de vitesse, de valider l'outil développé sur MATLAB-SIMULINK.

La géométrie de ce rotor a été retranscrite avec le préprocesseur de ROTORINSA et la modélisation éléments finis est présentée figure 172.

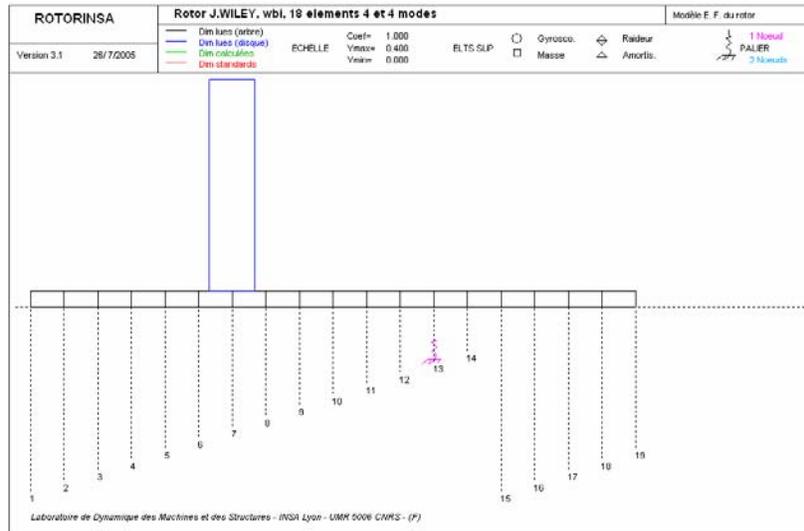
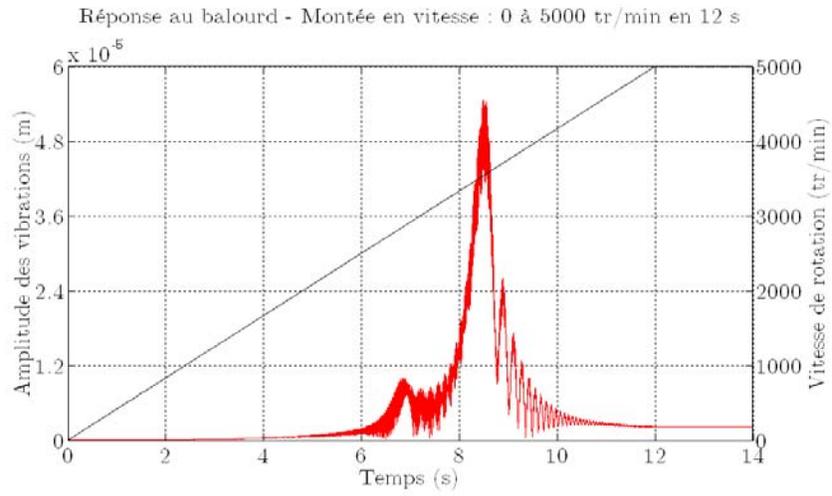
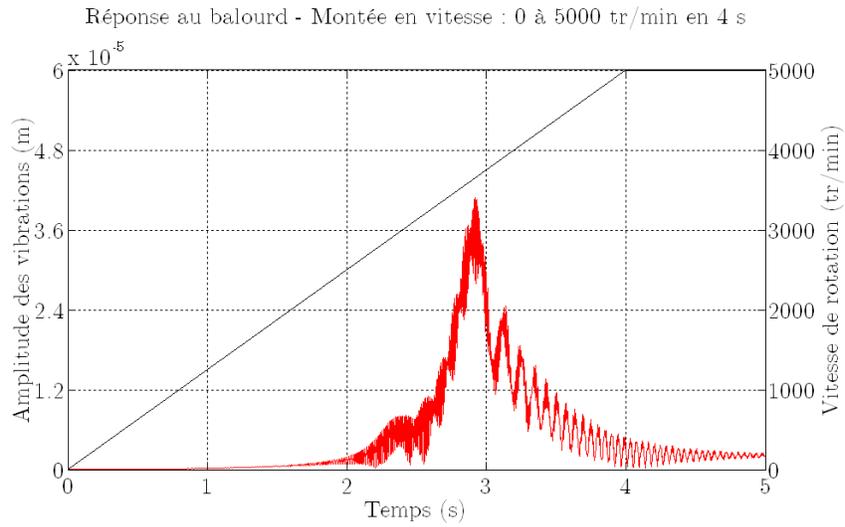
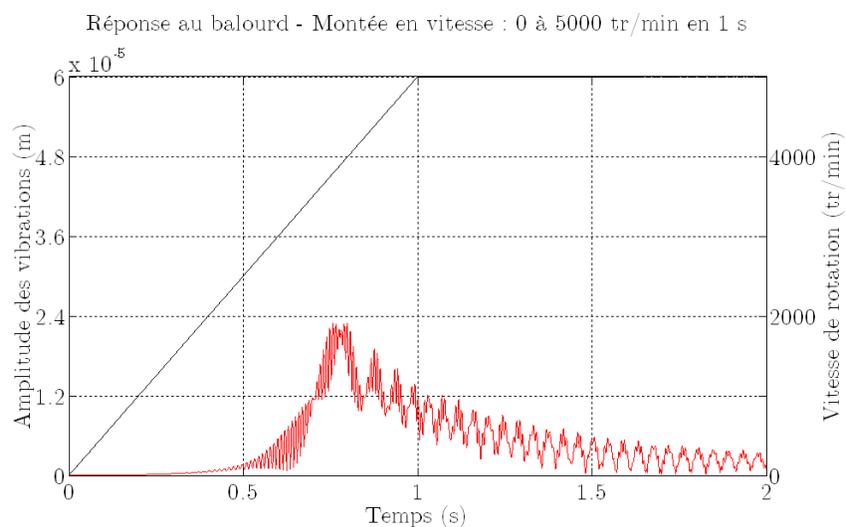


Figure 172 : modèle EF 18 éléments

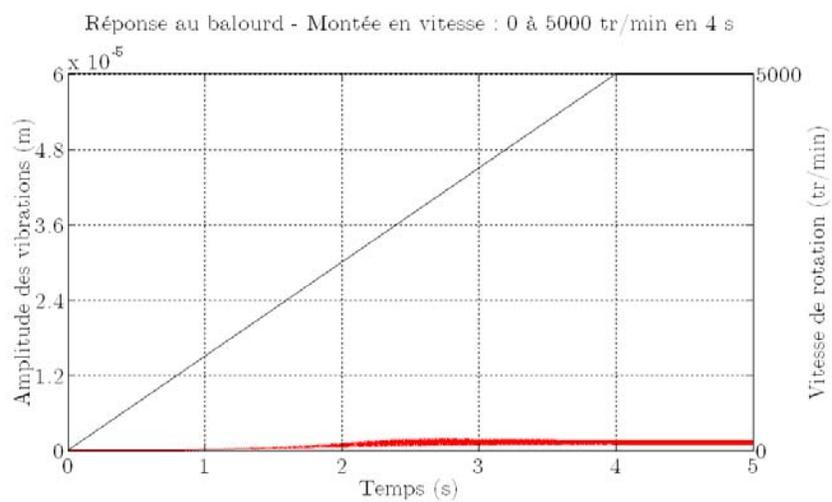
L'amortissement du palier est de type proportionnel. En effet, sachant que $k_{xx} = 2 \times 10^5$ N/m et $k_{zz} = 5 \times 10^5$ N/m alors $c_{xx} = \beta \times k_{xx}$ Ns/m et $c_{zz} = \beta \times k_{zz}$ Ns/m.

Une fois la base modale calculée par ROTORINSA, différents profils de vitesse ont été testés pour observer la réponse au balourd du rotor en transitoire. Ainsi, dans le cas d'une montée en vitesse linéaire, les figures 173 à 175 sont obtenues ($\beta = 0.0002$).

**Figure 173 : 12 s****Figure 174 : 4 s**

**Figure 175 : 1s**

Dans le cas où l'amortissement est plus important ($\beta = 0.015$), la figure 176 est obtenue.

**Figure 176 : $\beta = 0.015$**

Sans amortissement ($\beta = 0$), la figure 177 est obtenue.

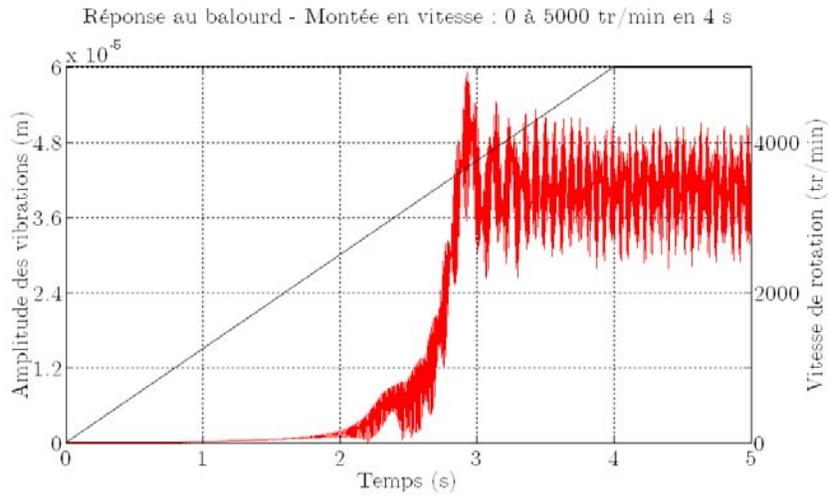


Figure 177 : $\beta = 0$

Dans le cas d'une montée en vitesse exponentielle, les figures 178 à 180 sont obtenues.

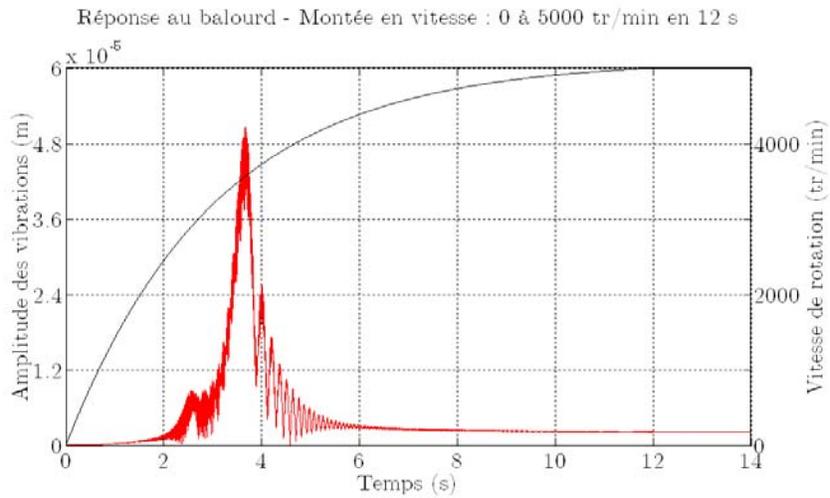
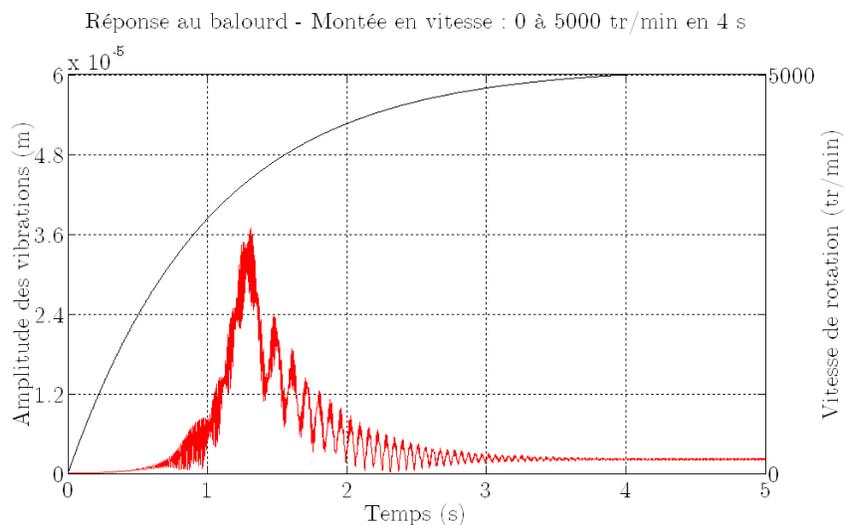
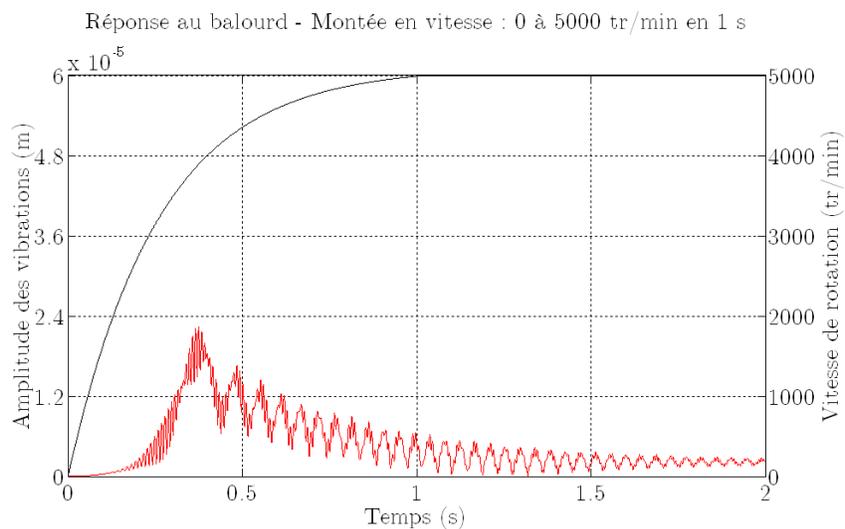


Figure 178 : 12 s

**Figure 179 : 4 s****Figure 180 : 1 s**

G.2 Rotor p200_8.5

Le rotor industriel suivant comprend deux disques. La modélisation élément finis est présentée figure 181.

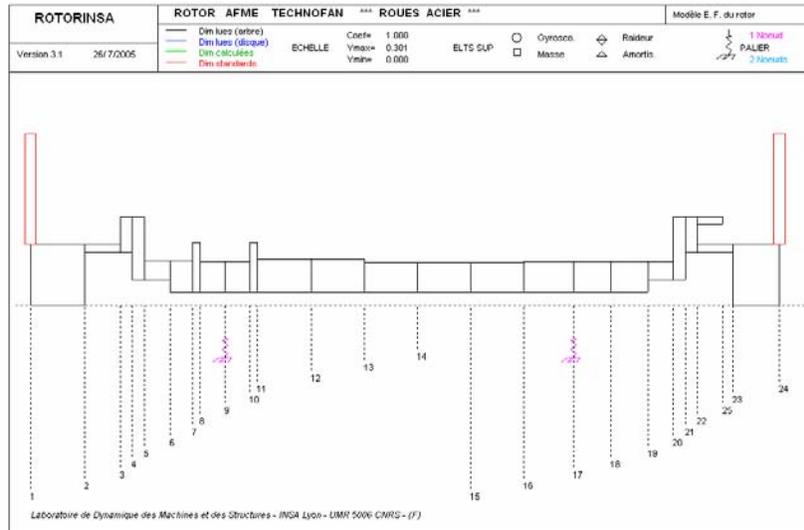


Figure 181 : modèle EF

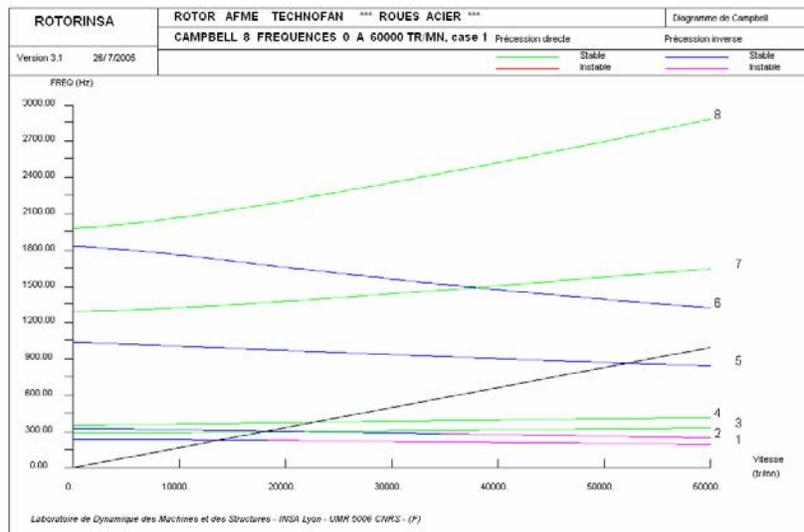


Figure 182 : diagramme de Campbell

Les réponses en transitoire sont présentées figure 183 pour le cas de disques en aluminium et figure 184 pour le cas de disques en acier.

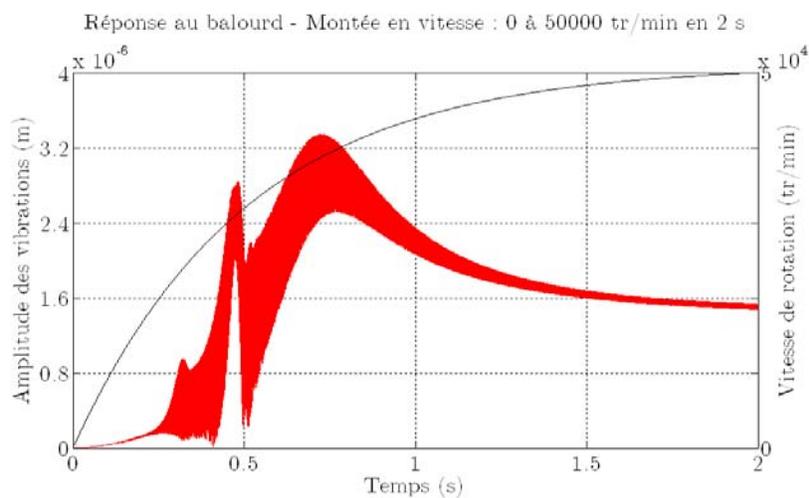


Figure 183 : réponse transitoire – disques d'aluminium

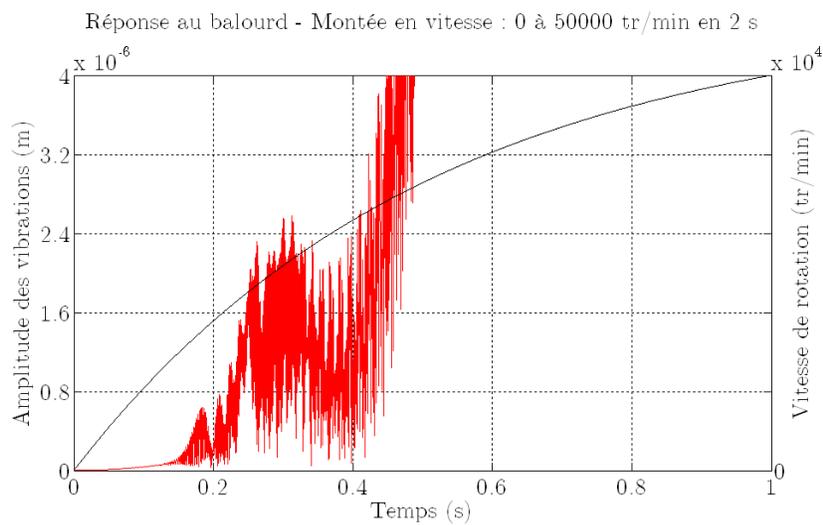


Figure 184 : réponse transitoire – disques d'acier

Cet exemple montre que dans le cas de disque en acier, la réponse au balourd voit son amplitude croître indéfiniment.