

---

N° d'ordre 04-ISAL-0074

Année 2004

# THESE

Présentée devant

**L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES de LYON**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR**

Ecole doctorale :MEGA

Spécialité :MECANIQUE

par

**Flavio D'Ambrosio**

**COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES STRUCTURES**

**EN PRÉSENCE DE FROTTEMENT SEC.**

**APPLICATION AUX ENSEMBLES AUBÉS**

soutenu le xx devant la commission d'examen

## **Jury**

---

J.J. BARRAU	Professeur (Université Paul Sabatier, Toulouse)	Rapporteur
E. CHATELET	Maître de Conférences (INSA de Lyon)	
M.M. GOLA	Professeur (Politecnico di Torino)	Rapporteur
G. JACQUET	Professeur (INSA de Lyon)	Directeur de Thèse
F. THOUVEREZ	Professeur (Ecole Centrale de Lyon)	
R. VILAGINES	HDR (Institut Français du Pétrole)	

---

**Laboratoire de Dynamique des Machines et des Structures**



# Table des matières

<b>INTRODUCTION GENERALE</b>	<b>9</b>
<b>1 ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE</b>	<b>13</b>
1.1 Introduction . . . . .	13
1.2 Système linéaire et accordé . . . . .	14
1.2.1 Analyse du comportement dynamique . . . . .	14
1.2.2 Méthodes de Réduction . . . . .	16
1.2.3 Conclusions . . . . .	19
1.3 Influence et modélisation du désaccordage . . . . .	19
1.4 Modélisation du contact . . . . .	23
1.4.1 Modèle Macroslip . . . . .	23
1.4.2 Modèle Microslip . . . . .	27
1.4.3 Influence de la rugosité . . . . .	33
1.4.4 Opérateurs d’hystérésis . . . . .	36
1.4.5 Conclusions . . . . .	37
1.5 Réduction et résolution des systèmes non linéaires . . . . .	37
1.5.1 Réduction des systèmes avec non linéarités localisées . . . . .	37
1.5.2 Résolution des systèmes non linéaires . . . . .	40
1.6 Résultats numériques pour systèmes désaccordés en présence de frottement sec . .	42
1.7 Dispositifs expérimentaux en présence de frottement sec . . . . .	44
1.7.1 Techniques expérimentales . . . . .	44
1.7.2 Résultats expérimentaux - système à un seul frotteur . . . . .	45
1.7.3 Résultats expérimentaux - système à n frotteurs à symétrie cyclique . . . .	48
1.8 Conclusion et positionnement de l’étude . . . . .	54

<b>2</b>	<b>DEMARCHE NUMERIQUE - EXPERIMENTALE</b>	<b>57</b>
2.1	Introduction . . . . .	57
2.2	Etude numérique préparatoire . . . . .	58
2.2.1	Mise en équations . . . . .	58
2.2.2	Validation de la méthode MHBM . . . . .	60
2.2.3	Comparaison Macroslip/microslip . . . . .	62
2.2.4	Effet de la rugosité . . . . .	69
2.2.5	Conclusions . . . . .	72
2.3	Analyse des amplitudes maximales des vibrations . . . . .	73
2.3.1	Système m-c-k . . . . .	73
2.3.2	Système avec frotteur . . . . .	76
2.3.3	Conclusions . . . . .	87
2.4	Description du dispositif expérimental . . . . .	88
2.5	Approche linéaire . . . . .	91
2.5.1	Poutre encastrée - Libre . . . . .	91
2.5.2	Poutre encastrée - appuyée . . . . .	94
2.6	Approche non linéaire . . . . .	96
2.6.1	Résultats expérimentaux à fréquence constante . . . . .	96
2.6.2	Résultats expérimentaux en balayage sinus . . . . .	99
2.6.3	Résultats numériques . . . . .	104
2.6.4	Conclusions . . . . .	107
2.7	Conclusions . . . . .	107
<b>3</b>	<b>APPLICATION AUX SYSTEMES A SYMETRIE CYCLIQUE</b>	<b>109</b>
3.1	Introduction . . . . .	109
3.2	Système à 2 degrés de liberté . . . . .	112
3.3	Système à symétrie cyclique accordé . . . . .	115
3.3.1	Mise en équation . . . . .	115
3.3.2	Excitation de type force ponctuelle - réponse forcée . . . . .	117
3.3.3	Excitation de type Ordre Moteur . . . . .	119
3.3.4	Approximation des réponses forcées non linéaires . . . . .	125
3.3.5	Conclusion . . . . .	129
3.4	Système à symétrie cyclique désaccordé - Excitation ponctuelle . . . . .	130

---

3.4.1	Sensibilité au désaccordage du dédoublement des modes . . . . .	131
3.4.2	Désaccordage simultané des paramètres de contact . . . . .	144
3.4.3	Conclusions . . . . .	149
3.5	Système à symétrie cyclique désaccordé - Excitation Ordre Moteur . . . . .	150
3.5.1	Sensibilité au désaccordage des facteurs d'amplitude . . . . .	150
3.5.2	Désaccordage simultané des paramètres de contact . . . . .	163
3.5.3	Conclusions . . . . .	164
3.6	Conclusions . . . . .	165
<b>CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES</b>		<b>169</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>		<b>173</b>
<b>ANNEXES</b>		<b>181</b>
<b>A</b>	<b>Approche statistique des paramètres de contact</b>	<b>181</b>
<b>B</b>	<b>Force transmise par le frotteur</b>	<b>185</b>
<b>C</b>	<b>Résolution de systèmes d'équations non linéaires</b>	<b>187</b>
<b>D</b>	<b>Etalonnage des capteurs inductifs</b>	<b>189</b>
<b>E</b>	<b>Calcul des coefficients de la matrice [A]</b>	<b>191</b>
<b>F</b>	<b>Matrices de masse raideur et amortissement</b>	<b>197</b>



# NOMENCLATURE

$a_i$	amplitude de la composante cosinusoidale du déplacement total de l' $i^{\text{ème}}$ degré de liberté
$a_j$	$j^{\text{ème}}$ composante harmonique
$b_i$	amplitude de la composante sinusoidale du déplacement total de l' $i^{\text{ème}}$ degré de liberté
$B, B_1$	amplitude totale de la première composante harmonique du déplacement
$B_i$	amplitude totale de la première composante harmonique de l' $i^{\text{ème}}$ degré de liberté
$B_j$	amplitude totale de la $j^{\text{ème}}$ composante harmonique du déplacement
$[C]$	matrice d'amortissement et/ou gyroscopiques (Coriolis)
$[c_m]$	matrice d'amortissement modale
$E$	module de Young
$E_{c-dis}$	énergie dissipée par amortissement visqueux
$E_{fro-dis}$	énergie dissipée par frottement sec
$EO$	Ordre Moteur de l'excitation
$E_{tot-dis}$	énergie dissipée totale
$\{F_C\}$	vecteur des efforts centrifuges
$F_c, F_{c1}$	première composante harmonique cosinusoidale de la force non linéaire adimensionnée par rapport au produit $\mu F_n$
$f_{cb}$	force transverse en phase au déplacement par unité de déplacement
$F_d$	force visqueuse
$f_{db}$	force visqueuse par unité de déplacement
$F_{dphase}$	somme de force déphasée de $90^\circ$ par rapport au déplacement
$F_{in}$	force d'inertie

$f_{ci}$	première composante harmonique de la composante cosinusoidale de la force transverse de l' $i^{\text{ième}}$ contact
$f_{cj}$	$j^{\text{ième}}$ composante harmonique de la force transverse en phase avec le déplacement
$f_{ex}, F_{ex}$	force d'excitation (système à 1 ddl)
$\{F_{ex}\},$	vecteur des forces d'excitation (système à n ddl)
$F_{exi}$	force d'excitation appliquée au $i^{\text{ième}}$ degré de liberté
$\{\bar{F}_{ex}\},$	module du vecteur des forces d'excitation (système à n ddl)
$f_j$	$j^{\text{ième}}$ composante harmonique de la force transverse, transmise par le frotteur
$F_n$	force normale au contact
$F_{ni}$	force normale à l' $i^{\text{ième}}$ contact
$\{F_{nl}\},$	vecteur des forces non linéaires pour un système à n ddl
$F_{phase}$	somme de force en phase au déplacement
$f$	fréquence de résonance des modes de 0 jusqu'à 6 diamètres
$f_r$	fréquence d'excitation
$f_{r_{bloqu}}$	fréquence de résonance du cas bloqué
$f_{r_{glissant}}$	fréquence de résonance du cas glissant
$F_{res}$	force de restitution du ressort
$F_s, F_{s1}$	première composante harmonique sinusoïdale de la force non linéaire adimensionnée par rapport au produit $\mu F_n$
$f_{sb}$	force transverse déphasée de $90^0$ par rapport au déplacement par unité de déplacement
$f_{si}$	première composante harmonique de la composante sinusoïdale de la force transverse de l' $i^{\text{ième}}$ contact
$f_{sj}$	$j^{\text{ième}}$ composante harmonique de la force transverse déphasée de $90^0$ par rapport au déplacement
$f_t, F_t$	force transverse
$f_{ti}$	force transverse, transmise par l' $i^{\text{ième}}$ contact
$\dot{F}_t$	dérivée de la force transverse par rapport au temps
$i_h$	paramètre numérique des opérateurs d'hystérésis
$[K]$	matrice de raideur totale
$[K_{dj}]$	raideurs de contact pour le modèle de Iwan
$[k_m]$	matrice de raideur modale

$[K_E]$	matrice de raideur élastique
$k_{eq}$	raideur équivalente du système à 1 ddl
$[K_G]$	matrice de raideur géométrique
$[K_S]$	matrice de raideur supplémentaire d'assouplissement
$k_n, c_r$	raideur normale du contact
$k_t$	raideur tangentielle du contact
$k_{ti}$	raideur tangentielle de l' $i^{\text{ème}}$ contact
$M$	composantes harmoniques choisies pour la méthode de la balance harmonique
$m, k, c$	masse, raideur, amortissement visqueux du système 1 ddl
$m_i, k_i, c_i$	masse, raideur, amortissement visqueux du système n ddl
$[M]$	matrice de masse
$[m_m]$	matrice de masse modale
$n, N$	nombre d'aubes
$\{q\}$	vecteur des degrés de liberté modaux
$R_j$	force normale pour le modèle de Iwan
$R_z$	rugosité du contact
$X_{adi}$	déplacement adimensionné du degré de liberté
$X_{max}$	amplitude maximale
$x_0$	déplacement du ressort $k_t$
$x_c$	déplacement au point de contact du ressort à lame
$x_{cri}$	valeur du déplacement au passage de l'état bloqué à l'état glissant
$x_I$	point d'intersection entre la réponse forcée du cas complètement glissant et complètement bloqué
$x_t, \dot{x}_t, \ddot{x}_t$	déplacement, vitesse, accélération totale de la masse concentrée
$x_S$	déplacement maximal du système à n ddl pour un état complètement bloqué du contact
$x_{ss}$	déplacement du point de contact correspondant au passage d'un état glissant à bloqué
$\alpha$	rapport entre l'amortissement visqueux et l'amortissement critique
$\alpha_{ef}, \beta_{ef}$	coefficients de masse et de raideur pour le calcul de la matrice d'amortissement
$\beta_n$	déphasage entre deux secteurs
$\{\delta_1^{n,c}\}, \{\delta_1^{n,s}\}$	déplacements généralisés associés à un seul secteur de référence

$\{\delta\}, \{\dot{\delta}\}, \{\ddot{\delta}\}$	vecteurs du déplacement, de la vitesse et de l'accélération de la structure
$\{\delta_i\}$	déplacement des degrés de liberté internes
$\{\delta_c\}$	déplacement des degrés de liberté de liaison
$\{\delta_s\}$	position d'équilibre statique de la structure
$\{\delta_d\}, \{\dot{\delta}_d\}, \{\ddot{\delta}_d\}$	composante vibratoire du déplacement, de la vitesse et de l'accélération autour de la position d'équilibre la structure
$\Delta f$	différence entre deux fréquences relatives au même mode
$\{\delta_p\}$	vecteur des déplacements du $p^{i\grave{e}me}$ secteur
$\varepsilon$	écart en pourcentage par rapport à la valeur moyenne
$\phi$	déphasage entre les aubes
$[\phi]$	matrice des vecteurs propres
$[\phi_d]$	matrice des modes dynamiques
$[\phi_s]$	matrice des modes statiques
$\mu$	coefficient de frottement sec
$\mu_i$	coefficient de frottement sec de l' $i^{i\grave{e}me}$ contact
$\mu_d$	coefficient de frottement sec dynamique
$\mu_s$	coefficient de frottement sec statique
$\mu_{ss}$	coefficient de frottement sec statique à basses vitesses
$\nu$	coefficient de poisson
$\omega$	pulsation d'excitation
$\omega_j$	pulsations propres
$\omega_n$	pulsation de résonance pour le système à 1 ddl non amorti
$\omega_r$	vitesse de rotation
$\Omega$	pulsation associée à l'amplitude maximale de réponse
$\sigma$	écart type des distributions des paramètres
$\sigma_h$	paramètre numérique des opérateurs d'hystérésis
$\sigma_p$	densité de probabilité approchée par Sextro
$\rho$	densité
$\vartheta^*$	état du contact
$\vartheta^*_i$	état de l' $i^{i\grave{e}me}$ contact
$\bar{\vartheta}^*$	état imposé du contact
$\varphi, \varphi_1$	déphasage de la première composante harmonique

$\varphi_j$  déphasage de la  $j^{\text{ème}}$  composante harmonique



# INTRODUCTION GENERALE

Les roues aubées de turbomachines constituent des pièces critiques dans des secteurs de haute technologie tels que le transport (moteurs d'avions, turbocompresseurs de véhicules automobiles...) et la production d'énergie (turbines à vapeur de centrales, turbines à gaz...). Dans ce contexte, ces structures font l'objet d'attentions particulières car l'une des causes les plus fréquentes de rupture résulte du phénomène encore mal maîtrisé de fatigue dite à grand nombre de cycles (HCF pour "High Cycle Fatigue") provoquant des coûts de pertes d'exploitation et de réparations colossaux. En conséquence, du fait des impératifs forts de fiabilité, de sécurité, de flexibilité d'utilisation et de respect de l'environnement, les constructeurs doivent disposer d'outils d'analyse de plus en plus fins et précis dès le stade de conception. Pour éviter de trop fortes amplitudes d'oscillations et augmenter la durée de vie des machines, les fréquences d'excitation doivent de préférence être distinctes des fréquences naturelles des aubages dans tout le domaine de fonctionnement. Les techniques de conception n'ont donc été longtemps fondées que sur la seule estimation des fréquences naturelles et les modes propres des structures, issus de la résolution d'un système linéaire aux valeurs propres. A présent, les techniques utilisées doivent intégrer les exigences d'adaptabilité. Par exemple, dans le domaine de la production d'énergie, les turbomachines ne tournent plus constamment à vitesse nominale mais leur régime est totalement assujéti à la demande en énergie. Une vitesse de rotation et une fréquence d'excitation variables dans de grandes amplitudes doivent donc être prises en compte et il est impératif de pouvoir prédire avec précision les amplitudes de vibration sous excitations induites par l'environnement, afin d'être en mesure de n'éliminer que les résonances qui ont un caractère de dangerosité affirmé.

Faute de modèles suffisamment adaptés et afin de sécuriser le fonctionnement de leurs machines, les constructeurs contournent le problème en introduisant amortissement et raideur supplémentaires de façon à rejeter les fréquences de résonance hors de l'intervalle de fonctionnement ou à diminuer les amplitudes de vibrations en résonance. En effet, les sources d'amortissement apportées

par la liaison en pied d'aubes diminue rapidement en rotation ou sont inexistantes dans le cas de systèmes usinés dans la masse (blisks). En conséquence, en plus d'être liées entre elles par le disque, les aubes d'un même étage sont souvent liées par des mécanismes raidisseurs et/ou amortisseurs propres à chaque constructeur. Parmi les différentes technologies développées, les mécanismes les plus utilisés prennent le nom de dissipateurs (Friction Dampers en anglais) ou limiteurs de pics (Friction Peak Limiters)(figure 1, et on peut citer :

- Fils amortisseurs (Tie - Wire)
- Nageoires (part span shrouds ou snubbers)
- Frotteurs sous plates-formes en pied d'aubes (under platform)



FIG. 1 Différents types de limiteurs de pics utilisés dans l'industrie

Les fils amortisseurs sont simplement mis en contact avec les aubes par la force centrifuge et la rigidité apportée au système est négligeable. Les frotteurs sous plate-forme fonctionnent sur le même principe et permettent de baisser les pics d'amplitude au niveau des résonances. Les nageoires, souvent utilisées pour les étages d'aubes élancées, sont mises en contact par le dévissage des aubes sous l'effet de la rotation. Elles forment une bande circumférentielle d'apparence continue soit aux environs de 75 pourcents de leur hauteur soit à leur extrémité et elles ont une influence directe sur le comportement dynamique global. Ces dispositifs ont deux fonctions qui peuvent être utilisées conjointement ou séparément :

- Rigidifier les aubes pour les rendre moins sensibles au flottement aéroélastique ou pour repousser les fréquences naturelles de l'aubage au delà de la plage de fonctionnement.
- Apporter de l'amortissement par frottement sec afin de diminuer les amplitudes de vibrations.

La conception de ces mécanismes dépend encore largement de nos jours de l'expérience empirique propre à chaque constructeur car ils présentent un comportement dynamique difficile à simuler, et donc à optimiser numériquement. En plus des phénomènes non linéaires liés au frottement des dispositifs de dissipations, les amplitudes de réponses sont grandement conditionnées par le phénomène de désaccordage ("mistuning"). Un système est dit " désaccordé " quand les secteurs (aube + secteur du disque) qui le composent possèdent des propriétés différentes (assemblage, géométrie, matériaux, ...). Il s'ensuit un comportement dynamique de la structure globale partiellement ou totalement modifié par rapport à celui de la structure dite accordée, comportement pouvant entraîner des localisations sources d'amplifications des niveaux de déplacement.

L'étude présentée ici se situe dans la continuité des travaux de thèse de Ravoux [56] et a pour objectifs d'avancer vers une meilleure maîtrise de la connaissance et de la modélisation des liaisons par nageoires. Dans l'analyse des comportements des aubages en présence de frottement sec, les dispositifs par nageoires ont été retenus car ces dernières ont un impact direct sur l'amortissement apporté au système mais ont également une influence majeure sur les déformées vibratoires.

Les travaux de Ravoux ont été centrés sur la conception et l'utilisation d'un dispositif expérimental simple mais représentatif d'un système aubé. Les résultats obtenus dans ce cadre ont été prometteurs mais ont également clairement mis en évidence la nécessité de consolider les connaissances acquises avant de poursuivre dans cette voie. En effet beaucoup de choix ont du être fait à priori et certains comportements constatés n'ont pas pu être expliqués de manière totalement convaincante. Une nouvelle étude bibliographique plus poussée, concernant les différents modèles de contact et les principales conséquences de la présence du désaccordage s'est donc avérée indispensable. Le premier chapitre présente cette étude bibliographique où une attention particulière est donnée aux principales méthodes de résolution en présence d'éléments non linéaires ainsi qu'aux méthodes de réduction utilisées pour les systèmes désaccordés.

La maîtrise des différentes modélisations de contact représente un élément fondamental qui doit être bien acquis avant l'analyse de systèmes complexes où plusieurs phénomènes peuvent se superposer rendant l'interprétation des résultats difficile. Pour cette raison, le deuxième chapitre est basé sur l'étude de systèmes simples et différents types de contact sont considérés et analysés. Ce type de connaissance est indispensable pour aborder le problème inverse auquel on est le plus communément soumis ; c'est à dire quand en présence d'un comportement dynamique constaté d'une structure avec frottement sec, on veut remonter à la modélisation de l'élément de contact la plus

adaptée. Ce type d'approche sera validé dans le chapitre suivant, dans le cas d'une poutre avec un frotteur à son extrémité libre. Cette étude permet de valider les procédures expérimentales et numériques développées.

Les analyses expérimentales et numériques de base maîtrisées, l'étude revient sur la problématique liée au comportement dynamique des aubages liaisonnés par nageoires. Le dispositif utilisé par Ravoux dans [56] a été repris et la procédure expérimentale / numérique mise en place a été appliquée pour identifier le comportement du contact inter-aube constaté. Seules deux aubes en contact sont considérées pour cela. Le travail se termine ensuite par l'examen des effets du désaccordage propre aux éléments de contact et deux approches différentes ont été étudiées en se basant sur une structure académique à  $n$  degrés de libertés. Dans la première la structure à géométrie cyclique est excitée ponctuellement, de la même manière que sur le dispositif 13 aubes. Une première étude de sensibilité est conduite afin de pouvoir expliquer le rôle de chaque paramètre de contact pris indépendamment ou en même temps. Cette analyse est enfin répétée pour le cas d'une excitation de type Ordre Moteur afin de se rapprocher d'un fonctionnement réel.

# Chapitre 1

## ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

### 1.1 Introduction

L'étude des fréquences naturelles et des modes propres des systèmes linéaires est maintenant largement maîtrisée [34] [44] mais, malheureusement, ce type d'analyse est totalement insuffisant lorsqu'il s'agit de prévoir avec précision la durée de vie des structures. Pour pouvoir avancer dans ce domaine, il faut procéder à des analyses de type réponse forcée et pour cela il est indispensable de maîtriser les principaux paramètres qui conditionnent les niveaux d'amplitudes vibratoires. Parmi les paramètres les plus influents, on peut citer ceux liés aux propriétés intrinsèques de la structure (amortissement structural, désaccordage, frottements) et ceux venant de l'extérieur et liés aux mécanismes d'excitation (formes et fréquences) et d'interaction fluide - structure.

Pour ce qui concerne les mécanismes d'interaction fluide-structure [40] ils peuvent, soit amener un amortissement supplémentaire limitant ainsi les amplitudes, soit rendre le comportement instable sous certaines conditions de pression instationnaire et de déplacement de la structure. Des codes adaptés aux systèmes couplés et de fortes puissances de calculs sont nécessaires pour résoudre le problème de réponse forcée en présence de telles interactions et cet aspect du problème ne sera pas abordé dans le cadre de cette étude. Concernant l'amortissement structural interne, son influence est généralement faible et c'est la raison pour laquelle l'adjonction de dispositifs spécifiques, amenant de l'amortissement par frottement sec, est souvent le seul moyen efficace pour diminuer les amplitudes vibratoires dangereuses. Enfin, le désaccordage subit ou maîtrisé, est une caractéristique structurale qui a une influence majeure sur les niveaux de réponse et qui doit être maîtrisé.

Les travaux développés ici sont inscrits dans la continuité de ceux conduits par Ravoux [56], centrés sur les effets du frottement sec et du désaccordage dans le cadre des structures à sy-

métrie cyclique et basés sur une double démarche numérique et expérimentale. Compte tenu de la complexité des comportements en jeu et de la nécessité de valider les développements numériques, cette double démarche s'avère nécessaire pour avancer vers une meilleure compréhension de l'influence de ces deux facteurs sur la réponse forcée des aubages de turbomachines.

L'analyse bibliographique présentée dans ce chapitre permet de positionner le problème dans son contexte et commence par un rappel des techniques utilisées pour l'étude du comportement dynamique des systèmes classiques linéaires et accordés. Les principales caractéristiques et les effets du désaccordage sont ensuite analysés avant d'aborder les problèmes liés au frottement sec. Le chapitre se poursuit par l'analyse des techniques de réduction indispensables pour diminuer la taille des systèmes à résoudre et par la présentation des méthodes de résolution adaptées aux cas non linéaires. Les dispositifs expérimentaux utilisés pour l'étude du désaccordage et pour l'étude du frottement sec, ainsi que les principaux résultats associés, sont enfin présentés. Parmi ceux-ci, une attention particulière est donnée aux résultats expérimentaux obtenus par Ravoux sur le dispositif test à géométrie cyclique développé dans le cadre de sa thèse. Le positionnement de l'étude conclut ce premier chapitre.

## 1.2 Système linéaire et accordé

Cette première partie décrit brièvement la mise en équation et les procédures les plus utilisées pour la prévision des fréquences naturelles, modes propres et des réponses forcées dans le cas de systèmes à symétrie cyclique linéaires (donc en absence des dispositifs de frottement) et parfaitement accordés (tous les secteurs sont identiques). Ce type d'analyse est classique mais ces rappels permettent de bien situer les problématiques liées au frottement et au désaccordage.

### 1.2.1 Analyse du comportement dynamique

L'application des équations de Lagrange aux expressions de l'énergie cinétique et potentielle de déformation conduit à l'équation du mouvement des systèmes arbre-disque-aubes en rotation sous la forme suivante (1.1) [25] [12].

$$[M] \{\ddot{\delta}\} + [C] \{\dot{\delta}\} + [K_E + K_G(\delta) + K_S] \{\delta\} = \{F_C(\omega_r^2)\} + \{F_{ex}\} \quad (1.1)$$

Avec  $[M]$  matrice de masse,  $[C]$  matrice des effets gyroscopiques (de Coriolis) et/ou d'amortissement,  $[K_E]$  raideur élastique,  $[K_G(\sigma)]$  raideur géométrique,  $[K_S]$  raideur supplémentaire,  $\{F_E\}$  vecteur des forces extérieures,  $\{F_C(\omega_r^2)\}$  vecteur des efforts centrifuges. La matrice totale de raideur inclut les effets de raidissement centrifuge  $[K_G]$  et d'assouplissement  $[K_S]$  lié à la rotation. Les

vecteurs  $\{\delta\}$ ,  $\{\dot{\delta}\}$ ,  $\{\ddot{\delta}\}$  représentent le déplacement, la vitesse et l'accélération de la structure. Le déplacement total  $\delta$  peut se décomposer en deux composantes :  $\{\delta_s\}$  et  $\{\delta_d\}$ . La première représente la position d'équilibre statique de la structure soumise aux effets centrifuges et la deuxième la composante vibratoire autour de cette position d'équilibre. De cette façon, la résolution de l'équation (1.1) s'effectue en deux étapes successives (1.2 et 1.3) :

$$[K_E + K_G(\delta_s) + K_S] \{\delta_s\} = \{F_C(\omega_r^2)\} \quad (1.2)$$

$$[M] \{\ddot{\delta}_d\} + [C] \{\dot{\delta}_d\} + [K_E + K_G(\delta_s) + K_S] \{\delta_d\} = \{F_{ex}\} \quad (1.3)$$

Pour une vitesse de rotation donnée  $\omega_r$ , la position d'équilibre  $\{\delta_s\}$  est déduite de l'équation 1.2. Cette équation est non linéaire dans la mesure où la raideur géométrique dépend du déplacement statique final. Une procédure du type Newton-Raphson est donc nécessaire. Les modes propres et les fréquences de résonance sont obtenus à partir de l'équation (1.3) en éliminant le second membre.

$$[M] \{\ddot{\delta}_d\} + [C] \{\dot{\delta}_d\} + [K_E + K_G(\delta_s) + K_S] \{\delta_d\} = \{0\} \quad (1.4)$$

A chaque valeur de la vitesse de rotation  $\omega_r$  du système correspond une position d'équilibre statique  $\{\delta_s\}$  fonction de la raideur géométrique  $[K_S]$  et, par conséquent, les valeurs et vecteurs propres du système (1.4) évoluent. Cette évolution est reportée sur un diagramme de Campbell, graphique qui superpose l'évolution des fréquences naturelles de la structure en fonction de la vitesse de rotation et les excitations harmoniques de la rotation (de type Ordre Moteur figure 1.1). Pour chaque intersection entre les courbes des fréquences naturelles et la droite d'excitation, une résonance est possible seulement s'il y a correspondance entre la forme de l'excitation et la déformée modale associée à cette fréquence.

En revanche, si le diagramme de Campbell fournit les conditions de résonance possibles, il ne donne aucune information sur leur dangerosité. Pour cela, il est indispensable de procéder à des analyses de type réponse forcée. L'équation à résoudre est alors donnée par (1.5).

$$[M] \{\ddot{\delta}_d\} + [C] \{\dot{\delta}_d\} + [K_E + K_G(\delta_s) + K_S] \{\delta_d\} = \{F_E\} \quad (1.5)$$

Vu la nature linéaire du système dynamique, si la force d'excitation est harmonique  $\{F_{ex}\} = \{\bar{F}_{ex}\}e^{\lambda t}$ , la réponse est elle aussi harmonique de la forme  $\{\delta_d\} = \{\bar{\delta}_d\}e^{\lambda t}$ .

Compte tenu de la taille des systèmes nécessaires pour obtenir une modélisation de qualité des structures complexes considérées, les calculs restent encore très lourds et ceci malgré l'amélioration des capacités informatiques. L'utilisation de méthodes de réduction, qui permettent d'obtenir

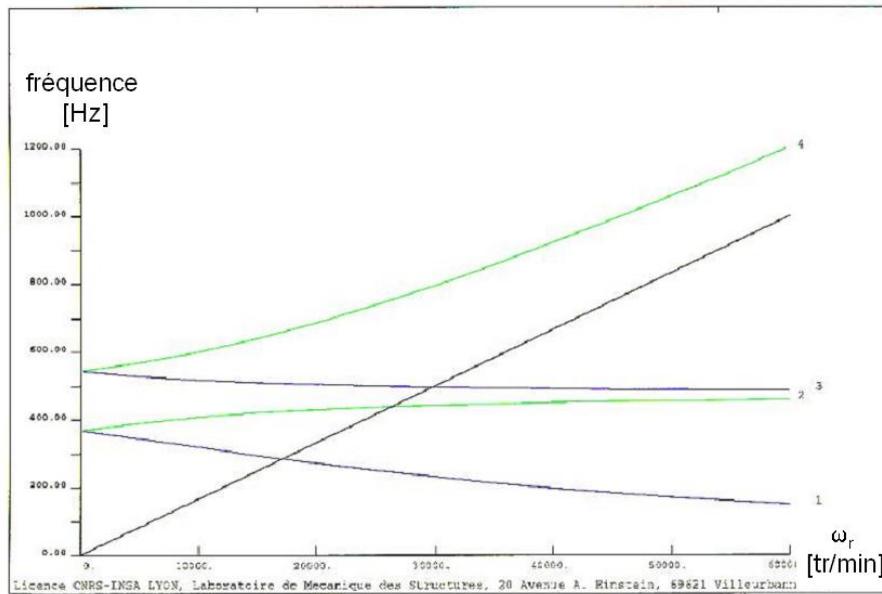


FIG. 1.1 Exemple de diagramme de Campbell - modes 1 à 4 et excitation de type 1<sup>er</sup> Ordre Moteur

une solution à partir de systèmes à faible nombre de degrés de liberté, s'avère donc indispensable. On résume ci-dessous les méthodes de réduction les plus utilisées.

### 1.2.2 Méthodes de Réduction

#### *Symétrie cyclique*

Pour une structure cyclique constituée de  $N$  secteurs identiques, l'effort de calcul peut être largement diminué en utilisant la propriété de symétrie. La théorie de propagation des ondes [70] permet dans ce cas d'écrire les déplacements d'un secteur  $p$ -em fonction de quantités associées à un secteur de référence de la façon suivante (1.6) :

$$\{\delta_p\} = \sum_n \left( \{\delta_1^{n,c}\} \cos((p-1)\beta_n) + \{\delta_1^{n,s}\} \sin((p-1)\beta_n) \right) \quad (1.6)$$

avec  $\beta_n = (2\pi n)/N$  déphasage entre deux secteurs adjacents,  $\delta_1^{n,c}$ ,  $\delta_1^{n,s}$  déplacements généralisés associés à un seul secteur de référence, et

$$\begin{aligned} n &= 0, 1, \dots, N/2 && \text{si } N \text{ est pair} \\ n &= 0, 1, \dots, (N-1)/2 && \text{si } N \text{ est impair} \end{aligned}$$

L'ordre du système d'équation résultant est divisé par  $N/2$  mais ce dernier doit être résolu pour

chaque valeur possible du déphasage inter aubes, c'est à dire pour chaque valeur de  $\beta_n$ . L'hypothèse fondamentale pour appliquer la symétrie cyclique oblige les différents secteurs de la structure à être identiques. Cette méthode de réduction n'est donc applicable avec intérêt que dans le cas de systèmes accordés.

#### *Réduction modale*

La réduction modale représente également une des techniques les plus adaptées pour la réduction des systèmes linéaires. Cette méthode consiste à décomposer le déplacement recherché sur une base constituée par une série de déplacements modaux connus de la structure. Le système conservatif associé à (1.5) permet de calculer les  $j$  valeurs propres  $\omega_j$  et les  $j$  vecteurs propres  $\Phi_j$  de la structure. Les déplacements inconnus du système (1.5) s'écrivent alors de la manière suivant :

$$\{\delta_d\} = [\Phi] \{q\} \quad \text{avec} \quad [\Phi] = [\{\Phi_1\}, \{\Phi_2\}, \dots, \{\Phi_j\}] \quad (1.7)$$

et  $\{q\}$  vecteur des degrés de liberté modaux. En substituant cette expression dans (1.5), après pré-multiplication par  $[\Phi]^t$ , il vient :

$$[\Phi]^t [M] [\Phi] \{\ddot{q}\} + [\Phi]^t [C] [\Phi] \{\dot{q}\} + [\Phi]^t [K] [\Phi] \{q\} = [\Phi]^t \{F_E\} \quad (1.8)$$

soit encore :

$$[m_m] \{\ddot{q}\} + [c_m] \{\dot{q}\} + [k_m] \{q\} = \{f'_E\} \quad (1.9)$$

avec  $[m_m] = [\Phi]^t [M] [\Phi]$ ,  $[c_m] = [\Phi]^t [C] [\Phi]$ ,  $[k_m] = [\Phi]^t [K] [\Phi]$  respectivement matrices de masse, amortissement et raideur modales. Une fois les déplacements calculés en base modale on revient à nouveau au système physique, et les déplacements réels sont obtenus à partir de (1.7). Le système (1.9) est généralement d'ordre très largement inférieur à celui du système (1.5), et bien évidemment l'approximation des résultats est fonction du nombre de modes retenu.

#### *Méthodes de sous structuration*

Les méthodes de sous structuration dynamique sont également très adaptées pour la réduction de systèmes à symétrie cyclique. L'idée générale consiste à diviser une structure en plusieurs sous-ensembles (sous-structures ou super-éléments), à réduire chaque sous ensemble séparément et finalement à assembler ces sous ensembles pour la résolution finale. Pour les roues-aubées, on peut envisager de traiter chaque secteur de la structure comme une sous-structure. Le comportement global est ainsi condensé sur quelques degrés de liberté (physiques ou non). Dans la littérature, différents types de techniques de condensations existent, parmi lesquels les plus utilisés sont :

- Méthode de Guyan

- Méthodes de synthèse modale

Une analyse détaillée de chacune de ces méthodes est proposée, par exemple, dans [71]. Une caractéristique commune à chacune est qu'elles supposent un certain savoir-faire avant d'être exploitées efficacement. Par exemple, pour la méthode de Guyan, un mauvais choix des degrés de liberté Maîtres et Esclaves peut conduire à une modélisation incertaine, surtout dans le cadre d'une étude dynamique.

Parmi les méthodes de synthèse modale, celle de Craig-Bampton (C-B) est particulièrement intéressante car elle permet une distinction naturelle entre les degrés de liberté internes et les degrés de liberté de liaison. Physiquement ces liaisons peuvent se situer aux interfaces inter-secteurs, inter-aubes ou entre les aubes et le disque. Le choix réside alors dans la définition de la richesse de la base modale associée [56]. Généralement, chaque secteur (aube et la partie de disque associée) correspond à une sous-structure et les degrés de liberté sont organisés. Les déplacements internes sont alors écrits en fonction des déplacements des noeuds de liaison et des modes propres du secteur calculés avec les noeuds de liaison bloqués. Mathématiquement cette relation s'exprime de la façon suivante (1.10) :

$$\delta_i = \phi_s \delta_c + \phi_d q \quad (1.10)$$

avec  $\delta_i$  et  $\delta_c$  respectivement degrés de liberté internes et de liaison,  $\phi_s$  matrice des modes statiques, constituée par les déformées statiques obtenues en appliquant un déplacement unitaire sur chaque degré de liberté de liaison les autres restant bloqués, et  $\phi_d$  matrice des modes dynamiques obtenus avec les noeuds de liaison bloqués. De manière classique dans le cadre des méthodes de réduction,  $q$  représente le vecteur des degrés de liberté modaux. Les matrices de masse amortissement et raideur, ainsi que les forces d'excitation, sont réorganisées de façon telle à regrouper les degrés de liberté de liaison (indicés c) et les degrés de liberté internes (indicés i). Le système final est exprimé par l'équation (1.11) :

$$\begin{bmatrix} M_{cc} & M_{ci} \\ M_{ic} & M_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\delta}_c \\ \ddot{\delta}_i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{cc} & C_{ci} \\ C_{ic} & C_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\delta}_c \\ \dot{\delta}_i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{cc} & K_{ci} \\ K_{ic} & K_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_c \\ \delta_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_c(t) \\ F_i(t) \end{Bmatrix} \quad (1.11)$$

La taille du système équivaut au nombre de degrés de liberté de frontière présent plus le nombre de modes dynamiques retenus. Dans le cas général (disque+aubes), la méthode de C-B peut être pénalisante car elle impose de conserver tous les degrés de liberté de l'interface des secteurs du disque.

### 1.2.3 Conclusions

Une étude complète, de type fréquences naturelles, modes propres et réponse forcée, est maintenant largement classique pour les systèmes à symétrie cyclique parfaitement accordés. En revanche, lorsqu'il s'agit d'aborder des applications réelles, plusieurs limitations apparaissent. Tout d'abord les roues aubées se caractérisent par un certain niveau de désaccordage. Des différences de nature diverse (géométrie, matériau, usure des pièces, conditions aux limites) sont présentes entre les aubes ou plus généralement entre les différents secteurs de la structure qui n'est jamais parfaitement accordée. La conséquence principale de ce désaccordage, même léger, est de rompre la propriété de symétrie cyclique et, compte tenu de sa nature largement aléatoire, les paramètres de masse raideur et amortissement définis dans l'équation (1.5) perdent en toute théorie leurs propriétés déterministes.

Une autre limitation importante concerne les systèmes dissipatifs inter-nageoires ou sous plate-forme. La présence de tels dispositifs rend le comportement de la structure non linéaire, et par conséquent les méthodes de réduction modale présentées ne sont plus applicables et des techniques de résolution adaptées doivent être utilisées pour traiter les non linéarités. Les paragraphes suivants s'intéressent au phénomène du désaccordage ainsi qu'aux différentes modélisations possibles des contacts. Les techniques de réduction et de résolution propres aux systèmes désaccordés et/ou non linéaires sont ensuite abordées.

## 1.3 Influence et modélisation du désaccordage

Les différences géométriques entre secteurs liées à la fabrication et une certaine inhomogénéité dans les propriétés des matériaux sont inévitables, même avec les techniques de production les plus sophistiquées. A partir des années 1970, Ewins [15] met en évidence que ce désaccordage a une influence importante sur le comportement dynamique des structures à symétrie cyclique, à l'aide de mesures expérimentales effectuées sur des structures réelles. Ces travaux ont été poursuivis afin d'être en mesure de prédire le comportement dynamique des systèmes aubés désaccordés et ce domaine de recherche reste encore ouvert. Seule l'influence du désaccordage sur la dynamique des systèmes à symétrie cyclique linéaires est généralement abordée.

### *Dédoublage des modes propres*

Une des conséquences du désaccordage se traduit par le dédoublement des modes. Pour les structures accordées, à chaque fréquence de résonance est associée une paire de modes propres

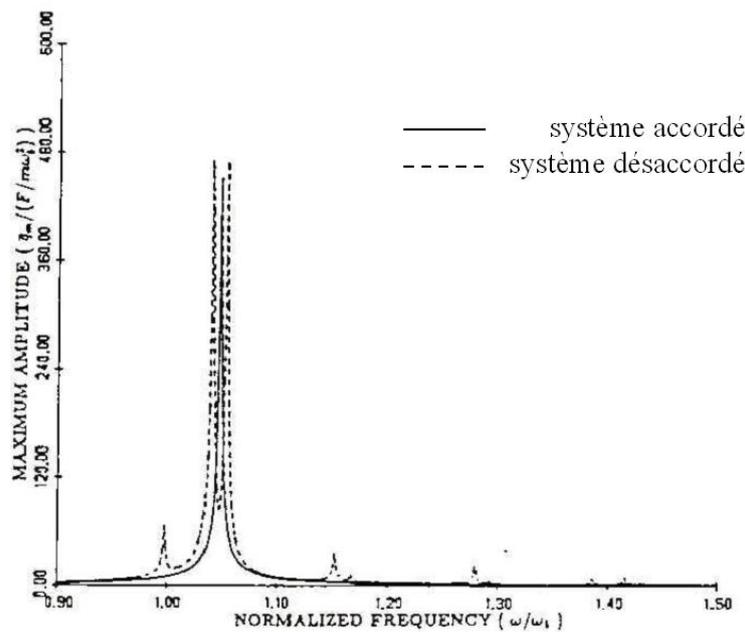


FIG. 1.2 Influence du désaccordage sur la réponse forcée [77]

orthogonaux [70]. En présence de désaccordage, la symétrie cyclique est rompue et ces modes apparaissent à des fréquences distinctes [41]. La différence entre les valeurs des fréquences demeure généralement faible et peut dépendre du couplage inter-secteurs [76], [77]. En figure (1.2) est reporté un exemple de réponse forcée obtenue par [77] pour le système aubé schématisé avec un seul degré de liberté par aube. Dans le cas d'un faible couplage interne, la structure est très sensible au désaccordage occasionnant un dédoublement significatif des fréquences naturelles. Dans le cas de forts couplages, la présence du désaccordage dédouble les modes d'une façon moins importante. Par ailleurs, pour une structure à symétrie cyclique, une excitation de type Ordre Moteur de rang  $n$  (EO : Engine Order en anglais) ne peut exciter que des modes à  $n$  diamètres nodaux. Quand les différences entre les secteurs rendent la structure désaccordée, cette propriété n'est plus valable. Les modes ne sont plus "purs" et se caractérisent par une déformée à plusieurs composantes. Par conséquent tous les modes contenant une composante de type  $n$  diamètres peuvent répondre à une excitation constituée d'un seul Ordre Moteur  $n$ .

#### *Réponse maximale*

Lorsque l'on s'intéresse à la réponse forcée des systèmes aubés, le désaccordage a des conséquences majeures car il agit fortement sur l'amplitude maximale de vibration atteinte par chaque aube. Lorsque la structure présente la propriété de symétrie cyclique et que l'excitation

est de type Ordre Moteur, toutes les aubes subissent la même amplitude de vibration avec un déphasage temporel qui dépend du mode excité. Dans le cas désaccordé, par contre, la vibration peut se concentrer sur quelque(s) secteur(s) dû au phénomène de localisation. Par conséquent, la vibration maximale ne concerne que quelques aubes et son amplitude peut atteindre des valeurs beaucoup plus importantes que les valeurs associées au système accordé.

Différentes études ont été conduites afin d'évaluer la valeur maximale que chaque aube peut atteindre dans le cas désaccordé. Une des premières études a été conduite par Whitehead [78] qui estime le facteur d'amplification maximal de l'amplitude à

$$1/2 \left( 1 + \sqrt{N} \right) \quad (1.12)$$

donc dépendant exclusivement du nombre  $N$  d'aubes. Afin de modéliser le système complet Whitehead utilise un seul degré de liberté par aube. Plus récemment Petrov et Ewins [49] confirment la validité de ce facteur à partir de modélisations éléments finis sophistiquées. Ils introduisent le désaccordage au niveau des caractéristiques des matériaux (module de Young). D'autres type d'approches, [30] et [79], pour lesquelles la variation est introduite directement au niveau fréquentiel, confirment également ces résultats.

#### *Méthodes de réduction pour structures désaccordées*

Pour les structures linéaires, la méthodologie de réduction généralement utilisée consiste à considérer le comportement de la structure désaccordée comme une perturbation du comportement associé à la structure accordée. Le mouvement de chaque aube dans le cas désaccordé est par exemple donné par une combinaison linéaire d'une série de modes de la structure accordée.

Des techniques de synthèse modale, comme REDUCE ou SMART [7], [42], dérivent directement de la méthode de Craig Bampton en amenant des réductions de la taille des systèmes encore plus importante [7]. Généralement l'introduction du désaccordage est faite en terme de niveau de perturbation des valeurs propres du système accordé. Dans [8] et [41], différents types de réduction sont appliqués au même système représentatif de structures industrielles pour mettre en évidence les différents temps de calculs et l'approximation donnée par chacun. Les méthodes SMART et REDUCE sont d'une grande efficacité en termes de précision de données et temps de calculs et sont parmi les plus performantes pour l'étude du désaccordage des systèmes linéaires. Dans tous les cas de figure, les méthodes classiques comme celle de CB demeurent encore largement utilisées car implantées dans les codes industriels éléments finis actuels [26].

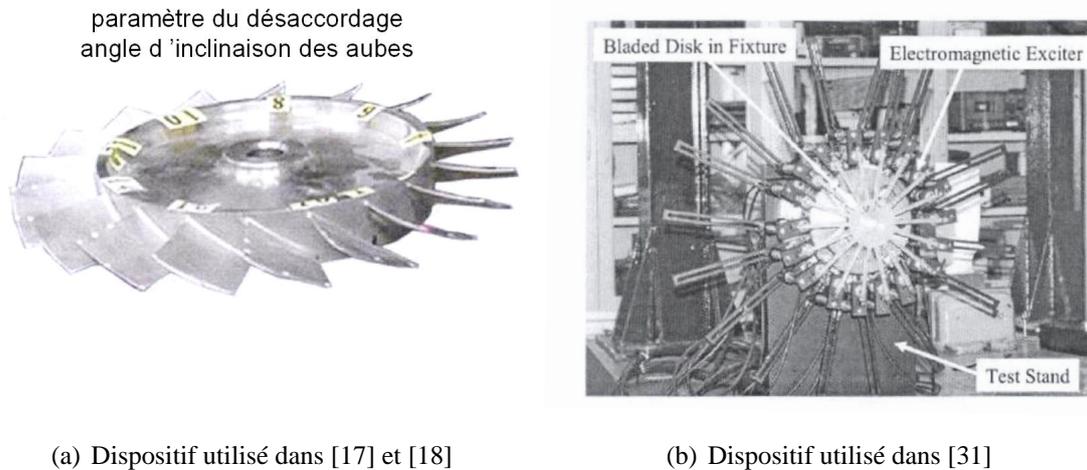


FIG. 1.3 Dispositifs expérimentaux pour l'étude du désaccordage

### Résultats expérimentaux

La plupart des expérimentations concernant l'étude du désaccordage sont restreintes à ce seul phénomène et sont basées sur des dispositifs simples par rapport aux structures réelles [31], mais représentatifs du comportement phénoménologique global des machines. Des études récentes prennent en compte des aspects jusqu'ici ignorés, comme dans [17] et [18] qui considère un désaccordage géométrique dû à la différence d'inclinaison des aubes par rapport au disque. Dans [31], le désaccordage est de nature plus classique lié aux différences des propriétés du matériau. Les dispositifs utilisés dans ces deux études, montrés figure (1.3 (a) et (b)), mettent en évidence les principales caractéristiques des systèmes désaccordés : amplitude maximale, et dédoublement des modes. Dans [31], l'analyse expérimentale valide la valeur théorique obtenue par Whitehead [78], relative à l'amplitude maximale des vibrations dans le cas désaccordé. Il est montré également que le désaccordage dû aux différences géométriques entre les aubes a tout à fait les mêmes conséquences que le désaccordage classique lié aux inhomogénéités des propriétés des matériaux.

### Conclusions

Le désaccordage est essentiellement considéré dans le cas de comportements linéaires. En présence de dispositifs de liaisonnement, le comportement devient non-linéaire et la question de l'effet du désaccordage dans de telles configurations reste largement posée. En premier lieu il s'agit de vérifier la transposition des études réalisées en linéaires au cas non linéaire : dédoublement des pics, localisation... Il s'agit également d'examiner l'influence de configurations de désaccordage propres aux systèmes avec frotteurs. En effet les propriétés intrinsèques des contacts, les différences de chargements à l'interface sont autant de sources de désaccordage dont l'effet n'a pas encore été

exploré.

## 1.4 Modélisation du contact

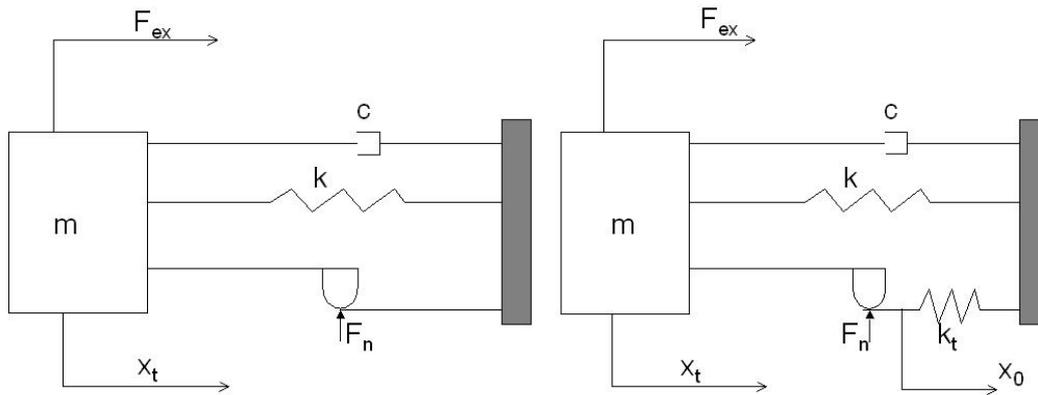
Différents dispositifs de frottement sec sont utilisés pour contenir les amplitudes des aubes des turbomachines à des niveaux acceptables. Les plus utilisés sont les nageoires disposées en tête d'aube ou à environ 75% de sa hauteur, et les frotteurs sous plate-forme. La modélisation du contact ne peut pas être identique pour tout dispositif existant car chaque cas présente un comportement dynamique différent selon la forme, la position, ou la dimension des surfaces en contact. Pour cette raison, différents modèles de contact ont été développés et on reportera ci-dessous seulement les plus utilisés en turbomachines. Ils sont généralement regroupés selon deux types distincts de comportement : macroscopique (macroslip) et microscopique (microslip). La différence fondamentale entre ces deux familles est liée à l'homogénéité du comportement des surfaces. Dans le cas "macroslip", le comportement global des surfaces est homogène et toute la surface, à chaque instant, peut être soit dans une configuration glissante, soit dans une configuration bloquée. Pour cette modélisation, il n'existe pas d'états intermédiaires. Dans le cas "microslip" par contre, le comportement n'est pas forcément homogène dans le sens où des configurations mixtes, avec une partie de la surface bloquée et une autre partie glissante, peuvent coexister. Les spécificités de ces deux types de modélisations sont exposées et interprétées ci-après.

### 1.4.1 Modèle Macroslip

Une des premières modélisations du contact est issue du modèle de Coulomb. Pour un système simple à un degré de liberté (ddl) tel que schématisé figure (1.4 (a)), la force transverse agissant dans la direction tangentielle au contact,  $F_t$ , transmise par le contact, se traduit par les relations suivantes (1.13) :

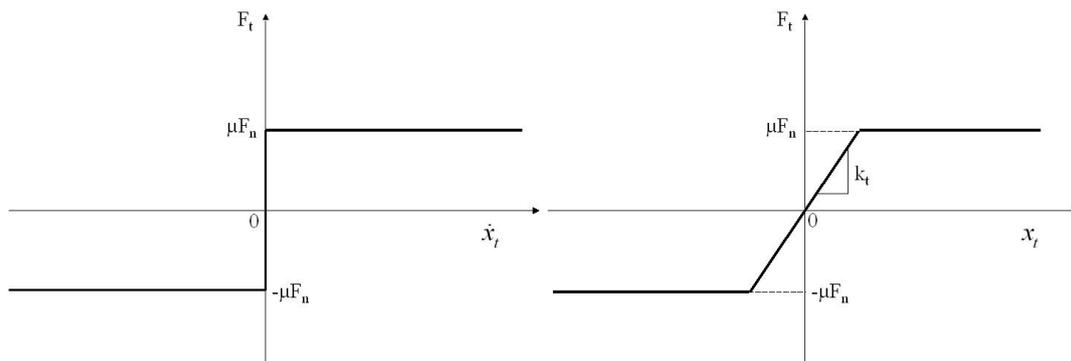
$$\begin{cases} F_t < \mu_s \cdot F_n & \text{si } \dot{x}_t = 0 \\ F_t = \mu_d \cdot F_n & \text{si } \dot{x}_t > 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

avec  $x_t$  déplacement du degré de liberté,  $\dot{x}_t$  sa dérivée par rapport au temps,  $F_n$  force normale au contact,  $\mu_s$  et  $\mu_d$  coefficients de frottement statique et dynamique. L'approche de Coulomb n'intègre pas les surfaces de contact. La loi traduit simplement le fait que la force transverse s'oppose au mouvement et que le coefficient de frottement, quand le contact reste bloqué ( $\mu_s$ ), est différent du coefficient de frottement en phase de glissement ( $\mu_d$ ). Dans ce dernier cas, la valeur de la force



(a) Schématisation du contact selon Coulomb (b) Schématisation du contact selon Masing

FIG. 1.4 Système à 1 degré de liberté avec  $m$  : masse,  $c$  : amortissement,  $k$  : raideur,  $F_n$  : Force normale,  $F_{ex}$  : Force d'excitation,  $k_t$  : Raideur de contact,  $x_t$  : déplacement du degré de liberté,  $x_0$  : déplacement en correspondance du ressort  $k_t$



(a) Loi de Coulomb

(b) Loi de Masing

FIG. 1.5 Modélisation des lois du type macroslip.  $F_t$  force transverse au niveau du contact

transverse est égale à  $F_t = \mu_d \cdot F_n$ , alors que dans le cas bloqué, sa valeur demeure inférieure à  $\mu_s \cdot F_n$ , mais reste indéterminée. La loi de Coulomb est illustrée graphiquement par la figure (1.5 (a)). Les limites de ce type de modélisation ont été clairement analysées dans [54] et [53], en particulier il ne permet pas de rendre compte de manière satisfaisante de l'état bloqué du contact.

Une meilleure analyse du comportement de l'état homogène bloqué de la structure a été menée grâce à la modélisation introduite par Masing [38]. La différence principale par rapport au modèle de Coulomb réside dans l'adjonction d'un ressort de raideur  $k_t$  mis en série avec le frotteur, comme illustré figure (1.4 (b)). Quand la force normale au contact est très élevée par rapport à

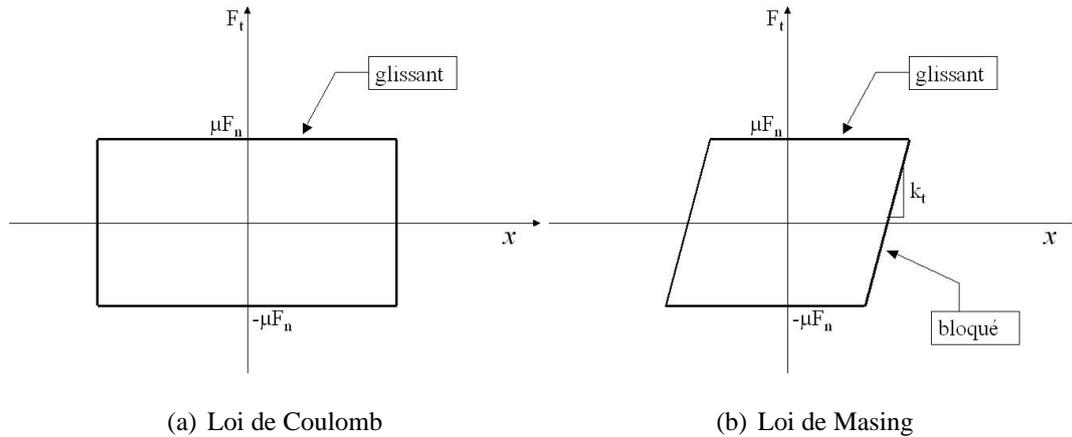


FIG. 1.6 Boucles d'hystérésis pour un modèle macroslip

la force d'excitation, les aspérités des surfaces de contact sont écrasées. Masing retient que les déformations induites par un mouvement tangentiel, sont, en première approximation, élastiques en raison de cet écrasement. Par conséquent, le ressort a un fonctionnement linéaire classique et sa valeur représente la raideur tangentielle au contact. La valeur de la force transverse en fonction du déplacement  $x_t$  est illustrée figure (1.5 (b)). L'introduction de la raideur dans la modélisation est d'une importance primordiale : pendant une période d'excitation, l'état du contact peut alterner d'un état glissant à un état bloqué et vice versa, avec pour avantage d'avoir une transition entre ces états continue [54]. Ce comportement "stick/slip" se résume analytiquement par l'expression (1.14) :

$$F_t(x_t, \dot{x}_t) = \begin{cases} \text{sign}(\dot{x}_t) \cdot \mu F_n & \text{contact glissant} \\ -\text{sign}(\dot{x}_t) \cdot \mu F_n + k_t \cdot (x_t - x_{ss}) & \text{contact bloqué} \end{cases} \quad (1.14)$$

avec  $x_t$  déplacement de la masse concentrée et  $x_{ss}$  déplacement de la masse en correspondance du passage des états glissant / bloqué . Comme dans le cas du modèle de Coulomb, la force transverse dépend de la vitesse relative entre les deux corps en contact mais, de plus, elle dépend également ici du déplacement relatif  $x$ . L'indétermination de la force transverse en phase d'adhérence est ainsi levée.

La différence avec le modèle de Coulomb est visible également lors de l'observation des courbes représentant la force transverse  $F_t$  au contact en fonction du déplacement relatif des deux solides. Dans le cas de Coulomb, la courbe obtenue est un rectangle parfait tandis que, dans le cas du modèle de Masing, cette courbe devient un parallélogramme (figure 1.6). Les limites inférieure et supérieure du parallélogramme à  $\pm \mu \cdot F_n$  caractérisent le comportement glissant du contact alors

que la droite de pente  $k_t$  représente l'état bloqué.

#### Variation du coefficient de frottement sec

Différents auteurs se sont naturellement intéressés à la caractérisation de la valeur du coefficient de frottement  $\mu$  et de sa variation en fonction du comportement du contact. Généralement, la valeur numérique du coefficient de frottement  $\mu$  utilisée [6], [28] est supposée constante, alors qu'expérimentalement d'importantes variations peuvent être remarquées [19]. Récemment, différentes études ont été conduites afin de déterminer les causes de la variation de la valeur de ce coefficient. Comme reporté par [71], il a été remarqué à partir des années 1970 que le coefficient de frottement statique  $\mu_s$  dépend du taux d'application de la force transverse  $\dot{F}_t$  défini comme la dérivée de  $F_t$  par rapport au temps [58]. Plus précisément, pour de faibles valeurs de  $\dot{F}_t$ , la valeur  $\mu_s$  est égale au coefficient de frottement statique à basse vitesse  $\mu_{ss}$  alors que lorsque la dérivée de la force transverse  $\dot{F}_t$  augmente, le coefficient de frottement  $\mu_s$  décroît jusqu'à une valeur asymptotique (figure 1.7).

D'autres recherches montrent que le coefficient  $\mu$  peut également dépendre du déplacement des surfaces en contact. Pour de faibles valeurs du déplacement, le coefficient est égal au coefficient de frottement statique  $\mu_s$ , alors que pour des valeurs élevées  $\mu$  tend vers une valeur asymptotique  $\mu_d$  appelée coefficient de frottement dynamique (figure 1.8). Dans [19], il a été montré aussi qu'un effet mémoire du comportement existe et que le temps de collage statique entre les surfaces joue

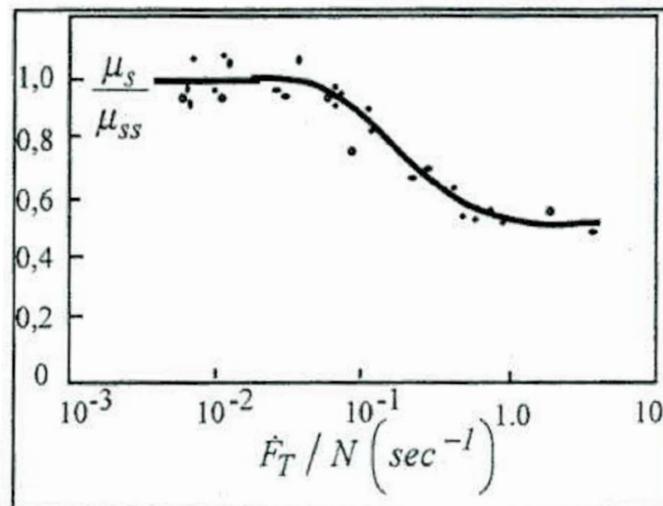


FIG. 1.7 Variation du coefficient de frottement statique  $\mu_s$  en fonction de la variation de la force transverse avec  $N$  force normale et  $F_t$  force transverse [71]

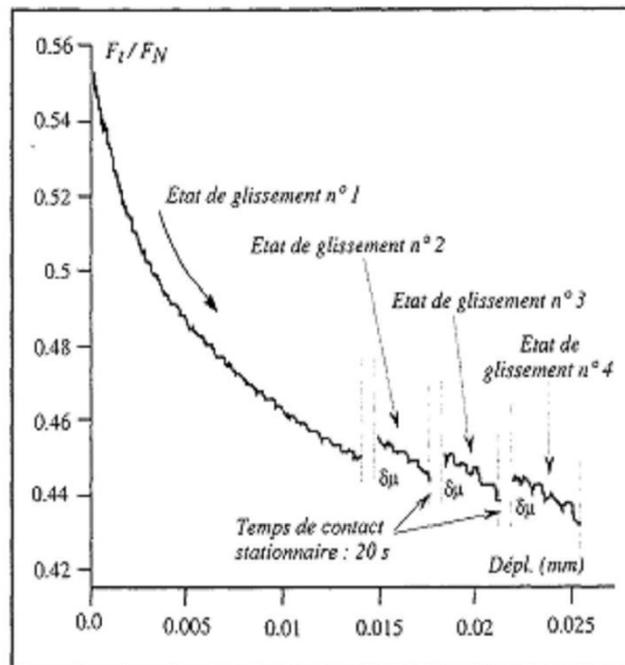


FIG. 1.8 Variation du coefficient de frottement sec  $\mu$  en fonction du déplacement des surfaces frottantes et du temps de contact avec  $F_n$  force normale et  $F_t$  force transverse [71]

un rôle fondamental. En général, plus le temps de collage augmente, plus grandes sont les valeurs du coefficient de frottement initiales. Comme rappelé par [71], les modélisations intégrant une variation du coefficient de frottement sont utilisées exclusivement quand le taux de variation de la force transverse (c'est à dire la fréquence d'excitation) est élevé. C'est pourquoi l'influence de la variation du coefficient de frottement dynamique ou statique, est négligée dans la plupart des études du comportement des structures en présence de frottement sec.

#### 1.4.2 Modèle Microslip

Plusieurs études expérimentales [46] prouvent que le comportement de la surface peut ne pas être homogène, avec des états glissants qui se développent exclusivement sur une partie de la surface alors que la partie restante est caractérisée par un comportement bloqué. Pour rendre compte de ces comportements, il s'avère nécessaire de développer des modèles de contact plus complets et plus généralistes que ceux décrits précédemment, prenant en compte différents états le long de la surface de contact. Les principaux modèles utilisés dans ce cas sont analysés ci-après.

### Modèle de Mindlin

Comme reporté par Popp [54], un premier modèle a été proposé par Cattaneo [11] et amélioré par Mindlin [37] dans les années 1940. Le modèle de Mindlin traduit d'une façon globale le comportement inhomogène de la surface de contact. L'approche est très similaire à la modélisation de type Masing, mais la différence fondamentale concerne la raideur de contact. Contrairement au modèle macroslip, le comportement inhomogène de la surface de contact est pris en compte par l'intermédiaire d'une variation de la raideur de contact en fonction de la force transverse (figure 1.9 (a)). Cette variation modifie la forme des boucles d'hystérésis par rapport au cas macroslip. Le cas complètement glissant demeure représenté par une ligne droite à  $\pm\mu F_n$ . En revanche, en phase bloquée, la boucle suit une ligne courbe et non plus une droite. La raideur tangentielle varie et, par conséquent, la pente le long de la ligne a-b n'est plus constante mais change en fonction de la force transverse et du déplacement (figure 1.9 (b) [32]). Grâce à sa simplicité et à sa facilité de programmation, ce modèle est souvent utilisé lors d'études paramétriques.

Plus récemment [32], cette modélisation a été appliquée pour une caractérisation du contact des frotteurs sous plate-forme des aubes de turbines. Bien que l'approche du problème reste très simple et qu'une bonne concordance expérimentale/numérique n'ait pas été obtenue, le modèle reproduit de façon relativement satisfaisante les courbes d'hystérésis expérimentales ainsi que le comportement réel du contact, du moins d'un point de vue phénoménologique.

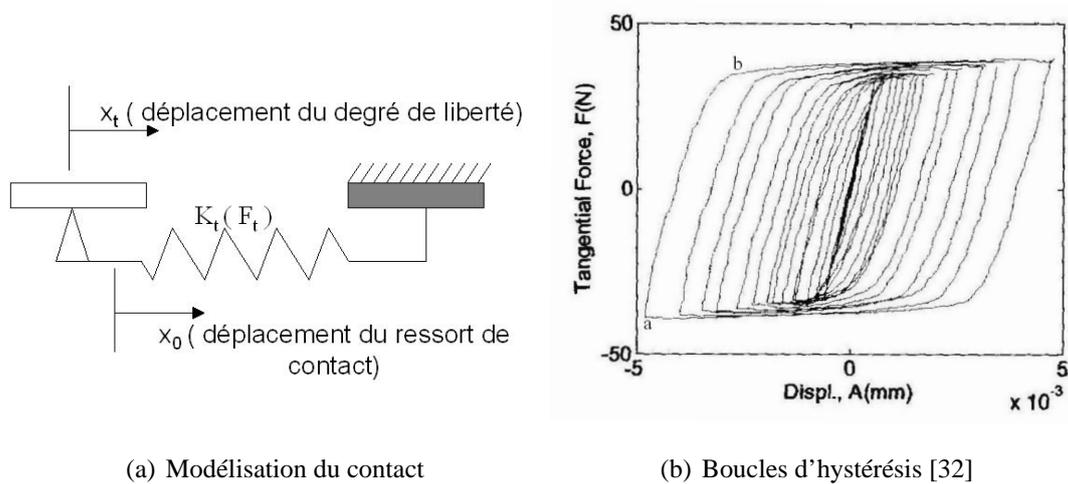


FIG. 1.9 Modélisation de modèle du type microslip - Mindlin

### Modèle de Iwan

Iwan [24] a été le premier à schématiser la surface de contact non pas par un point unique mais par une ligne de contact. L'originalité de cette approche permet de traduire d'un point de vue

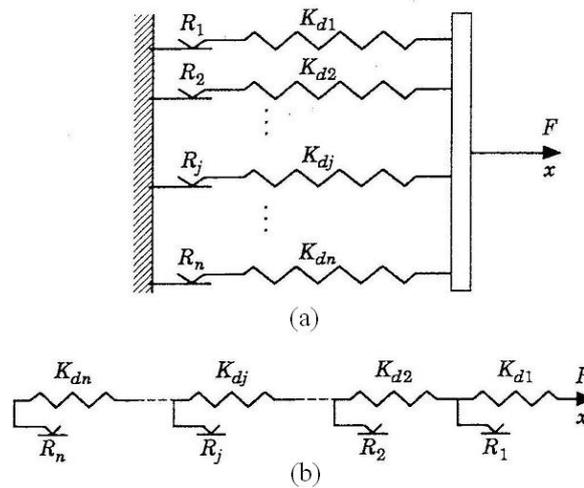


FIG. 1.10 Modèle de Iwan : (a) frotteurs macroslip en parallèle (b) frotteurs macroslip en série où  $R_i$  : Force normale,  $K_{di}$  : raideur tangentielle de contact,  $F$  : Force d'excitation,  $x$  : déplacement

numérique le comportement réel du stick/slip. Si une surface étendue est présente, il faut admettre qu'une partie de la surface glisse alors qu'une autre partie reste collée. Dans ce cas, le stick/slip traduit donc l'état inhomogène de la surface à un instant donné de la vibration et pas seulement un passage entre deux états différents pendant un cycle d'excitation comme dans le cas macroslip.

Iwan schématise le contact de deux façons différentes : soit avec des éléments de type macroslip en parallèle soit avec des éléments macroslip en série comme montré en figure (1.10). De cette façon, chaque ressort schématise une partie de la surface de contact. Selon les différentes valeurs de raideur de contact  $K_{di}$  ou des forces normales  $R_i$  appliquées sur chaque contact, des états différents sont obtenus d'un élément à l'autre. Ceci crée donc bien des zones de surface qui restent bloquées et d'autres glissantes. Les boucles d'hystérésis obtenues par cette approche sont très similaires à celles données en figure (1.9 (b)), comme l'ont montré Sanliturk et Ewins [61].

#### Modèle microslip unidirectionnel

L'approche de Menq [38] permet de passer de la modélisation discrète de Iwan à une modélisation continue (figure 1.11).

Comme le modèle de Iwan, ce modèle rend possibles différents cas de glissement partiel entre les surfaces en contact. Le glissement peut se restreindre à une fraction de la surface, la partie res-

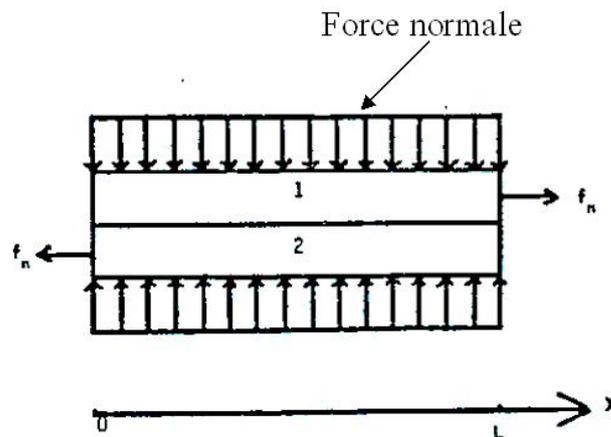


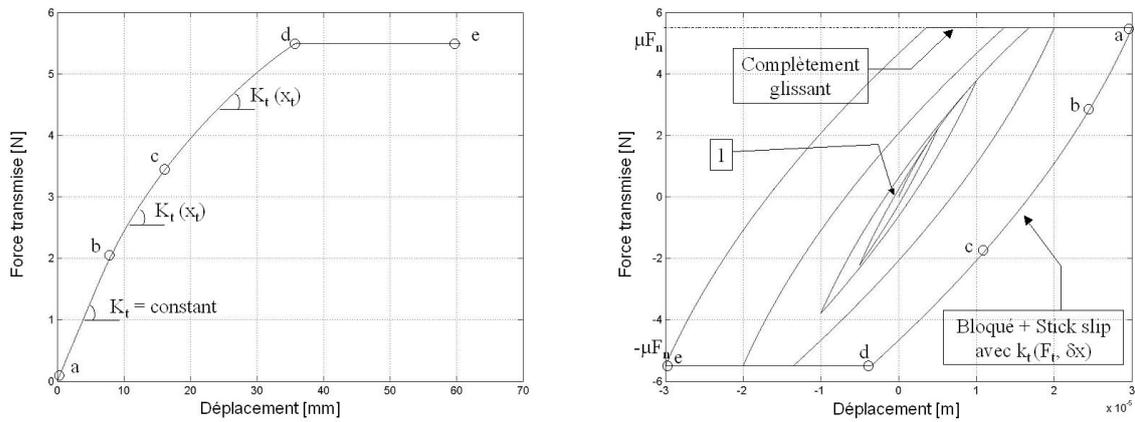
FIG. 1.11 Schématisation du modèle de frottement sec proposé par Menq [38]

tante demeurant bloquée. Les différentes étapes de transition entre les états complètement bloqué et complètement glissant sont, en revanche, hiérarchisées comme suit :

- 1) contact complètement bloqué
- 2) une extrémité du contact commence à glisser
- 3) les deux extrémités du contact glissent alors que la partie centrale est encore bloquée
- 4) contact complètement glissant (toute la surface glisse)

Trois passages intermédiaires doivent donc être analysés. L'aspect théorique est clairement rappelé par [38] et les conclusions les plus importantes sont mises en exergue ci-dessous. La relation liant la force transverse  $F_t$  au déplacement relatif des surfaces  $x$  est illustrée figure (1.12 (a)) et les boucles d'hystérésis sont données figures (1.12 (b)). La raideur tangentielle équivalente pour le modèle macroslip constitue un paramètre d'entrée, alors qu'elle devient une conséquence des caractéristiques de surface induites par les propriétés du matériau et par le rapport des surfaces en contact pour le modèle microslip. Sa valeur reste constante pour le cas macroslip jusqu'au glissement des surfaces alors que la valeur de la raideur tangentielle équivalente est ici déterminée par la pente variable de la courbe force-déplacement. Le module de la raideur diminue dès qu'une extrémité commence à glisser (figure 1.13) et par conséquent, les courbes représentatives de la force transverse en fonction du déplacement relatif des surfaces évoluent en forme.

Les différents points de la figure (1.12) représentent les changements d'état du contact. Du point a jusqu'au point b, le contact est complètement bloqué et la raideur est constante. Dès qu'une extrémité commence à glisser, alors que le reste de la surface est encore bloquée, la raideur équiva-



(a) Force transmise en fonction du déplacement relatif (b) Boucles d’hystérésis - modèle de Menq

FIG. 1.12 Modélisation de modèle du type microslip - Mindlin

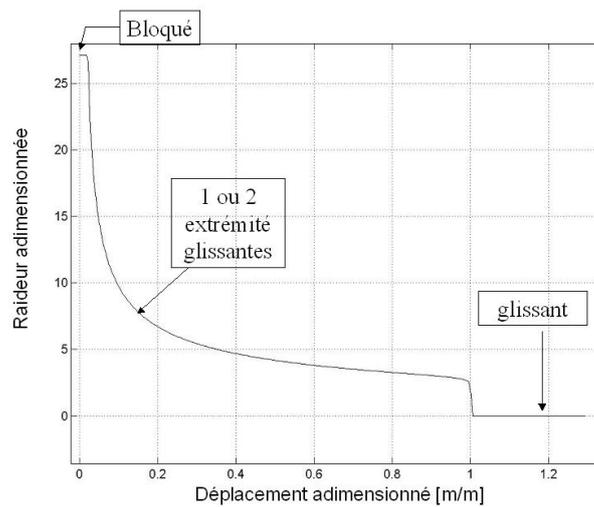


FIG. 1.13 Raideur équivalente - Cas microslip du type Menq

lente du contact diminue et par conséquent la pente entre les points b et c varie en diminuant. De même, entre les points c et d, quand l’autre extrémité du contact commence à glisser (alors que la partie centrale reste bloquée) la raideur diminue encore. C’est seulement quand toute la surface en contact glisse complètement que la force transverse est déterminée par une valeur constante  $\mu F_n$ . En conséquence, les boucles d’hystérésis se caractérisent par une pente variable entre a et d figure (1.12 (b)) lorsque le contact évolue de complètement bloqué à partiellement glissant (avec une et deux extrémités glissantes). On remarque également que si les déplacements relatifs sont faibles et que seul un glissement partiel des surfaces est permis, l’évolution de la courbe n’est pas linéaire

et une certaine quantité d'énergie est dissipée par frottement sec, donnée par la surface de l'aire décrite, même si un état complètement glissant ne caractérise pas le comportement de la structure (boucle d'hystérésis 1 en figure 1.12 (b)).

Les limitations de ce type de modèle concernent l'uniformité de la pression de contact et l'unidirectionalité du contact. L'approche analytique du problème impose au glissement de s'instaurer d'abord aux extrémités des surfaces et de se propager ensuite vers la partie centrale. Le modèle de Menq est repris et généralisé par [14] dans le cas où la pression de contact n'est plus uniforme mais parabolique. Deux configurations distinctes sont considérées :

- 1) le mouvement relatif d'une surface sur un solide indéformable (one-bar méthode)
- 2) deux surfaces en contact supposées déformables. Cette méthode est particulièrement apte à décrire le comportement du contact de type frotteur sous plate-forme [28] et [27].

#### *Modèles microslip bi et tri dimensionnels*

L'hypothèse adoptée par Menq de mouvement relatif unidirectionnel du contact est conservée dans [14]. Sanliturk et Ewins [61] mettent en avant le problème de la directionnalité du mouvement relatif entre les points de contact. Ils considèrent une modélisation de type Iwan à ressorts concentrés avec des trajectoires relatives entre les deux points de contact de forme circulaire ou elliptique. La direction du frottement est identifiée par la valeur de la raideur de contact la plus faible. Le cas d'une trajectoire quelconque est traité par [51]. Les applications naturelles de cette méthode concernent essentiellement les systèmes d'aubes liaisonnées par nageoires où la connaissance du mouvement relatif a une importance majeure.

#### *Modèles plus récents*

Expérimentalement [4], on peut également observer une variation de la force normale autour d'une valeur moyenne imposée. La variation de la charge normale est donnée par le produit de la raideur normale au contact  $k_n$  par le déplacement normal. Bien évidemment, même si  $k_n$  est assez élevée, les déplacements sont caractérisés par des valeurs assez petites et le produit n'atteint pas normalement, de valeurs importantes. En général les variations sont beaucoup plus faibles que celles de la force transverse. Cette variation est prise en compte dans les modèles plus récents de contact et son influence au niveau des réponses forcées n'apparaît pas toujours négligeable. Les derniers modèles introduits par Petrov et Yang [82] [81] [39] [13] [50] prennent en compte la variation de la charge normale et montrent que cette variation peut provoquer la séparation des surfaces. Yang et al. [81] montrent (figure 1.14) que la présence d'une charge normale variable et la modélisation de l'état décollé du contact peuvent amener une discontinuité de la Fonction de Réponse Fréquen-

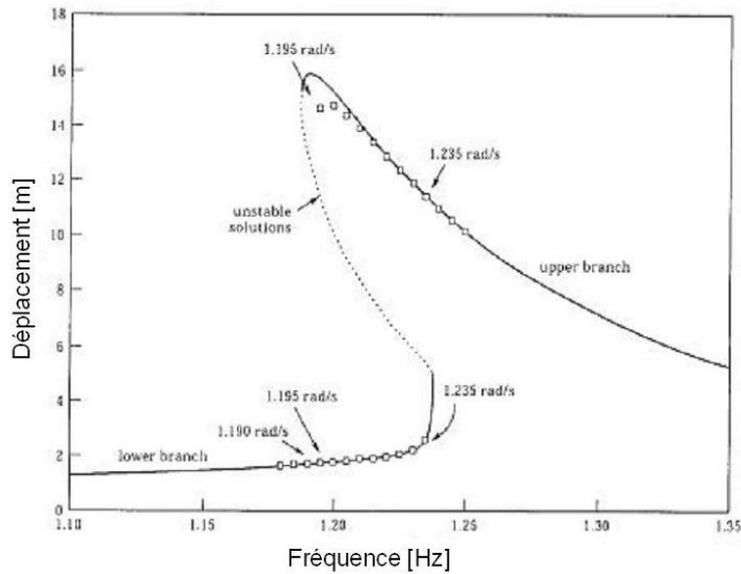


FIG. 1.14 Saut de l'amplitude de la réponse forcée [4]

tielle (FRF) . Le système possède ainsi plusieurs réponses pour une même fréquence d'excitation. Parmi les réponses possibles, certaines sont stables et d'autres pas. Pendant un balayage sinusoïdal, l'amplitude de la réponse forcée saute entre deux branches stables et une faible variation de la fréquence d'excitation peut dans ce cas causer une forte variation des amplitudes. Plus récemment, des résultats similaires ont été obtenus par Petrov [50].

### 1.4.3 Influence de la rugosité

Différentes études expérimentales, conduites à partir des années 1950 [29], démontrent l'importance de la rugosité sur la surface nominale du contact et donc sur la variation de la raideur tangentielle du contact. En première approximation, les modèles microslip et macroslip établissent que cette relation est constante. Cependant, en réalité, la rugosité naturelle empêche les surfaces d'être complètement adhérentes pour de faibles valeurs de la charge normale et la raideur tangentielle entre les surfaces se caractérise par une valeur moins élevée que celle théoriquement attendue. Pour une valeur très importante de la force normale pour laquelle les aspérités sont écrasées, la raideur tangentielle atteint sa valeur maximale dite "asymptotique". Dans le but d'évaluer l'interdépendance entre la raideur tangentielle et la charge normale, la connaissance de la rugosité devient dès lors indispensable.

Les premiers résultats analytiques s'intéressent aux cas purement théoriques d'une rugosité régulière de forme sinusoïdale ou caractérisée par une distribution aléatoire de la hauteur des aspé-

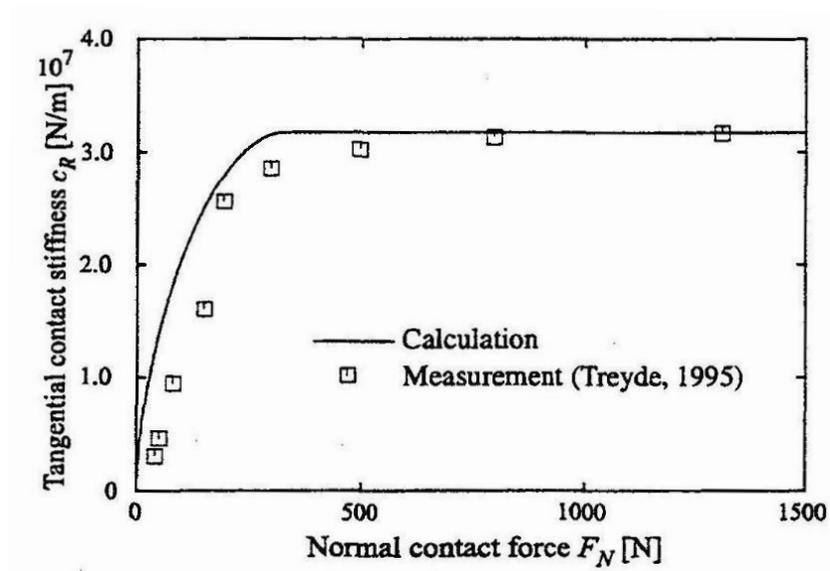


FIG. 1.15 Comparaison expérimentale/numérique de la raideur tangentielle en fonction de la charge normale [64]

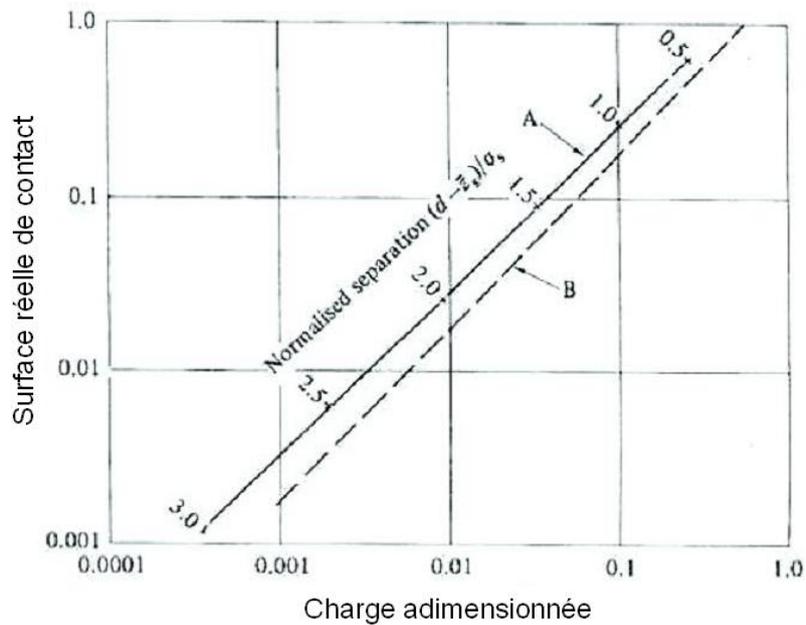


FIG. 1.16 Surface de contact en fonction de la force normale - A) distribution Gaussienne B) distribution exponentielle de la hauteur des aspérités [29]

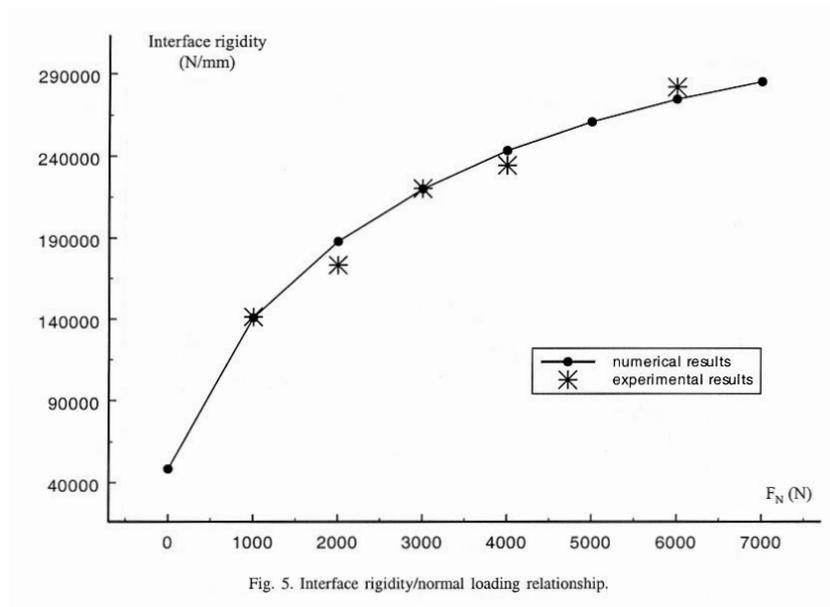


FIG. 1.17 Comparaison expérimentale numérique de la raideur tangentielle en fonction de la charge normale [19]

rités autour d'une valeur moyenne [29]. La relation entre la raideur tangentielle et la force normale est donnée par [64] (cfr. Annexe A) à partir des lois de Hooke, en simulant une distribution aléatoire gaussienne de la hauteur avec des lois déterministes de la densité de probabilité. La principale difficulté est alors de disposer, d'un point de vue expérimentale, des valeurs limites des raideurs normale et tangentielle au contact ainsi que celles de la rugosité. Cette approche paraît donner une bonne corrélation expérimentale numérique comme montré en figure (1.15) dans le cas d'aubes liées par nageoires. La même méthode a été appliquée au calcul de la surface réelle de contact. Bien évidemment, les résultats sont différents selon la loi de distribution choisie. Dans [29], une loi de distribution exponentielle est proposée. Les résultats numériques sont comparés avec ceux obtenus précédemment avec une loi normale. Comme prévu, lorsque la charge normale augmente, la valeur de la surface réelle de contact augmente de la même manière (figure 1.16). Les lois tirées directement d'essais expérimentaux ont aussi montré l'importance de la variation de la raideur tangentielle en fonction de la charge normale. En particulier, dans [19], une loi d'approximation du type  $k_t = \text{const} \cdot \sqrt{F_n}$  est proposée. Pour le cas traité, cette loi donne également une bonne corrélation avec les résultats expérimentaux (figure 1.17).

#### 1.4.4 Opérateurs d'hystérésis

L'utilisation des opérateurs d'hystérésis conduit à des techniques d'analyses très différentes de celles considérées précédemment. L'idée générale consiste à décrire analytiquement, avec des fonctions continues, les courbes de la force transverse (force de restitution) en fonction du déplacement au point de dissipation. Cette approche générale peut être appliquée à tous les systèmes dans lesquels est présent un phénomène dissipatif quelconque. Une des premières applications a été proposée par Dahl [9] pour la caractérisation du frottement sec des roulements à billes. La formulation différentielle de  $F_t$  est différente par rapport aux équations du type 1.14 et elle est donnée par la relation suivante :

$$\frac{\partial F_t}{\partial x} = \sigma_h \left| 1 - \frac{F_t}{\mu F_n} \operatorname{sgn}(\dot{x}) \right|^{i_h} \operatorname{sgn} \left( 1 - \frac{F_t}{\mu F_n} \operatorname{sgn}(\dot{x}) \right) \quad (1.15)$$

avec  $\sigma_h$  et  $i_h$  paramètres du modèle à recalculer à partir des courbes d'hystérésis expérimentales. Après les opérateurs de Dahl, d'autres opérateurs d'hystérésis ont été introduits dans [43], et [1] afin de ne pas se limiter aux cas d'hystérésis dus au frottement sec mais d'étendre la méthode à tous les domaines où les phénomènes dissipatifs sont significatifs. Ces techniques sont d'ailleurs largement utilisées dans des domaines différents de la mécanique tel le génie civil ou le génie parasismique. Dans l'objectif de rendre la formulation mathématique de l'opérateur d'hystérésis la plus générale possible, le modèle proposé dans [1] a été appliqué à un système poutre-plot métallique et validé expérimentalement dans le cas d'excitation harmonique [3] et de type choc [2]. Son extension à un système comportant un composant à comportement non linéaire viscoélastique, est limitée par la dépendance en fréquence voire en température.

Par rapport aux modélisations du contact précédemment répertoriées, l'approche basée sur les opérateurs d'hystérésis reste globale. Le contact est analysé comme un ensemble fermé et les boucles d'hystérésis fournissent une information précise sur le type de contact en permettant le recalage des modèles. Les limites d'une modélisation de ce type sont malheureusement liées à la facilité d'accès aux zones en contact. Pour le cas des aubes de turbomachines liées par nageoires, les zones de contact sont souvent difficilement accessibles et l'instrumentation nécessaire à la mesure des boucles d'hystérésis n'est généralement pas possible. Dans le cas qui nous intéresse, une approche de ce type est donc d'application difficile et une modélisation classique du type macroslip ou microslip est préférable.

### 1.4.5 Conclusions

Cette partie a été consacrée à la description des modèles de contact les plus utilisés en dynamique des structures. Les principales différences au niveau de la modélisation et de la prise en compte du comportement stick/slip ont été mises en évidence. Les différentes modélisations du contact permettent d'établir la valeur de la force transverse transmise par le contact. La force obtenue, le système d'équations à résoudre est non linéaire et à grand nombre de degrés de liberté. En conséquence, la mise au point de méthodes numériques efficaces, adaptées à la réduction des efforts de calcul en présence de système fortement non linéaires, reste une préoccupation constante.

## 1.5 Réduction et résolution des systèmes non linéaires

Les méthodes de réduction déjà présentées ne sont strictement valables que lorsque les systèmes étudiés restent linéaires. Ce paragraphe présente, entre autre, l'état actuel des méthodes les plus répandues pour la réduction des systèmes non linéaires. Une analyse des méthodes adaptées à la résolution de ces systèmes est également conduite.

### 1.5.1 Réduction des systèmes avec non linéarités localisées

Pour l'étude des structures en présence de non linéarités localisées, deux approches sont rencontrées : la première, basé sur les techniques de synthèse modale (méthode de Craig-Bampton) utilise pour la réduction une base modale définie à partir du système linéaire associé. La seconde utilise une réduction modale basée sur des modes non linéaires.

#### *Méthodes de Synthèse modale*

Les premières méthodes de réduction utilisées pour les systèmes en présence de non linéarités sont fondées sur les techniques de sous-structuration, précédemment décrites dans le cadre de la réponse forcée des systèmes linéaires. En effet, ces méthodes, et plus particulièrement la méthode de Craig-Bampton, peuvent très bien être utilisées dans les cas de non linéarités concentrées en prenant quelques précautions sur le choix de degrés de liberté de liaison. Dans le cas de systèmes en présence de frottement sec, par exemple, les degrés de liberté de liaison incluent les noeuds où la non linéarité est effectivement appliquée [71], [56]. L'efficacité de la méthode ne paraît pas être conditionnée par la position des frotteurs sur la structure. En effet de bonnes corrélations numérique expérimental ont été obtenues soit en présence de frotteurs en pieds d'aubes [71] soit dans le cas de nageoires positionnées à environ un tiers de la hauteur [6].

Avec ce type de méthodes on passe d'un système non linéaire à nombre élevé de degrés de

liberté à un système de même type avec un nombre beaucoup plus faible mais toujours significatif de degrés de liberté. De plus, les degrés de liberté où les non linéarités agissent sont conservés de manière explicite. Ainsi, lorsque la rapidité avec laquelle on obtient les résultats devient un paramètre majeur d'analyse (par exemple lors d'une étude paramétrique) cette seule réduction de la taille du système ne suffit pas et d'autres techniques de résolution propres aux systèmes non linéaires doivent être mises en oeuvre.

#### *Modes non-linéaires*

Des équivalences non linéaires des méthodes modales utilisées pour les structures linéaires sont actuellement recherchées, de manière à ce que la réponse forcée puisse être obtenue par combinaison d'une série de modes associés à la structure non linéaire. Ce type d'analyse a été initié à partir des années 1960 avec l'introduction des modes non-linéaires (NNM, non linear normal mode) [59].

Une très bonne étude bibliographique sur les types d'analyses modales pour les structures non linéaires a été conduite dans [23]. La théorie classique des vibrations linéaires permet de découpler les équations d'un système discret ou continu afin d'exprimer les vibrations libres ou forcées comme une superposition de contributions modales [33]. Pour l'équivalence non linéaire une des premières différences concerne le nombre de NNM utilisés. En linéaire, le nombre de modes est au plus égal au nombre de degrés de liberté du système, alors qu'en non linéaire cette limite n'est plus valide et une structure peut avoir un nombre de NNM plus élevé que le nombre de degrés de liberté utilisés. L'obtention des NNM est plus complexe que celle des modes linéaires issus d'un problème aux vecteurs propres. La définition reportée dans [23] associe les modes non linéaires à un type particulier de vibrations libres pendant lesquelles tous les degrés du système vibrent à l'unisson.

Un exemple très explicite d'application des modes non linéaires a été reporté par Vakakis [75] qui analyse un système discret à deux ddl en présence de ressort de raideur cubique. Il met en évidence la différence fondamentale qui doit être faite entre les modes similaires pour lesquels la forme du mode ne dépend pas de l'amplitude modale et les modes non-similaires pour lesquels il y a dépendance. Différentes applications sont reportées dans [74] et [67] mais les systèmes considérés restent toujours extrêmement simples : nombre de degrés de liberté modeste, non linéarités sont toujours exprimables à partir de fonctions analytiques. Les modes non linéaires ont été récemment appliqués aux systèmes continus.

Tous les résultats trouvés dans la bibliographie montrent que le nombre de modes non linéaires nécessaire pour décrire le comportement du système est peu élevé. En figure (1.18) on a

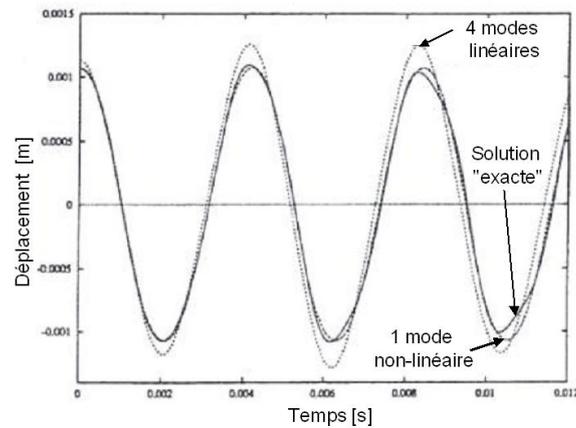


FIG. 1.18 Comparaison entre la résolution exacte et l'approximation donnée avec quatre modes linéaires et un seul mode non linéaire [68]

reporté le cas d'une poutre appuyée aux deux extrémités, modélisée avec 200 degrés de liberté où la non linéarité est représentée par un ressort cubique inséré au milieu de la structure [68]. Dans [47] une nouvelle utilisation des modes non linéaires basée sur une approche de type Galerkin est présentée. Il semble que cette méthode puisse permettre de traiter tout type de non linéarité. Malheureusement l'application concerne encore des ressorts avec une non linéarité cubique. Les particularités associées au frottement sec, où l'expression de la force non linéaire est non seulement définie par morceaux mais également où les limites de validité de chaque équation dépendent de l'amplitude finale du déplacement, semblent en revanche poser problème pour son application.

Deux exemples différents d'application des modes non linéaires aux structures à symétrie cyclique ont été trouvés dans la littérature, [75] et [60]. La non linéarité entre les différents secteurs reste toujours représentée par des ressorts cubiques. On peut donc retenir que l'utilisation des modes non linéaires dans le cas du frottement sec et en présence de systèmes réels doit faire encore l'objet de recherches avancées.

### *Conclusion*

Un bon compromis pour l'étude des systèmes non linéaires désaccordés consiste à utiliser la méthode de synthèse modale de Craig-Bampton qui apporte une réduction intéressante de la taille des systèmes et permet de conserver les degrés de libertés où les non linéarités sont appliquées en tant que ddl physiques. Malgré la validation de cette méthode pour des systèmes simples [71],

certaines limites empêche son application à des systèmes à symétrie cyclique complexes. Comme rappelé par Ravoux [56], la richesse modale qui caractérise la vibration d'une structure à symétrie cyclique désaccordée est beaucoup plus importante que celle de structures classiques et doit être rendue correctement. De plus la réduction de C-B n'agit pas sur la méthode de résolution du système non linéaire mais seulement sur sa taille qui reste significative. Les temps de calculs baissent mais restent toujours trop importants pour permettre de conduire des analyses numériques de type paramétrique. L'introduction de méthodes de résolution adaptées, permettant des gains de temps de calculs plus conséquents tout en garantissant une bonne qualité de résultats, s'avère donc nécessaire [14].

### 1.5.2 Résolution des systèmes non linéaires

Tous les modèles de contact donnent une valeur de la force transverse induite par le frotteur du type  $F_t = F_t(x, \dot{x}, ..)$ . La complexité du modèle joue un rôle important sur le degré de non-linéarité du système. En présence de non-linéarités concentrées telles que celles induites par le frottement sec, l'équation du mouvement peut s'écrire sous la forme (1.16) :

$$[M]\{\ddot{x}_t\} + [C]\{\dot{x}_t\} + [K]\{x_t\} = \{F_{ex}\} - \{F_{nl}\} \quad (1.16)$$

où  $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$  sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de raideur et la non-linéarité du contact s'exprime au travers le vecteur  $\{F_{nl}\}$ . Afin de résoudre ce système d'équations, de nombreuses techniques de résolution ont été mises au point. Seules les plus répandues sont présentées ci-après.

#### *Méthode de la Balance Multi-Harmonique - MHBM*

Une des techniques les plus utilisées est sans aucun doute la méthode de la Balance Multi-Harmonique (MultiHarmonic Balance Method) [38]. Cette méthode consiste à supposer que, dans le cas d'une excitation périodique, le déplacement unidirectionnel inconnu  $x_t(t)$  peut être représenté par une série de Fourier contenant plusieurs ( $M$ ) composantes harmoniques connues (1.17) :

$$x_t(t) = \sum_{j=1}^M B_j \cdot \cos(a_j \omega t - \varphi_j) \quad (1.17)$$

où  $B_j$  représente l'amplitude du déplacement relatif entre les solides en contact,  $\omega$  la pulsation d'excitation du système,  $\varphi_j$  le déphasage entre la force d'excitation et la réponse et  $a_j$  les composantes harmoniques retenues. Au choix, une (HBM avec  $M = 1$ ) ou plusieurs composantes harmoniques (MHBM) peuvent être prises en considération dans la détermination de la réponse [36].

La méthode prévoit aussi une approximation de la force transverse avec une expansion en série de Fourier tronquée au même ordre  $M$  que le déplacement :

$$f_t(t) = \sum_{j=1}^M f_{c_j} \cdot \cos(a_j \omega t - \varphi_j) + f_{s_j} \cdot \sin(a_j \omega t - \varphi_j) \quad (1.18)$$

De cette façon, le système d'équations différentielles non linéaires se réduit à un système algébrique non-linéaire, solvable avec des méthodes classiques de type Newton-Raphson par itérations successives pour chaque valeur de fréquences, et ceci, quelque soit le modèle de contact retenu. Les principales applications rencontrées concernent les modèles macroslip ou microslip mais, plus récemment, la méthode a aussi été appliquée au cas des opérateurs d'hystérésis de Bouc-Wen avec une formulation mathématique beaucoup plus compliquée par rapport aux cas précédents [43].

#### *Méthode de la balance incrementale (Incremental Balance Method IBM)*

D'autres méthodes permettant une résolution dans le domaine des fréquences ont été introduites, comme par exemple la méthode incrémentale de la balance harmonique [53]. Cette méthode est basée sur le principe incrémental de Hamilton et son application aux problèmes de vibrations périodiques des systèmes élastiques a été proposée dans [80]. Cette méthode a été utilisée non seulement pour obtenir les solutions périodiques en présence de non linéarités mais aussi pour étudier la stabilité des systèmes avec oscillateurs cubiques (duffing) [35] ou encore en présence d'interactions fluide/structure [57]. Comme dans le cas de la MHBM, l'approximation donnée par la méthode est directement liée au nombre de composantes harmoniques conservées. Dans [53], la capacité de ces techniques à rendre compte de l'état glissant de contact entre deux degrés de liberté a été analysée, et il a été montré qu'une bonne approximation ne peut être obtenue que si au moins trois composantes harmoniques sont conservées. D'autres méthodes telles que les échelles multiples ou l'alternating frequency/time domain ont été également développées pour la recherche des solutions périodiques [10] ou pour l'étude de la stabilité de systèmes en présence de non linéarités [21]. La méthode (HFTM : hybrid frequency-time method) proposée dans [22] paraît également intéressante.

#### *Conclusion*

En général, la méthode de la balance multi harmonique reste la méthode la plus utilisée pour les problèmes de frottement sec. Son utilisation représente un très bon compromis entre la rapidité d'obtention des résultats et sa facilité de programmation ; sa généralité la rend applicable à plusieurs types de non linéarités. Les limitations de ces méthodes concernent le choix des composantes harmoniques présentes à retenir, choix qui ne peut être étayé a priori. Le danger est d'inclure trop de composantes, rendant la méthode moins intéressante, ou alors d'en inclure trop peu et de

ne pas traduire correctement la dynamique du système. Ce type d'approche peut être trop pénalisant pour les problèmes de stabilité de systèmes pour lesquels le but est d'identifier le plus grand nombre possible de fréquences d'instabilité. Dans ces cas, d'autres méthodes, et notamment celle des échelles multiples, sont plus largement utilisées.

## 1.6 Résultats numériques pour systèmes désaccordés en présence de frottement sec

Après avoir passé en revue les techniques de réduction et de résolution les plus utilisées, ce paragraphe s'intéresse aux études numériques relatives aux systèmes désaccordés non linéaires. Dans la littérature, les études concernant des structures à symétrie cyclique désaccordées en présence de non linéarités sont rares ; et seulement quelques publications très récentes abordent cette problématique.

Dans une des premières études numériques [62], la structure à symétrie cyclique est schématisée simplement en utilisant deux degrés de liberté par aube comme montré en figure (1.19). Cette étude est centrée sur les frotteurs sous plate-forme, avec des poids de masselottes différents permettant des états de contact variés. Les poids de ces masselottes, qui optimisent le comportement des frotteurs, sont déterminés à partir de différents test expérimentaux originaux. En considérant un système simple à 2 ddl par aube, Sanliturk recherche cet optimum à partir de configurations désaccordées, en examinant les valeurs des réponses maximales obtenues. Le désaccordage du système

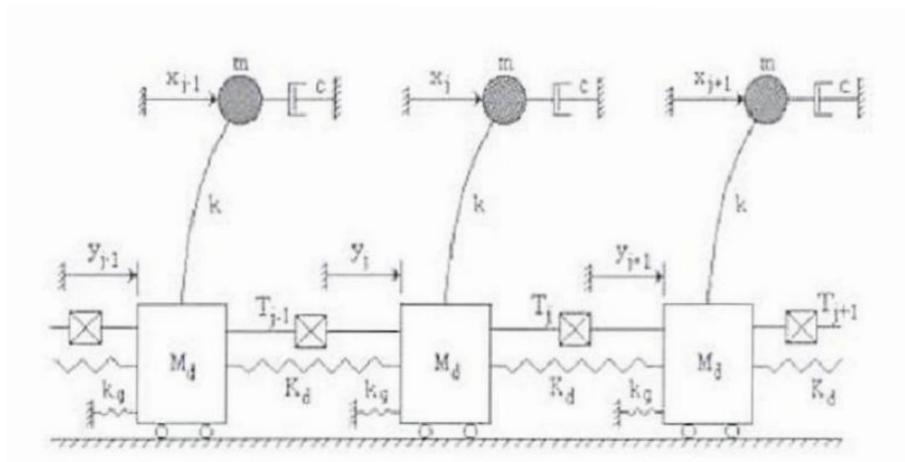


FIG. 1.19 Schématisation du système étudié par Sanliturk [62]

est tel que la distribution de la charge  $\mu F_n$  varie pour chaque secteur de façon à recouvrir toutes les configurations possibles du contact de bloqué à glissant. Il est montré que les contacts caractérisés par des valeurs de la charge la plus proche de la charge optimale, réduisent de manière optimale les amplitudes des aubes voisines de ces contacts. De cette façon il devient simple expérimentalement d'identifier la valeur de la charge optimale à partir d'un nombre très limité d'expérimentations. Il suffit en principe de considérer un seul cas pour lequel toute la structure est subdivisée en différent secteurs. Pour chaque secteur on utilise un frotteur sous plate-forme avec des masses différentes et le secteur pour lequel les amplitudes sont les plus faibles est celui caractérisé par la charge la plus proche de la charge optimale. La généralisation de ces résultats en fonction notamment de la rigidité du disque sur lequel les aubes sont montées, reste à étudier. La modélisation la structure retenue (2 ddl par aube) et le type de désaccordage (déterministe) révèle que les études sur ces types de problématiques, sont encore en phase initiale et se concentrent sur les aspects fondamentaux.

Dans le cas d'une approche plus réaliste, il est évident qu'une schématisation avec deux degrés de liberté par aube n'est pas suffisante pour obtenir un comportement satisfaisant. L'approche à utiliser pour les structures réelles doit prendre en compte les formes géométriques complexes des aubes et, actuellement, la seule procédure qui puisse permettre une étude "assez" rapide d'une structure réelle désaccordée en présence de frottement apparaît être celle développée par Petrov [52]. L'application de la méthode MHBM et une réduction de la taille des systèmes grâce aux méthodes de condensation adaptées aux problèmes non linéaires, apparaît comme le meilleur compromis entre rapidité de calculs et représentativité du comportement. Vu la nature aléatoire du désaccordage, cette procédure a été mise au point pour une éventuelle approche statistique du problème. Cependant, pour l'instant, seul un cas représentatif a été considéré et différents types de désaccordage analysés : désaccordage des propriétés de contact, désaccordage au niveau des fréquences de résonance de chaque aube et au niveau de l'espace inter-aube.

Après avoir considéré plusieurs cas tests pour les trois types de désaccordages différents, une caractéristique importante se dégage : les facteurs d'amplitudes obtenus pour un désaccordage des propriétés de contact apparaissent généralement plus faibles que ceux issus d'un désaccordage des fréquences naturelles (figure 1.20). En revanche, l'étude considère juste quelques cas numériques (25 cas tests) et il manque une vraie approche statistique pour démontrer que ces caractéristiques ont une validité générale. Après avoir considéré les principaux aspects numériques qui concernent les structures désaccordés en présence de non linéarités, les dispositifs expérimentaux les plus représentatifs sont présentés afin, notamment, de mettre en évidence les difficultés des ap-

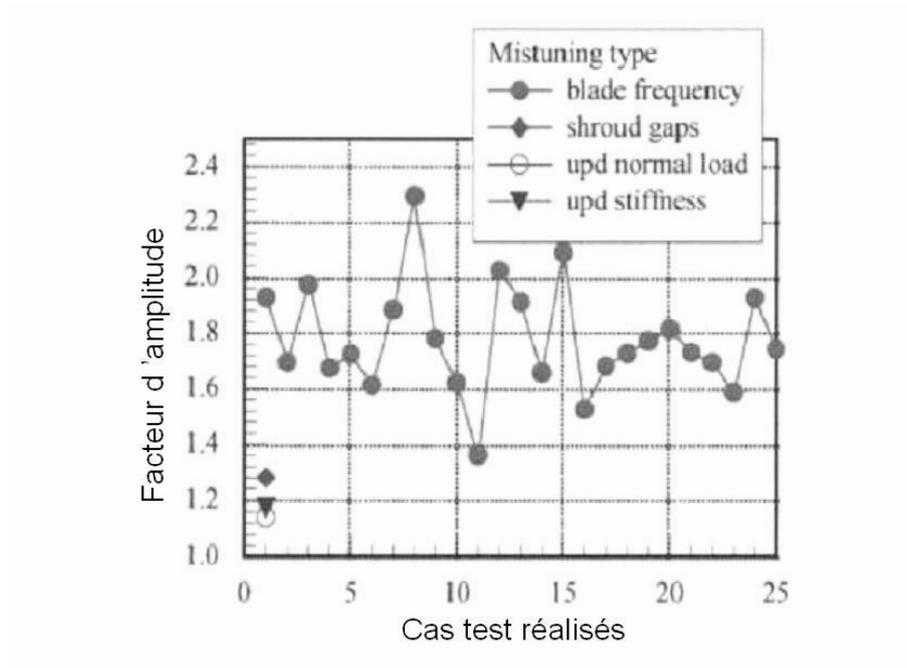


FIG. 1.20 Comparaison des facteurs d'amplitudes obtenus pour les différents types de désaccordage

proches expérimentales du problème.

## 1.7 Dispositifs expérimentaux en présence de frottement sec

Les études expérimentales relatives au comportement dynamique des ensembles aubés en présence d'éléments amortisseurs, se sont en premier lieu concentrées sur la seule problématique liée au frottement sec. C'est seulement récemment que des dispositifs expérimentaux plus complexes ont considéré les deux aspects du désaccordage et du frottement. Il s'agit dans tous les cas, d'essais pour lesquels le comportement de la structure est non linéaire et d'un point de vue expérimental des précautions particulières doivent être prises avant de procéder à l'acquisition de données.

### 1.7.1 Techniques expérimentales

En toute théorie, lorsque le phénomène de frottement sec est en jeu, ni le principe d'homogénéité ni le principe de superposition ne sont valables [23]. Les signes d'un comportement non linéaire sont recherchés par l'intermédiaire de la variation des fréquences naturelles en fonction de

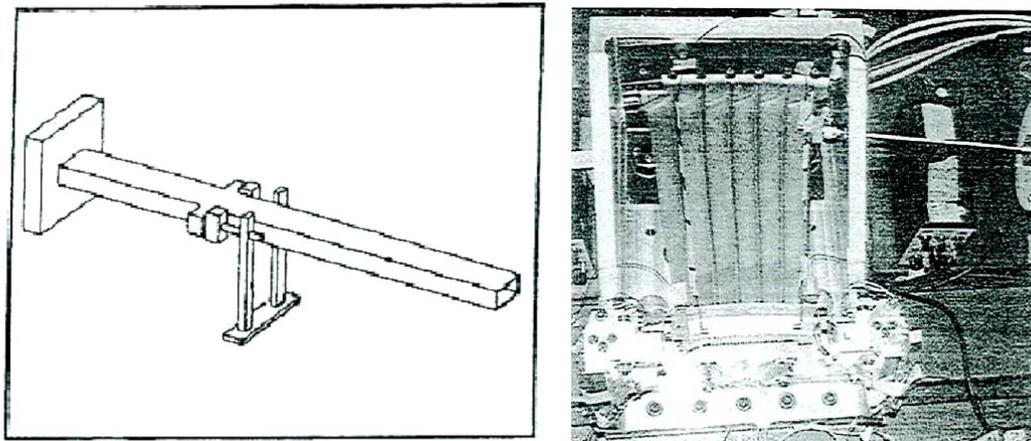
la force d'excitation et/ou de la variation des rapports de l'amplitude de la réponse stabilisée en fonction de la force d'excitation à fréquence constante. En conséquence, dans le cas de comportements non linéaires, le niveau d'excitation doit être nécessairement contrôlé pendant la mesure afin de ne pas fausser les résultats, précaution inutile dans le cas de systèmes à comportement linéaire [16] (la réponse du système dépend du module de l'excitation).

Les méthodologies expérimentales les plus largement utilisées sont conduites dans le domaine fréquentiel avec des excitations de type sinus balayé dans une étendue fréquentielle donnée (fréquences initiale, finale et pas fréquentiel fixés). Les systèmes d'acquisition doivent alors disposer d'un contrôle (asservissement) permettant à l'excitateur électrodynamique de délivrer le même niveau d'excitation pour chaque valeur de fréquence balayée. Les systèmes d'acquisition les plus simples (de type analyseur dynamique) ne possèdent pas généralement cette fonctionnalité, ce qui n'est pas le cas pour les systèmes les plus performants (par exemple, LMS Cada-x).

### 1.7.2 Résultats expérimentaux - système à un seul frotteur

Plusieurs études expérimentales [5], [6], [72], [69], [14] ont été conduites au cours de ces dernières années afin, d'une part d'étudier le comportement d'aubes isolées en présence du frottement sec, et d'autre part d'être en mesure de mieux modéliser le comportement de ce type de systèmes. Une étude expérimentale simplifiée permet en effet de bien isoler l'influence du frottement sec sur le comportement dynamique tout en éliminant la participation d'autres facteurs tels que le désaccordage ou l'interaction fluide/structure (qui jouent eux aussi un rôle capital sur la prédiction des réponses forcées d'une structure réelle). Les tests expérimentaux reproduisent les dispositifs de liaisonnement les plus utilisés dans le milieu industriel.

Berthiller [6] propose une poutre avec un dispositif frotteur positionné à proximité de l'encastrement, simulant ainsi le comportement d'un frotteur en pied d'aube (figure 1.21 (a)). La charge normale de contact et la force d'excitation sont les principaux paramètres à contrôler expérimentalement. Il est souvent compliqué d'obtenir expérimentalement les trois zones de fonctionnement typiques du contact (bloqué, glissant et stick/slip) en raison du niveau des forces d'excitation ou des forces normales au contact nécessaires pour faire à la fois glisser et bloquer complètement le contact. Berruti et al.[5] utilisent un secteur d'un étage de moteur d'avion afin d'analyser l'influence du frottement sous plate-forme sur le comportement dynamique (figure 1.21 (b)). L'attention portée à la mise en oeuvre de ce dispositif rend cette application particulièrement intéressante. Les déplacements et la force normale au niveau du contact sont mesurés à l'aide de jauges d'extensométrie et d'accéléromètres. Grâce aux valeurs expérimentales de la force tangentielle au contact et du dé-



(a) Poutre en présence de frotteurs [6]

(b) Frottement en pied d'aubes pour un secteur d'un turboréacteur d'avion [5]

FIG. 1.21 Exemples des dispositifs expérimentaux

placement, les boucles de la force de restitution en fonction du déplacement relatif sont obtenues et permettent un choix pertinent du modèle de contact. A partir de l'analyse de ces boucles, un double comportement macro/micro a pu être observé en fonction de la force normale appliquée au contact.

D'autres recherches expérimentales ont été élaborées avec comme objectif, la maîtrise et l'optimisation des frotteurs inter-aubes (présents dans les moteurs d'avions les plus récents). Dans ce cas, les forces centrifuges poussent ces éléments contre la plate-forme des aubes provoquant de grandes variations de la force normale en fonction de la vitesse de rotation. Expérimentalement, [14] et [46], une charge statique se substitue généralement à la force centrifuge mais l'effet sur le comportement reste inchangé. Les résultats obtenus sont classiquement présentés sous forme de fonctions de réponse fréquentielle (FRF). Plusieurs expérimentations, réalisées avec des valeurs différentes du rapport force d'excitation sur force normale  $F_{ex}/F_n$ , reflètent le comportement dynamique de la structure en présence du frottement. D'une manière générale, l'influence de la force normale de contact est analysée pour un seul mode (normalement celui correspondant à la fréquence la plus basse) [46], [6]. L'influence du contact est également étudiée dans le cas où plusieurs modes co-existent [72], avec des couplages possibles flexion/torsion. Indépendamment du comportement du contact, pour différentes valeurs du rapport  $F_{ex}/F_n$ , le contact peut prendre différents états de bloqué à glissant. Une réponse fréquentielle classique est illustrée figure (1.22) et (1.23) où les cas bloqué, glissant et stick/slip sont clairement mis en évidence. Dans le cas de comportement stick/slip, la conséquence la plus importante d'un point de vue dynamique est représentée par le fait que les pics de résonance peuvent être complètement aplatis, comme mis en évidence par les

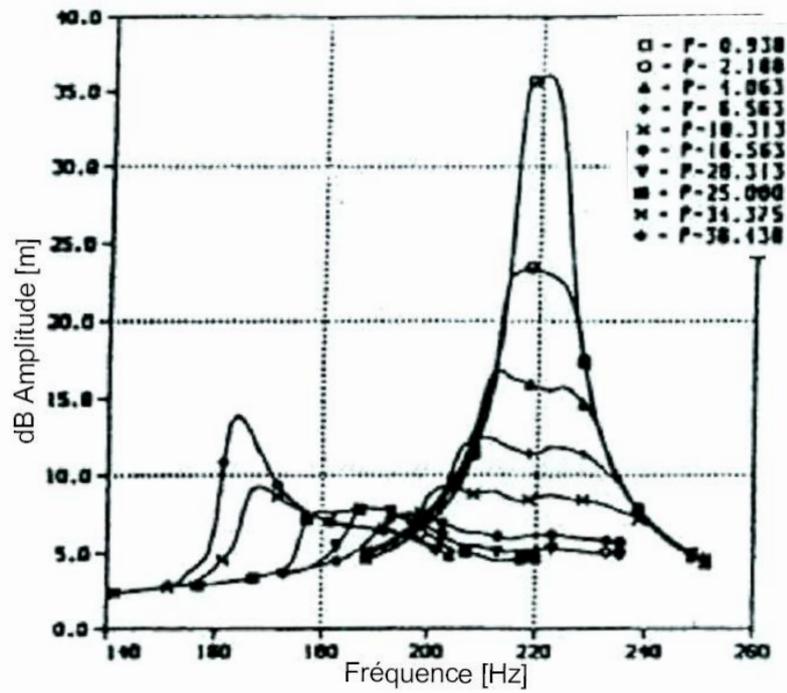


FIG. 1.22 Réponse forcée du dispositif de la figure (1.21(a)) [6]

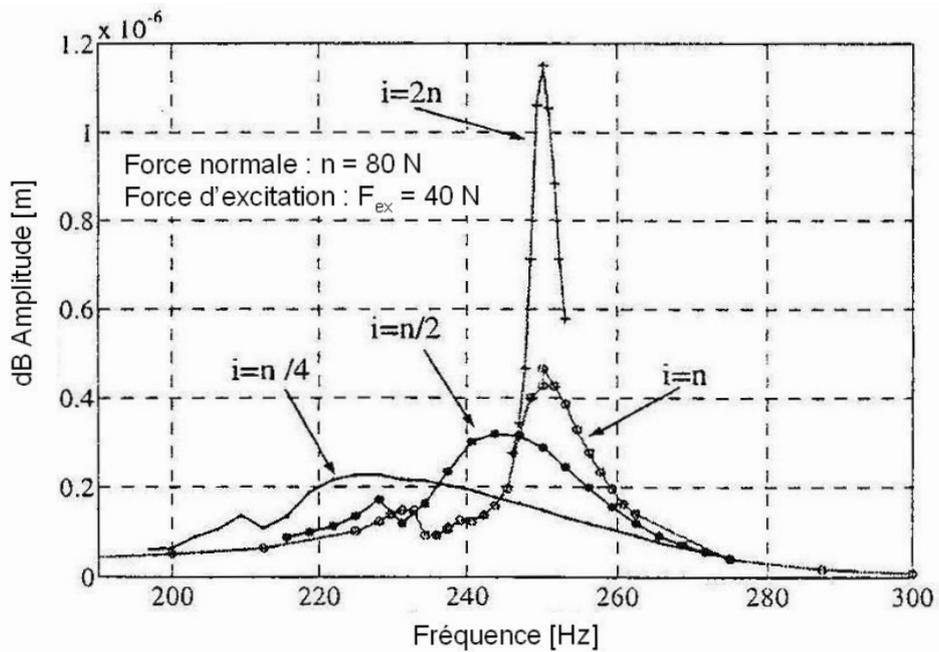


FIG. 1.23 Réponse forcée du dispositif de la figure (1.21(b)) [5]

résultats numériques trouvés dans la bibliographie. Le système ne présente plus aucune résonance lorsque le frotteur est en phase optimale.

Si le phénomène d'aplatissement des pics de résonance est bien connu, les argumentations avancées par la communauté scientifique pour l'expliquer sont de deux ordres. Dans un cas, l'aplatissement des pics est expliqué par la dissipation d'énergie au niveau du frotteur [5]. Dans l'autre cas [72], le déphasage entre la force d'excitation et le déplacement au niveau du contact est mis en avant. Une relation entre l'énergie dissipée et l'amplitude des pics a été recherchée [5]. Des résultats expérimentaux montrent qu'en présence de frottement sec le système dissiperait jusqu'à 80% de l'énergie introduite. La deuxième approche [72] justifie l'aplatissement des pics par l'introduction d'un déphasage entre la force d'excitation et le déplacement du point de contact. Avec cette interprétation, la présence du frotteur est indispensable, non pour dissiper une grande quantité d'énergie, mais plutôt parce que la non linéarité du comportement permet au mouvement de se mettre en déphasage par rapport à la force d'excitation, interdisant ainsi toute résonance. Aucune étude numérique détaillée n'a été conduite jusqu'alors afin de montrer quelle explication peut justifier au mieux le phénomène d'aplatissement des pics.

### 1.7.3 Résultats expérimentaux - système à $n$ frotteurs à symétrie cyclique

Dans la bibliographie les seules études rencontrées qui considèrent à la fois le désaccordage des structures à symétrie cyclique de type aubages et la présence de non linéarités liées à la présence de dispositifs de dissipation sont : [66] (Sextro), [63] (Ewins) et [56] (Ravoux). Le premier dispositif, développé par l'équipe de l'université de Hannover, photographié en figure (1.24) est très représentatif de structures réelles et permet d'étudier le comportement dynamique de la structure en présence de frotteurs sous plate-forme. L'excitation est générée par trois excitateurs sans contact ferromagnétiques. Puisque la structure est mise en rotation, l'ordre moteur de la force d'excitation est parfaitement contrôlé et l'étude se concentre sur le désaccordage de la structure avec une excitation liée au troisième Ordre Moteur. La variation d'amplitude par rapport au cas complètement accordé apparaît très importante comme montré figure (1.25). Actuellement deux types d'approches sont engagées pour la poursuite de ces travaux. Dans [45], la recherche est centrée sur l'analyse du comportement dynamique en fonction de différents frotteurs sous plate-forme. En effet, différents types de surfaces en contact peuvent donner lieu à des réponses très différentes. Dans [20], [65], de nouvelles approches statistiques applicables aux comportements non linéaires de telles structures ont été étudiées.

Le dispositif présenté par Sever-Ewins [63] (figure 1.26), présente une forte analogie avec

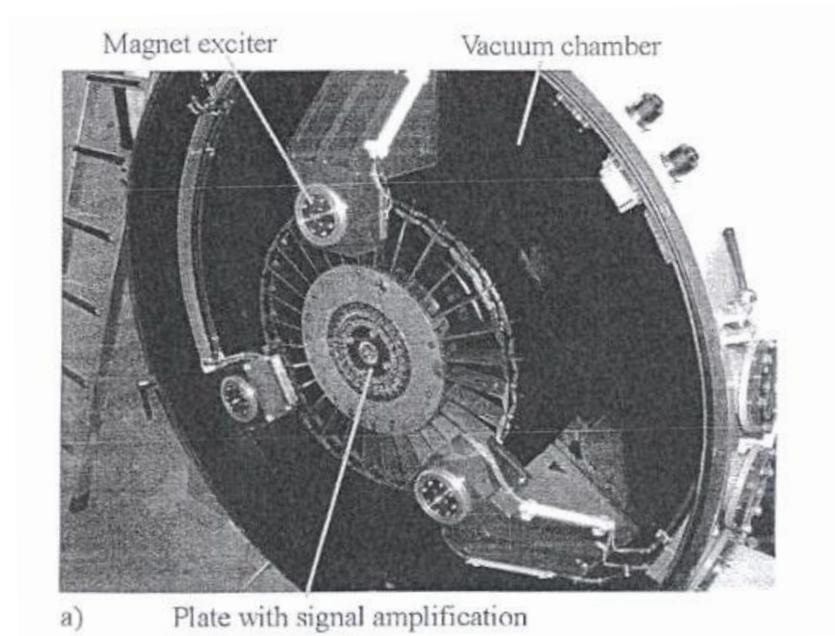


FIG. 1.24 Dispositif expérimental utilisé par l'équipe de Sextro [66]

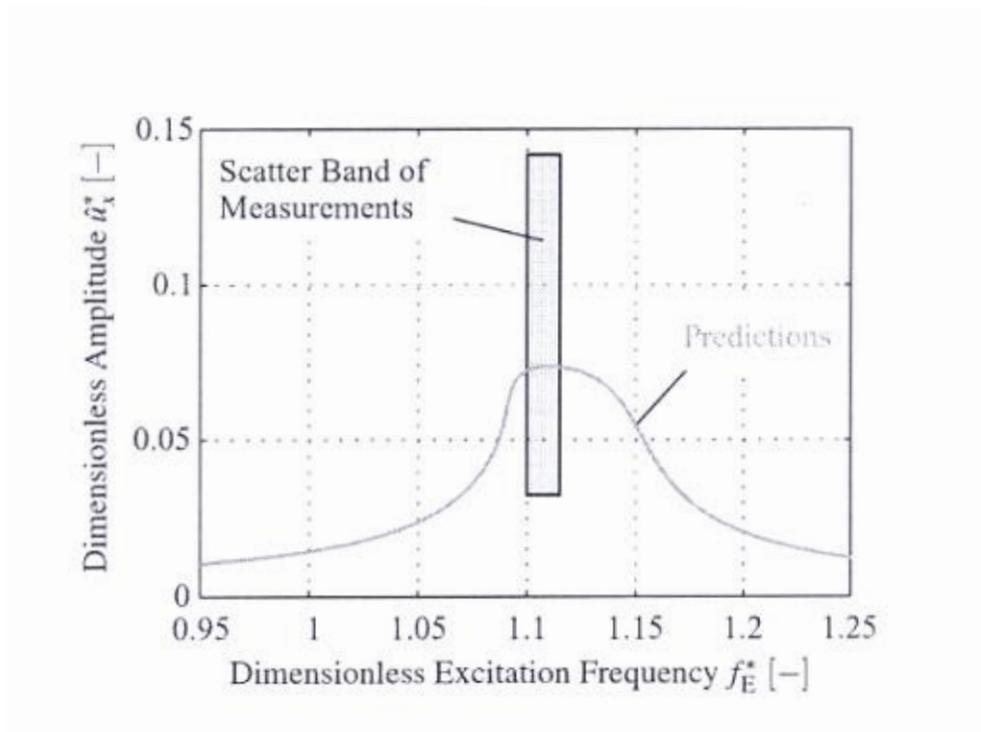
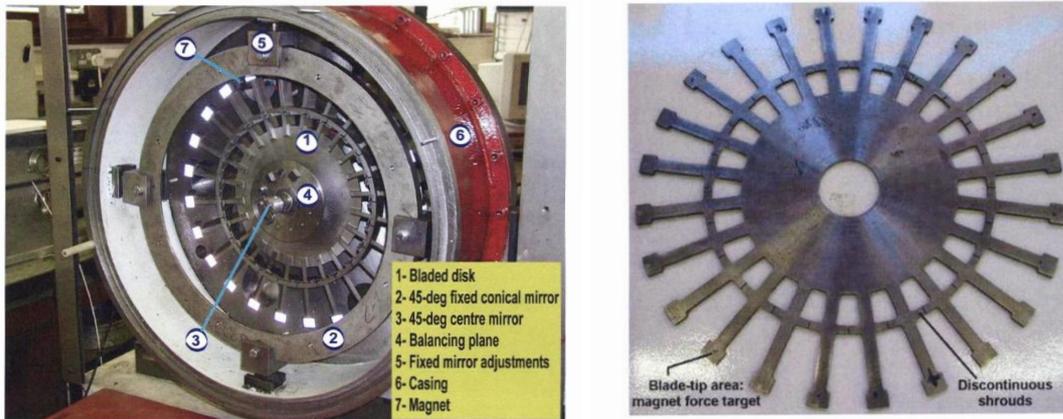


FIG. 1.25 Résultats de la réponse désaccordée [45]



(a) Vue d'ensemble du dispositif

(b) Géométrie simplifiée des pales

FIG. 1.26 Dispositif expérimental présenté par Sever [63]

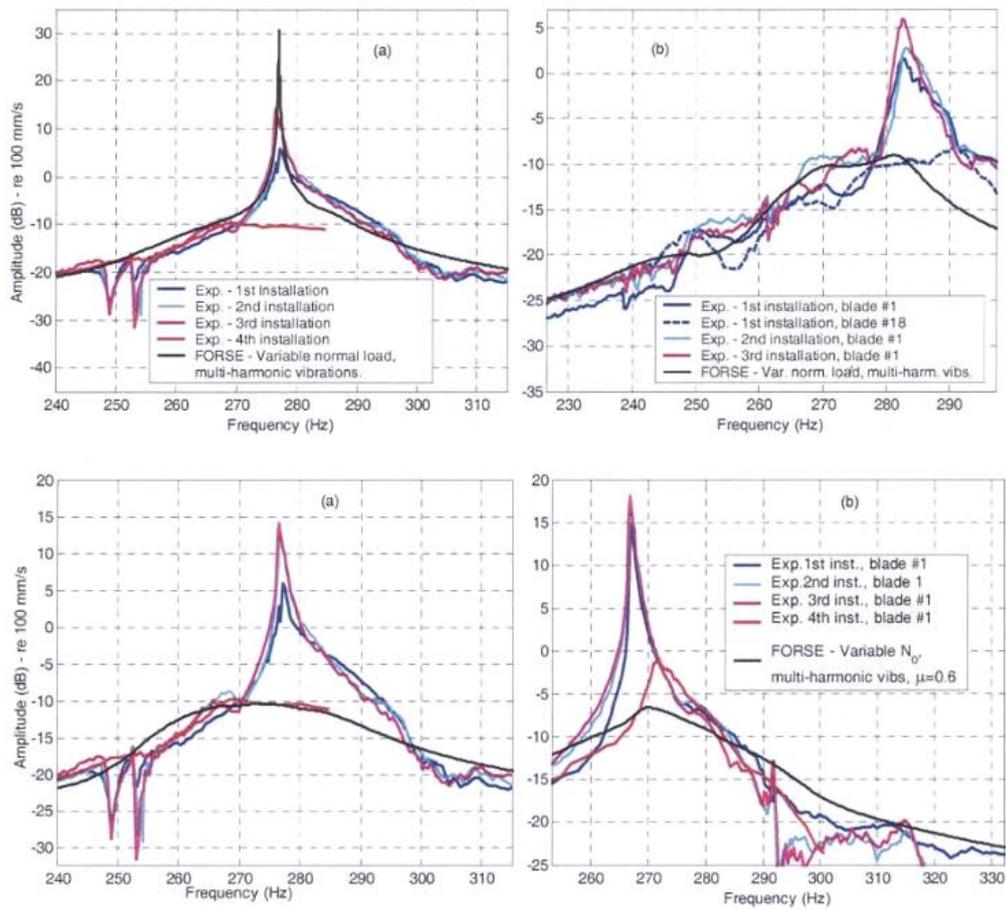


FIG. 1.27 Comparaison expérimentale - numérique obtenue par Sever [63]

celui de Sextro avec une géométrie des aubes très simplifiée mais un comportement dynamique représentatif d'un cas réel. Le système de mesure utilise un dispositif laser original (Laser Doppler Velocimeter) et l'excitation est de type ferromagnétiques générant des Ordres Moteurs. La structure est également en rotation dans une chambre à vide afin d'éviter les problématiques de l'itération fluide/structure et d'isoler la seule problématique liée au désaccordage. La comparaison expérimentale numérique obtenue dans le cadre de cette étude est bonne, comme montré figure (1.27). Il est aussi mis en évidence que la succession des essais expérimentaux peut amener de fortes variations des paramètres de contact et par conséquent à des réponses forcées qui évoluent largement.

Enfin Ravoux, de même que Sextro et Ewins, se pose le problème d'étudier le comportement des structures cycliques en présence de frottement sec. Une analyse plus détaillée du dispositif est présentée ici.

#### *Dispositif expérimental 13 aubes*

Le dispositif (figure 1.28), conçu au LDMS/INSA en collaboration avec Thermodyn (Le Creusot) Nuovo Pignone / division de General Electric a été présenté dans [56].

On reporte ici ses caractéristiques principales.

- La géométrie est à la fois simple mais représentative d'un système réel.
- Les aubes sont représentées par des parallélépipèdes.
- Les nageoires taillées dans la masse des aubes sont instrumentées par des jauges.
- Les fréquences des premiers modes sont inférieures à 2500 Hz
- Le système de mise en charge du contact reste simple et rapide
- La charge normale est limitée à 1500 N
- Les surfaces de contact restent parallèles pendant l'expérimentation

Le choix du nombre d'aubes (prototype de 13 poutres avec 26 nageoires) a été conditionné par des impératifs liés à la réalisation de l'encastrement et à la mise en charge des interfaces. La principale difficulté rencontrée concerne la mise en charge des nageoires. Deux vis agissent sur une goupille traversant l'alésage usiné dans la partie inférieure cylindrique du pied d'aube. Ces deux vis sont reprises sur le disque rigide sur lequel sont fixées les aubes (figure 1.29). La fréquence naturelle expérimentale est de 250 Hz pour le premier mode de flexion des aubes et de 1415 Hz pour le deuxième mode. La valeur de l'écart type pour la première et la deuxième fréquence est inférieure à 0.5% et donc le système peut être considéré accordé. La structure n'est pas mise en rotation et la force d'excitation agit sur une aube seulement. En conséquence, tous les modes peuvent être excités à partir d'un seul balayage sinusoïdal.

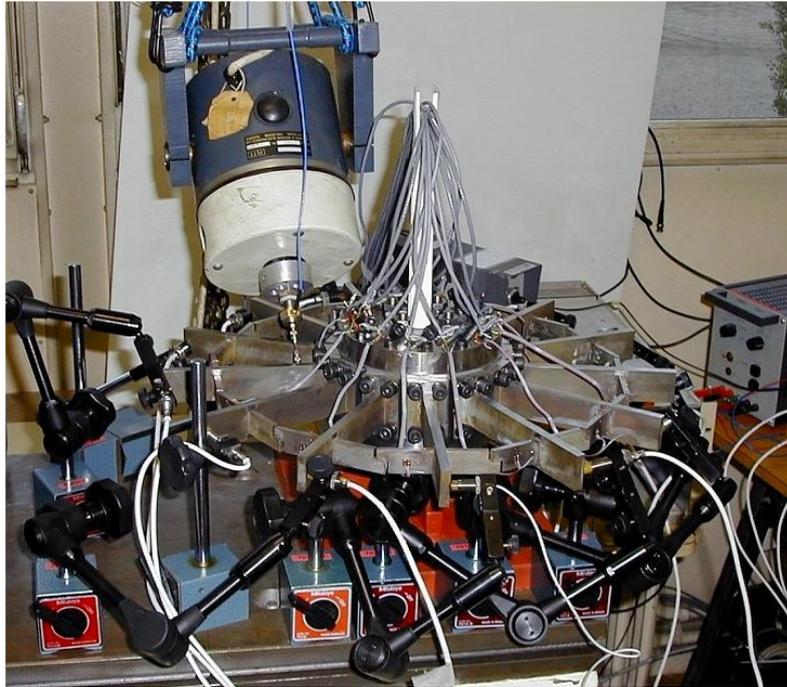


FIG. 1.28 Dispositif expérimental à 13 aubes

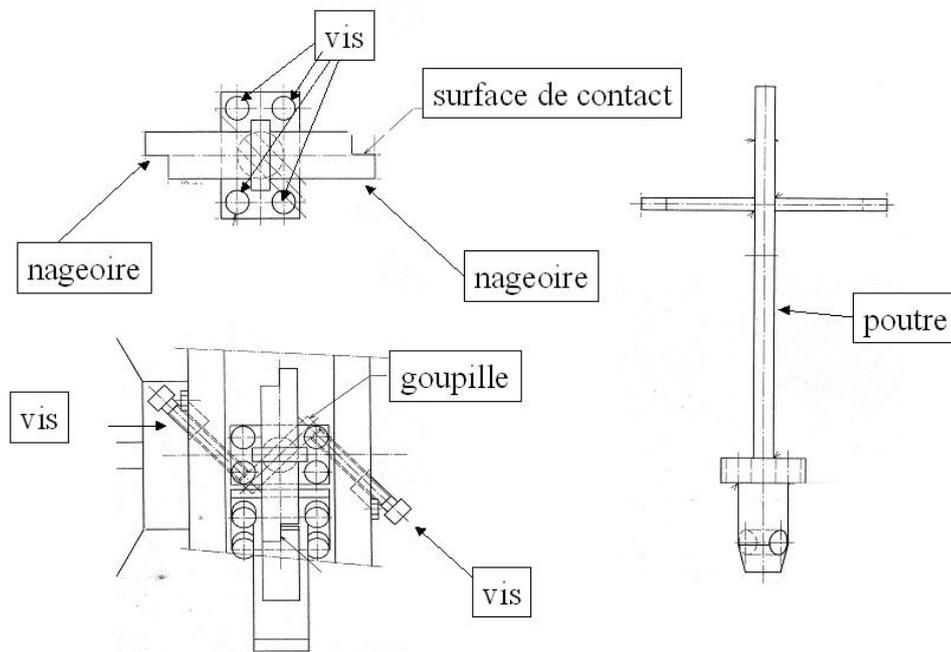


FIG. 1.29 Mécanisme de mise en charge du contact nageoire-nageoire

*Résultats expérimentaux*

Les premiers résultats obtenus par Ravoux ont confirmé l'intérêt du dispositif. En revanche, ils ont également mis en évidence des phénomènes qui n'ont pas pu être expliqués de manière totalement satisfaisante. Par exemple, en excitant le système pour différentes valeurs de charge normale, des pics de résonance relatifs au même mode ont été obtenus très loin les uns des autres, comme le montre le tableau (1.1) dans lequel sont reportées les fréquences naturelles mesurées pour deux différentes configurations de charge. Un écart entre les fréquences de résonance, de l'ordre de 10% à 17% et même de 25%, peut être observé pour de faibles valeurs de la charge normale. Ces écarts sont très importants, d'autant plus que le système est naturellement intrinsèquement peu désaccordé et il paraît logique de penser que dans ce cas le contact intervient largement. En augmentant la valeur de la charge normale, l'effet du désaccordage diminue considérablement et les écarts des fréquences de résonance atteignent des valeurs classiquement trouvées dans la bibliographie avec des variations l'ordre de 2 à 5%. En figure (1.30), ce phénomène est mis en évidence pour le mode de deuxième flexion à quatre diamètres.

Un autre résultat surprenant concerne les différents types apparents d'état du contact bloqué qui ont été obtenus. En excitant le dispositif avec une force normale de 200 et 1100  $N$ , l'état du

Fréquences [Hz]	Modes $F_n = 220 N$	Fréquences [Hz]	Modes $F_n = 1100 N$
1429	$2F 6D$	1480	$2F 6D$
1475	$2F 5D$	1519	$2F 5D$
1490	$2F 4D$	1530	$2F 5D$
1628	$2F 4D$	1586	$2F 4D$
1685	$2F 3D$	1617	$2F 4D$
1691	$2F 3D$	1792	$2F 2D$
1727	$2F 5D$	2046	$2F 0D$
1766	$2F 6D$		
1787	$2F 2D$		
1800	$2F 2D$		
2037	$2F 0D$		

TAB. 1.1 Système complet : fréquences et modes identifiés pour  $F_{ex} = 5 N$

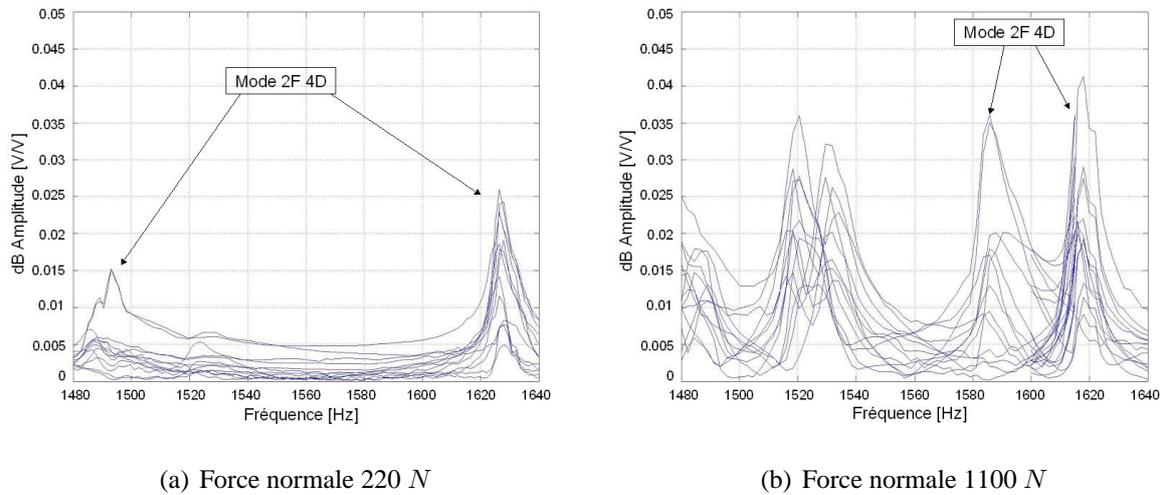


FIG. 1.30 Réponses forcées expérimentales - dispositif Ravoux [56]

contact est identifié bloqué dans les deux cas ; mais cet état identique du contact ne permet pas de justifier le changement important de la dynamique du système obtenu pour ces deux cas de chargement. Un double comportement bloqué de l'état de contact semble caractériser la dynamique du système, comportement qui n'a pas pu être identifié lors de l'étude numérique.

De manière générale, l'ensemble des résultats collectés a clairement mis en évidence la nécessité de compléter les connaissances phénoménologiques acquise à partir de nouvelles expérimentations sur des dispositifs expérimentaux plus simples pour lesquels le seul frottement sec intervient. Ces nouveaux dispositifs doivent permettre l'acquisition des méthodes expérimentales et numériques qui vont conduire à l'interprétation correcte des résultats obtenus pour le dispositif 13 aubes.

## 1.8 Conclusion et positionnement de l'étude

L'étude bibliographique présentée a mis en évidence la qualité des différents types de modélisations existants, qui permettent de prévoir avec une bonne corrélation expérimentale/numérique le comportement dynamique des structures simples en présence de frottement sec [5] [71] [64]. Ce type de revue, a permis de consolider les connaissances acquises et de dégager les aspects les plus importants pour l'étude envisagée. En revanche, malgré le niveau actuel de connaissance et de compréhension des phénomènes liés au frottement et au désaccordage, le comportement global des ensembles à géométrie cyclique désaccordés en présence d'éléments de contact inter-aube reste encore mal maîtrisé. Ceci a d'ailleurs été le constat de l'étude expérimentale engagée dans le cadre de

la thèse de Ravoux. La présente étude se situe dans la continuité de ces travaux, mais, compte tenu des difficultés d'interprétation constatées, la stratégie retenue a consisté à revenir dans un premier temps à des études plus simples, afin d'acquérir une meilleure maîtrise des phénomènes de base en jeu.

Dans le chapitre suivant, les conséquences des différentes modélisations du contact au niveau de la réponse forcée de systèmes simplifiés est considérée, afin d'être en mesure d'identifier le meilleur modèle de contact à partir des comportements constatés. Cette procédure est en effet indispensable car le dispositif utilisé dans [56] ne dispose ni de capteurs de force ni de jauges d'extensiométrie permettant de relever la valeur de la force transverse et du déplacement au niveau du point de contact. Il n'est donc pas possible de remonter directement aux boucles d'hystérésis et par conséquent au modèle de contact. De plus, il est apparu indispensable de consolider les compétences nécessaires à la mise en place des procédures numériques et expérimentales à partir d'une première étude simplifiée (poutre encastrée libre en présence de frottement sec), et ceci avant de traiter des problèmes plus complexes. Il s'agit également de valider la double démarche numérique expérimentale sur une application simplifiée, afin d'en tirer le profit maximal pour le dispositif complet. Il est important de noter qu'il s'agit bien d'une double démarche numérique et expérimentale et non d'une simple démarche car les deux procédures sont inter-dépendantes et complémentaires dans la mise en place des modèles.



## Chapitre 2

# DEMARCHE NUMERIQUE - EXPERIMENTALE

### 2.1 Introduction

La consolidation des connaissances fondamentales des phénomènes qui interviennent dans les problèmes dissipatifs est apparue nécessaire et pour cela, différentes modélisations de contact, macroslip (Masing), macroslip (Menq), sans et avec prise en compte de la rugosité, sont tout d'abord appliquées à des systèmes simples et testées afin de vérifier leur influence sur les réponses forcées. Le but recherché est d'être à même de reconnaître les modèles les mieux adaptés à partir de l'analyse des Fonctions de Réponses Fréquentielles (FRF), sans se reporter aux boucles d'hystérésis. Dans un deuxième temps et toujours à partir d'un système académique, l'intérêt est porté sur les causes physiques qui conduisent à l'aplatissement des pics en présence de frotteurs. Pour cela, une analyse énergétique, accompagnée par une étude sur l'influence du contact stick/slip, met en évidence les principales causes de ce comportement.

Ces analyses préparatoires accomplies, les techniques expérimentales adaptées à l'analyse du comportement non linéaire des structures en présence de frotteurs sont appliquées au cas d'un dispositif poutre encastree avec un frotteur positionné à l'extrémité libre. Grâce à l'analyse des réponses forcées expérimentales, le modèle de contact le plus opportun est retenu, et une étude numérique, fondée sur une approche éléments finis, est conduite. Une comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques est effectuée afin de valider à la fois, le type d'approche du problème, les techniques expérimentales et les procédures numériques utilisées.

## 2.2 Etude numérique préparatoire

Dans ce premier paragraphe, différents types de modélisations de contact sont considérés afin d'établir leurs conséquences majeures au niveau de la réponse forcée. Dans ce but, des applications numériques sont conduites en utilisant simultanément une résolution dans le domaine temporel et une résolution dans le domaine fréquentiel. Les systèmes étudiés demeurent simples (à un seul degré de liberté) pour ne pas alourdir les calculs et pour se concentrer sur l'influence des paramètres non linéaires. Une comparaison entre le modèle macroslip et microslip est réalisée en s'attachant aux différentes expressions de la force transverse transmise par le contact et aux conséquences sur les réponses.

### 2.2.1 Mise en équations

L'équation du mouvement pour un système à 1 degré de liberté (ddl) comme présenté figure (2.1), peut être écrite sous la forme suivante :

$$m\ddot{x}_t + c\dot{x}_t + kx_t = F_{ex} - f_t \quad (2.1)$$

avec  $f_t$  la force transverse, transmise par le frotteur. La méthode de la Balance Multi-Harmonique limitée à l'ordre M prévoit un déplacement donné par une combinaison linéaire des composantes

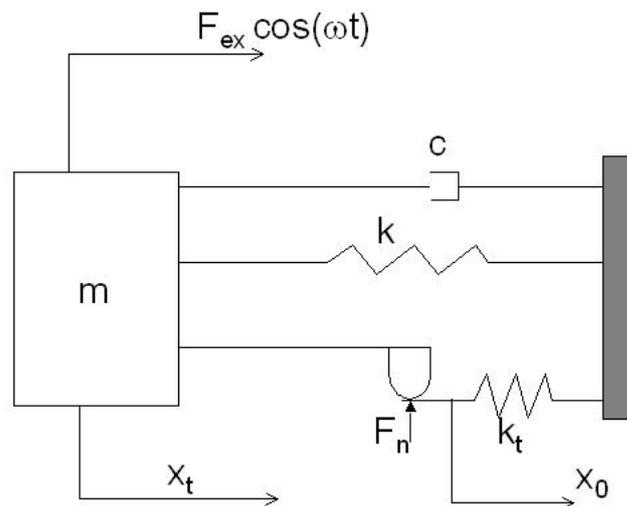


FIG. 2.1 Système à 1 degré de liberté avec  $m$  : masse,  $c$  : amortissement,  $k$  : raideur,  $F_n$  : Force normale,  $F_{ex}$  : Force d'excitation,  $k_t$  : Raideur de contact,  $x_t$  : déplacement du degré de liberté,  $x_0$  : déplacement en correspondance du ressort  $k_t$ ,  $\omega$  : pulsation d'excitation

harmoniques fonctions de la pulsation d'excitation  $\omega$  du système (2.2)

$$x_t(t) = \sum_{j=1}^M B_j \cdot \cos(a_j \omega t - \varphi_j) \quad (2.2)$$

où  $a_j$  est la valeur de la composante harmonique,  $B_j$  l'amplitude de la composante, et  $\varphi_j$  le déphasage de chaque composante par rapport à l'excitation. L'approximation de la force  $f_t$ , à travers une série de Fourier tronquée au même ordre, conduit à (2.3) :

$$f_t(t) = \sum_{j=1}^M f_{c_j} \cdot \cos(a_j \omega t - \varphi_j) + f_{s_j} \cdot \sin(a_j \omega t - \varphi_j) \quad (2.3)$$

Les valeurs des coefficients  $f_{c_j}$  et  $f_{s_j}$  sont données par les intégrales de Fourier suivantes :

$$f_{c_j} = 1/\pi \int_0^{2\pi} f_t \cos(\vartheta_j) d\theta$$

$$f_{s_j} = 1/\pi \int_0^{2\pi} f_t \sin(\vartheta_j) d\theta$$

avec  $\vartheta_j = a_j \omega t - \varphi_j$ . Les expressions de  $f_{c_j}$  et  $f_{s_j}$  dépendent bien évidemment du modèle de contact choisi. En substituant les expressions du déplacement et de la force transverse dans l'égalité (2.1), il vient :

$$- (a_j \omega)^2 m \cdot \sum B_j \cdot \cos(a_j \omega t - \varphi_j) - (a_j \omega) c \cdot \sum B_j \cdot \cos(a_j \omega t - \varphi_j) + k \cdot \sum B_j \cdot \cos(a_j \omega t - \varphi_j) + \sum (f_{c_j} \cdot \cos(a_j \omega t - \varphi_j) + f_{s_j} \cdot \sin(a_j \omega t - \varphi_j)) = F_{ex} \cos(\omega t) \quad (2.4)$$

En regroupant les termes de même pulsation et en imposant que pour  $j = 1$  la valeur du coefficient  $a_1 = 1$ , on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} c [(k - \omega^2 m) B_1 + f_{c1}] \cos(\omega t - \varphi_1) - [f_{s1} - \omega c B_1] \sin(\omega t - \varphi_1) = F_{ex} \cos(\omega t) \quad \text{pour } j = 1 \\ [(k - (a_j \omega)^2 m) B_j + f_{c_j}] \cos(a_j \omega t - \varphi_j) - [f_{s_j} - a_j \omega c B_j] \sin(a_j \omega t - \varphi_j) = 0 \quad \text{pour } 2 \leq j \leq M \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Après développement des termes cosinus et sinus, on obtient, pour chaque valeur de  $j$ , deux équations en imposant respectivement  $a_j \omega t = 0$  et  $a_j \omega t = \pi/2$

$$j = 1 \left\{ \begin{array}{l} [(k - \omega^2 m) B_1 + f_{c1}] \cos(\varphi_1) - [f_{s1} - \omega c B_1] \sin(\varphi_1) = F_{ex} \\ [f_{s1} - \omega c B_1] \cos(\varphi_1) + [(k - \omega^2 m) B_1 + f_{c1}] \sin(\varphi_1) = 0 \end{array} \right. \quad (2.6)$$

$$2 \leq j \leq M \left\{ \begin{array}{l} [(k - a_j \omega^2 m) B_j + f_{c_j}] \cos(\varphi_j) - [f_{s_j} - a_j \omega c B_j] \sin(\varphi_j) = 0 \\ [f_{s_j} - a_j \omega c B_j] \cos(\varphi_j) + [(k - a_j \omega^2 m) B_j + f_{c_j}] \sin(\varphi_j) = 0 \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Pour toute valeur de  $j$ , en élevant au carré et en sommant les deux termes de chaque expression, il s'ensuit :

$$j = 1 \left\{ \begin{array}{l} [(k - \omega^2 m) B_1 + f_{c_1}]^2 + [f_{s_1} - \omega c B_1]^2 = F_{ex}^2 \\ \tan(\varphi_1) = - [f_{s_1} - \omega c B_1] / [(k - \omega^2 m) B_1 + f_{c_1}] \end{array} \right. \quad (2.8)$$

$$2 \leq j \leq M \left\{ \begin{array}{l} [(k - a_j \omega^2 m) B_j + f_{c_j}]^2 + [f_{s_j} - \omega c B_j]^2 = 0 \\ \tan(\varphi_j) = - [f_{s_j} - \omega c B_j] / [(k - \omega^2 m) B_j + f_{c_j}] \end{array} \right. \quad (2.9)$$

La première équation des systèmes (2.8) et (2.9) est tout d'abord résolue. Les coefficients  $f_{c_j}$  et  $f_{s_j}$  de ces équations dépendent des inconnues du système  $B_j$ . On utilise donc, pour les résoudre la méthode itérative des sécantes multi-dimensionnées [55] dont les grandes lignes sont brièvement rappelées en annexe C. Dans un second temps, l'amplitude relative à chaque composante harmonique étant calculée, la valeur de la phase associée est déterminée à partir des deuxièmes équations des systèmes (2.8) et (2.9). Il est important de noter que le système d'équations (2.9) n'est homogène que dans le cas de comportement du contact complètement bloqué pour lequel la réponse exacte du système est donnée exclusivement par le premier harmonique (réponse sinusoïdale pure). En effet, dans ce cas,  $f_{c_j}$  et  $f_{s_j}$  sont toujours nuls pour  $j$  supérieur à 2. Le système (2.9) devient alors linéaire et homogène avec comme solutions  $B_j$  égal zéro. Dans tous les autres cas de stick/slip et complètement glissant, les valeurs des coefficients  $f_{c_j}$  et  $f_{s_j}$  dépendent des amplitudes  $B_j$ , y compris  $B_1$  qui dépend directement de la force d'excitation du système. Les coefficients  $f_{c_j}$  et  $f_{s_j}$  étant fonction de l'amplitude totale du système  $B_j$ , ce sont donc les forces non linéaires qui transmettent indirectement aux composantes harmoniques plus élevées l'effet de l'excitation à travers l'amplitude relative au premier harmonique ( $f_{c_j} = f_{c_j}(B_1(F_{ex}))$  avec  $j \geq 2$ ).

### 2.2.2 Validation de la méthode MHBM

Le système limité à un degré de liberté, présenté figure (2.1), est étudié afin de prédire les différents types de réponses que les méthodes liées aux modèles macroslip et microslip peuvent engendrer. L'excitation est de type harmonique à une seule composante. En premier lieu, une réso-

lution dans le domaine temporel est choisie en vue de valider l'utilisation de la méthode MHBM dans le cas macroslip. On peut ainsi montrer qu'un seul terme (HBM) permet une très bonne approximation des résultats vis à vis d'une résolution dans le domaine du temps. En second lieu, la comparaison des modélisations Macroslip et Microslip est abordée.

Le schéma reporté figure (2.1) représente un système masse ressort amortisseur (1 ddl) avec un frotteur en série. Le modèle de frotteur utilisé est du type Macroslip Masing. Les valeurs de la masse, de la raideur et du coefficient d'amortissement visqueux sont respectivement les suivantes :  $m = 1.0 \text{ Kg}$ ,  $k = 1e4 \text{ N/m}$  et  $c = 1.0 \text{ Nm/s}$ . Les caractéristiques macroscopiques du contact sont : raideur tangentielle du contact  $k_t = 1e4 \text{ N/m}$  et coefficient de frottement sec  $\mu = 0.5$ . La force d'excitation du système est unitaire. L'effet de différentes valeurs de la force normale sur les réponses forcées du système est illustré en figure (2.2). Pour une force normale de contact  $F_n$  égale à  $1000 \text{ N}$ , le contact reste bloqué pour toutes les fréquences d'excitation ; le système se caractérise par une fréquence de résonance ( $f_{r_{bloqu}}$ ), fonction de la raideur du système et de la raideur du contact. Plus précisément, quand le système est complètement bloqué, la raideur équivalente du système est donnée par la relation  $k_{equ} = k + k_t$  ; dans le cas présent, puisque  $k = k_t$ , il vient  $k_{equ} = 2k$ . La

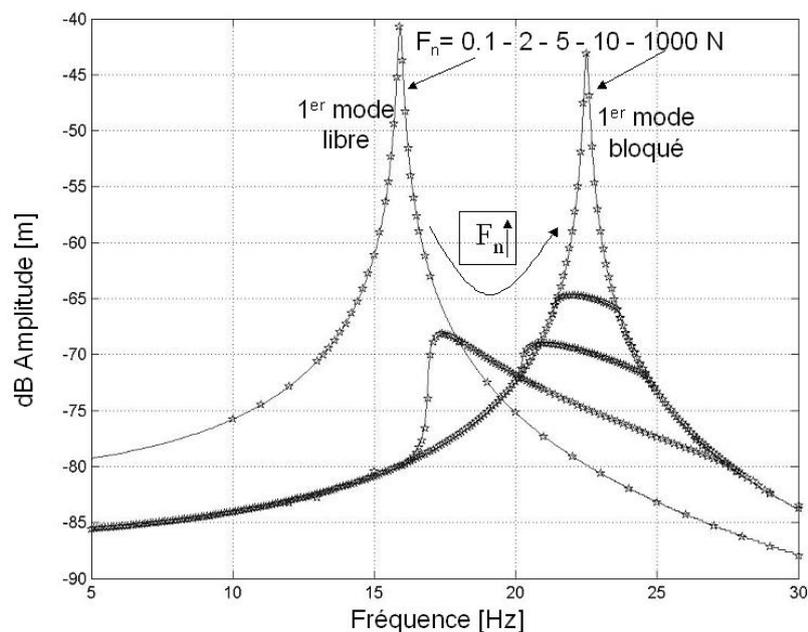


FIG. 2.2 Réponse forcée pour 1 ddl avec  $F_{ex}=1 \text{ N}$  - Résolution domaine du temps (ligne continue) et HBM (ligne étoilé)

fréquence de résonance du cas complètement bloqué est donc égale à :

$$fr_{bloqu} = 1/(2\pi) \cdot \sqrt{k_{equ}/m} = 1/(\pi) \cdot \sqrt{k/2m} = 22.5Hz \quad (2.10)$$

Dans l'autre cas extrême de contact complètement glissant  $F_n = 0.1$ , le système a une fréquence de résonance de valeur :

$$fr_{glissant} = 1/(2\pi) \cdot \sqrt{k_{equ}/m} = 1/(2\pi) \cdot \sqrt{k/m} = 15.9Hz \quad (2.11)$$

La méthode classique de Newmark de l'accélération moyenne constante ( $\beta=1/4$ ), inconditionnellement stable, est utilisée pour la résolution dans le domaine du temps. En diminuant progressivement les valeurs de la force normale  $F_n$  de 1000 N à 0.1 N, le contact change d'état, passant de l'état bloqué à l'état stick/slip. Suite à ces changements d'états de contact, les pics de résonance sont d'amplitudes plus faibles que ceux associés aux cas linéaires complètement bloqué et complètement glissant. La comparaison entre une résolution temporelle et fréquentielle (HBM) est donnée, figure (2.2). Ici, l'approximation liée à la méthode de la balance harmonique est très bonne et donne des écarts inférieures à 1%. Pour cette raison, la méthode HBM à un seul harmonique est utilisée pour les applications suivantes en lieu et place de la méthode MHBM. Cette méthode est ensuite exploitée pour mettre en évidence les différences au niveau de la réponse forcée entre les modélisations de type macroslip et microslip.

### 2.2.3 Comparaison Macroslip/microslip

Les méthodes macroslip (Masing) et microslip (Menq) sont comparées sans tenir compte des effets de la rugosité, c'est à dire en imposant un état de surface parfait. Avant de considérer les effets des deux modélisations sur la réponse forcée du système, il est important d'analyser l'allure de la force transverse dans les deux cas en utilisant la méthode de la balance harmonique à une seule composante.

Les évolutions des valeurs adimensionnées des composantes cosinoïdale  $F_c = f_c/(\mu F_n)$  et sinusoïdale  $F_s = f_s/(\mu F_n)$  de la force non linéaire, pour le cas macroslip, sont analysées en fonction du déplacement adimensionnel  $X_{adi} = k_t B/(\mu F_n)$ . On remarque que si le déplacement adimensionnel  $X_{adi}$  est inférieur à 1, le contact reste bloqué et la force transverse est linéaire et vaut  $k_t \cdot X_{adi}$ . La composante sinusoïdale reste nulle et la contribution du frotteur est équivalente à celle d'un ressort ajouté au système. Dans ce cas, la méthode de la balance harmonique conduit à la même solution numérique que la réponse temporelle car le comportement du système demeure linéaire (la réponse stationnaire du système est constituée exclusivement de la même composante harmonique

que celle de l'excitation). Quand le déplacement adimensionnel  $X_{adi}$  devient plus élevé que 1, le contact change d'état et devient de type stick/slip. Pendant une période d'oscillation se succèdent une phase bloquée et une phase glissante du contact. Les composantes cosinusoidale et sinusoidale associées à ces phases prennent les valeurs suivantes (2.12) et (2.13) (cf. Annexe B) :

$$F_s = X_{adi}/\pi \sin^2(\vartheta^*) \quad (2.12)$$

$$F_c = X_{adi}/\pi[\vartheta^* - 0.5 \cdot \sin(2\vartheta^*)] \quad (2.13)$$

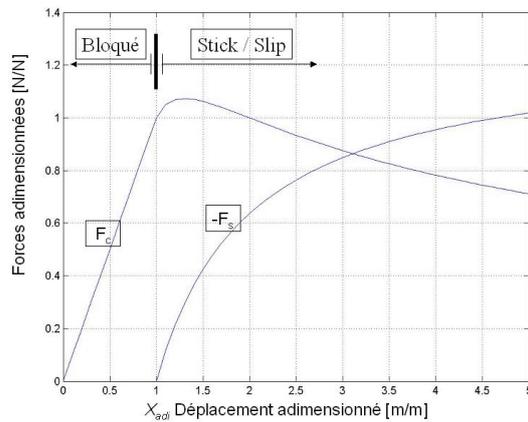
avec

$$\vartheta^* = \arccos \left[ 1 - 2 \frac{\mu F_n}{k_t B} \right] \quad (2.14)$$

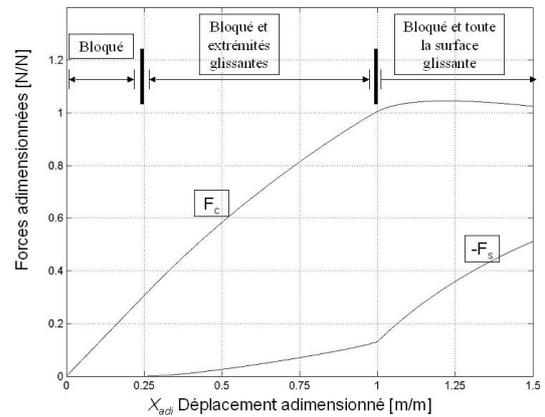
Dans ce cas, la méthode HBM ne peut que donner une valeur approchée de la force transmise, et ce à partir d'un système de deux forces, une en phase et l'autre déphasée de  $90^\circ$  par rapport au déplacement. En figure (2.3 (a)) sont reportées les valeurs de  $F_c$  et  $F_s$  pour les deux cas bloqué et stick /slip avec un modèle macroslip.

Pour le modèle microslip de type Menq, les composantes cosinusoidale et sinusoidale sont reportées (figure 2.3 (b)). Dans ce cas, Menq [38] obtient une série d'équations différentes donnant la valeur de la force transmise  $F_t$  pour les quatre cas de contact considérés. La non linéarité apparaît quand une des deux extrémités des surfaces de contact commence à glisser. Ainsi même si le déplacement adimensionné est inférieur à l'unité, la structure a un comportement dynamique non linéaire. La composante sinusoidale de la force transmise devient donc différente de zéro dès que l'une des extrémités commence à glisser même si le reste de la surface reste bloquée. Mais la non linéarité est plus accentuée dès que toute la surface commence à glisser, c'est à dire quand le déplacement adimensionné est unitaire ( $X_{adi} = 1$ ).

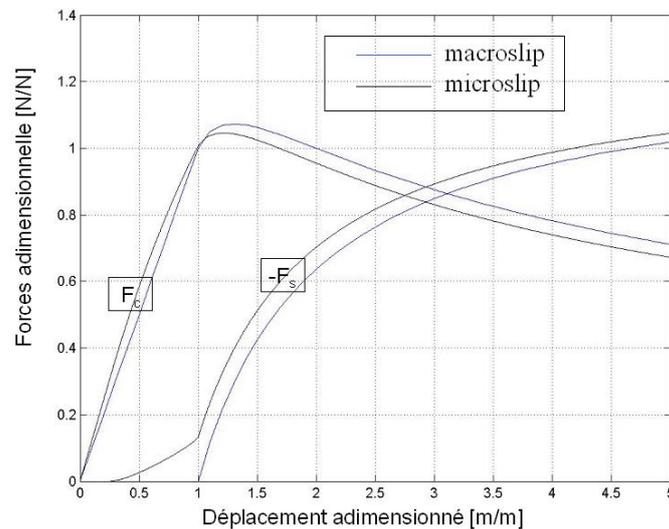
La comparaison entre ces deux séries de courbes montre que, pour les valeurs choisies des paramètres du contact, la plus grande différence concerne la composante sinusoidale, qui est différente de zéro pour le cas microslip quand le déplacement adimensionné est inférieur à 1 alors que pour le cas macroslip elle reste nulle. Si les surfaces en contact sont de faible étendue, la valeur de la composante sinusoidale devient de plus en plus petite (pour des valeurs du déplacement  $X_{adi} < 1$ ) et les valeurs de  $F_c$  et  $F_s$  associées au cas microslip tendent vers celles du cas macroslip. De même pour de grands déplacements relatifs entre les deux surfaces, les deux valeurs convergent (2.3 (c)). La modélisation macroslip représente donc, un cas particulier du comportement microslip, qui peut s'établir quand les surfaces frottantes sont petites et quand simultanément les déplacements relatifs deviennent importants. Si la raideur tangentielle est faible, la modélisation microslip ne dépend ni



(a) macroslip - modèle de Masing



(b) microslip - modèle de Menq



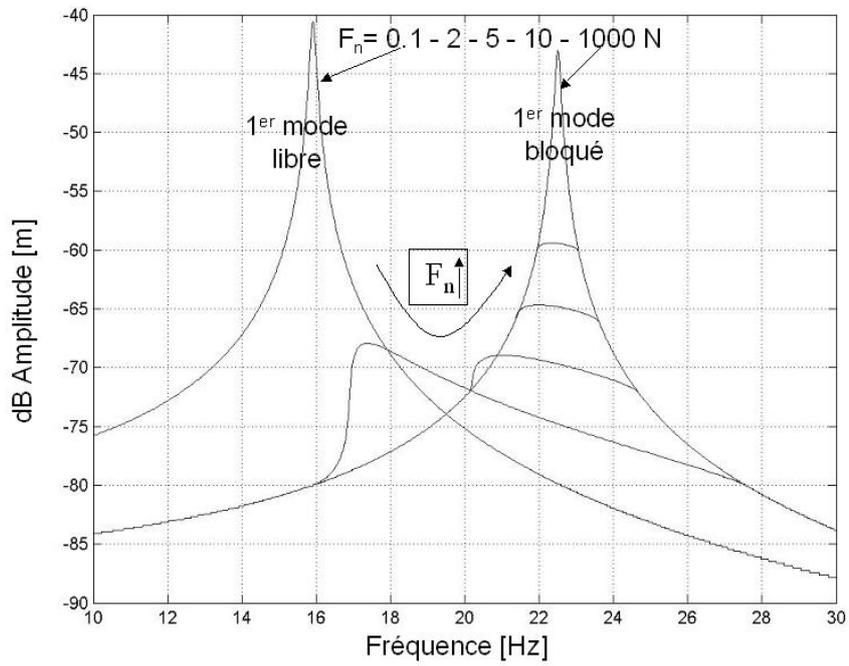
(c) Comparaison cas macroslip et microslip

FIG. 2.3 Composantes cosinoïdale et sinusoïdale de la force transmise  $F_t$  avec une résolution du type HBM

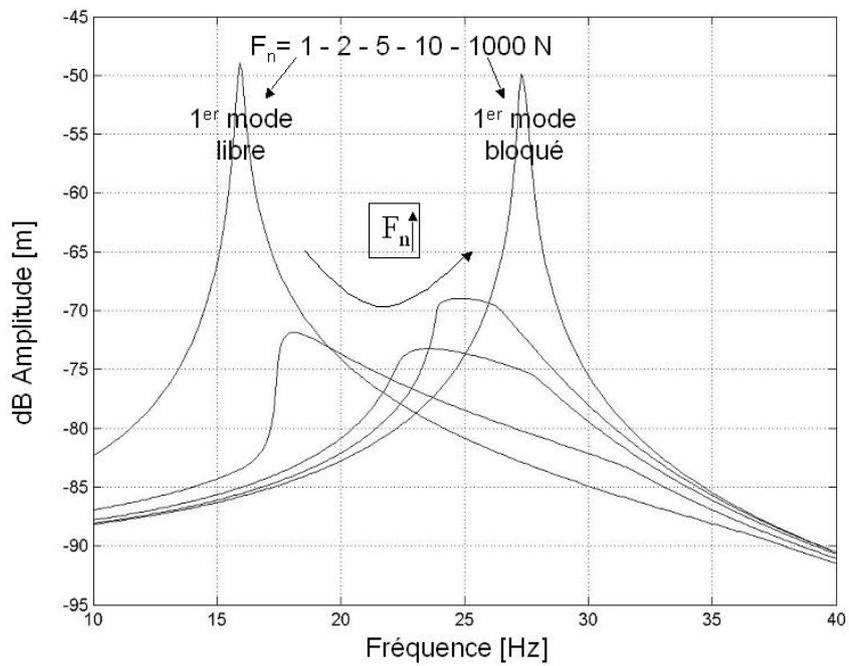
des surfaces en contact ni des caractéristiques du matériau. Dans ce cas les modèle microslip et macroslip fournissent ici des résultats très proches.

### Réponses forcées

Pour les deux modèles analysés, les réponses forcées sont présentées respectivement en figure (2.4 (a) et (b)). Deux pics de résonance sont toujours présents : le premier représentatif du cas complètement bloqué lorsque la valeur de la force normale au contact  $F_n$  est très élevée ; le second représentatif du cas complètement glissant quand la force normale au contact  $F_n$  est faible



(a) Macroslip du type Masing



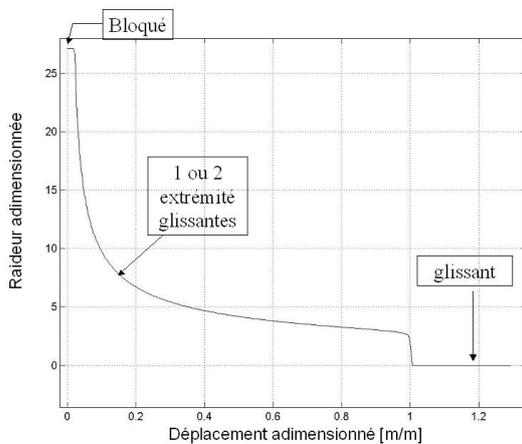
(b) Microslip du type Menq

FIG. 2.4 Réponses forcées pour 1 ddl avec  $F_{ex} = 1 N$

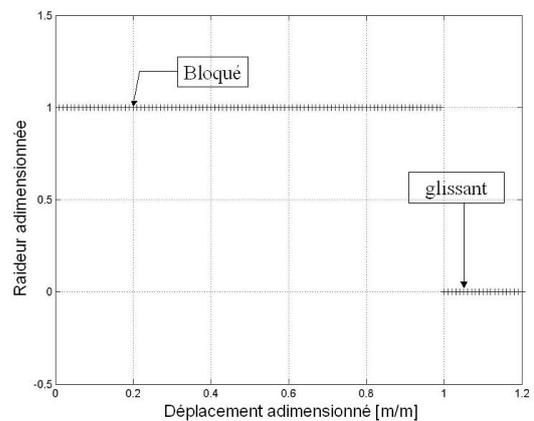
par rapport au niveau d'excitation.

Dans le cas macroslip, pour des valeurs légèrement inférieures à la valeur de la force normale  $F_n$  relative au cas bloqué, le contact reste bien bloqué au début du balayage, puis change pour un état stick/slip à l'approche de la fréquence de résonance du cas bloqué. Les pics s'aplatissent tout en restant dans l'enveloppe de la réponse du cas complètement bloqué et les niveaux d'amplitude dépendent uniquement du rapport de la force d'excitation sur la force normale  $F_{ex}/F_n$ .

Dans le cas microscoslip, comme montré figure (2.4 (b)), la réponse peut en revanche varier significativement. A la différence du comportement de type macroslip, les réponses représentatives du cas stick/slip n'appartiennent plus ici à l'enveloppe de la réponse complètement bloquée mais se décalent vers la gauche, c'est à dire vers le pic correspondant au cas complètement glissant. Ce déplacement vers la gauche s'explique par le fait qu'une partie du contact glisse tandis qu'une autre partie reste bloquée. Pendant cette phase, la raideur équivalente du contact  $k_t = F_t/X_{adi}$  diminue (figure 2.5 (a)). Par rapport au cas macroslip (figure 2.5 (b)), la raideur tangentielle associée au cas du microslip diminue bien avant d'atteindre l'état complètement glissant, provoquant le déplacement du pic de résonance vers des valeurs de fréquences plus faibles. Koh [32] montre les mêmes effets avec une modélisation du contact de type Mindlin. On peut donc conclure que le déplacement du pic vers des valeurs plus faibles des fréquences est typique du comportement microslip. Ce phénomène dépend de la coexistence le long de la surface de contact des états bloqué et glissant provoquant ainsi une diminution de la raideur tangentielle équivalente. De plus, pour des valeurs de la force normale ( $F_n \approx 5N$ ), et pour les basses fréquences d'excitation, les contacts sont com-



(a) Cas microslip du type Menq



(b) Cas macroslip du type Masing

FIG. 2.5 Raideur équivalente

plètement bloqués pour le cas macroslip alors que dans le cas macroslip une extrémité peut glisser entraînant par conséquent la variation de la valeur de la raideur tangentielle. Dans ces conditions ( $\leq 16$  Hz), la réponse forcée du cas macroslip coïncide avec la réponse forcée du cas complètement bloqué car la raideur tangentielle du contact reste constante. Dans le cas macroslip, la faible diminution de cette raideur provoque une augmentation légère des amplitudes par rapport au cas complètement bloqué. Quoiqu'il en soit, cette différence de comportement entre cas macroslip et macroslip, loin des fréquences de résonance, est moins marquée par rapport au phénomène de déplacement vers la gauche du pic d'amplitude maximale.

Les figures (2.6) mettent en relation les amplitudes maximales de la réponse fréquentielle et les niveaux de force d'excitation pour les cas macroslip et macroslip. D'un point de vue global, on constate la présence de deux branches linéaires relatives aux deux cas extrêmes bloqué (origine - point a) et glissant (point b - point c), et une branche assez plate relative au cas stick/slip (point a - point b). En figure (2.6 (a)), seul le comportement global associé au cas macroslip a été reporté. L'unique différence constatée entre les comportements macroslip et macroslip, concerne le passage entre l'état bloqué et stick/slip. En faisant un zoom autour des faibles valeurs du rapport  $F_{ex}/F_n$ , on s'aperçoit que, pour le cas macroslip, cette transition (représentée par les points o-a-b) est nette (figure 2.6 (b)), alors que dans le cas macroslip le passage est plus graduel. Dans ce cas, la possibilité d'avoir des états non homogènes de la surface avec un glissement partiel permet ce type de transition, et c'est grâce à la diminution graduelle de la valeur de raideur tangentielle que la pente de la courbe peut diminuer progressivement de la valeur du cas bloqué à celle du cas complètement glissant. En première approximation [73] dans le cas stick/slip à majorité bloqué, la valeur du déplacement maximal  $X_{max}$  est donnée par l'expression  $\mu F_n/k_t$ ; dans le même temps, la réponse  $X_{max}/F_{ex}$  dépend exclusivement du rapport  $F_{ex}/F_n$ . On peut donc écrire :

$$X_{max}/F_{ex} \approx \mu F_n/(k_t F_{ex}) \quad (2.15)$$

et que donc

$$X_{max}/F_n \approx \mu F_{ex}/(k_t F_{ex}) \quad (2.16)$$

Ainsi, l'augmentation de la valeur de la force d'excitation, alors que la raideur tangentielle reste constante, n'entraîne pas de variations de l'amplitude maximale sur la charge normale. En revanche, dans le cas macroslip, la valeur de la raideur tangentielle  $k_t$  baisse en présence du comportement stick/slip à majorité bloqué. Par conséquent, les amplitudes maximales augmentent entre la fin du comportement complètement bloqué et le plateau du stick/slip, toute la surface alternant entre état

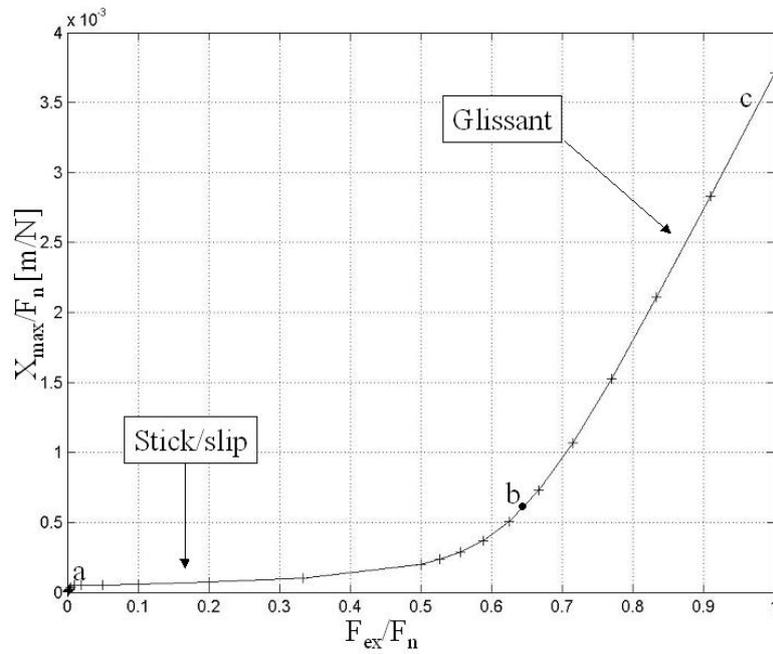
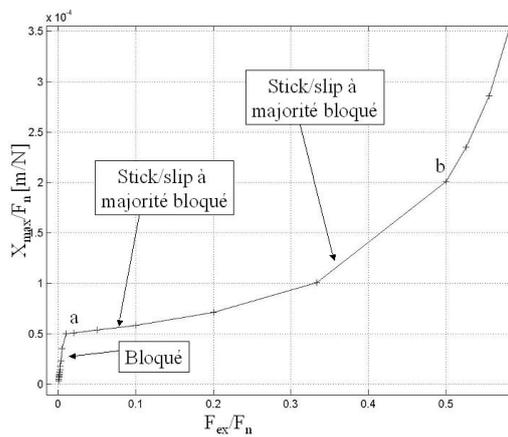
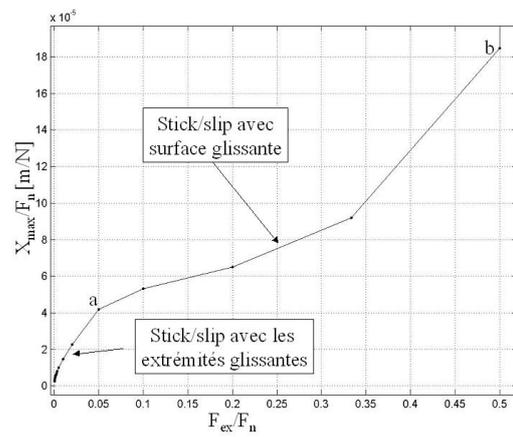
(a) Valeur du rapport  $0 \leq F_{ex}/F_n \leq 1$  Macroslip(b) Zoom  $0 \leq F_{ex}/F_n \leq 0.5$  - cas Macroslip(c) Zoom  $0 \leq F_{ex}/F_n \leq 0.5$  - cas Microslip

FIG. 2.6 Comportement global en présence du frotteur

glissants et bloqués (figure 2.6 (c)).

Plusieurs expérimentations ont été conduites afin d'améliorer la définition de ces courbes pour différentes valeurs de la force normale et de la force d'excitation. Pour chaque système, cette courbe est unique et définit complètement le comportement du frotteur. Il est ainsi montré que, dans le cas macroslip comme dans le cas macroslip, les valeurs maximales et les réponses forcées dépendent uniquement en première approximation du rapport  $F_{ex}/F_n$ .

#### 2.2.4 Effet de la rugosité

Comme reporté dans le chapitre précédent et prouvé expérimentalement [29] [64] et [19], la surface de contact et par conséquent la raideur tangentielle de contact sont fonction de la charge normale ; le lien entre ces deux quantités étant associé à la rugosité des surfaces. Si d'un côté, les théories macroslip et macroslip prévoient que le contact entre des surfaces est toujours continu, en réalité les aspérités présentes au sein du contact le rendent discontinu et réduisent la surface nominale du contact à une surface réelle qui peut être beaucoup plus petite. Ainsi même la raideur tangentielle équivalente peut être plus faible comparée à sa valeur théorique. En augmentant la force normale, les aspérités s'écrasent, la valeur de la surface réelle s'approche de la valeur de la surface nominale et la charge normale devient elle aussi homogène sur la surface de contact.

L'exemple suivant est destiné à montrer l'importance du rôle joué par la rugosité dans la dynamique du système. Plus précisément, on considère à la fois l'influence de la variation de la raideur équivalente du contact dans le cas macroslip et la variation de la surface de contact en fonction de la force normale dans le cas macroslip.

##### *Exemples de Fonctions de Réponses Fréquentielles*

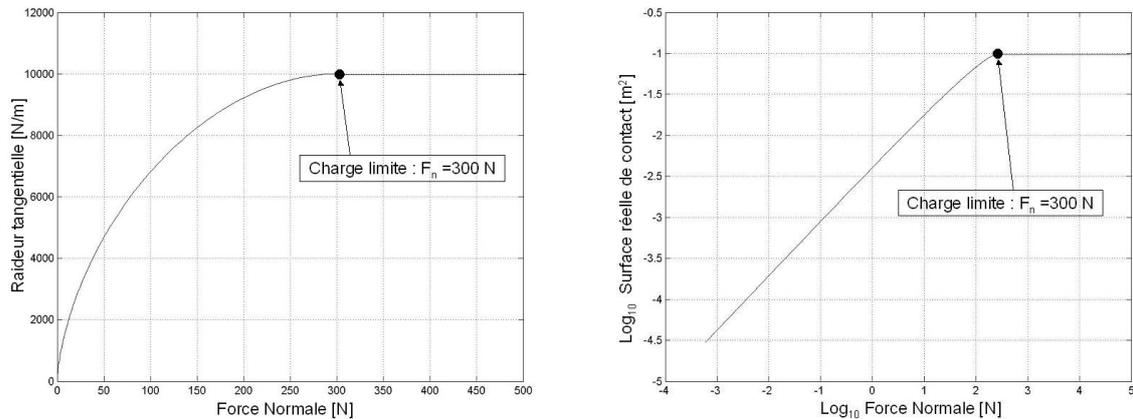
Le système à 1 ddl (figure 2.1) est considéré, avec dans un premier temps une modélisation du type macroslip-Masing. En appliquant la méthode élaborée par Sextro [64], l'évolution de la raideur tangentielle équivalente en fonction de la charge normale est reportée figure (2.7 (a)). Les valeurs numériques de la rugosité, de la raideur normale et de la raideur tangentielle considérées sont les suivantes :

rugosité :  $R_z = 0.8 \cdot 10^{-6} \text{ m}$

raideur normale :  $k_n = 750 \cdot 10^6 \text{ N/m}$

raideur tangentielle asymptotique :  $k_t = 10^4 \text{ N/m}$ .

La raideur tangentielle de contact et la surface réelle de contact augmentent avec la force normale jusqu'à une valeur asymptotique obtenue pour  $F_n=300 \text{ N}$ , appelée charge limite. A partir de cette



(a) Raideur tangentielle de contact fonction de la force normale (b) Surface de contact fonction de la force normale

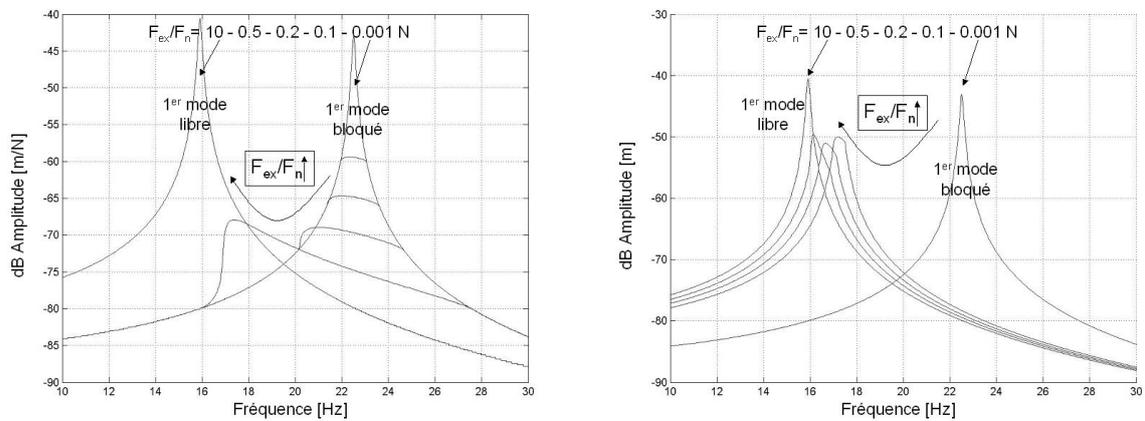
FIG. 2.7 Influence de la rugosité sur les propriétés du contact [64]

valeur, toute la surface de contact est adhérente et la raideur tangentielle de contact atteint sa valeur maximale. Le cas macroslip est étudié dans un premier temps. Deux valeurs différentes de la force d'excitation sont considérées :  $F_{ex} = 1000$  N et  $F_{ex} = 1$  N afin d'évaluer la façon dont les réponses forcées peuvent changer de forme en fonction des mêmes rapports  $F_{ex}/F_n$  en présence de la rugosité.

Dans le premier cas,  $F_{ex} = 1000$  N, la raideur tangentielle atteint la valeur asymptotique car les forces normales considérées sont supérieures à la charge limite de 300 N ( $F_N = 5e3 - 1e4 - 1e6$  N). Pour les valeurs du rapport  $F_{ex}/F_n = 10 - 0.5 - 0.2 - 0.1 - 0.001$ , le comportement est identique au cas macroslip pur de Masing et aucune différence significative avec les réponses forcées obtenues précédemment n'a pu être remarquée. Quand la force normale est égale à 100 N (c'est à dire lorsque le rapport  $F_{ex}/F_n$  vaut 10), la valeur de la raideur tangentielle diminue mais dans ce cas le comportement est déjà complètement glissant et la raideur tangentielle de contact n'a plus aucune influence sur la réponse. Par conséquent, pour des niveaux très importants de la force d'excitation l'influence de la rugosité est négligeable et le comportement du contact reste globalement du type macroslip "pur" (figure 2.8 (a) à comparer avec figure 2.2 ).

Dans le second cas, lorsque la force d'excitation est faible ( $F_{ex}=1$  N), il en va tout autrement. En considérant les mêmes valeurs du rapport  $F_{ex}/F_n$ , les charges normales considérées sont beaucoup plus faibles par rapport aux cas précédents ( $F_n = 0.1 - 2 - 5 - 10$  N) et ont des valeurs plus faibles que la valeur asymptotique de 300 N. Les surfaces n'étant pas complètement écrasées, les réponses forcées ont une allure différente. En effet, la baisse de la raideur tangentielle cause une

translation vers la gauche de toute la courbe de réponse en comparaison des réponses obtenues avec la valeur asymptotique. Il faut remarquer que cette translation de la courbe concerne également le cas complètement bloqué (figure 2.8 (b)). Pour de faibles valeurs de fréquence, par exemple 10 Hz, entre le cas  $F_n=1000\text{ N}$  et  $F_n=10\text{ N}$  ( $F_{ex}/F_n$  égal à 0.001 et 0.1 respectivement), l'état de contact bloqué ne change pas. Cependant la structure est caractérisée par des valeurs de raideur tangentielle plus faibles de l'ordre de  $\simeq 0.2\text{ N/m}$  au lieu de  $1\text{e}4\text{ N/m}$  et par conséquent l'amplitude, qui est inversement proportionnelle à la raideur, augmente.



(a)  $F_{ex} = 1000\text{ N}$

(b)  $F_{ex} = 1\text{ N}$

FIG. 2.8 Influence de la rugosité - cas Macroslip-Masing

L'influence de la rugosité est étudiée maintenant dans le cas microslip. Les mêmes valeurs des forces et des rapports  $F_{ex}/F_n$  sont utilisées. A la différence du cas macroslip, l'influence de la rugosité intervient au niveau de la surface de contact. De faibles valeurs de charges normales ne permettent pas la complète adhérence des surfaces et la surface réelle de contact est donc logiquement plus petite que la valeur théorique. En utilisant la méthode développée par Sextro, on obtient, avec les valeurs de la rugosité et de la raideur normale précédemment utilisées, le graphique donné figure (2.7 (b)). La limite est toujours représentée par une valeur asymptotique de la charge normale égale à 300 N.

Logiquement, un premier essai avec une force d'excitation de 1000 N ne fournit pas de différence par rapport à ce qui a été constaté avec le cas microslip "pur", car les forces normales en jeu sont très importantes et la surface est complètement adhérente (figure 2.9 (a)). En revanche, dans le cas de faibles valeurs de la force d'excitation  $F_{ex} = 1\text{ N}$ , l'effet de la rugosité devient important (figure 2.9 (b)).

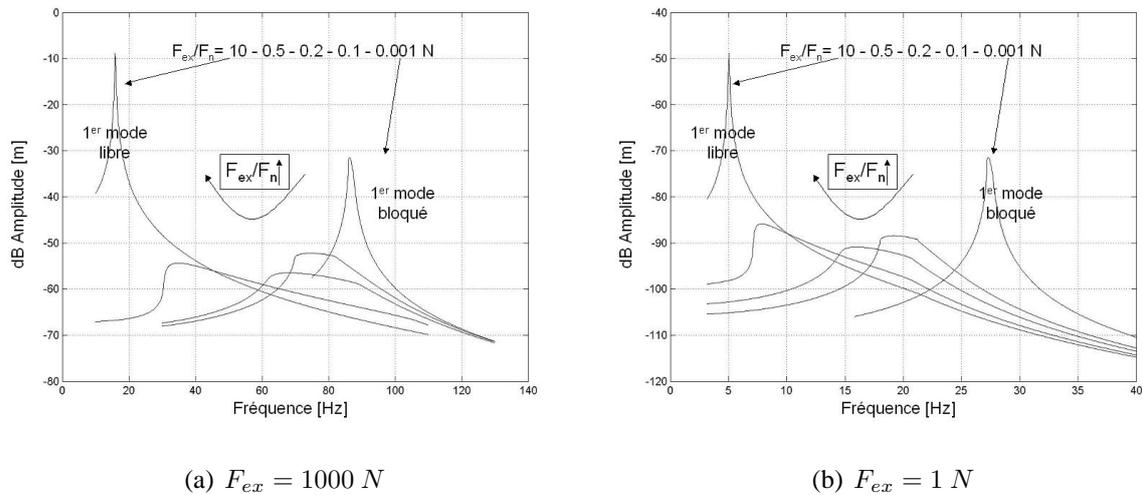


FIG. 2.9 Influence de la rugosité - cas Microslip-Menq

Dans le cas microslip, le déplacement vers la gauche du pic d'amplitude maximale est très accentué. Toutefois, loin des conditions de résonance du cas bloqué, le système est toujours caractérisé par la même valeur de raideur tangentielle et ne génère pas de changement d'amplitudes de la réponse forcée. En revanche, quand les effets de la rugosité sont beaucoup plus importants, la réponse forcée dans sa totalité est globalement translatée vers des valeurs de fréquences inférieures.

Sans la prise en compte de la rugosité, la différence entre une approche macroslip et microslip est importante car seuls les pics associés au modèle microslip se déplacent. En prenant en compte la rugosité, cette différence est moins prononcée car, dans les deux cas, le déplacement des pics s'avère prononcé. Par conséquent, il est possible de savoir si l'effet de la rugosité est négligeable ou non à partir de la seule analyse des réponses forcées au niveau du comportement bloqué du système. En conclusion, il est évident que, si la rugosité est considérée, aussi bien pour le cas macroslip que pour le cas microslip, les réponses forcées ne dépendent plus du rapport  $F_{ex}/F_n$ .

### 2.2.5 Conclusions

A partir des données expérimentales concernant les réponses fréquentielles et les boucles d'hystérésis d'un système en présence de frottement sec, il est possible de déduire la modélisation du contact la mieux adaptée pour représenter le comportement dynamique du système. Ces données doivent correspondre aux différents comportements du contact (bloqué, glissant et stick/slip) pour différentes valeurs du rapport  $F_{ex}/F_n$ . En général, si les réponses fréquentielles restent dans l'enveloppe de la réponse du système complètement bloqué, le comportement du frotteur est du type macroslip, tandis que, si un faible déplacement des pics de résonance apparaît, une modélisation du

type microslip est plus apte à décrire le comportement du système. Finalement, si le déplacement des réponses fréquentielles est très important, le choix d'un modèle prenant en compte les effets de la rugosité au niveau du contact est indispensable. Dans ce cas, le choix entre modèle macroslip ou microslip doit se faire en analysant la partie de la réponse forcée qui correspond au comportement bloqué du contact, c'est à dire loin des fréquences naturelles des systèmes linéaires associés. Malgré tout, ce type d'identification peut être incertaine et un dernier ressort c'est seulement l'analyse des boucles d'hystérésis peut confirmer le vrai comportement du contact.

Ce type de procédure sera vérifié par la suite à l'aide d'une manipulation simple (poutre encastrée libre) en présence de frottement sec. Mais avant de passer à la validation des procédures (numériques et expérimentales), il est intéressant de revenir sur l'analyse des explications possibles formulées pour expliquer la baisse des niveaux vibratoires en présence de frotteurs : énergie de dissipation par frottement sec et changement de conditions aux limites empêchant la résonance. Ces possibilités sont analysées ci-après.

## 2.3 Analyse des amplitudes maximales des vibrations

En faisant l'hypothèse, en première approximation, que le phénomène qui conditionne la baisse des pics d'amplitude maximale ne dépend pas du modèle de contact choisi, l'analyse suivante est conduite exclusivement avec le modèle macroslip. Avant d'étudier l'influence du frotteur, ce phénomène est étudié à partir du système bien connu à 1 degré de liberté masse - amortisseur visqueux - raideur, afin d'analyser l'influence du paramètre d'amortissement  $c$  au niveau des pics d'amplitudes. Ensuite, pour les systèmes en présence de frottement sec, sont considérés l'influence de l'énergie de dissipation sur les niveaux des réponses et le changement de l'état du contact bloqué et glissant pendant la phase stick/slip, ceci à partir d'une analyse conduite à la fois dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel à l'aide de la méthode de la balance harmonique.

### 2.3.1 Système m-c-k

L'expression du déplacement maximal, au niveau de la résonance amortie, en fonction du coefficient d'amortissement visqueux  $\alpha = c/(2\sqrt{k \cdot m})$  est donnée par

$$X_{max} = F/(2 \cdot k \cdot \alpha \cdot \sqrt{1 - \alpha^2}) \quad (2.17)$$

La figure 2.10 illustre le résultat bien connu selon lequel l'augmentation de  $\alpha$  conduit à une diminution de l'amplitude maximale de vibration. Cependant, d'un point de vue physique, l'équation

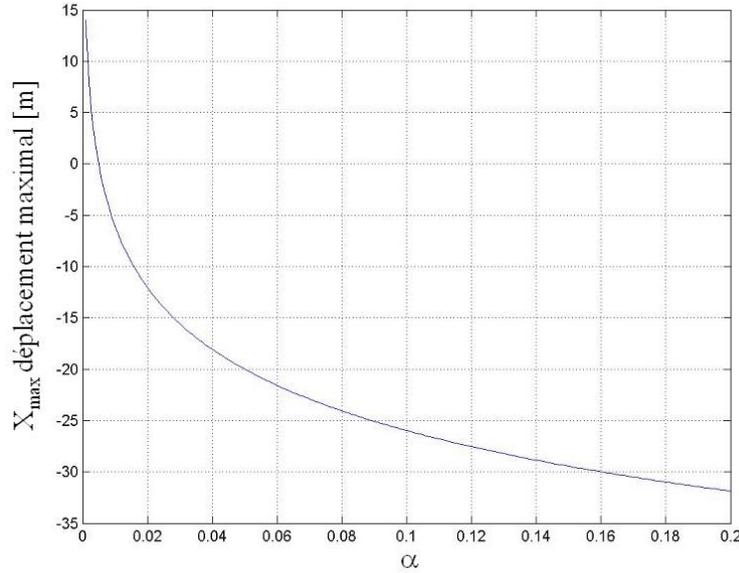


FIG. 2.10 Amplitude maximale à la résonance du système en fonction de l'amortissement  $\alpha$

(2.17) ne permet pas d'identifier les causes qui conduisent à cette baisse des pics. Pour cette raison, deux approches différentes basées sur l'analyse énergétique et le bilan des forces en présence sont conduites.

L'énergie dissipée par l'amortisseur pendant une période est égale au travail des forces externes. L'expression de cette énergie est obtenue à partir de l'amplitude  $x_t$  de la réponse en régime établi et de  $\omega$  la pulsation d'excitation :

$$E_{c-dis} = \pi \cdot c \cdot \omega \cdot x_t^2 = \pi \cdot c \cdot \omega \left[ \frac{F_{ex}^2}{(k - m\omega^2)^2 + (c \cdot \omega)^2} \right] \quad (2.18)$$

En dehors des conditions de résonance, l'énergie dissipée par le terme d'amortissement visqueux est approchée par :

$$E_{c-dis} = \pi \cdot c \cdot \omega x_t^2 = \pi \cdot c \cdot \omega \left[ \frac{F_{ex}^2}{(k - m\omega^2)^2} \right] \quad (2.19)$$

Dans ces conditions, plus la valeur de l'amortissement  $c$  augmente, plus l'énergie dissipée augmente. En revanche, au niveau des résonances du système, l'amplitude maximale est donnée par la relation (2.17), la fréquence de résonance est égale à  $\Omega = \omega_n \sqrt{1 - 2\alpha^2}$ , avec  $\omega_n^2 = k/m$  pulsation de résonance du système non amorti et l'énergie dissipée s'exprime alors sous la forme :

$$E_{c-dis} = \pi \cdot c \cdot \Omega \cdot X_{max}^2 = \pi 2\alpha \sqrt{k \cdot m} \cdot \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2\alpha^2} \cdot \frac{(F_{ex}/k)^2}{4\alpha^2 \cdot (1 - \alpha^2)} = \pi F_{ex} \frac{\sqrt{1 - 2\alpha^2}}{2\alpha(1 - \alpha^2)} \quad (2.20)$$

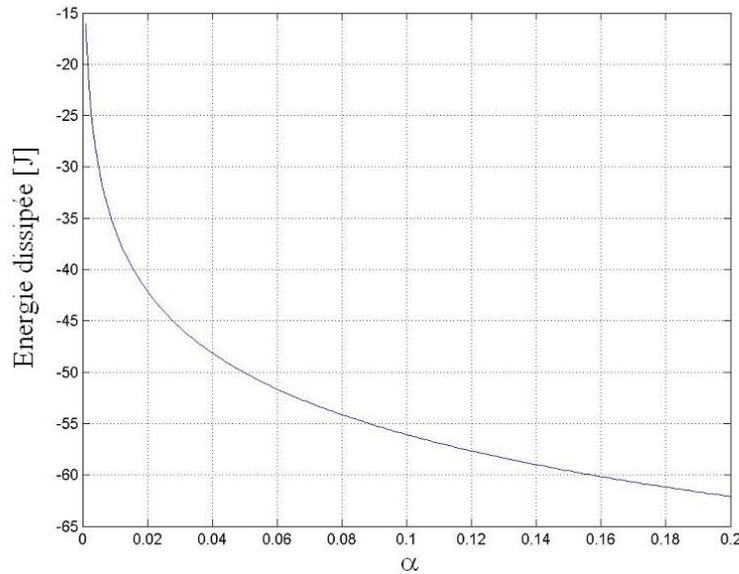


FIG. 2.11 Energie dissipée calculée pour les valeurs maximales d'amplitude en fonction de l'amortissement  $\alpha$

Comme illustré figure (2.11), l'énergie dissipée dans ce cas diminue lorsque la valeur de l'amortissement  $\alpha$  augmente, tout comme l'amplitude du déplacement. La baisse des niveaux d'amplitude maximale associée à l'augmentation de l'amortissement ne peut donc pas être expliquée par une augmentation d'énergie dissipée puisque cette dernière diminue.

Pour expliciter cette diminution des pics, une analyse des forces en présence à la résonance s'avère utile. Les forces en phase par rapport au déplacement sont :

- Force d'inertie de la masse  $m$  :  $F_{ine} = -m\Omega^2 \cdot X_{max} = -kX_{max} \cdot (1-2\alpha^2) \approx -k \cdot X_{max}$
- Force de restitution du ressort  $k$  :  $F_{res} = k \cdot X_{max}$

Les forces déphasées de  $90^\circ$  sont constituées par la seule force d'amortissement

- Force visqueuse :  $F_{dis} = -c \cdot \Omega \cdot X_{max} = -2\alpha\sqrt{k \cdot m} \cdot X_{max} \cdot \omega_n \sqrt{1-2\alpha^2} = -2kX_{max}\alpha \cdot \sqrt{1-2\alpha^2} \approx -2 \cdot k \cdot X_{max} \cdot \alpha$

En première approximation les forces en phase s'équilibrent pour toute valeur de  $\alpha$  et par conséquent la résultante des forces internes n'est constituée que de la seule composante de la force déphasée  $F_{dphase} = -2 \cdot k \cdot X_{max}\alpha$ . Cette force déphasée s'oppose au mouvement et équilibre la force d'excitation, ( $2 \cdot k \cdot X_{max}\alpha = F_{ex}$ ). Si  $\alpha$  augmente cette force augmente et le déplacement  $X_{max}$  doit forcément diminuer. La figure (2.12) représente l'évolution de ces deux quantités ( $F_{phase}/X_{max}$  et  $F_{dphase}/X_{max}$ ) en fonction de l'amortissement  $\alpha$  à la résonance. Lorsque  $\alpha$  est faible ( $\alpha \leq 0,05$ ),

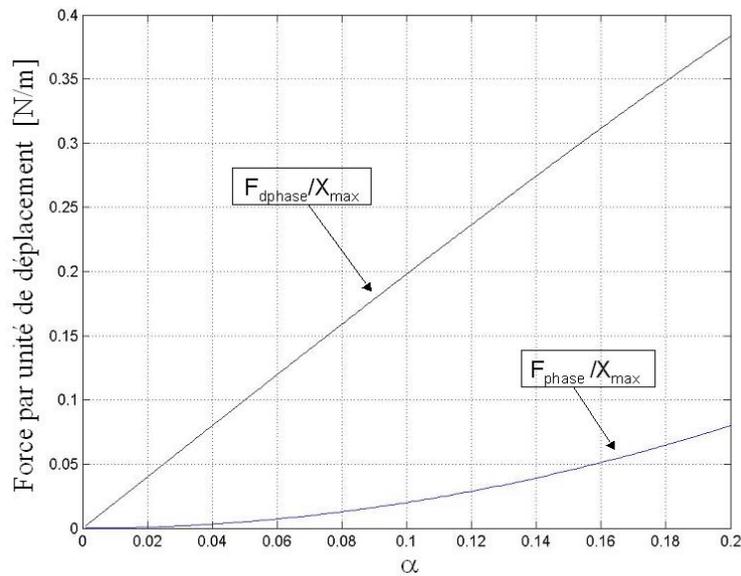


FIG. 2.12 Forces en phase et déphasée divisées par le déplacement maximal, à la résonance du système en fonction de l'amortissement  $\alpha$

la résultante des forces en phase apparaît bien négligeable par rapport à la résultante des forces déphasées qui devient la seule composante qui peut équilibrer les forces externes.

En conséquence, pour un système faiblement amorti, la baisse des amplitudes maximales de vibration passe essentiellement par la génération de composantes d'efforts déphasées de  $90^\circ$  par rapport au déplacement, car seule ce type de force peut équilibrer la force d'excitation externe au niveau des résonances. On examinera dans la suite comment le frottement agit sur l'équilibre des forces de réaction du système, et s'il satisfait les caractéristiques énoncées.

### 2.3.2 Système avec frotteur

Une analyse similaire, basée sur l'énergie dissipée et sur la résultante des forces internes à amplitude maximale, est conduite. En premier lieu, il est montré qu'une approche énergétique n'est pas ici non plus capable d'expliquer le phénomène d'aplatissement des pics. En second lieu, l'effet des forces générées dans les différents cas bloqué - stick/slip et complètement glissant est analysé.

#### *Calcul des énergies*

L'énergie dissipée par frottement sec est donnée par la surface interne des boucles d'hystérésis : force transverse transmise en fonction du déplacement relatif  $x_t - x_0$  au niveau du point de contact (voir figure (2.1)). Dans le cas complètement bloqué, les déplacements  $x_t$  et  $x_0$  sont

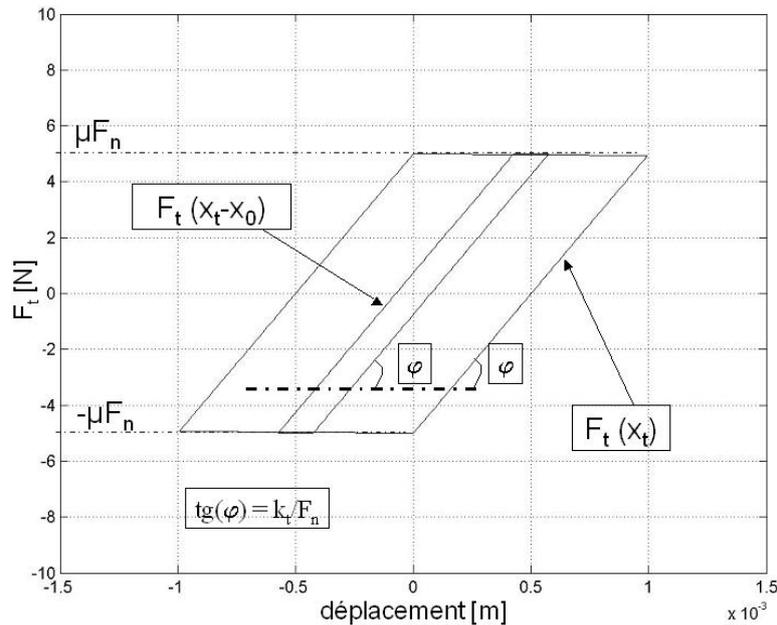


FIG. 2.13 Boucles d'hystérésis réelle et apparente pour  $F_n = 10 \text{ N}$

toujours coïncidents, aucun mouvement relatif n'étant permis. Par conséquent, les boucles d'hystérésis sont représentées par une droite et aucune énergie n'est dissipée par frottement sec. Dans le cas complètement glissant, le déplacement  $x_0$  est toujours nul. Les boucles d'hystérésis coïncident avec les parallélogrammes obtenus avec la modélisation de Coulomb (figure 1.6(a)). En revanche, pour le cas stick/slip, ceci n'est plus valable et une attention particulière doit être portée pour bien différencier le déplacement total  $x_t$  et le déplacement relatif  $x_t - x_0$  au point de contact. Pendant une période d'oscillation, le contact change d'état, passant de bloqué à glissant et vice versa. La valeur de l'énergie de dissipation par frottement sec est donnée par l'intégrale suivante (2.21) :

$$E_{fro-dis} = \int_{cycle} F_t d(x_t - x_0) \quad (2.21)$$

On nomme l'énergie dissipée réelle, l'énergie dissipée évaluée à partir du déplacement relatif  $x_t - x_0$  et l'énergie dissipée apparente celle évaluée à partir du déplacement total  $x_t$  du point de contact. En figure (2.13), ces 2 boucles d'hystérésis calculées sont reportées pour une force normale de  $10 \text{ N}$ , (phase stick/slip à une fréquence d'excitation de  $22 \text{ Hz}$ ). La différence des surfaces décrites est très importante, mais seule la boucle qui prend en compte le déplacement relatif fournit la vraie énergie dissipée. Dans l'autre cas, il s'agit bien seulement d'une énergie dissipée "apparente". Pour la suite, les énergies sont calculées à partir de la surface décrite par les boucles d'hystérésis,

en faisant varier les fréquences d'excitation, et ce, dans le seul cas d'un état de contact stick/slip (figure 2.14).

L'énergie dissipée par frottement sec en fonction de la fréquence d'excitation est reportée figure (2.15) pour différentes valeurs de  $F_n$  afin d'évaluer son lien avec l'amplitude maximale des pics de résonance. En augmentant la charge normale, la valeur de l'énergie dissipée augmente de même que les amplitudes maximales (cf. figure 2.2). La première conséquence importante dégagée de ces résultats est qu'à une diminution des niveaux d'amplitude ne correspond pas à une augmentation de l'énergie dissipée. Ceci implique que l'énergie absolue dissipée par frottement sec n'est pas la cause principale de l'aplatissement des pics. Dans ce cas, le principe de conservation de l'énergie reste toujours valide et, par conséquent, on peut calculer l'énergie dissipée totale comme équivalente au travail des forces externes pendant un cycle, donnée simplement par l'intégrale (2.22) :

$$E_{tot-dis} = \int_{cycle} F_{ex} d(x_t) \quad (2.22)$$

La figure (2.16) montre l'énergie totale dissipée pour chaque fréquence en fonction de la force normale  $F_n$ . Elle diminue de façon semblable à l'énergie dissipée dans le cas linéaire pré-

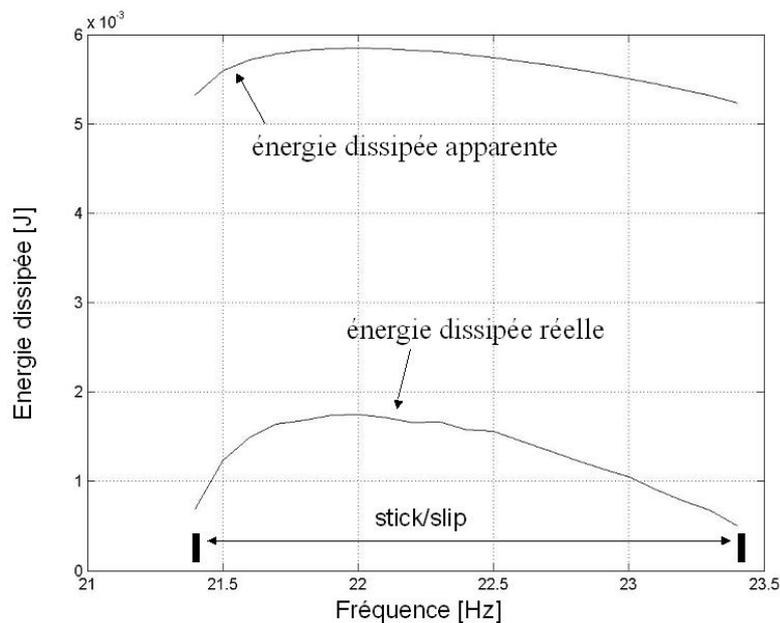


FIG. 2.14 Energie dissipée par frottement, réelle et apparente, en fonction de la fréquence d'excitation pour  $F_n = 10 \text{ N}$

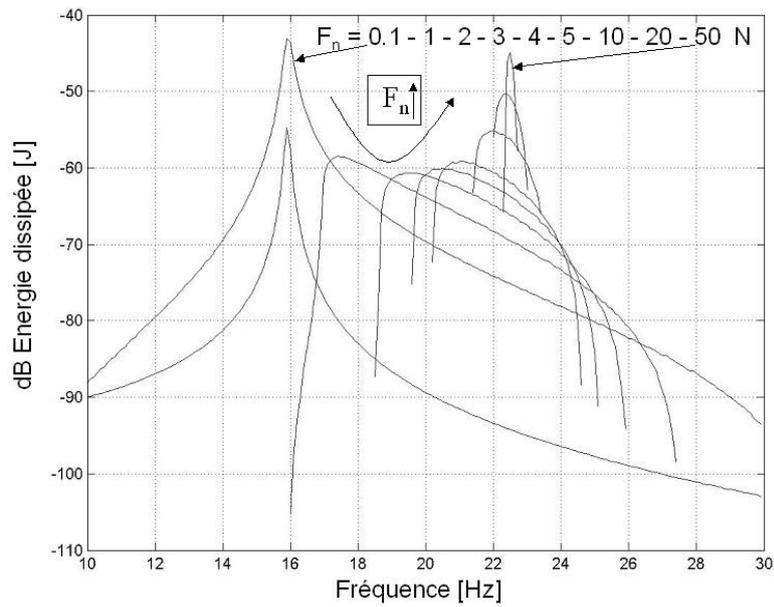


FIG. 2.15 Energie dissipée par frottement sec en fonction de la fréquence d'excitation pour différentes valeurs de  $F_n$

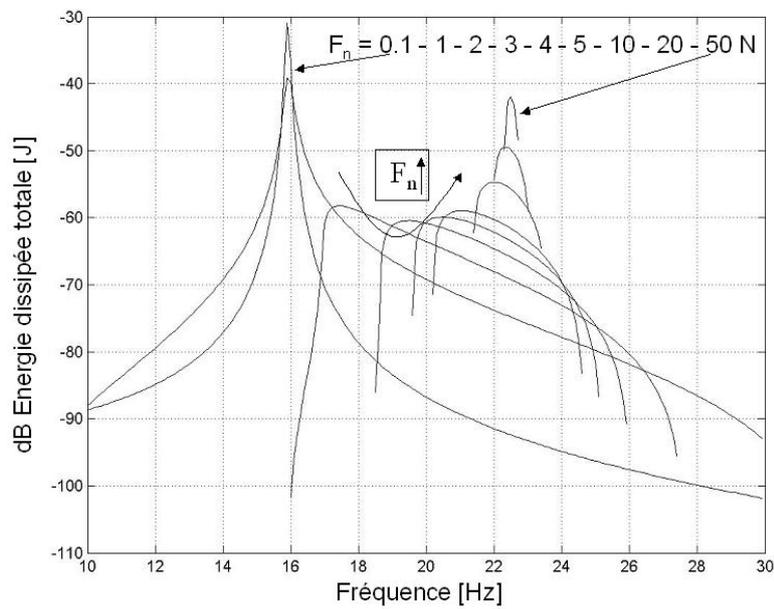


FIG. 2.16 Energie totale dissipée en fonction de la fréquence d'excitation pour différentes valeurs de  $F_n$

cédemment analysé. La seule différence provient du fait que l'énergie dissipée totale est due au frotteur et à l'amortisseur  $c$ . Le rapport de l'énergie dissipée par frottement sur l'énergie dissipée totale peut révéler l'importance du frotteur par rapport à l'amortisseur. Les valeurs du rapport  $E_{fro-dis}/E_{tot-dis}$  sont reportées figure (2.17) en fonction des mêmes valeurs de la force normale. On rappelle que, lorsque le contact est encore bloqué, seul l'amortisseur contribue à dissiper de l'énergie alors que le frotteur ne dissipe rien. Quand la force normale est de  $50\text{ N}$ , dans une bande fréquentielle entre  $22$  et  $23\text{ Hz}$ , l'état du contact est de type stick/slip à majorité bloqué. L'influence du frotteur est relativement faible et son énergie dissipée représente entre  $20$  et  $70\%$  de l'énergie totale dissipée. Pour des valeurs plus faibles de la force normale (entre  $5$  et  $20\text{ N}$ ), l'état du contact stick/slip (de plus en plus glissant) se manifeste pour un intervalle de fréquences plus important. Sous cette condition, l'influence du frotteur devient de plus en plus prépondérante. L'énergie dissipée associée atteint des valeurs de  $90\%$  de l'énergie totale dissipée. Lorsque l'état stick/slip devient à majorité glissante, l'influence du frotteur chute pour les fréquences correspondantes aux amplitudes maximales de réponse. En résumé, dans le cas de réponse forcée en régime permanent, le frotteur n'intervient pas pendant la phase bloquée et l'énergie dissipée totale est maximale. Elle

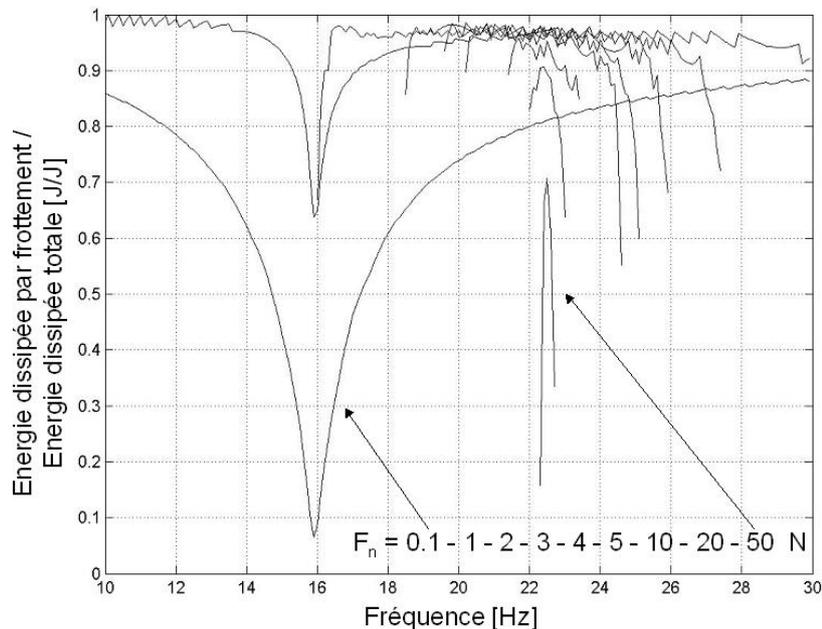


FIG. 2.17 Rapport entre l'énergie dissipée et l'énergie introduite pour différentes valeurs de  $F_n$

prend de plus faibles valeurs lorsque le frotteur dissipe 90% de cette énergie.

Afin d'explicitier les causes de la baisse des pics de résonance, on considère, comme dans le paragraphe précédent, le bilan des forces en fonction des différents états bloqué - stick/slip - glissant.

#### *Bilan des forces*

Lors de l'étude effectuée précédemment, le choix du paramètre d'amortissement  $c$  s'imposait naturellement. Le frotteur étant intégré, il convient avant toute chose de choisir le paramètre le plus représentatif du passage entre les trois différents états. Dans le cas de la méthode de la balance harmonique, la valeur du paramètre  $\vartheta^*$  semble la plus adéquate à cette description. On rappelle que :

$$\vartheta^* = \arccos(1 - 2\mu F_n / (k_t B)) \quad (2.23)$$

les deux transitions sont identifiées par les valeurs  $\vartheta^* = \pi$  entre l'état bloqué et l'état stick/slip et par  $\vartheta^* = 0$  entre l'état stick/slip et l'état complètement glissant. Pour chaque valeur du paramètre  $\vartheta^*$ , ce qui revient à fixer l'état du contact, les fréquences correspondant aux amplitudes maximales sont identifiées. Pour simplifier les résultats, la présence de l'amortissement interne du matériau est dans un premier temps négligée. Pour un état de contact stick/slip donné ( $\vartheta^* = \bar{\vartheta}^*$ ), la valeur de l'amplitude est obtenue d'après l'équation (2.8) :

$$B_1 = \frac{F_{ex}}{\sqrt{(f_{cb} - m\omega^2 + k)^2 + (f_{sb})^2}} \quad (2.24)$$

où  $f_{cb} = k_t/\pi (\bar{\vartheta}^* - 0.5 \sin(2\bar{\vartheta}^*))$  et  $f_{sb} = -k_t/\pi (\sin(\bar{\vartheta}^*))^2$  sont les valeurs des composantes sinusoïdale et cosinusoidale de la force transverse par unité de déplacement obtenues à partir de la méthode de la balance harmonique. La fréquence qui correspond à l'amplitude maximale de réponse est donnée par :

$$\Omega = \sqrt{\frac{k + f_{cb}}{m}} \quad (2.25)$$

Si à cette fréquence, les forces de réaction du système sont écrites, il vient pour les forces en phase au déplacement :

- Forces inertie :  $F_{in} = -m\Omega^2 \cdot X_{max} = -X_{max} \cdot (k + f_{cb})$
- Force de restitution du ressort  $k$  :  $F_k = k \cdot X_{max}$
- Force non linéaire en phase :  $F_c = X_{max} \cdot f_{cb}$

et pour les forces déphasées de  $90^\circ$  par rapport au déplacement :

- Force non linéaire déphasée de  $90^\circ$  :  $F_s = X_{max} \cdot f_{sb}$

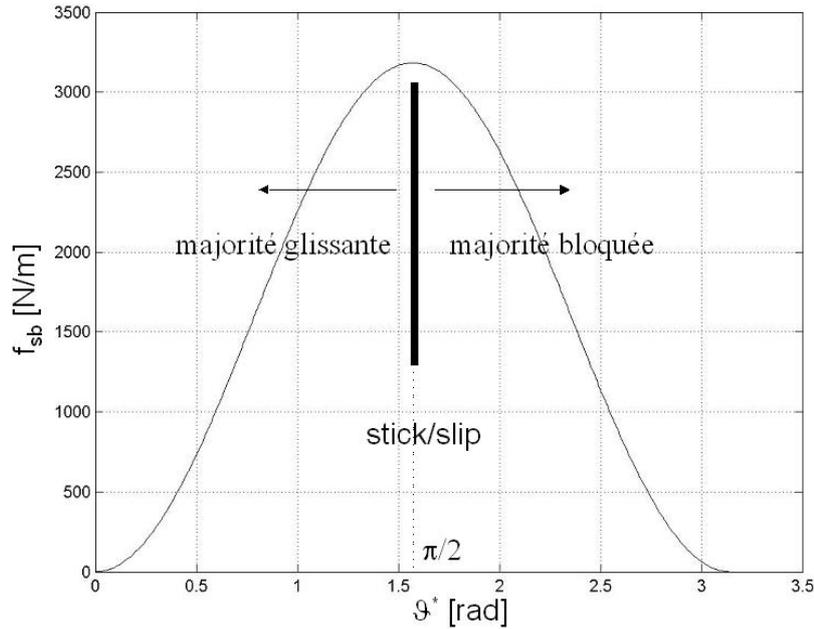


FIG. 2.18 Evolution de  $f_{sb}$  par rapport aux différentes configurations d'état stick /slip

En réécrivant la résultante des forces internes, on obtient :

$$\sum F_{internes} = \sqrt{F_{phase}^2 + F_{dphase}^2} = \sqrt{(-X_{max} \cdot (k + f_{cb} - k - f_{cb}))^2 + (X_{max} \cdot f_{sb})^2} \quad (2.26)$$

Les forces en phase s'annulent par sommation, la résultante des forces internes est donnée par :

$$\sum F_{internes} = X_{max} \cdot f_{sb} \quad (2.27)$$

Soit encore :

$$X_{max} \cdot f_{sb} = F_{ex} \quad (2.28)$$

La variation de  $f_{sb}$  est tracée figure (2.18), pour un état de contact passant d'une configuration complètement bloquée  $\bar{\vartheta}^* = \pi$  à une configuration complètement glissante  $\bar{\vartheta}^* = 0$ . Dans le cas où l'état stick/slip passe d'une configuration complètement bloquée ( $\bar{\vartheta}^* = \pi$ ) jusqu'à une configuration mi-bloquée -mi-glissante ( $\bar{\vartheta}^* = \pi/2$ ), la valeur de  $f_{sb}$  augmente. Comme le produit entre  $f_{sb}$  et le déplacement  $X_{max}$  reste constant, le déplacement diminue forcément. Au contraire, pour  $\bar{\vartheta}^*$  compris entre  $\pi/2$  et 0, (stick/slip à dominante glissante), la valeur de  $f_{sb}$  diminue et par conséquent le déplacement augmente de nouveau. La figure (2.19), montre l'évolution des valeurs maximales

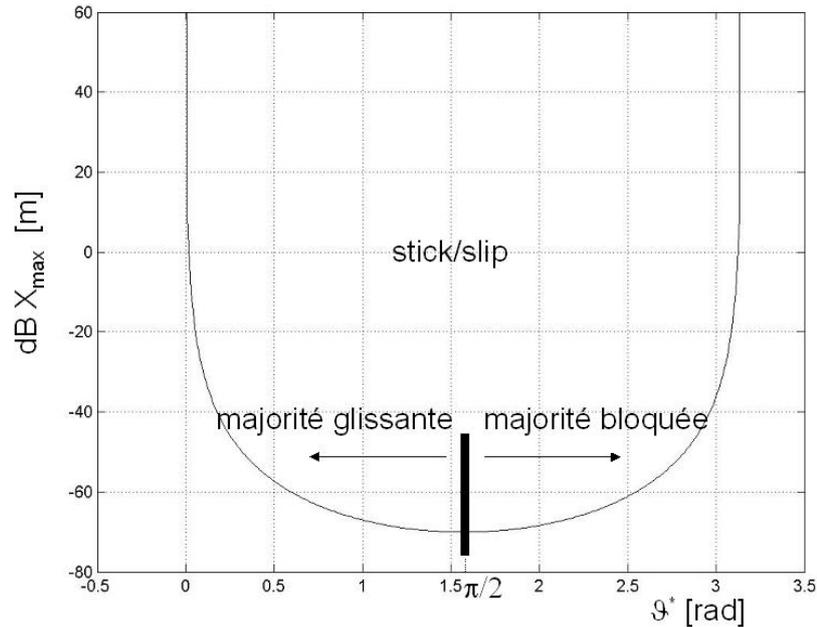


FIG. 2.19 Amplitude maximale par rapport aux différentes configurations d'état stick /slip

de l'amplitude en fonction des différents états de contact. Par analogie au cas masse-amortisseur-ressort, le frotteur agit comme souhaité sur les forces déphasées de  $90^\circ$  en intervenant directement sur les amplitudes. Pour cette raison, son action d'un point de vue physique, n'est efficace que pendant la phase stick/slip, c'est à dire quand la composante  $f_{sb}$  est différente de zéro.

Les conclusions tirées ci-dessus sont valides seulement dans le cas où le coefficient d'amortissement est négligeable, c'est à dire pour un état stick/slip assez loin des condition extrêmes complètement glissante et bloquée. Dans ces cas, en effet, l'énergie dissipée par frottement sec, comme montré précédemment, représente environ 90% de l'énergie dissipée totale. La généralisation de l'analyse précédente, englobant l'amortissement visqueux, est possible. Elle nécessite en revanche une étude numérique : la valeur de l'amplitude  $B_1$  est donnée par :

$$B_1 = \frac{F_{ex}}{\sqrt{(f_{cb} - m\omega^2 + k)^2 + (f_{sb} - \omega c)^2}} \quad (2.29)$$

Les fréquences associées aux amplitudes maximales sont déterminées par la recherche du minimum du dénominateur. En dérivant ce terme par rapport à  $\omega$ , il s'ensuit :

$$2 [f_{cb} + k - m\omega^2] (-2m \cdot \omega) + 2 [f_{sb} - c \cdot \omega] (-c)$$

et par développement, il vient :

$$\omega^3(4m^2) + \omega [-4m \cdot (f_{cb} + k) + 2c^2] - 2f_{sb} \cdot c \quad (2.30)$$

Pour chaque état de contact ( $\bar{\vartheta}^*$ ), les pulsations pour lesquelles la valeur de l'amplitude est maximale ( $X_{max}$ ) est obtenue en calculant numériquement les racines de l'équation (2.30). A ces valeurs de pulsations, les réactions du système en phase par rapport au déplacement s'expriment par les relations :

- Force inertie :  $F_{in} = -m\Omega^2 \cdot X_{max}$
- Force de restitution du ressort k :  $F_k = k \cdot X_{max}$
- Force non linéaire en phase :  $F_c = X_{max} \cdot f_{cb}$

les forces déphasées de  $90^\circ$  sont :

- Force non linéaire déphasée de  $90^\circ$  :  $F_s = X_{max} \cdot f_{sb}$
- Force visqueuse :  $F_d = -c \cdot X_{max} \cdot \Omega = -f_{db} \cdot X_{max}$

Pour les matériaux classiquement utilisés, la valeur de l'amortissement critique  $\alpha$  est très rarement supérieure à  $1/\sqrt{2}$ . Dans ce cas, la résultante des forces déphasées divisée par le déplacement est donnée presque exclusivement par la composante  $f_{sb}$ , sauf à proximité des états du contact à forte majorité bloquée ou glissante (figure 2.20), lieux où la force visqueuse par unité de déplacement  $f_{db}$  peut aussi dépasser en valeur absolu la valeur de  $f_{sb}$ . Par contre, la résultante des forces en phase reste toujours négligeable par rapport à la force déphasée, par unité de déplacement comme illustré en figure (2.21). Cela est vérifié pour tous les états de contact stick/slip ( $\bar{\vartheta}^*$ ). La résultante totale des forces est donc en première approximation donnée par la force déphasée et augmente jusqu'à un état du contact  $\bar{\vartheta}^* \approx \pi/2$ . En reconduisant le même raisonnement que celui réalisé dans la partie sans amortisseur, il est possible de conclure qu'à cette condition ( $\bar{\vartheta}^* \approx \pi/2$ ) est associée l'amplitude maximale la plus faible qu'on puisse obtenir en présence de frotteur. Ainsi, lors d'un cycle, la résultante des forces totale par unité de déplacement est la plus importante en raison du changement de conditions limites mi-bloqué, mi-glissant. Cette condition induit le comportement optimal du frotteur (amplitude maximale la plus petite possible).

En figure (2.22) sont reportées les amplitudes maximales comparées aux valeurs précédemment obtenues dans le cas où l'amortissement visqueux était négligé. On remarque qu'en présence de stick/slip, l'influence de l'amortissement  $c$  est négligeable pour le calcul des amplitudes maximales. Mais il joue un rôle majeur lorsque l'on tend vers des états stick/slip à majorité bloqué et à majorité glissant, quand les deux forces déphasées (non linéaire et visqueuse) sont du même ordre de grandeur.

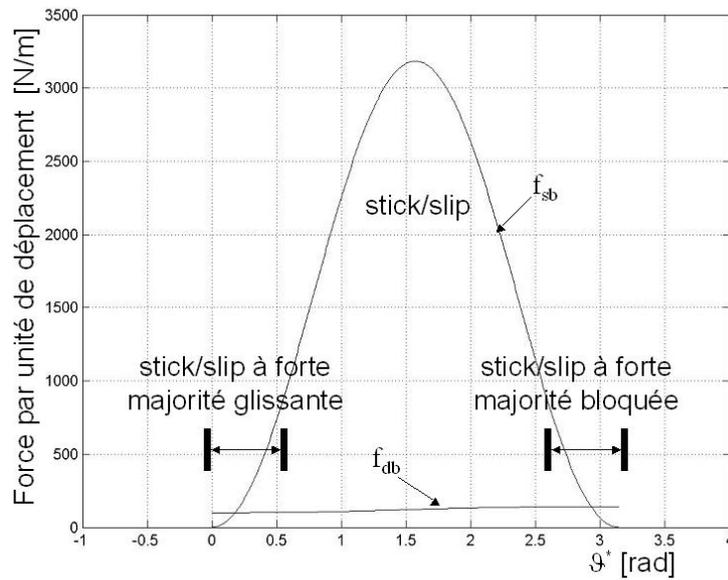


FIG. 2.20 Comparaison entre la force déphasée par unité de déplacement due au frottement ( $f_{sb}$ ) et la force déphasée visqueuse par unité de déplacement ( $f_{db}$ )

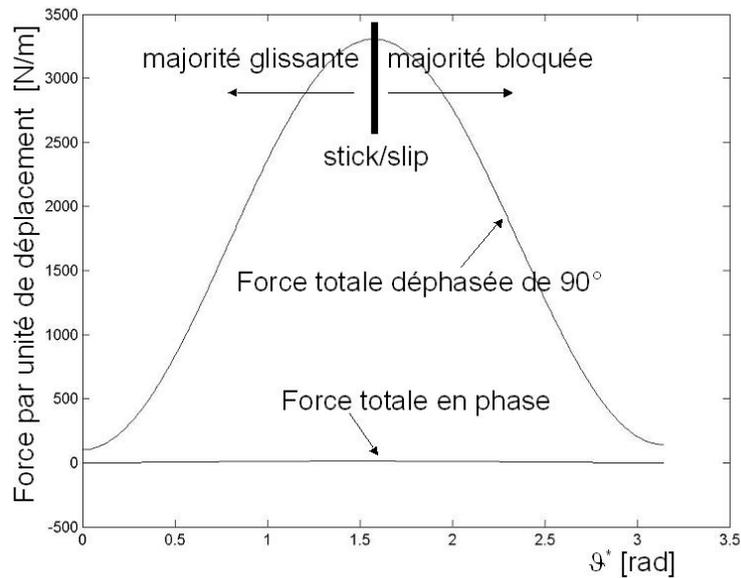


FIG. 2.21 Comparaison entre la force déphasée totale par unité de déplacement et la force en phase totale par unité de déplacement

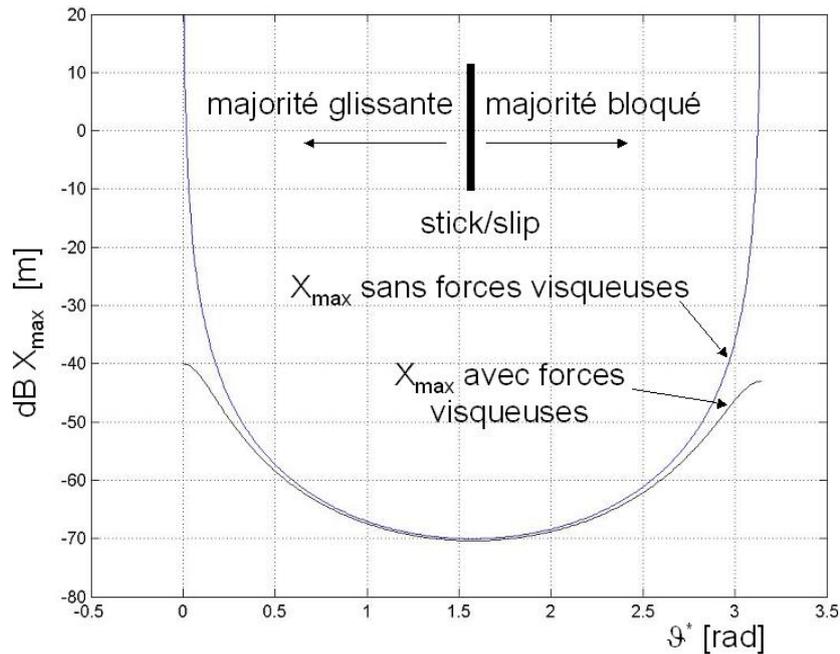


FIG. 2.22 Comparaison entre l'amplitude maximale obtenue avec et sans les forces visqueuses, en fonction des différents états de contact

S'étant placé précédemment dans le cas d'un amortissement visqueux très faible ( $\alpha = 5e-3$ ), il est intéressant d'étudier l'influence d'une variation de cet amortissement pour des valeurs plus importantes, influence sur les amplitudes maximales et l'état de contact correspondant. Au niveau de l'amplitude maximale, pour une valeur donnée de  $\alpha$ , les forces dues au seul amortisseur visqueux par unité de déplacement atteignent une valeur plus élevée quand l'état de contact est bloqué car elles sont proportionnelles à la pulsation. La force déphasée totale par unité de déplacement est donc donnée par deux composantes dont la première liée au frottement sec voit son maximum en  $\bar{\vartheta}^* = \pi/2$ , et la deuxième liée à l'amortissement visqueux voit son maximum à  $\pi$  quand l'état est complètement bloqué. La somme des deux composantes atteint son maximum pour une valeur de  $\vartheta^*$  comprise entre  $\pi/2$  et  $\pi$ . Quand  $\alpha$  est nul, la composante des forces  $f_{db}$  est nulle et, par conséquent le maximum d'amplitude a lieu pour  $\bar{\vartheta}^* = \pi/2$ . Pour des valeurs croissantes de  $\alpha$  (figure 2.23), la composante  $f_{db}$  devient de plus en plus prépondérante. Ainsi, le maximum d'amplitude a lieu pour des valeurs de  $\bar{\vartheta}^* \rightarrow \pi$  liées à une configuration de l'état de contact de plus en plus bloqué. Ces conclusions sont vérifiées uniquement quand les forces en phase restent négligeables en première approximation par rapport aux forces déphasées de  $90^\circ$ , c'est à dire, comme montré précédemment

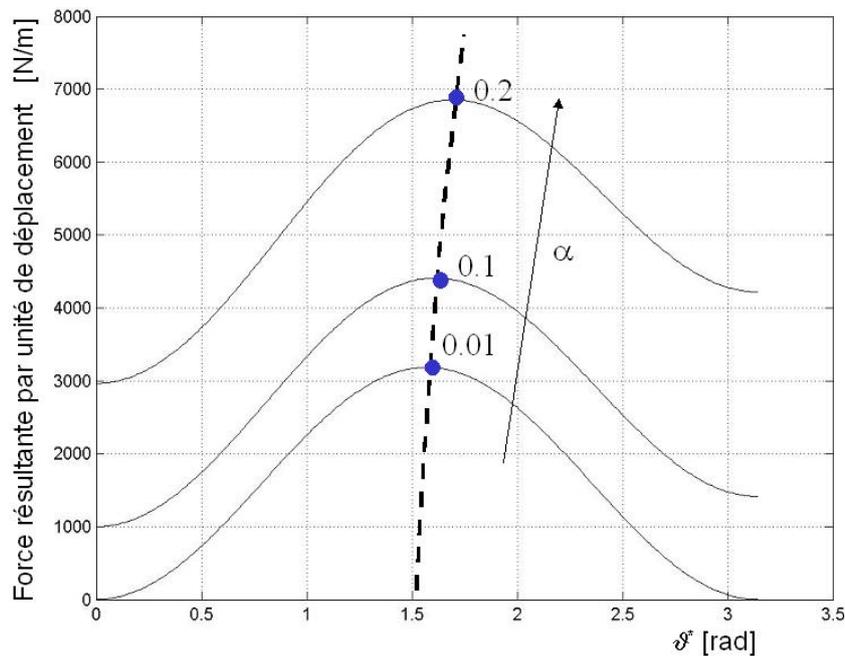


FIG. 2.23 Force par unité de déplacement obtenue en fonction des différentes valeurs de  $\alpha$  comprises entre 0 et 0.2

en figure (2.12) quand  $\alpha \leq 0.1$ .

### 2.3.3 Conclusions

L'objectif de ce paragraphe concerne l'affinage des analyses permettant d'expliquer les causes physiques des baisses d'amplitudes vibratoires amenées par les dispositifs frotteurs. L'explication de ce type de comportement a été donnée grâce à l'analyse de l'énergie dissipée et des résultantes des forces internes du système en correspondance des amplitudes maximales. Tout d'abord un système à 1 degré de liberté du type masse-ressort-amortisseur a été étudié. Il est bien connu que pour un tel système l'augmentation de l'amortissement  $\alpha$  entraîne une baisse des amplitudes déplacement. Une analyse énergétique a montré qu'en correspondance des fréquences de résonances amorties, quand les amplitudes sont les plus élevées, l'énergie dissipée est faible. En revanche, pour les systèmes peu amortis, l'équilibre des forces en présence montre que la résultante totale en première approximation est limitée aux seules forces visqueuses déphasées par rapport au déplacement de  $90^\circ$ . Cette force proportionnelle au produit  $X_{max}\alpha$  compense la force d'excitation et pour les valeurs croissantes de  $\alpha$  les amplitudes maximales baissent forcément.

Quand un frotteur est rajouté au système, la même méthodologie peut être appliquée.

L'énergie dissipée totale, comme l'énergie dissipée par frottement sec, diminuent ici aussi quand l'état du contact passe d'une configuration bloquée à stick/slip, et il en est de même pour les pics d'amplitude maximale. Donc, dans le cas du frottement comme dans le cas du comportement linéaire, ce n'est pas l'énergie dissipée (totale ou partielle due au frottement sec) qui peut expliquer une baisse importante des pics d'amplitude. Une première approche réalisée en négligeant l'amortissement visqueux, montre que lorsqu'on est au niveau de la pulsation correspondant à l'amplitude maximale, la résultante des efforts internes est donnée exclusivement par la force non linéaire créée par le frotteur et déphasée de  $90^\circ$  par rapport au déplacement. Pendant le passage bloqué-stick/slip, cette force par unité de déplacement augmente et, par conséquent, les déplacements maximaux baissent. Au contraire, entre des phases stick/slip et glissante, cette composante diminue et par conséquent les déplacements augmentent de nouveau. Une généralisation du problème pour des valeurs non négligeables de l'amortissement a été conduite et montre que le comportement global du frotteur ne change pas dans ce cas et que la seule conséquence significative est associée au changement des configurations optimales de l'état de contact vers les états stick/slip de plus en plus bloqués.

La présence du frotteur permet de baisser l'amplitude des pics de résonance et son effet principal est lié au changement des conditions limites qu'il génère pendant un cycle d'excitation. Ce changement provoque une augmentation des forces par unité de déplacement, déphasées de  $90^\circ$  par rapport au déplacement et permet une baisse des amplitudes des vibration pour les fréquences en correspondance des niveaux des pics plus élevées.

Les principales caractéristiques du comportement dynamique en présence de frottement sec analysées, il est indispensable, avant d'étudier des systèmes complexes de valider les approches retenues : choix du modèle de contact par reconnaissance à partir des réponses forcées, validation des procédures expérimentales ... Ces validations sont réalisées au travers de la mise en place d'un dispositif expérimental très simple mais représentatif du comportement dynamique en présence de frottement sec.

## 2.4 Description du dispositif expérimental

Une application simple a été développée pour mettre au point et valider les outils expérimentaux et numériques, nécessaires à l'étude d'un système en présence de frottement sec. Le système considéré est constitué par une poutre encastrée avec un frotteur positionné à l'autre ex-

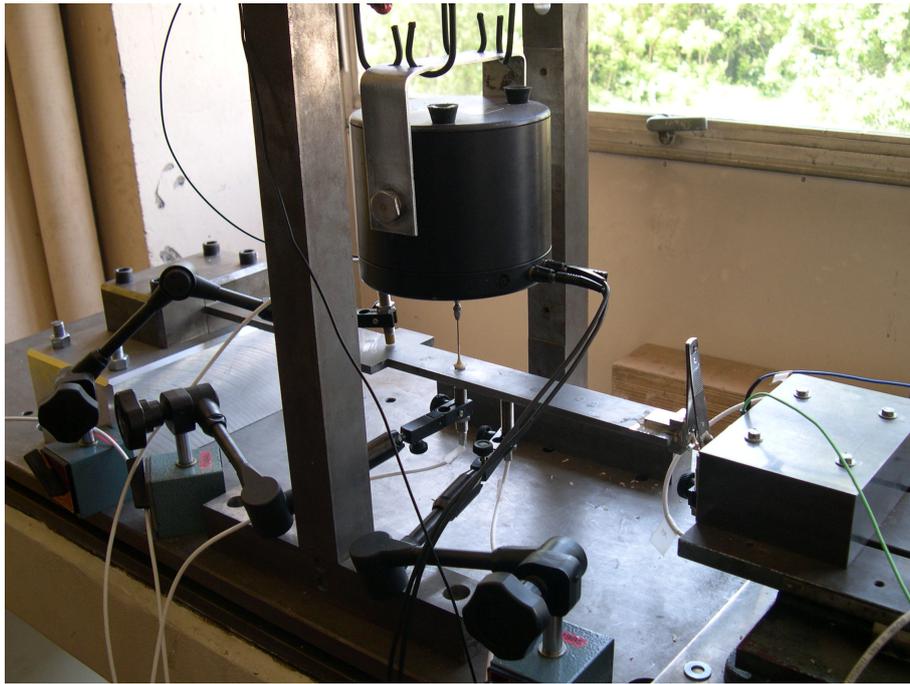


FIG. 2.24 dispositif expérimental - poutre encastrée

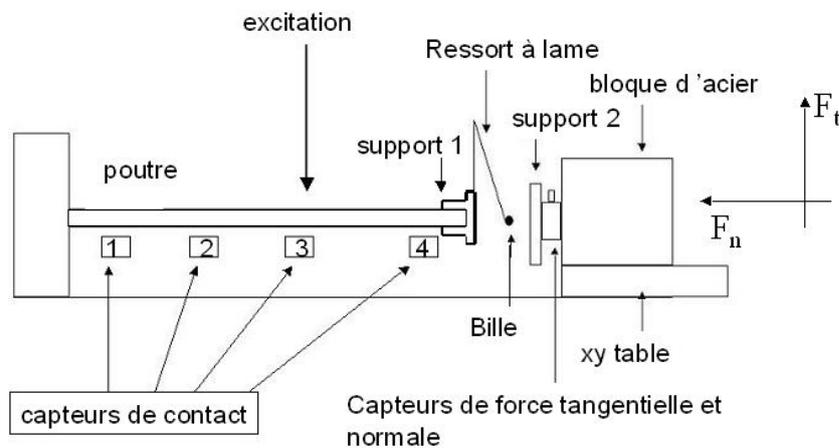


FIG. 2.25 schéma du dispositif expérimental - poutre encastrée

trémité libre. L'instrumentation mise en place autorise la mesure des déplacements et de la force d'excitation ainsi que, simultanément, les forces normale et transverse relatives à la surface de contact.

Le dispositif expérimental montré en figure (2.24) et schématisé figure (2.25) est constitué par une poutre en acier de longueur 0.05 m dont la section rectangulaire vaut 0.008 m par 0.04 m.

Différentes précautions sont prises en considération :

- Le support 1 sur lequel est fixé un ressort à lame est monté à l'extrémité libre de la poutre
- La raideur du ressort dans la direction longitudinale de la poutre est très faible pour augmenter la sensibilité de la mesure de la charge normale
- Une bille de roulement est collée au ressort à lame
- La poutre est directement taillée dans un bloc d'acier pour minimiser l'amortissement structural apporté par les conditions aux limites (encastrement)
- Pour charger le contact, un massif d'acier est fixé sur une table xy solidarisée au banc expérimental et le support 2 est vissé sur ce massif.
- Le frottement intervient entre la bille et le support 2

Quatre capteurs ferromagnétiques sont utilisés pour mesurer les déplacements de la poutre et identifier les modes propres de vibration. L'étalonnage des capteurs inductifs est présenté en Annexe D.

Leur position se trouve respectivement à 0.1, 0.22, 0.30 et 0.35 m de l'encastrement. L'excitation est obtenue grâce à l'utilisation d'un pot électrodynamique (force maximale 90 N) placé approximativement au milieu de la poutre, à 0.30 m de l'encastrement. Un capteur de force inséré entre le support et le bloc d'acier mesure les composantes orthogonales de la force dynamique (force transverse) et de force quasi statique (force normale). Le système d'acquisition et de traitement de données utilisé est le système LMS Cada-X. Le schéma synoptique du dispositif expérimental de

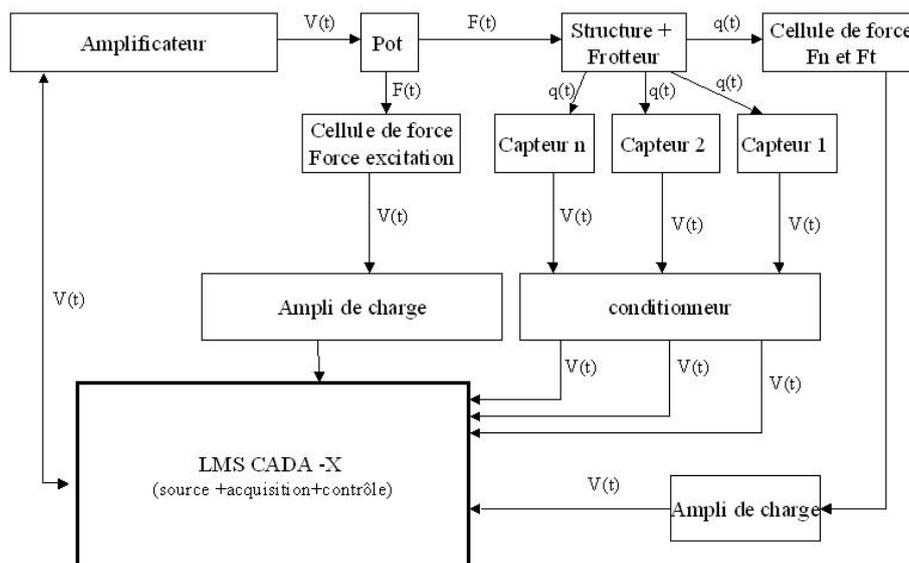


FIG. 2.26 Schéma synoptique

mesures est présenté figure (2.26). En présence de systèmes non linéaires, il est nécessaire de débiter l'analyse par une approche linéaire qui permet la détermination des caractéristiques des matériaux, des conditions aux limites, etc. Dans un second temps, le comportement non linéaire du système est analysé afin de valider les procédures retenues.

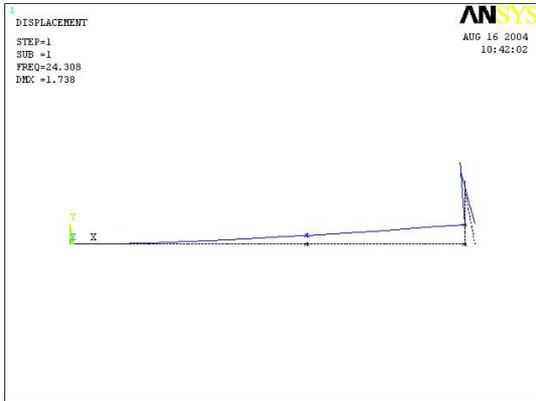
## 2.5 Approche linéaire

Dans le cas de structure en présence de frottement sec, il est toujours possible de considérer les deux comportements linéaires associés correspondant aux états du contact complètement bloqué et complètement glissant. Les conditions aux limites qui traduisent la présence du frotteur dans ces deux cas extrêmes sont représentées respectivement par les conditions libre (comportement glissant) et appuyé à un ressort (comportement bloqué).

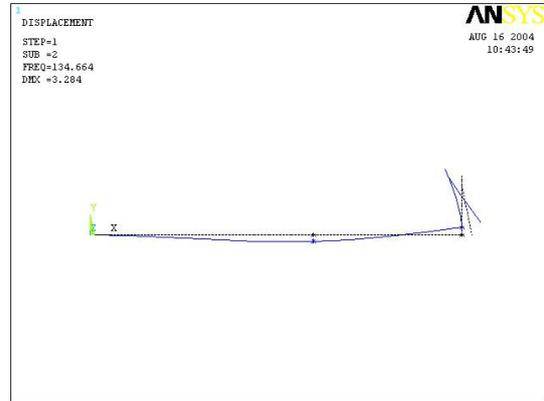
### 2.5.1 Poutre encastrée - Libre

L'analyse du comportement dynamique de la poutre encastrée libre permet donc de simuler un état de contact de type complètement glissant. Dans ce cas, les cinq premières fréquences de résonance sont obtenues en balayant les fréquences d'excitation comprises entre 10 et 400 Hz. Une approche numérique de type éléments finis est conduite afin de recalibrer le modèle sur cette configuration. En vue des calculs non linéaires et afin de maintenir un nombre de degrés de liberté le plus faible possible, des éléments poutre (BEAM3 d'ANSYS - deux noeuds avec trois ddl par noeuds) sont choisis pour représenter la structure. Un nombre total de 40 ddl est utilisé pour la modélisation complète de la structure, ressort à lame inclus.

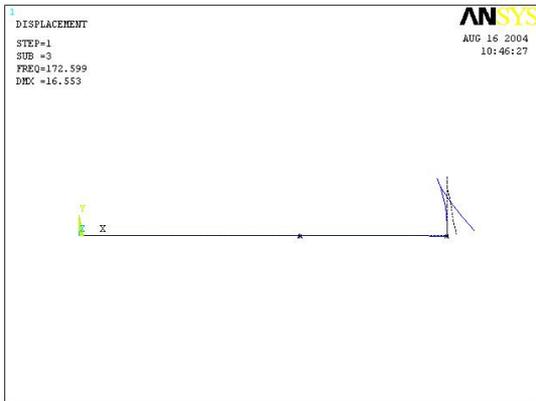
Dans ce premier cas, vu la linéarité du comportement dynamique, une simple analyse harmonique conduit à l'identification des fréquences de résonance associées aux différents modes et à l'évaluation des amplitudes correspondantes en chaque noeud. La matrice d'amortissement introduite dans le système, est du type  $[C] = \alpha_{ef}[M] + \beta_{ef}[k]$  avec  $\alpha_{ef} = 8 \cdot 10^2 1/s$  et  $\beta_{ef} = 0$  (coefficients évalués par recalage sur les amplitudes du premier mode libre). En général, pendant la phase stick/slip du contact, la valeur d'amortissement est très faible par rapport à la valeur équivalente amenée par le frottement ; sa valeur modifie peu les niveaux des réponses lorsque le frottement sec est en jeu. Par conséquent, sa valeur ne joue un rôle important uniquement dans les cas extrêmes libre et bloqué. Les valeurs des fréquences naturelles numériques sont comparées aux valeurs expérimentales et l'ensemble est reporté dans le tableau (2.1). Les caractéristiques matériau retenues sont : module de Young  $E = 2.02 \cdot 10^{11} N/m^2$ , densité  $\rho = 7800 Kg/m^3$  et coefficient de poisson



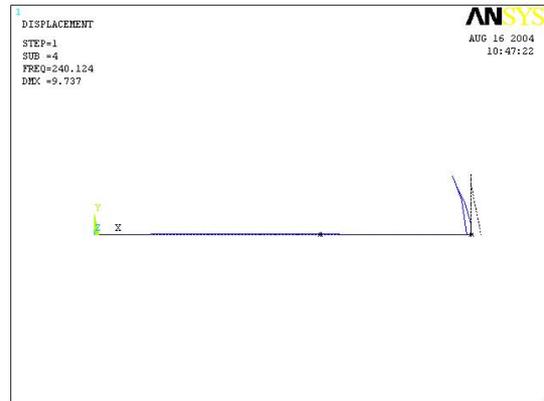
(a) Premier Mode - 1<sup>ère</sup> Flexion



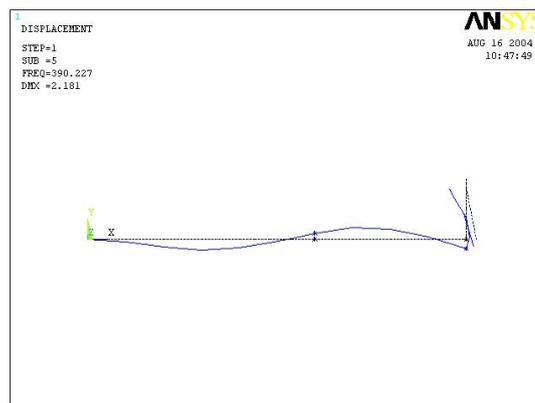
(b) Deuxième Mode - 2<sup>ème</sup> Flexion



(c) Troisième Mode - 1<sup>ère</sup> Mode du ressort à lame



(d) Quatrième Mode - 2<sup>ème</sup> Mode du ressort à lame



(e) Cinquième Mode - 3<sup>ème</sup> Flexion

FIG. 2.27 Modes propres de la structure encastée - libre

Mode propre	Expérimental [Hz]	Numérique [Hz]	Erreur [%]
1 <sup>ère</sup> Flexion	24	24.3	1.2
2 <sup>ème</sup> Flexion	132.5	134.7	1.7
1 <sup>ère</sup> Mode du ressort à lame	192	172.6	10.1
2 <sup>ème</sup> Mode du ressort à lame	263	240.1	8.7
3 <sup>ème</sup> Flexion	390.5	390.2	0.0

TAB. 2.1 Fréquences de résonance pour le système encasté libre

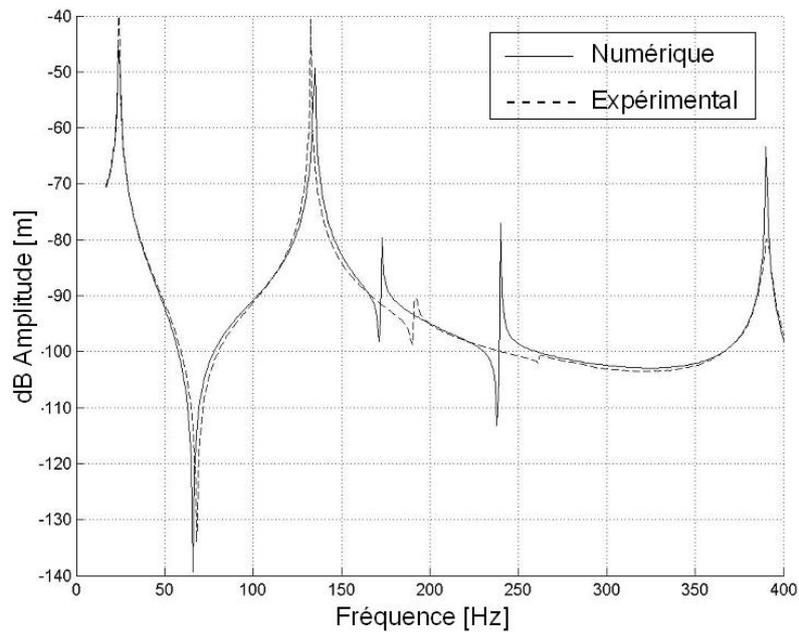


FIG. 2.28 Comparaison expérimentale numérique sans le frotteur

$\nu = 0.3$ .

La figure (2.27) présente les déformées modales obtenues pour ces cinq premières fréquences. Les deux premiers et le cinquième mode correspondent à des modes de flexion de la poutre et pour ces modes la comparaison expérimentale numérique est très bonne. Le ressort à lame dispose de caractéristiques vibratoires propres dans le spectre fréquentiel considéré (cf. figure 2.27 (c) et (d)) et deux fréquences naturelles lui sont associées. La différence obtenue pour ces modes est notable ( $\approx 10\%$ ) mais s'explique par la nature du collage entre le ressort à lame et la poutre ainsi que par le faible nombre de noeuds utilisé pour modéliser le ressort. Le calcul de la réponse forcée

donne également des résultats en bonne corrélation avec les fonctions de transfert mesurées (2.28).

### 2.5.2 Poutre encastrée - appuyée

D'un point de vue dynamique, le comportement complètement bloqué se traduit par la présence d'un ressort qui remplace complètement le contact. La raideur du ressort peut être déterminée directement par analyse de la réponse forcée. La force d'excitation est de 2 N. Expérimentalement, le contact est chargé avec une force normale de 40 Newtons. Cette force est tout d'abord appliquée selon la direction longitudinale de la poutre au niveau du noeud de contact. Afin de simuler numériquement le comportement complètement bloqué, le déplacement du noeud de contact est bloqué selon la direction de la charge normale. Un ressort de raideur équivalente égale à la raideur tangentielle du contact est lié au noeud dans la direction transverse. Les deux étapes à suivre sont schématisées figure (2.29). La valeur de la raideur globale du système change légèrement puisqu'elle doit prendre en compte la présence du ressort à lame à l'extrémité. A partir de la première fréquence de résonance du comportement bloqué de la poutre, le recalage de la raideur transverse de contact permet d'identifier sa valeur à  $k_t = 3.0e5 \text{ N/m}$ . Dans ce cas, seul le mode de première flexion est montrée (figure 2.30), car les niveaux de force normale nécessaires pour bloquer le contact pour les modes plus élevés sont trop importants, et expérimentalement non atteignables. Une bonne concordance expérimentale-numérique (figure 2.30) est ici encore observée. La fréquence de résonance du cas complètement bloqué dépend de la charge normale. En diminuant la charge normale, non seulement le déplacement horizontal du ressort diminue mais aussi la raideur totale du système diminue

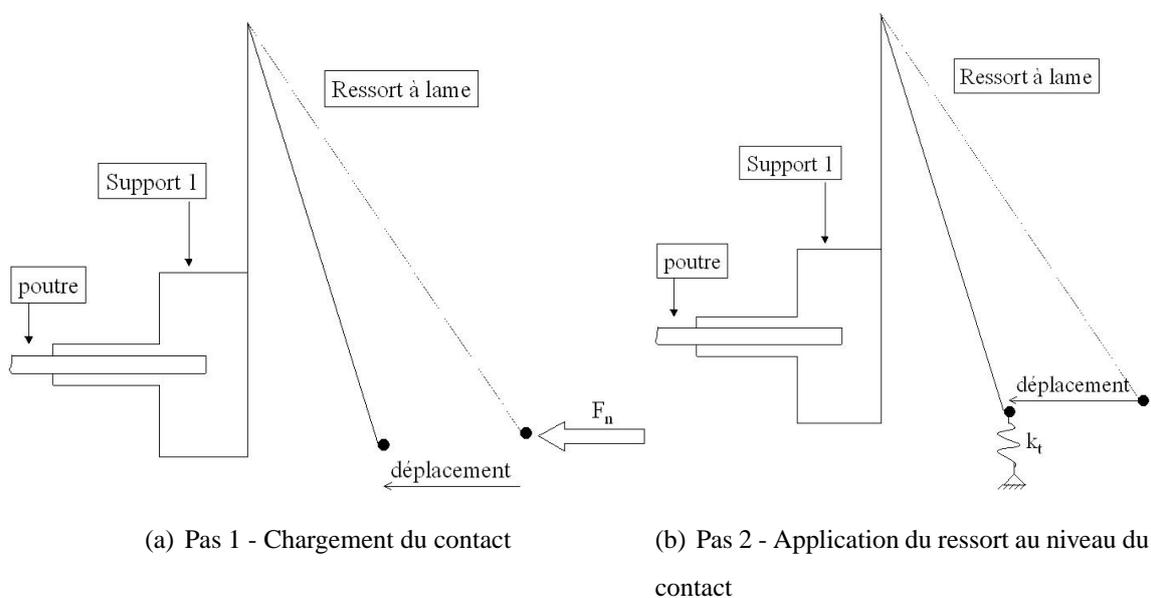


FIG. 2.29 Procédure pour le calcul des fréquences propres pour le cas bloqué

Force normale [N]	Fréquence naturelle [Hz]
5	85.894
10	86.213
20	86.850
30	87.462
40	88.052

TAB. 2.2 Variation des fréquences naturelles du système encastré - appuyé en fonction des différentes charges normales

légèrement. Les valeurs des fréquences obtenues pour différentes conditions de chargement sont reportées dans le tableau (2.2). Il est évident que les différences au niveau de la fréquence de résonance demeurent très faibles, mais cette observation est très importante pour la suite de l'analyse quand différentes forces normales seront considérées.

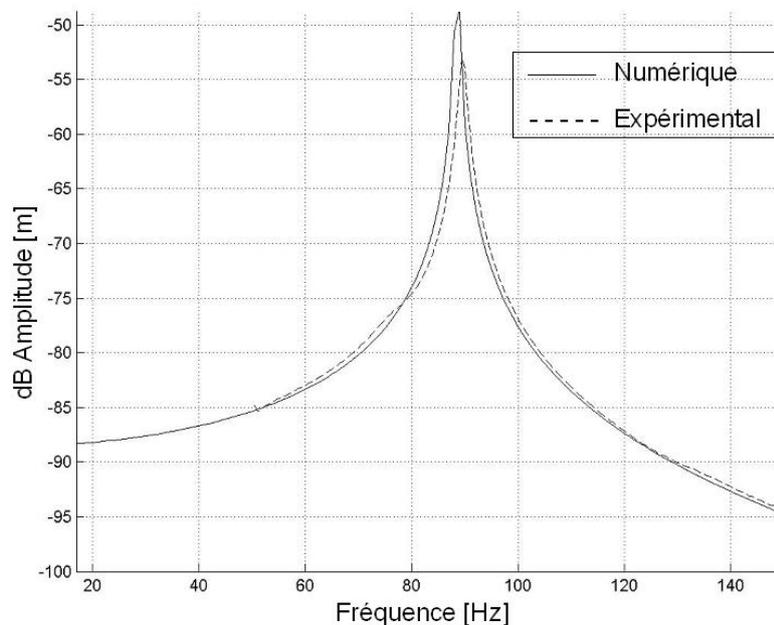


FIG. 2.30 Comparaison expérimentale numérique pour le cas limite bloqué avec une force normale de 40 N

## 2.6 Approche non linéaire

La simplicité géométrique du dispositif autorise l'accès à la zone (noeud) de contact. Par conséquent, une première approche expérimentale à excitation sinusoïdale à fréquence constante fournit la mesure de la force transverse transmise par le frotteur ainsi que les amplitudes de vibrations en régime établi. Les boucles de la force de restitution pour différentes conditions de charge sont tracées afin d'identifier le modèle de contact qui schématise de manière la plus adéquate le comportement dynamique de la structure.

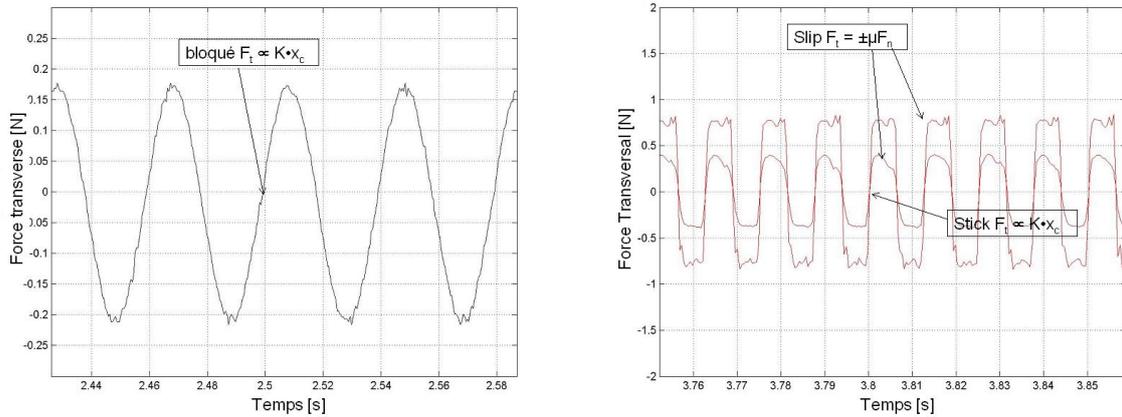
La façon la plus rapide pour obtenir expérimentalement les courbes de réponse forcée est de procéder à un balayage sinusoïdal, en faisant varier la fréquence d'excitation entre deux fréquences avec un pas imposé. Il est important de rappeler la précaution à prendre concernant le niveau de la force d'excitation qui doit rester constante pendant tout le balayage afin de ne pas changer l'état du contact et fausser les mesures expérimentales. Grâce à un dispositif de contrôle, disponible avec le logiciel d'acquisition LMS Cada-X, il est possible de choisir le niveau de la force d'excitation et de le maintenir constant pour chaque fréquence pendant tout le balayage.

En raison de la simplicité de la structure et la facilité d'accès au point de contact, les deux méthodes (excitation à fréquence constante et balayage sinusoïdal) peuvent être employées. Dans un cas plus réaliste, la première méthode n'est plus réalisable expérimentalement, et pour cette raison une attention particulière est donnée à l'acquisition de type balayage sinusoïdal asservi afin d'identifier le type de contact à partir des seules réponses forcées expérimentales.

### 2.6.1 Résultats expérimentaux à fréquence constante

#### *Force transverse*

Pour le dispositif expérimental, on considère toujours le cas d'une excitation sinusoïdale d'intensité égale à 2 Newtons. Quand la valeur de la charge normale est de 40 Newtons, le contact est complètement bloqué et la fréquence de résonance est de 88 Hz, comme constaté lors de l'approche de type linéaire. Dans ces conditions, la force transverse mesurée  $F_t$  a une expression de type sinusoïdal proportionnel au déplacement au point de contact (figure 2.31 (a)). Ce type d'expression caractérise la force transverse tant que sa valeur n'atteint pas la limite de glissement  $\mu F_n$ . Différents essais expérimentaux sont conduits pour montrer la forme de la force transverse pendant une phase stick/slip du contact. Une valeur plus faible de la force normale est fixée dans le but d'autoriser le contact à alterner d'une phase glissante à une phase bloquée pendant chaque cycle d'excitation. Deux forces normales différentes sont choisies :  $F_n = 1 - 0.5$  N et l'excitation se fait à une fréquence



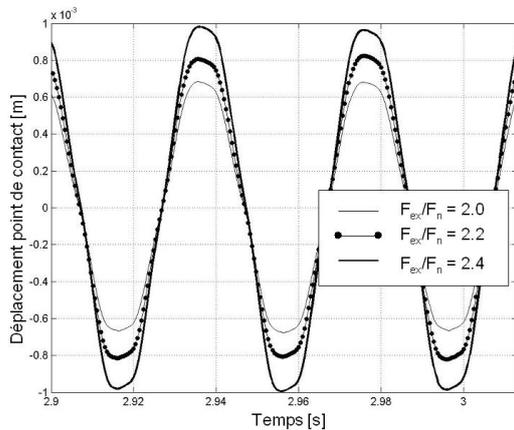
(a) cas bloqué :  $F_n = 40 \text{ N}$ ,  $F_{ex} = 2 \text{ N}$  pour une fréquence de 25 Hz  
 (b) cas stick/slip :  $F_n = 1 - 0.5 \text{ N}$ ,  $F_{ex} = 2 \text{ N}$ , pour une fréquence de 80 Hz

FIG. 2.31 Analyse de la force transverse en fonction du temps

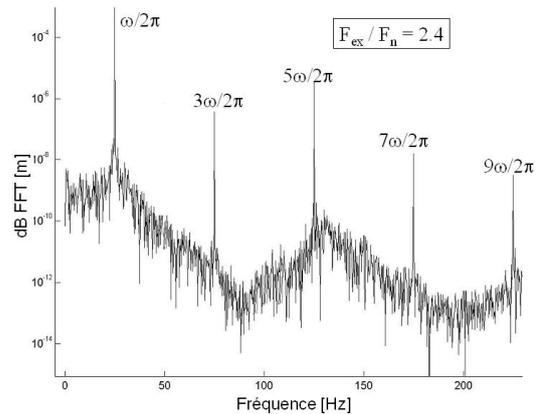
proche de la fréquence du cas complètement bloqué. La figure (2.31 (b)), montre l'influence de l'état stick slip sur la forme de la force transverse. Pour les deux cas de chargement, deux zones différentes sont observées : la première issue de la phase bloquée du contact est proportionnelle au déplacement (la force transverse reste inférieure à  $\mu F_n$ ) et la deuxième correspondant à une phase glissante où la force transverse reste à une valeur constante égale à  $\mu F_n$ . Cette courbe donne entre autre une mesure rapide du coefficient de frottement. La valeur expérimentale obtenue est égale à environ 0.75 pour le premier cas ( $F_n = 1 \text{ N}$ ) et 0.8 pour le deuxième cas ( $F_n = 0.5 \text{ N}$ ). En revanche, aucun renseignement concernant le type de comportement macroslip ou microslip ne peut être déduit.

*Boucles de la force de restitution*

Les boucles de la force de restitution en fonction du déplacement total au point de contact peuvent être utilisées pour le choix de la modélisation. Il est important avant tout de déplacer un des capteurs afin de mesurer le déplacement transverse au niveau du point de contact. Différents essais sont conduits en faisant varier l'état de contact pour montrer l'allure du déplacement dans les différents cas. Dans le cas linéaire bloqué, les rapports entre la force d'excitation et la force normale sont trop faibles pour que le contact puisse passer à l'état stick/slip. En augmentant le rapport  $F_{ex}/F_n$ , le contact change son état vers une configuration de type stick/slip. Par conséquent, le déplacement change d'allure (2.32 (a)). La forme reste de type sinusoïdal. La transformée de Fourier présentée figure (2.32 (b)) montre que l'amplitude de la composante harmonique correspondant à la fréquence

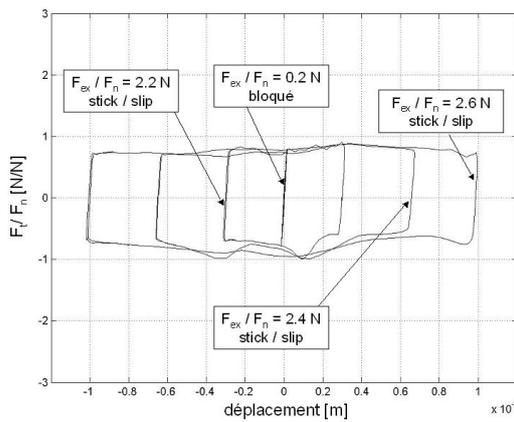


(a) Réponse dans le domaine du temps

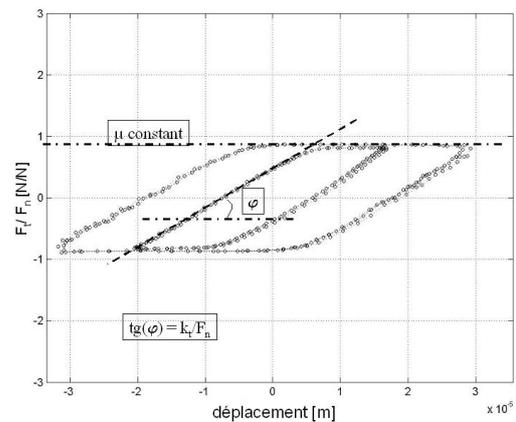


(b) Composantes harmoniques dans le cas d'une fréquence d'excitation de  $\omega/(2\pi) = 25 \text{ Hz}$

FIG. 2.32 Analyse de la forme de la réponse en fonction du temps dans le cas stick/slip



(a)  $F_{ex}/F_n = 2.4 - 2.6$  avec  $F_n = 5 \text{ N}$  à  $25 \text{ Hz}$



(b)  $F_{ex}/F_n = 2$  avec  $F_n = 5 \text{ N}$  à  $50$  et  $80 \text{ Hz}$

FIG. 2.33 Boucles de la force de restitution

d'excitation représente 90% de l'amplitude totale. Plusieurs composantes harmoniques, uniquement impaires, font parties intégrantes de la réponse en raison de la nature de la non-linéarité.

Les boucles données figure (2.33) sont obtenues à partir des mesures dans le domaine du temps de la force transverse et du déplacement du point de contact. Différents cas sont considérés afin d'examiner l'évolution du coefficient de frottement sec en fonction des états du contact. Dans un premier temps, une acquisition est conduite au niveau de la résonance du cas complètement glissant avec un rapport  $F_{ex}/F_n$  compris entre 2.2 et 2.6 à 25 Hz. Les boucles ainsi obtenues ont une

forme de parallélogramme quand le contact est stick/slip et de ligne droite quand le contact est bloqué. Dans ces cas, le coefficient de frottement  $\mu$  oscille entre une valeur de 0.75 et 0.85 (figure 2.33 (a)). Dans un deuxième temps, un essai est mené à une fréquence correspondant à la fréquence de résonance du cas linéaire bloqué pour un rapport  $F_{ex}/F_n$  égal à 2.0. Dans ce cas, la valeur du coefficient de frottement est plus élevée et sa valeur est voisine de 0.9 (figure 2.33 (b)). Seule une qualité assez modeste des surfaces en contact explique la valeur très élevée du coefficient de frottement par rapport aux valeurs plus communément trouvées dans la bibliographie, généralement comprises entre 0.5 et 0.8. La valeur de la raideur tangentielle peut être identifiée à partir de la pente tangente aux boucles expérimentales de la force transverse en fonction du déplacement au point de contact. Dans les deux cas, une valeur voisine a été obtenue :  $2.8e5$  N/m pour le premier cas contre  $3.0e5$  N/m pour le deuxième.

L'allure en forme de parallélogramme de ces boucles mesurées expérimentalement indique clairement qu'un modèle de type macroslip peut être suffisant pour décrire le comportement dynamique du système. De plus, la valeur de la raideur de contact peut être retenue constante (en première approximation) entre les différentes boucles traduisant le passage d'un état glissant à un état bloqué. Par conséquent, l'effet de la rugosité peut être négligé. Les valeurs choisies pour l'approche numérique sont donc les suivantes :  $k_t = 3.0e5$  N/m et  $\mu = 0.9$ .

### 2.6.2 Résultats expérimentaux en balayage sinus

Le choix du meilleur modèle de contact à partir des réponses forcées du système est plus facilement réalisable dans le cas de structures réelles, lorsque l'accès aux points de contact est difficile et lorsque les mesures de la force transverse et du déplacement au niveau de la zone de frottement s'avèrent expérimentalement impossibles à effectuer.

#### *Réponses forcées*

Différentes manipulations ont été réalisées pour différentes valeurs de la charge normale et de la force d'excitation. La force normale est appliquée en déplaçant la table xy et la poutre est excitée par une force sinusoïdale  $F_{ex} \sin(\omega t)$ , l'amplitude  $F_{ex}$  étant contrôlée à tout instant.

Lors d'une première campagne d'essais, la force d'excitation est maintenue à  $2$  N et la force normale au contact varie dans un intervalle compris entre  $0.5$  et  $40$  N. La figure (2.34) montre le maintien de niveau constant de la force d'excitation obtenu pendant toute la campagne d'acquisition pour différentes valeurs de la charge normale. Les FRFs mesurées expérimentalement sont tracées figure (2.35). Pour les deux derniers graphiques, le cas glissant avec la force normale de  $0.5$  N n'est pas reporté. Les amplitudes de vibrations, trop importantes hors de l'intervalle de fonc-

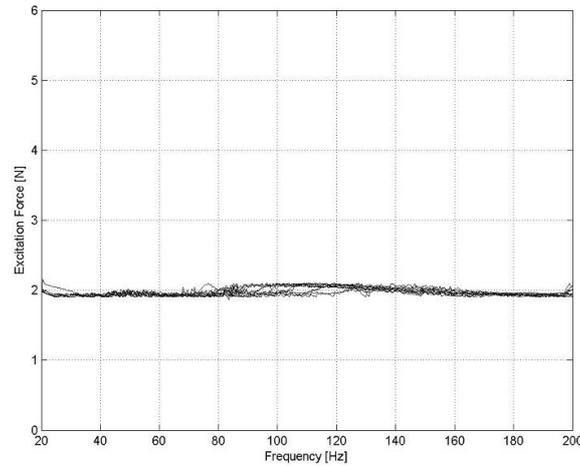
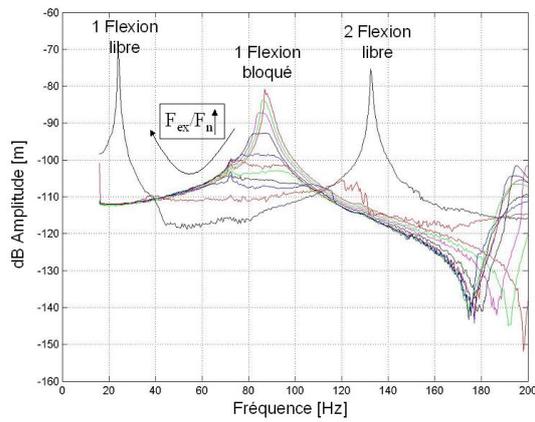
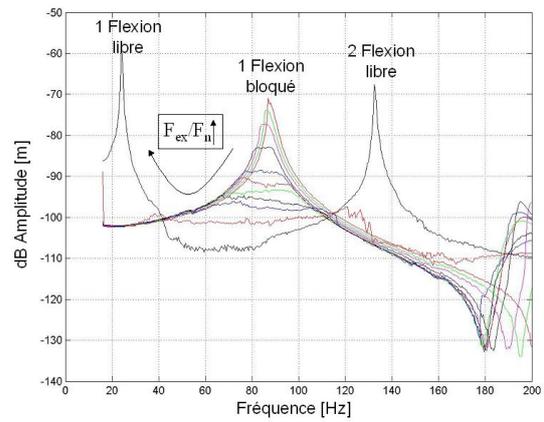


FIG. 2.34 Variations de la force d'excitation pendant l'acquisition

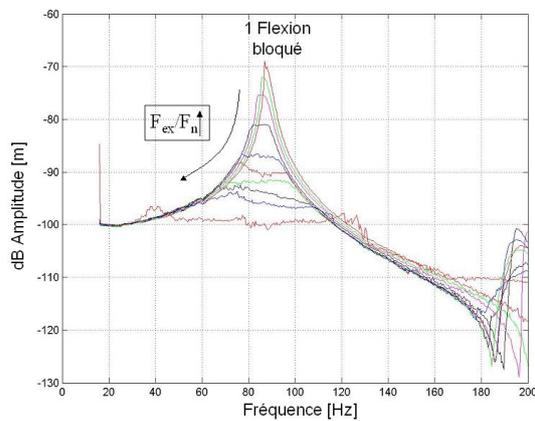
tionnement linéaire, ont rendu impossible l'utilisation des capteurs les plus éloignés de l'encastrement. Expérimentalement, on observe que les réponses fréquentielles sont contenues, en première approximation, dans l'enveloppe de la réponse forcée du cas bloqué, ce qui présuppose un comportement de type macroslip. Le cas complètement bloqué est obtenu avec une force normale de 40  $N$ . Dans ce cas, la fréquence de résonance est égale à 88  $Hz$ . En diminuant la valeur de la force normale, on observe un premier décalage du pic vers gauche. Ce décalage n'est pas dû à un comportement de type macroslip du contact mais au fait que la raideur de la structure est fonction du module de la force normale exercée sur le ressort à lame. En particulier, comme analysé précédemment, la raideur totale du système diminue et la FRF se décale légèrement vers la gauche pour des charges normales décroissantes. La diminution de la fréquence devient négligeable à partir d'une valeur de la force normale égale à 10  $N$ . C'est donc, à partir de cette valeur de la charge normale, que le comportement de type macroslip du contact est mis en évidence. Les réponses forcées entre 10 et 1  $N$  sont caractérisées par un comportement stick/slip. Elles restent dans la même enveloppe. Par contre, si un comportement de type macroslip était présent, les réponses auraient dû être décalées vers la gauche, comme illustré dans le chapitre précédent. Par la suite, différentes propriétés sont vérifiées pour le dispositif mis en place afin de montrer à la fois ses limites d'application et la reproductibilité de résultats.



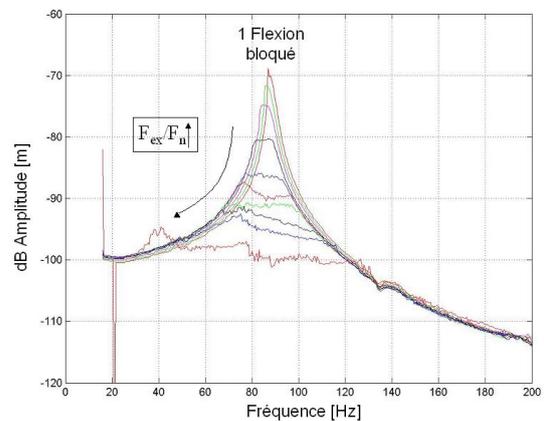
(a) Premier capteur



(b) Deuxième capteur



(c) Troisième capteur

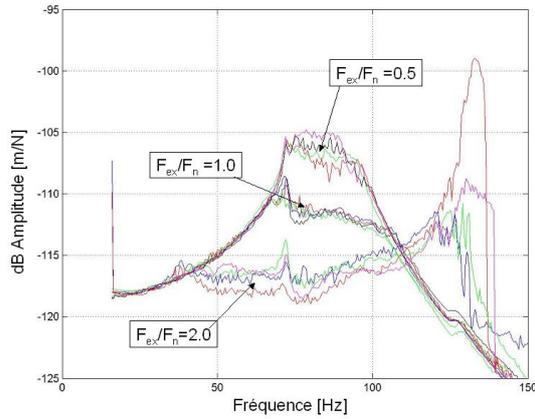


(d) Quatrième capteur

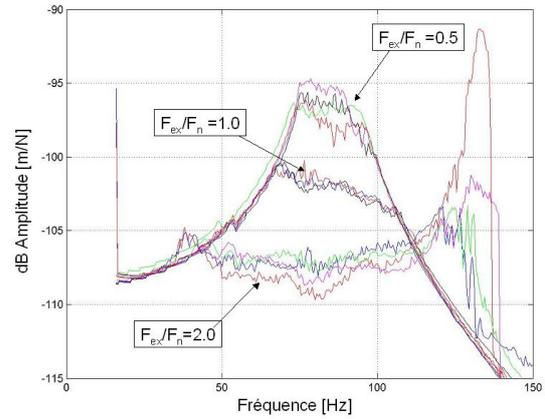
FIG. 2.35 FRF pour différentes valeurs de la force normale ( $F_n = 0.5 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 7 - 10 - 20 - 30 - 40 N$ ) et  $F_{ex} = 2 N$

*Influence du rapport  $F_{ex}/F_n$*

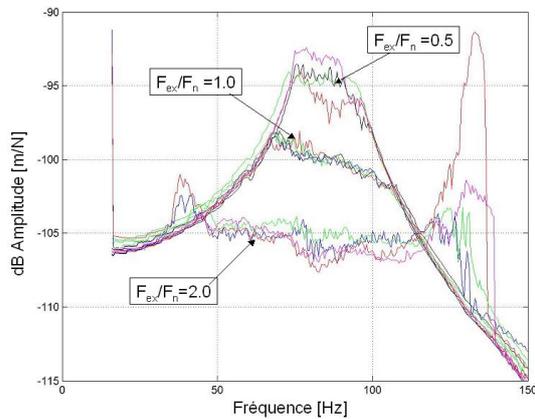
La relation entre l'amplitude de la réponse et le rapport force d'excitation / force normale ( $F_{ex}/F_n$ ) est étudié. Les valeurs du rapport au dessous de 0.05 et en dessus de 4 conduisent aux cas quasi linéaires de comportement, respectivement complètement bloqué et complètement glissant. De 0.05 jusqu'à 2, l'état du contact est principalement bloqué avec une composante glissante pendant chaque cycle, composante qui augmente en fonction du rapport  $F_{ex}/F_n$ . Pour des valeurs allant de 2 jusqu'à 4, l'état dominant est glissant. Trois différents rapports  $F_{ex}/F_n$  sont considérés : 0.5, 1 et 2. Chacun de ces rapports est obtenu à partir de différentes valeurs de la charge normale 2.5, 3, 5 et 10 N. La figure (2.36) présente les fonctions de réponse fréquentielle mesurées en chaque



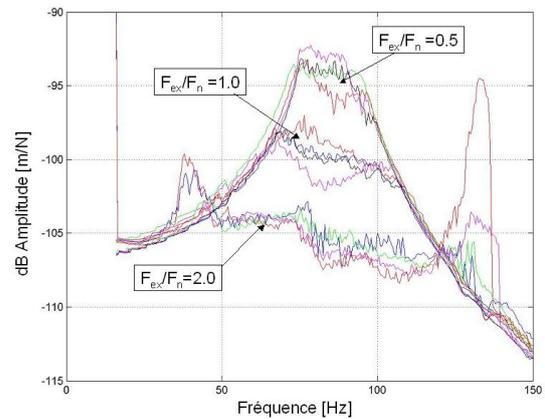
(a) Premier capteur



(b) Deuxième capteur



(c) Troisième capteur



(d) Quatrième capteur

FIG. 2.36 FRF pour  $F_{ex}/F_n = 0.5 - 1.0 - 2.0$  avec  $F_n = 2.5 - 3 - 5 - 10N$

capteur et pour chaque configuration testée. Elle montre que le niveau de la réponse dépend uniquement du rapport  $F_{ex}/F_n$  si l'état dominant du contact est bloqué.

Par exemple, pour  $F_{ex}/F_n$  égal à 0.5, le contact reste bloqué jusqu'à une fréquence voisine de 70 Hz. Pour cette valeur de fréquence, la force transverse atteint la valeur  $\mu F_n$  et le contact passe de l'état bloqué à l'état stick/slip. Par rapport au cas linéaire, l'effet principal de ce changement d'état induit un aplatissement des pics des réponses fréquentielles. En continuant le balayage vers des fréquences d'excitation plus élevées, on constate que le contact change à nouveau d'état pour revenir à un état bloqué (97 Hz). La réponse redevient coïncidente avec la FRF du système équivalent linéaire. Changer le rapport  $F_{ex}/F_n$  implique exclusivement un changement des fréquences pour lesquelles l'état du contact change de bloqué à stick /slip et vice versa.

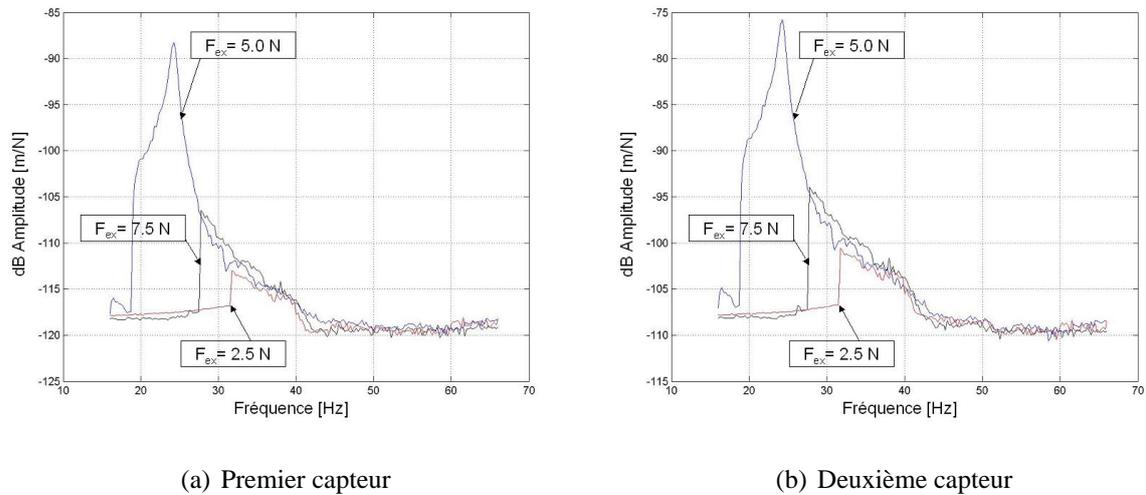


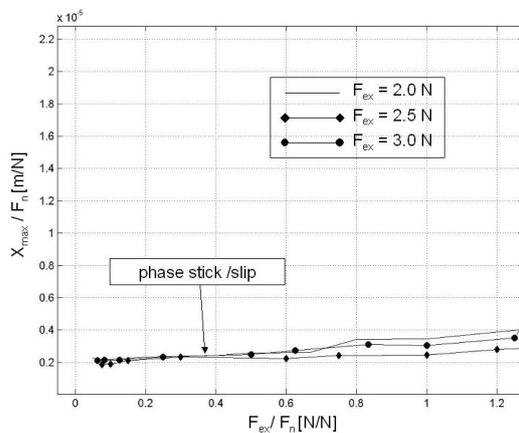
FIG. 2.37 FRF pour  $F_{ex}/F_n = 2.5$  avec  $F_n = 1 - 2 - 3N$

Les changements d'états ne sont pas toujours aussi stables. En diminuant encore le rapport  $F_{ex}/F_n$ , des sauts correspondant aux différents états du contact apparaissent et sont susceptibles de caractériser la réponse dynamique. En figure (2.37), trois cas différents sont reportés pour les deux premiers capteurs avec  $F_{ex}/F_n = 2.5$  et une force d'excitation  $F_{ex} = 2.5 - 5 - 7.5N$ . Dans ce cas, l'état du contact est bloqué au début du balayage sinusoïdal. L'analyse des graphiques prouve qu'à la différence des cas précédemment traités, la réponse n'est plus univoque pour la même valeur du rapport  $F_{ex}/F_n$ . Pour les trois configurations de forces, trois réponses différentes sont obtenues. Dans le premier cas (force d'excitation  $F_{ex} = 2.5N$ ), un saut est généré à environ  $35Hz$ . Pour une force d'excitation de  $7.5N$ , le saut se situe aux alentours de  $28Hz$ . Enfin, pour le dernier cas (force d'excitation de  $5.0N$ ), le saut est proche  $18Hz$ , valeur plus petite que la fréquence naturelle du système à  $24Hz$ . De faibles perturbations du système peuvent entraîner des variations de l'état du contact. Ici la structure passe brutalement d'un comportement bloqué à un comportement glissant au niveau du saut. La variation de la fréquence pour laquelle le saut apparaît montre que le phénomène est lié aux perturbations externes. En effet les perturbations créées sur le système de mise en charge (maintien rigide) sont très importantes. La table xy est soumise à de fortes vibrations qui ne permettent plus de maintenir la force normale au contact rigoureusement constante. Cette variation importante de la charge normale a tendance à faire décrocher le contact. Il faut retenir qu'expérimentalement, le passage de l'état bloqué à l'état stick/slip n'est stable et reproductible seulement si le stick/slip vers lequel on tend est à majorité bloqué. Toutefois, si la condition stick/slip est à majorité glissante, le passage graduel d'un état à l'autre est très difficile à obtenir et un saut fré-

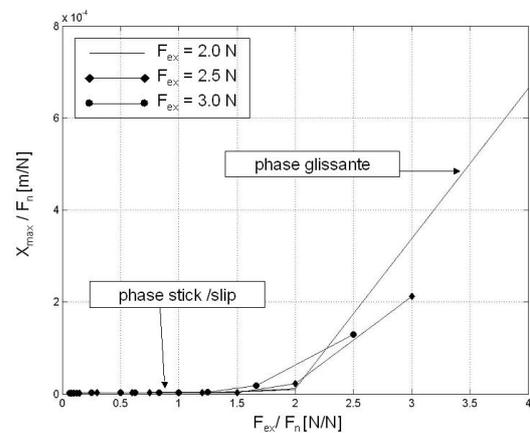
quenciel brutal apparaît sur les courbes de réponses. L'étude numérique à donc été limitée au cas où le comportement stick/slip est à majorité bloqué.

#### *Amplitude maximale en présence de frottement sec*

La dernière propriété à vérifier est la reproductibilité des résultats. Dans le cas de comportement de type stick/slip à majorité bloquée, il a été observé précédemment que l'évolution du déplacement maximal (obtenu par la fonction de transfert) sur la force normale en fonction du rapport force d'excitation sur charge normale reste constant. D'autres essais expérimentaux sont conduits afin de contrôler si cette propriété demeure encore une fois expérimentalement reproductible. Trois conditions différentes de chargement ( $F_{ex} = 2 - 2.5 - 3 \text{ N}$ ) sont donc utilisées afin d'examiner l'influence du rapport  $F_{ex}/F_n$  sur la valeur maximale de l'amplitude dans la bande fréquentielle associée à un état de contact stick/slip. Pour les valeurs croissantes du rapport  $F_{ex}/F_n$  choisies (figure 2.38 (a)), la vibration maximale reste effectivement limitée et même, en première approximation, constante. Ainsi, le frotteur assume son rôle de limiteur de pics. Pour des valeurs croissantes du rapport  $F_{ex}/F_n$ , un comportement quasi linéaire, correspondant à l'état glissant du frotteur pour lequel le rapport  $X_{max}/F_n$  est proportionnel à la force d'excitation, est, en revanche, identifié (figure 2.38 (b)).



(a) Premier capteur



(b) Deuxième capteur

FIG. 2.38 Amplitudes maximales en fonction de la force d'excitation normées par  $F_n$

### 2.6.3 Résultats numériques

Les méthodes de résolution les plus employées pour les systèmes en présence de frottement sec travaillent dans le domaine des fréquences comme la méthode HBM, la méthode des échelles

multiples ou encore la méthode alternative. En revanche, dans le but minimiser les sources d'approximation, c'est une résolution temporelles qui est retenue ici. Pour la même raison, le système complet est conservé sans activation d'une technique de réduction.

Au vue de la géométrie du système et au vue du positionnement du frotteur (dernier noeud du système), le vecteur des forces non linéaires peut être décrit par l'expression suivante :

$$\{F_{nl}\}^t = \{0 \dots F_n F_t 0\}$$

$F_n$  et  $F_t$  étant respectivement la force normale et la force transverse. Le modèle macroslip considéré prévoit une valeur de la force normale constante pendant toute la procédure numérique et une valeur de la force tangentielle dépendant du déplacement et de la vitesse du point de contact. La relation qui donne la force tangentielle  $F_t$  est exprimée sous la forme (2.31) :

$$F_t(x_t, \dot{x}_t) = \begin{cases} \text{sign}(\dot{x}_t) \cdot \mu F_n & \text{contact glissant} \\ -\text{sign}(\dot{x}_t) \cdot \mu F_n + k_t \cdot (x_t - x_{ss}) & \text{contact bloqué} \end{cases} \quad (2.31)$$

où  $x_t$  représente le déplacement du noeud du contact et  $x_{ss}$  sa valeur en correspondance du passage des états glissant / bloqué . Les cas bloqués et glissants satisfont les conditions suivantes :

$$\text{conditions glissantes} \begin{cases} x_t > 2 \cdot \mu F_n / k_t + x_{ss} & \text{si } \dot{x}_t > 0 \\ x_t < -2 \cdot \mu F_n / k_t + x_{ss} & \text{si } \dot{x}_t < 0 \end{cases} \quad (2.32)$$

$$\text{conditions bloquées} \begin{cases} x_t < 2 \cdot \mu F_n / k_t + x_{ss} & \text{si } \dot{x}_t > 0 \\ x_t > -2 \cdot \mu F_n / k_t + x_{ss} & \text{si } \dot{x}_t < 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

La force non linéaire exprimée, l'équation du mouvement est résolue dans le domaine du temps avec la méthode inconditionnellement stable de l'accélération moyenne constante (Newmark  $\beta = 1/4$ ). Le pas de temps varie avec la fréquence et vaut  $dt = 1/(270 \cdot fr)$ ,  $fr$  étant la fréquence d'excitation. Une simple transformation de Fourier (FFT) permet alors de retrouver l'amplitude à la fréquence d'excitation en régime permanent. Comme pour le cas expérimental, la FFT permet de connaître les composantes harmoniques présentes au niveau de la réponse stabilisée du système. Par exemple, l'analyse du cas stick/slip pour le rapport  $F_{ex}/F_n$  égal à 2 et à une fréquence de 60 Hz, démontre

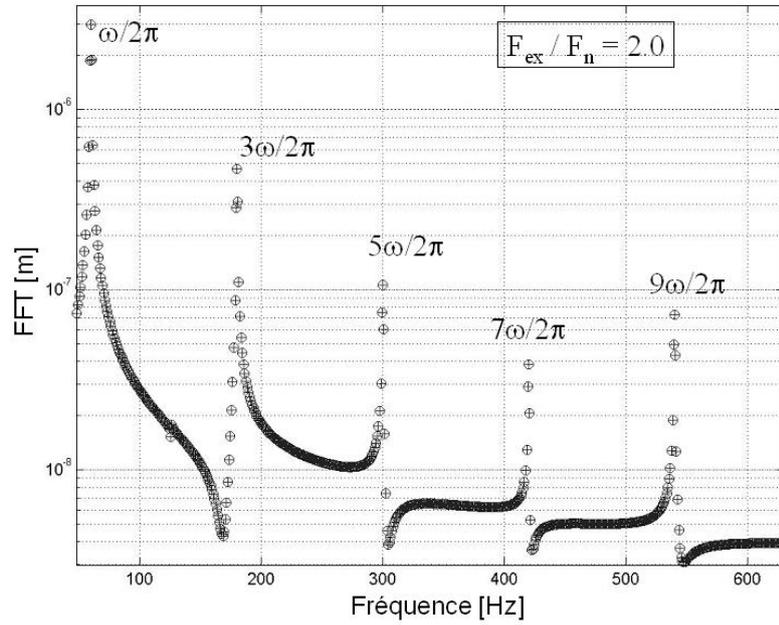


FIG. 2.39 Transformée de Fourier -  $F_{ex}/F_n = 2.0$  et fréquence  $\omega/(2\pi) = 60 \text{ Hz}$

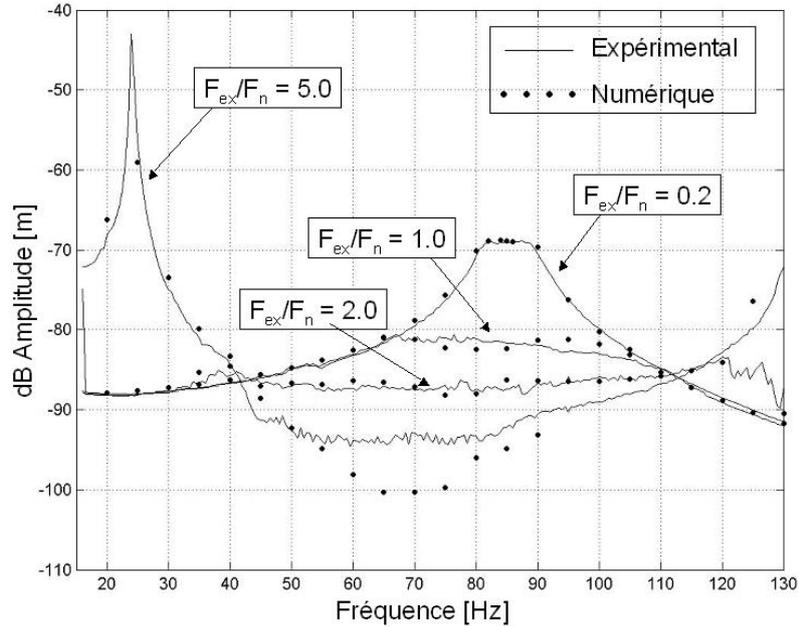


FIG. 2.40 Comparaison expérimentale numérique pour les valeurs sélectionnées de  $F_{ex}/F_n$

la présence des mêmes composantes impaires au sein de la réponse stabilisée (figure 2.39).

Les FRFs sont calculées pour des valeurs de  $F_{ex}/F_n$  égales à 0.2 – 1 – 2 – 5 respectivement. Dans le premier cas, le contact est toujours bloqué sauf au voisinage de la fréquence de résonance à  $86Hz$ . En augmentant le rapport, le pic au niveau de la résonance s'aplatit mais reste toujours identifiable jusqu'au rapport 2. Alors le pic disparaît complètement et la réponse du système ne présente plus de pic d'amplitude importante ; le frotteur atteint son efficacité maximale. Pour le dernier cas ( $F_{ex}/F_n = 5$ ), le contact est toujours glissant et, par conséquent, la structure répond comme dans le cas de conditions limites encastré-libre avec un pic de résonance situé à  $24Hz$ . La bonne concordance (figure 2.40) des résultats expérimentaux et numériques prouve la validité et l'efficacité du choix du modèle et valide les procédures expérimentales et numériques retenues.

#### 2.6.4 Conclusions

Il est important de rappeler que les expérimentations doivent se faire à niveau d'excitation constant en fonction de la fréquence d'excitation. Seule cette caractéristique permet l'utilisation d'une procédure de type balayage sinusoïdal et donc une optimisation des temps d'essais. Une première approche linéaire du problème se révèle indispensable. Elle permet de comprendre la variation des fréquences naturelles du système bloqué en fonction de la charge normale et d'éviter certaines erreurs d'interprétation des réponses forcées non linéaires (conduisant alors à une mauvaise modélisation du contact). Il faut aussi se rappeler que, pour reproduire expérimentalement un contact de type macroslip, différentes précautions sont nécessaires. La plus importante vient du fait que la surface de contact est très petite (approximativement réduite à un point) et que, dans le même temps, les amplitudes à l'extrémité de la poutre sont très importantes. Ces deux conditions doivent être nécessairement respectées du point de vue expérimental pour que le modèle macroslip puisse décrire avec une bonne approximation le comportement réel de la structure. Si les amplitudes ne sont pas suffisamment importantes ou si la surface passe d'un stade ponctuel à un stade bidimensionnel, les hypothèses du modèle macroslip ne sont plus valables et un autre modèle de contact doit être choisi. En conclusion, la bonne coïncidence des résultats expérimentaux et numériques confirme la validité du choix du modèle de contact à partir des données expérimentales (FRF) et valide la procédure numérique adoptée.

## 2.7 Conclusions

Une analyse préparatoire, appliquée à des dispositifs simples, a mis en évidence que les différents modèles de contacts existants ont des conséquences propres sur les caractéristiques des réponses forcées. Cette propriété doit être maîtrisée afin d'être en mesure de choisir le modèle de contact qui représente au mieux chaque comportement dynamique réel.

Une première analyse énergétique a pu mettre en évidence que la baisse des pics d'amplitude ne dépend pas d'une augmentation d'énergie de dissipation par frottement sec, qui d'ailleurs diminue en valeur absolue. Le rapport d'énergie de dissipation par frottement sec sur l'énergie dissipée totale augmente jusqu'à 90% ; ce qui montre que la présence du frotteur pendant la phase stick/slip est plus importante que l'amortissement visqueux. La vraie cause de l'aplatissement des pics a cependant dû être cherchée ailleurs. Plus précisément, pendant la phase stick/slip du contact, lors des cycles d'excitation l'état du contact alterne continûment d'une condition bloquée à une condition glissante. Le frotteur réagit à ce changement d'état du contact en modifiant la valeur de la force par unité de déplacement déphasée de  $90^\circ$  par rapport au déplacement. En première approximation, seul le produit de cette force et de l'amplitude doit équilibrer la force d'excitation. Et, puisque sa valeur augmente quand on passe d'un état bloqué à un état glissant en raison de la modification des conditions limites, les valeurs des déplacements maxima baissent. Au contraire quand l'état bloqué change vers des conditions de plus en plus glissantes, cette force par unité de déplacement diminue, augmentant ainsi le déplacement. En général, la présence d'amortissement visqueux change l'état optimal d'une condition moitié bloqué moitié glissante vers conditions à majorité bloquées.

Le dispositif expérimental utilisé a démontré avoir un comportement représentatif de la dynamique d'un système en présence de frottement sec, et ce avec une bonne reproductibilité des résultats. Grâce à l'étude numérique préparatoire en début de chapitre, il a été possible de déterminer avec certitude le modèle représentatif du contact pour ce dispositif. La convergence des résultats, numériques et expérimentaux prouve premièrement que les procédures mises en place pour l'étude du comportement dynamiques en présence de non linéarités sont valides, et deuxièmement, que l'analyse numérique mise en place (modélisation du frottement sec) est correcte. Dans ce type d'approche, il devient très difficile de séparer l'analyse des résultats expérimentaux sans prendre en considération l'aspect numérique et vice versa ; la validation des procédures doit donc, être conduite simultanément. La démarche numérique / expérimentale validée, les problèmes concernant la dynamique des aubages de turbomachines liaisonnés par nageoires peuvent enfin être abordés.

# Chapitre 3

## APPLICATION AUX SYSTEMES A SYMETRIE CYCLIQUE

### 3.1 Introduction

L'étude du comportement dynamique des ensembles aubés, intégrant les effets combinés du désaccordage et des non linéarités liées au frottement sec est encore relativement peu développée et la compréhension complète et claire du phénomène est restée insuffisante. Le but de ce chapitre est de prolonger les études développées dans le chapitre précédent vers les systèmes à plusieurs degrés de libertés, puis vers les systèmes à géométrie cyclique. Avant de procéder à toute étude numérique sur des systèmes représentatifs, les résultats obtenus grâce au dispositif expérimental présenté en détail dans [56] (figure 3.1) sont analysés. Les résultats expérimentaux obtenus par Ravoux n'ont pas été en nombre suffisant pour permettre d'identifier avec certitude la relation entre les fréquences associées aux amplitudes de réponse maximales et la charge normale au contact. Un saut de comportement avait été mis en évidence sur le système de deux aubes en contact et la nécessité de confirmer ou non cette interprétation a imposé de réaliser un nombre significatif d'acquisitions complémentaires. Le résultat de ces acquisitions est présenté figure (3.2) pour les modes de première et deuxième flexion des aubes en phase et en opposition de phase dans le cas où les contacts restent bloqués. Lorsque les aubes vibrent en phase, les contacts travaillent très peu et le niveau de charge normale n'a donc pas d'influence sur les résultats. Il en est de même pour le mode de deuxième flexion en opposition de phase puisque dans ce cas la ligne nodale passe au niveau des nageoires et la force normale ne change pas l'état de contact qui reste, en première approximation, toujours bloqué. En conséquence, seul le mode de première flexion déphasée est influencé par le niveau de charge normale et la variation de fréquence observée est bien continue et ne présente pas



FIG. 3.1 Système instrumenté de deux aubes mises en contact

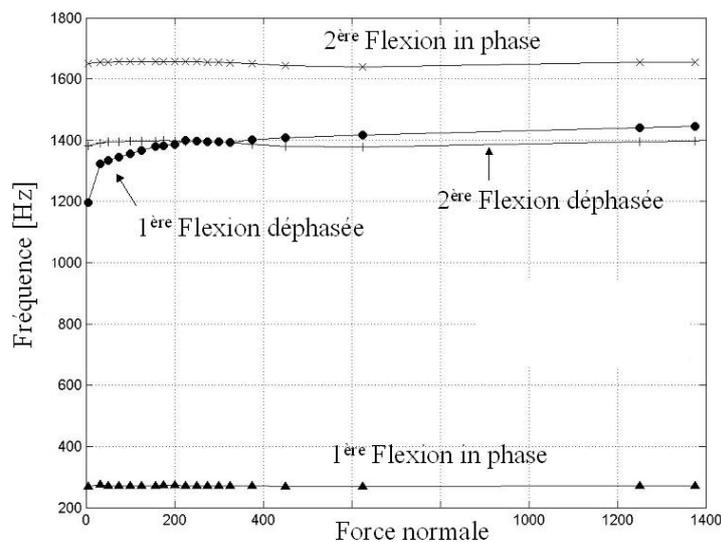


FIG. 3.2 Fréquences de résonance en fonction de la charge normale

de saut. Comme mis en évidence dans le chapitre 3, la conséquence des rugosités est de déplacer les pics de résonance des cas bloqués vers des fréquences de plus en plus élevées en fonction de l'augmentation de la force normale. La force normale modifie l'aire de contact, phénomène qui explique la variation des fréquences expérimentalement observée. Ce comportement est également identifiable à partir de l'analyse des réponses forcées (mesurées sur le dispositif à 2 aubes) pour

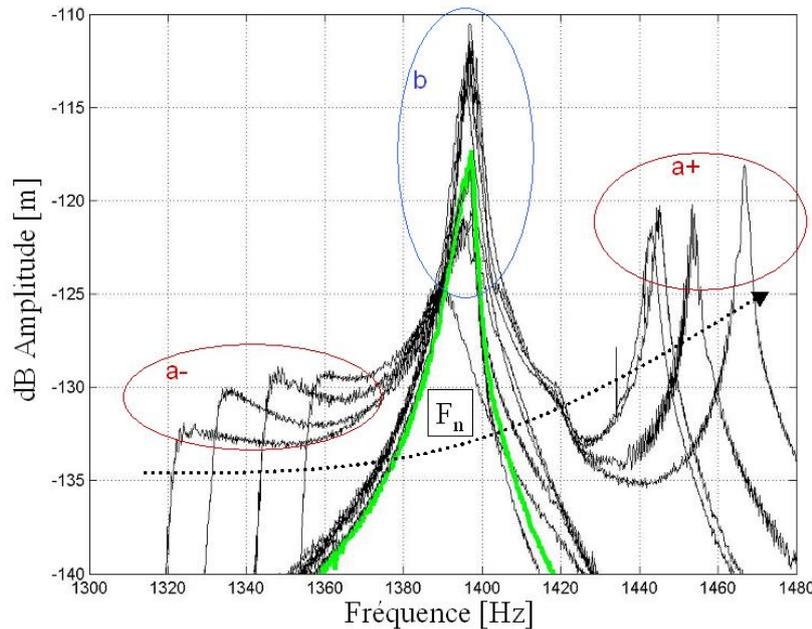


FIG. 3.3 Réponses forcées pour la deuxième poutre et pour différents cas de charge normale ( $50 \leq F_n \leq 1250 \text{ N}$ ). Pics a + : première flexion en opposition de phase à majorité bloquée. Pics a - : première flexion en opposition de phase à majorité glissante. Pics b : deuxième flexion en opposition de phase. Ligne verte continue obtenue pour  $F_n = 240 \text{ N}$  quand les 2 modes ont la même fréquence de résonance

lesquelles le déplacement vers la gauche, fonction de la diminution de la charge normale, est trop important pour dépendre d'un comportement exclusivement de type microslip (figure 3.3).

Ainsi le modèle de contact qui schématise de façon satisfaisante le comportement dynamique inter-nageoires du dispositif doit forcément prendre en compte les effets de la rugosité à travers une variation de la surface de contact si un comportement de type microslip est choisi ou une variation de la raideur tangentielle dans le cas d'un comportement macroslip. Comme le but de ce chapitre est limité à une étude phénoménologique du comportement dynamique des structures à symétrie cyclique en présence de frottement inter-aubes, le modèle macroslip modifié par les effets de la rugosité sera préféré et une représentation du dispositif ne considérant qu'un seul degré de liberté par aube est adoptée. Par ailleurs, comme la nature aléatoire du désaccordage impose une certaine répétition des calculs, la méthode de la balance harmonique est retenue.

Après avoir considéré la mise en équations et les réponses forcées pour un système à 2 degrés de liberté, un système à symétrie cyclique à un degré de liberté par aube est considéré. Les premiers résultats numériques concernent l'étude des réponses forcées dans le cas de systèmes accordés. La structure est excitée de deux façons différentes. D'abord, afin de recréer les conditions expérimentales de [56], une force de type ponctuelle est appliquée à un seul degré de liberté ; puis, afin de simuler une distribution d'efforts plus réaliste, une excitation de type "Ordre Moteur" est prise en compte. Dans ce dernier cas, l'analogie avec les résultats obtenus pour un système à un degré de liberté est démontrée.

Dans la deuxième partie du chapitre, une première étude du désaccordage est présentée. Comme précédemment analysé lors de l'étude bibliographique, les effets dus au désaccordage sont de deux types : dédoublement des modes et concentration des vibrations. Dans [56], il a été considéré surtout le premier effet. Expérimentalement, l'excitation ponctuelle offre l'avantage d'accéder au dédoublement des modes, avec une seule acquisition de type balayage sinusoïdal. De cette façon, les modes qui sont les plus dédoublés pour une configuration de désaccordage donnée, peuvent être analysés. Cet effet est donc étudié d'un point de vue numérique en utilisant un même type d'excitation (force ponctuelle sur un seul degré de liberté). En revanche, pour l'analyse du facteur d'amplification des vibrations, il est indispensable d'avoir une excitation de type Ordre Moteur afin de répartir la force sur toute la structure. Dans ce cas donc, l'amplification des vibrations doit être comparée au cas accordé associé.

### 3.2 Système à 2 degrés de liberté

Le système tout d'abord utilisé est constitué par deux degrés de liberté reliés par un élément de contact de type Masing - modifié par les effets de la rugosité (voir figure 3.4). Le système d'équations est donné par 3.1 :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + f_{nl} = f_{ex} \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 + k_2 x_2 - f_{nl} = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

avec, comme hypothèses liées aux déplacements

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) \\ x_2 &= a_2 \cos(\omega t) + b_2 \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

et

$$f_{ex} = F_{ex} \cos(\omega t) \quad (3.3)$$

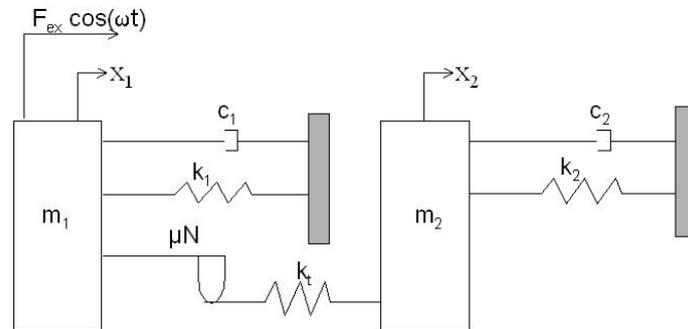


FIG. 3.4 Schématisation du dispositif à deux aubes

La méthode de la balance harmonique à une seule composante, doit être légèrement modifiée par rapport au cas à un seul degré de liberté car, maintenant, le contact concerne le déplacement relatif entre les degrés de liberté. Par conséquent on impose que la résolution du système (3.1) soit telle que :

$$x_1 - x_2 = B \cos(\vartheta) \quad (3.4)$$

avec

$$\begin{cases} B = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} \\ \vartheta = \omega t - \varphi = \omega t - \arctan \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} \end{cases} \quad (3.5)$$

Les forces non linéaires sont exprimées par :

$$f_{nl} = f_c \cdot \cos(\omega t - \varphi) + f_s \cdot \sin(\omega t - \varphi) \quad (3.6)$$

La méthode de résolution adopte la démarche suivante. On suppose connues les valeurs ( $a_1, b_1, a_2, b_2$ ); les valeurs de  $B$  et de  $\varphi$  sont extraites puis le rapport  $(\mu F_n)/(k_t B)$  est évalué. A ce stade, deux conditions différentes sont possibles :  $(\mu F_n)/(k_t B) \leq 1$  quand le contact est glissant ou  $(\mu F_n)/(k_t B) \geq 1$  quand le contact est bloqué. Dans les deux cas, cela aboutit à la résolution d'un système du type 3.7 :

$$[A]\{y\} = \{B\} \quad (3.7)$$

où les coefficients de la matrice  $[A]$  et des vecteurs  $\{y\}$  et  $\{B\}$  ainsi que les développements numériques associés sont reportés dans l'annexe E. Dans le cas stick/slip, les coefficients de la matrice

$[A]$  dépendent de la solution du système, et pour cette raison, le système non linéaire demande des méthodes de résolution appropriées. La méthode des sécantes multi-dimensionnées (Méthode de Broyden [55]-Annexe C) a été utilisée pour la résolution du système non linéaire.

Les valeurs numériques utilisées pour l'application sont :

$$m_1 = m_2 = 1Kg \quad k_1 = k_2 = 10^4 N/m \quad c_1 = c_2 = 1Ns/m \quad F_{ex} = 1N$$

Pour les caractéristiques des propriétés de contact, les valeurs utilisées par Sextro [64] sont reprises, soit :

$$\text{rugosité} : R_z = 0.8 \cdot 10^{-6}m$$

$$\text{raideur normale au contact} : k_n = 750 \cdot 10^6 N/m$$

$$\text{raideur tangentielle asymptotique au contact} : k_t = 10^6 N/m$$

La courbe qui exprime la raideur de contact équivalente en fonction de la charge normale est donnée en figure (2.7 (a)). Les réponses forcées pour le deuxième degré de liberté sont finalement calculées et les valeurs reportées en figure (3.5). Pour les résultats numériques, en cohérence avec les résultats expérimentaux, la diminution de la force normale au contact cause une diminution de la raideur

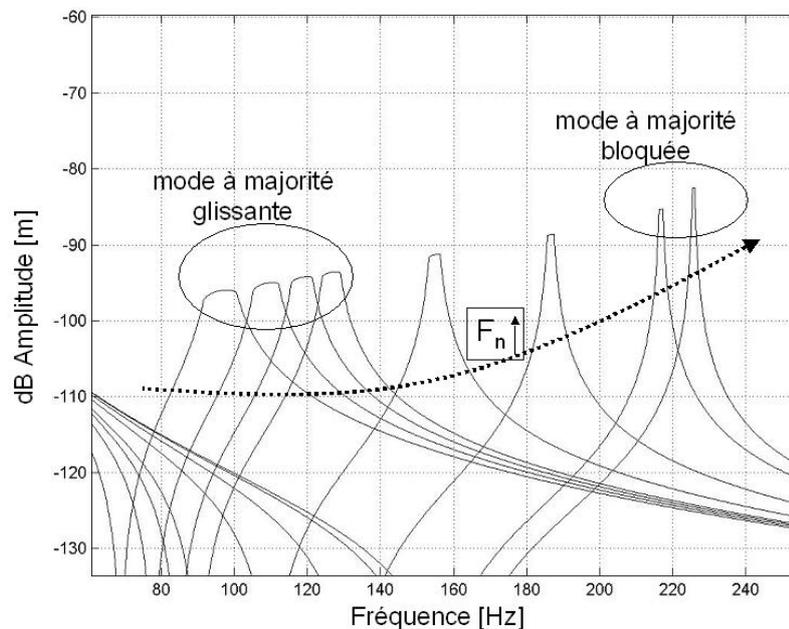


FIG. 3.5 Réponses forcées pour le deuxième degré de liberté avec  $F_n = 10 - 15 - 20 - 25 - 50 - 100 - 200 - 300 N$

équivalente et, par conséquent, un déplacement des pics d'amplitude maximale vers la gauche. Malgré l'évidente simplification de la schématisation adoptée, l'approche numérique est apte à reproduire, d'un point de vue phénoménologique, le comportement dynamique de deux aubes en présence de frottement inter-nageoires. De plus la méthode de la balance harmonique utilisée pour résoudre le système non linéaire, est particulièrement efficace en terme de temps de calcul. Ces deux aspects (rugosité et méthode HBM) sont donc conservées pour l'analyse du système complet à n-degrés de liberté disposés cycliquement.

### 3.3 Système à symétrie cyclique accordé

La schématisation du système est représenté figure (3.6), chaque aube étant schématisée avec un seul degré de liberté. En premier lieu, la mise en équations du système non linéaire est abordée. Puis en second lieu, les deux différents type d'excitation (excitation ponctuelle et Ordre Moteur) sont considérés.

#### 3.3.1 Mise en équation

Afin d'obtenir un système d'équations le plus simple possible, il est fait référence aux systèmes unidimensionnels à n degrés de liberté, comme présenté figure (3.7). Le premier et le dernier degré de liberté sont reliés entre eux afin de former une structure cyclique fermée. La force est tout d'abord appliquée seulement au premier ddl et les contacts sont positionnés entre deux aubes consécutives. Le système d'équations est écrit sous forme classique :

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F_{ex}\} - \{F_{nl}\} \quad (3.8)$$

avec  $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$  respectivement matrices de masse, raideur et amortissement, matrices développées en annexe F. Afin de généraliser la méthode de la balance harmonique au cas de système à n-degrés de liberté, les déplacements et les forces non linéaires dans le cas du stick/slip sont écrits sous la forme :

$$x_i(t) = a_i \cdot \cos(\omega t) + b_i \cdot \sin(\omega t) \quad (3.9)$$

De plus, dans ce cas,

$$F_{nl_i} = f_{t_i} - f_{t_{i-1}} \quad (3.10)$$

avec

$$f_{t_i}(t) = f_{c_i}(B_i) \cdot \cos(\vartheta) + f_{s_i}(B_i) \cdot \sin(\vartheta) \quad (3.11)$$

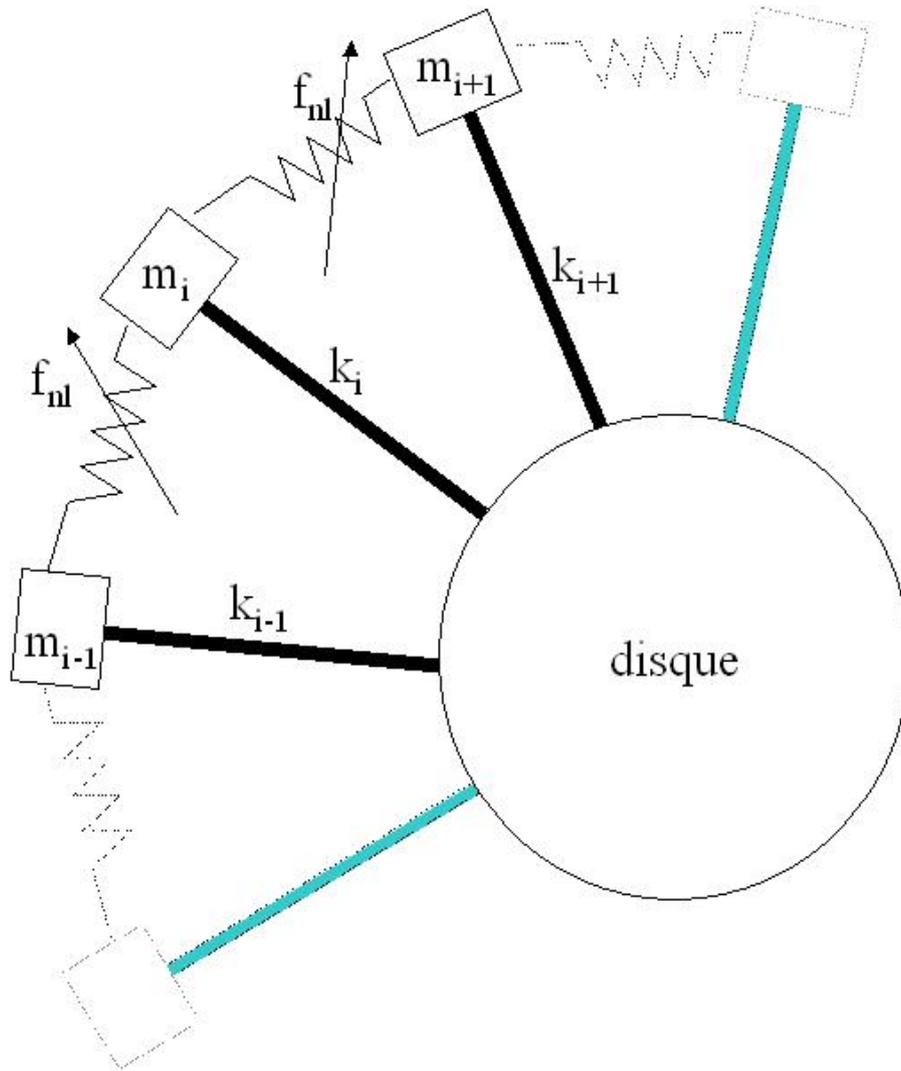


FIG. 3.6 Schématisation d'une poutre du dispositif 13 aubes à symétrie cyclique

où  $B_i = [(a_{i+1} - a_i)^2 + (b_{i+1} - b_i)^2]^{1/2}$ ,  $f_{ci}$  et  $f_{si}$  développés en Annexe B. En substituant ces valeurs dans l'équation (3.11), il vient :

$$f_{t_i}(t) = \frac{k_{t_i}}{\pi} [\vartheta_i^* - 0.5 \sin(2\vartheta_i^*)] \cdot B_i(\cos(\vartheta)) - \frac{k_{t_i}}{\pi} (\sin^2 \vartheta_i^*) \cdot B_i(\sin(\vartheta)) \quad (3.12)$$

avec

$$\vartheta_i^* = \cos^{-1}(1 - 2 \cdot \mu_i F_{n_i} / (k_{t_i} B_i)) \quad (3.13)$$

En suivant la même méthode précédemment présentée pour le cas à 2-ddl, il vient à nouveau un système du type :

$$[A]\{y\} = \{B\} \quad (3.14)$$

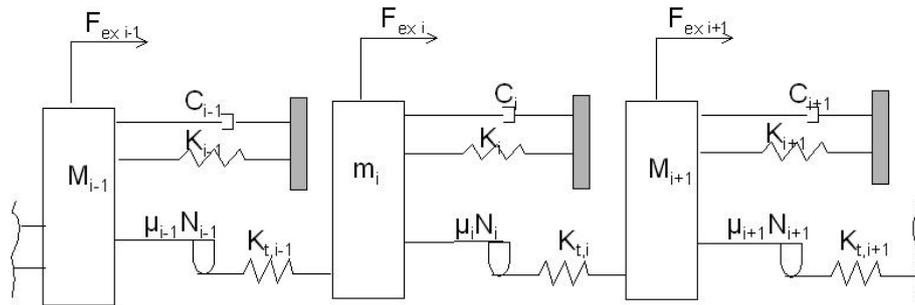


FIG. 3.7 Schématisation du dispositif 13 aubes à symétrie cyclique

Ce système se caractérise par une dimension égale à deux fois le nombre d'aubes choisies. La méthode de résolution est toujours la méthode des sécantes multi-dimensionnées de type Broyden (Annexe C). Les coefficients de la matrice  $[A]$  et des vecteurs  $\{y\}$  et  $\{B\}$  sont reportés en Annexes E.

### 3.3.2 Excitation de type force ponctuelle - réponse forcée

Dans ce cas la force d'excitation est donnée par

$$F_{exi} = \begin{cases} F_{ex} & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \neq 1 \end{cases} \quad (3.15)$$

Le cas à 1-ddl a montré que la rugosité n'a aucun effet si la force normale nécessaire pour faire glisser le contact demeure plus élevée que la charge limite, ici fixée à 300 N. Par la suite, l'influence du contact dans le cas où les forces normales mises en jeu sont plus grandes que la valeur limite, puis l'influence du contact dans le cas de valeurs plus faibles sont successivement analysées ; ceci, dans le but de voir quelles analogies il est possible d'identifier par rapport à la dynamique d'un système à un seul degré de liberté. .

Dans un premier cas, la force d'excitation est très importante ( $F_{ex} = 1000 \text{ N}$ ). Pour des valeurs du rapport  $F_{ex}/F_n$  comprises entre 0.01 et 1 N, les contacts passent d'un état bloqué à un état stick/slip. Les valeurs correspondantes de la force normale varient entre 1000 et  $1e6 \text{ N}$ , valeurs largement plus importantes que la charge limite. Dans ce cas, l'influence de la rugosité est négligeable, et de façon similaire au cas du système à un degré de liberté, les pics restent dans la courbe enveloppe du cas complètement bloqué (figure 3.8). La seule différence notable provient du

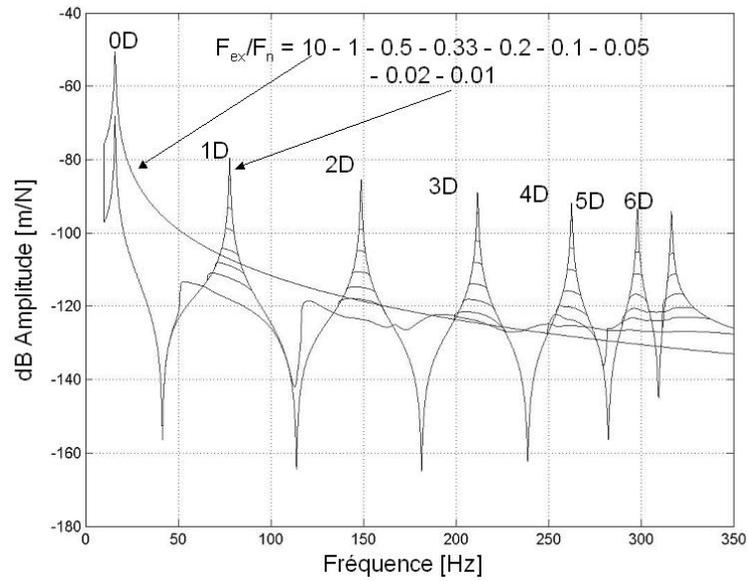


FIG. 3.8 Réponses forcées avec une force d'excitation  $F_{ex} = 1000 \text{ N}$  : influence négligeable de la rugosité

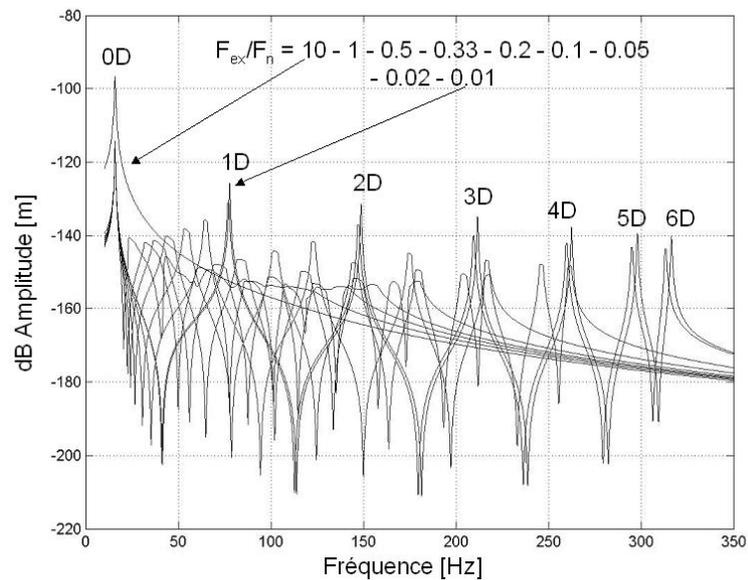


FIG. 3.9 Réponses forcées avec une force d'excitation  $F_{ex} = 3 \text{ N}$  : influence non négligeable de la rugosité

fait que tous les modes baissent leurs pics d'amplitude maximale en même temps, c'est à dire pour une même valeur de force normale. Les déplacements obtenus diffèrent largement en fonction du type d'excitation.

Puisque le disque est considéré infiniment rigide, aucune force ne peut être transmise d'une aube à l'autre, autrement que par l'intermédiaire du contact. Dans le cas complètement glissant, les degrés de liberté sont complètement dissociés et par conséquent les fréquences de résonance des modes de 1 à 6 diamètres ont toutes la même valeur égale à la fréquence du mode à zéro diamètre. Comme la force est appliquée uniquement au premier degré de liberté, son déplacement est beaucoup plus important que les déplacements des autres degrés de liberté. Le mode est donc naturellement concentré sur le premier degré de liberté, même en l'absence de désaccordage.

Dans un deuxième cas, la force d'excitation est faible ( $F_{ex} = 3 N$ ). Ainsi pour pouvoir changer les états du contact de bloqués à glissants, de faibles forces normales sont nécessaires. En figure (3.9) sont reportées les réponses forcées pour les mêmes rapports  $F_{ex}/F_n$  précédemment utilisés mais avec une valeur des forces normales de  $F_n$  comprises entre 5 et 500 N. Dans ce cas, l'influence de la rugosité est aussi remarquable que dans le cas à un seul degré de liberté. Les déplacements vers des fréquences plus faibles concernent tous les modes simultanément. Et, comme auparavant, on retrouve que les modes complètement glissants ont la même fréquence de résonance que celle du mode à 0 diamètre.

### 3.3.3 Excitation de type Ordre Moteur

En réalité, une structure réelle subit des excitations tournantes de type ordre moteur. Afin de se rapprocher de ce type d'excitation, la force, écrite sous forme complexe, prend la forme suivante :

$$F_{exi} = F_{ex} e^{j(\omega t + i\phi)} \quad (3.16)$$

où  $F_{ex}$  est la valeur du module de la force d'excitation,  $\omega$  la pulsation de la force,  $i$  l'aube considérée et  $\phi$  le déphasage entre les aubes, donné par :

$$\phi = EO2\pi/N \quad (3.17)$$

avec  $N$  nombre d'aubes et EO Ordre Moteur de l'excitation. L'ordre d'excitation considéré est tout d'abord de type  $EO = 1$ . En faisant varier le produit  $\mu F_n$ , les contacts passent d'un état bloqué à stick/slip, puis stick/slip jusqu'à un état complètement glissant. De plus, les caractéristiques liées au modèle de contact sont conservées même dans la dynamique d'ensemble pour le système complet. Il est bon de rappeler qu'en toute théorie, en présence de frottement sec les propriétés de symétrie

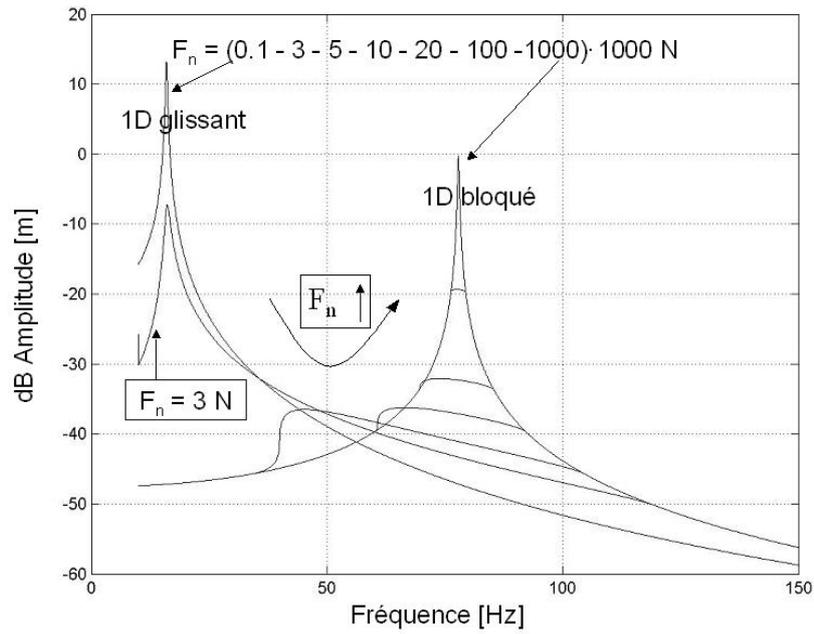


FIG. 3.10 Système à 13 ddl -  $EO = 1$ ,  $F_{ex} = 1000 N$

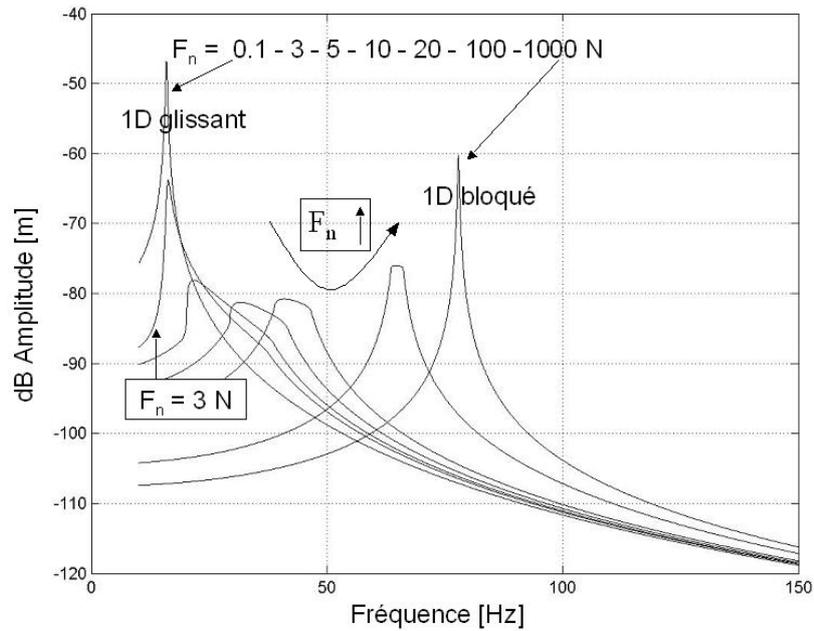


FIG. 3.11 Système à 13 ddl -  $EO = 1$ ,  $F_{ex} = 1 N$

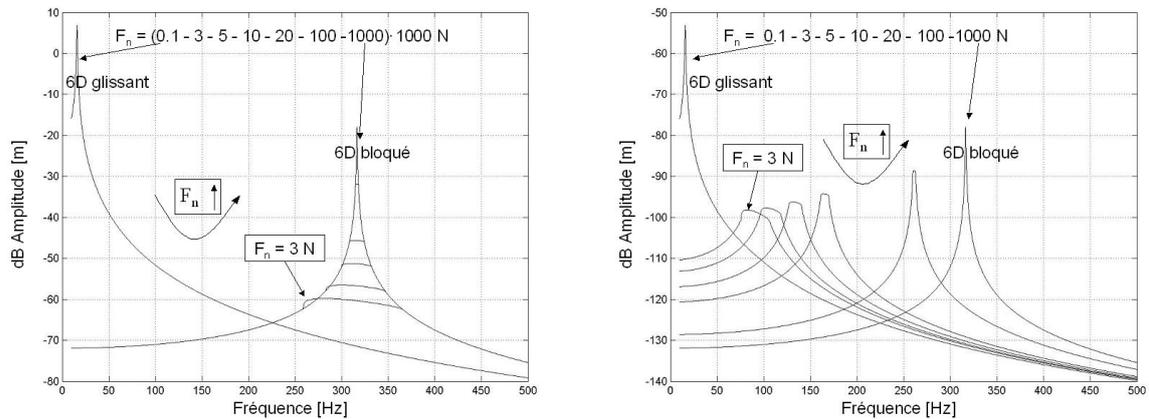
(a) Macroslip "pur" :  $F_{ex} = 1000 N$ (b) Macroslip modifié par la rugosité :  $F_{ex} = 1 N$ 

FIG. 3.12 Influence de l'Ordre Moteur - excitation de type EO = 6

cyclique ne sont plus valides car, à chaque instant, les contacts peuvent avoir différents états les uns par rapport aux autres. Malgré cela, comme dans le cas de comportements à symétrie cyclique, toutes les aubes atteignent la même amplitude maximale avec un déphasage temporel lié à la position de l'aube et à l'ordre moteur choisi. De plus, seul le mode correspondant à l'ordre moteur sélectionné est excité.

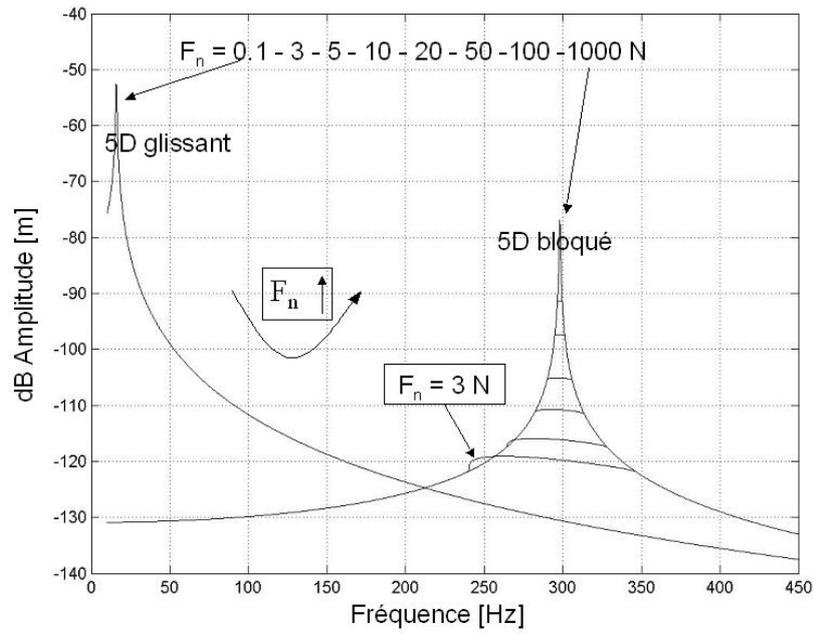
Quand la force d'excitation est importante, la rugosité n'a pas d'effets significatifs (figure 3.10), et le comportement du contact dans ces conditions de chargement a un comportement de type macroslip pur. En considérant des valeurs plus faibles de la force d'excitation, les déplacements typiques des pics d'amplitude maximale, dus à l'influence de la rugosité sont retrouvés. En figure (3.11), les réponses forcées dans le cas d'une force d'excitation de  $1 N$  sont tracées. L'analogie avec le comportement d'un système à 1 degré de liberté est parfaite. Aucune différence notable ne peut être observée entre les réponses forcées figures (3.10) et (3.11) relatives à un système à n-ddl et les figures (2.8) relatives à un système à un seul degré de liberté.

Les mêmes caractéristiques sont également observées quand l'Ordre Moteur augmente. La seule différence est due au fait que, quand on augmente la valeur de EO, les états de contacts sont de plus en plus bloqués pour des valeurs de charge normale identiques. Cette observation est valable soit dans le cas de comportement de type macroslip "pur", soit en présence des effets de la rugosité (figure 3.12). Ce type de comportement peut être expliqué en analysant le nombre de frotteurs qui doivent changer d'état. Dans le cas EO = 1, en effet, à chaque instant, seuls les frotteurs aux abords de la ligne nodale présentent un état stick/slip alors que les autres sont complètement bloqués (au-

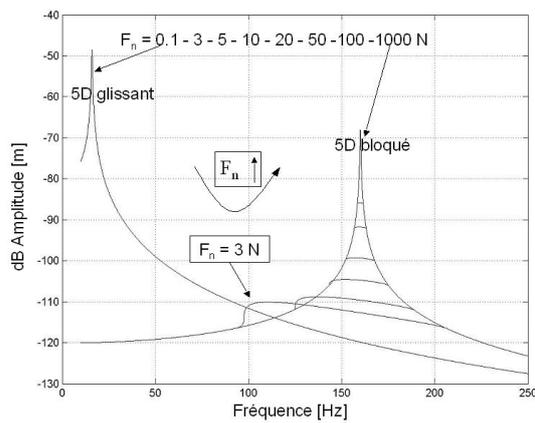
cun mouvement relatif significatif entre eux n'étant présent). Pour  $EO = 1$ , les frotteurs concernés par ce changement d'état sont donc au nombre de 2. Quand le cas  $EO = 6$  est envisagé, au même instant, 12 frotteurs sur les 13 au total, sont en condition de stick/slip. Il est naturel de penser que la force nécessaire pour faire glisser 12 frotteurs au lieu que 2, doit augmenter. Puisque dans tous les cas analysés, la force d'excitation  $F_{ex}$  est constante, pour obtenir le même état de contact, par exemple glissant, il est indispensable que la force normale diminue. Pour cette raison, , pour une force normale de 3 N, l'état du contact est stick/slip à majorité glissante, si  $EO = 1$ , alors qu'il devient à majorité bloquée si  $EO = 6$ . Bien évidemment cette propriété est valable soit dans le cas du comportement macroslip "pur", soit dans le cas où l'influence de la rugosité n'est pas négligeable (figure 3.10, 3.11 et 3.12).

Il est important également de vérifier si le nombre d'aubes joue ou non le même rôle que l'Ordre Moteur. Pour approfondir cet aspect, trois cas différents de structures à 13, 30 et 60 aubes, sont étudiés. Dans tous les cas, une excitation d'Ordre Moteur  $EO = 5$  est fixée. Tout d'abord, on constate que le nombre d'aubes a un effet contraire à celui de l'Ordre Moteur et la structure devient plus sensible au frottement avec l'augmentation de N. Pour de mêmes valeurs du produit  $\mu F_n$ , l'état du contact tend de plus en plus vers une configuration de type glissante. Pour une structure à 13 aubes avec une force normale de 3 N, l'état du contact stick/slip, quand il se manifeste, est à majorité bloquée. Par contre quand une structure à 30 ou 60 aubes est considérée, le contact stick/slip devient de plus en plus à majorité glissante (figure 3.13 et 3.14), soit dans le cas macroslip "pur" ou soit en prenant en considération l'influence de la rugosité. En augmentant le nombre des aubes, il devient de plus en plus difficile de bloquer le contact. En effet, pour un même EO, le nombre de contacts qui doit changer d'état reste constant. En revanche le nombre de degrés de liberté ayant une force en phase augmente avec le nombre total de degrés de liberté. Par conséquent, la force totale qui agit sur un seul frotteur augmente selon l'augmentation du nombre de degrés de liberté. Pour cette raison, à intensités constantes de la force d'excitation  $F_{ex}$  et de la force normale sur chaque contact, les contacts glissent de plus en plus avec l'élévation du nombre des degrés de liberté. Dans le cas d'une excitation de type Ordre Moteur, les structures à symétrie cyclique en présence de frottement sec ont donc bien globalement le même type de comportement qu'un système à 1 ddl. Un passage graduel de l'état bloqué à un état glissant est obtenue par diminution de la valeur de la charge normale.

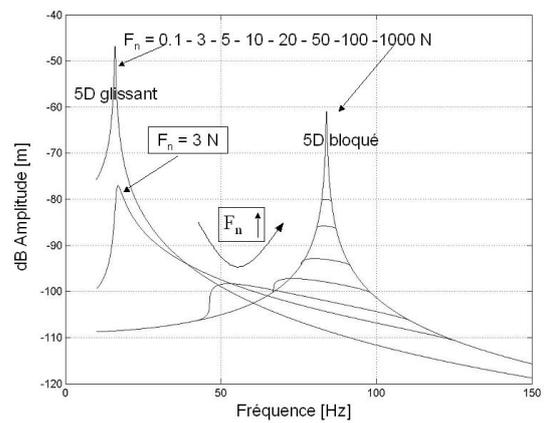
Dans ce qui suit, une dernière propriété relative à l'approximation des courbes pour différentes valeurs de la charge normale, reste à vérifier. Toufine [72] propose une méthode pour calculer,



(a) Système à 13 degrés de liberté

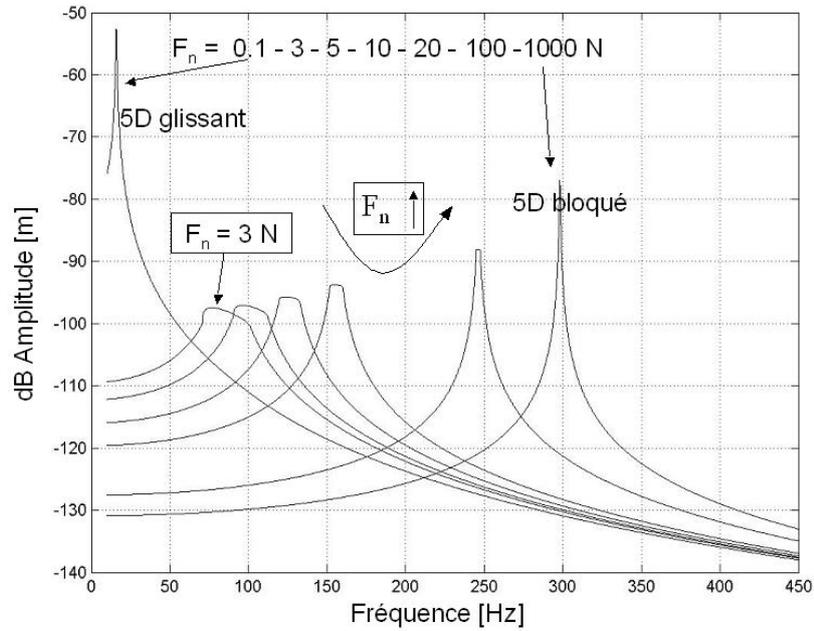


(b) Système à 30 degrés de liberté

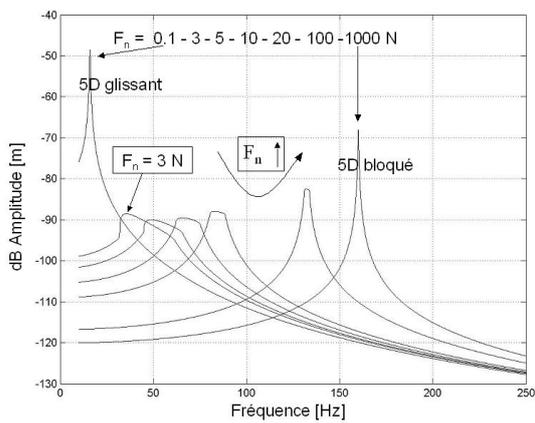


(c) Système à 60 degrés de liberté

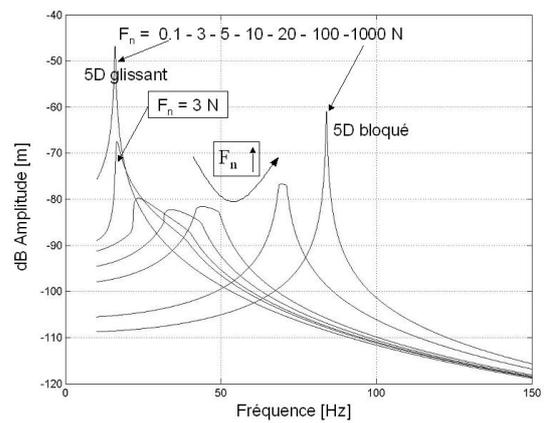
FIG. 3.13 Macroslip "pur"



(a) Système à 13 degrés de liberté



(b) Système à 30 degrés de liberté



(c) Système à 60 degrés de liberté

FIG. 3.14 Influence de la rugosité

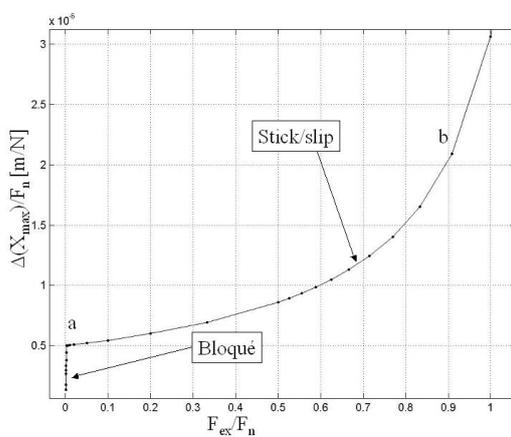
en première approximation, les niveaux des réponses pour un système à 2 degrés de liberté en présence de frottement sec. D'un point de vue industriel, cette opération peut permettre par simple analyse des seuls cas extrêmes (complètement glissant et complètement bloqué) d'obtenir les valeurs des amplitudes en fonction de la force normale appliquée au contact. Cette méthode est d'autant plus efficace si son application peut être généralisée au cas de structures à symétrie cyclique à n-ddl.

### 3.3.4 Approximation des réponses forcées non linéaires

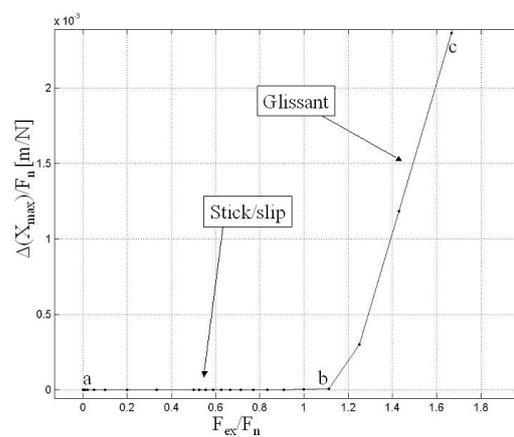
Dans ce paragraphe, le cas d'une structure à 13 degrés de liberté excitée avec un Ordre Moteur EO = 5 est considéré (les mêmes résultats sont applicables à tous les Ordres Moteur pour toutes structures à symétrie cyclique). En (figure 3.15), les courbes caractéristiques représentant l'amplitude maximale en fonction de la force d'excitation normalisées par rapport à la force normale au contact sont présentées. Les trois différentes zones caractérisent les trois types de comportement :

- Bloqué : droite de l'origine jusqu'au point a
- Stick/Slip : plateau de a à b
- Glissant : droite de b a c

Il faut remarquer que, par rapport à l'analyse effectuée par Toufine [71], les courbes représentant la réponse forcée sont relatives à la différence d'amplitudes entre les degrés de liberté et non à l'amplitude absolue car le contact est positionné entre les aubes. Le calcul des réponses linéaires (contact bloqué et glissant) peut être conduit aisément pour un système à symétrie cyclique. Pour chaque valeur de la fréquence d'excitation, l'amplitude relative de chaque degré de liberté par rapport au



(a) Comportement bloqué et stick/slip



(b) Comportement stick/slip et glissant

FIG. 3.15 Comportement global de la structure à symétrie cyclique

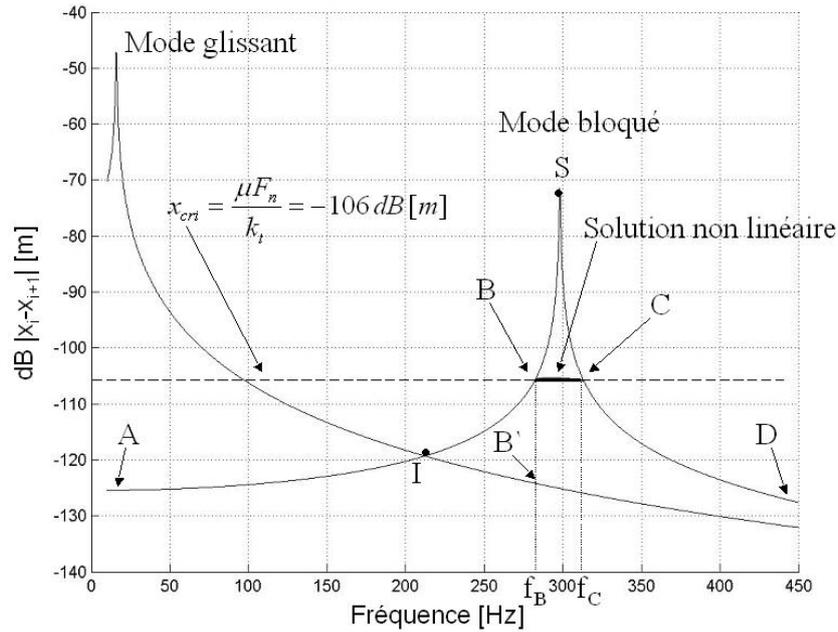


FIG. 3.16 Comparaison entre la solution non linéaire et la solution approchée

suivant ( $|x_i - x_{i+1}|$ ) est la même, et ce pour chaque degré de liberté. En figure (3.16), les symboles  $I$  et  $S$  représentent respectivement le point d'intersection entre les deux courbes et le point maximal de la réponse forcée,  $x_I$  et  $x_S$  étant les niveaux d'amplitude des vibrations associées. De plus  $x_{cri}$  désigne la valeur du déplacement correspondant au passage de l'état bloqué à l'état glissant (3.18).

$$x_{cri} = \frac{\mu F_n}{k_t} \quad (3.18)$$

Trois configurations de charge différentes sont maintenant considérées.

**Première configuration -  $x_{cri} \geq x_S$**

Dans ce premier cas, la valeur de la force normale est telle que la valeur de  $x_{cri}$  soit plus élevée que celle de  $x_S$ . Le contact reste alors toujours bloqué et la réponse linéaire coïncide avec la réponse exacte du système. Si on fait référence aux courbes de la figure (3.15), le point représentatif de l'excitation se trouve entre l'origine et le point a.

**Deuxième configuration -  $x_I \leq x_{cri} \leq x_S$**

Dans ce cas, la valeur de  $x_{cri}$  est comprise entre  $x_I$  et  $x_S$  (figure 3.16). On trace une droite d'ordonnée  $x_{cri}$  qui coupe la courbe réponse associée au cas bloqué en deux points B et C pour des fréquences respectives  $f_B$  et  $f_C$ . Pour des valeurs de la fréquence d'excitation plus faibles que  $f_B$

et plus grandes que  $f_C$ , le contact est bloqué car le déplacement est plus faible que la valeur  $x_{cri}$ . Au passage du point B le contact change son état de bloqué à stick/slip. En première approximation conformément à l'hypothèse de Toufine, il apparaît que le déplacement entre les point B et C est constant et est donné par la valeur  $x_{cri}$ .

En général, le passage de l'état stick/slip à l'état complètement glissant est réalisé seulement si le déplacement du cas glissant est tel que la condition  $|x_i - x_{i+1}| \geq \mu F_n / k_t$  soit vérifiée. Dans ce cas, le système, même suite à une perturbation, ne peut pas passer d'un état stick/slip à un état complètement glissant car il est caractérisé par des valeurs du déplacement plus faibles. A partir de la figure (3.16), quand l'excitation a une fréquence égale à  $f_B$ , la réponse forcée ne peut pas présenter un saut entre B et B' parce que ce dernier est caractérisé par des amplitudes plus faibles qui ne satisfont pas la condition  $|x_i - x_{i+1}| \geq \mu F_n / k_t$ . Le contact stick/slip entre B et C, représente donc une solution stable du système.

Une application numérique peut être conduite en utilisant les valeurs suivantes pour les paramètres de contact :  $\mu = 0.5$ ,  $k_t = 1e6 \text{ N/m}$   $F_n = 10 \text{ N}$ . Par conséquent, la valeur de  $x_{cri}$  est donnée par

$$x_{cri} = \mu F_n / (k_t) = \frac{0.5 \cdot 10}{10^6} = -106 \text{ dB [m]} \quad (3.19)$$

En résumé, la réponse approchée est fournie par les trois tronçons suivants (figure 3.16) :

- AB - Comportement bloqué ; solution approchée identique à la solution linéaire
- BC - L'amplitude des vibration du comportement stick/slip est approchée avec une valeur constante égale à  $x_{cri}$ .
- CD - le contact est à nouveau bloqué et la réponse approchée coïncide à la réponse complètement bloquée.

La valeur approchée donne une très bonne approximation par rapport à la valeur numérique obtenue avec la résolution des équations non linéaires. En figure (3.15), la configuration de l'état du contact se trouve entre les points a et b, mais plus près du point a : stick/slip à majorité bloquée.

### Troisième configuration - $x_{cri} \leq x_I$

Dans ce cas, la droite à  $x_{cri}$  constant coupe la réponse forcée en deux points B et C précisés en figure (3.17) d'abscisses respectives  $f_B$  et  $f_C$ . Pour des valeurs de fréquences plus faibles que  $f_B$  et plus grandes que  $f_C$ , le contact reste bloqué et la réponse forcée est donnée par la courbe linéaire bloquée. A la fréquence  $f_B$ , le contact passe de l'état bloqué à l'état stick/slip. Cette fois-ci, la solution glissante est caractérisée par des déplacements tels que la condition  $|x_i - x_{i+1}| \geq \mu F_n / k_t$  soit satisfaite ; une faible perturbation du système peut donc faire converger la réponse

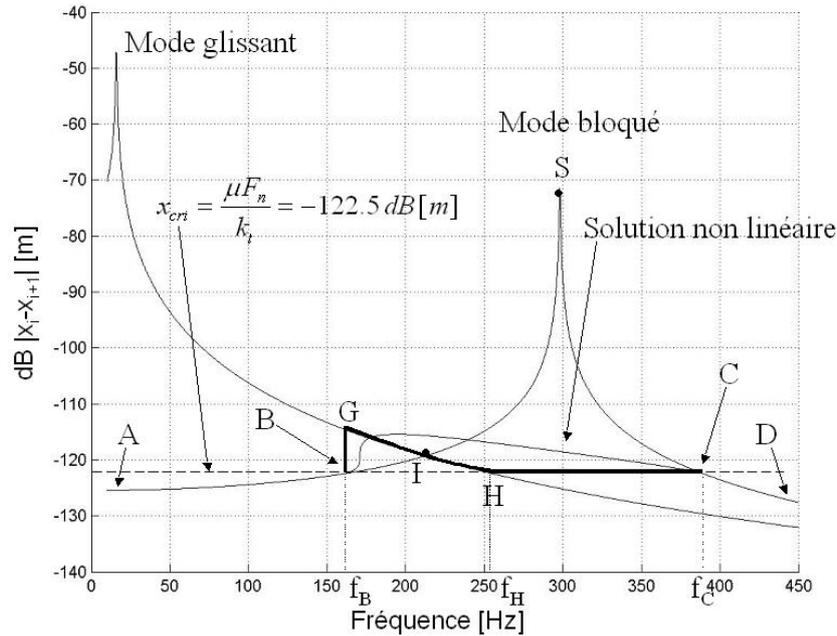


FIG. 3.17 Comparaison entre la solution non linéaire et la solution approchée

vers la solution complètement glissante du système et, par conséquent, le contact stick/slip n'est pas stable. La réponse forcée approchée présente donc un saut du point  $B$  au point  $G$ . La courbe relative au cas complètement glissant coupe la droite  $x_{cri}$  en  $H$  pour une valeur de fréquence  $f_H$ . Entre  $f_B$  et  $f_H$ , la réponse non linéaire due au comportement stick/slip est approchée par la courbe relative au cas complètement glissant. A la fréquence  $H$ , un contact de type stick/slip est toujours présent mais les déplacements relatifs au cas glissant deviennent plus faibles que le déplacement nécessaire pour faire glisser le contact. La réponse ne peut plus suivre la courbe du cas glissant. Dans ce cas, la vibration en présence du contact stick/slip s'approche de la valeur  $x_{cri}$  comme décrit pour la deuxième configuration. Entre les points  $H$  et  $C$ , la réponse ne change pas d'amplitude et sa valeur est donnée par  $x_{cri}$ . En  $C$  le contact passe de l'état stick/slip à l'état complètement bloqué. La réponse approchée est à nouveau coïncidente avec la courbe linéaire entre  $C$  et  $D$ .

En résumé, l'approche numérique d'une structure à 13 degrés de liberté permet de décrire le comportement suivant. Avec une charge normale de  $1.5\text{ N}$ , la valeur de  $x_{cri}$  est donnée par la relation (3.20) :

$$x_{cri} = \mu F_n / (k_t) = \frac{0.5 \cdot 1.5}{10^6} = -122.5\text{ dB [m]} \quad (3.20)$$

La droite à  $x_{cri}$  constante coupe la courbe relative au comportement bloqué en  $B$  et  $C$ . La réponse approchée est obtenue d'après les étapes suivantes :

- AB - comportement bloqué ; solution approchée identique à la solution linéaire
- BG - saut entre la condition bloquée et glissante.
- GH - la réponse approchée suit la solution donnée par la réponse glissante
- HC - l'amplitude due au contact stick/slip est approchée avec une valeur constante donnée par  $x_{cri}$ .
- CD - le contact est à nouveau bloqué et la réponse approchée coïncide avec la réponse complètement bloquée.

En figure (3.15), la configuration de l'état du contact est entre les point a et b, au plus près du point b est stick/slip à majorité glissante.

Cette méthode donne une très bonne approximation des valeurs des amplitudes dues au frottement dans le cas de système à symétrie cyclique. Toutefois, il faut remarquer que les valeurs représentées en figure (3.16) et (3.17) concernent les déplacements relatifs entre les aubes alors que, d'un point de vue industriel, il est beaucoup plus intéressant d'avoir directement les valeurs des déplacements absolus de l'aube considérée. Mais le rapport entre ces deux quantités est constant, et il est décrit par la relation suivante 3.21 :

$$\frac{|x_i - x_{i+1}|}{|x_i|} = 2 \sin\left(\frac{\pi EO}{N}\right) \quad (3.21)$$

où  $N$  est le nombre total d'aubes. Il est donc possible d'avoir une estimation des valeurs des déplacements des aubes au niveau du contact. Dans le cas de systèmes réels, les temps de calculs pour la résolution de systèmes non linéaires devient très importante. Avec la méthode proposée, une fois les réponses linéaires associées obtenues, les résultats sont immédiats. L'avantage vis à vis des temps de calculs est considérable.

### 3.3.5 Conclusion

Un système à symétrie cyclique accordé à n-ddl reliés par des éléments de contact est analysé. Les effets de deux types d'excitation, une plus proche du cas expérimental mis en oeuvre par Ravoux et l'autre plus représentative d'une excitation réelle, sont étudiés. Dans le premier cas, le passage entre l'état de contact bloqué et glissant présente pour tous les modes, les même caractéristiques que celles observées pour un système à un seul degré de liberté. La seule particularité à retenir vient du fait que, dans le cas complètement glissant, tous les modes ont la même fréquence

de résonance égale à la fréquence de résonance du mode à 0 diamètre. Puisque seul le premier degré de liberté est excité (les autres degrés de liberté sont excités par une force beaucoup plus faible égale à  $\mu F_n$ ), la vibration du système est concentrée sur un seul degré, et ce, même si la structure est parfaitement accordée.

En revanche, dans un deuxième cas, l'excitation est de type *Ordre Moteur*. Tous les degrés de liberté ont la même valeur d'amplitude et seul le mode correspondant à l'*Ordre Moteur* sélectionné est excité, deux caractéristiques qui font que l'analogie avec le système à un degré de liberté est encore plus accentuée. Les courbes de réponses forcées ont même allure, soit pour un comportement macroslip "pur" soit en présence des effets de la rugosité.

La technique développée dans le cadre de la thèse de Toufine [72] est vérifiée dans le cas plus général de systèmes à  $n$ -ddl. Une approximation satisfaisante des réponses non linéaires peut donc être obtenue à partir exclusivement des réponses forcées correspondants aux cas linéaires associés (complètement bloqué, et glissant).

Le comportement des structures accordés analysés, les effets du désaccordage dû aux propriétés des contacts sont maintenant considérés. Les deux types d'excitation sont conservés. Dans un premier temps, avec une force ponctuelle, les effets du dédoublement des modes sont comparés au moins d'un point de vue phénoménologique aux résultats expérimentaux obtenus par [56]. Dans un second temps, une excitation correspondant à une distribution de type *Ordre Moteur* est considérée dans le but de mettre en évidence les effets du désaccordage sur le facteur d'amplification des amplitudes.

### **3.4 Système à symétrie cyclique désaccordé - Excitation ponctuelle**

Dans [56], la source fondamentale du désaccordage retenue est due à la mise en charge des contacts. En effet, d'après le procédé de fabrication, les zones de contact présentent un très bon état de surface et une préliminaire étude expérimentale menée individuellement sur chacune des aubes constituant le système complet a mis en évidence un comportement dynamique assez homogène entre elles. La principale difficulté expérimentale rencontrée est l'obtention d'une charge statique homogènement répartie sur la structure à symétrie cyclique. En première approximation, il a été constaté que le désaccordage principal de la structure est dû à la mauvaise répartition de la force normale sur l'ensemble des aubes (alors que la variation des autres paramètres demeure très faible).

L'étude du comportement de la dynamique d'ensemble a révélé que les modes sont dédoublés d'une façon assez importante présentant un écart en fréquences pouvant atteindre 20% pour de faibles valeurs de la charge normale. Il a été également remarqué que, en augmentant la valeur de la force normale  $F_n$ , l'écart entre les fréquences baisse pour atteindre des valeurs plus standards de l'ordre du 5%.

Premièrement, une analyse de l'influence du désaccordage de chaque paramètre sur le dédoublement des modes est menée. Le but de cette partie est de vérifier si un désaccordage dû essentiellement à la force normale peut conduire à des écarts en fréquence (dédoublé des modes) de l'ordre de 20% comme observé expérimentalement et si, l'augmentation de la valeur de la force moyenne de contact diminue ces effets. Deuxièmement, un cas plus général est traité afin de voir si la variation simultanée des paramètres a pour effet d'amplifier le dédoublement des modes ou non. Différents cas de distribution aléatoire sont alors pris en compte.

### 3.4.1 Sensibilité au désaccordage du dédoublement des modes

Dans ce paragraphe, une approche numérique est mise en oeuvre afin d'analyser l'influence du désaccordage des seuls paramètres de contact quand une structure à géométrie cyclique en présence de frottement sec est considérée. La structure complète est schématisée avec un seul degré de liberté par aube (figure 3.6) et un élément de contact de type Masing modifié par la rugosité est choisi. La raideur, l'amortissement et la masse modale de la poutre sont représentées par les variables  $k_i$ ,  $c_i$  et  $m_i$ . Le terme  $f_{nl}$  représente la force transverse transmise par les contacts. Les aubes sont considérées encastées sur le disque et le seul élément que les relie est représenté par le contact inter-nageoires.

Dans la modélisation, les paramètres qui règlent le comportement du contact sont au nombre de cinq : la force normale au contact, le coefficient de frottement sec, la raideur tangentielle, la raideur normale et la rugosité. Dans cette première étape, on se limite à l'étude de l'influence de chacun des paramètres et de leurs conséquences. Quatre cas tests sont analysés :

- Variation sinusoïdale faible (Amplitude  $< 0.1$ ) (sin 1)
- Variation sinusoïdale importante (Amplitude  $< 0.3$ ) (sin 2)
- Variation aléatoire faible (écart type  $\sigma = 0.1$ ) (rand 1)
- Variation aléatoire importante (écart type  $\sigma = 0.3$ ) (rand 2)

Les dénominations sin 1 et sin 2 sont associées à une distribution sinusoïdale de  $\epsilon$  sur la totalité des 13 aubes. Les dénominations rand 1 et rand 2 sont associées à une distribution aléatoire de  $\epsilon$  sur la totalité des 13 aubes. D'un point de vue numérique, le désaccordage de chaque paramètre est

aube	sin 1	sin 2	rand 1	rand 2
1	0.04647	0.13942	0.1444	0.0264
2	0.08230	0.24689	-0.0351	-0.1906
3	0.09927	0.29781	0.0623	-0.1679
4	0.09350	0.28050	0.0799	0.1331
5	0.06631	0.19894	0.0941	-0.2850
6	0.02393	0.07180	-0.0992	0.2344
7	-0.02393	-0.07180	0.0212	0.1707
8	-0.06631	-0.19894	0.0238	-0.2465
9	-0.09350	-0.28050	-0.1008	-0.0797
10	-0.09927	-0.29781	-0.0742	-0.3563
11	-0.08230	-0.24689	0.1082	-0.6607
12	-0.04647	-0.13942	-0.0131	0.2959
13	0.0	0.0	0.0390	-0.1556

TAB. 3.1 Valeurs du paramètre  $\epsilon$  pour l'étude du désaccordage de la structure

abordé en modifiant sa valeur selon la relation suivante :

$$var_i = \bar{var}_i \cdot (1 + \epsilon) \quad (3.22)$$

où  $\bar{var}_i$  représentent les valeurs moyennes initiales et  $\epsilon$  l'écart en pourcentage défini dans le tableau (3.1) pour les quatre cas. Dans un premier temps, trois différents états sont considérés. Un contact bloqué obtenu avec une force normale de 300 N, un contact de type stick/slip avec  $F_n = 50$  N et un contact stick/slip à majorité glissant avec  $F_n = 9$  N. La force d'excitation est toujours égale à 3 N. L'influence de chaque paramètre en fonction de l'état du contact est recherchée.

#### *Cas bloqué*

Dans ce cas, la raideur normale, la rugosité et le coefficient de frottement  $\mu$  ont une très faible influence pour les différentes raisons suivantes :

- $\mu$  - tous les états des contact sont complètement bloqués pour chaque valeur de fréquence d'excitation. La variation de ce paramètre ne parvient pas à changer l'état d'aucun contact ; le comportement dynamique du système demeure inchangé.

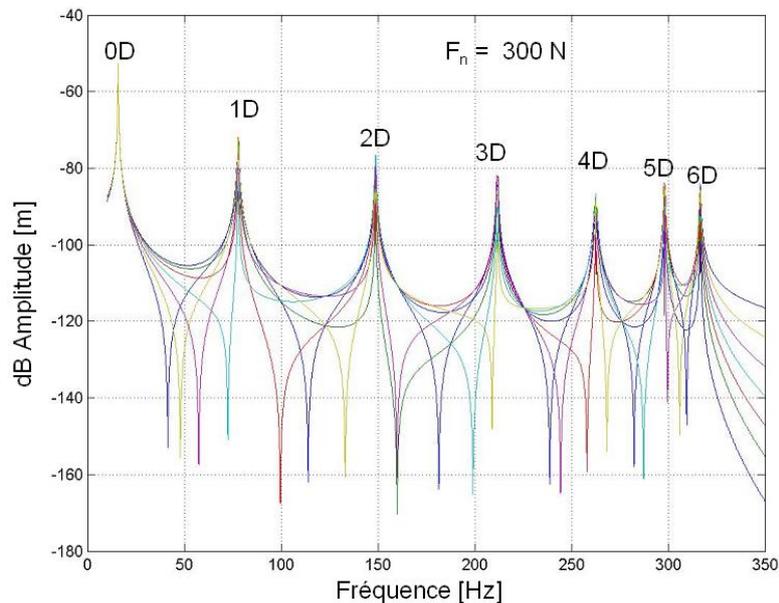


FIG. 3.18 Réponses forcées dans le cas du désaccordage de  $\mu$  pour le cas test "rand 2"

- $k_n, R_z$  - Par rapport au coefficient de frottement, ces deux paramètres ont une influence plus importante mais somme toute toujours modeste. Leur variation permet en effet une faible variation de la raideur tangentielle au contact (voir méthode de Sextro en Annexe A); par conséquent, un faible effet sur la dynamique du système est visible. En particulier, puisque les états sont bloqués, les effets concernent surtout le doublement des modes.

En figure (3.18) sont reportées les réponses obtenues dans les pires conditions (rand 2) de désaccordage parmi les quatre choisies, pour le désaccordage amené par le coefficient de frottement (à chaque couleur correspond la réponse forcée d'une aube différente). Pour ce premier graphique, aucune différence n'est observable par rapport au cas parfaitement accordé (figure 3.9); aucun dédoublement de modes n'est constaté. En revanche, en présence du désaccordage dû à la raideur normale ou à la rugosité, un faible dédoublement pour la pire condition (rand 2) est présent, mais limité exclusivement aux modes de quatrième et cinquième diamètres (figure 3.19).

Le désaccordage induit par la force normale et par la raideur tangentielle de contact génère un comportement dynamique différent vis à vis du cas précédent.

- $F_n$  - A cause du modèle de contact choisi, et de même que la raideur normale et la ru-

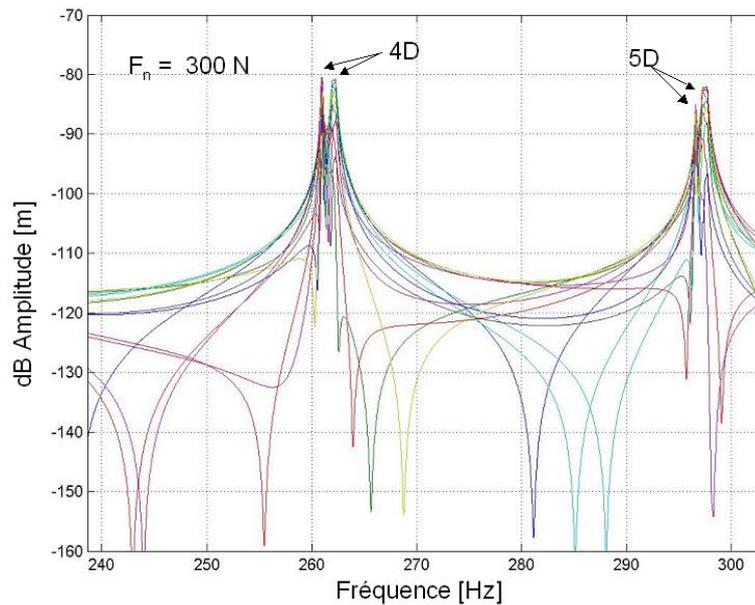


FIG. 3.19 Réponses forcées dans le cas du désaccordage de  $k_n$  pour la cas test rand 2

gosité, la variation de la force normale permet une variation de la raideur tangentielle. Mais son rôle est déterminé aussi par le fait que cette variable fait partie intrinsèque de la condition  $\mu F_n / (k_t B)$  qui règle le passage entre un état bloqué et glissant du contact. (Pour mémoire, une valeur inférieure à 1 conduit à un état glissant ; une valeur supérieure à 1 à un état bloqué). Le double rôle joué par la charge normale implique que son influence soit un peu plus marquée que celle liée aux variables précédentes comme observé figure (3.20), correspondant toujours à la pire condition (rand 2). De plus, cette fois-ci, tous les modes sont désaccordés alors que, pour le cas précédent, le dédoublement ne concernait qu'uniquement deux modes.

- $k_t$  - La raideur tangentielle au contact constitue le paramètre majeur qui, plus que tout autre, dans le cas bloqué, peut induire un fort changement dans la dynamique du système. Sa valeur est directement liée aux fréquences de résonance et au paramètre  $\mu F_n / (k_t B)$ . Pour cette raison, le dédoublement est encore plus conséquent que celui constaté pour la force normale (figure 3.21).

Dans le tableau (3.2), les écarts exprimés en pourcentage des fréquences associées au dédoublement des modes dans la pire condition "rand 2" sont présentées. Il est donc évident que, en général,

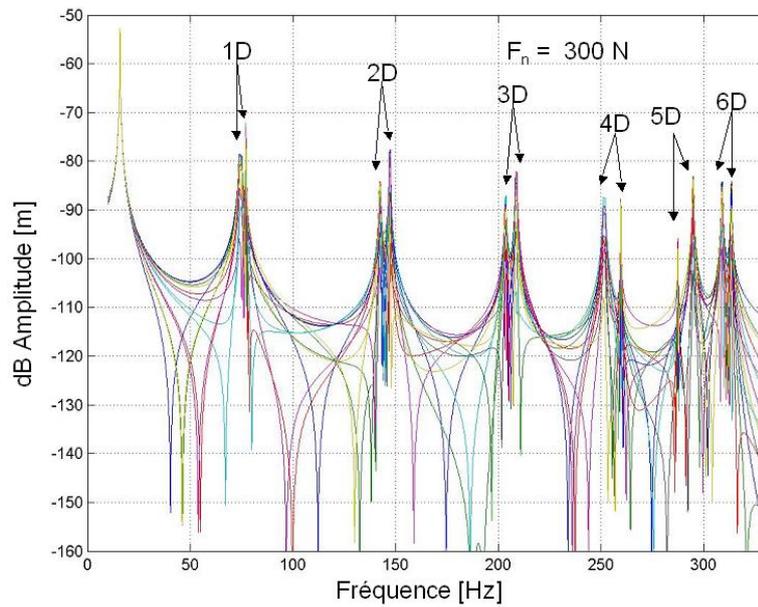


FIG. 3.20 Réponses forcées dans le cas du désaccordage de  $F_n$  pour le cas test "rand 2"

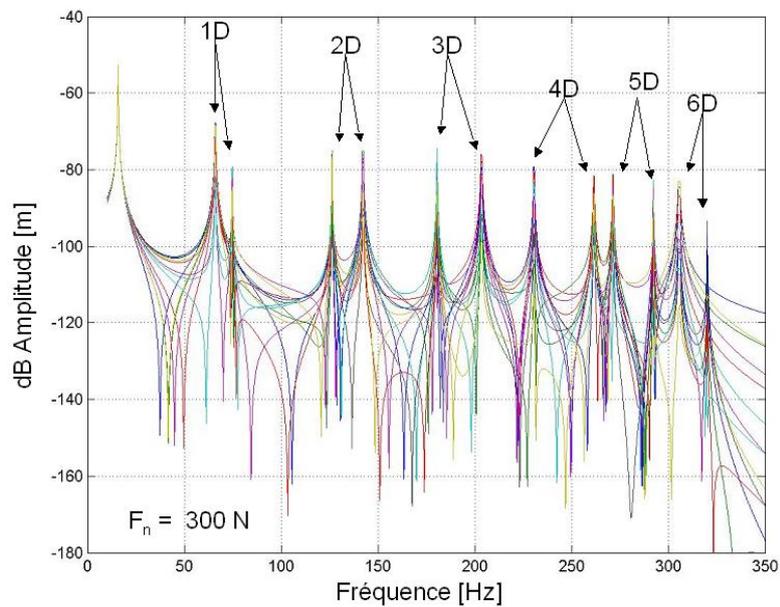


FIG. 3.21 Réponses forcées dans le cas du désaccordage de  $k_t$  pour le cas test "rand 2"

mode	$\Delta f$ [%]			
	$\mu$	$k_n, R_z$	$F_n$	$k_t$
1 D	0.0	0.5	3.5	13.6
2 D	0.0	0.0	3.5	12.7
3 D	0.0	0.3	2.7	13.3
4 D	0.0	0.5	3.2	13.9
5 D	0.0	0.3	2.7	7.6
6 D	0.0	0.0	1.4	4.9

TAB. 3.2 Valeurs du dédoublement des modes dans la condition "rand 2" - Cas bloqué

pendant la phase bloquée du contact, le paramètre de raideur tangentielle (suivi par celui de la force normale) joue un rôle très important sur le dédoublement des modes.

#### *Cas Stick/slip à majorité bloquée*

Un analyse de même type est effectuée en analysant l'effet de la variation de chaque paramètre sur le comportement dynamique de la structure.

- $\mu$  - Les effets du coefficient de frottement sont remarquables exclusivement en termes de niveaux d'amplitude des vibrations et, en conséquent, sur l'état du contact. La valeur  $\mu$  permet un changement du paramètre  $\mu F_n / (k_t B)$ , c'est à dire du paramètre qui pilote le passage entre la phase bloquée et glissante. Dans le comportement d'ensemble, certain(s) contact(s) ont un comportement plutôt glissant ; d'autre(s) plutôt bloqué. Cette remarque est émise d'après l'analyse de la forme des pics au voisinage des amplitudes maximales. Le dédoublement des modes n'est observable que pour les degrés de liberté ayant conservé un état à majorité bloqué ; tandis que pour les autres, l'aplatissement des pics masque le phénomène. En figure (3.22), le pic d'amplitude maximale associé à un mode de deuxième diamètre est reporté afin de mettre en évidence les différents type de comportement des différents degrés de liberté.

- $k_n, R_z$  - Par rapport au cas complètement bloqué, la valeur de la charge normale est plus faible puisqu'on se place au voisinage d'un état stick/slip à majorité bloqué. La variation indirecte de la raideur tangentielle (causée par les différentes raideurs normales et les rugosités des contacts) peut jouer un rôle important non seulement dans le dédoublement des modes mais également sur le passage de l'état bloqué à glissant déterminé par le rapport  $\mu F_n / (k_t B)$ . Ainsi deux effets diffé-

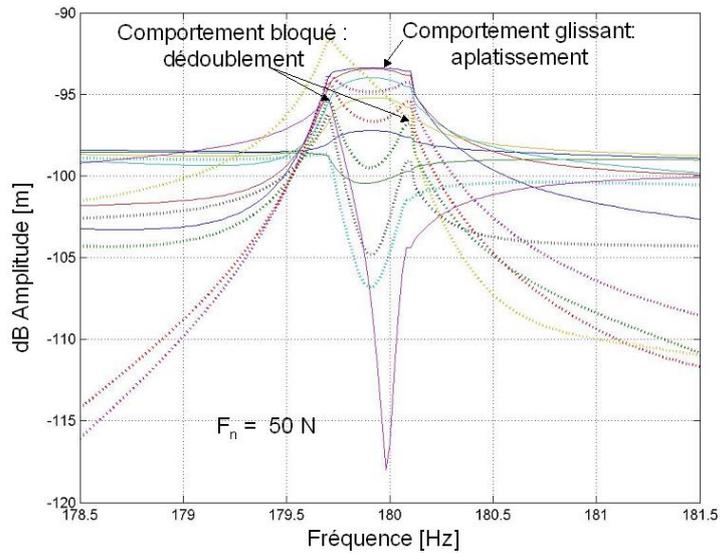


FIG. 3.22 Cas stick/slip à majorité bloquée dans le cas du désaccordage de  $\mu$  : ligne pointillé comportement à majorité bloquée, ligne continue comportement à majorité glissante

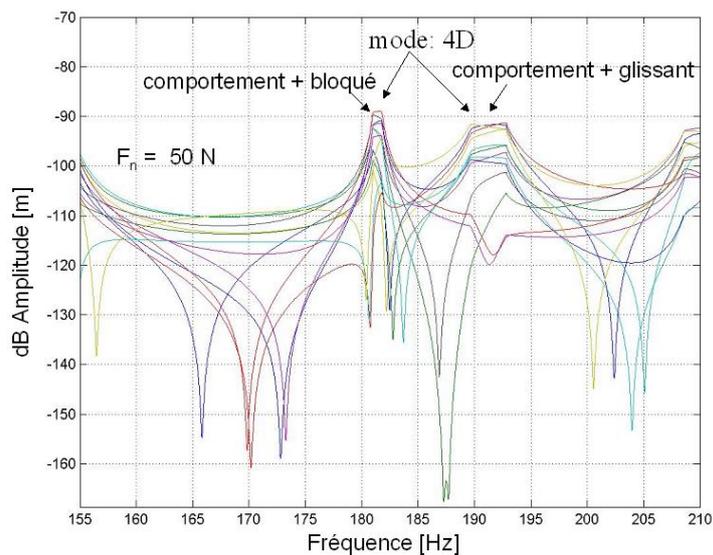


FIG. 3.23 Cas stick/slip à majorité bloquée dans le cas du désaccordage de  $k_n$  pour le cas test "rand 2"

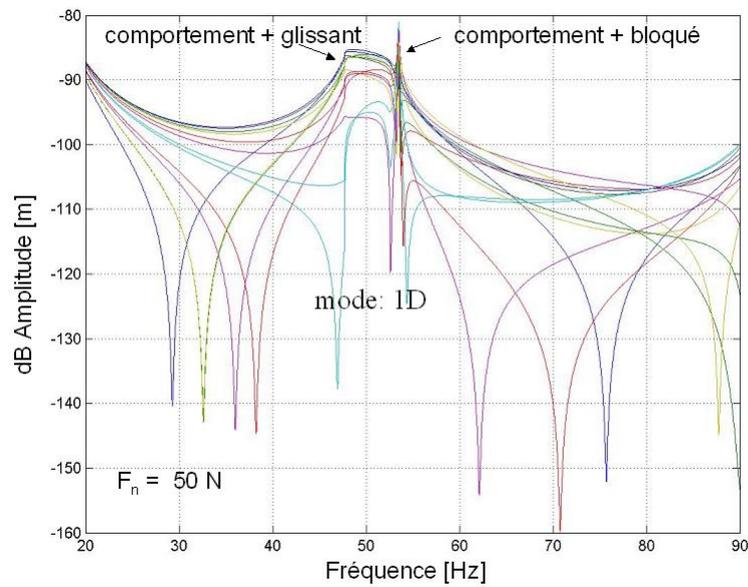


FIG. 3.24 Réponse forcée dans le cas du désaccordage de  $F_n$  pour un contact stick/slip à majorité bloquée : analyse du mode 1D

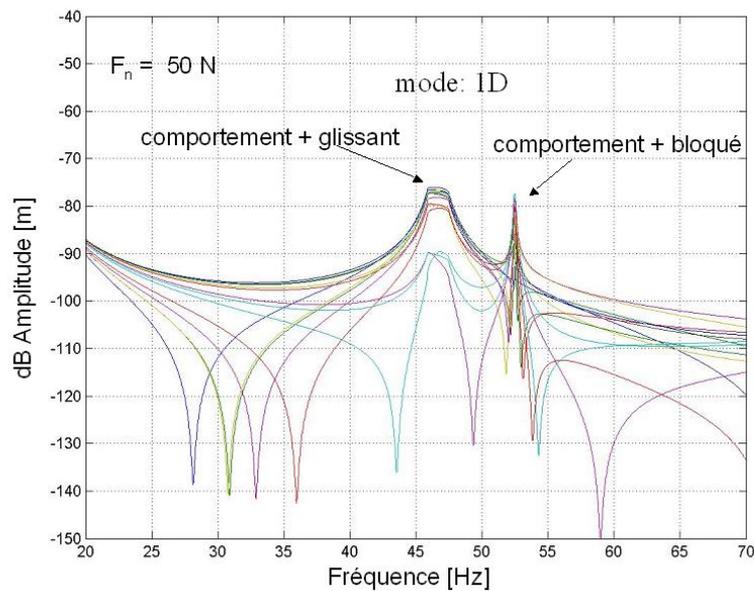


FIG. 3.25 Réponse forcée dans le cas du désaccordage de  $k_t$  pour un contact stick/slip à majorité bloquée : analyse du mode 1D

mode	$\Delta f$ [%]			
	$\mu$	$k_n, R_z$	$F_n$	$k_t$
1 D	0.0	5.4	7.0	11.7
2 D	0.0	3.2	6.0	11.3
3 D	0.0	4.0	5.9	12.9
4 D	0.0	5.5	9.1	14.0
5 D	0.0	1.9	4.7	8.1
6 D	0.0	10.8	2.8	4.3

TAB. 3.3 Valeurs du dédoublement des modes dans la condition "rand 2" - Cas stick/slip à majorité bloquée

rents sont clairement identifiables : le dédoublement des modes et le caractère fluctuant de l'état du contact stick/slip parfois à majorité bloquée - parfois à majorité glissante. Ces deux phénomènes différents sont observés dans la réponse forcée obtenue pour le cas rand2 en figure (3.23).

- $F_n, k_t$  - Le comportement dynamique de la structure induit par la variation de ces deux paramètres possède en soi toutes les caractéristiques décrites précédemment pour les paramètres  $k_n, R_z$  et  $\mu$ . Bien évidemment, les effets sont beaucoup plus importants car ces variables modifient directement les fréquences naturelles du système et le changement d'état entre une condition bloquée et glissante d'après l'expression même de la variable ( $\mu F_n / (k_t B)$ ). Le dédoublement des modes ainsi que la différence de comportement à majorité bloquée et glissante observable pour un même mode sont donc de plus en plus accentués. Dans le cas de variation de la force normale, on peut observer directement les deux phénomènes sur le premier mode à un diamètre (figure 3.24) avec les pics de gauche qui présentent un comportement à majorité glissante très nette alors que le pic de droite est très pointu comme dans le cas bloqué. Ce phénomène est encore amplifié dans le cas du désaccordage dû à la raideur tangentielle (figure 3.25). Non seulement les deux comportements à majorité glissante et bloquée sont nettement visibles comme auparavant, mais la différence de deux pics relatifs au même mode est encore plus remarquable ( $\sim 12\%$  par rapport à  $\sim 7\%$  du cas précédent). En tableau (3.3) les dédoublements des modes observés dans la pire condition (rand2) pendant une phase stick/slip à majorité bloquée des contacts ont été reportés. Même dans cette configuration, la raideur tangentielle semble avoir une influence plus importante sur le dédoublement des modes par rapport à la force normale et aux autres paramètres du contact.

*Cas Stick/slip à majorité glissante*

L'analyse de ce dernier cas a démontré l'impossibilité de pratiquer une identification modale relative aux pics d'amplitude maximale. Le problème est dû au type même d'excitation choisie. Si, d'un côté, une force de type ponctuelle, appliquée à un seul degré de liberté, permet par un seul balayage sinusoïdal d'exciter tous les modes associés à la structure, d'un autre côté, quand l'état du contact est à majorité glissante, les réponses forcées sont complètement aplaties et le phénomène du désaccordage est perdu ou noyé. En figure (3.26), les réponses forcées dans le cas du désaccordage de la charge normale (cas rand 2) sont dessinées. Il est évident qu'à partir du mode à 3 diamètres, aucune analyse ne peut plus être réalisée.

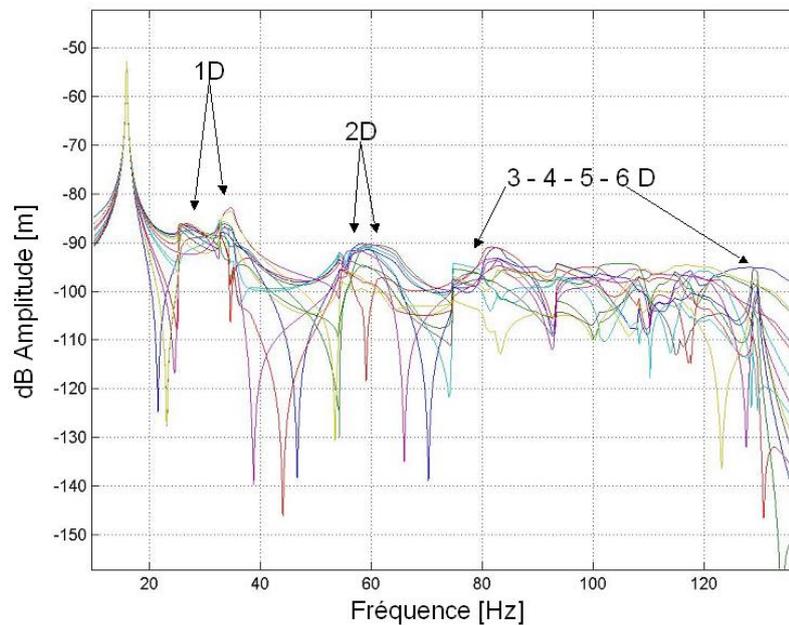
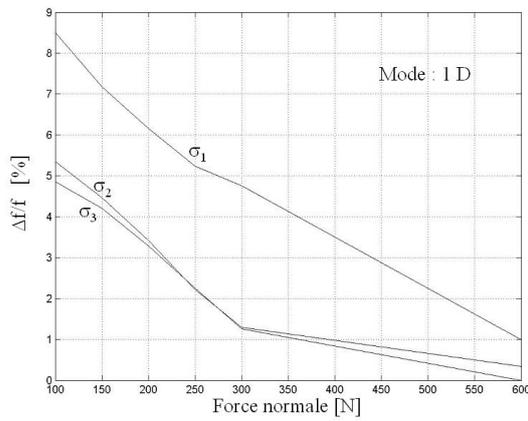


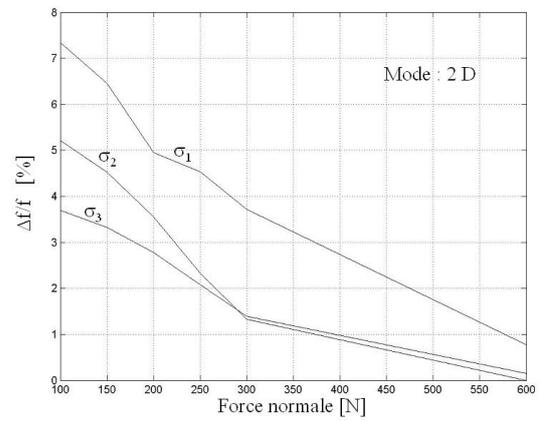
FIG. 3.26 Réponses forcées dans le cas du désaccordage de  $F_n$  pour un contact stick/slip à majorité glissante

*Comparaison avec les résultats expérimentaux*

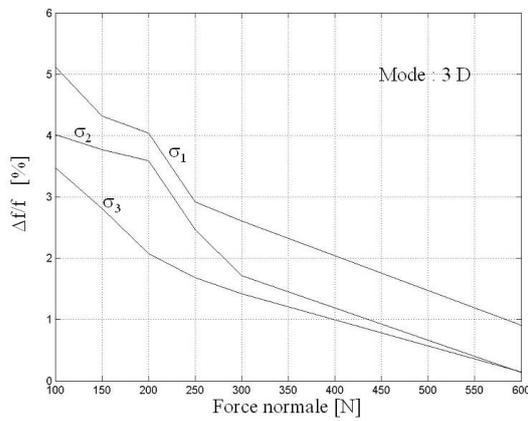
De façon semblable au cas expérimental, il est supposé que le seul désaccordage soit causé par une mauvaise mise en charge de la force normale  $F_n$ . Trois cas de distributions aléatoires sont définies avec un écart type équivalent à  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0.3$ . Les résultats obtenus prouvent, en accord avec [56], qu'en diminuant la charge normale, l'effet du dédoublement (dû au désaccordage de la force normale) augmente. Les variations fréquentielles liées au dédoublement des modes (ex-



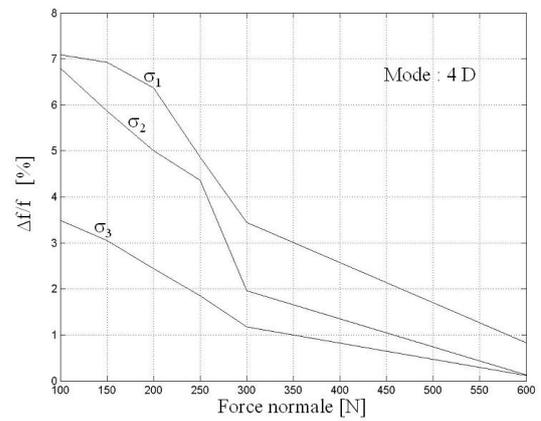
(a) 1 Diamètre



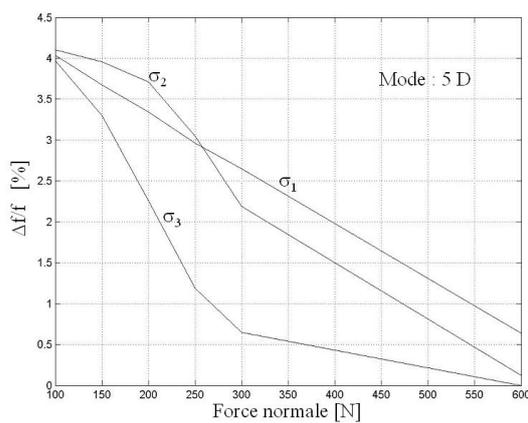
(b) 2 Diamètres



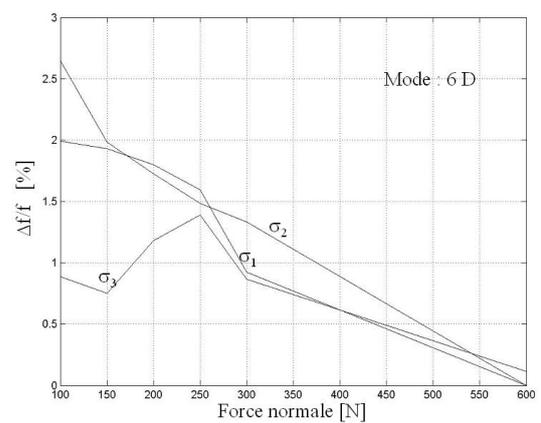
(c) 3 Diamètres



(d) 4 Diamètres



(e) 5 Diamètres



(f) 6 Diamètres

FIG. 3.27 Dédoublage des modes en fonction de la charge normale - configurations "rand 2"

primées en pourcentage) en fonction de la force normale comprise entre 600 et 100  $N$  sont tracées en figure (3.27). Un système à un seul degré de liberté par aube offre la possibilité de reproduire les phénomènes identifiés expérimentalement. Cependant, la différence fondamentale concerne les valeurs du dédoublement obtenues. Le dédoublement maximal qu'on puisse obtenir numériquement est de l'ordre de 7% pour le mode à 3 diamètres. Des valeurs plus élevées (autour de 20%) sont particulièrement difficiles à obtenir à l'aide d'une modélisation telle que celle utilisée.

### *Conclusions*

A la suite de cette étude de sensibilité, il est clair que certains paramètres (plus que d'autres) peuvent jouer un rôle significatif en présence de désaccordage. La raideur tangentielle est certainement le paramètre le plus important ; plus important que la force normale car elle intervient directement sur les valeurs des fréquences naturelles du système et sur la variable qui régit le passage entre la phase bloquée et glissante du contact. La force normale par contre ne peut intervenir qu'indirectement sur les fréquences du système en raison du modèle choisi (macroslip avec rugosité). Si un modèle de type macroslip pur était choisi, cette différence de comportement aurait été encore plus forte car la force n'intervient pas sur la raideur tangentielle. Et c'est toujours à cause du modèle de contact que la raideur normale et la rugosité peuvent avoir un effet sur la dynamique du système en changeant indirectement par leurs valeurs la valeur de la raideur tangentielle  $k_t$ . Finalement, le coefficient de frottement  $\mu$  est le paramètre qui, à égale variation en pourcentage vis à vis des autres paramètres, influence le moins la dynamique du système. On peut remarquer, que dans le cas de comportement macroslip pur, le coefficient  $\mu$  et la force normale ont la même influence alors qu'en considérant la rugosité, il a été démontré le contraire. L'analyse amenée pour ces premiers tests révèle d'abord qu'une distribution de type sinusoïdale rend la structure moins sensible au désaccordage (au moins pour les modes à basse fréquence). Une distribution aléatoire a, en revanche, un effet opposé. Le désaccordage concerne essentiellement les modes à basse fréquence puisque le mode à six diamètres présente des écarts plus faibles que ceux des cas "sin 1" et "sin 2". Dans le tableau (3.4) sont reportés les écarts en pourcentage des fréquences associées au même mode dus aux différents types de désaccordage du paramètre  $k_t$ .

En accord avec les résultats expérimentaux de Ravoux [56], les résultats, au moins d'un point de vue phénoménologique, sont concordants. La différence fondamentale concerne les valeurs très importantes des différences des fréquences expérimentalement obtenues. Si le désaccordage est dû exclusivement à la force normale, il est, au moins avec une modélisation simple comme celle proposée, très difficile d'obtenir des écarts de l'ordre de 20%. Une analyse prenant en compte une

bloqué $F_n=300$				
	sin 1	sin 2	rand 1	rand 2
mode	$\Delta f\%$	$\Delta f\%$	$\Delta f\%$	$\Delta f\%$
1D	0.0	0.4	1.2	13.4
2D	0.0	0.3	4.0	12.8
3D	0.0	0.1	2.1	12.6
4D	0.0	1.1	2.2	13.3
5D	0.7	6.4	0.3	7.7
6D	4.3	8.4	2.0	4.8

stick/slip $F_n=50$				
	sin 1	sin 2	rand 1	rand 2
mode	$\Delta f\%$	$\Delta f\%$	$\Delta f\%$	$\Delta f\%$
1D	1.2	0.0	1.2	13.8
2D	1.1	1.1	4.9	12.6
3D	0.6	0.0	2.6	11.5
4D	0.4	1.1	2.4	12.7
5D	0.0	0.0	0.0	7.9
6D	4.3	8.6	1.8	5.4

TAB. 3.4 Différences en pourcentage des fréquences en correspondance des pics d'amplitudes maximales pour le cas à  $F_n=300$  et  $F_n=50$  N- désaccordage dû à la raideur tangentielle du contact

variation de tous les paramètres simultanément (pour plusieurs cas tests) est maintenant engagée.

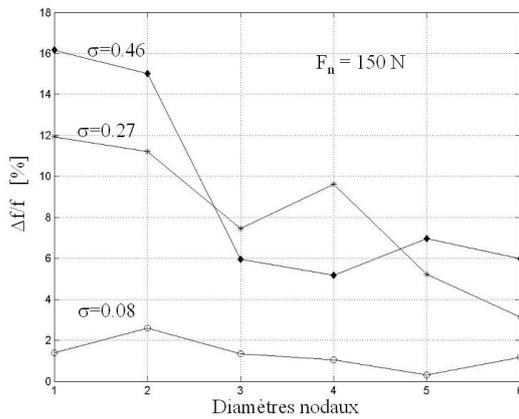
### 3.4.2 Désaccordage simultané des paramètres de contact

Afin de constater si le désaccordage simultané des paramètres amplifie ou non le dédoublement des modes, différents cas tests sont envisagés. Les paramètres, par rapport à l'étude de sensibilité précédente, sont désaccordés en même temps par l'intermédiaire de la valeur  $\epsilon$  comme défini dans l'équation (3.22). La distribution donnée aux paramètres de contact est de type aléatoire. Les valeurs de  $\epsilon$  sont listées dans le tableau (3.5) pour trois valeurs (faible, importante et très importante) de l'écart-type  $\sigma$ . L'analyse des réponses forcées pour différentes valeurs de la charge normale permet d'arriver aux conclusions suivantes.

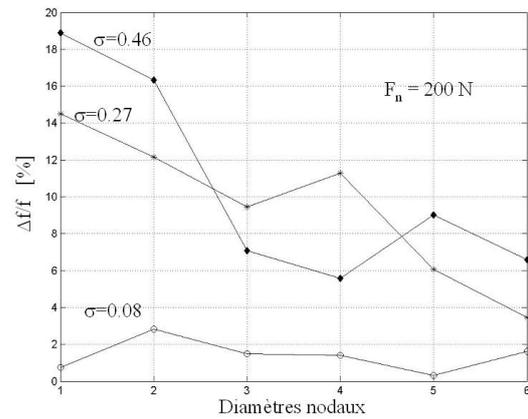
Dans la majorité des cas, avec des charges normales comprises entre 100 et 1000  $N$ , l'augmentation de l'écart type provoque une augmentation des effets du désaccordage comme il était logique prévoir. Toutefois, l'augmentation n'est pas linéaire. Un grand écart des résultats apparaît entre le premier cas et le deuxième cas alors qu'entre le deuxième cas et le troisième cas l'augmentation est très faible et ne se vérifie pas pour tous les modes (figure 3.28). Par exemple, pour les

aube	random 1 $\sigma = 0.08$	random 2 $\sigma = 0.27$	random 3 $\sigma = 0.46$
1	0.1444	0.0264	0.40286
2	-0.0351	-0.1906	0.11581
3	0.0623	-0.1679	-0.49488
4	0.0799	0.1331	0.66979
5	0.941	-0.2850	0.14475
6	-0.0992	0.2344	0.73946
7	0.0212	0.1707	0.56901
8	0.0238	-0.2465	-0.34207
9	-0.1008	-0.0797	-0.64597
10	-0.0742	-0.3563	-0.036463
11	0.1082	-0.6607	-0.1653
12	-0.0131	0.2959	-0.42181
13	0.0390	-0.1556	0.24888

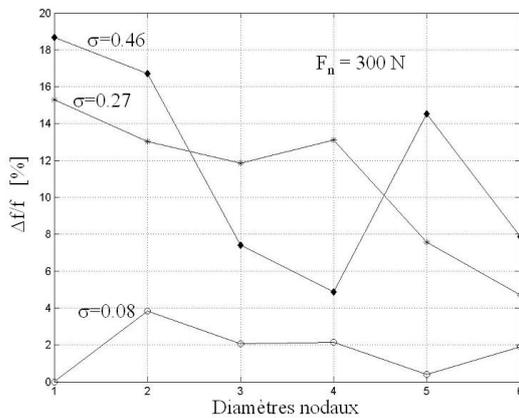
TAB. 3.5 Valeurs du paramètre  $\epsilon$  pour les trois distributions standards considérées



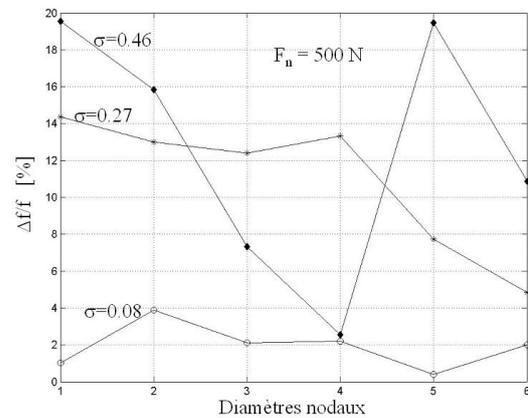
(a) Force normale de 150 N



(b) Force normale de 200 N



(c) Force normale de 300 N

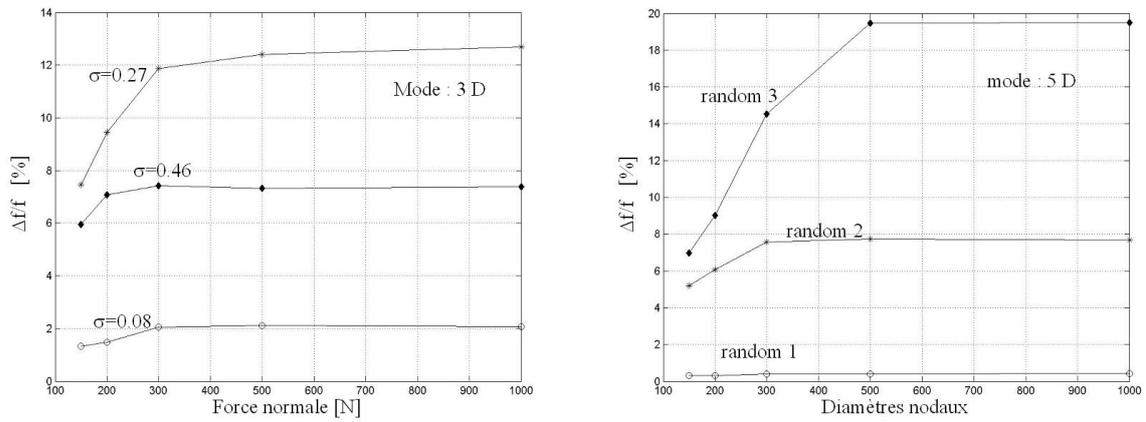


(d) Force normale de 500 N

FIG. 3.28 Variations en pourcentage des fréquences en fonction des diamètres nodaux pour les trois configurations random 1 random 2 et random 3

forces normales sélectionnées, le troisième et quatrième mode sont généralement plus désaccordés dans la deuxième configuration que dans la troisième configuration. De plus un désaccordage très important comme celui du troisième cas peut amener à un dédoublement des modes qui, parfois peut être comparable à celui causé par un très faible désaccordage. Dans le cas d'une force normale de 500 N, le mode de quatrième diamètre est autant désaccordé dans le premier que dans le troisième cas.

Numériquement on peut obtenir un dédoublement de l'ordre de 20% seulement si la structure est fortement désaccordée avec des valeurs d'écart type de l'ordre de 0.3. De plus, en augmentant la charge normale au contact, l'écart en pourcentage entre les fréquences augmente aussi



(a) Troisième diamètre nodal

(b) Cinquième diamètre nodal

FIG. 3.29 Variations en pourcentage des fréquences en fonction de la charge normale pour les trois configurations random 1 random 2 et random 3

comme montré en figure (3.29) pour le troisième et cinquième mode. Deux autres cas sont donc étudiés afin d'évaluer si ce comportement reflète un caractère général ou non. Deux nouvelles dis-

aube	random 4 $\sigma = 0.30$	random 5 $\sigma = 0.30$
1	0.09821	-0.40478
2	0.070217	-0.07833
3	0.0064398	0.28604
4	0.5	0.038593
5	-0.28414	0.19694
6	-0.11233	-0.35035
7	-0.35577	-0.13818
8	-0.31677	-0.078732
9	0.44174	-0.36395
10	0.016723	-0.39583
11	-0.3652	0.27937
12	0.2	0.53
13	-0.3385	-0.19354

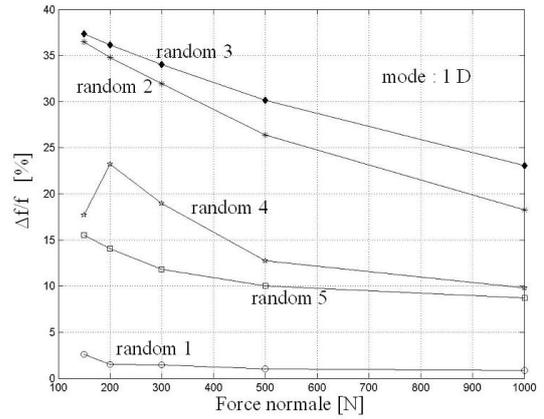
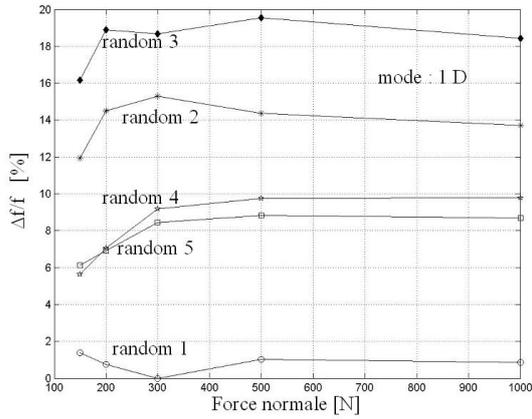
TAB. 3.6 Valeur du paramètres  $\epsilon$  pour les deux distributions standard considérées

tributions dénommées random 4 et random 5 sont définies pour une même valeur de l'écart type  $\sigma$ . Les valeurs de  $\epsilon$  pour les autres deux cas avec un écart type de  $\sigma = 0.30$  sont reportées en tableau 3.6. Les évolutions des fréquences en fonction de la charge normale pour chacune des distributions choisies sont présentées pour les modes à 1, 3 et 5 diamètres figure (3.30 (a-c-e)). L'étude conduite montre que ce comportement a une validité générale. Toutefois, en réalité, cela dépend exclusivement de la façon qui est choisie de considérer la variation des paramètres. En effet il est imposé à toutes les paramètres de varier de la même façon  $(1+\epsilon)$ . Quand on impose une variation  $\epsilon > 0$ , la raideur augmente, mais également tous les autres paramètres augmentent. Il a été montré précédemment que, dans le cas bloqué, exception faite pour la raideur tangentielle  $k_t$ , parmi les paramètres de contact, seule la force normale joue un rôle primordial dans le désaccordage. Son augmentation provoque une augmentation significative de la raideur tangentielle en raison de l'élément de contact choisi. Par conséquent, dans le cas bloqué le désaccordage est, en règle générale, très important car les deux paramètres (force normale et raideur tangentielle) ont le même effet. Dans le cas stick/slip, il convient de prendre en compte aussi l'augmentation de la raideur normale au contact et de la rugosité. Contrairement à la force normale, ces deux paramètres baissent la valeur de la raideur tangentielle. Par suite, le désaccordage à parité de  $\epsilon$  introduit, dans le cas stick /slip (c'est à dire pour des valeurs plus faibles que la charge normale) a un effet moindre. Dans le but de vérifier qu'il s'agit de l'influence de la raideur normale et de la rugosité, à la place de considérer une variation de type  $(1+\epsilon)$ , une variation de type  $(1-\epsilon)$  est fixée pour les paramètres  $k_n$  et  $R_z$ . L'expérience pour les cinq conditions aléatoires est reconduite pour une variation de la raideur normale et de la rugosité du type :

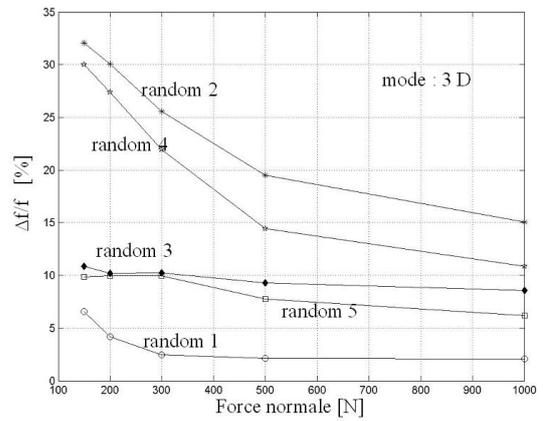
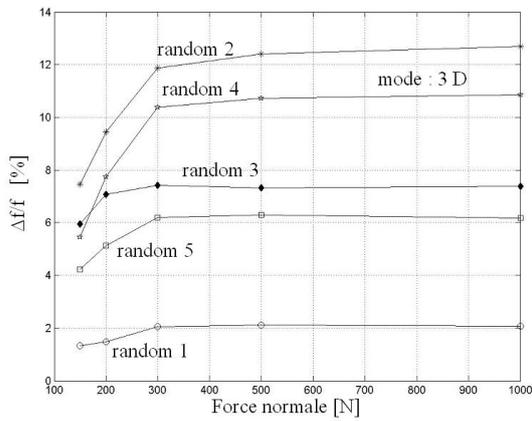
$$var_i = \bar{var}_i \cdot (1 - \epsilon) \quad (3.23)$$

Les résultats graphiques correspondant sont donnés figure (3.30 (b-d-f)). Les graphiques présentent la confrontation pour les modes de premier, troisième et cinquième diamètres entre les deux différents types d'essais et pour les cinq configurations aléatoires choisies. Dans le second cas (graphiques de droite), la variation en pourcentage des fréquences augmente en fonction de la diminution de la valeur de la charge normale alors que, dans le cas précédent (graphiques de gauche), un comportement opposé avait été trouvé.

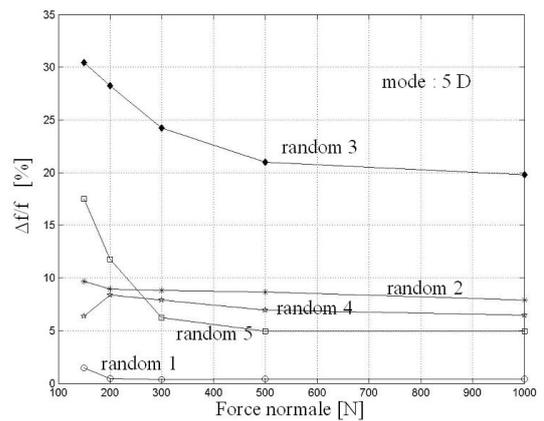
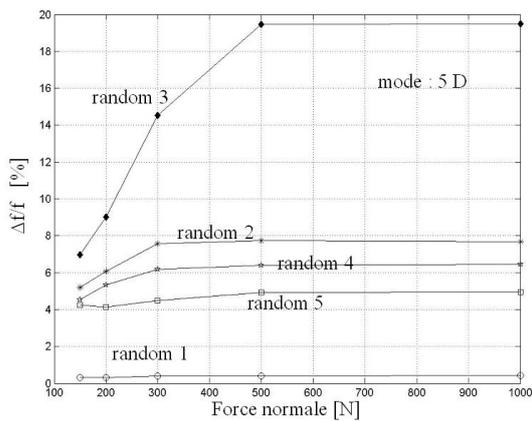
Un autre aspect qui confirme l'hypothèse est représenté par le fait que, pour des valeurs élevées de la charge normale ( $F_n = 1000 N$ ), les deux types d'approche donnent les mêmes valeurs de désaccordage, montrant clairement qu'avec cet état du contact, la raideur normale et la rugosité n'ont aucune influence. Une autre observation concerne les cas test random 3 - 4 - 5 qui



(a) 1 diamètre :  $k_n$  et  $R_z$  du type  $var_i = \bar{v}ar_i \cdot (1 + \epsilon)$  (b) 1 diamètre :  $k_n$  et  $R_z$  du type  $var_i = \bar{v}ar_i \cdot (1 - \epsilon)$



(c) 3 diamètre :  $k_n$  et  $R_z$  du type  $var_i = \bar{v}ar_i \cdot (1 + \epsilon)$  (d) 3 diamètre :  $k_n$  et  $R_z$  du type  $var_i = \bar{v}ar_i \cdot (1 - \epsilon)$



(e) 5 diamètre :  $k_n$  et  $R_z$  du type  $var_i = \bar{v}ar_i \cdot (1 + \epsilon)$  (f) 5 diamètre :  $k_n$  et  $R_z$  du type  $var_i = \bar{v}ar_i \cdot (1 - \epsilon)$

FIG. 3.30 Variations en pourcentage des fréquences en fonction de la charge normale pour les cinq configurations avec une variation de la  $k_n$  et  $R_z$  de type  $(1+\epsilon)$  pour les graphiques de gauche et  $(1-\epsilon)$  pour les graphiques de droite

présentent une distribution ayant la même valeur d'écart type ( $\sigma = 0.3$ ). Les réponses forcées calculées associées, sont très différentes entre elles et, en général, random 2 est la configuration qui crée le désaccordage le plus important, suivie par la configuration random 4 et random 5. Les différences, au niveau des variations des fréquences, sont considérables surtout pour les modes à faibles diamètres nodaux, pour lesquels la configuration random 2 peut causer une variation trois fois plus importante que la configuration random 5. En revanche, pour les modes à haute fréquence, le comportement est beaucoup plus homogène. En effet, les modes 5 et 6 diamètres, sont caractérisées par des valeurs absolues beaucoup plus importantes que les modes à un ou deux diamètres, avec des différences de 30 ou 40 Hz entre les deux pics. Cependant si on considère la variation en pourcentage, celle-ci est beaucoup plus faible à cause de la valeur élevée des fréquences.

### 3.4.3 Conclusions

Ravoux [56] a obtenu un effet de dédoublement des modes en fonction du désaccordage de la force normale, qui diminue en fonction de l'accroissement de la force normale. Numériquement, même si la modélisation de la structure réelle reste très simplifiée, le même type de comportement a été trouvé. Par contre, les niveaux d'écarts de fréquences du même mode obtenus numériquement sont beaucoup plus faibles ( $(\Delta f/f)_{num} \approx 0.07$  contre  $(\Delta f/f)_{exp} \approx 0.20$  obtenu expérimentalement). Ces valeurs de dédoublement des fréquences ne peuvent être obtenues que dans le cas où le désaccordage concerne tous les paramètres de contact et avec un valeur d'écart type très importante de l'ordre  $\sigma = 0.3 - 0.5\%$ , conditions qui s'éloignent bien trop du cas réel. En effet dans le cas expérimental, d'autres paramètres liés à la mise en charge peuvent avoir une influence relativement importante sur le désaccordage. Par exemple, les conditions aux limites (encastrement) sont réalisées grâce à des vis qui, pendant la mise en charge, doivent être légèrement dévissées afin de permettre la rotation de l'aube. De cette façon, la raideur du système change et un désaccordage supplémentaire est introduit dans la structure. De plus, le disque a été numériquement considéré infiniment rigide, alors que dans le cas réel, la valeur de la raideur entre les aubes est finie. Par conséquent, les aubes doivent être reliées entre elles par un ressort dont la valeur peut aussi varier autour d'une valeur moyenne. Pour ces raisons, le modèle numérique utilisé ne peut conduire à un dédoublement des modes aussi important que dans le cas expérimental.

L'analyse du désaccordage ne concerne pas uniquement le phénomène de dédoublement des modes. La concentration des vibrations et les facteurs d'amplification des amplitudes se doivent d'être considérés dans la suite de l'étude, pour le même système à un degré de liberté par aube. Les mêmes cas du désaccordage sont ainsi utilisés de façon telle à mettre en évidence les principales

conséquences.

## 3.5 Système à symétrie cyclique désaccordé - Excitation Ordre Moteur

### 3.5.1 Sensibilité au désaccordage des facteurs d'amplitude

Les quatre configurations utilisées précédemment (sin 1, sin 2, rand 1, rand 2) pour l'étude de la sensibilité du dédoublement des modes sont ici considérées pour l'analyse du facteur d'amplification (rapport de la vibration maximale entre le cas désaccordé et le cas accordé). La variation de chaque paramètre est donnée par  $var_i = v\bar{a}r_i(1 + \epsilon)$  avec  $\epsilon$  défini dans le tableau (3.1). Les trois cas bloqué, stick/slip à majorité bloqué et à majorité glissante sont considérés. La réponse forcée du système accordé, dans le cas d'une excitation de  $F_{ex} = 3\text{ N}$ , est reportée figure (3.31), pour différentes valeurs de la charge normale. Les paramètres de contact sont maintenus constants par rapport aux cas précédemment considérés.

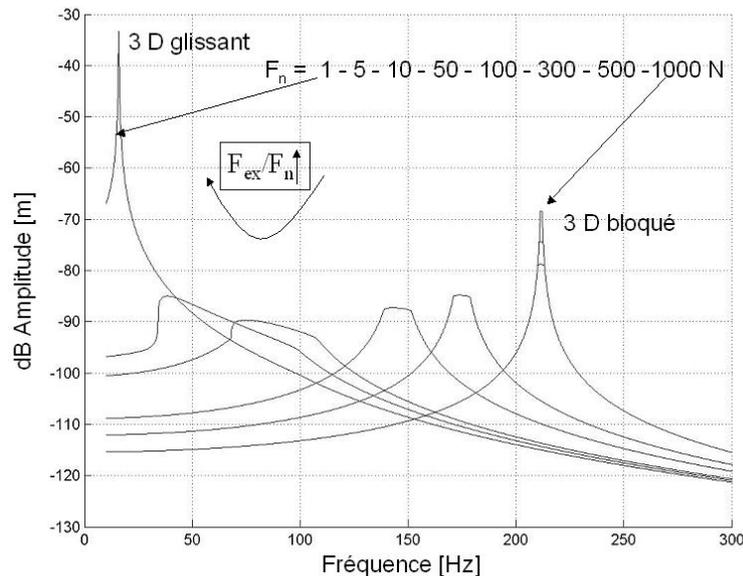


FIG. 3.31 Amplitudes de vibrations dans le cas accordé pour différentes valeurs de la charge normale : excitation  $3EO$

*Cas bloqué*

La valeur de la force normale  $F_n$  choisie pour représenter le contact complètement bloqué vaut  $1000\text{ N}$ . Puisque cette valeur est nettement supérieure à la charge limite ( $300\text{ N}$ ), le modèle macroslip modifié par la rugosité a les mêmes caractéristiques que le modèle Masing "pur". L'influence de chaque paramètre de contact est analysée par la suite :

- $k_n, R_z$  - Dans ces conditions ( $F_n$  élevé très supérieure à la charge limite), la rugosité et la raideur normale au contact n'ont aucun influence sur les amplitudes. Par conséquent les degrés de liberté conservent le même type de vibration par rapport au cas accordé.

- $\mu, F_n$  - Une modification du coefficient de frottement ou de la force normale cause exactement la même conséquence sur la dynamique du système, car le comportement du contact est, en première approximation, de type macroslip "pur". En figure (3.32), les valeurs de la différence exprimée en pour-cent de l'amplitude de chaque aube par rapport à la valeur du cas accordé sont reportées. Une diminution de l'amplitude comprise entre 7 et 25% est observée pour les premier trois tests (sin 1 - sin 2 - rand 1). Malgré cette importante variation d'amplitude par rapport au cas accordé, la différence d'amplitude entre les aubes désaccordées est très petite et les niveaux des

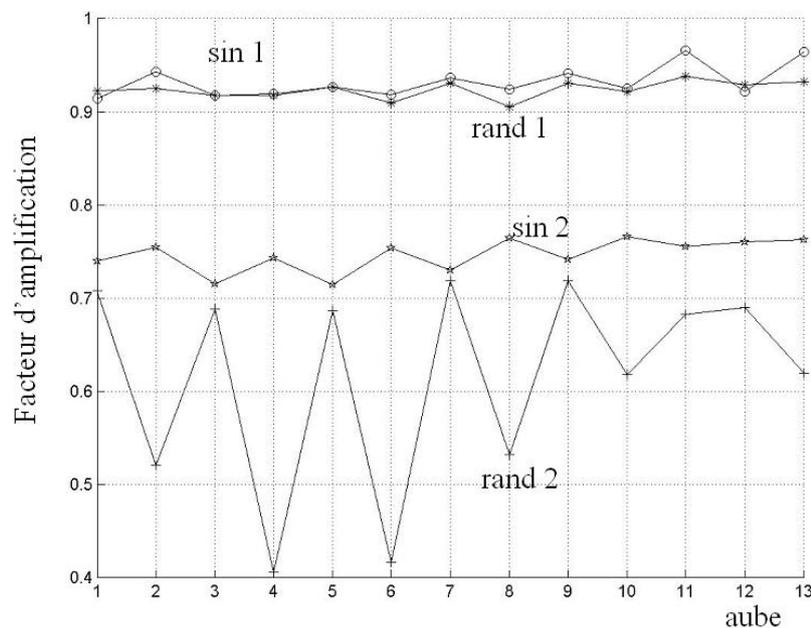


FIG. 3.32 Facteur d'amplification pour les quatre cas tests en désaccordant  $\mu$  ou  $F_n$

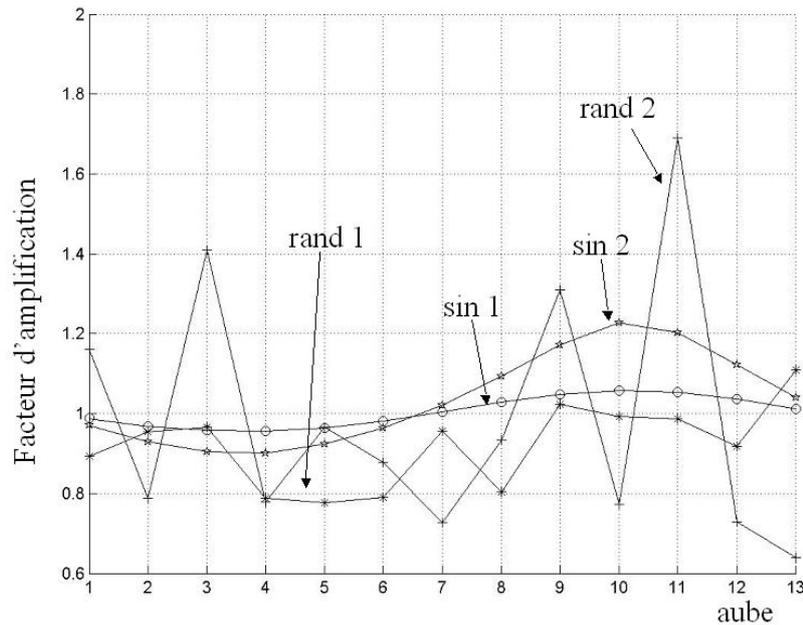


FIG. 3.33 Facteur d'amplification pour les quatre cas tests en désaccordant  $k_t$

vibrations ne varient pas beaucoup entre elles. Pour le dernier cas test (rand 2 - figure (3.32)), en revanche non seulement les niveaux des amplitudes sont plus faibles par rapport au cas accordé, mais en plus les vibrations entre les aubes varient d'une façon relativement importante. Dans le cas testé (rand 2), les aubes 2-4-6-8 ont des amplitudes plus faibles avec des vibrations qui, par conséquent, se concentrent sur les autres aubes. Les axes nodaux qui, dans le cas accordé, tournent avec l'excitation, restent ainsi bloqués au niveau des degrés de liberté ayant les déplacements plus faibles.

- $k_t$  - Dans ce cas, le facteur d'amplification peut atteindre la valeur de 1.7 (figure 3.33). Mais, à la différence des paramètres  $\mu$  et  $F_n$ , la raideur tangentielle peut en même temps intervenir aussi sur le dédoublement des pics. Les deux réponses forcées obtenues pour le test rand2 sont illustrées en figure (3.34) et (3.35). Elles montrent clairement que au niveau de la résonance du mode 3 diamètre, dans le premier cas (désaccordage de  $\mu$  - figure (3.34)) seul la différence des amplitudes des degrés de liberté caractérise la réponse forcée, alors que dans le deuxième cas (désaccordage de  $k_t$  - figure (3.35)) les pics sont aussi dédoublés. Tout cela reste valide si l'analyse se limite aux alentours de la fréquence de résonance du cas complètement bloqué. De plus, si la bande fréquentielle est étendue à des valeurs comprises entre 10 et 400 Hz, il est constaté que le désaccordage de la

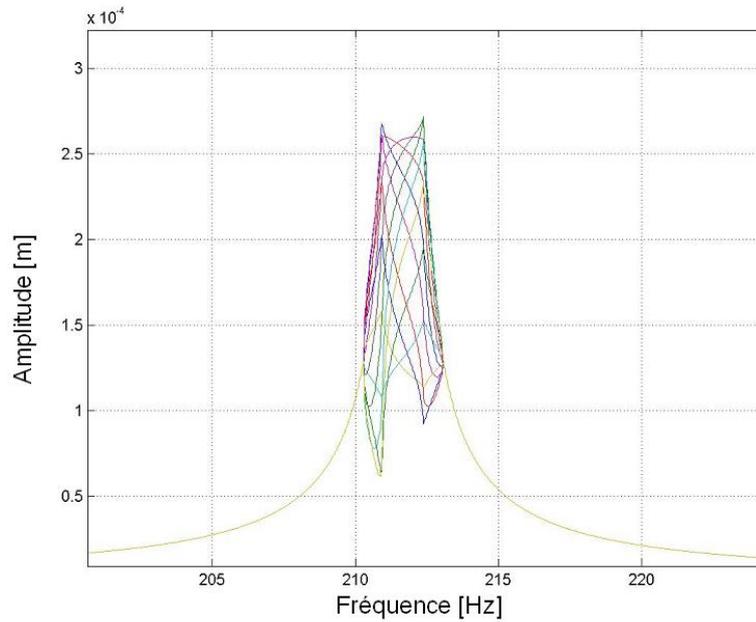


FIG. 3.34 Réponses forcées pour les treize aubes en présence du désaccordage du coefficient de frottement -rand 2

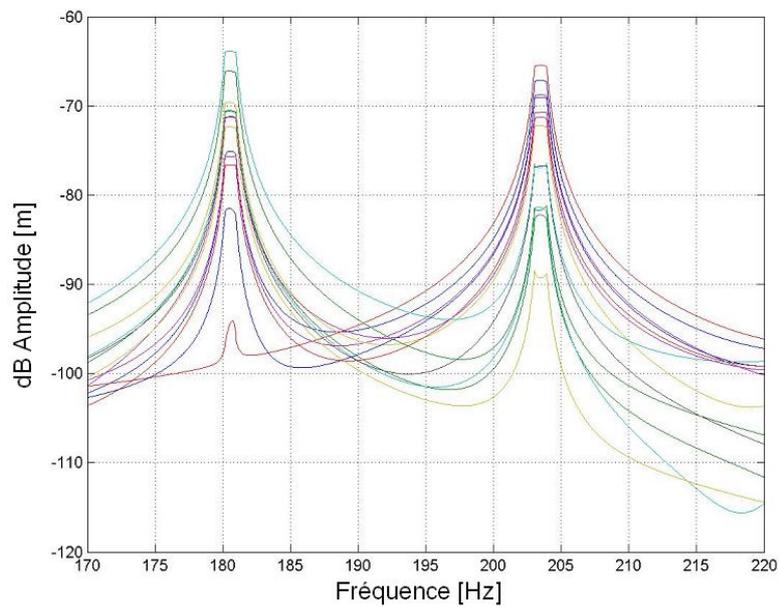


FIG. 3.35 Réponses forcées pour les treize aubes en présence du désaccordage de la raideur de contact tangentielle - rand2

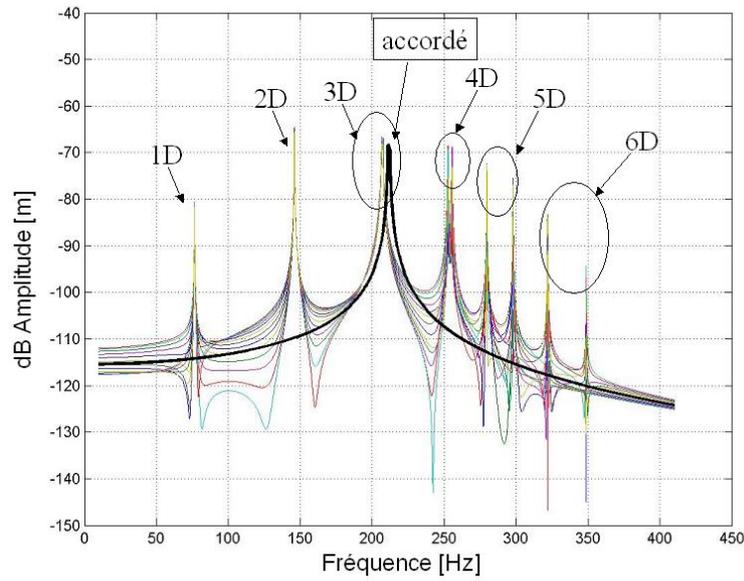


FIG. 3.36 Réponses forcées pour les treize aubes en présence du désaccordage de la raideur de contact tangentielle - cas  $\sin^2$

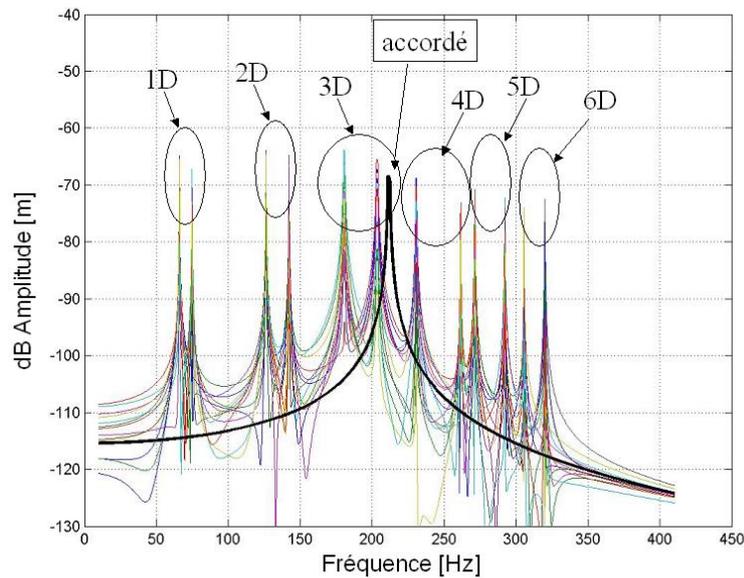


FIG. 3.37 Réponses forcées pour les treize aubes en présence du désaccordage de la raideur de contact tangentielle - cas  $\text{rand}^2$

	$k_n$	$R_z$	$\mu$	$F_n$	$k_t$
Facteurs d'amplitude (max-min)	1.0-1.0	1.0-1.0	0.7-0.4	0.7-0.4	1.7-0.6
Concentration des vibrations	NON	NON	OUI	OUI	OUI

TAB. 3.7 Facteurs d'amplifications maximaux et minimaux et concentration de vibrations pour les cas tests rand 2

seule raideur tangentielle déclenche un type de comportement pour lequel tous les modes peuvent être excités par une simple excitation de type Ordre Moteur. En figure (3.36) et (3.37) sont reportées les réponses fréquentielles pour les cas accordés et désaccordés (cas sin2 - rand2). En conclusion, en présence de désaccordage, exciter la structure avec des fréquences lointaines de la fréquences naturelles n'est pas toujours une bonne solution et les amplitudes de vibrations peuvent être aussi élevées qu'à la fréquence de résonance. Ce phénomène est indépendant du type de variation sinusoïdale ou aléatoire des paramètres désaccordés.

Afin de mieux mettre en évidence les paramètres les plus influents pendant la phase bloquée, on a reporté les valeurs des facteurs d'amplitude dans le tableau (3.7) ainsi que la présence (indiquée par "OUI") ou non (indiquée avec "NON") des concentrations des vibrations.

#### *Cas Stick/slip à majorité bloquée*

Dans ce cas, la force normale (100 N) est plus petite que la charge limite (300 N). On considère, par la suite, l'influence des paramètres de contact :

- $k_n, R_z$  - Par rapport au cas précédent, la rugosité et la raideur normale ont une influence non négligeable sur les valeurs de la raideur tangentielle ( $\pm 30\%$  figure 3.38). Le désaccordage amené à la structure reste par conséquent assez faible et en effet, le mode d'excitation (3 diamètre) garde une forme à symétrie cyclique avec les diamètres nodaux qui tournent avec la force d'excitation, et la vibration n'est pas concentrée.

- $\mu$  - Le désaccordage du paramètre  $\mu$  pour le cas rand 2, crée des variations d'amplitudes qui vont de +10% jusqu'à -60% (figure 3.39), annulant de cette façon la rotation des axes nodaux pour le mode à trois diamètre. Le seul effet du coefficient de frottement est donc lié aux différences d'amplitudes entre les aubes comme montré en figure (3.40). Aucun dédoublement des modes n'est observé.

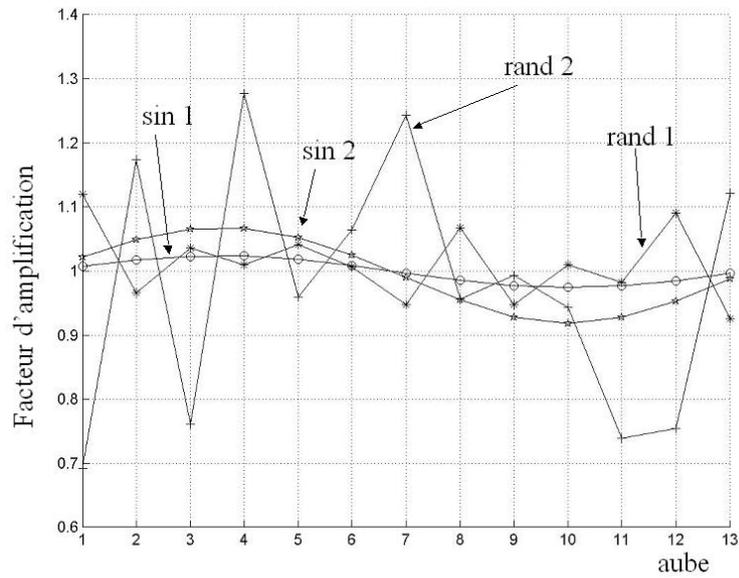


FIG. 3.38 Réponse forcée maximale en présence du désaccordage dû à la rugosité dans le cas stick /slip à majorité bloquée

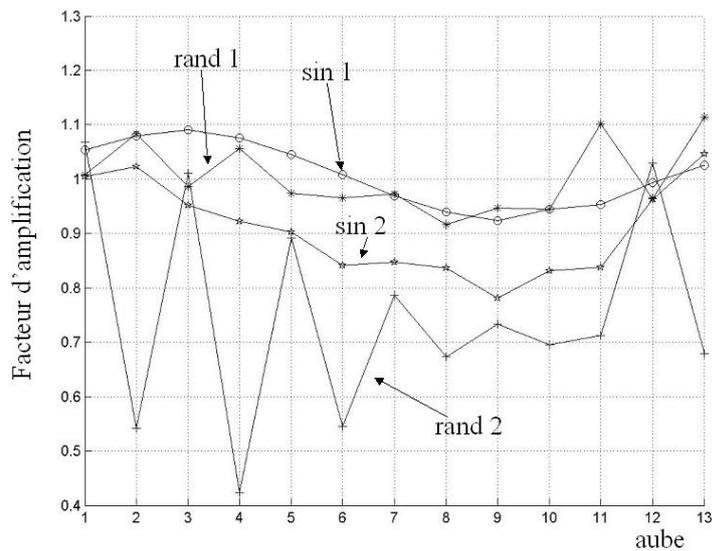


FIG. 3.39 Réponse forcée maximale en présence du désaccordage dû à  $\mu$  dans le cas stick /slip à majorité bloquée

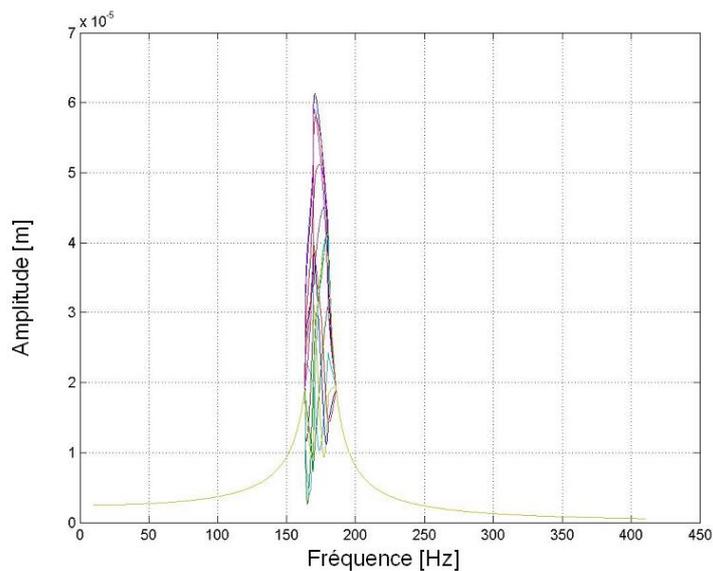


FIG. 3.40 Réponses forcées pour les treize aubes en présence du désaccordage du coefficient de frottement en correspondance d'un état stick/slip du contact à majorité bloquée

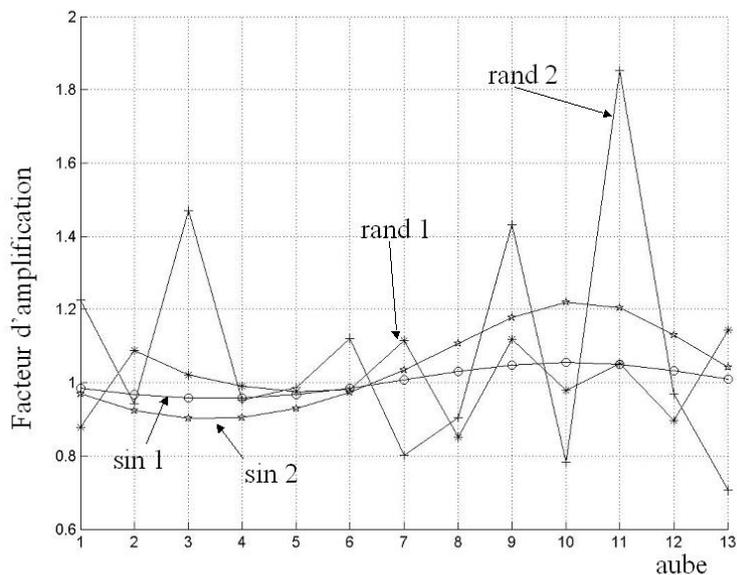


FIG. 3.41 Réponse forcée maximale en présence du désaccordage dû à la raideur tangentielle dans le cas stick /slip à majorité bloquée

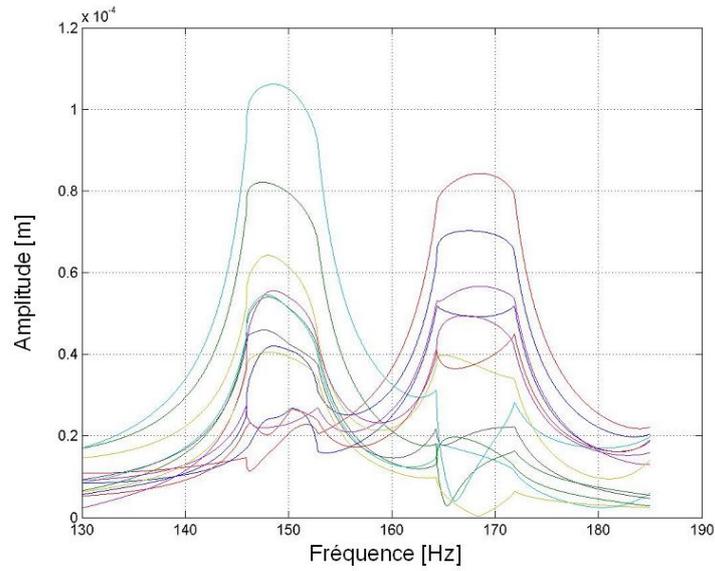


FIG. 3.42 Réponses forcées pour les treize aubes en présence du désaccordage de la raideur tangentielle en correspondance d'un état stick/slip du contact à majorité bloquée

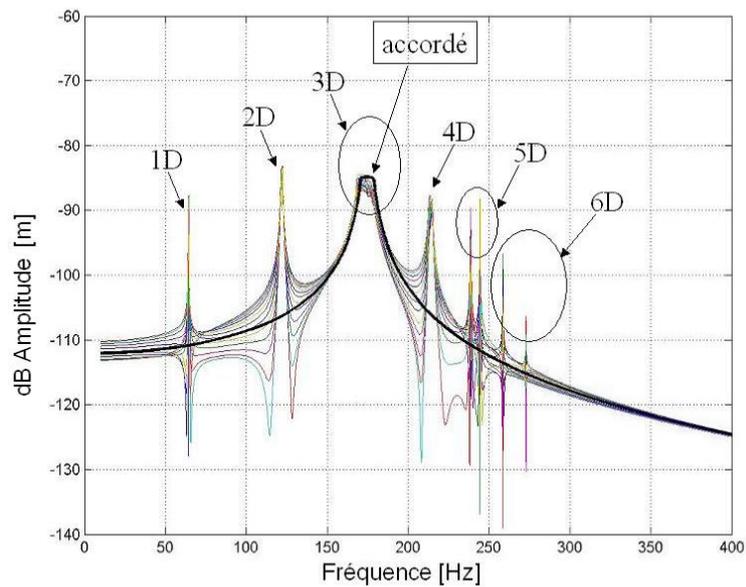


FIG. 3.43 Réponses forcées pour les treize aubes en présence du désaccordage de la force normale - cas sin2

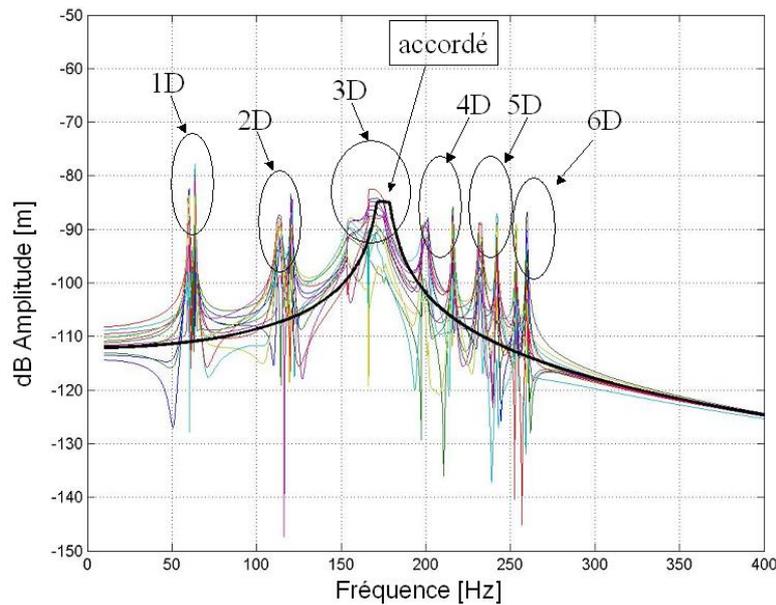


FIG. 3.44 Réponses forcées pour les treize aubes en présence du désaccordage de la force normale - cas rand2

	$k_n$	$R_z$	$\mu$	$F_n$	$k_t$
Facteur d'amplitude (max-min)	1.2-0.7	1.2-0.7	1.1-0.4	1.7-0.7	1.7-0.7
Concentration des vibrations	NON	NON	OUI	OUI	OUI

TAB. 3.8 Facteurs d'amplifications maximaux et minimaux et concentration de vibrations pour le cas test rand 2

•  $F_n, k_t$  - La valeur de la charge normale et de la raideur tangentielle provoquant des variations d'amplitude de l'ordre de 70 – 80% (figure 3.41) ont comme effet principal (tout comme  $\mu$ ) de concentrer la vibration sur une forme donnée de mode : les axes nodaux ne tournent pas avec l'excitation. La grande différence par rapport au coefficient de frottement reste le dédoublement qui peut caractériser non seulement le mode correspondant à l'Ordre Moteur de l'excitation, (figure 3.42), mais aussi les autres modes comme montré en figure (3.43) pour le désaccordage de la force normale dans le cas test sin 2, ou en figure (3.44) pour le cas test rand 2. En tableau (3.8) les valeurs obtenues pour la cas de désaccordage maximale (rand 2) sont résumées.

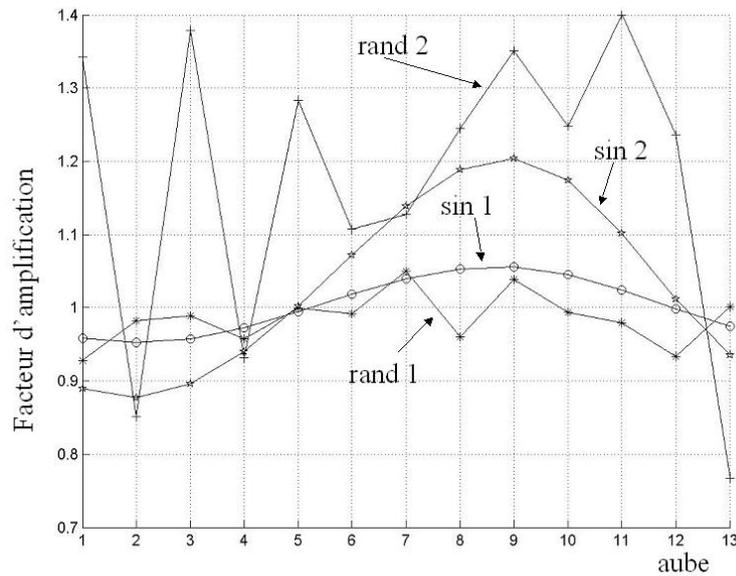


FIG. 3.45 Facteur d'amplification en présence du désaccordage dû à la raideur tangentielle dans le cas stick /slip à majorité glissante

#### *Cas stick/slip à majorité glissante*

La charge normale prend une valeur de  $5 N$ .

- $k_t, R_z, k_n$  - En présence d'un état du contact à majorité glissante, la raideur tangentielle ne joue en généralement pas un rôle fondamental dans la dynamique du système. Par conséquent, une variation de sa valeur, par désaccordage, a une influence très faible sur la dynamique du système (figure 3.45). De même les variations de la rugosité et de la raideur normale ont le même rôle mais encore moins accentué (figure 3.46).

- $\mu, F_n$  - A proximité d'un état glissant, un faible désaccordage soit de type sinusoidal (sin 1) est suffisant pour créer des facteurs d'amplitude de l'ordre de  $\pm 5 - 20\%$  (figure 3.47). Si par contre le désaccordage augmente et le cas test sin 2 est considéré, les réponses forcées et la dynamique du système subissent un changement brutal (figure 3.48). L'animation du mode à environ  $30 Hz$ , dans le cas du cas test sin 2, par exemple, montre clairement que la répartition de la vibration n'est caractéristique d'aucun mode propre. Les réponses forcées complètement désaccordées montrent en effet des pics d'amplitudes qui ne correspondent plus aux modes "classiques" de la structure mais plutôt à des modes associés à des vibrations par paquets ; certain(s) degré(s) ou secteur(s) de la structure vibrent pour forme modales différentes ; il en résulte que chaque partie

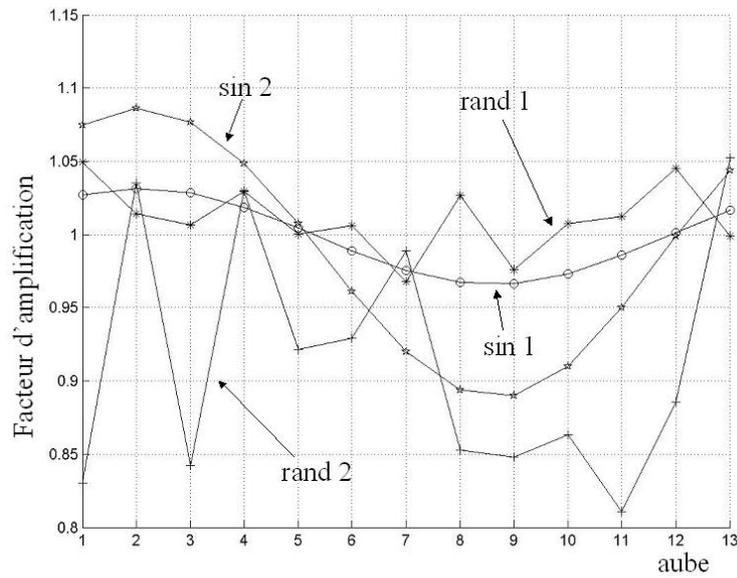


FIG. 3.46 Facteur d'amplification en présence du désaccordage dû à la rugosité dans le cas stick /slip à majorité glissante

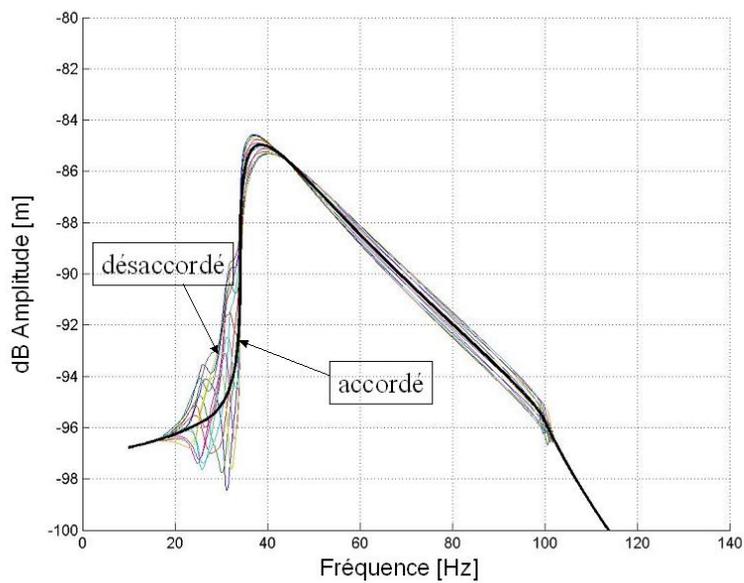


FIG. 3.47 Réponses forcées pour les treize aubes en présence du désaccordage de  $\mu$  - cas sin1

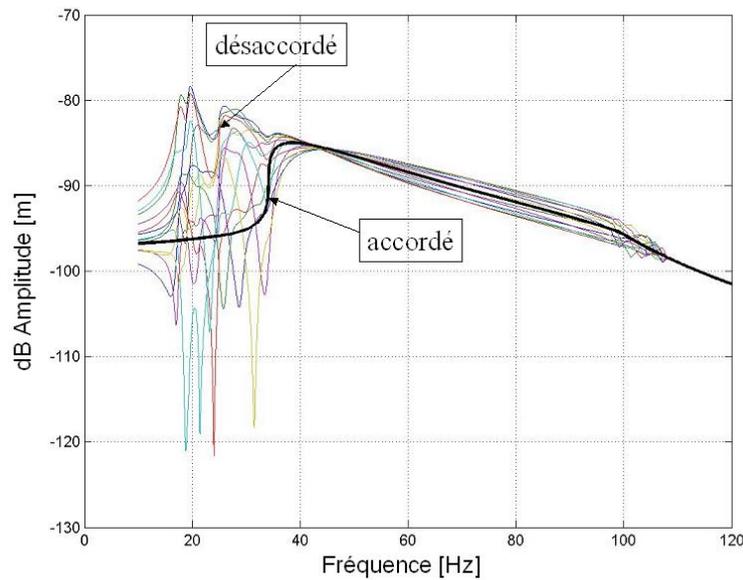


FIG. 3.48 Réponses forcées pour les treize aubes en présence du désaccordage de  $\mu$  - cas  $\sin^2$

	$k_n$	$R_z$	$\mu$	$F_n$	$k_t$
Facteur d'amplitude (max-min)	1.1-0.85	1.1-0.85	?	?	1.4-0.7
Concentration des vibrations et/ou par paquet	NON	NON	OUI	OUI	NON

TAB. 3.9 Facteurs d'amplifications maximaux et minimaux et concentration de vibrations pour les cas test rand 2

de la structure cyclique semble être indépendante des autres. La variation des amplitudes est alors énormes par rapport au cas accordé mais cette comparaison numérique n'a pas de sens physique à proprement parlé car elle s'appuie sur des modes de nature différente. Cette façon de vibrer "par paquet" est observable aussi dans le cas rand 2 et ne semble donc, pas dépendre de la façon de désaccorder la structure.

En tableau (3.9) les valeurs des facteurs d'amplitude maximales et minimales ont été reportées autre que la possibilité des modes excités de présenter une vibration concentrée ou "par paquet".

### Conclusion

L'importance de chaque paramètre dépend fortement de l'état de contact des frotteurs. Dans le cas fortement bloqué, les paramètres de contact dont la variation permet une dynamique désaccordée de la structure, sont représentés par la raideur de contact tangentielle, le coefficient de frottement et la force normale. Les amplitudes des degrés de liberté peuvent varier jusqu'à 80% dans le cas test rand2; pour les autres cas, les valeurs de l'écart type sont de plus faible intensité (15%) indépendamment de la forme du désaccordage (sinusoïdale ou aléatoire). Les modes résultants sont caractérisés par des vibrations concentrées de la structure, puisque les diamètres nodaux sont fixes, et ne tournent plus avec l'excitation. Les vibrations sont donc localisées sur quelque(s) degré(s) de liberté. Pour un contact stick/slip à majorité bloquée, le rôle de la rugosité et de la raideur normale au contact ne sont plus négligeables et leur influence peut amener des variations de l'ordre de 30% par rapport aux valeurs accordées. Le coefficient de frottement, par contre, ne permet une variation d'amplitude maximale de seulement 10% mais, de même que dans le cas bloqué, favorise la concentration des vibrations. Cette concentration des modes est encore plus évidente dans le cas du désaccordage de la force normale et de la raideur tangentielle avec des facteurs d'amplitudes de l'ordre de 80%. Seulement de paire à un état à majorité glissante, le désaccordage de  $k_t$  (comme celui de  $R_z$  et de  $k_n$ ) a une influence négligeable par rapport aux amplitudes. Dans ce cas seulement, le coefficient de frottement sec et la force normale ont un effet important sur la variation des amplitudes indépendamment du type de désaccordage. Les vibrations des aubes se disposent "par paquet", pour laquelle la dynamique d'ensemble de la structure résulte être partagée en secteur indépendants. Il est important maintenant de vérifier si ces caractéristiques restent inchangées dans le cas du désaccordage simultané des paramètres.

### 3.5.2 Désaccordage simultané des paramètres de contact

Tous les cinq paramètres de contact ( $\mu$ ,  $F_n$ ,  $R_z$ ,  $k_n$ ,  $k_t$ ) ont été désaccordé en même temps. Dans un premier temps, le cas test rand 1 est envisagé avec une force normale au contact qui varie nominalelement entre 500 à 30 N (figure 3.49). Pour des valeurs décroissantes de la force normale, l'influence du désaccordage devient de plus en plus conséquente. En effet, liées à des contact stick/slip à majorité bloquée, les variations des paramètres ne permettent pas, d'obtenir un état très différent par rapport au contact nominal. Les différences d'amplitudes sont faibles. Le cas stick/slip à majorité glissante a des effet différents. De faibles variations des paramètres de contact peuvent amener la structure à avoir un comportement complément glissant caractérisé par des valeurs d'amplitudes très différentes. Par conséquent, la structure est influencée davantage par le désaccordage

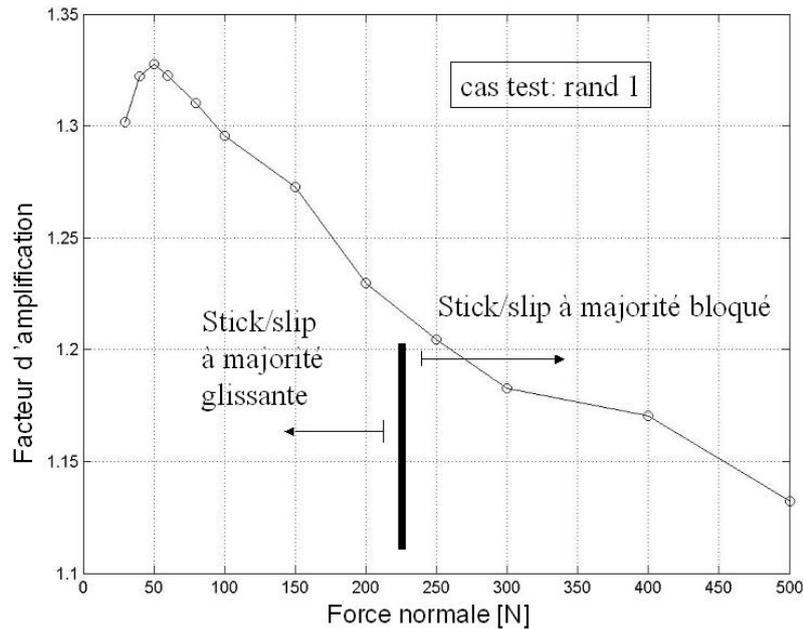


FIG. 3.49 Facteur d'amplification en fonction de la force normale pour le cas test rand 1

et la valeur du facteur d'amplification augmente.

Le même approche est répétée pour les distributions du paramètre  $\epsilon$  des cas tests sin 2, rand 1 et rand2. Aucune différence comportementale n'est observée (figure 3.50). Par rapport aux cas stick/slip, une variation faible des facteurs d'amplification est décelable. La valeur constante change entre les différents essais et il semble qu'aucune relation existe entre cette valeur et l'ordre du désaccordage. A une augmentation de l'écart type ne correspond pas forcément une augmentation du facteur d'amplification. Le cas test rand 1 cause en effet un facteur d'amplification plus important que celui calculé pour le cas rand 2. Pour des configurations de l'état stick/slip à majorité glissante, une augmentation due à la proximité du cas complètement glissant (pouvant engendrer des amplitudes très élevées) est retrouvée comme auparavant. Par exemple pour valeurs de la force normale au contact de 5 N et pour le désaccordage de type sin2 la distribution des vibrations "par paquet" est retrouvé (figure 3.51). Le comportement vibratoire de la structure présente des secteurs qui semblent avoir une dynamique complètement indépendante des secteurs attenants. De plus, les amplitudes sont très concentrées sur quelque(s) secteur(s) alors que les autres ont un mouvement d'ensemble très modeste. Il est donc souhaitable d'avoir un fonctionnement de la structure loin de

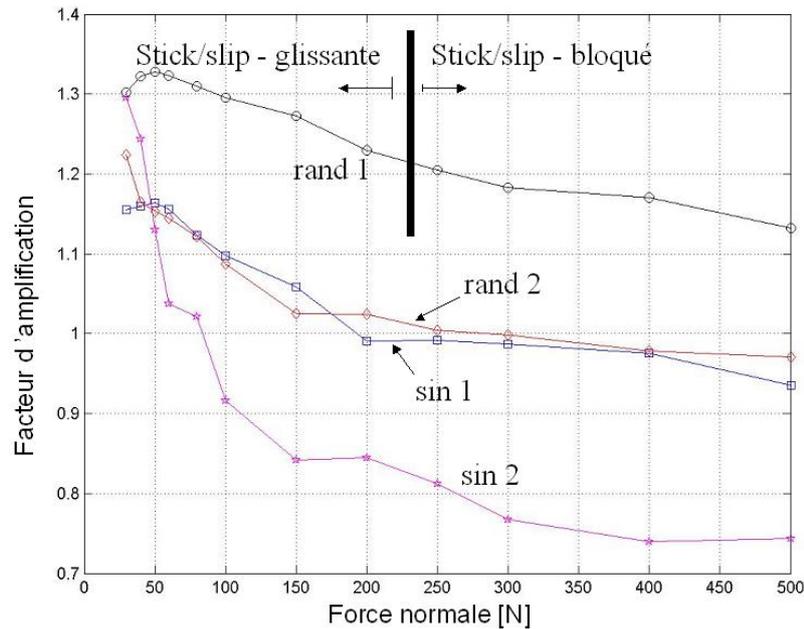


FIG. 3.50 Facteur d'amplification en fonction de la force normale pour les quatre cas test

ces conditions de contact stick/slip qui sont plus influencées par le désaccordage et en correspondance duquel un comportement engendrant de fortes amplitudes concentrées à quelque secteur peut avoir lieu.

### 3.5.3 Conclusions

En ce qui concerne le facteur d'amplification et la concentration des vibrations des modes, l'influence de chaque paramètre dépend fortement de l'état des contacts. Pour des cas complètement bloqués et à majorité glissante, la rugosité et la raideur normale ne jouent pas un rôle fondamental. La raideur tangentielle, par contre, voit son importance diminuer pour des états de contact qui évoluent vers des configurations glissantes. Le coefficient de frottement et la force normale ont, en première approximation, le même rôle pour toutes les configurations des contacts analysées. Une importante conclusion de l'étude paramétrique montre qu'à proximité d'états à majorité glissante, et dans le cas du désaccordage du coefficient de frottement  $\mu$  et de la force normale  $F_n$ , la dynamique globale du système est fortement modifiée non seulement par rapport au cas accordé mais aussi par rapport au désaccordage classique obtenu pour les autres configurations de contact. En particulier, le comportement dynamique des aubes se restructure par zones ("paquets") à première vue

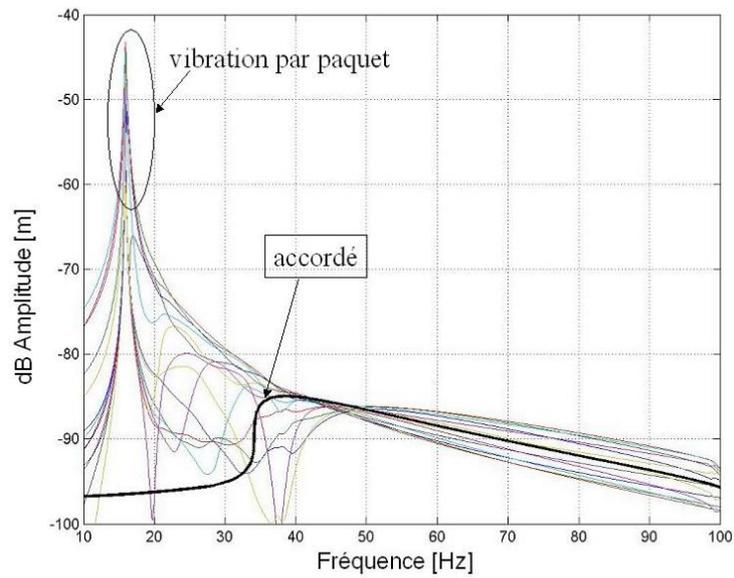


FIG. 3.51 Réponse forcée au voisinage du comportement glissant : cas sin 2 avec une force normale de 5 N

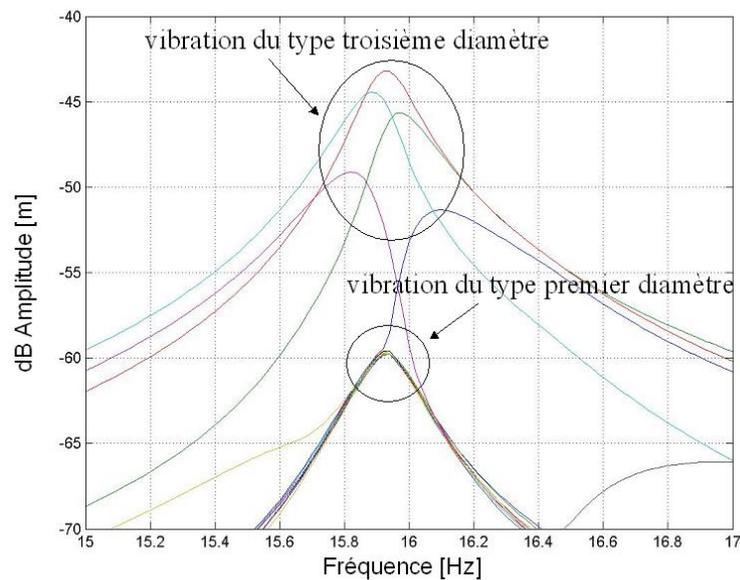


FIG. 3.52 Différence des niveaux d'amplitude associés à une vibration "par paquet" de la structure : cas sin 2 avec une force normale de 5 N

"indépendantes", caractérisées par un mouvement d'ensemble ordonné. De plus, la vibration peut se concentrer exclusivement sur quelques uns de ces secteurs. Ce type de comportement a été obtenu également quand une variation simultanée des paramètres a été retenue, mais toujours à proximité de contact à majorité glissante.

### 3.6 Conclusions

L'étude expérimentale du comportement de 2 aubes liaisonnées par nageoire, présentée par Ravoux dans [56], a été ici complétée afin de montrer la relation entre les réponses forcées et la charge normale au contact ainsi que la relation entre les fréquences associées aux amplitudes de réponses maximales et la charge normale. A partir de l'analyse des FRFs, un contact de type macroslip modifié par la rugosité, a pu être retenu parmi toutes les modélisations existantes ; ce modèle de contact est le modèle le plus simple qui puisse reproduire les principales caractéristiques observées expérimentalement. Malgré la simplicité de la schématisation du dispositif (1 ddl par aube), d'un point de vue phénoménologique, le même type de comportement a été identifié expérimentalement et numériquement avec un déplacement vers droite de pics d'amplitude maximale pour des valeurs croissantes de la charge normale.

Ensuite, l'étude du comportement dynamique du système accordé et désaccordé a été conduite. Deux types d'excitation ont été considérées afin de reproduire d'un côté les conditions expérimentales du dispositif de Ravoux, et de l'autre, des conditions plus réalistes d'une force de type Ordre Moteur. Le comportement dynamique du système accordé, présente surtout dans le cas d'une excitation de type Ordre Moteur une très forte analogie avec le comportement dynamique d'un système à 1 seul degré de liberté en présence de frottement sec. L'analogie ne dépend ni de l'Ordre Moteur ni du nombre d'aubes considéré qui ont, comme seul effet, celui de changer la configuration de la charge optimale pour laquelle les amplitudes sont les plus faibles. L'analogie concerne aussi l'approximation des réponses forcées non linéaires présentée par Toufine dans ([73]) pour le cas du contact macroslip "pur", appliqué et validé aux cas des structures à symétrie cyclique à n-ddl.

L'étude du désaccordage a été conduite de façon telle à considérer d'abord l'effet du dédoublement des modes et par la suite, le facteur d'amplification. Dans le premier cas, une première étude de sensibilité montre que le paramètre qui, plus que tout autre, a une importance fondamentale pour le dédoublement des modes est la raideur tangentielle qui intervient directement sur les fréquences naturelles du système et sur la variable  $\mu F_n / (k_t B)$  qui gère le passage entre la phase bloquée et

la phase glissante. Dans le but de procéder à une comparaison de type phénoménologique avec les résultats expérimentaux de Ravoux, une étude plus particulière a été conduite sur le désaccordage dû à la force normale. En effet, de même que les résultats expérimentaux présentés dans [56], plus la charge normale croît, plus l'influence du désaccordage de  $F_n$  diminue et le dédoublement des modes est moins marqué. En revanche, les valeurs obtenues expérimentalement sont beaucoup plus importantes par rapport à celles trouvées numériquement. Des valeurs de l'ordre de 20% peuvent par contre être obtenues numériquement seulement si un désaccordage simultané des paramètres de contact est considéré, caractérisé par des valeurs de l'écart type très importantes ( $\sigma \approx 0.3/0.5$ ). Néanmoins, cette condition semble s'éloigner trop de la représentativité du dispositif et d'autres conditions, telle que le désaccordage lié à l'encastrement de chacune des aubes peut être à l'origine d'un si fort dédoublement des modes.

Le chapitre s'achève avec l'analyse du facteur d'amplification des vibrations. L'étude de sensibilité met au jour que l'influence de chaque paramètre dépend de l'état du contact. Les valeurs du facteur d'amplification pour les cas tests considérés, restent relativement faibles. Mais l'aspect le plus important concerne la distribution des vibrations que le désaccordage impose. Dans le cas de contacts à majorité glissante et en présence du désaccordage des paramètres  $\mu$  et  $F_n$ , on assiste à une vibration "par paquet" de la structure pour laquelle cette dernière est subdivisée en secteurs qui vibrent indépendamment les uns des autres. De plus, les vibrations peuvent se concentrer sur quelque secteur de référence qui présente, par conséquent, des amplitudes beaucoup plus importantes que les autres secteurs.

# CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Une des causes les plus fréquentes qui conduit à la rupture des ensembles aubés réside dans la fatigue à nombre élevé de cycle. Afin de réduire les amplitudes de vibrations dangereuses, les constructeurs ont mis au point de manière largement empirique des dispositifs amortisseurs basés sur les effets du frottement sec. La connaissance précise du comportement dynamique des aubages en présence ce type de frottement devient donc indispensable pour pouvoir prédire leur durée de vie de manière suffisamment précise.

Dans un premier temps, une étude bibliographie est dédiée à la fois aux différentes modélisations du contact utilisées pour l'étude dynamique du système et aux phénomènes de type dédoublement des modes et facteur d'amplification liés au désaccordage, phénomènes qui peuvent modifier la répartition des vibrations des structures à symétrie cyclique. L'étude des systèmes désaccordés en présence de non linéarité est récent et il apparaît qu'il manque encore une totale compréhension du comportement dynamique d'ensemble de la structure. Dans ce cadre, le travail présenté ici se situe dans la suite naturelle des travaux antérieurs développés par Ravoux. Il s'agit de progresser vers une meilleure prise en compte des phénomènes dus à la présence des frotteurs dans le cas de structure à symétrie cyclique désaccordées.

Dans le second chapitre, une double démarche expérimentale/numérique est mise en place afin d'être en mesure de maîtriser le comportement dynamique des structures en présence de frottement sec. Une première étude numérique préparatoire permet d'analyser les principales conséquences des différentes modélisations du contact sur les réponses forcées et sur la force transverse transmise par le contact.

Une caractéristique commune à toutes les modélisations trouvées en littérature, concerne la diminution des pics d'amplitude maximale en présence de frottement. Une analyse énergétique montre que, ni l'énergie dissipée par frottement sec, ni l'énergie totale dissipée, peuvent être la cause d'une telle baisse des pics. L'explication développée, réside dans l'alternance de la phase bloquée et glissante

du contact typique du comportement stick/slip. Plus précisément, ce changement permanent d'état permet aux efforts déphasés par rapport au déplacement, d'augmenter leur valeur quand le contact passe d'une condition complètement bloquée à stick/slip à majorité bloquée, entraînant la diminution des amplitudes maximales. Quand l'état du contact change vers des configurations de plus en plus glissantes, l'alternance des contacts bloqués et glissants, pendant la phase stick/slip, perd de son efficacité et par conséquent l'effort généré par le frotteur diminue. Dans cette configuration, les amplitudes maximales des pics augmenteront de nouveau et la présence du frotteur devient de plus en plus inefficace. Pour ces états des contacts (stick/slip à majorité glissante et complètement glissante) la présence du frotteur ne joue pas un rôle fondamental mais l'énergie dissipée par frottement sec atteint en revanche ses valeurs maximales.

Une comparaison numérique expérimentale appliquée à une poutre encastree libre en présence d'un frotteur a été conduite par la suite, afin de valider à la fois les techniques d'acquisitions expérimentales mises au point et pour valider les schémas numériques et les méthodes de résolutions utilisés. Le choix du modèle de contact a pu être fait grâce à l'étude numérique préparatoire conduite. La bonne concordance des résultats expérimentaux et numériques obtenue, permet de valider la démarche adoptée.

Dans le chapitre 3, une application aux systèmes à symétrie cyclique liés par nageoires est conduite. Le choix du modèle du contact retenu pour simuler le comportement inter-nageoire est réalisé grâce à l'analyse expérimentale du comportement dynamique d'un système de deux aubes. Une étude numérique du système accordé est conduite et l'analogie de comportement de la structure à symétrie cyclique avec le comportement d'un système à un seul degré de liberté avec frotteur apparaît évidente. Plusieurs caractéristiques communes sont mises en évidence dont la plus importante concerne la généralisation au cas des structures à symétrie cyclique à  $n$  frotteurs de la méthode de calcul approché des réponses forcées, proposée par Toufine pour une structure à un seul frotteur.

Une première étude phénoménologique du désaccordage est ensuite conduite et concerne l'effet du dédoublement des modes en fonction d'un désaccordage lié à la force normale au contact. En augmentant la valeur de la charge normale l'effet du désaccordage, et par conséquent l'écart en pourcentage entre les fréquences de résonance des mêmes modes, diminue.

Le dernier aspect concerne l'influence du désaccordage des propriétés de contact sur le facteur d'amplitude et sur la concentration des vibrations. Une première étude basée sur quelques cas de distribution aléatoire du désaccordage montre qu'en général les facteurs d'amplification obtenus sont assez faibles, au moins tant que l'état du contact est du type stick/slip à majorité bloquée. Par

contre en présence d'états stick/slip à majorité glissante, la réponse dynamique du système peut être complètement différente et une vibration "par paquet" peut se manifester. Ce type de vibration est dangereuse car elle concentre les vibrations sur quelques secteurs avec des vibrations qui peuvent se relever catastrophique pour la tenue dynamique de la structure. Les résultats obtenus permettent de dégager des règles de conception des frotteurs, soit de type nageoire soit de type dissipateur sous plate-forme, qui doivent être conçus de façon telle que leur comportement soit de type stick/slip à majorité bloqué, pour conduire à de faibles amplitudes de réponses forcées et en même temps à une faible sensibilités au désaccordage.

Les perspectives de développement concernent tout d'abord cette dernière partie. Les cas de désaccordages considérés sont limités en nombre, ce qui empêche une validation totale des conclusions développées. Afin de compléter l'étude numérique présentée et compte tenu de la nature aléatoire du désaccordage, il est indispensable d'aborder le problème par une approche statistique. Pour garantir une certaine rapidité des résultats, un système à un seul degré de liberté et une résolution de type Balance Harmonique peuvent être maintenus. Il est évident aussi que modélisations plus réalistes sont indispensables afin de pouvoir accéder à une compréhension complète du phénomène ainsi qu'à un transfert industriel, cependant les systèmes à nombre élevé de degrés de liberté nécessitent une réduction préalable. Les méthodes qui semblent être les plus efficaces consistent en l'application d'une réduction de type Craig Bampton combinée avec une méthode de résolution de type Balance Multi-Harmonique. A moyen terme il conviendra de vérifier si les réductions basées sur les modes non linéaires peuvent présenter des avantages par rapport aux méthodes utilisées.

Enfin, l'amortissement n'est pas exclusivement amené par les dispositifs de liaisonnement. Pour les systèmes aubés une valeur significative de l'amortissement total est amenée par le fluide et doit être également considérée. L'étude du couplage fluide/structure doit par conséquent compléter cette étude afin de finaliser l'analyse des réponses forcées des aubes liaisonnées par des éléments de contact.



# BIBLIOGRAPHIE

1. AL MAJID A. *Dissipation de l'énergie en mécanique vibratoire : 1) opérateur d'hystérésis 2) phénomène métrique*. Thèse de doctorat en génie mécanique, Lyon : LMSt-INSA de Lyon, 02-ISAL-0033, 2002, 162 p.
2. AL MAJID A., DUFOUR R. *Formulation of a hysteretic restoring force model. Application to vibration isolation*. *Nonlinear Dynamics*, 2002, vol. 27, n° 1, pp. 69-85
3. AL MAJID A., DUFOUR R. *Harmonic response of a structure mounted on an isolator modelled with a hysteretic operator : experiments and prediction*. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, vol. 227, pp. 391-403
4. BERRUTI T., FILIPPI S., GOGLIO L., GOLA M.M., SALVANO S. *A test rig for frictionally damped bladed segments*. **In** : Proc. of ASME Turbo Expo, Mai 8-11, 2000, Munich, Germany, 2000-GT-538
5. BERRUTI T., FILIPPI S., GOLA M.M., SALVANO S. *Friction damping of interlocked vane segments : experimental results*. **In** : Proc. of ASME Turbo Expo, June 4-7, 2001, New Orleans, Louisiana, USA 2001-GT-432
6. BERTHILLIER M., DUPONT C., MONDAL R., BARRAU J.J. *Blades forced response analysis with friction dampers*. *Journal of Vibration and Acoustics*, 1998, vol. 120, pp. 468-474
7. BLADH R., CASTANIER M.P., PIERRE C. *Component-mode-based reduced order modeling techniques for mistuned bladed disks - Part I : Theoretical models*. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2001, vol. 123, pp. 88-99
8. BLADH R., CASTANIER M.P., PIERRE C. *Component-mode-based reduced order modeling techniques for mistuned bladed disks - Part II : Application*. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2001, vol. 123, pp. 100-108
9. BLIMAN P.A. *Etude mathématique d'un modèle de frottement sec : le modèle de P.R. Dahl*.

- Thèse de doctorat en mathématiques et automatique, Paris : Université de Prais IX-Dauphine, 1990, 179 p.
10. CAMERON T.M., GRIFFIN J.H. *An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems*. Journal of Applied Mechanincs, 1989, vol. 56, pp. 149-154
  11. CATTANEO C. *Sul contatto di due corpi elastici :distribuzione locale degli sforzi* Rediconti Accademia Nazionale dei Lincei, Series, 1938, 27, n° 6, pp. 342-348
  12. CHATELET E., D'AMBROSIO F., JACQUET-RICHARDET G. *Toward global modelling approaches for dynamic analyses of rotating assemblies of turbomachines*. Journal of Sound and Vibration, Actually in press, 2004
  13. CHEN J.J., YANG B.D., MENQ C.H. *Periodic forced response of structures having three-dimensional frictional constraints*. Journal of Sound and Vibration, 2000, vol. 229, n° 4, pp. 775-792
  14. CSABA G. *Modelling microslip friction damping and its influence on turbine blade vibrations*. Thèse mechanical engineering. Linköping, Sweden : Linköping University, S-581 83, 1998,216 p.
  15. EWINS D.J. *The effect of detuning upon the forced vibration of bladed disk*. Journal of Sound and Vibration, 1969, vol. 9, n° 1, pp. 65-79
  16. EWINS D.J. *Modal testing : theory, practice and application*. Second edition, Research studies press LTD, Baldock, Hertfordshire, England, ISBN 0-86380-218-4, 2000,562 p.
  17. FEINER D.M., GRIFFIN J.H. *Mistuning identification of bladed disks using a fundamental mistuning model - part 1 : Theory*. **In** : Proc. of ASME Turbo Expo, June 16-19, 2003, Atlanta, Georgia, GT2003-38952
  18. FEINER D.M., GRIFFIN J.H. *Mistuning identification of bladed disks using a fundamental mistuning model - part 2 : Application*. **In** : Proc. of ASME Turbo Expo, June 16-19, 2003, Atlanta, Georgia, GT2003-38953
  19. FERRERO J.F., YETTOU E., BARRAU J.J., RIVALLANT S. *Analysis of a dry friction problem under small displacement : application to a bolted joint*. Wear, 2003, vol. 256, pp. 1135-1143
  20. GÖTTING F., SEXTRO W., PANNING L., POPP K. *Systematic mistuning of bladed disk*

- assemblies with friction contacts*. **In** : Proc. of ASME Turbo Expo, June 16-19, 2004, Vienna, Austria, GT2004-53310
21. GUENNOUN K., HOUSSNI M., BELHAQ M. *Quasi-periodic solutions and stability for a weakly damped nonlinear quasi-periodic mathieu equation*. Nonlinear Dynamics, 2002, vol. 27, pp. 211-236
  22. GUILLEN J. *Studies of the dynamics of dry-friction-damed blade assemblies*. Thèse mechanical engineering. University of Michigan, Ann Arbor, Michigan, USA , 1999, 166 p.
  23. IMREGUN M. *A survey of nonlinear analysis tools for structural systems*. The Shock and Vibration Digest, 1998, vol. 30, n° 5, pp. 363-369
  24. IWAN W.D. *On a class of models for the yielding behaviour of continous and composite systems*. Journal of Applied Mechanics, 1967, vol. 34, n° 3, pp. 612-617
  25. JACQUET-RICHARDET G., FERRARIS G., RIEUTORD P. *Frequencies and modes of rotating flexible bladed disc-shaft assemblies : a global cyclic symmetry approach*. Journal of Sound and Vibration, 1996, vol. 191, n° 5, pp. 901-915
  26. JACQUET-RICHARDET G., MOYROUD F., FRANSSON T.H. *An influence of shroud design on the dynamic and aeroelastic behavior of bladed disc assemblies*. **In** : Proc. of ASME Turbo Expo, June 4-7, 2001, Orlando, Florida, USA 1997-GT-191
  27. JARELAND M.H. *A parametric study of a cottage-roof damper and comparison with experimental results*. **In** : Proc. of ASME Turbo Expo, June 4-7, 2001, New Orleans, Louisiana, USA 2001-GT-275
  28. JARELAND M.H. CSABA G. *Friction damper mistuning of a bladed disk and optimization with respect to wear*. **In** : Proc. of ASME Turbo Expo, May 8-11, 2000, Munich, Germany 2000-GT-363
  29. JOHNSON K.L. *Contact mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne, ISBN 0-521-34796-3, 1989,423 p.
  30. KENYON J.A., GRIFFIN J.H., FEINER D.M. *Maximum bladed disk forced response from distorsion of a structural mode*. **In** : Proc. of ASME Turbo Expo, June 3-6, 2002, Amsterdam, The Netherlands, GT-2002-30426
  31. KENYON J.A., GRIFFIN J.H. *Experimental demonstration of maximum mistuned bladed disk forced response*. **In** : Proc. of ASME Turbo Expo, June 16-19, 2003, Atlanta, Georgia,

GT2003-38060

32. KOH K-H., FILIPPI S., GRIFFIN J.H., AKAY A. *Characterization of turbine blade friction dampers*. **In** : Proc. of ASME Turbo Expo, June 14-17, Vienna, Austria GT 2004-53278
33. LALANNE M., BERTHIER P., DER HAGOPIAN J. *Mechanical vibrations for engineers*. John Wiley and sons Ltd, New York, ISBN 0-471-90197-0, 1983, 266 p.
34. LALANNE M., FERRARIS G. *Rotordynamics prediction in engineering*. John Wiley and Sons, New York, Second Edition, ISBN 0-471-97288-6, 1997, 254 p.
35. LEUNG A.Y.T., CHUI S.K. *Non-Linear vibration of coupled duffing oscillators by an improved incremental harmonic balance method*. Journal of Sound and Vibration, 1995, vol. 181, n° 4, pp. 619-633
36. MASIANI R., CAPECCHI D., VESTRONI F. *Resonant and coupled response of hysteretic two-degree-of-freedom using harmonic balance method*. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2002, vol. 37, pp. 1421-1434
37. MINDLIN R.D. *Compliance of elastic bodies in contact*. Journal of Applied Mechanics, 1949, vol. 16, pp. 259-268
38. MENQ C.H. *The vibration response of frictionally constrained gas turbine engine blades*. Thesis mechanical engineering. Pittsburg, Pennsylvania : Carnegie-Mellon University, 1985, 172 p.
39. MENQ C.H., YANG B.D. *Non-linear spring resistance and friction damping of frictional constraint having two-dimensional motion*. Journal of Sound and Vibration, 1998, vol. 217, n° 1, pp. 127-143
40. MOYROUD F. *Fluide-structure integrated computational methods for turbomachinery blade flutter and forced response prediction* Thèse de Doctorat :INSA, Lyon (98 ISAL 0101),1998, 148 p.
41. MOYROUD F., FRANSSON T., JACQUET-RICHARDET G. *A comparison of two finite element reduction techniques for mistuned bladed-disks*. **In** : Proc. of ASME Turbo Expo, Mai 8-11, 2000, Munich, Germany, 2000-GT-0362
42. MYHRE M. *Bladed disk mistuning - a literature survey*. technical report : Departement of Energy Technology, Division of Heat and Power Technology, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 2002, 63 p.

43. NI Y.Q., KO J.M., WONG C.W. *Identification of non-linear hysteretic isolators from periodic vibration tests*. Journal of Sound and Vibration, 1998, vol. 217, n° 4, pp. 737-756
44. OMPRAKASH V., RAMAMURTI V. *Analysis of bladed disks. A review*. The Shock and Vibration Digest, 1988, vol. 20, n° 11, pp. 14-21
45. PANNING L., POPP K., SEXTRO W., GÖTTING F., KAYSER A., WOLTER I. *Asymmetrical underplatform dampers in gas turbine blandings : theory and application*. **In** : Proc. of ASME Turbo Expo, June 14-17, Vienna, Austria GT 2004-53316
46. PANNING L., SEXTRO W., POPP K. *Optimization of interblade friction damper design*. **In** : Proc. of ASME Turbo Expo, May 8-11, 2000, Munich, Germany 2000-GT-541
47. PESHECK E., PIERRE C., SHAW S.W. *A new Galerkin-based approach for accurate non-linear normal modes through invariant manifolds*. Journal of Sound and Vibration, 2002, vol. 249, n° 5, pp. 971-993
48. PETROV E.P. *A method for use of cyclic symmetry properties in analysis nonlinear multiharmonic vibrations of bladed disc*. **In** : Proc. of ASME Turbo Expo, June 16-19, 2003, Atlanta, Georgia, USA, GT-2003-38480
49. PETROV E.P., EWINS D.J. *Analysis of the worst mistuning patterns in bladed disc assemblies*. **In** : Proc. of ASME Turbo Expo, June 4-7, 2001, New Orleans, Louisiana, USA, 2001-GT-0292
50. PETROV E.P., EWINS D.J. *Analytical formulation of friction interface elements for analysis of nonlinear multi-harmonic vibrations of bladed discs*. **In** : Proc. of ASME Turbo Expo, June 3-6, 2002, Amsterdam, The Netherlands, GT-2002-30325
51. PETROV E.P., EWINS D.J. *Generic friction models for time-domain vibration analysis of bladed discs*. **In** : Proc. of ASME Turbo Expo, June 16-19, 2003, Atlanta, Georgia, USA, GT-2003-38475
52. PETROV E.P., EWINS D.J. *Method for analysis of nonlinear multiharmonic vibrations of mistuned bladed discs with scatter of contact interface characteristics*. **In** : Proc. of ASME Turbo Expo, June 16-19, 2004, Vienna, Austria, GT2004-53891
53. PIERRE C., FERRI A.A., DOWELL E.H. *Multi-harmonic analysis of dry friction damped systems using an incremental harmonic balance method*. Journal of Applied Mechanics, 1985, vol. 52, pp. 958-964

54. POPP K., PANNING L., SEXTRO W. *Vibration damping by friction forces : theory and applications*. Journal of Sound and Vibration, 2003, vol. 9, n° 3-4, pp. 419-448
55. PRESS W.H., TEUKOLSKY S.A., VETTERLING W.T., FLANNERY B.P. *Numerical Recipes in fortran 77 : the art of scientific computing*. 2<sup>n</sup>d Ed. Cambridge University Press, ISBN 0-521-43064-x, 1986-1992, 915 p.
56. RAVOUX J. *Réponse forcée des aubages de turbomachines liaisonnées par nageoires*. Thèse de doctorat en génie mécanique, LDMS-INSA de Lyon, France, 03-ISAL-0019, 2003, 119 p.
57. RAGHOTHAMA A., NARAYANAN S. *Non-linear dynamics of a two-dimensional airfoil by incremental harmonic balance method*. Journal of Sound and Vibration, 1999, vol. 226, n° 3, pp. 493-517
58. RICHARDSON R.S.H., NOLLE H. *Surface friction under time-dependent loads*. Wear, 1976, vol. 37, n° 1, pp. 87-101
59. ROSENBERG R.M. *The normal modes of nonlinear n-DOF systems*. Journal of Applied Mechanical, 1960, vol. 33, pp. 7-14
60. SAMATANAYAKE S., BAJAJ A.K. *Subharmonic oscillations in harmonically excited mechanical systems with cyclic symmetry*. Journal of Sound and Vibration, 1997, vol. 206, n° 1, pp. 39-60
61. SANLITURK K.Y., EWINS D.J. *Modelling two-dimensional friction contact and its application using harmonic balance method*. Journal of Sound and Vibration, 1996, vol. 193, n° 2, pp. 211-523
62. SANLITURK K.Y., EWINS D.J., ELLIOTT R., GREEN J.S. *Friction damper optimisation : simulation of rainbow tests*. **In** : Proc. of ASME Turbo Expo, June 7-10, 1999, Indianapolis, Indiana USA 99-GT-336
63. SEVER I.A. *Experimental validation of turbomachinery blade vibration prediction*. Thesis mechanical engineering, Department of Mechanical Engineering, Imperial College London, England 2004, 264 p.
64. SEXTRO W. *The calculation of the forced response of shrouded blades with friction contacts and its experimental verification*. **In** : Proc. of ASME Turbo Expo, May 8-11, 2000, Munich, Germany 2000-GT-540

65. SEXTRO W., POPP K., KRZYZYNSKI T. *Localization in nonlinear mistuned systems systems with cyclic symmetry*. Nonlinear Dynamics, 2001, vol. 25, pp. 207-220
66. SEXTRO W., PANNING L., GÖTTING F., POPP K. *Fast calculation of the statistics of the forced response of mistuned bladed disk assemblies with friction contacts*. **In** : Proc. of ASME Turbo Expo, June 3-6, 2002, Amsterdam, The Netherlands, GT-2002-30427
67. SHAW S.W., PIERRE C. *Normal modes for non-linear vibratory systems*. Journal of Sound and Vibration, 1993, vol. 164, n° 1, pp. 85-124
68. SHAW S.W., PIERRE C., PESHECK E. *Modal analysis-based reduced-order models for nonlinear structures - An invariant manifold approach* The Shock and Vibration Digest, 1999, vol. 31, n° 1, pp. 3-16
69. STANBRIDGE A.B., SANLITURK K.Y., EWINS D.J., FERREIRA J.V. *Experimental investigation of dry friction damping and cubic stiffness non-linearity*. **In** : Proc. of ASME DETC2001/VIB, September 9-13, 2001, Pittsburgh, Pennsylvania DETC/2001/VIB-21556
70. THOMAS D.L. *Dynamics of rotationally periodic structures*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1979, vol. 14, pp. 81-102
71. TOUFINE A. *Dynamique des structures en présence de frottement sec : application aux aubes de turboréacteurs*. Thèse de doctorat en génie mécanique, Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, Toulouse, France, 1997, 164 p.
72. TOUFINE A., BARRAU J.J., BERTHILLIER M. *Dynamic study of a structure with flexion-torsion coupling in the presence of dry friction*. Nonlinear Dynamics, 1999, vol. 18, pp. 321-337
73. TOUFINE A., BARRAU J.J., BERTHILLIER M. *Dynamic study of a simplified mechanical system with presence of dry friction*. Journal of Sound and Vibration, 1999, vol. 225, n° 1 pp. 95-109
74. VAKAKIS A.F. *Non-similar normal oscillations in a strongly non-linear discrete system*. Journal of Sound and Vibration, 1992, vol. 158, n° 2, pp. 341-361
75. VAKAKIS A.F. *Non-linear normal modes (NNMs) and their applications in vibration theory : an overview*. Journal of Sound and Vibration, 1997, vol. 11, n° 1, pp. 3-22
76. WEI S.T., PIERRE C. *Localization phenomena in mistuned assemblies with cyclic symmetry - part I : Free vibrations*. Journal of Vibration, Acoustic, Stress, and Reliability in Design,

- 1988, vol. 110, pp. 429-438
77. WEI S.T., PIERRE C. *Localization phenomena in mistuned assemblies with cyclic symmetry - part II : Forced vibrations*. Journal of Vibration, Acoustic, Stress, and Reliability in Design, 1988, vol. 110, pp. 439-449
78. WHITEHEAD D. *Effect of mistuning on forced vibration of turbomachine blades induced by wakes*. Journal of Mechanical Engineering, 1988, vol. 8, pp. 15-21
79. XIAO B., RIVAS-GUERRA A.J., MIGNOLET M.P. *Identification of the maximum responding blade in mistuned bladed disks*. **In** : Proc. of ASME Turbo Expo, June 16-19, 2003, Atlanta, Georgia, USA, GT-2003-38966
80. XU L., LU M.W., CAO Q. *Bifurcation and chaos of an harmonically excited oscillator with both stiffness and viscous damping piecewise linearities by incremental harmonic balance method*. Journal of Sound and Vibration, 2003, vol. 264, pp. 873-882
81. YANG B.D., CHU M.L., MENQ C.H. *Stick-slip-separation analysis and non-linear stiffness and damping characterization of friction contacts having variable normal load*. Journal of Sound and Vibration, 1998, vol. 210, n° 4, pp. 461-481
82. YANG B.D., MENQ C.H. *Characterization of 3D contact kinematics and prediction of resonant response of structures having 3D frictional constraint*. Journal of Sound and Vibration, 1998, vol. 217, n° 5, pp. 909-925

# Annexe A

## APPROCHE STATISTIQUE DES PARAMÈTRES DE CONTACT

La distribution de la densité de probabilité Gaussienne est normalement utilisée pour les problèmes liés à la rugosité des surface. En figure A.1 les aspérités d'une surface en contact sont mises en évidence. Soit  $\tilde{x}$  la coordonnée adimensionnelle de la hauteur des aspérités,  $R_z$  la rugosité des surfaces et  $\tilde{x} = x/R_z$ . La fonction de densité de probabilité de la variable  $\tilde{x}$  est donnée naturellement par une loi de type Gaussian. Sextro approche cette loi avec la fonction suivante :

$$\sigma_p = 6\tilde{x} - 6(\tilde{x})^2 \quad (\text{A.1})$$

En figure (A.2 (a)) les deux différentes distributions sont comparées. La distribution cumulative de l' hauteur ( $\Delta h(\tilde{x})$ ) des aspérités est défini comme l'intégral de la densité de probabilité par rapport à l' hauteur adimensionnée. Pour  $\tilde{x}$  donné, la distribution cumulative représente la pourcentage des aspérités avec une hauteur plus petite que  $\tilde{x}$ . Pour l'approximation de Sextro on obtiendra donc

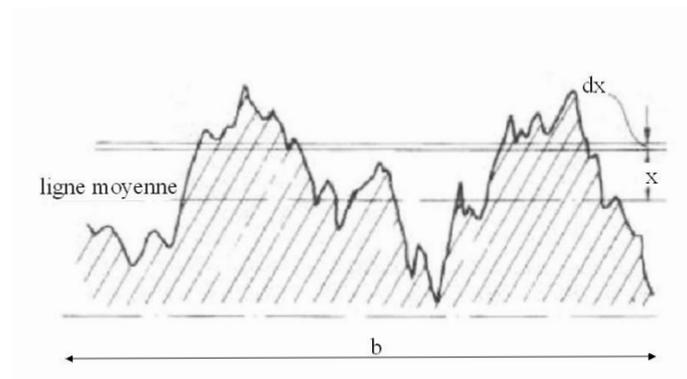
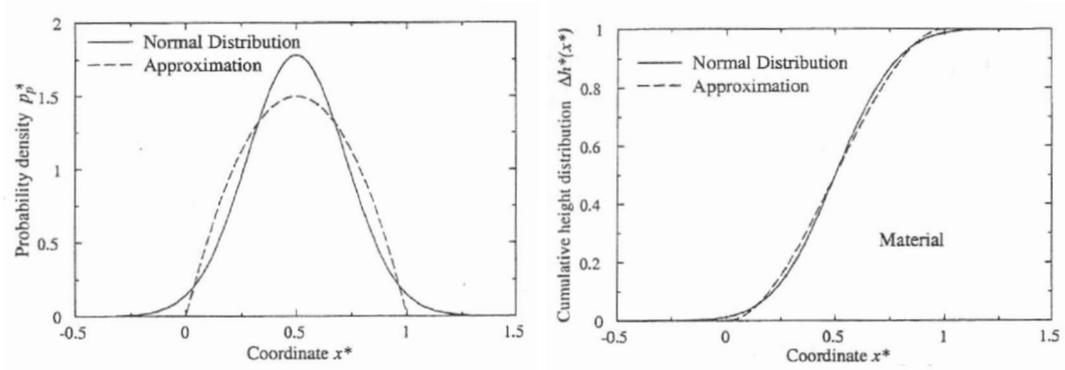


FIG. A.1 Distribution de l' hauteur de la surface de contact [29]



(a) Densité de probabilité

(b) Distribution cumulative de l'hauteur

FIG. A.2 Approximation due à la méthode de Johnson [29] appliquée par Sextro [64] par rapport à une distribution Gaussienne

l'expression suivante :

$$\Delta h \begin{cases} 0 & \text{si } \tilde{x} < 0 \\ (3\tilde{x})^2 - 2(\tilde{x})^3 & \text{si } 0 < \tilde{x} < 1 \\ 1 & \text{si } \tilde{x} > 0 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Figure (A.2 (b)) montre une bonne approximation entre la distribution cumulative de la Gaussienne et celle proposée par Sextro. La surface de contact est proportionnelle à la hauteur cumulative alors que la force normale au contact est donnée par l'intégral

$$F_n = b \int_0^{\Delta h} p_N dz \quad (\text{A.3})$$

avec  $p_N$  la pression de contact et  $b$  la longueur du contact. Mais par définition  $p_N = E/l \cdot u_p$  avec  $l$  la profondeur élastique de la surface de contact,  $u_p$  le déplacement le long de la profondeur et  $E$  module de Young. En substituant, on obtient :

$$F_n = bE/l \int_0^{\Delta h} u_p(z) dz \quad (\text{A.4})$$

mais

$$\int_0^{\Delta h(x=u_x)} u_p(z) dz = \int_{-\infty}^{x=u_x} \Delta h(x) dx \quad (\text{A.5})$$

et donc

$$F_n = bE/l \int_{-\infty}^{x=u_x} \Delta h(x) dx \quad (\text{A.6})$$

et en forme adimensionnée

$$\tilde{F}_n = \int_{-\infty}^{\tilde{x}=\tilde{u}_x} \Delta h(\tilde{x}) d\tilde{x} \quad (\text{A.7})$$

avec  $\tilde{F}_n = F_N / (k_n \cdot R_z)$ ,  $\tilde{x} = x / R_z$  et  $k_n = E \cdot b \Delta h / l$ , avec  $k_n$  la rugosité normale à la surface. Cette équation donne la liaison entre la force normale au contact et la surface de contact. Avec cette méthode on peut obtenir de plus la relation entre la raideur tangentielle équivalente et la charge normale. La force transverse transmise par la surface de contact est donnée par :

$$F_t = b \int_0^{\Delta h} \tau_z dz \quad (\text{A.8})$$

mais  $\tau_z = G \cdot w_p / l$  et en intégrant on obtient

$$F_t = G b w_p \Delta h (x = u_x) / l \quad (\text{A.9})$$

Mais  $k_t = F_t / w_p$  et en divisant par rapport à  $G b l$  on obtient

$$\tilde{k}_t = \delta h (\tilde{x} = \tilde{u}_x) \quad (\text{A.10})$$

La surface de contact et la raideur tangentielle adimensionnelle, ont la même relation par rapport à la distribution cumulative de la hauteur.

### Exemple numérique

Soit la rugosité  $R_z = 0.8e-6 \text{ m}$ , la raideur normale au contact  $k_n = 750e6 \text{ N/m}$  et la raideur tangentielle asymptotique égale à  $k_t = 1e5 \text{ N/M}$ . D'abord la force normale adimensionnelle est calculée en utilisant l'équation A.7. En multipliant  $\tilde{F}_n \cdot k_n R_z$  on obtient la valeur de la force normale  $F_n$ . La valeur de la raideur tangentielle adimensionnelle est donnée directement par A.2.  $k_t$  est donc donné par  $\Delta h \cdot 1e5$ . En figure A.3 on a reportée la valeur de la raideur tangentielle en fonction de la force normale.

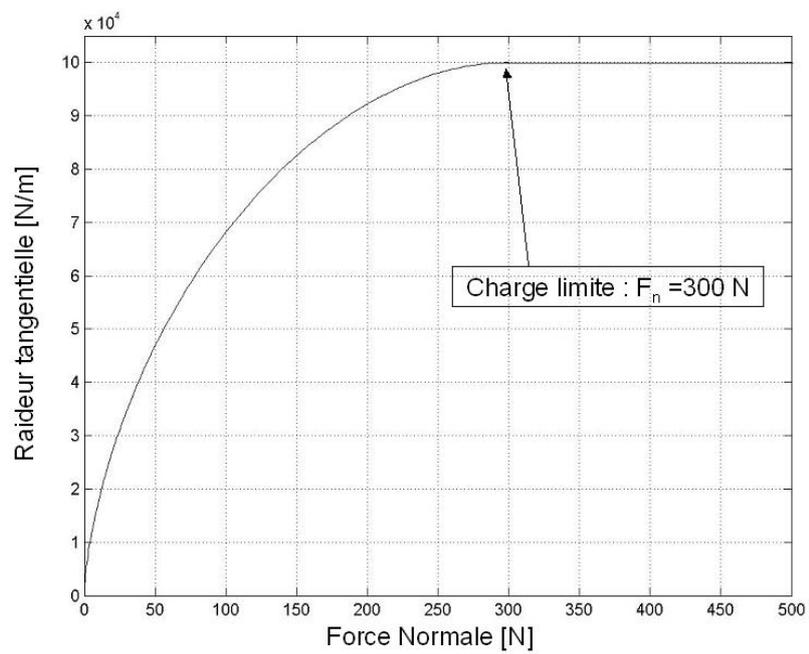


FIG. A.3 Raideur tangentielle fonction de la force normale

## Annexe B

### FORCE TRANSMISE PAR LE FROTTEUR

Pendant la phase stick/slip du contact, les boucles de la force de restitution sont données par un parallélogramme comme en figure B.1.

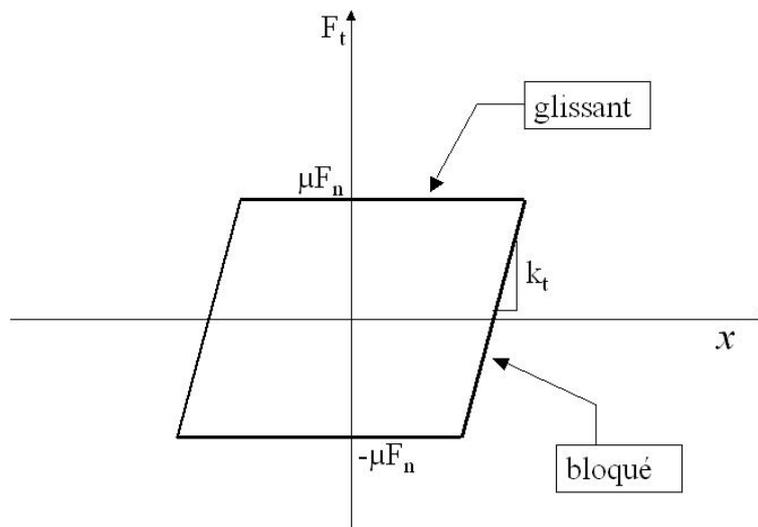


FIG. B.1 Force de restitution pendant la phase stick/slip avec un modèle de contact de type macroslip "pur"

L'hypothèse de l'équilibre harmonique à une seule composante, impose un déplacement du type  $x_t(t) = B \cdot \cos(\vartheta)$  avec  $\vartheta = \omega t - \varphi$ . La valeur de la force transverse, transmise par le contact change de forme à selon si le contact est bloqué ou glissant. On peut définir avec  $\vartheta^*$ , la valeur de  $\vartheta$  pour la quelle on a le passage de la condition bloquée à la condition glissante. Sa valeur est définie par

$$\vartheta^* = \arccos(1 - 2\mu F_n / (k_t B)) \quad (\text{B.1})$$

Dans le cas bloqué, la valeur de la force transverse est donnée par

$$F_t(t) = k_t(u_t - B) + \mu F_n \quad \text{si } 0 < \vartheta < \vartheta^* \quad (\text{B.2})$$

et dans le cas glissant par

$$f_t(t) = -\mu F_n \quad \text{si } \vartheta^* < \vartheta < \pi \quad (\text{B.3})$$

Vue la symétrie de la force de restitution il est vérifié aussi que

$$f_t(\vartheta + t) = -f_t(\vartheta) \quad (\text{B.4})$$

La méthode de l'équilibre harmonique, prévoit une décomposition de la force transverse en série de Fourier. Dans le cas où la série est tronquée au premier ordre on peut écrire

$$f_t(t) = f_c(B) \cdot \cos(\vartheta) + f_s(B) \cdot \sin(\vartheta) \quad (\text{B.5})$$

Par définition, la valeur du coefficient de la fonction périodique B.5,  $f_c(B)$ , est donnée par :

$$f_c = 1/\pi \int_0^{2\pi} f_t \cos(\vartheta) d(\theta) \quad (\text{B.6})$$

A cause de la symétrie de la fonction  $F_n$  analysée en B.4 on a

$$f_c = 1/\pi \int_0^{2\pi} f_t \cos(\vartheta) d(\theta) = 2/\pi \int_0^{\pi} f_t \cos(\vartheta) d(\theta) \quad (\text{B.7})$$

et en substituant les expressions B.2, B.3 dans l'équation B.7 on obtient :

$$f_c = 2/\pi \left[ \int_0^{\vartheta^*} [k_t B (\cos(\vartheta) - 1) + \mu F_n] \cos(\vartheta) d(\theta) - \int_{\vartheta^*}^{\pi} \mu F_n \cos(\vartheta) d(\theta) \right] \quad (\text{B.8})$$

Finalement en développant on obtient que

$$f_c = k_t B / \pi [\vartheta^* - 0.5 \cdot \sin(2\vartheta^*)] \quad (\text{B.9})$$

De la même façon on a que

$$f_s = 1/\pi \int_0^{2\pi} f_t \sin(\vartheta) d(\theta) = 2/\pi \int_0^{\pi} f_t \sin(\vartheta) d(\theta) \quad (\text{B.10})$$

et en substituant les expressions B.2, B.3 dans l'équation B.10 on obtient :

$$f_s = 2/\pi \left[ \int_0^{\vartheta^*} [k_t B (\cos(\vartheta) - 1) + \mu F_n] \sin(\vartheta) d(\theta) - \int_{\vartheta^*}^{\pi} \mu F_n \sin(\vartheta) d(\theta) \right] \quad (\text{B.11})$$

en développant on obtient :

$$f_s = k_t B / \pi \sin^2(\vartheta^*) \quad (\text{B.12})$$

# Annexe C

## RÉSOLUTION DE SYSTÈMES D'ÉQUATIONS NON LINÉAIRES

### Méthode de Newton-Raphson

Un problème typique est constitué par la recherche des zéros d'un système d'équation de type

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{C.1})$$

Si  $\mathbf{x}$  représente le vecteur constitué par les différents  $x_i$ , et  $\mathbf{F}$  le vecteur des fonctions  $F_i$ , on peut écrire au tour de  $\mathbf{x}$ , les fonctions  $F_i$  avec une série de Taylor de la façon suivante :

$$F_i(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = F_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \delta x_j + O(\delta\mathbf{x}^2) \quad (\text{C.2})$$

la matrice des dérivées partielles est définie comme la matrice Jacobienne du système  $\mathbf{J}$  :

$$J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \quad (\text{C.3})$$

L'équation C.2 peut être réécrite de la façon suivante en notation matricielle :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{J}\delta\mathbf{x} + O(\delta\mathbf{x}^2) \quad (\text{C.4})$$

Si donc le vecteur  $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$  est la solution du système non linéaire, cela implique que  $\mathbf{F}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = 0$ , et que donc

$$\mathbf{J} \cdot \delta\mathbf{x} = -\mathbf{F} \quad (\text{C.5})$$

Grâce à une décomposition LU on peut à partir de cette équation trouver la valeur  $\delta\mathbf{x}$ . Les nouveaux points sont données par le vecteur

$$\mathbf{x}_{new} = \mathbf{x}_{old} + \delta\mathbf{x} \quad (\text{C.6})$$

Le procès est reinitialisé avec  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{new}$  jusqu'à quand  $\delta\mathbf{x} \rightarrow 0$ .

Une des raison pour lesquelles cette méthode de Newton-Raphson ne peut pas être toujours utilisée, est représentée par sa difficulté de convergence dans le cas où la valeur de la solution est complètement inconnue. C'est à dire que, pour que la méthode converge, il faut que le point de départ soit près de la solution. L'autre raison, et non moins importante, est due au calcul de la matrice Jacobienne du système. Sa valeur, comme dans le cas des problèmes par frottement sec, n'est pas toujours analytiquement calculable, et une méthode aux différences finies doit être utilisée afin de se rapprocher le plus possible a sa valeur exacte. Néanmoins, cette opération peut demander un temps excessif et ralentir la procédure de façon très importante. Pour ces raisons, de méthodes plus récentes sont utilisées pour la résolution de systèmes d'équations non linéaires. Parmi eux, la plus répandue est la méthode des multi-sécantes.

### Méthode des multi-sécantes

La valeur approchée de la matrice Jacobienne  $\mathbf{B}$ , est donnée par

$$\mathbf{B}_{i+1} \cdot \delta\mathbf{x}_i = -\delta\mathbf{F}_i \quad (\text{C.7})$$

Dans le cas du problème à une dimension, cette méthode est équivalente à rapprocher la valeur de la dérivée dans le point  $x_{i+1}$  avec la pente de la droite (sécante) entre les point  $x_i$  et  $x_{i-1}$ . Mais, dans le cas d'un système à  $n$  dimension, la valeur de la matrice  $\mathbf{B}$  calculée de cette façon n'est pas unique. Broyden propose une formulation qui permet l'unicité de la solution et une convergence de la méthode d'une façon très rapide et presque indépendant de la valeur initiale  $\mathbf{x}_0$ . D'abord la valeur à l'itération  $i = 1$  est donné par

$$\mathbf{B}_i \cdot \delta\mathbf{x}_i = -\mathbf{F}_i \quad (\text{C.8})$$

ensuite la valeur à l'instant  $i + 1$  est donné par la formule de Broyden :

$$\mathbf{B}_{i+1}^{-1} = \mathbf{B}_i^{-1} + \frac{(\delta\mathbf{x}_i - \mathbf{B}_i^{-1} \cdot \delta\mathbf{F}_i) \otimes \delta\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{B}_i^{-1}}{\delta\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{B}_i^{-1} \cdot \delta\mathbf{F}_i} \quad (\text{C.9})$$

de cette façon il est possible de calculer  $\delta\mathbf{x}_{i+1}$  avec

$$\delta\mathbf{x}_{i+1} = -\mathbf{B}_{i+1}^{-1} \cdot \mathbf{F}_{i+1} \quad (\text{C.10})$$

Comme pour le cas précédent, la convergence est obtenue quand  $\delta\mathbf{x} \rightarrow 0$ . Une explication plus détaillée est amenée en [22] et en [55].

## Annexe D

### ETALONNAGE DES CAPTEURS INDUCTIFS

La tension de courant mesurée par les captures inductifs est fonction de la distance (entrefer) entre la structure et le capteur et dépend aussi du matériau utilisé. Dans notre cas, la poutre en acier a présenté pour les capteurs TQ402, une allure assez homogène. Afin d'avoir un comportement linéaire, (figure D.1), il faut que l'entrefer soit compris entre 1 et 6  $mm$ . La sensibilité moyenne, expérimentalement mesurée, est donnée par  $3.5 V/mm$ .

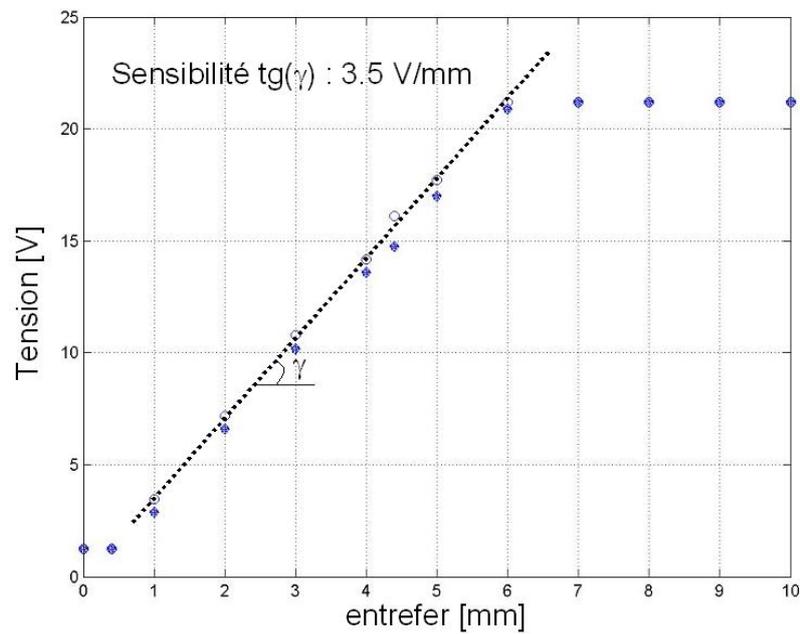


FIG. D.1 Etalonnage des captures inductifs TQ402, ayant une sensibilité moyenne de  $3.5 V/mm$



# Annexe E

## CALCUL DES COEFFICIENTS DE LA MATRICE [A]

### Système à 2 ddl

- **cas non linéaire**

Dans le cas d'un état stick/slip, la force transverse par le contact, ensuite à l'application de la méthode de l'équilibre harmonique, est exprimée par la relation

$$f_{nl} = \frac{k_t}{\pi} [\vartheta^* - 0.5 \sin(2\vartheta^*)] B \cos(\vartheta) - \frac{k_t}{\pi} [\sin(\vartheta^*)]^2 B \sin(\vartheta) \quad (\text{E.1})$$

on remplace les valeurs de  $x_1$  et  $x_2$  de l'équation 3.2 dans l'équation 3.1 et on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} -\omega^2 m_1 a_1 \cos(\omega t) - \omega^2 m_1 b_1 \sin(\omega t) - \omega c_1 a_1 \sin(\omega t) + \omega c_1 b_1 \cos(\omega t) + \\ k_1 a_1 \cos(\omega t) + k_1 b_1 \sin(\omega t) + \frac{k_t}{\pi} [\vartheta^* - 0.5 \sin(2\vartheta^*)] B \cos(\vartheta) - \\ \frac{k_t}{\pi} [\sin(\vartheta^*)]^2 B \sin(\vartheta) = f_0 \cos(\omega t) \\ -\omega^2 m_2 a_2 \cos(\omega t) - \omega^2 m_2 b_2 \sin(\omega t) - \omega c_2 a_2 \sin(\omega t) + \omega c_2 b_2 \cos(\omega t) + \\ k_2 a_2 \cos(\omega t) + k_2 b_2 \sin(\omega t) - \frac{k_t}{\pi} [\vartheta^* - 0.5 \sin(2\vartheta^*)] B \cos(\vartheta) \\ \frac{k_t}{\pi} [\sin(\vartheta^*)]^2 B \sin(\vartheta) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{E.2})$$

en sachant que  $\vartheta = \omega t - \varphi$  et en imposant à la fois  $\omega t = 0$  et  $\omega t = \pi/2$  on obtient un système de quatre équations en quatre non linéaires

$$\left\{ \begin{array}{l} -\omega^2 m_1 a_1 + \omega c_1 b_1 + k_1 a_1 + \frac{k_t}{\pi} [\vartheta^* - 0.5 \sin(2\vartheta^*)] B \cos(\varphi) + \\ \frac{k_t}{\pi} [\sin(\vartheta^*)]^2 B \sin(\varphi) = f_0 \\ -\omega^2 m_1 b_1 - \omega c_1 a_1 + k_1 b_1 + \frac{k_t}{\pi} [\vartheta^* - 0.5 \sin(2\vartheta^*)] B \sin(\varphi) - \\ \frac{k_t}{\pi} [\sin(\vartheta^*)]^2 B \cos(\varphi) = 0 \\ -\omega^2 m_2 a_2 + \omega c_2 b_2 + k_2 a_2 - \frac{k_t}{\pi} [\vartheta^* - 0.5 \sin(2\vartheta^*)] B \cos(\varphi) - \\ \frac{k_t}{\pi} [\sin(\vartheta^*)]^2 B \sin(\varphi) = f_0 \\ -\omega^2 m_2 b_2 - \omega c_2 a_2 + k_2 b_2 - \frac{k_t}{\pi} [\vartheta^* - 0.5 \sin(2\vartheta^*)] B \sin(\varphi) + \\ \frac{k_t}{\pi} [\sin(\vartheta^*)]^2 B \cos(\varphi) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{E.3})$$

mais  $B \cos(\varphi) = a_1 - a_2$  et  $B \sin(\varphi) = b_1 - b_2$  et l'équation E.3 peut être réécrite en forme matricielle

$$[A]\{y\} = \{B\} \quad (\text{E.4})$$

avec

$$\begin{aligned} A_{11} &= -\omega^2 m_1 + k_1 + \frac{k_t}{\pi} [\vartheta^* - 0.5 \sin(2\vartheta^*)] \\ A_{12} &= \omega c_1 + \frac{k_t}{\pi} [\sin(\vartheta^*)]^2 \\ A_{13} &= -\frac{k_t}{\pi} [\vartheta^* - 0.5 \sin(2\vartheta^*)] \\ A_{14} &= -\frac{k_t}{\pi} [\sin(\vartheta^*)]^2 \\ A_{21} &= -A_{12} \\ A_{22} &= A_{11} \\ A_{23} &= -A_{14} \\ A_{24} &= A_{13} \\ A_{31} &= A_{13} \\ A_{32} &= A_{14} \\ A_{33} &= -\omega^2 m_2 + k_2 + \frac{k_t}{\pi} [\vartheta^* - 0.5 \sin(2\vartheta^*)] \\ A_{34} &= \omega c_2 + \frac{k_t}{\pi} [\sin(\vartheta^*)]^2 \\ A_{41} &= -A_{14} \\ A_{42} &= A_{13} \\ A_{43} &= -A_{34} \\ A_{44} &= A_{33} \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

et  $\{y\} = \{a_1 \quad b_1 \quad a_2 \quad b_2\}^t$  et  $\{B\} = \{f_0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^t$ . La non linéarité du système est due à la présence des termes en  $\vartheta^*$  dans la matrice des coefficients, paramètre qui dépend, lui aussi, de la résolution

$$\vartheta^* = \arccos(1 - 2\mu F_n / (k_t B)) \quad (\text{E.6})$$

- **cas linéaire**

Dans ce cas le contact est bloqué. Le système est linéaire et la force transverse est donné par

$$f_{nl} = k_t(x_2 - x_1) \quad (\text{E.7})$$

avec  $k_t$  la raideur tangentielle du contact. En suivant la même procédure d'auparavant le système les coefficients de la matrice [A] sont les suivants :

$$\begin{aligned} A_{11} &= -\omega^2 m_1 + k_1 + k_t \\ A_{12} &= \omega c_1 \\ A_{13} &= -k_t \\ A_{14} &= 0 \\ A_{21} &= -A_{12} \\ A_{22} &= A_{11} \\ A_{23} &= 0 \\ A_{24} &= A_{13} \\ A_{31} &= A_{13} \\ A_{32} &= 0 \\ A_{33} &= -\omega^2 m_2 + k_2 + k_t \\ A_{34} &= \omega c_2 \\ A_{41} &= 0 \\ A_{42} &= A_{13} \\ A_{43} &= -A_{34} \\ A_{44} &= A_{33} \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

**Système à n-ddl**

Pour un système à n-ddl, le système d'équation est donné par

$$\begin{cases} \dots \\ m_i \cdot \ddot{x}_i + c_i \cdot \dot{x}_i + k \cdot x_i + f_{nl_i} - f_{nl_{i-1}} = f_{ex_i} \quad \text{i-ème degré de liberté} \\ \dots \end{cases} \quad (\text{E.9})$$

on défini

$$x_i(t) = a_i \cdot \cos(\omega t) + b_i \cdot \sin(\omega t)$$

$$f_{t_i}(t) = f_{c_i}(B_i) \cdot \cos(\vartheta) + f_{s_i}(B_i) \cdot \sin(\vartheta)$$

$$B_i = [(a_{i+1} - a_i)^2 + (b_{i+1} - b_i)^2]^{1/2}$$

$$\vartheta_i = \omega t - \varphi_i$$

$$\varphi_i = \arctan(b_i/a_i)$$

et  $f_{c_i}$  et  $f_{s_i}$  donné en Annexe B. La force transverse peut se réécrire de la façon suivante :

$$f_{t_i}(t) = \frac{k_{t_i}}{\pi} [\vartheta_i^* - 0.5 \sin(2\vartheta_i^*)] \cdot B_i(\cos(\vartheta)) - \frac{k_{t_i}}{\pi} (\sin^2 \vartheta_i^*) \cdot B_i(\sin(\vartheta))$$

avec

$$\vartheta_i^* = \arccos(1 - 2 \cdot \mu_i F_{n_i} / (k_{t_i} B_i))$$

En substituant la valeur de  $x_i$  et des forces transverses dans équation E.11, on obtient pour chaque degré de liberté l'équation suivante

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \cdot m_i \cdot a_i \cdot \cos(\omega t) - \omega^2 \cdot m_i \cdot b_i \cdot \sin(\omega t) + \\ & -\omega \cdot c_i \cdot a_i \cdot \sin(\omega t) + \omega \cdot c_i \cdot b_i \cdot \cos(\omega t) + k_i \cdot a_i \cdot \cos(\omega t) + \\ & k_i \cdot b_i \cdot \sin(\omega t) + f_{cc_i} B_i \cos(\omega t - \varphi_i) + f_{ss_i} B_i \sin(\omega t - \varphi_i) + \\ & -f_{cc_{i-1}} B_{i-1} \cos(\omega t - \varphi_{i-1}) - f_{ss_{i-1}} B_{i-1} \sin(\omega t - \varphi_{i-1}) = f_{ex_i} \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

avec

$$f_{cc_i} = \frac{k_{t_i}}{\pi} [\vartheta_i^* - 0.5 \sin(2\vartheta_i^*)]$$

$$f_{ss_i} = -\frac{k_{t_i}}{\pi} (\sin^2 \vartheta_i^*)$$

en décomposant pour  $\omega t = 0$  et  $\omega t = \pi/2$ , on obtient pour chaque degré de liberté deux équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dots \\ \dots \\ -\omega^2 \cdot m_i \cdot a_i + \omega \cdot b_i \cdot c + k \cdot a_i + f_{cc_i} \cdot B_i \cos(\varphi_i) - f_{ss_i} \cdot B_i \sin(\varphi_i) + \\ -f_{cc_{i-1}} \cdot B_{i-1} \cos(\varphi_{i-1}) + f_{ss_{i-1}} \cdot B_{i-1} \sin(\varphi_{i-1}) = f_{exc_i} \\ -\omega^2 \cdot m_i \cdot b_i - \omega \cdot a_i \cdot c + k \cdot b_i + f_{cc_i} \cdot B_i \sin(\varphi_i) + f_{ss_i} \cdot B_i \cos(\varphi_i) + \\ -f_{cc_{i-1}} \cdot B_{i-1} \sin(\varphi_{i-1}) - f_{ss_{i-1}} \cdot B_{i-1} \cos(\varphi_{i-1}) = f_{exs_i} \\ \dots \\ \dots \end{array} \right. \quad (\text{E.11})$$

Si l'excitation est ponctuelle  $f_{exs_i} \equiv 0$  et  $f_{exc_i} = f_0$  seulement si  $i=1$ , autrement  $f_{exc_i} = 0$ . Dans le cas d'excitation de type Ordre Moteur par contre les deux composantes sont données par

$$\begin{aligned} f_{exc_i} &= f_0 \cos(i \cdot \phi) \\ f_{exs_i} &= -f_0 \sin(i \cdot \phi) \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

avec  $\phi = EO2\pi/n$  défini dans le chapitre 4. En même temps

$$\begin{aligned} B_i \cos(\varphi_i) &= a_i - a_{i+1} \\ B_i \sin(\varphi_i) &= b_i - b_{i+1} \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

En substituant en E.11 on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \dots \\ \dots \\ a_{i-1} [-f_{cc_{i-1}}] + b_{i-1} [f_{ss_{i-1}}] + a_i [-\omega^2 \cdot m_i + k + f_{cc_i} + f_{cc_{i-1}}] + \\ b_i [-\omega \cdot c_i - f_{ss_i} - f_{ss_{i-1}}] + a_{i+1} [-f_{cc_i}] + b_{i+1} [f_{ss_i}] = f_{exc_i} \\ a_{i-1} [-f_{ss_{i-1}}] + b_{i-1} [-f_{cc_{i-1}}] + a_i [-\omega \cdot c_i + f_{ss_i} + f_{ss_{i-1}}] + \\ b_i [-\omega^2 \cdot m_i + k + f_{cc_i} + f_{cc_{i-1}}] + a_{i+1} [-f_{ss_i}] + b_{i+1} [-f_{cc_i}] = f_{exs_i} \\ \dots \\ \dots \end{array} \right. \quad (\text{E.14})$$

En présence de structures accordées, tous les paramètres entre les aubes sont égaux. On peut définir

$$\begin{aligned}
 T_1 &= -f_{cc_{i-1}} \\
 T_2 &= -f_{ss_{i-1}} \\
 T_3 &= -\omega^2 \cdot m_i + k + f_{cc_i} + f_{cc_{i-1}} \\
 T_4 &= -\omega \cdot c_i - f_{ss_i} - f_{ss_{i-1}} \\
 V_1 &= -T_2 \\
 V_2 &= T_1 \\
 V_3 &= -T_4 \\
 V_4 &= T_3
 \end{aligned} \tag{E.15}$$

Finalement les coefficients de la matrice [A] de dimensionne  $2 \times n$  sont donnés par :

$$[A] = \begin{bmatrix}
 T_3 & T_4 & T_1 & T_2 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & T_1 & T_2 \\
 V_3 & V_4 & V_1 & V_2 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & V_1 & V_2 \\
 T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_1 & T_2 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\
 V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_1 & V_2 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\
 \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_1 & T_2 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_1 & V_2 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot \\
 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_1 & T_2 \\
 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_1 & V_2 \\
 T_1 & T_2 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \\
 V_1 & V_2 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & V_1 & V_2 & V_3 & V_4
 \end{bmatrix} \tag{E.16}$$

Le vecteur des inconnues est donné simplement par et  $\{y\} = \{a_1 \ b_1 \ a_2 \ b_2 \dots a_n \ b_n\}^t$  et  $\{B\} = \{f_{exc_i} \ f_{exc_i}\}^t$  avec différentes valeurs à selon si une force ponctuelle ou une excitation de type Ordre Moteur est choisie.

# Annexe F

## MATRICES DE MASSE RAIDEUR ET AMORTISSEMENT

Pour un système à nddl à masses, concentrées comme montré en figure 3.7, l'énergie cinétique totale l'énergie de déformation et l'énergie de dissipation sont données par F.1

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot \dot{x}^2 \quad U = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \cdot k_i \cdot x^2_i + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} \cdot k_{l_i} \cdot (x^2_{i+1} - x^2_i)^2 + \frac{1}{2} \cdot k_{l_n} \cdot (x_1 - x_n)^2$$

$$D = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \cdot c_i \cdot \dot{x}^2_i + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} \cdot c_{l_i} \cdot (\dot{x}^2_{i+1} - \dot{x}^2_i)^2 + \frac{1}{2} \cdot c_{l_n} \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_n)^2 \quad (\text{F.1})$$

D'après la formulation de Lagrange on obtient que :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} = Q_i \quad \text{avec } i=1\dots n \quad (\text{F.2})$$

avec  $Q_i$  le vecteur des forces généralisées. En développant les dérivées partielles on obtient que les matrices de masse, raideur et amortissement du système à symétrie cyclique sont données par :

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & m_2 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & m_i & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_n \end{bmatrix} \quad (\text{F.3})$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_{l_1} & -k_{l_2} & 0 & \cdot & -k_{l_n} \\ -k_{l_2} & k_2 + k_{l_2} & -k_{l_3} & \cdot & 0 \\ \cdot & -k_{l_i} & k_i + k_{l_i} & -k_{l_{i+1}} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -k_{l_n} & 0 & 0 & -k_{l_{n-1}} & k_n + k_{l_n} \end{bmatrix} \quad (\text{F.4})$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_1 + c_{l_1} & -c_{l_2} & 0 & \cdot & -c_{l_n} \\ -c_{l_2} & c_2 + c_{l_2} & -c_{l_3} & \cdot & 0 \\ \cdot & -k_{l_i} & c_i + c_{l_i} & -c_{l_{i+1}} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -c_{l_n} & 0 & 0 & -c_{l_{n-1}} & c_n + c_{l_n} \end{bmatrix} \quad (\text{F.5})$$

## FOLIO ADMINISTRATIF

### THESE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

NOM : D'AMBROSIO

DATE de SOUTENANCE : 19/11/2004

(avec précision du nom de jeune fille, le cas échéant)

Prénoms : Flavio

TITRE :

**Comportement dynamique des structures en présence de frottement sec. Application aux ensembles aubés**

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 04 ISAL 0074

Ecole doctorale : MEGA

Spécialité : Mécanique

Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 /

et bis

CLASSE :

RESUME :

Une des causes les plus fréquentes d'endommagement des turbomachines est représentée par la rupture à la fatigue des aubes. Des dispositifs de liaisonnement spécifiques (nageoires, dissipateurs sous plate forme) sont utilisés afin de réduire les amplitudes des vibrations par frottement sec. Une démarche numérique expérimentale permet la validation des procédures mises en œuvre pour modéliser le comportement non linéaire de ce type de structure. Parallèlement une nouvelle méthodologie d'identification du type de contact le mieux adapté est introduite à partir de l'analyse du comportement dynamique. Les causes réelles de l'aplatissement des pics des réponses forcées, sont analysées grâce à l'évaluation de l'énergie dissipée et des changements des états de contact lors des phases stick/slip (bloqué/glissant). Finalement, une procédure numérique est conduite avec pour objectifs principaux d'obtenir, dès la conception, des précieuses indications quant aux niveaux de réponses des aubes et quant à leur sensibilité au phénomène du désaccordage.

MOTS-CLES :

Dynamique non linéaire, Frottement sec, MHBM, Désaccordage, Expérimental, Aubes liaisonnées

Laboratoire (s) de recherches : LDMS

Directeur de thèse: Georges JACQUET-RICHARDET

Président de jury :

Composition du jury :

J.J. BARRAU Professeur (Université Paul Sabatier, Toulouse)

E. CHATELET Maître de Conférences (INSA de Lyon)

M.M. GOLA Professeur (Politecnico di Torino)

G. JACQUET-RICHARDET Professeur (INSA de Lyon)

F. THOUVEREZ Professeur (Ecole Centrale de Lyon)

R. VILAGINES HDR (Institut Français du Pétrole)