N° d'ordre : 03 ISAL 0091 Année 2003

THESE

Présentée devant

L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

Pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR

Ecole doctorale : Ecole Doctorale des sciences pour l'ingénieur de Lyon
Formation doctorale : Mécanique

Par

Matthieu DUCHEMIN
Ingénieur I.N.S.A.

Contribution à l'étude du comportement dynamique d'un rotor embarqué

Soutenue le : 11 décembre 2003 *devant la Commission d'examen*

Jury : MM.	**A. BERLIOZ**	*Professeur*
	R. DUFOUR	*Professeur*
	G. FERRARIS	*Professeur*
	B. PESEUX (rapporteur)	*Professeur*
	J. PIRANDA (rapporteur)	*Professeur*
	F. THOUVEREZ	*Professeur*

Cette thèse a été préparée au Laboratoire de Dynamique des Machines et des Structures de l'INSA de Lyon

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

***Directeur* : STORCK A.**

***Professeurs* :**

AUDISIO S.	PHYSICOCHIMIE INDUSTRIELLE
BABOT D.	CONT. NON DESTR. PAR RAYONNEMENTS IONISANTS
BABOUX J.C.	GEMPPM***
BALLAND B.	PHYSIQUE DE LA MATIERE
BAPTISTE P.	PRODUCTIQUE ET INFORMATIQUE DES SYSTEMES MANUFACTURIERS
BARBIER D.	PHYSIQUE DE LA MATIERE
BASTIDE J.P.	LAEPSI****
BAYADA G.	MECANIQUE DES CONTACTS
BENADDA B.	LAEPSI****
BETEMPS M.	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
BIENNIER F.	PRODUCTIQUE ET INFORMATIQUE DES SYSTEMES MANUFACTURIERS
BLANCHARD J.M.	LAEPSI****
BOISSON C.	VIBRATIONS-ACOUSTIQUE
BOIVIN M. (Prof. émérite)	MECANIQUE DES SOLIDES
BOTTA H.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Développement Urbain
BOTTA-ZIMMERMANN M. (Mme)	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Développement Urbain
BOULAYE G. (Prof. émérite)	INFORMATIQUE
BOYER J.C.	MECANIQUE DES SOLIDES
BRAU J.	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Thermique du bâtiment
BREMOND G.	PHYSIQUE DE LA MATIERE
BRISSAUD M.	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
BRUNET M.	MECANIQUE DES SOLIDES
BRUNIE L.	INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION
BUREAU J.C.	CEGELY*
CAVAILLE J.Y.	GEMPPM***
CHANTE J.P.	CEGELY*- Composants de puissance et applications
CHOCAT B.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Hydrologie urbaine
COMBESCURE A.	MECANIQUE DES CONTACTS
COUSIN M.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Structures
DAUMAS F. (Mme)	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Energétique et Thermique
DOUTHEAU A.	CHIMIE ORGANIQUE
DUFOUR R.	MECANIQUE DES STRUCTURES
DUPUY J.C.	PHYSIQUE DE LA MATIERE
EMPTOZ H.	RECONNAISSANCE DE FORMES ET VISION
ESNOUF C.	GEMPPM***
EYRAUD L. (Prof. émérite)	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
FANTOZZI G.	GEMPPM***
FAVREL J.	PRODUCTIQUE ET INFORMATIQUE DES SYSTEMES MANUFACTURIERS
FAYARD J.M.	BIOLOGIE FONCTIONNELLE, INSECTES ET INTERACTIONS
FAYET M.	MECANIQUE DES SOLIDES
FERRARIS-BESSO G.	MECANIQUE DES STRUCTURES
FLAMAND L.	MECANIQUE DES CONTACTS
FLORY A.	INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATIONS
FOUGERES R.	GEMPPM***
FOUQUET F.	GEMPPM***
FRECON L.	REGROUPEMENT DES ENSEIGNANTS CHERCHEURS ISOLES
GERARD J.F.	INGENIERIE DES MATERIAUX POLYMERES
GERMAIN P.	LAEPSI****
GIMENEZ G.	CREATIS**
GOBIN P.F. (Prof. émérite)	GEMPPM***
GONNARD P.	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
GONTRAND M.	PHYSIQUE DE LA MATIERE
GOUTTE R. (Prof. émérite)	CREATIS**
GOUJON L.	GEMPPM***
GOURDON R.	LAEPSI****.
GRANGE G.	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
GUENIN G.	GEMPPM***
GUICHARDANT M.	BIOCHIMIE ET PHARMACOLOGIE
GUILLOT G.	PHYSIQUE DE LA MATIERE
GUINET A.	PRODUCTIQUE ET INFORMATIQUE DES SYSTEMES MANUFACTURIERS
GUYADER J.L.	VIBRATIONS-ACOUSTIQUE
GUYOMAR D.	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
HEIBIG A.	MATHEMATIQUE APPLIQUEES DE LYON
JACQUET-RICHARDET G.	MECANIQUE DES STRUCTURES
JAYET Y.	GEMPPM***
JOLION J.M.	RECONNAISSANCE DE FORMES ET VISION
JULLIEN J.F.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Structures
JUTARD A. (Prof. émérite)	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
KASTNER R.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Géotechnique
KOULOUMDJIAN J.	INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION
LAGARDE M.	BIOCHIMIE ET PHARMACOLOGIE
LALANNE M. (Prof. émérite)	MECANIQUE DES STRUCTURES
LALLEMAND A.	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Energétique et thermique
LALLEMAND M. (Mme)	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Energétique et thermique
LAUGIER A.	PHYSIQUE DE LA MATIERE

LAUGIER C.	BIOCHIMIE ET PHARMACOLOGIE
LAURINI R.	INFORMATIQUE EN IMAGE ET SYSTEMES D'INFORMATION
LEJEUNE P.	UNITE MICROBIOLOGIE ET GENETIQUE
LUBRECHT A.	MECANIQUE DES CONTACTS
MASSARD N.	INTERACTION COLLABORATIVE TELEFORMATION TELEACTIVITE
MAZILLE H.	PHYSICOCHIMIE INDUSTRIELLE
MERLE P.	GEMPPM***
MERLIN J.	GEMPPM***
MIGNOTTE A. (Mle)	INGENIERIE, INFORMATIQUE INDUSTRIELLE
MILLET J.P.	PHYSICOCHIMIE INDUSTRIELLE
MIRAMOND M.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Hydrologie urbaine
MOREL R.	MECANIQUE DES FLUIDES ET D'ACOUSTIQUES
MOSZKOWICZ P.	LAEPSI****
NARDON P. (Prof. émérite)	BIOLOGIE FONCTIONNELLE, INSECTES ET INTERACTIONS
NIEL E.	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
NORTIER P.	DREP
ODET C.	CREATIS**
OTTERBEIN M. (Prof. émérite)	LAEPSI****
PARIZET E.	VIBRATIONS-ACOUSTIQUE
PASCAULT J.P.	INGENIERIE DES MATERIAUX POLYMERES
PAVIC G.	VIBRATIONS-ACOUSTIQUE
PELLETIER J.M.	GEMPPM***
PERA J.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Matériaux
PERRIAT P.	GEMPPM***
PERRIN J.	INTERACTION COLLABORATIVE TELEFORMATION TELEACTIVITE
PINARD P. (Prof. émérite)	PHYSIQUE DE LA MATIERE
PINON J.M.	INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION
PONCET A.	PHYSIQUE DE LA MATIERE
POUSIN J.	MODELISATION MATHEMATIQUE ET CALCUL SCIENTIFIQUE
PREVOT P.	INTERACTION COLLABORATIVE TELEFORMATION TELEACTIVITE
PROST R.	CREATIS**
RAYNAUD M.	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Transferts Interfaces et Matériaux
REDARCE H.	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
RETIF J-M.	CEGELY*
REYNOUARD J.M.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Structures
RIGAL J.F.	MECANIQUE DES SOLIDES
RIEUTORD E. (Prof. émérite)	MECANIQUE DES FLUIDES
ROBERT-BAUDOUY J. (Mme) (Prof. émérite)	GENETIQUE MOLECULAIRE DES MICROORGANISMES
ROUBY D.	GEMPPM***
ROUX J.J.	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON – Thermique de l'Habitat
RUBEL P.	INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION
SACADURA J.F.	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Transferts Interfaces et Matériaux
SAUTEREAU H.	INGENIERIE DES MATERIAUX POLYMERES
SCAVARDA S.	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
SOUIFI A.	PHYSIQUE DE LA MATIERE
SOUROUILLE J.L.	INGENIERIE INFORMATIQUE INDUSTRIELLE
THOMASSET D.	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
THUDEROZ C.	ESCHIL – Equipe Sciences Humaines de l'Insa de Lyon
UBEDA S.	CENTRE D'INNOV. EN TELECOM ET INTEGRATION DE SERVICES
VELEX P.	MECANIQUE DES CONTACTS
VIGIER G.	GEMPPM***
VINCENT A.	GEMPPM***
VRAY D.	CREATIS**
VUILLERMOZ P.L. (Prof. émérite)	PHYSIQUE DE LA MATIERE

***Directeurs de recherche C.N.R.S.* :**

BAIETTO-CARNEIRO M-C. (Mme)	MECANIQUE DES CONTACTS ET DES SOLIDES
BERTHIER Y.	MECANIQUE DES CONTACTS
CONDEMINE G.	UNITE MICROBIOLOGIE ET GENETIQUE
COTTE-PATAT N. (Mme)	UNITE MICROBIOLOGIE ET GENETIQUE
ESCUDIE D. (Mme)	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON
FRANCIOSI P.	GEMPPM***
MANDRAND M.A. (Mme)	UNITE MICROBIOLOGIE ET GENETIQUE
POUSIN G.	BIOLOGIE ET PHARMACOLOGIE
ROCHE A.	INGENIERIE DES MATERIAUX POLYMERES
SEGUELA A.	GEMPPM***

***Directeurs de recherche I.N.R.A.* :**

FEBVAY G.	BIOLOGIE FONCTIONNELLE, INSECTES ET INTERACTIONS
GRENIER S.	BIOLOGIE FONCTIONNELLE, INSECTES ET INTERACTIONS
RAHBE Y.	BIOLOGIE FONCTIONNELLE, INSECTES ET INTERACTIONS

***Directeurs de recherche I.N.S.E.R.M.* :**

PRIGENT A.F. (Mme)	BIOLOGIE ET PHARMACOLOGIE
MAGNIN I. (Mme)	CREATIS**

** **CEGELY***   *CENTRE DE GENIE ELECTRIQUE DE LYON*
***** CREATIS***   *CENTRE DE RECHERCHE ET D'APPLICATIONS EN TRAITEMENT DE L'IMAGE ET DU SIGNAL*
******GEMPPM***   *GROUPE D'ETUDE METALLURGIE PHYSIQUE ET PHYSIQUE DES MATERIAUX*
*******LAEPSI***   *LABORATOIRE D'ANALYSE ENVIRONNEMENTALE DES PROCEDES ET SYSTEMES INDUSTRIELS*

INSA DE LYON
DEPARTEMENT DES ETUDES DOCTORALES
MARS 03

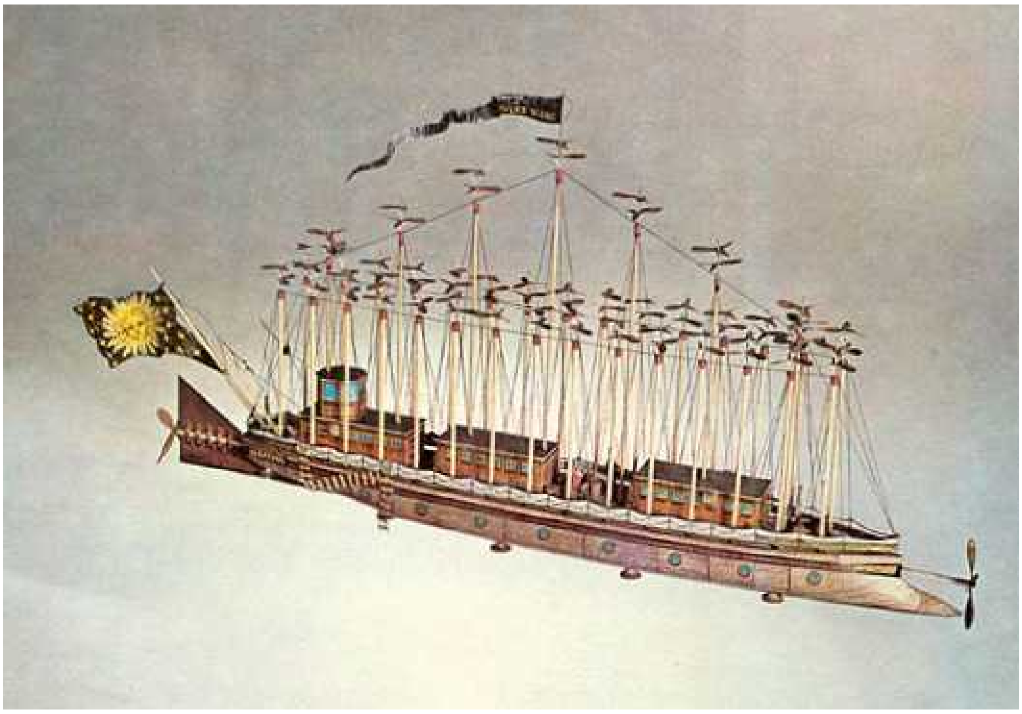
Ecoles Doctorales et Diplômes d'Etudes Approfondies

habilités pour la période 1999-2003

ECOLES DOCTORALES **n° code national**	**RESPONSABLE PRINCIPAL**	CORRESPONDANT INSA	**DEA INSA** **n° code national**	**RESPONSABLE DEA INSA**
CHIMIE DE LYON **(Chimie, Procédés, Environnement)** **EDA206**	M. D. SINOU UCBL1 04.72.44.62.63 Sec 04.72.44.62.64 Fax 04.72.44.81.60	**M. R. GOURDON** 87.53 Sec 84.30 Fax 87.17	Chimie Inorganique **910643**	
			Sciences et Stratégies Analytiques **910634**	
			Sciences et Techniques du Déchet **910675**	M. R. GOURDON Tél 87.53 Fax 87.17
ECONOMIE, ESPACE ET MODELISATION DES COMPORTEMENTS **(E^2MC)** **EDA417**	M.A. BONNAFOUS LYON 2 04.72.72.64.38 Sec 04.72.72.64.03 Fax 04.72.72.64.48	**Mme M. ZIMMERMANN** 60.91 Fax 87.96	Villes et Sociétés **911218**	Mme M. ZIMMERMANN Tél 60.91 Fax 87.96
			Dimensions Cognitives et Modélisation **992678**	M. L. FRECON Tél 82.39 Fax 85.18
ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE **(E.E.A.)** **EDA160**	**M. D. BARBIER** INSA DE LYON 85.47 Fax 60.82		Automatique Industrielle **910676**	M. M. BETEMPS Tél 85.59 Fax 85.35
			Dispositifs de l'Electronique Intégrée **910696**	M. D. BARBIER Tél 85.47 Fax 60.82
			Génie Electrique de Lyon **910065**	M. J.P. CHANTE Tél 87.26 Fax 85.30
			Images et Systèmes **992254**	Mme I. MAGNIN Tél 85.63 Fax 85.26
EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE , MODELISATION **(E2M2)** **EDA403**	**M. J.P FLANDROIS** UCBL1 04.78.86.31.50 Sec 04.78.86.31.52 Fax 04.78.86.31.49	**M. S. GRENIER** 79.88 Fax 85.34	Analyse et Modélisation des Systèmes Biologiques **910509**	M. S. GRENIER Tél 79.88 Fax 85.34
INFORMATIQUE ET INFORMATION POUR LA SOCIETE **(EDIIS)** **EDA 407**	**M. J.M. JOLION** INSA DE LYON 87.59 Fax 80.97		Documents Multimédia, Images et Systèmes d'Information Communicants **992774**	M. A. FLORY Tél 84.66 Fax 85.97
			Extraction des Connaissances à partir des Données **992099**	M. J.F. BOULICAUT Tél 89.05 Fax 87.13
			Informatique et Systèmes Coopératifs pour l'Entreprise **950131**	M. A. GUINET Tél 85.94 Fax 85.38
INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE **(EDISS)** **EDA205**	**M. A.J. COZZONE** UCBL1 04.72.72.26.72 Sec 04.72.72.26.75 Fax 04.72.72.26.01	**M. M. LAGARDE** 82.40 Fax 85.24	Biochimie **930032**	M. M. LAGARDE Tél 82.40 Fax 85.24
MATERIAUX DE LYON **UNIVERSITE LYON 1** **EDA 034**	**M. J. JOSEPH** ECL 04.72.18.62.44 Sec 04.72.18.62.51 Fax 04.72.18.60.90	**M. J.M. PELLETIER** 83.18 Fax 85.28	Génie des Matériaux : Microstructure, Comportement Mécanique, Durabilité **910527**	M. J.M.PELLETIER Tél 83.18 Fax 85.28
			Matériaux Polymères et Composites **910607**	M. H. SAUTEREAU Tél 81.78 Fax 85.27
			Matière Condensée, Surfaces et Interfaces **910577**	M. G. GUILLOT Tél 81.61 Fax 85.31
MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE FONDAMENTALE **(Math IF)** **EDA 409**	**M. F. WAGNER** UCBL1 04.72.43.27.86 Fax 04.72.43.00.35	**M. J. POUSIN** 88.36 Fax 85.29	Analyse Numérique, Equations aux dérivées partielles et Calcul Scientifique **910281**	M. G. BAYADA Tél 83.12 Fax 85.29
MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE **(MEGA)** **EDA162**	**M. J. BATAILLE** ECL 04.72.18.61.56 Sec 04.72.18.61.60 Fax 04.78.64.71.45	**M. G.DALMAZ** 83.03 Fax 04.72.89.09.80	Acoustique **910016**	M. J.L. GUYADER Tél 80.80 Fax 87.12
			Génie Civil **992610**	M. J.J.ROUX Tél 84.60 Fax 85.22
			Génie Mécanique **992111**	M. G. DALMAZ Tél 83.03 Fax 04.78.89.09.80
			Thermique et Energétique **910018**	M. J. F. SACADURA Tél 81.53 Fax 88.11

En grisé : Les Ecoles doctorales et DEA dont l'INSA est établissement principal

"Mobilis in mobile" : ***Le mouvement dans le mouvement***
Jules Verne



Ladislav Badalec : « l'Albatros », d'après Jules Verne

AVANT PROPOS

L'étude présentée ici a été effectuée au Laboratoire de Dynamique des Machines et des Structures de l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon sous la direction de Monsieur le Professeur G. FERRARIS. Qu'il me soit permis ici de lui exprimer ma profonde gratitude pour m'avoir accueilli dans son Laboratoire et pour m'avoir fait confiance pour mener à bien ces travaux de recherche.

Je tiens à adresser mes sincères remerciements à Monsieur A. BERLIOZ, Professeur, pour son soutien permanent, ses compétences et ses conseils dans la réalisation de la partie expérimentale, ainsi que pour son orientation avisée dans l'étude non linéaire.

Je suis très sensible à l'honneur que me font Messieurs les Professeurs B. PESEUX de l'Ecole Centrale de Nantes et J. PIRANDA de l'Université de Franche-Comté en acceptant de juger ce travail et d'en être rapporteurs et membres du jury.

Je souhaite également remercier Messieurs les Professeurs R. DUFOUR de l'INSA de Lyon et F. THOUVEREZ de l'Ecole Centrale de Lyon pour l'importance qu'ils accordent à mon travail en acceptant d'être membres du jury.

Une partie de ce travail avait été débutée par Monsieur J. CAMPEDELLI. Je le remercie pour sa collaboration et son amitié.

A tous les membres du Laboratoire, j'adresse ma sympathie.

Enfin, je tiens à remercier toutes les personnes qui de manière directe ou indirecte ont contribué à l'aboutissement de ce travail.

A Véro.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Les machines tournantes telles que les pompes, les turbines (ou turbomachines) et les compresseurs sont devenues depuis de nombreuses années des éléments indispensables pour l'industrie moderne. D'une manière générale, les turbomachines ont pour but d'assurer un échange d'énergie entre un rotor tournant à vitesse constante et un débit permanent de fluide. Dans les centrales électriques, les groupes turboalternateurs permettent la transformation de l'énergie mécanique en énergie électrique. Dans la plupart des industries, les pompes sont présentes pour assurer la circulation des fluides. Les machines tournantes sont aussi des composants pour la plupart des véhicules : turboréacteur pour un avion, turbocompresseur automobile, turbines de bateaux ou de sous-marins.

Les performances de ces systèmes sont sans cesse améliorées afin d'augmenter leur rendement, de diminuer leur poids ou leur bruit. Pour cela, l'amplitude de déformation de l'arbre doit être maîtrisée et ses fréquences de résonance connues afin d'éviter une trop grande vibration du système. En effet, une trop grande amplitude de vibration engendre un moindre rendement, un bruit trop important, et peut même aboutir à l'endommagement du système : rupture par fatigue, endommagement des paliers, frottement rotor/stator. L'étude de la dynamique des machines tournantes est donc plus que jamais d'actualité.

Afin de concevoir de nouvelles turbomachines plus performantes ou dans l'optique de contrôler leur fonctionnement, il est nécessaire de prévoir le comportement en torsion (montée ou descente en vitesse d'un rotor) et en flexion des rotors. Dans certains cas comme pour l'étude des rotors couplés par engrenage, le couplage flexion-torsion a également été l'objet de travaux. Ici, seuls les mouvements de flexion sont pris en compte. L'étude concerne les monorotors tournant à vitesse constante.

De manière classique, une étude en flexion porte sur la détermination des vitesses critiques, l'évaluation de la réponse en régime permanent à des forces extérieures, et la recherche de possibles instabilités. Le comportement dynamique d'un rotor monté sur un support fixe est actuellement bien maîtrisé, même si des développements sont encore réalisés. Depuis peu, des études se sont intéressées au comportement des rotors dont le support est en mouvement (translation et/ou rotation) permanent ou transitoire. Les déplacements du support peuvent se diviser en deux catégories : les excitations de type séisme et les déplacements de type embarqué (le support du rotor est par exemple dans un véhicule en mouvement). Diverses études théoriques ont été développées en considérant un rotor dont le support est rigide, ou flexible, mais ces études sont la plupart du temps appliquées à des excitations de type séisme. Des développements restent à réaliser afin de prévoir le comportement des rotors embarqués.

Les travaux présentés dans ce mémoire concernent la modélisation du comportement dynamique en flexion de rotors dont le support rigide est en déplacement. L'étude est développée en trois parties :

Première partie

La première partie est séparée en 4 chapitres. Elle concerne la mise en équation générale pour un rotor dont le support est soumis à un mouvement quelconque (3 translations et 3 rotations). Cette mise en équation prend en compte les possibles dissymétries de l'arbre et du disque. Dans le premier chapitre, les différentes hypothèses de modélisation sont exposées. Les caractéristiques des différents éléments qui composent un rotor sont présentées dans le chapitre 2 : énergie cinétique et énergie de déformation d'un arbre, énergie cinétique d'un disque, travail des forces extérieures dues aux paliers, énergie cinétique d'un balourd. Dans le troisième chapitre, un modèle simple est développé à partir de la méthode de Rayleigh-Ritz afin d'étudier des phénomènes de base. Les équations non-linéaires du mouvement sont obtenues par application des équations de Lagrange. Afin de traiter des systèmes réels, une modélisation par éléments finis est développée dans le chapitre 4.

Deuxième partie

Dans cette partie, les phénomènes de base relatifs à la dynamique des rotors dont le support est en mouvement sont étudiés sur le modèle simple. Dans les premiers chapitres, diverses études sont effectuées sur des mouvements simples : translation simple, translation sinusoïdale, rotation constante, rotation accélérée. Pour tous ces mouvements, les équations de déformation restent linéaires et des solutions analytiques sont présentées. Par contre, dans le cas d'un mouvement de rotation sinusoïdale, des termes paramétriques viennent s'ajouter dans les équations et les solutions analytiques ne peuvent être calculées. Le dernier chapitre de cette partie concerne une étude d'instabilité réalisée sur ce mouvement à l'aide de la méthode des échelles multiples. Cette méthode permet de déterminer les zones d'instabilité. Une résolution pas-à-pas est utilisée pour vérifier ces zones d'instabilité sur le modèle de Rayleigh-Ritz.

Troisième partie

D'après les différentes études effectuées dans la deuxième partie, la modification des équations lors d'un mouvement de rotation du support fait apparaître plus de phénomènes intéressants que lors d'un mouvement de translation. Un dispositif expérimental est donc développé afin de réaliser des applications sur ce mouvement. Les résultats sont comparés à une résolution pas-à-pas du modèle éléments finis. Le premier chapitre de cette partie présente le dispositif expérimental créé pour cette étude. Le recalage du modèle est réalisé à partir des fréquences en rotation. L'étude de la réponse du rotor soumis à une excitation de type choc permet de connaître précisément l'amortissement du système. Le modèle alors défini est suffisamment proche de la réalité pour pouvoir faire des comparaisons expérimentation/simulation en fonction de l'amplitude d'excitation, et des comparaisons d'orbites pour certaines fréquences particulières. Les instabilités montrées dans la deuxième partie sont mises en évidence à l'aide d'une étude des fréquences de résonances du système selon l'amplitude du mouvement oscillatoire angulaire.

Etat de l'art :

Le comportement dynamique des rotors dont le support est fixe est étudiée depuis de nombreuses années. La méthode des matrices de transfert (*Myklestad [28], Prohl [32]*) a laissé sa place à différentes méthodes plus précises. Un des modèles souvent employé est le modèle de Jeffcott. Dans *Ishida [19]*, ce modèle est utilisé pour étudier les oscillations non stationnaires d'un rotor lorsque celui-ci accélère en passant une vitesse critique. *Ecker [12]* développe une méthode pour supprimer les vibrations d'un rotor sans balourd, simplement excité par son amortissement interne et les forces agissant entre le rotor et le stator. La limitation du modèle de Jeffcott réside dans le fait que celui-ci ne prend pas en compte les effets gyroscopiques. Par conséquent, les fréquences de résonance de ce modèle de rotor sont indépendantes de sa vitesse de rotation. La méthode de Rayleigh-Ritz est aussi beaucoup utilisée car elle permet d'obtenir un modèle simple de rotor à deux degrés de liberté (*Tondl [37], Lalanne [24]*), mais elle est peu précise dès qu'il s'agit d'étudier des systèmes réels.

Durant ces dernières années, le modèle le plus utilisé est développé à partir de la méthode des éléments finis (*Nelson [31], Tran [38]*). Grâce à cette méthode, il est possible de déterminer avec précision les fréquences propres et les facteurs d'amortissement ainsi que la réponse à diverses excitations. De plus, cette méthode est modulaire car chaque élément du rotor est défini séparément. Des éléments peuvent donc être ajoutés ou retirés selon les phénomènes qui veulent être mis en évidence. La méthode des éléments finis a ainsi été utilisée pour étudier les phénomènes d'amortissement en dynamique des rotors (*Kassaï [21]*) et pour l'étude de l'influence d'un couple axial sur le comportement des rotors (*Dufour [10]*). Cette méthode a également été appliquée à l'étude des rotors dont l'arbre tourne à vitesse variable (*Lacroix [23], Al Majid [2]*). De nombreux résultats concernant la dynamique des rotors dont le support est fixe pour les modèles de Rayleigh-Ritz et éléments finis sont présentés dans *Lalanne [24]*.

Des études récentes se sont également intéressées à des systèmes rotor-paliers-fondation flexible. C'est le cas par exemple de *Bonello [6]* qui développe un modèle de rotor sur fondation flexible grâce à une technique basée sur l'impédance mécanique des éléments du système. Cette technique permet de prendre en compte à la fois un modèle théorique et des caractéristiques expérimentales. *Edwards [13]* utilise la même technique pour identifier expérimentalement l'excitation et les paramètres du support pour un système rotor-paliers-fondation afin de réduire ses vibrations.

Récemment, étant donnée l'évolution des normes de sécurité sur les tremblements de terre, une direction de recherche privilégiée est le comportement des rotors dont le support est soumis à un séisme. Différents modèles de rotor sont utilisés lors de l'étude d'une réponse à un séisme. Ils sont plus ou moins précis selon que le rotor et/ou les paliers sont rigides ou non, et selon que sont prises en compte les rotations du support ou non. *Samali [33]* étudie les vibrations aléatoires d'un rotor soumis à un séisme. Son modèle prend en compte les 6 composants de mouvement possibles pour le support (3 translations et 3 rotations), mais considère le rotor comme un arbre rigide posé sur des paliers flexibles. *Suarez [35]* et *Singh [34]* prennent en compte la flexibilité de l'arbre pour développer les équations du mouvement à l'aide de la méthode des éléments finis pour un rotor dont le support est soumis à 6 composants de mouvement. Néanmoins, ils ne prennent pas en compte certains termes paramétriques et autres pouvant causer des complications analytiques afin de pouvoir réaliser une analyse modale et une réponse par une méthode spectrale. Dans *Subbiah [36]*, les équations sont résolues à partir d'une densité spectrale de puissance. Une méthode spectrale est également utilisée par *Beley [3]* sur un système rotor-paliers-fondation prenant en compte la flexibilité du support. Les équations développées dans *Suarez [35]* et *Beley [3]* sont presque identiques à celles présentées dans ce mémoire mais certains termes sont manquants et les modèles développées ne prennent pas en compte les possibles asymétries de l'arbre et du disque.

Les exigences accrues en matière de conception des machines industrielles orientent également les recherches vers l'étude des instabilités en dynamique des rotors. Les équations à coefficients périodiques, dont la forme la plus simple est l'équation de Mathieu, ont fait l'objet de nombreux travaux (*Campbell [7]*). Dans le laboratoire, ils ont concerné essentiellement les tiges de forage dans lesquelles l'outil génère des excitations paramétriques (*Berlioz [4]*, *Berlioz [5]*, *Dufour [11]*). Des études sur les machines tournantes ont par exemple été réalisées sur les vibrations non-stationnaires d'un rotor, posé sur paliers non-linéaires, en rotation constante *Yamamoto [40]*, *Yamamoto [41]* ou durant son accélération *Ishida [18]*. La méthode des échelles multiples a prouvé son efficacité dans l'étude des instabilités des équations différentielles comportant des termes paramétriques. *El Shafei [14]* utilise cette méthode pour résoudre les équations de Reynolds sur un palier lisse fini, et *Kreider [22]* l'utilise pour étudier la résonance interne de 2$^{\text{ème}}$ ordre d'une poutre sous flambage. *Ma [26], Yamamoto [39]* et *Huang [17]* étudient la stabilité d'une poutre en rotation à vitesse variable, appliquant cette méthode sur un système de deux équations avec des termes croisés. Mais la première application de cette méthode sur des systèmes gyroscopiques à termes paramétriques vient de *Nayfeh [29]* et *Nayfeh [30]*.

Depuis de nombreuses études ont été réalisées à l'aide de la méthode des échelles multiples sur différents modèles de rotor. Par exemple, *Ji [17]* traite des vibrations d'un rotor posé sur des paliers non linéaires. Cette étude est basée sur l'application des échelles multiples sur un rotor de type Timoshenko. Des simulations numériques sont réalisées sur le système libre et en oscillation forcée. Des travaux ont également été réalisés sur les instabilités d'un rotor asymétrique (*Ganesan [12], Ganesan [13]*). Le modèle utilisé étant cette fois un rotor de type Jeffcott (ne prenant pas en compte l'effet gyroscopique), différentes études ont été effectuées selon la présence d'amortissement ou non. Toutefois, la méthode des échelles multiples n'avait jusque là pas été appliqué à un modèle de rotor embarqué. L'étude des instabilités du chapitre 3 de la 2$^{\text{ème}}$ partie a été effectuée à l'aide de cette méthode.

PARTIE I : MISE EN EQUATION

Cette partie a pour but de développer les équations du mouvement afin de prévoir le comportement dynamique d'un rotor dont le support est soumis à un mouvement quelconque connu. Les caractéristiques de chaque élément composant un rotor sont d'abord développées. La méthode de Rayleigh-Ritz est utilisée pour mettre en place un modèle permettant de traiter des cas simples et de mettre en évidence des phénomènes de base. Un modèle éléments finis est développé dans le souci de traiter des systèmes réels. Les équations du mouvement du rotor sont obtenues par application des équations de Lagrange.

I.1. Hypothèses de modélisation

D'une manière générale, un rotor est constitué d'un arbre reposant sur des paliers, et comportant un ou plusieurs disques. Dans cette étude, les sollicitations prises en compte sont le balourd et les déplacements imposés du support supposé rigide. Les équations du mouvement sont obtenues à partir des énergies cinétiques et de déformation des différents composants du rotor et de l'application des équations de Lagrange. La démarche utilisée est semblable à celle développée dans *Lalanne [24]* pour la prévision du comportement dynamique de rotors dont le support est fixe.

Les hypothèses suivantes sont retenues :

- l'arbre est déformable
- les disques sont rigides
- le rotor tourne à une vitesse constante Ω
- les possibles asymétries de l'arbre et des disques sont prises en compte

Ces hypothèses correspondent à la majorité des rotors industriels. Les cas de disque souple et de variations rapides de vitesse conduisent à des développements spécifiques (*Al Majid [2]*) qui ne sont pas traités dans cette étude.

L'établissement des équations du mouvement (*Duchemin [8]*, *Duchemin [9]*) nécessite les étapes suivantes :

- Calcul des différentes énergies des composants du système : énergies cinétiques du disque, de l'arbre et du balourd, énergie de déformation de l'arbre, et travail virtuel des forces extérieures.
- Choix d'un modèle : la méthode de Rayleigh-Ritz est utilisée pour l'étude des phénomènes de base, et celle des éléments finis pour l'étude de systèmes réels.

- Application des équations de Lagrange sous la forme :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}=F_{q_i} \tag{1.1}$$

où $N\left(1 \le i \le N\right)$ est le nombre de degrés de liberté, les q_i sont les coordonnées généralisées et les F_{q_i} sont les forces généralisées. Le symbole · désigne la dérivée par rapport au temps.

- Mise en place de méthodes numériques pour la résolution des équations du mouvement.

I.2. Calcul des énergies des différents composants du rotor

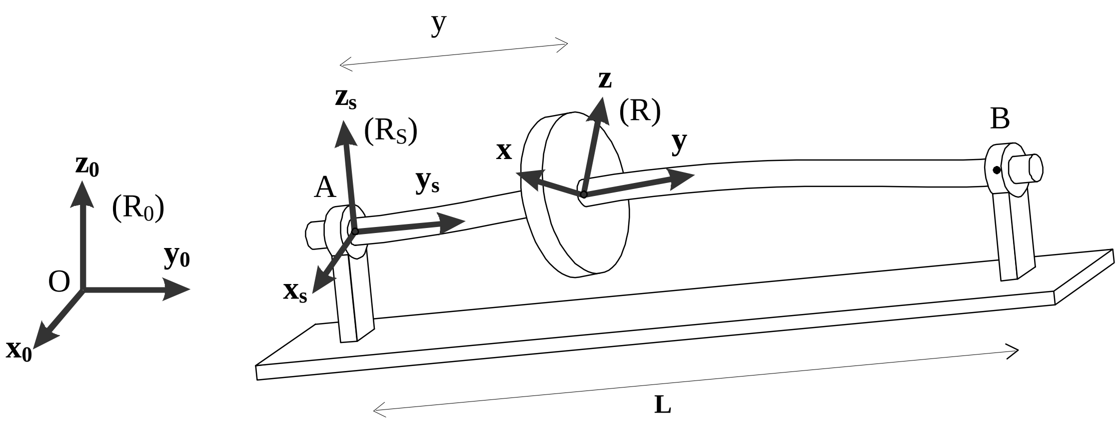


Figure I.1 : Définition des repères

Afin de prendre en compte la mobilité du support, trois repères principaux sont définis: $R_0(x_0,y_0,z_0)$ est le repère galiléen, $R_S(x_S,y_S,z_S)$ est le repère lié au support indéformable, et $R(x,y,z)$ est le repère courant, tournant, lié au rotor (cf. Figure I.1) .

Pour l'expression des énergies cinétiques de l'arbre et du disque, les vecteurs vitesse et rotation du repère R par rapport au repère R_0 doivent être calculés.

I.2.a. Calculs préliminaires

De manière classique en dynamique des rotors, la rotation du repère R lié à l'arbre déformé par rapport au repère R_S est définie par les angles ψ, θ, et Φ (cf. Figure I.2). L'orientation du repère R est définie par :

- une rotation d'un angle ψ (précession) autour de z_S (repère intermédiaire $R_1(x_1,y_1,z_1)$)
- une rotation d'un angle θ (nutation) autour du nouvel axe x_1 (repère intermédiaire $R_2(x_2,y_2,z_2)$)
- une rotation d'un angle Φ (rotation propre) autour de l'axe final y // y_2 (repère final $R(x,y,z)$).

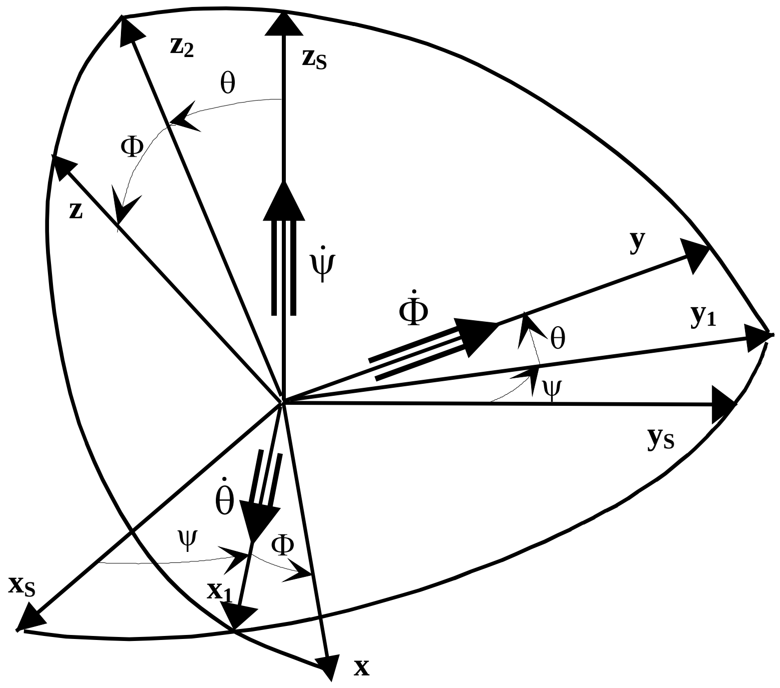


Figure I.2 : Repères intermédiaires utilisés pour passer du repère R_S lié au support au repère R lié à l'arbre déformé

Le vecteur rotation de R par rapport à R_S exprimé dans R s'écrit :

$$\vec{\Omega}_R^S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}_{Rs} + \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{R2} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\Phi} \\ 0 \end{bmatrix}_{R} \tag{1.2}$$

$$\vec{\Omega}_R^S = \begin{bmatrix} \dot{\theta}\cos\Phi - \dot{\psi}\cos\theta\sin\Phi \\ \dot{\Phi} + \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\theta}\sin\Phi + \dot{\psi}\cos\theta\cos\Phi \end{bmatrix}_{R} \tag{1.3}$$

Le mouvement du support est défini par les coordonnées x_A, y_A, et z_A du vecteur $\overrightarrow{OA}$ exprimées dans le repère R_0, et par les angles α, β, et γ permettant de passer du repère R_0 au repère R_S (cf. Figure I.3) par :

- une rotation d'un angle α autour de z_S (repère intermédiaire R'(x',y',z'))
- une rotation d'un angle β autour du nouvel axe x' (repère intermédiaire R''(x'',y'',z''))
- une rotation d'un angle γ autour de l'axe final y=y'' (repère final $R_S(x_S,y_S,z_S)$).

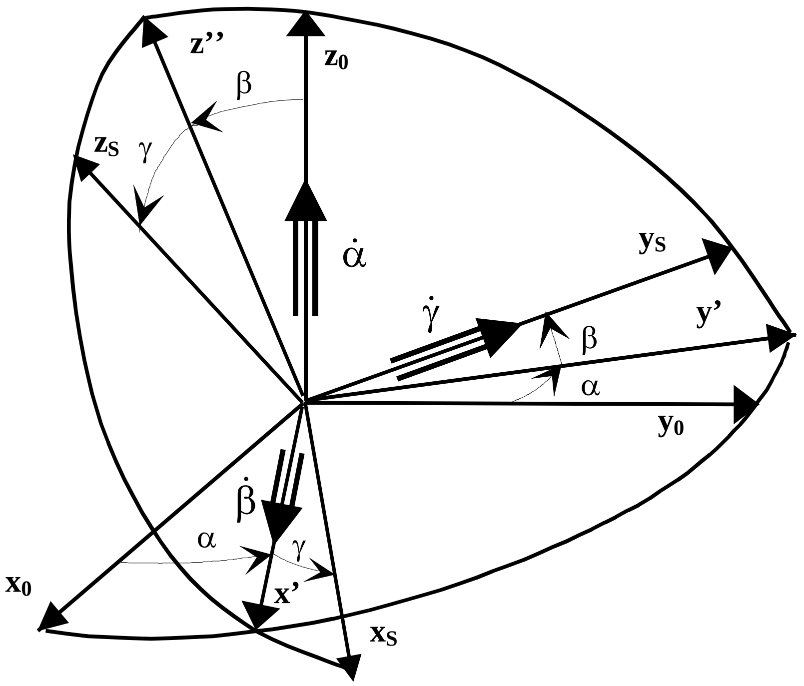


Figure I.3 : Repères intermédiaires utilisés pour passer du repère galiléen R_0 au repère R_S lié au support

Le vecteur rotation de R_S par rapport à R_0 exprimé dans R_S s'écrit :

$$\vec{\Omega}_S^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}_{R'} + \begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{R''} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\gamma} \\ 0 \end{bmatrix}_{R_S} \tag{1.4}$$

$$\vec{\Omega}_S^0 = \begin{bmatrix} \dot{\beta}\cos\gamma - \dot{\alpha}\cos\beta\sin\gamma \\ \dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma} \\ \dot{\beta}\sin\gamma + \dot{\alpha}\cos\beta\cos\gamma \end{bmatrix}_{R_S} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_S \\ \dot{\beta}_S \\ \dot{\gamma}_S \end{bmatrix}_{Rs} \tag{1.5}$$

Par la suite, afin de faciliter la manipulation des équations et d'améliorer la clarté des résultats, les calculs sont effectués à l'aide des coordonnées $\dot{\alpha}_S, \dot{\beta}_S, \dot{\gamma}_S$ du vecteur rotation de R_0 par rapport à R_S exprimé dans R_S. De même, pour paramétrer les mouvements de translation du support, les coordonnées X, Y, Z du vecteur $\overrightarrow{OA}$ exprimées dans le repère R_S sont utilisées.

Le vecteur position $\overrightarrow{OA}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix}_{R_0} = \begin{bmatrix} x_A \cos\alpha + y_A \sin\alpha \\ -x_A \sin\alpha + y_A \cos\alpha \\ z_A \end{bmatrix}_{R'} = \begin{bmatrix} x_A \cos\alpha + y_A \sin\alpha \\ z_A \sin\beta - (x_A \sin\alpha - y_A \cos\alpha)\cos\beta \\ z_A \cos\beta + (x_A \sin\alpha - y_A \cos\alpha)\sin\beta \end{bmatrix}_{R''} \quad (1.6)$$

$$\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} (x_A \cos\alpha + y_A \sin\alpha)\cos\gamma - (z_A \cos\beta + (x_A \sin\alpha - y_A \cos\alpha)\sin\beta)\sin\gamma \\ z_A \sin\beta - (x_A \sin\alpha - y_A \cos\alpha)\cos\beta \\ (x_A \cos\alpha + y_A \sin\alpha)\sin\gamma + (z_A \cos\beta + (x_A \sin\alpha - y_A \cos\alpha)\sin\beta)\cos\gamma \end{bmatrix}_{R_S} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{R_S} \quad (1.7)$$

A partir des équations de mouvement du support exprimées dans le repère galiléen, les coordonnées des vecteurs rotation et position du repère R par rapport à R_0 peuvent être obtenues facilement. Pour les développements suivants, les équations sont exprimées en fonction de $\dot{\alpha}_S, \dot{\beta}_S, \dot{\gamma}_S$ et X, Y, Z et de leurs dérivées par rapport au temps.

Le vecteur rotation de R par rapport au repère R_0 est (cf. Figure I.2 et I.3) :

$$\vec{\Omega}_R^0 = \vec{\Omega}_S^0 + \vec{\Omega}_R^S = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_S \\ \dot{\beta}_S \\ \dot{\gamma}_S \end{bmatrix}_{Rs} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}_{Rs} + \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{R3} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\Phi} \\ 0 \end{bmatrix}_{R} \quad (1.8)$$

$$\vec{\Omega}_R^0 = \begin{bmatrix} (\dot{\alpha}_S \cos\psi + \dot{\beta}_S \sin\psi + \dot{\theta})\cos\Phi - ((\dot{\alpha}_S \sin\psi - \dot{\beta}_S \cos\psi)\sin\theta + (\dot{\gamma}_S + \dot{\psi})\cos\theta)\sin\Phi \\ -(\dot{\alpha}_S \sin\psi - \dot{\beta}_S \cos\psi)\cos\theta + (\dot{\gamma}_S + \dot{\psi})\sin\theta + \dot{\Phi} \\ (\dot{\alpha}_S \cos\psi + \dot{\beta}_S \sin\psi + \dot{\theta})\sin\Phi + ((\dot{\alpha}_S \sin\psi - \dot{\beta}_S \cos\psi)\sin\theta + (\dot{\gamma}_S + \dot{\psi})\cos\theta)\cos\Phi \end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}_R \quad (1.9)$$

La vitesse de rotation du rotor est suivant l'axe y ; ψ et θ représentent les déformées angulaires de l'arbre dans les directions x et z ; Φ représente sa position angulaire par rapport au support. L'arbre ne subit que de petites déformations (domaine élastique), ψ et θ sont donc considérés comme des angles infiniment petits.

D'après les hypothèses, le rotor tourne à vitesse constante $\dot{\Phi}$:

$$\dot{\Phi} = \Omega \text{ et } \Phi = \Omega\, t \quad (1.10)$$

Lors du mouvement, la ligne moyenne de l'arbre ne reste pas confondue avec la droite AB (cf. Figure I.1). Soient (u, y, w) les déplacements de l'arbre au point C dans le repère R_S, u et w sont variables alors que y est considéré comme constant puisque seuls les mouvements de flexion de l'arbre sont étudiés.

Ainsi :

$$\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} u(y,t) \\ y \\ w(y,t) \end{bmatrix}_{Rs} \tag{1.11}$$

et comme le vecteur vitesse du point C dans le repère R_S s'écrit :

$$\vec{V}^0(C) = \frac{d^0}{dt}\overrightarrow{OC} = \frac{d^S}{dt}\overrightarrow{OC} + \vec{\Omega}_S^0 \wedge \overrightarrow{OC} \tag{1.12}$$

avec

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} X + u(y,t) \\ Y + y \\ Z + w(y,t) \end{bmatrix}_{Rs} \tag{1.13}$$

$$\vec{V}^0(C) = \begin{bmatrix} \dot{X} + \dot{u} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} + \dot{w} \end{bmatrix}_{Rs} + \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_S \\ \dot{\beta}_S \\ \dot{\gamma}_S \end{bmatrix}_{Rs} \wedge \begin{bmatrix} X + u \\ Y + y \\ Z + w \end{bmatrix}_{Rs} \tag{1.14}$$

il vient :

$$\vec{V}^0(C) = \begin{bmatrix} \dot{X} + \dot{u} + \dot{\beta}_S(Z+w) - \dot{\gamma}_S(Y+y) \\ \dot{Y} + \dot{\gamma}_S(X+u) - \dot{\alpha}_S(Z+w) \\ \dot{Z} + \dot{w} + \dot{\alpha}_S(Y+y) - \dot{\beta}_S(X+u) \end{bmatrix}_{Rs} = \begin{bmatrix} u_C \\ v_C \\ w_C \end{bmatrix}_{Rs} \tag{1.15}$$

Les expressions des énergies cinétiques de l'arbre et du disque peuvent être calculées à partir des expressions du vecteur rotation $\vec{\Omega}_R^0$ et de la vitesse du point C par rapport au repère R_0.

I.2.b. Disque

Le disque supposé parfaitement rigide est caractérisé par son énergie cinétique uniquement. Le disque de centre C est situé à la position arbitraire $y_S = y$ (cf. Figure I.1). Son énergie cinétique s'écrit :

$$T_D = \frac{1}{2}M_D\left(\vec{V}^0(C)\right)^2 + \frac{1}{2}\vec{\Omega}_R^0\,\bar{\bar{I}}_C\,\vec{\Omega}_R^0 \tag{1.16}$$

où M_D est la masse du disque et $\bar{\bar{I}}_C$ son tenseur d'inertie principal, exprimé dans le repère lié au disque :

$$\bar{\bar{I}}_C = \begin{bmatrix} I_{Dx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Dy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dz} \end{bmatrix}_R \tag{1.17}$$

<u>Remarque</u> : si le disque est symétrique, $I_{Dx} = I_{Dz}$.

L'énergie cinétique s'écrit :

$$T_D = \frac{1}{2} M_D \left(u_C^2 + v_C^2 + w_C^2\right) + \frac{1}{2}\left(I_{Dx}\ \omega_x^2 + I_{Dy}\ \omega_y^2 + I_{Dz}\ \omega_z^2\right) \tag{1.18}$$

Afin de distinguer les effets dus à l'inertie de section moyenne du disque et les effets de la dissymétrie, la notation suivante est utilisée :

$$\begin{aligned} I_{Dm} &= \frac{I_{Dx} + I_{Dz}}{2} \\ I_{Da} &= \frac{I_{Dx} - I_{Dz}}{2} \end{aligned} \tag{1.19}$$

L'énergie cinétique du disque s'écrit alors :

$$T_D = \frac{1}{2} M_D\ t_1(y,t) + \frac{1}{2}\left[I_{Dm}\ t_2(y,t) + I_{Dy}\ t_3(y,t) + I_{Da}\ t_4(y,t) \right] \tag{1.20}$$

avec

$$\begin{aligned} t_1(y,t) &= u_C^2 + v_C^2 + w_C^2 \\ t_2(y,t) &= \omega_x^2 + \omega_z^2 \\ t_3(y,t) &= \omega_y^2 \\ t_4(y,t) &= \omega_x^2 - \omega_z^2 \end{aligned} \tag{1.21}$$

Les calculs des fonctions t_1, t_2, t_3, et t_4, sont détaillés dans l'Annexe 1. Les variables u, w, ψ et θ, et donc leurs dérivées première et seconde par rapport au temps, sont des infiniment petits. Les fonctions trigonométriques des petits angles sont remplacées par leur développement en série de Taylor et les expressions obtenues sont limitées à l'ordre 2.

Ainsi, pour un disque placé à la position y, il vient :

$$
\begin{aligned}
T_D = \frac{M_D}{2} \Big\{ & 2\Big[\dot{\alpha}_S \left(\dot{Z} + \dot{w}(y) + \dot{\alpha}_S\, Y - \dot{\beta}_S\, (X + u(y))\right) - \dot{\gamma}_S \left(\dot{X} + \dot{u}(y) - \dot{\gamma}_S\, Y + \dot{\beta}_S\, (Z + w(y))\right)\Big] y \\
& + \left[\dot{\alpha}_S^2 + \dot{\gamma}_S^2\right] y^2 + \left(\dot{X} + \dot{u}(y) + \dot{\beta}_S\, (Z + w(y)) - \dot{\gamma}_S\, Y\right)^2 + \left(\dot{Y} + \dot{\gamma}_S\, (X + u(y)) - \dot{\alpha}_S\, (Z + w(y))\right)^2 \\
& + \left(\dot{Z} + \dot{w}(y) + \dot{\alpha}_S\, Y - \dot{\beta}_S\, (X + u(y))\right)^2 \Big\} \\
& + \frac{I_{Dm}}{2} \Big\{ \left(\dot{\alpha}_S^2 + \dot{\gamma}_S^2\right) + \left(\dot{\theta}(y)^2 + \dot{\psi}(y)^2\right) + \theta(y)^2 \left(\dot{\beta}_S^2 - \dot{\gamma}_S^2\right) + \psi(y)^2 \left(\dot{\beta}_S^2 - \dot{\alpha}_S^2\right) \\
& + 2\Big[\dot{\alpha}_S\, \dot{\theta}(y) + \dot{\gamma}_S\, \dot{\psi}(y) + \dot{\beta}_S \left(\psi(y)\dot{\theta}(y) - \theta(y)\,\dot{\psi}(y)\right) + \dot{\beta}_S\left(\dot{\alpha}_S\, \psi(y) - \dot{\gamma}_S\, \theta(y)\right) + \dot{\alpha}_S\, \dot{\gamma}_S\, \psi(y)\, \theta(y)\Big] \Big\} \\
& + \frac{I_{Dy}}{2} \Big\{ \left(\dot{\beta}_S + \Omega + \dot{\gamma}_S\, \theta(y) - \dot{\alpha}_S\, \psi(y)\right)^2 + \left(\dot{\beta}_S + \Omega\right)\Big[2\dot{\psi}(y)\theta(y) - \dot{\beta}_S\left(\psi(y)^2 + \theta(y)^2\right)\Big] \Big\} \\
& + \frac{I_{Da}}{2} \Big\{ \Big[2\left(\dot{\beta}_S\, (\dot{\alpha}_S\, \psi(y) + \dot{\gamma}_S\, \theta(y)) + \dot{\alpha}_S\, \dot{\theta}(y) - \dot{\gamma}_S\, \dot{\psi}(y)\right) + \dot{\beta}_S^2 \left(\psi(y)^2 - \theta(y)^2\right) + \left(\dot{\alpha}_S^2 - \dot{\gamma}_S^2\right) + \dot{\theta}(y)^2 \\
& - \dot{\psi}(y)^2 + \dot{\gamma}_S^2\, \theta(y)^2 - \dot{\alpha}_S^2\, \psi(y)^2 + 2\dot{\beta}_S \left(\psi(y)\dot{\theta}(y) + \theta(y)\,\dot{\psi}(y)\right) - 2\,\dot{\alpha}_S\, \dot{\gamma}_S\, \psi(y)\, \theta(y)\Big] \cos 2\Omega t \\
& - \Big[2\dot{\alpha}_S\, \dot{\gamma}_S + 2\dot{\beta}_S\, \left(\dot{\gamma}_S\, \psi(y) - \dot{\alpha}_S\, \theta(y)\right) + 2\dot{\alpha}_S\, \dot{\psi}(y) + 2\dot{\gamma}_S\, \dot{\theta}(y) + 2\left(\dot{\alpha}_S^2 - \dot{\beta}_S^2\right)\psi(y)\theta(y) \\
& - \dot{\alpha}_S \dot{\gamma}_S \left(\theta(y)^2 + \psi(y)^2\right) + 2\dot{\beta}_S \left(\psi(y)\dot{\psi}(y) - \theta(y)\dot{\theta}(y)\right) + 2\dot{\psi}(y)\dot{\theta}(y)\Big] \sin 2\Omega t \Big\}
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

Cette expression fait apparaître les termes classiques de la dynamique des rotors :

- $\frac{I_{Dy}}{2}\Omega^2$: terme constant représentant l'énergie de rotation du disque. Il n'a pas d'influence sur les équations du mouvement.
- $\frac{M_D}{2}\left(\dot{u}(y)^2 + \dot{w}(y)^2\right)$: énergie cinétique d'un élément en translation dans un plan.
- $\frac{I_{Dm}}{2}\left(\dot{\psi}(y)^2 + \dot{\theta}(y)^2\right)$: énergie cinétique due à la rotation de l'élément autour des axes x et z.
- $I_{Dy}\,\Omega\,\dot{\psi}(y)\,\theta(y)$: effet gyroscopique (Coriolis).

Les autres termes sont dus au mouvement d'ensemble du rotor.

Il est à noter une certaine symétrie des termes qui composent l'énergie cinétique d'un disque :

- les déplacements u et w interviennent de manière équivalente ainsi que les angles d'Euler ψ et θ. Ceci s'explique par le fait que le disque possède un axe de symétrie dans la direction y_S.
- De la même manière, $\dot{\alpha}_S$ et $\dot{\gamma}_S$ ont la même influence sur les équations, avec par exemple le terme $\frac{I_{Dm}}{2}\left(\dot{\alpha}_S^2 + \dot{\gamma}_S^2\right)$, tandis que $\dot{\beta}_S$ a un rôle prépondérant (rotation du support dans la direction de l'arbre). Le terme $I_{Dm}\dot{\beta}_S\left(\dot{\alpha}_S\, \psi(y) - \dot{\gamma}_S\, \theta(y)\right)$ en est une parfaite illustration.

- Deux exceptions à cette symétrie sont à remarquer : le terme $I_{Dy}\left(\dot{\beta}_S+\Omega\right)\dot{\psi}\,\theta$ auquel ne correspond pas de terme $I_{Dy}\left(\dot{\beta}_S+\Omega\right)\psi\,\dot{\theta}$. Cette dissymétrie se retrouve d'ailleurs pour un support fixe. Elle est due au paramétrage et en particulier au choix des angles d'Euler. Par ailleurs, dans le terme $I_{Da}\left(\dot{\alpha}_S^2-\dot{\beta}_S^2\right)\psi(y)\theta(y)\,\sin 2\,\Omega\,t$, $\dot{\alpha}_S$ joue le même rôle que $\dot{\beta}_S$.

I.2.c. Arbre

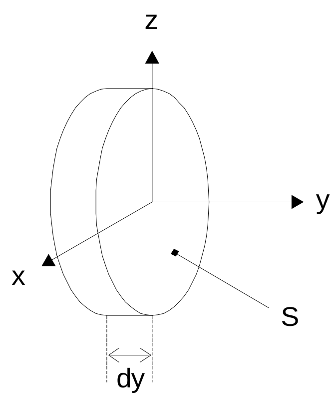
L'arbre est considéré comme déformable. Il est nécessaire de calculer à la fois son énergie cinétique et son énergie de déformation.

<u>Energie cinétique</u>

L'énergie cinétique élémentaire d'un arbre dT_a peut être déduite par extension de l'énergie cinétique du disque en considérant une section d'arbre infiniment mince (cf. Figure I.4) d'épaisseur dy, de section S (supposée constante), de masse volumique ρ et d'inerties de section I_x et I_z (également supposées constantes).

Il suffit de prendre comme masse élémentaire : $dM_a=\rho\,S\,dy$ et comme inerties principales dans le repère local :

$$
\begin{aligned}
dI_{Dx} &= \iiint_{(V)}\left(y^2+z^2\right)dm = \left(\iint_{(S)} z^2 dS\right)\rho\,dy = \rho\,I_x\,dy\\
dI_{Dy} &= \iiint_{(V)}\left(x^2+z^2\right)dm = \left(\iint_{(S)} x^2 dS+\iint_{(S)} z^2 dS\right)\rho\,dy = \rho\left(I_x+I_z\right)dy\\
dI_{Dz} &= \iiint_{(V)}\left(y^2+x^2\right)dm = \left(\iint_{(S)} x^2 dS\right)\rho\,dy = \rho\,I_z\,dy
\end{aligned}
\tag{1.23}
$$



<u>Figure I.4 : Section d'arbre infiniment mince</u>

L'énergie cinétique élémentaire d'une section d'arbre infiniment mince s'écrit alors :

$$
dT_a=\left(\frac{1}{2}\rho\,S\left(u_C^2+v_C^2+w_C^2\right)+\frac{1}{2}\left(\rho\,I_x\,\omega_x^2+\rho\left(I_x+I_z\right)\,\omega_y^2+\rho\,I_z\,\omega_z^2\right)\right)dy \tag{1.24}
$$

En posant comme précédemment :

$$\begin{cases} I_m = \dfrac{I_x + I_z}{2} \\ I_a = \dfrac{I_x - I_z}{2} \end{cases} \tag{1.25}$$

il vient :

$$dT_a = \frac{1}{2}\left(\rho S\ t_1(y,t) + \rho I_m\ t_2(y,t) + 2\rho I_m\ t_3(y,t) + \rho I_a\ t_4(y,t)\right)dy \tag{1.26}$$

Afin d’obtenir l’énergie cinétique d’un arbre de longueur L, il suffit d’intégrer sur la longueur de l’arbre :

$$T_a = \int_0^L dT_a \tag{1.27}$$

Soit

$$T_a = \frac{1}{2}\left(\rho S \int_0^L t_1(y,t) + \rho I_m \int_0^L t_2(y,t) + 2\rho I_m \int_0^L t_3(y,t) + \rho I_a \int_0^L t_4(y,t)\right) dy \tag{1.28}$$

L’énergie cinétique complète d’un arbre s’écrit alors :

$$\begin{aligned}
T_a = {} & \frac{1}{2}\int_0^L \rho S \{ 2 [\dot\alpha_S (\dot Z + \dot w(y) + \dot\alpha_S\ Y - \dot\beta_S\ (X + u(y))) - \dot\gamma_S (\dot X + \dot u(y) - \dot\gamma_S\ Y + \dot\beta_S\ (Z + w(y)))] y \\
& + [\dot\alpha_S^2 + \dot\gamma_S^2] y^2 + (\dot X + \dot u(y) + \dot\beta_S\ (Z + w(y)) - \dot\gamma_S\ Y)^2 + (\dot Y + \dot\gamma_S\ (X + u(y)) - \dot\alpha_S\ (Z + w(y)))^2 \\
& + (\dot Z + \dot w(y) + \dot\alpha_S\ Y - \dot\beta_S\ (X + u(y)))^2 \} dy \\
& + \frac{1}{2}\int_0^L \rho I_m \{ (\dot\alpha_S^2 + \dot\gamma_S^2) + (\dot\theta(y)^2 + \dot\psi(y)^2) + \theta(y)^2 (\dot\beta_S^2 - \dot\gamma_S^2) + \psi(y)^2 (\dot\beta_S^2 - \dot\alpha_S^2) \\
& + 2 [\dot\alpha_S\ \dot\theta(y) + \dot\gamma_S\ \dot\psi(y) + \dot\beta_S\ (\psi(l_1)\,\dot\theta(l_1) - \theta(y)\ \dot\psi(y)) + \beta_S (\dot\alpha_S\ \psi(y) - \dot\gamma_S\ \theta(y)) + \dot\alpha_S\ \dot\gamma_S\ \psi(y)\ \theta(y)] \} dy \\
& + \int_0^L \rho I_m \{ (\dot\beta_S + \Omega + \dot\gamma_S\ \theta(y) - \dot\alpha_S\ \psi(y))^2 + (\dot\beta_S + \Omega) [2\dot\psi(y)\theta(y) - \dot\beta_S (\psi(y)^2 + \theta(y)^2)] \} dy \\
& + \frac{1}{2}\int_0^L \rho I_a \{ [2 (\dot\beta_S\ (\dot\alpha_S\ \psi(y) + \dot\gamma_S\ \theta(y)) + \dot\alpha_S\ \dot\theta(y) - \dot\gamma_S\ \dot\psi(y)) + \dot\beta_S^2 (\psi(y)^2 - \theta(y)^2) + (\dot\alpha_S^2 - \dot\gamma_S^2) + \dot\theta(y)^2 \\
& - \dot\psi(y)^2 + \dot\gamma_S^2\ \theta(y)^2 - \dot\alpha_S^2\ \psi(y)^2 + 2\dot\beta_S\ (\psi(y)\dot\theta(y) + \theta(y)\ \dot\psi(y)) - 2\ \dot\alpha_S\ \dot\gamma_S\ \psi(y)\ \theta(y)] \cos 2\Omega t \\
& - [2\dot\alpha_S\ \dot\gamma_S + 2\dot\beta_S\ (\dot\gamma_S\ \psi(y) - \dot\alpha_S\ \theta(y)) + 2\dot\alpha_S\ \dot\psi(y) + 2\dot\gamma_S\ \dot\theta(y) + 2(\dot\alpha_S^2 - \dot\beta_S^2)\ \psi(y)\theta(y) \\
& - \dot\alpha_S\dot\gamma_S (\theta(y)^2 + \psi(y)^2) + 2\dot\beta_S\ (\psi(y)\dot\psi(y) - \theta(y)\dot\theta(y)) + 2\dot\psi(y)\dot\theta(y)] \sin 2\Omega t \} dy
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Cette expression fait apparaître des termes classiques en dynamique des rotors :

- $\rho I_m L \Omega^2$: terme constant représentant l'énergie de rotation de l'arbre. Il n'a pas d'influence sur les équations du mouvement.
- $\frac{\rho S}{2}\int_0^L \left(\dot{u}(y)^2 + \dot{w}(y)^2\right)dy$: expression de l'énergie cinétique d'une poutre en flexion.
- $\frac{\rho I_m}{2}\int_0^L \left(\dot{\psi}(y)^2 + \dot{\theta}(y)^2\right)dy$: effets secondaires de l'inertie de rotation.
- $2\rho I_m \Omega \int_0^L \dot{\psi}(y)\,\theta(y)\,dy$: effet gyroscopique.

Les autres termes sont dus au mouvement du rotor. Les mêmes remarques que pour le disque peuvent être faites quant à la symétrie des équations obtenues.

Energie de déformation

L'énergie de déformation n'est pas affectée par le mouvement du support car elle ne dépend que des contraintes et donc de la déformée de l'arbre par rapport au support. Dans ce calcul, seules les déformations dues à la flexion sont prises en compte (les effets du cisaillement sont négligés). $u^*(y,t)$ et $w^*(y,t)$ sont les déplacements des points de la ligne moyenne dans le repère local R lié à l'arbre.

$$\begin{aligned} u^* &= u\cos\Omega t - w\sin\Omega t \\ w^* &= u\sin\Omega t + w\cos\Omega t \end{aligned} \tag{1.30}$$

La déformation en flexion d'un point de l'arbre de coordonnées x et z dans R est $\varepsilon = \varepsilon_l + \varepsilon_{nl}$ avec:

$$\text{déformation linéaire : } \varepsilon_l = -x\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \tag{1.31}$$

$$\text{déformation non linéaire : } \varepsilon_{nl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^*}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w^*}{\partial y}\right)^2 \tag{1.32}$$

L'énergie de déformation est donnée par:

$$U = \frac{1}{2}\int_\tau \varepsilon\,\sigma\,d\tau \tag{1.33}$$

où τ est le volume de l'arbre et σ est la contrainte de flexion.

La relation entre contraintes et déformations est : $\sigma = E\,\varepsilon$, donc :

$$U = \frac{E}{2}\int_\tau \left(\varepsilon_l^{\,2} + 2\varepsilon_l\,\varepsilon_{nl} + \varepsilon_{nl}^{\,2}\right)d\tau \tag{1.34}$$

A cause de la symétrie de l'arbre par rapport aux axes x et z :

$$\int_{\tau} \varepsilon_{nl}\, \varepsilon_{l}\, d\tau = 0 \tag{1.35}$$

Le troisième terme de l'intégrale (1.34) représente l'effet d'une force axiale et n'est pas pris en compte dans cette étude. En utilisant (1.31) :

$$U = \frac{E}{2}\int_0^L \int_S \left(-x\,\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z\,\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 dS\,dy \tag{1.36}$$

$$U = \frac{E}{2}\int_0^L \int_S \left(x^2 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2}\right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}\right)^2 + 2\,x\,z\,\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2}\,\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right) dS\,dy \tag{1.37}$$

Par symétrie, le troisième terme de (1.37) est nul et, en introduisant les inerties de section :

$$I_x = \iint_{(S)} z^2\, dS \qquad \text{et} \qquad I_z = \iint_{(S)} x^2\, dS \tag{1.38}$$

$$U = \frac{E}{2}\int_0^L \left(I_z \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2}\right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}\right)^2 \right) dy \tag{1.39}$$

En remplaçant u^* et w^* par leurs valeurs (1.30) :

$$U = \frac{E}{2}\int_0^L \left(I_z \left(\cos\Omega t\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin\Omega t\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\sin\Omega t\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cos\Omega t\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) dy \tag{1.40}$$

La relation (1.26) est utilisée pour séparer les termes symétriques et antisymétriques comme précédemment :

$$\begin{aligned} U = \frac{E}{2}\int_0^L \Bigg[&\left(I_m - I_a\right)\left(\cos^2\Omega t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 + \sin^2\Omega t \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 - 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\cos\Omega t \sin\Omega t \right) \\ &+ \left(I_m + I_a\right)\left(\sin^2\Omega t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 + \cos^2\Omega t \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\cos\Omega t \sin\Omega t \right) \Bigg] dy \end{aligned} \tag{1.41}$$

$$\begin{aligned} U = &\frac{E}{2}\int_0^L \left[I_m \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 \right] \right] dy \\ &+ \frac{E}{2}\int_0^L I_a \left[\left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 \right)\left(\cos^2\Omega t - \sin^2\Omega t\right) + 4\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\cos\Omega t \sin\Omega t \right] dy \end{aligned} \tag{1.42}$$

L'énergie de déformation de l'arbre s'écrit donc :

$$
\begin{aligned}
U = {} & \frac{E}{2}\int_0^L \left[I_m \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \right. \\
& \left. + \frac{E}{2}\int_0^L I_a \left[\left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 \right) \cos 2\,\Omega\, t + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin 2\,\Omega\, t \right] dy \right]
\end{aligned}
\tag{1.43}
$$

I.2.d. Balourd

Le balourd est constitué d'une masse ponctuelle m_u placée dans le plan du disque à une distance d de son centre (cf. Figure I.5). Le centre du disque est en C, la masse de balourd en D. Le point A représente le centre géométrique de l'arbre non déformé.

Energie cinétique de balourd :

$$
T_u = \frac{1}{2} m_u \left(\vec{V}^0 D \right)^2 \tag{1.44}
$$

avec

$$
\vec{V}^0 (D) = \frac{d^0}{dt} \overrightarrow{OD} = \frac{d^S}{dt} \overrightarrow{OD} + \vec{\Omega}_S^0 \wedge \overrightarrow{OD} \tag{1.45}
$$

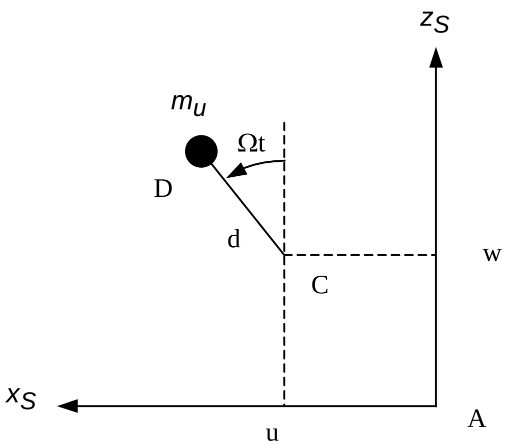


Figure I.5 : Masse de balourd

Dans le repère R_S les coordonnées de la masse sont :

$$
\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \begin{bmatrix} X(t) + u(y,t) + d \sin \Omega t \\ Y(t) + y \\ Z(t) + w(y,t) + d \cos \Omega t \end{bmatrix}_{Rs} \tag{1.46}
$$

La vitesse du point D dans le repère R_S s'écrit :

$$\vec{V}^0 D = \begin{bmatrix} \dot{X} + \dot{u} + d\,\Omega \cos\Omega\, t + \dot{\beta}_S \left(Z + w + d\cos\Omega\, t\right) - \dot{\gamma}_S \left(Y + y\right) \\ \dot{Y} + \dot{\gamma}_S \left(X + u + d\sin\Omega\, t\right) - \dot{\alpha}_S \left(Z + w + d\cos\Omega\, t\right) \\ \dot{Z} + \dot{w} - d\,\Omega\sin\Omega\, t + \dot{\alpha}_S \left(Y + y\right) - \dot{\beta}_S \left(X + u + d\sin\Omega\, t\right) \end{bmatrix}_{Rs} \tag{1.47}$$

$$\begin{aligned} \left(\vec{V}^0 D\right)^2 &= \left(\dot{X} + \dot{u} + \dot{\beta}_S \left(Z + w\right) - \dot{\gamma}_S \left(Y + y\right) + d\left(\Omega + \dot{\beta}_S\right)\cos\Omega\, t\right)^2 \\ &+ \left(\dot{Y} + \dot{\gamma}_S \left(X + u\right) - \dot{\alpha}_S \left(Z + w\right) + d\left(\dot{\gamma}_S \sin\Omega\, t - \dot{\alpha}_S \cos\Omega\, t\right)\right)^2 \\ &+ \left(\dot{Z} + \dot{w} + \dot{\alpha}_S \left(Y + y\right) - \dot{\beta}_S \left(X + u\right) - d\left(\Omega + \dot{\beta}_S\right)\sin\Omega\, t\right)^2 \end{aligned} \tag{1.48}$$

$$\begin{aligned} \left(\vec{V}^0 D\right)^2 &= \left(\dot{X} + \dot{u} + \dot{\beta}_S \left(Z + w\right) - \dot{\gamma}_S \left(Y + y\right)\right)^2 + d^2\left(\Omega + \dot{\beta}_S\right)^2 \cos^2\Omega t \\ &+ 2\left(\dot{X} + \dot{u} + \dot{\beta}_S \left(Z + w\right) - \dot{\gamma}_S \left(Y + y\right)\right) d\left(\Omega + \dot{\beta}_S\right)\cos\Omega t \\ &+ \left(\dot{Y} + \dot{\gamma}_S \left(X + u\right) - \dot{\alpha}_S \left(Z + w\right)\right)^2 + d^2\left(\dot{\gamma}_S \sin\Omega t - \dot{\alpha}_S \cos\Omega t\right)^2 \\ &+ 2\left(\dot{Y} + \dot{\gamma}_S \left(X + u\right) - \dot{\alpha}_S \left(Z + w\right)\right) d\left(\dot{\gamma}_S \sin\Omega t - \dot{\alpha}_S \cos\Omega t\right) \\ &+ \left(\dot{Z} + \dot{w} + \dot{\alpha}_S \left(Y + y\right) - \dot{\beta}_S \left(X + u\right)\right)^2 + d^2\left(\Omega + \dot{\beta}_S\right)^2 \sin^2\Omega t \\ &- 2\left(\dot{Z} + \dot{w} + \dot{\alpha}_S \left(Y + y\right) - \dot{\beta}_S \left(X + u\right)\right) d\left(\Omega + \dot{\beta}_S\right)\sin\Omega t \end{aligned} \tag{1.49}$$

$$\begin{aligned} T_u = \frac{1}{2} m_u \left(\vec{V}^0 D\right)^2 &= \frac{1}{2} m_u\, t_1(y,t) + \frac{1}{2} m_u\, d^2\left(\left(\Omega + \dot{\beta}_S\right)^2 + \left(\dot{\gamma}_S \sin\Omega\, t - \dot{\alpha}_S \cos\Omega\, t\right)^2\right) \\ &+ m_u\, d\Big\{\left(\dot{X} + \dot{u} + \dot{\beta}_S \left(Z + w\right) - \dot{\gamma}_S \left(Y + y\right)\right)\left(\Omega + \dot{\beta}_S\right)\cos\Omega\, t \\ &\quad + \left(\dot{Y} + \dot{\gamma}_S \left(X + u\right) - \dot{\alpha}_S \left(Z + w\right)\right)\left(\dot{\gamma}_S \sin\Omega\, t - \dot{\alpha}_S \cos\Omega\, t\right) \\ &\quad - \left(\dot{Z} + \dot{w} + \dot{\alpha}_S \left(Y + y\right) - \dot{\beta}_S \left(X + u\right)\right)\left(\Omega + \dot{\beta}_S\right)\sin\Omega\, t\Big\} \end{aligned} \tag{1.50}$$

Le terme $\frac{1}{2} m_u\, t_1(y,t)$ est négligeable devant le terme $\frac{1}{2} M_D\, t_1(y,t)$ de l'énergie cinétique du disque. De plus, le terme $\frac{1}{2} m_u\, \Omega^2 d^2$ est une constante et n'a pas d'influence sur les équations du rotor. L'énergie cinétique du balourd peut donc s'exprimer ainsi :

$$\begin{aligned} T_u &= \frac{1}{2} m_u\, d^2\left(\left(\Omega + \dot{\beta}_S\right)^2 + \left(\dot{\gamma}_S \sin\Omega\, t - \dot{\alpha}_S \cos\Omega\, t\right)^2\right) \\ &+ m_u\, d\Big[\left(\dot{X} + \dot{u} + \dot{\beta}_S \left(Z + w\right) - \dot{\gamma}_S \left(Y + y\right)\right)\left(\Omega + \dot{\beta}_S\right)\cos\Omega\, t \\ &+ \left(\dot{Y} + \dot{\gamma}_S \left(X + u\right) - \dot{\alpha}_S \left(Z + w\right)\right)\left(\dot{\gamma}_S \sin\Omega\, t - \dot{\alpha}_S \cos\Omega\, t\right) \\ &- \left(\dot{Z} + \dot{w} + \dot{\alpha}_S \left(Y + y\right) - \dot{\beta}_S \left(X + u\right)\right)\left(\Omega + \dot{\beta}_S\right)\sin\Omega\, t\Big] \end{aligned} \tag{1.51}$$

I.2.e. Paliers

Un palier comporte des caractéristiques de raideur et d'amortissement dans les deux plans, plus des termes croisés (cf. Figure I.6). Les forces induites par ces paliers sont dues au déplacement de l'arbre (repère R) par rapport au support (repère R_S). Elles ne dépendent donc pas du mouvement du repère R_S par rapport au repère R_0.

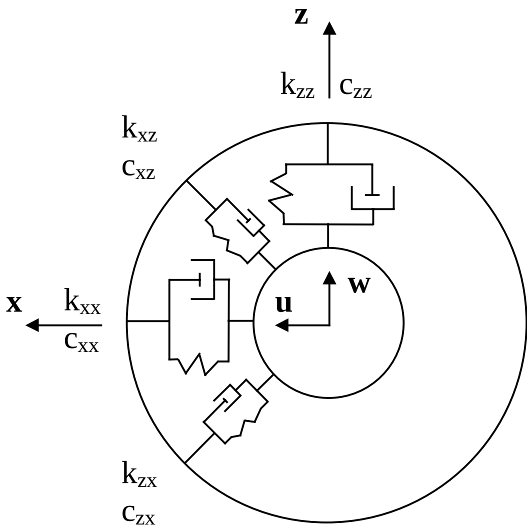


Figure I.6 : Amortissement et raideur de palier

Le travail virtuel des forces agissant sur l'arbre s'écrit :

$$\delta W = F_u \delta u + F_w \delta w \tag{1.52}$$

où F_u et F_w sont les forces généralisées :

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} \\ c_{zx} & c_{zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \tag{1.53}$$

I.3. Modèle simple

Le but de ce chapitre est de développer un modèle simple de rotor permettant d'examiner les phénomènes particuliers pouvant survenir lorsque le support est en mouvement. La modélisation est effectuée à l'aide de la méthode de Rayleigh-Ritz. Le rotor étudié est composé d'un arbre de longueur L supportant un disque avec un balourd situé à $y = l_1$. Le rotor est appuyé-appuyé à ses deux extrémités et les paliers sont considérés comme infiniment rigides (cf. Figure I.7). Les possibles asymétries de l'arbre et du disque sont prises en considération.

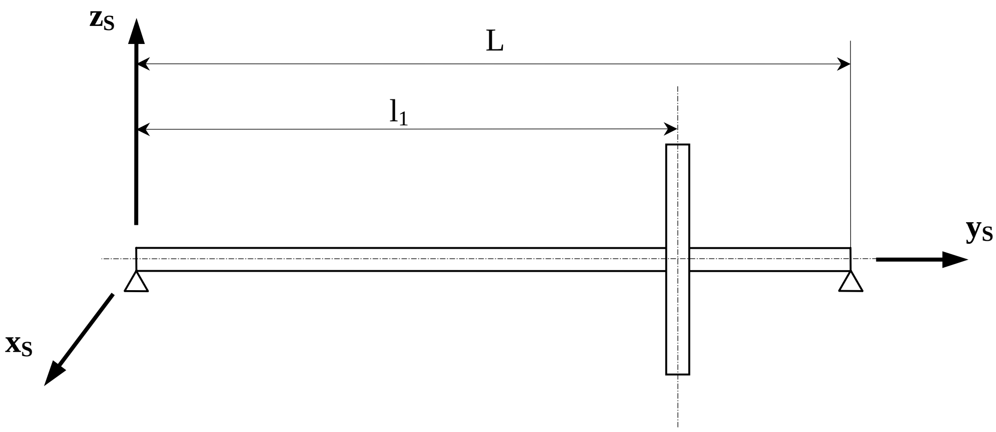


Figure I.7 : Rotor simple

I.3.a. Mise en équation

La méthode de Rayleigh-Ritz permet d'exprimer les déplacements dans les directions x et z respectivement par :

$$\begin{aligned} u(y,t) &= f(y)\,q_1(t) = f(y)\,q_1 \\ w(y,t) &= f(y)\,q_2(t) = f(y)\,q_2 \end{aligned} \qquad (1.54)$$

où f(y) est la déformée modale choisie, et q_1 et q_2 sont les coordonnées généralisées indépendantes.

Comme les angles ψ et θ sont petits (cf. Figure I.8), ils peuvent être approximés par :

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{d\,f(y)}{d\,y}\,q_2 = g(y)\,q_2 \\ \Psi &= -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{d\,f(y)}{d\,y}\,q_1 = -g(y)\,q_1 \end{aligned} \qquad (1.55)$$

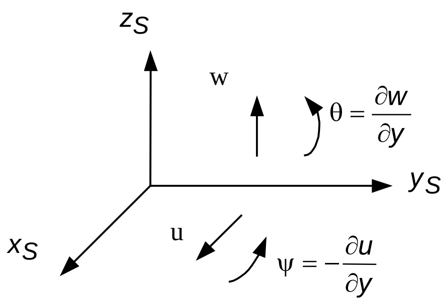


Figure I.8 : Degrés de libertés d'une poutre

Les dérivées secondes de u et w sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} &= \frac{d^2 f(y)}{d y^2} q_1 = h(y) q_1 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} &= \frac{d^2 f(y)}{d y^2} q_2 = h(y) q_2 \end{aligned} \tag{1.56}$$

Dans le cas d'un rotor appuyé-appuyé, la fonction f(y) est choisie égale à la déformée dynamique d'une poutre appuyée-appuyée. Seuls les deux premiers modes seront étudiés par cette méthode :

- premier mode : $f(y) = \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)$
- deuxième mode : $f(y) = \sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right)$

Selon la position l_1 du disque, les déformées correspondent plus ou moins aux déformées réelles du système. Par exemple, si le disque est placé au quart de l'arbre, le premier mode n'a pas exactement la forme d'un demi sinus, et le deuxième mode n'a pas la forme d'un sinus. Ces différences peuvent entraîner des écarts sur les fréquences de résonance observées, en particulier sur le deuxième mode. Toutefois, ce modèle est utilisé pour observer les phénomènes de base et la précision des résultats n'est pas une priorité.

I.3.b. Energie cinétique du rotor

En remplaçant les variables u, w, ψ, θ par les fonctions définies précédemment (1.54 - 1.55) dans les énergies cinétiques d'un disque, d'un arbre et d'un balourd (1.20, 1.28, et 1.51), il vient les expressions suivantes (le détail des calculs pour les fonctions t_1, t_2, t_3 et t_4 se trouve dans l'Annexe 2) :

- Pour un disque placé à la position l_1, l'énergie cinétique s'écrit :

$$T_D = \frac{1}{2} M_D\, t_1(l_1,t) + \frac{1}{2}\left[I_{Dm}\, t_2(l_1,t) + I_{Dy}\, t_3(l_1,t) + I_{Da}\, t_4(l_1,t) \right] \tag{1.57}$$

- Pour l’arbre, l’énergie cinétique s’écrit :

$$T_a = \frac{1}{2}\left(\rho S \int_0^L t_1(y,t) + \rho I_m \int_0^L t_2(y,t) + 2\rho I_m \int_0^L t_3(y,t) + \rho I_a \int_0^L t_4(y,t) \right) dy \qquad (1.58)$$

- Pour le balourd, l’énergie cinétique s’écrit :

$$\begin{aligned} T_u = {} & \frac{1}{2} m_u\, d^2 \left(\left(\Omega + \dot\beta_S\right)^2 + \left(\dot\gamma_S \sin\Omega t - \dot\alpha_S \cos\Omega t\right)^2 \right) \\ & + m_u\, d \left[\left(\dot X + \dot q_1 f(l_1) + \dot\beta_S \left(Z + q_2 f(l_1)\right) - \dot\gamma_S (Y + y) \right)\left(\Omega + \dot\beta_S\right) \cos\Omega t \right. \\ & + \left(\dot Y + \dot\gamma_S \left(X + q_1 f(l_1)\right) - \dot\alpha_S \left(Z + q_2 f(l_1)\right) \right)\left(\dot\gamma_S \sin\Omega t - \dot\alpha_S \cos\Omega t\right) \\ & \left. - \left(\dot Z + \dot q_2 f(l_1) + \dot\alpha_S (Y + y) - \dot\beta_S \left(X + q_1 f(l_1)\right) \right)\left(\Omega + \dot\beta_S\right) \sin\Omega t \right] \end{aligned} \qquad (1.59)$$

L’énergie cinétique totale du rotor s’écrit :

$$\begin{aligned} T = {} & T_D + T_a + T_u \\ = {} & \frac{M_T}{2}\left[\left(\dot X + \dot\beta_S Z - \dot\gamma_S Y\right)^2 + \left(\dot Y + \dot\gamma_S X - \dot\alpha_S Z\right)^2 + \left(\dot Z + \dot\alpha_S Y - \dot\beta_S X\right)^2 \right] \\ & + M_3 \left[-\dot\gamma_S \left(\dot X + \dot\beta_S Z - \dot\gamma_S Y\right) + \dot\alpha_S \left(\dot Z + \dot\alpha_S Y - \dot\beta_S X\right) \right] + \frac{M_4}{2}\left(\dot\alpha_S{}^2 + \dot\gamma_S{}^2\right) \\ & + M_1 \left[\left(\dot X + \dot\beta_S Z - \dot\gamma_S Y\right)\left(\dot q_1 + \dot\beta_S q_2\right) + \left(\dot Y + \dot\gamma_S X - \dot\alpha_S Z\right)\left(\dot\gamma_S q_1 - \dot\alpha_S q_2\right) + \left(\dot Z + \dot\alpha_S Y - \dot\beta_S X\right)\left(\dot q_2 - \dot\beta_S q_1\right) \right] \\ & + \frac{M_2}{2}\left[\left(\dot q_1 + \dot\beta_S q_2\right)^2 + \left(\dot\gamma_S q_1 - \dot\alpha_S q_2\right)^2 + \left(\dot q_2 - \dot\beta_S q_1\right)^2 \right] + M_5 \left[-\dot\gamma_S \left(\dot q_1 + \dot\beta_S q_2\right) + \dot\gamma_S \left(\dot q_2 - \dot\beta_S q_1\right) \right] \\ & \qquad + \frac{I_{mT}}{2}\left(\dot\alpha_S{}^2 + \dot\gamma_S{}^2\right) + I_{m1} \left[-\dot\beta_S \left(\dot\alpha_S q_1 + \dot\gamma_S q_2\right) - \dot\gamma_S \dot q_1 + \dot\alpha_S \dot q_2 \right] \\ & \qquad + \frac{I_{m2}}{2}\left[\dot\beta_S^2 \left(q_1^2 + q_2^2\right) - \dot\alpha_S{}^2 q_1^2 - \dot\gamma_S{}^2 q_2^2 + \dot q_1^2 + \dot q_2^2 + 2\dot\beta_S \left(\dot q_1 q_2 - q_1 \dot q_2\right) - 2\dot\alpha_S \dot\gamma_S q_1 q_2 \right] \\ & + \frac{I_{yT}}{2}\left(\dot\beta_S + \Omega\right)^2 + I_{y1}\left(\dot\beta_S + \Omega\right)\left(\dot\gamma_S q_2 + \dot\alpha_S q_1\right) + \frac{I_{y2}}{2}\left[\left(\dot\gamma_S q_2 + \dot\alpha_S q_1\right)^2 - 2\left(\dot\beta_S + \Omega\right)\left(\dot q_1 q_2 + \frac{\dot\beta_S}{2}\left(q_1^2 + q_2^2\right) \right) \right] \\ & + \frac{I_{aT}}{2}\left[\left(\dot\alpha_S^2 - \dot\gamma_S^2\right)\cos 2\Omega t - 2\dot\alpha_S \dot\gamma_S \sin 2\Omega t \right] \\ & + I_{a1} \left[\left(\dot\beta_S \left(\dot\gamma_S q_2 - \dot\alpha_S q_1\right) + \dot\gamma_S \dot q_1 + \dot\alpha_S \dot q_2 \right)\cos 2\Omega t + \left(\dot\beta_S \left(\dot\gamma_S q_1 + \dot\alpha_S q_2\right) + \dot\alpha_S \dot q_1 - \dot\gamma_S \dot q_2 \right)\sin 2\Omega t \right] \\ & \quad + \frac{I_{a2}}{2}\left[\left(\dot\beta_S^2 \left(q_1^2 - q_2^2\right) - \dot\alpha_S{}^2 q_1^2 + \dot\gamma_S{}^2 q_2^2 - \dot q_1^2 + \dot q_2^2 - 2\dot\beta_S \left(q_1 \dot q_2 + \dot q_1 q_2\right) + 2\dot\alpha_S \dot\gamma_S q_1 q_2 \right)\cos 2\Omega t \right. \\ & \quad \left. + 2\left(\left(\dot\alpha_S^2 - \dot\beta_S^2\right) q_1 q_2 + \frac{\dot\alpha_S \dot\gamma_S}{2}\left(q_1^2 + q_2^2\right) + \dot\beta_S \left(\dot q_2 q_2 - q_1 \dot q_1\right) + \dot q_1 \dot q_2 \right)\sin 2\Omega t \right] \\ & + \frac{1}{2} m_u\, d^2 \left[\left(\Omega + \dot\beta_S\right)^2 + \left(\dot\gamma_S \sin\Omega t - \dot\alpha_S \cos\Omega t\right)^2 \right] + m_u\, d \left[\left(\dot X + f(l_1)\dot q_1 + \dot\beta_S \left(Z + f(l_1) q_2\right) - \dot\gamma_S \left(Y + l_1\right) \right)\left(\Omega + \dot\beta_S\right)\cos\Omega t \right. \\ & + \left(\dot Y + \dot\gamma_S \left(X + f(l_1) q_1\right) - \dot\alpha_S \left(Z + f(l_1) q_2\right) \right)\left(\dot\gamma_S \sin\Omega t - \dot\alpha_S \cos\Omega t\right) \\ & \left. - \left(\dot Z + f(l_1)\dot q_2 + \dot\alpha_S \left(Y + l_1\right) - \dot\beta_S \left(X + f(l_1) q_1\right) \right)\left(\Omega + \dot\beta_S\right)\sin\Omega t \right] \end{aligned}$$

(1.60)

Les constantes caractéristiques du rotor M_T, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, I_{mT}, I_{m1}, I_{m2}, I_{yT}, I_{y1}, I_{y2}, I_{aT}, I_{a1}, I_{a2}, sont présentées dans l'Annexe 3. Cette expression de l'énergie cinétique totale du rotor est celle utilisée par la suite dans l'application des équations de Lagrange.

I.3.c. Energie de déformation

En introduisant les expressions (1.56) dans (1.43) :

$$\begin{aligned} U &= \frac{E}{2}\int_0^L \left[I_m \left(q_1^2 + q_2^2\right) h^2(y)\,dy \right. \\ &+ \frac{E}{2}\int_0^L I_a \left[\left(q_2^2 - q_1^2\right)\cos 2\Omega t + 2 q_1 q_2 \sin 2\Omega t\right] h^2(y)\,dy \end{aligned} \tag{1.61}$$

et en posant :

$$\begin{aligned} k &= E\int_0^L I_m\, h^2(y)\,dy \\ k_a &= E\int_0^L I_a\, h^2(y)\,dy \end{aligned} \tag{1.62}$$

L'énergie de déformation s'écrit :

$$U = \frac{1}{2} k \left(q_1^2 + q_2^2\right) + \frac{1}{2} k_a \left[\left(q_2^2 - q_1^2\right)\cos 2\Omega t + 2 q_1 q_2 \sin 2\Omega t\right] \tag{1.63}$$

I.3.d. Equations du mouvement

Après application des équations de Lagrange, un système de deux équations de la forme suivante est obtenu :

$$[M]\{\ddot{q}\} + \left([C] + \left[C^*\right]\right)\{\dot{q}\} + \left([K] + \left[K^*\right]\right)\{q\} = \{F\} + \left\{F^*\right\} \tag{1.64}$$

où $\{q\} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$ est le vecteur des coordonnées généralisées.

Les matrices [M], [C], et [K] sont les matrices classiques obtenues dans le cas d'un rotor fixe :

$$[M] = \begin{bmatrix} M_2 + I_{m2} - I_{a2}\cos 2\Omega t & I_{a2}\sin 2\Omega t \\ I_{a2}\sin 2\Omega t & M_2 + I_{m2} + I_{a2}\cos 2\Omega t \end{bmatrix} \tag{1.65}$$

$$[C]=\begin{bmatrix} 2\,I_{a2}\,\Omega\cos 2\Omega t & \Omega I_{y2} \\ -\Omega I_{y2} & -2\,I_{a2}\,\Omega\cos 2\Omega t \end{bmatrix} \tag{1.66}$$

$$[K]=\begin{bmatrix} k-k_a\cos 2\Omega t & k_a\sin 2\Omega t \\ k_a\sin 2\Omega t & k+k_a\cos 2\Omega t \end{bmatrix} \tag{1.67}$$

Le vecteur {F} est la contribution du balourd dans le cas d'un rotor dont le support est fixe :

$$\{F\}=\begin{bmatrix} m_u\, d\, f(l_1)\,\Omega^2\sin\Omega t \\ m_u\, d\, f(l_1)\,\Omega^2\cos\Omega t \end{bmatrix} \tag{1.68}$$

Le vecteur $\{F^*\}$ représente les termes supplémentaires dus au mouvement du support :

$$\{F^*\}=\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \tag{1.69}$$

où

$$\begin{aligned} f_1 &= m_u\, d\, f(l_1)\left[-\left(\ddot{\beta}_S+\dot{\alpha}_S\,\dot{\gamma}_S\right)\cos\Omega t+\left(\dot{\beta}_S{}^2+2\Omega\dot{\beta}_S+\dot{\gamma}_S{}^2\right)\sin\Omega t\right] \\ &\quad +\left(M_5+I_{m1}\right)\left(\ddot{\gamma}_S-\dot{\alpha}_S\,\dot{\beta}_S\right)+I_{y1}\,\dot{\alpha}_S\left(\Omega+\dot{\beta}_S\right) \\ &\quad +M_1\left[\dot{\gamma}_S\left(2\dot{Y}+\dot{\gamma}_S X-\dot{\alpha}_S Z\right)-\dot{\beta}_S\left(2\dot{Z}+\dot{\alpha}_S Y-\dot{\beta}_S X\right)-\ddot{X}-\ddot{\beta}_S Z+\ddot{\gamma}_S Y\right] \\ &\quad +I_{a1}\left[-\left(\ddot{\gamma}_S+\dot{\alpha}_S\,\dot{\beta}_S+2\Omega\dot{\alpha}_S\right)\cos 2\Omega t+\left(-\ddot{\alpha}_S+\dot{\gamma}_S\,\dot{\beta}_S+2\Omega\dot{\gamma}_S\right)\sin 2\Omega t\right] \end{aligned} \tag{1.70}$$

$$\begin{aligned} f_2 &= m_u\, d\, f(l_1)\left[\left(\ddot{\beta}_S-\dot{\alpha}_S\,\dot{\gamma}_S\right)\sin\Omega t+\left(\dot{\beta}_S{}^2+2\Omega\dot{\beta}_S+\dot{\alpha}_S{}^2\right)\cos\Omega t\right] \\ &\quad -\left(M_5+I_{m1}\right)\left(\ddot{\alpha}_S+\dot{\gamma}_S\,\dot{\beta}_S\right)+I_{y1}\,\dot{\gamma}_S\left(\Omega+\dot{\beta}_S\right) \\ &\quad +M_1\left[-\dot{\alpha}_S\left(2\dot{Y}+\dot{\gamma}_S X-\dot{\alpha}_S Z\right)+\dot{\beta}_S\left(2\dot{X}+\dot{\beta}_S Z-\dot{\gamma}_S Y\right)-\ddot{Z}+\ddot{\beta}_S X-\ddot{\alpha}_S Y\right] \\ &\quad +I_{a1}\left[\left(-\ddot{\alpha}_S+\dot{\gamma}_S\,\dot{\beta}_S+2\Omega\dot{\gamma}_S\right)\cos 2\Omega t+\left(\ddot{\gamma}_S+\dot{\alpha}_S\,\dot{\beta}_S+2\Omega\dot{\alpha}_S\right)\sin 2\Omega t\right] \end{aligned} \tag{1.71}$$

Les autres matrices sont dues au mouvement d'entraînement du rotor :

$$[C^*]=\begin{bmatrix} 0 & \dot{\beta}_S\left(2M_2+2I_{m2}-I_{y2}\right) \\ -\dot{\beta}_S\left(2M_2+2I_{m2}-I_{y2}\right) & 0 \end{bmatrix} \tag{1.72}$$

$$[K^*]=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \tag{1.73}$$

avec

$$
\begin{aligned}
k_{11} &= \dot{\alpha}_S{}^2\left(I_{m2} - I_{y2}\right) - \dot{\beta}_S{}^2\left(M_2 + I_{m2} - I_{y2}\right) - \dot{\gamma}_S{}^2\, M_2 + \dot{\beta}_S\, \Omega\, I_{y2} \\
&\quad + \left[\left(\dot{\alpha}_S{}^2 - \dot{\beta}_S{}^2 - 2\,\Omega\,\dot{\beta}_S\right) I_{a2}\right] \cos 2\,\Omega\, t - \left(\ddot{\beta}_S + \dot{\alpha}_S\, \dot{\gamma}_S\right) I_{a2} \sin 2\,\Omega\, t \\
k_{22} &= \dot{\gamma}_S{}^2\left(I_{m2} - I_{y2}\right) - \dot{\beta}_S{}^2\left(M_2 + I_{m2} - I_{y2}\right) - \dot{\alpha}_S{}^2 M_2 + \dot{\beta}_S\, \Omega\, I_{y2} \\
&\quad + \left[\left(-\dot{\gamma}_S{}^2 + \dot{\beta}_S{}^2 + 2\,\Omega\,\dot{\beta}_S\right) I_{a2}\right] \cos 2\,\Omega\, t + \left(\ddot{\beta}_S - \dot{\alpha}_S\, \dot{\gamma}_S\right) I_{a2} \sin 2\,\Omega\, t \\
k_{12} &= \left(\dot{\alpha}_S\, \dot{\gamma}_S + \ddot{\beta}_S\right)\left(M_2 + I_{m2} - I_{y2}\right) \\
&\quad + \left[\left(\dot{\beta}_S{}^2 - \dot{\alpha}_S{}^2 + 2\,\Omega\,\dot{\beta}_S\right) I_{a2}\right] \sin 2\,\Omega t - \left(\ddot{\beta}_S + \dot{\alpha}_S\, \dot{\gamma}_S\right) I_{a2} \cos 2\,\Omega\, t \\
k_{21} &= \left(\dot{\alpha}_S\, \dot{\gamma}_S - \ddot{\beta}_S\right)\left(M_2 + I_{m2}\right) - I_{y2}\, \dot{\alpha}_S\, \dot{\gamma}_S \\
&\quad + \left[\left(\dot{\beta}_S{}^2 - \dot{\alpha}_S{}^2 + 2\,\Omega\,\dot{\beta}_S\right) I_{a2}\right] \sin 2\,\Omega\, t - \left(\ddot{\beta}_S + \dot{\alpha}_S\, \dot{\gamma}_S\right) I_{a2} \cos 2\,\Omega\, t
\end{aligned}
\tag{1.74}
$$

Il est à noter que, selon les mouvements imposés au support du rotor, les équations peuvent être fortement non-linéaires. L’algorithme de résolution pas-à-pas utilisé pour ce modèle est un algorithme de type Dormand-Prince présent dans le module simulink du logiciel Matlab.

I.4. Formulation éléments finis

Dans ce chapitre, les équations générales du mouvement sont développées à l'aide de la méthode des éléments finis. Les matrices élémentaires des différents éléments du rotor sont explicitées (disque, arbre, balourd et palier) et la forme générale des équations de mouvement est présentée.

I.4.a. Disque

Les résultats présentés ici concernent le cas le plus courant d'un disque symétrique. Les résultats pour le cas général (incluant les dissymétries possibles du disque) sont présentés dans l'Annexe 4.

Le disque est modéliser par un nœud et possède quatre degrés de liberté (cf. Figure I.9) : deux translations u et w, et deux rotations θ et ψ, respectivement autour des axes x_S et z_S.

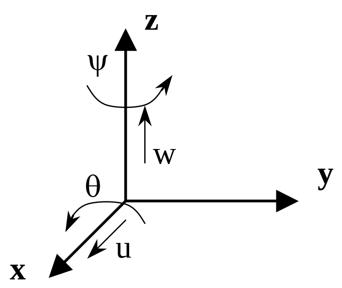


Figure I.9 : Degrés de liberté d'un élément de disque

Le vecteur des déplacements nodaux est pris de la forme :

$$\delta = [u, w, \theta, \Psi]^T \tag{1.75}$$

et les matrices de masse, d'amortissement et de raideur ainsi que le vecteur force des éléments de disque sont obtenus en appliquant les équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = [M_d]\{\ddot{\delta}\} + \left([C_d] + [C_d^*]\right)\{\dot{\delta}\} + [K_d^*]\{\delta\} - \{F_d\} \tag{1.76}$$

où $[M_d]$ et $[C_d]$ sont les matrices classiques (matrices de masse et d'effets gyroscopiques) pour un rotor dont le support est fixe :

$$M_d = \begin{bmatrix} M_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dm} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{Dm} \end{bmatrix} \tag{1.77}$$

$$C_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{Dy}\Omega \\ 0 & 0 & I_{Dy}\Omega & 0 \end{bmatrix} \tag{1.78}$$

Les autres matrices $\left[C_d^{\ *}\right]$, $\left[K_d^{\ *}\right]$ et le vecteur $\left\{F_d^{\ *}\right\}$ sont dus au mouvement du support :

$$C_d^{\ *} = \begin{bmatrix} 0 & 2\,M_D\,\dot{\beta}_S & 0 & 0 \\ -2\,M_D\,\dot{\beta}_S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\,\dot{\beta}_S\,I_{Dm} - I_{Dy}\dot{\beta}_S \\ 0 & 0 & -2\,\dot{\beta}_S\,I_{Dm} + I_{Dy}\dot{\beta}_S & 0 \end{bmatrix} \tag{1.79}$$

$$K_d^{\ *} = \begin{bmatrix} -M_D\,(\dot{\gamma}_S^2 + \dot{\beta}_S^2) & M_D\,(\dot{\alpha}_S\,\dot{\gamma}_S + \ddot{\beta}_S) & 0 & 0 \\ M_D\,(\dot{\alpha}_S\,\dot{\gamma}_S - \ddot{\beta}_S) & -M_D\,(\dot{\alpha}_S^2 + \dot{\beta}_S^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (I_{Dm} - I_{Dy})(\dot{\gamma}_S^2 - \dot{\beta}_S^2) + I_{Dy}\,\dot{\beta}_S\,\Omega & I_{Dy}\,\dot{\alpha}_S\,\dot{\gamma}_S + (\ddot{\beta}_S - \dot{\alpha}_S\,\dot{\gamma}_S)\,I_{Dm} \\ 0 & 0 & (\ddot{\beta}_S + \dot{\alpha}_S\,\dot{\gamma}_S)(I_{Dy} - I_{Dm}) & (I_{Dm} - I_{Dy})(\dot{\alpha}_S^2 - \dot{\beta}_S^2) + I_{Dy}\,\dot{\beta}_S\,\Omega \end{bmatrix} \tag{1.80}$$

$$F_d^{\ *} = -\begin{bmatrix} M_D\left[\ddot{X} - 2\,\dot{\gamma}_S\,\dot{Y} + 2\,\dot{\beta}_S\,\dot{Z} - (\dot{\gamma}_S^2 + \dot{\beta}_S^2)\,X + (\dot{\alpha}_S\,\dot{\beta}_S - \ddot{\gamma}_S)(Y + y) + (\ddot{\beta}_S + \dot{\gamma}_S\,\dot{\alpha}_S)\,Z\right] \\ M_D\left[\ddot{Z} - 2\,\dot{\beta}_S\,\dot{X} + 2\,\dot{\alpha}_S\,\dot{Y} - (\ddot{\beta}_S - \dot{\alpha}_S\,\dot{\gamma}_S)\,X + (\ddot{\alpha}_S + \dot{\beta}_S\,\dot{\gamma}_S)(y + Y) - (\dot{\beta}_S^2 + \dot{\alpha}_S^2)\,Z\right] \\ I_{Dm}\,(\ddot{\alpha}_S + \dot{\beta}_S\,\dot{\gamma}_S) - I_{Dy}\,\dot{\gamma}_S\,(\dot{\beta}_S + \Omega) \\ I_{Dm}\,(\ddot{\gamma}_S - \dot{\alpha}_S\,\dot{\beta}_S) + I_{Dy}\,\dot{\alpha}_S\,(\dot{\beta}_S + \Omega) \end{bmatrix} \tag{1.81}$$

I.4.b. Arbre

Les résultats présentés concernent le cas le plus courant d'un arbre symétrique. Les résultats pour le cas général d'un arbre dissymétrique sont présentés en Annexe 5. L'élément fini utilisé a deux nœuds (cf. Figure 10).

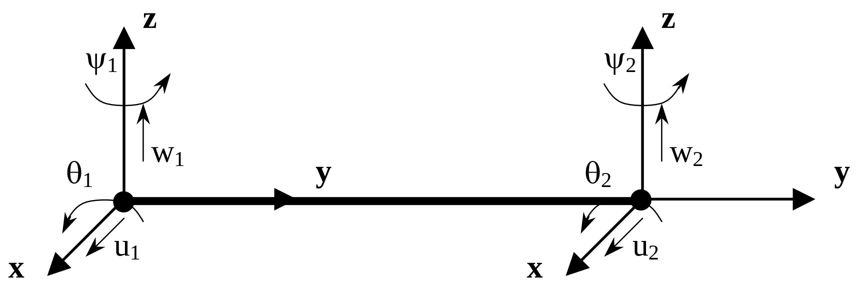


Figure 10 : Degrés de liberté d'un élément d'arbre

Le vecteur des déplacements nodaux est :

$$\delta = \left[u_1, w_1, \theta_1, \Psi_1, u_2, w_2, \theta_2, \Psi_2\right]^T \tag{1.82}$$

Ce vecteur est séparé en deux vecteurs de déplacement correspondant chacun à une direction :

$$\delta_u = \left[u_1, \Psi_1, u_2, \Psi_2\right]^T \qquad \text{et } \delta_w = \left[w_1, \theta_1 w_2, \theta_2\right]^T \tag{1.83}$$

Les déplacements sont exprimés à partir de :

$$\begin{aligned} u &= N_1(y)\delta_u \\ w &= N_2(y)\delta_w \end{aligned} \tag{1.84}$$

où N_1 et N_2 sont les vecteurs des fonctions de forme classiques d'un élément de poutre en flexion (*Zienkiewicz [42]*) :

$$\begin{aligned} N_1(y) &= \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2}\right] \\ N_2(y) &= \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}\right] \end{aligned} \tag{1.85}$$

et en utilisant les relations entre déplacements et pentes :

$$\begin{cases} \theta = \dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \psi = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \tag{1.86}$$

Les matrices élémentaires de l'arbre sont de taille 8*8. Elles sont obtenues en remplaçant u, w, θ, et ψ par leurs expressions dans l'énergie cinétique et l'énergie de déformation de l'arbre, puis en appliquant les équations de Lagrange.

Energie cinétique :

L'application des équations de Lagrange à l'énergie cinétique de l'arbre (1.29) conduit à :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = \left[M_a\right]\left\{\ddot{\delta}\right\} + \left[C_a\right]\left\{\dot{\delta}\right\} + \left[K_a\right]\left\{\delta\right\} - \left\{F_a\right\} \tag{1.87}$$

Les matrices M_a, C_a, et K_a, et le vecteur F_a s'écrivent :

$$M_a = \rho\, S\, M1 + \rho\, I_m\, M2 \tag{1.88}$$

$$C_a = 2\,\rho\, \{\dot{\beta}_S\, S\, C1 - I_m\, \Omega\, C2\} \tag{1.89}$$

$$K_a = \rho\, S\, (K1 + \ddot{\beta}_S\, C1 + \dot{\gamma}_S\, \dot{\alpha}_S\, K2) + \rho\, Im\, [K3 - (\ddot{\beta}_S + \dot{\gamma}_S\, \dot{\alpha}_S)\, M4 + 2\, \dot{\beta}_S\, (\dot{\beta}_S + \Omega)\, M2] \tag{1.90}$$

$$\begin{aligned} F_a = \{&\rho\, S\, [\ddot{X} + 2\, \dot{\beta}_S\, \dot{Z} - 2\, \dot{\gamma}_S\, \dot{Y} + (\ddot{\beta}_S + \dot{\gamma}_S\, \dot{\alpha}_S)\, Z + (\dot{\alpha}_S\, \dot{\beta}_S - \dot{r})\, Y - (\dot{\gamma}_S{}^2 + \dot{\beta}_S{}^2)\, X\,]\, V1 \\ &+ [\ddot{Z} + 2\, \dot{\alpha}_S\, \dot{Y} - 2\, \dot{\beta}_S\, \dot{X} + (\dot{\alpha}_S\, \dot{\gamma}_S - \ddot{\beta}_S)\, X + (\ddot{\alpha}_S + \dot{\gamma}_S\, \dot{\beta}_S)\, Y - (\dot{\alpha}_S{}^2 + \dot{\beta}_S{}^2)\, Z]\, V2 \\ &+ (\dot{\alpha}_S\, \dot{\beta}_S - \ddot{\gamma}_S)\, V3 + (\ddot{\alpha}_S + \dot{\gamma}_S\, \dot{\beta}_S)\, V4\} \\ &+ \rho\, Im\, \{(\dot{\alpha}_S\, \dot{\beta}_S - \ddot{\gamma}_S)\, V5 + (\ddot{\alpha}_S + \dot{\gamma}_S\, \dot{\beta}_S)\, V6 - 2\, (\dot{\beta}_S + \Omega)\, (\dot{\alpha}_S\, V5 + \dot{\gamma}_S\, V6)\} \end{aligned} \tag{1.91}$$

Energie de déformation :

L'énergie de déformation de l'arbre est obtenue en appliquant (1.84) dans l'équation (1.43). Pour un arbre symétrique, la modélisation éléments finis mène à l'écriture suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = E\, I_m\, Ku1\{\delta\} \tag{1.92}$$

Les matrices M1, M2, M4, C1, C2, K1, K2, K3 et Ku1, ainsi que les vecteurs V1 à V6, nécessaires pour le calcul des matrices élémentaires d'un arbre, sont présentés dans l'Annexe 5. Les matrices M3, K4, Ku2 et Ku3 utilisées dans le cas d'un arbre asymétrique sont également présentées.

I.4.c. Balourd

L'application des équations de Lagrange à l'énergie cinétique d'un balourd (1.51) donne :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = m_u\, d \begin{bmatrix} (\ddot{\beta}_S + \dot{\gamma}_S\, \dot{\alpha}_S)\cos(\Omega\, t) - [(\Omega + \dot{\beta}_S)^2 + \dot{\gamma}_S{}^2]\sin(\Omega\, t) \\ (-\ddot{\beta}_S + \dot{\gamma}_S\, \dot{\alpha}_S)\sin(\Omega\, t) - [(\Omega + \dot{\beta}_S)^2 + \dot{\alpha}_S{}^2]\cos(\Omega\, t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.93}$$

avec $\delta = [u, w, \theta, \psi]^T$

Par convention, cette expression correspond à un balourd situé sur l'axe z_S à t = 0. En pratique, l'influence de plusieurs masses de balourds agissant simultanément dans différents plans et pour différents angles par rapport à z_S doit pouvoir être prise en compte.

Pour un balourd situé à un angle α par rapport à l'axe z_S à t = 0, les forces élémentaires suivantes seront introduites dans le terme de droite des équations :

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \\ F_\theta \\ F_\psi \end{bmatrix} = m_u\, d \begin{bmatrix} (\ddot{\beta}_S + \dot{\gamma}_S\,\dot{\alpha}_S)\cos(\Omega\,t+\alpha) - \left[(\Omega+\dot{\beta}_S)^2 + \dot{\gamma}_S^2\right]\sin(\Omega\,t+\alpha) \\ (-\ddot{\beta}_S + \dot{\gamma}_S\,\dot{\alpha}_S)\sin(\Omega\,t+\alpha) - \left[(\Omega+\dot{\beta}_S)^2 + \dot{\alpha}_S^2\right]\cos(\Omega\,t+\alpha) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.94}$$

I.4.d. Paliers

Les matrices élémentaires dues aux paliers sont directement tirées des équations (1.53) :

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \\ F_\theta \\ F_\psi \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} & 0 & 0 \\ k_{zx} & k_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ w \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} & 0 & 0 \\ c_{zx} & c_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \tag{1.95}$$

La première matrice est une matrice de raideur et la seconde une matrice d'amortissement. Ces matrices sont en général asymétriques et peuvent varier de manière significative en fonction de la vitesse de rotation.

I.4.e. Equations du mouvement

Afin de mettre en évidence l'influence des mouvements du support et pour permettre l'assemblage des matrices de l'arbre et des disques, les termes constants des différentes matrices sont regroupés. Seules les matrices de masse sont constantes quel que soit le mouvement du support. Elles ne sont pas rappelées ici.

Ainsi, pour un disque, les matrices d'amortissement et de raideur sont définies de la manière suivante (cf. (1.78), (1.79) et (1.80)):

$$C_d + C_d^{\,*} = C_{d1} + \dot{\beta}_S C_{d2} \tag{1.96}$$

$$K_d^{\,*} = \dot{\alpha}_S^2 K_{d1} + \dot{\beta}_S^2 K_{d2} + \dot{\gamma}_S^2 K_{d3} + \dot{\beta}_S K_{d4} + \ddot{\beta}_S K_{d5} + \dot{\alpha}_S \dot{\gamma}_S K_{d6} \tag{1.97}$$

Pour un arbre, les matrices d'amortissement et de raideur sont définies de la manière suivante (cf. (1.89) et (1.90)):

$$C_a = C_{a1} + \dot{\beta}_S C_{a2} \tag{1.98}$$

$$K_a = K_{a1} + \dot{\alpha}_S^2 K_{a2} + \dot{\beta}_S^2 K_{a3} + \dot{\gamma}_S^2 K_{a4} + \dot{\beta}_S K_{a5} + \ddot{\beta}_S K_{a6} + \dot{\alpha}_S \dot{\gamma}_S K_{a7} \tag{1.99}$$

Ainsi, après assemblage des matrices et en regroupant les termes constants, un système d'équations de la forme suivante est obtenu :

$$M\,\ddot{q} + \left\{C_1 + \dot{\beta}_S C_2\right\}\dot{q} + \left\{K_1 + \dot{\alpha}_S^2\,K_2 + \dot{\beta}_S^2\,K_3 + \dot{\gamma}_S^2\,K_4 + \dot{\beta}_S\,K_5 + \ddot{\beta}_S\,K_6 + \dot{\alpha}_S\,\dot{\gamma}_S\,K_7\right\}q = F(t) \tag{1.100}$$

où M, C_1 et K_1 sont les matrices classiques de la dynamique des rotors dans le cas d'un support fixe. Les matrices additionnelles C_2, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, K_7 représentent l'influence des mouvements du support. Le vecteur F(t) comporte les forces engendrées par le mouvement sur le disque et sur l'arbre, ainsi que la contribution du balourd.

I.4.f. Résolution des équations du mouvement

La méthode de résolution utilisée est une méthode pas-à-pas. La méthode de Newmark est choisie en raison de sa stabilité. Il s'agit d'un schéma d'intégration à un pas. Le déplacement et la vitesse sont développés en série de Taylor à l'aide des 2 paramètres indépendants a et b ainsi que du pas de temps Δt :

$$\dot{q}(t+\Delta t) = \dot{q}(t) + \left(\left(1-a\right)\ddot{q}(t) + a\,\ddot{q}(t+\Delta t)\right)\Delta t \tag{1.101}$$

$$q(t+\Delta t) = q(t) + \Delta t\,\dot{q}(t) + \left(\left(1-b\right)\ddot{q}(t) + b\,\ddot{q}(t+\Delta t)\right)\frac{\Delta t^2}{2} \tag{1.102}$$

Le choix des paramètres a et b gouverne la convergence de la méthode. Les combinaisons de leurs valeurs donnent lieu à plusieurs méthodes dont les plus utilisées sont :

- $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{3}$: approximation linéaire de l'accélération sur Δt.
- $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$: approximation constante de l'accélération qui est égale à la valeur moyenne de l'accélération sur Δt. Il s'agit en fait de la méthode des trapèzes.

Ces derniers coefficients sont utilisés ici car ils permettent d'avoir un schéma inconditionnellement stable. Les équations (1.101) et (1.102) deviennent alors :

$$\dot{q}(t+\Delta t) = \dot{q}(t) + \left(\frac{1}{2}\ddot{q}(t) + \frac{1}{2}\ddot{q}(t+\Delta t)\right)\Delta t \tag{1.103}$$

$$q(t+\Delta t) = q(t) + \Delta t\,\dot{q}(t) + \left(\frac{1}{4}\ddot{q}(t) + \frac{1}{4}\ddot{q}(t+\Delta t)\right)\Delta t^2 \tag{1.104}$$

L'équation (1.104) permet d'exprimer l'accélération au temps $\left(t+\Delta t\right)$:

$$\ddot{q}(t+\Delta t) = \frac{4}{\Delta t^2}\left(q(t+\Delta t) - q(t) - \Delta t\,\dot{q}(t)\right) - \ddot{q}(t) \tag{1.105}$$

En introduisant l'équation (1.105) dans l'équation (1.103) il vient :

$$\dot{q}(t+\Delta t) = \frac{2}{\Delta t}\big(q(t+\Delta t) - q(t)\big) - \dot{q}(t) \tag{1.106}$$

D'après l'expression (1.100) le système d'équations du mouvement a la forme suivante :

$$M\,\ddot{q}(t) + C(t)\,\dot{q}(t) + K(t)\,q(t) = F(t) \tag{1.107}$$

En reportant les expressions (1.105) et (1.106) dans le système (1.107) au temps $(t+\Delta t)$ et en regroupant les termes en $q(t+\Delta t)$, il vient :

$$\begin{aligned}\left(\frac{4M}{\Delta t^2} + \frac{2C(t+\Delta t)}{\Delta t} + K(t+\Delta t)\right)q(t+\Delta t) &= F(t+\Delta t) + M\left(\frac{4}{\Delta t^2}q(t) + \frac{4}{\Delta t}\dot{q}(t) + \ddot{q}(t)\right) \\ &\quad + C(t+\Delta t)\left(\frac{2}{\Delta t}q(t) + \dot{q}(t)\right)\end{aligned} \tag{1.108}$$

Comme le mouvement est imposé (donc connu), les matrices C(t) et K(t) et le vecteur F(t) sont connus à chaque instant t. Connaissant le déplacement, la vitesse et l'accélération à l'instant t, il est alors possible de calculer le déplacement à l'instant $(t+\Delta t)$. Les vitesses et accélérations au temps $(t+\Delta t)$ sont calculées à l'aide des équations (1.105) et (1.106).

Conclusion

Les équations générales d'un rotor dont le support est soumis à un mouvement imposé ont été développées dans ce chapitre. De plus, les équations prennent en compte les possibles dissymétries de l'arbre et du disque. L'essentiel du travail a consisté en un développement analytique important dans lequel le calcul symbolique a été largement utilisé. Cela a permis de mettre en place deux modèles pour prévoir le comportement dynamique des rotors embarqués. Le modèle développé avec la méthode de Rayleigh-Ritz est intéressant en raison de sa simplicité : seulement deux équations de mouvement. Les résolutions pas-à-pas sont donc très rapides et certains mouvements basiques peuvent être résolus analytiquement. Le modèle obtenu à l'aide de la méthode des éléments finis. Il est plus adapté pour modéliser les systèmes réels car il est plus précis et permet d'étudier l'ensemble des modes de vibration du rotor. Il est également modulaire car chaque élément du rotor possède ses propres caractéristiques. Des éléments peuvent donc être ajoutés ou enlevés au gré de l'utilisateur qui peut également ajouter des raideurs, des amortissements ou des forces extérieures en chaque nœud.

PARTIE II : ETUDE DES PHENOMENES SUR DES MOUVEMENTS SIMPLES

Plusieurs phénomènes de base relatifs à la dynamique des rotors dont le support est en mouvement sont étudiés dans cette partie. Les diverses études sont réalisées sur le modèle simple de type Rayleigh-Ritz mis en place dans la première partie. Des développements analytiques et des résolutions pas-à-pas des équations sont effectués sur plusieurs mouvements : translation simple, rotation simple, mouvement oscillatoire. Une étude d'instabilité est réalisée à l'aide de la méthode des échelles multiples sur un mouvement simple de rotation sinusoïdale.

II.1. Modèle étudié

Dans ce chapitre, le modèle utilisé est le modèle simple de type Rayleigh-Ritz défini dans le chapitre I.2. Le rotor est constitué d'un arbre et d'un disque symétriques, et il est appuyé-appuyé en ses deux extrémités.

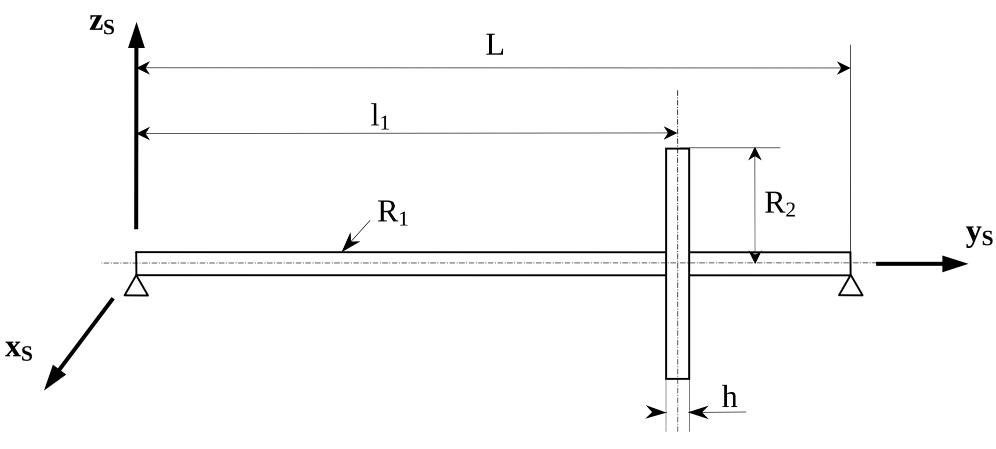


Figure II.1 : Modèle étudié

Les valeurs numériques utilisées sont les suivantes :

$E = 2.10^{11}$ Pa	$R_1 = 0.01$ m
$\rho = 7800$ kg / m^3	$R_2 = 0.15$ m
$L = 0.4$ m	$h = 0.03$ m
$l_1 = L/3$	$m_u = 10^{-4}$ kg

Les caractéristiques et les équations du rotor lorsque le support est fixe sont rappelées en Annexe 6. Lorsque le support se déplace, les équations du mouvement ont la forme suivante (1.64) :

$$[M]\{\ddot{q}\} + \left([C] + \left[C^*\right]\right)\{\dot{q}\} + \left([K] + \left[K^*\right]\right)\{q\} = \{F\} + \left\{F^*\right\} \tag{2.1}$$

où les matrices ont 2 lignes et 2 colonnes. Dans ce cas, l'arbre et le disque sont symétriques et les matrices présentées au chapitre I.3 deviennent :

$$[M] = \begin{bmatrix} M_2 + I_{m2} & 0 \\ 0 & M_2 + I_{m2} \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} 0 & \Omega I_{y2} \\ -\Omega I_{y2} & 0 \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

$$\left[C^*\right] = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\beta}_S \left(2 M_2 + 2 I_{m2} - I_{y2}\right) \\ -\dot{\beta}_S \left(2 M_2 + 2 I_{m2} - I_{y2}\right) & 0 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

$$\left[K^*\right] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

$$\{F\} = \begin{bmatrix} m_u\, d\, f(l_1)\, \Omega^2 \sin \Omega t \\ m_u\, d\, f(l_1)\, \Omega^2 \cos \Omega t \end{bmatrix} \qquad \left\{F^*\right\} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

avec

$$\begin{aligned}
k_{11} &= \dot{\alpha}_S{}^2 \left(I_{m2} - I_{y2}\right) - \dot{\beta}_S{}^2 \left(M_2 + I_{m2} - I_{y2}\right) - \dot{\gamma}_S{}^2\, M_2 + \dot{\beta}_S\, \Omega\, I_{y2} \\
k_{22} &= \dot{\gamma}_S{}^2 \left(I_{m2} - I_{y2}\right) - \dot{\beta}_S{}^2 \left(M_2 + I_{m2} - I_{y2}\right) - \dot{\alpha}_S{}^2 M_2 + \dot{\beta}_S\, \Omega\, I_{y2} \\
k_{12} &= \left(\dot{\alpha}_S\, \dot{\gamma}_S + \ddot{\beta}_S\right)\left(M_2 + I_{m2} - I_{y2}\right) \\
k_{21} &= \left(\dot{\alpha}_S\, \dot{\gamma}_S - \ddot{\beta}_S\right)\left(M_2 + I_{m2}\right) - I_{y2}\, \dot{\alpha}_S\, \dot{\gamma}_S
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}
f_1 = {} & m_u\, d\, f(l_1) \left[-\left(\ddot{\beta}_S + \dot{\alpha}_S\, \dot{\gamma}_S\right)\cos \Omega t + \left(\dot{\beta}_S{}^2 + 2\Omega \dot{\beta}_S + \dot{\gamma}_S{}^2\right)\sin \Omega t\right] \\
& + \left(M_5 + I_{m1}\right)\left(\ddot{\gamma}_S - \dot{\alpha}_S\, \dot{\beta}_S\right) + I_{y1}\, \dot{\alpha}_S \left(\Omega + \dot{\beta}_S\right) \\
& + M_1 \left[\dot{\gamma}_S \left(2\dot{Y} + \dot{\gamma}_S\, X - \dot{\alpha}_S\, Z\right) - \dot{\beta}_S \left(2\dot{Z} + \dot{\alpha}_S\, Y - \dot{\beta}_S\, X\right) - \ddot{X} - \ddot{\beta}_S\, Z + \ddot{\gamma}_S\, Y\right] \\
f_2 = {} & m_u\, d\, f(l_1) \left[\left(\ddot{\beta}_S - \dot{\alpha}_S\, \dot{\gamma}_S\right)\sin \Omega t + \left(\dot{\beta}_S{}^2 + 2\Omega \dot{\beta}_S + \dot{\alpha}_S{}^2\right)\cos \Omega t\right] \\
& - \left(M_5 + I_{m1}\right)\left(\ddot{\alpha}_S + \dot{\gamma}_S\, \dot{\beta}_S\right) + I_{y1}\, \dot{\gamma}_S \left(\Omega + \dot{\beta}_S\right) \\
& + M_1 \left[-\dot{\alpha}_S \left(2\dot{Y} + \dot{\gamma}_S\, X - \dot{\alpha}_S\, Z\right) + \dot{\beta}_S \left(2\dot{X} + \dot{\beta}_S\, Z - \dot{\gamma}_S\, Y\right) - \ddot{Z} + \ddot{\beta}_S\, X - \ddot{\alpha}_S\, Y\right]
\end{aligned} \tag{2.7}$$

II.2. Translation simple

II.2.a. Equations du mouvement

Le système est soumis à une translation pure. Le vecteur rotation $\vec{\Omega}_S^0$ (1.5) permettant de passer du repère galiléen R_0 au repère R_S lié au support est nul :

$$\vec{\Omega}_S^0 = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_S \\ \dot{\beta}_S \\ \dot{\gamma}_S \end{bmatrix}_{Rs} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

La translation est supposée quelconque :

$$\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{bmatrix}_{R_S} \tag{2.9}$$

D’après les expressions (2.3), (2.4) et (2.6) :

$$\left[C^*\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \left[K^*\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

car ces deux matrices ne dépendent que des caractéristiques du rotor et des vitesses angulaires du support $\dot{\alpha}_S$, $\dot{\beta}_S$, $\dot{\gamma}_S$. Dans le cas d’une translation simple, les équations classiques sont retrouvées :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\} + \{F^*\} \tag{2.11}$$

Seul un terme de force {F*} vient s'ajouter à la contribution classique du balourd, avec

$$\{F^*\} = \begin{bmatrix} M_1\ddot{X} \\ M_1\ddot{Z} \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

Le système de deux équations obtenu a la forme suivante :

$$\begin{cases} m\,\ddot{q}_1 - \Omega\, I_{y2}\,\dot{q}_2 + k\,q_1 = m_u d\, f\,(l_1)\,\Omega^2 \sin\Omega t + M_1\ddot{X} \\ m\,\ddot{q}_2 + \Omega\, I_{y2}\,\dot{q}_1 + k\,q_2 = m_u d\, f\,(l_1)\,\Omega^2 \cos\Omega t + M_1\ddot{Z} \end{cases} \tag{2.13}$$

Il s'agit d'un système de deux équations différentielles linéaires du second degré avec des seconds membres fonctions du temps. Il est à noter que seules les translations latérales (c'est à dire en x_S et z_S) ont une influence sur la déformée de l'arbre. Les translations dans la direction de l'arbre (y_S) n'ont aucune influence lorsque le système est soumis à une translation pure.

Si seule la première partie du terme de droite est conservée, les équations sont celles d'un rotor fixe simplement soumis aux forces harmoniques dues à son balourd (cf. Annexe 6). En régime permanent, les solutions sont de la forme (*Lalanne [24]*) :

$$\begin{aligned} q_1 &= Q_1 \sin \Omega t \\ q_2 &= Q_2 \cos \Omega t \end{aligned} \tag{2.14}$$

avec

$$Q_1 = Q_2 = \frac{m_u d\, f(l_1)\,\Omega^2}{k + (a - m)\Omega^2} \tag{2.15}$$

Il suffit donc de résoudre le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} m\,\ddot{q}_1 - \Omega\, I_{y2}\, \dot{q}_2 + k\, q_1 = -M_1 \ddot{X} \\ m\,\ddot{q}_2 + \Omega\, I_{y2}\, \dot{q}_1 + k\, q_2 = -M_1 \ddot{Z} \end{cases} \tag{2.16}$$

Selon les types de translation X(t) et Z(t), ce système peut avoir des solutions analytiques. La solution générale du système en régime permanent est alors la somme des deux solutions particulières.

II.2.b. Application 1 : Accélération constante

Le rotor est soumis à une accélération constante. Cela peut être le cas, par exemple, pour un rotor embarqué dans un véhicule qui prend de la vitesse (fusée au décollage, voiture au démarrage). Les coordonnées du mouvement vont alors s'écrire :

$$X = Y = 0 \qquad \text{et} \qquad Z(t) = \frac{A}{2} t^2 + Bt + C \tag{2.17}$$

Le système à résoudre est alors le suivant :

$$\begin{cases} m\,\ddot{q}_1 - \Omega\, I_{y2}\, \dot{q}_2 + k\, q_1 = 0 \\ m\,\ddot{q}_2 + \Omega\, I_{y2}\, \dot{q}_1 + k\, q_2 = -M_1 A \end{cases} \tag{2.18}$$

La solution de ce système en régime établi est :

$$\begin{cases} q_1 = 0 \\ q_2 = -\dfrac{M_1 A}{k} \end{cases} \tag{2.19}$$

Le rotor se comporte donc comme s'il était soumis à une force constante de type pesanteur.

Application numérique :

D'après l'annexe 3, pour une accélération A telle que A = 2 m/s², il vient :

$$\begin{cases} q_1 = 0 \\ q_2 = -\dfrac{M_1 A}{k} = -2{,}49.10^{-5} \text{ m} \end{cases}$$

Ce résultat est vérifié à l'aide d'une résolution pas-à-pas du système complet (2.13) d'équations. L'algorithme utilisé pour cette résolution pas-à-pas est un algorithme de type Heun. Un amortissement constant a été ajouté aux équations afin d'observer facilement le régime permanent. Plusieurs essais préliminaires ont en effet montré que pour une valeur peu importante d'amortissement, et quel que soit le mouvement imposé au support, le régime permanent n'était que très peu influencé et l'amplitude des déformations presque inchangée, en particulier si le rotor est sollicité à une fréquence éloignée de ses fréquences de résonance. Cette première application le confirme. La figure II.2 montre le résultat de cette simulation.

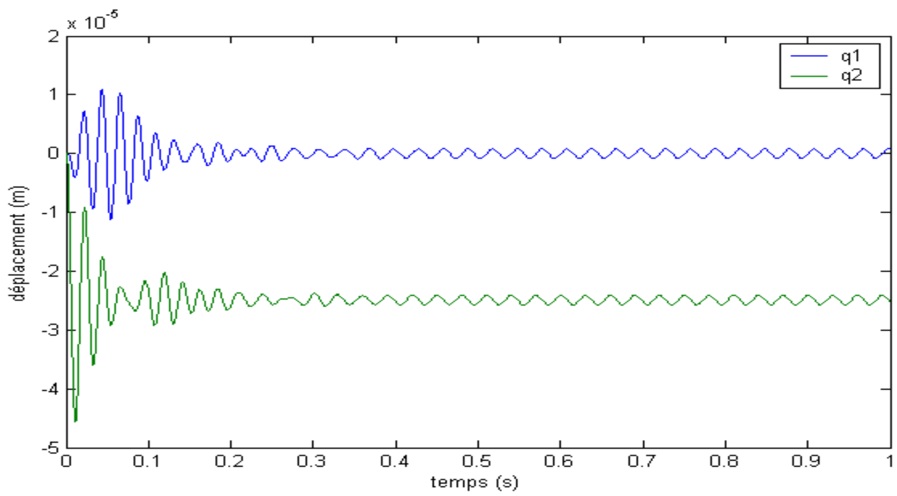


Figure II.2 : Influence d'une accélération constante sur la déformée de l'arbre

Les coordonnées généralisées q_1 et q_2 sont présentées en fonction du temps. Le choc au départ entraîne quelques perturbations, mais la présence de l'amortissement permet d'obtenir rapidement le régime permanent du système. Il est à noter le terme constant, dû à l'influence de la translation accélérée, qui s'observe uniquement dans la direction z_S (q_2). Les petites oscillations sont dues à la contribution du balourd.

II.2.c. Application 2 : Translation sinusoïdale

Le rotor est soumis à une translation harmonique selon l'axe z_S. Ce type de mouvement peut se produire par exemple lors du transport manuel d'un rotor (basses fréquences) ou lorsque le support du rotor est en contact plan avec un appareil engendrant des vibrations.

L'étude menée porte sur une translation sinusoïdale verticale. Le mouvement est paramètré de la façon suivante :

$$X = Y = 0 \qquad \text{et} \qquad Z(t) = A\cos\omega t \tag{2.20}$$

où A est l'amplitude du déplacement et ω sa fréquence. Il vient :

$$\dot{Z}(t) = -A\,\omega\sin\omega t \qquad\qquad \ddot{Z}(t) = -A\,\omega^2\cos\omega t$$

Si la contribution du balourd n'est pas prise en compte, le système de deux équations à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} m\,\ddot{q}_1 - \Omega\,I_{y2}\,\dot{q}_2 + k\,q_1 = 0 \\ m\,\ddot{q}_2 + \Omega\,I_{y2}\,\dot{q}_1 + k\,q_2 = M_1 A\,\omega^2\cos\omega t \end{cases} \tag{2.21}$$

Les solutions sont cherchées sous la forme :

$$\begin{aligned} q_1 &= Q_1\sin\omega t \\ q_2 &= Q_2\cos\omega t \end{aligned} \tag{2.22}$$

alors

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= Q_1\,\omega\cos\omega t \\ \dot{q}_2 &= -Q_2\,\omega\sin\omega t \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} \ddot{q}_1 &= -Q_1\,\omega^2\sin\omega t \\ \ddot{q}_2 &= -Q_2\,\omega^2\cos\omega t \end{aligned} \tag{2.23}$$

En substituant ces résultats dans (2.18), il vient :

$$\begin{cases} Q_1\left(k - m\,\omega^2\right) - Q_2\,I_{y2}\,\Omega\,\omega = 0 \\ Q_2\left(k - m\,\omega^2\right) + Q_1\,I_{y2}\,\Omega\,\omega = M_1 A\,\omega^2 \end{cases} \tag{2.24}$$

La première équation donne:

$$Q_1 = \frac{Q_2\,I_{y2}\,\Omega\,\omega}{k - m\,\omega^2} \tag{2.25}$$

qui est substitué dans la deuxième équation :

$$Q_2\left(k - m\,\omega^2\right) + \frac{Q_2\,I_{y2}\,\Omega\,\omega}{k - m\,\omega^2}\,I_{y2}\,\Omega\,\omega = M_1 A\,\omega^2 \tag{2.26}$$

soit

$$Q_2 = \frac{M_1 A\,\omega^2\left(k - m\,\omega^2\right)}{\left(k - m\,\omega^2\right)^2 - I_{y2}^2\,\Omega^2\,\omega^2} \tag{2.27}$$

d'où

$$Q_1 = \frac{-M_1 A\,\omega^3\,I_{y2}\,\Omega}{\left(k - m\,\omega^2\right)^2 - I_{y2}^2\,\Omega^2\,\omega^2} \tag{2.28}$$

La solution du système d'équations (2.21) est donc :

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{-M_1 A\,\omega^3\,I_{y2}\,\Omega}{\left(k - m\,\omega^2\right)^2 - I_{y2}^2\,\Omega^2\,\omega^2}\sin\omega t \\ q_2 = \dfrac{M_1 A\,\omega^2\left(k - m\,\omega^2\right)}{\left(k - m\,\omega^2\right)^2 - I_{y2}^2\,\Omega^2\,\omega^2}\cos\omega t \end{cases} \tag{2.29}$$

Bien que l'excitation produite par le mouvement imposé du support soit dans la direction z_S uniquement, il apparaît que si la vitesse de rotation du rotor Ω n'est pas nulle, l'arbre se déforme dans les deux directions. Les amplitudes Q_1 et Q_2 de la déformation sont proportionnelles à l'amplitude A du mouvement imposé.

Application numérique 1 :

Les données numériques proposées sont celles d'un rotor transporté manuellement. Dans ce cas, la fréquence du mouvement sinusoïdal est faible mais son amplitude est relativement importante :

ω = 12.57 rad/s (= 2 Hz) A = 0.1 m

Compte tenu des valeurs numériques présentées en Annexe 3, et même pour des valeurs importantes de Ω, certaines simplifications peuvent être envisagées. Le tableau présenté ici montre l'ordre de grandeur en pourcentage des termes ($m\,\omega_z^2$) et ($I_{y2}\,\Omega\,\omega$) présents dans les solutions par rapport à la raideur k du système pour une vitesse de rotation Ω importante.

Pour Ω = 1047 rad/s (=10000 tr/min)

	Mode 1	**Mode 2**	**% de k**
k	$1,1954.10^6$	$1,9126.10^7$	
$m\,\omega_z^2$	$2,2574.10^3$	$2,9464.10^3$	0,19 % maximum
$I_{y2}\,\Omega\,\omega$	$7,5559.10^4$	$3,0224.10^5$	6,32 % maximum

Les approximations suivantes peuvent être effectuées :

$$k - m\,\omega_z^2 \approx k \qquad \text{et} \qquad k^2 - I_{y2}^2\,\Omega^2\,\omega^2 \approx k^2 \tag{2.30}$$

Les solutions du système s'écrivent alors :

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{-M_1 A I_{y2} \Omega \omega^3}{k^2} \sin \omega t \\ q_2 = \dfrac{M_1 A \omega^2}{k} \cos \omega t \end{cases} \qquad (2.31)$$

Ainsi, pour les valeurs utilisées dans cet exemple, les amplitudes des déformées de l'arbre sont :

$$Q_1 = \frac{-M_1 A I_{y2} \Omega \omega^3}{k^2} = -5{,}93.10^{-9}\,\Omega \quad (m)$$

$$Q_2 = \frac{M_1 A \omega^2}{k} = 1{,}97.10^{-4} \text{ m}$$

Une résolution pas-à-pas des équations complètes (comprenant le balourd) est effectuée pour différentes valeurs de Ω afin d'observer les phénomènes (cf. Figure II.3).

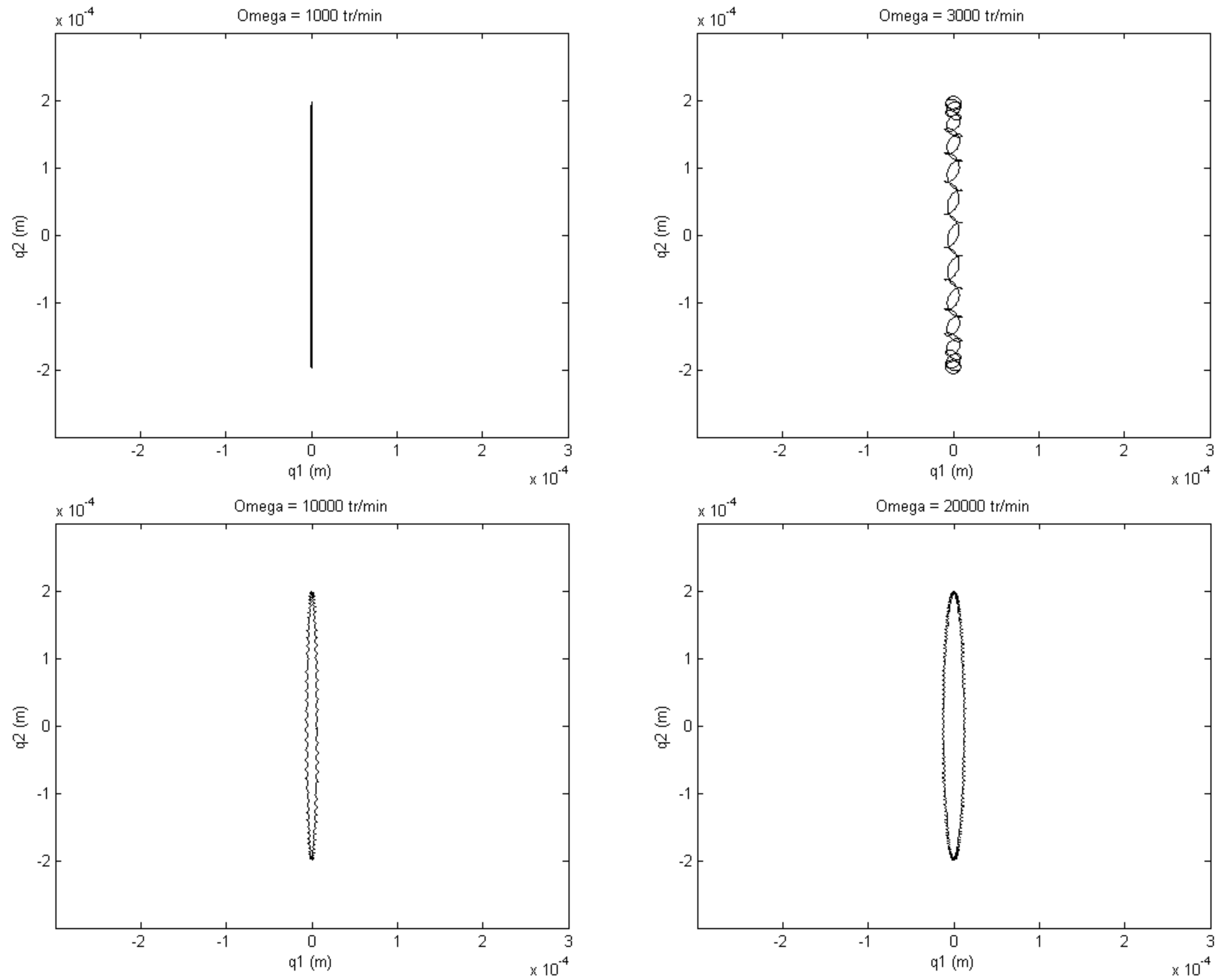


Figure II.3 : Trajectoire de l'arbre du rotor pour différentes valeurs de Ω

Encore une fois, lors de ces simulations, un amortissement constant est ajouté pour observer le régime stabilisé. Afin de bien distinguer les effets du balourd des effets du mouvement du support, les résultats présentés sont les orbites du rotor (représentation de q_2 en fonction de q_1).

Il est à noter que, pour ce type de mouvement, la réponse dans la direction de l'excitation est indépendante de la vitesse de rotation Ω du rotor. Par contre, dans la direction perpendiculaire à l'excitation, l'amplitude de la réponse est directement proportionnelle à Ω (2.31). Il faut également constater que, pour cet exemple, le couplage dans la direction horizontale n'est significatif qu'à partir d'une vitesse de rotation importante du rotor (~10.000 tr/min).

La réponse selon z_S (dans la direction d'excitation) due au mouvement du support est prédominante sur la réponse selon x_S, et cela même pour des vitesses de rotation du rotor très importantes. La déformation induite par le mouvement du support du rotor est importante par rapport à la déformation due au balourd, même lorsque le rotor est proche de sa vitesse critique (cf. Annexe 6 : Ω_c = 3089 tr/min).

Application numérique 2 :

Le rotor est fixé sur un système vibrant. Pour cette application, la fréquence du mouvement peut être très importante, mais son amplitude est faible. Les applications numériques sont réalisées avec les valeurs suivantes :

$$\omega = 12566 \text{ rad/s } (= 2000 \text{ Hz}) \qquad A = 10^{-4} \text{ m}$$

Dans ce cas, les simplifications effectuées précédemment ne sont plus réalistes et les amplitudes des déformées de l'arbre s'écrivent :

$$Q_1 = \frac{-M_1 A\,\omega^3\, I_{y2}\,\Omega}{\left(k - m\,\omega^2\right)^2 - I_{y2}^2\,\Omega^2\,\omega^2} \tag{2.32}$$

$$Q_2 = \frac{M_1 A\,\omega^2 \left(k - m\,\omega^2\right)}{\left(k - m\,\omega^2\right)^2 - I_{y2}^2\,\Omega^2\,\omega^2} \tag{2.33}$$

Les orbites observées ne seront pas fondamentalement différentes de celles obtenues dans l'exemple précédent puisqu'il s'agit de la somme de deux sinus de fréquences différentes : celui dû à la contribution du balourd et celui engendré par l'excitation du support. Il peut par contre être intéressant de représenter les amplitudes Q_1 et Q_2 en fonction de la vitesse de rotation du rotor afin de vérifier si les observations faites dans la première application sont toujours vraies (constance de Q_2 et linéarité de Q_1 par rapport à Ω).

Les phénomènes observés pour la première application sont donc encore vérifiés ici (cf. Figure II.4) puisque Q_1 semble encore proportionnelle à Ω (léger infléchissement pour des valeurs importantes de Ω), et Q_2 varie très peu sur la plage choisie, même si la variation semble parabolique.

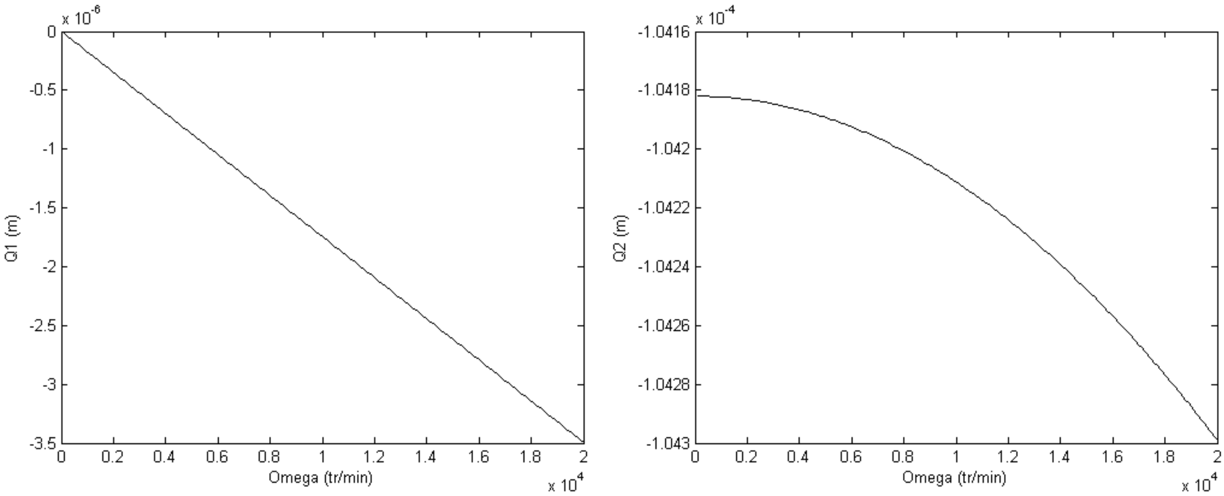


Figure II.4 : Amplitude des déformées de l'arbre en fonction de Ω

Application numérique 3 : Influence de la fréquence d'excitation ω

Pour cette application, la vitesse de rotation du rotor est fixée ainsi que l'amplitude du déplacement imposé. Seule la fréquence ω de l'excitation varie. Les valeurs utilisées sont :

Ω = 523.6 rad/s (= 5000 tr/min) A = 10^{-3} m

Pour une vitesse de rotation donnée, le système a deux pulsations de résonance Ω_1 et Ω_2 comme présenté en Annexe 6. Lorsque la fréquence ω du mouvement du support coïncide avec une de ces fréquences, la déformation va tendre vers l'infini.

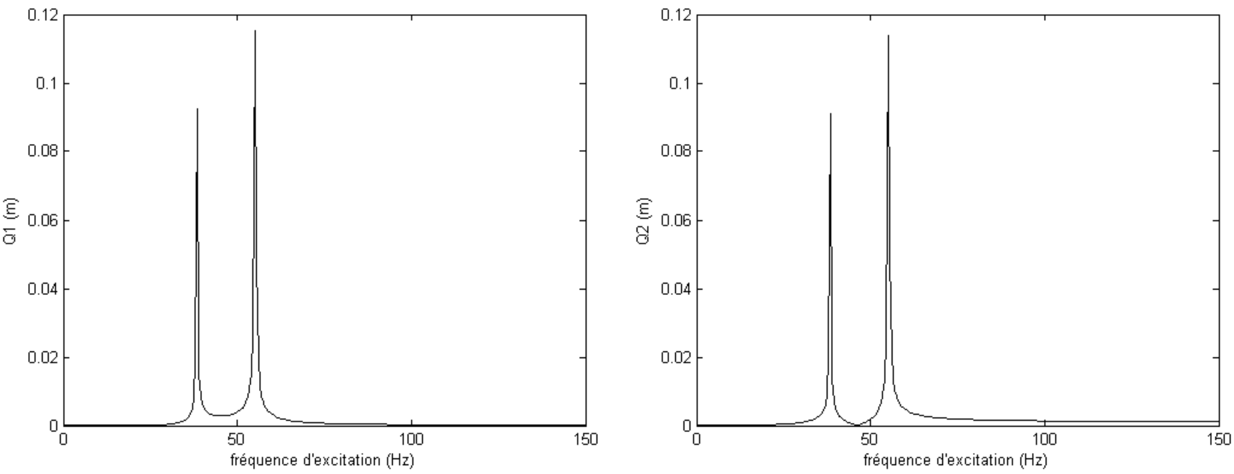


Figure II.5 : Amplitude des déformées en fonction de la fréquence d'excitation ω

Il est à noter que, lorsque le rotor est excité à une fréquence proche d'une de ses fréquences de résonance, le couplage entre les directions x_S et z_S est total contrairement aux cas étudiés précédemment où la fréquence d'excitation était éloignée de Ω_1 et Ω_2.

II.3. Rotation simple

II.3.a. Equations du mouvement

Le support est seulement soumis à une rotation selon l'axe x_0 du repère galiléen autour d'un point quelconque. Le mouvement du support est défini de la manière suivante :

Le support ne subit aucune translation et le centre de rotation est supposé quelconque :

$$\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{R_s}$$

où X, Y, et Z sont des constantes.

Le support est soumis à une rotation quelconque autour de l'axe x_0 (cf. Figure I.3) :

$$\alpha = \gamma = 0 \quad \text{et} \qquad \beta = \beta\,(t)$$

Le vecteur rotation de R_0 par rapport à R_S exprimé dans R_S s'écrit (1.5) :

$$\vec{\Omega}_S^0 = \begin{bmatrix} \dot\beta \cos\gamma - \dot\alpha\cos\beta\sin\gamma \\ \dot\alpha\sin\beta + \dot\gamma \\ \dot\beta\sin\gamma + \dot\alpha\cos\beta\cos\gamma \end{bmatrix}_{R_S} = \begin{bmatrix} \dot\alpha_S \\ \dot\beta_S \\ \dot\gamma_S \end{bmatrix}_{Rs} = \begin{bmatrix} \Omega_S \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_S} \tag{2.34}$$

où $\quad \dot\beta(t) = \Omega_S(t)$

Les matrices d'amortissement et de raideur ainsi que le vecteur force dus aux déplacements (cf. (2.3), (2.4), (2.5), (2.6) et (2.7)) s'écrivent :

$$\left[C^*\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

$$\left[K^*\right] = \begin{bmatrix} {\Omega_S}^2\left(I_{m2} - I_{y2}\right) & 0 \\ 0 & -{\Omega_S}^2 M_2 \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

$$\left\{F^*\right\} = \begin{bmatrix} I_{y1}\,\Omega_S\,\Omega \\ m_u\, d\, f(l_1)\,{\Omega_S}^2\cos\Omega\, t - \left(M_5 + I_{m1} + M_1\, Y\right)\dot\Omega_S + M_1\,{\Omega_S}^2\, Z \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

Les matrices de masse et d'amortissement sont les mêmes que pour un rotor dont le support est fixe. Par contre, la matrice de raideur est modifiée et des termes supplémentaires apparaissent aussi dans le vecteur des forces généralisées. Le système obtenu est un système de deux équations différentielles linéaires du second degré avec des seconds membres fonctions du temps.

Le système d'équations à résoudre s'écrit :

$$\begin{cases} m\,\ddot{q}_1 - \Omega\, I_{y2}\, \dot{q}_2 + \left(k + \Omega_S{}^2\left(I_{m2} - I_{y2}\right)\right)q_1 = m_u\, d\, f(l_1)\,\Omega^2 \sin\Omega\, t + I_{y1}\,\Omega_S\,\Omega \\ m\,\ddot{q}_2 + \Omega\, I_{y2}\, \dot{q}_1 + \left(k - \Omega_S{}^2 M_2\right)q_2 = m_u\, d\, f\left(l_1\right)\left(\Omega^2 + \Omega_S{}^2\right)\cos\Omega\, t - \left(M_5 + I_{m1} + M_1\, Y\right)\dot{\Omega}_S + M_1\,\Omega_S{}^2\, Z \end{cases} \tag{2.38}$$

II.3.b. Application 1 : Rotor soumis à une rotation d'ensemble constante

Le système d'équations (2.38) devient :

$$\begin{cases} m\,\ddot{q}_1 - \Omega\, I_{y2}\, \dot{q}_2 + \left(k + \Omega_S{}^2\left(I_{m2} - I_{y2}\right)\right)q_1 = m_u\, d\, f(l_1)\,\Omega^2 \sin\Omega\, t + I_{y1}\,\Omega_S\,\Omega \\ m\,\ddot{q}_2 + \Omega\, I_{y2}\, \dot{q}_1 + \left(k - \Omega_S{}^2 M_2\right)q_2 = m_u\, d\, f\left(l_1\right)\left(\Omega^2 + \Omega_S{}^2\right)\cos\Omega\, t - M_1\,\Omega_S{}^2\, Z \end{cases} \tag{2.39}$$

Soit

$$\begin{aligned} k_1(\Omega_S) &= k + \Omega_S{}^2\left(I_{m2} - I_{y2}\right) \\ k_2(\Omega_S) &= k - \Omega_S{}^2 M_2 \end{aligned} \tag{2.40}$$

D'après les applications numériques (cf. Annexe 6), M_2 est positif et I_{y2} est supérieur à I_{m2}. La rotation du support a donc pour effet de diminuer les raideurs k_1 et k_2. Contrairement au cas d'un support fixe, les raideurs k_1 et k_2 peuvent devenir négatives et provoquer des instabilités.

$$k_1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad k > M_2\,\Omega_S{}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \Omega_S < \sqrt{\frac{k}{M_2}}$$

$$k_2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad k > \left(I_{y2} - I_{m2}\right)\Omega_S{}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \Omega_S < \sqrt{\frac{k}{I_{y2} - I_{m2}}}$$

En utilisant les valeurs numériques données dans l'Annexe 6 :

$$k_1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Omega_S < 2913.7\,\mathrm{tr/min}$$

$$k_2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Omega_S < 8772.5\,\mathrm{tr/min}$$

Un système comportant un rotor embarqué à de telles vitesses de rotation n'existe pas dans les dispositifs industriels courants. Toutefois, la diminution de raideur n'est pas équivalente dans les deux directions. Le rotor va avoir un comportement asymétrique. Il peut être intéressant d'étudier l'influence d'une rotation moins importante du support sur les équations du mouvement du rotor.

Les équations (2.39) sont linéaires. Les solutions sont la somme des solutions :

- du système homogène associé :

$$\begin{cases} m\,\ddot{q}_1 - \Omega\, I_{y2}\,\dot{q}_2 + k_1\,q_1 = 0 \\ m\,\ddot{q}_2 + \Omega\, I_{y2}\,\dot{q}_1 + k_2\,q_2 = 0 \end{cases} \tag{2.41}$$

- du système comportant les forces statiques dues au mouvement :

$$\begin{cases} m\,\ddot{q}_1 - \Omega\, I_{y2}\,\dot{q}_2 + k_1\,q_1 = I_{y1}\,\Omega_S\,\Omega \\ m\,\ddot{q}_2 + \Omega\, I_{y2}\,\dot{q}_1 + k_2\,q_2 = -M_1\,\Omega_S{}^2\,Z \end{cases} \tag{2.42}$$

- du système prenant en compte la sollicitation due au balourd :

$$\begin{cases} m\,\ddot{q}_1 - \Omega\, I_{y2}\,\dot{q}_2 + k_1\,q_1 = m_u\,d\,f(l_1)\,\Omega^2 \sin\Omega\,t \\ m\,\ddot{q}_2 + \Omega\, I_{y2}\,\dot{q}_1 + k_2\,q_2 = m_u\,d\,f(l_1)\left(\Omega^2 + \Omega_S{}^2\right)\cos\Omega\,t \end{cases} \tag{2.43}$$

<u>Système homogène associé (2.41) :</u>

La méthode est la même que celle utilisée dans l'Annexe 6. Les solutions sont cherchées sous la forme :

$$\begin{cases} q_1 = Q_1\,e^{rt} \\ q_2 = Q_2\,e^{rt} \end{cases} \tag{2.44}$$

En remplaçant ces solutions dans le système homogène, il vient :

$$\begin{bmatrix} m\,r^2 + k_1 & -I_{y2}\,\Omega\,r \\ I_{y2}\,\Omega\,r & m\,r^2 + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = 0 \tag{2.45}$$

Les autres solutions que la solution triviale $Q_1 = Q_2 = 0$ sont obtenues pour :

$$\det \begin{vmatrix} m\,r^2 + k_1 & -I_{y2}\,\Omega\,r \\ I_{y2}\,\Omega\,r & m\,r^2 + k_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.46}$$

soit

$$\left(mr^2 + k_1\right)\left(mr^2 + k_2\right) + I_{y2}{}^2\Omega^2 r^2 = 0 \tag{2.47}$$

qui peut s'écrire

$$m^2\,r^4 + \left(m\left(k_1 + k_2\right) + I_{y2}{}^2\,\Omega^2\right)r^2 + k^2 = 0 \tag{2.48}$$

Lorsque le rotor est à l'arrêt ($\Omega = 0$) les racines de cette équation sont :

$$r_{10}^2 = j^2\Omega_{10}^2 = -\frac{k_1}{m} \tag{2.49}$$

$$r_{20}^2 = j^2\Omega_{20}^2 = -\frac{k_2}{m} \tag{2.50}$$

Et les fréquences de résonance du rotor à l'arrêt sont :

$$\Omega_{10} = \sqrt{\frac{k_1}{m}} \tag{2.51}$$

$$\Omega_{20} = \sqrt{\frac{k_2}{m}} \tag{2.52}$$

Lorsque le rotor est en rotation, les fréquences de résonance deviennent :

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{\Omega_{10}^2}{2} + \frac{\Omega_{20}^2}{2} + \frac{I_{y2}^2\,\Omega^2}{2\,m^2} - \sqrt{\left(\frac{\Omega_{10}^2}{2} + \frac{\Omega_{20}^2}{2} + \frac{I_{y2}^2\,\Omega^2}{2\,m^2}\right)^2 - \Omega_{10}^2\,\Omega_{20}^2}} \tag{2.53}$$

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{\Omega_{10}^2}{2} + \frac{\Omega_{20}^2}{2} + \frac{I_{y2}^2\,\Omega^2}{2\,m^2} + \sqrt{\left(\frac{\Omega_{10}^2}{2} + \frac{\Omega_{20}^2}{2} + \frac{I_{y2}^2\,\Omega^2}{2\,m^2}\right)^2 - \Omega_{10}^2\,\Omega_{20}^2}} \tag{2.54}$$

Application numérique :

Le diagramme de Campbell (cf. Figure II.6) représente les fréquences de résonance du rotor en fonction de sa vitesse de rotation. Il est tracé pour une vitesse de rotation du support Ω_S = 20 Hz. Il est à noter que pour une fréquence de rotation relativement faible, une différence peut déjà être observée sur le diagramme de Campbell.

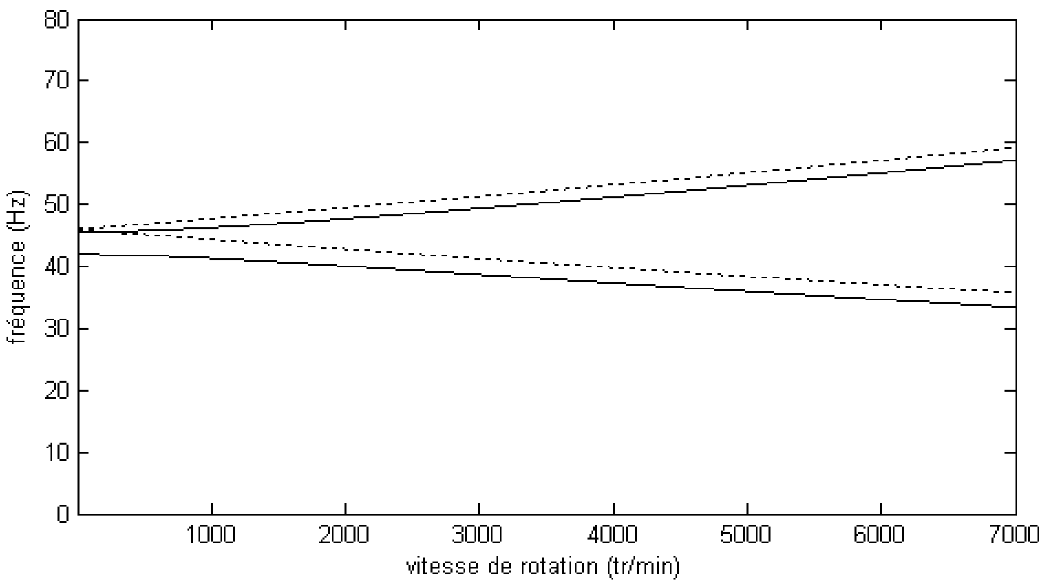


Figure II.6 : Diagramme de Campbell pour un rotor en rotation constante

L'écart entre les deux fréquences lorsque l'arbre est à l'arrêt ($\Omega = 0$) est caractéristique des rotors asymétriques. Pour les faibles fréquences de rotation de l'arbre, Ω_1 est beaucoup plus diminué que Ω_2 alors que pour les fréquences importantes de rotation de l'arbre, les deux fréquences de résonance sont diminuées d'une même valeur constante.

Système comportant les forces statiques dues au mouvement (2.42) :

Une solution particulière de ce système est la solution constante :

$$q_1(t) = Q_{1p} = \frac{I_{y1}\,\Omega_S\,\Omega}{k_1} = \frac{I_{y1}\,\Omega_S\,\Omega}{k - \Omega_S^2\left(I_{y2} - I_{m2}\right)} \tag{2.55}$$

$$q_2(t) = Q_{2p} = \frac{-M_1\,\Omega_S^2\,Z}{k_2} = \frac{-M_1\,\Omega_S^2\,Z}{k - \Omega_S^2 M_2} \tag{2.56}$$

En vue de chiffrer les résultats concernant la vitesse maximale imposable au support, un déplacement maximal d_{max}, que Q_{1p} et Q_{2p} ne doivent pas dépasser, est défini. Ce déplacement maximal peut par exemple correspondre au jeu entre l'arbre et le stator (au-dessus de cette valeur, il y a un risque de contact rotor/stator). Etant donné les dimensions du modèle étudié, la valeur choisie pour le déplacement maximal est : $d_{max} = 1$ mm.

Pour la direction x_S, la déformation Q_{1p} selon z_S dépend de Ω et de Ω_S :

$$\left|Q_{1p}\right| = \left|\frac{I_{y1}\,\Omega_S\,\Omega}{k - \Omega_S^2\left(I_{y2} - I_{m2}\right)}\right| < d_{max} \tag{2.57}$$

d'où

$$\left|\,I_{y1}\right|\Omega\,\Omega_S < d_{max}\left|\,k - \left(I_{y2} - I_{m2}\right)\Omega_S^2\,\right| \tag{2.58}$$

et finalement

$$\Omega < \frac{d_{max}\left|\,k - \left(I_{y2} - I_{m2}\right)\Omega_S^2\right|}{\left|\,I_{y1}\right|\Omega_S} \tag{2.59}$$

Un domaine d'utilisation du rotor est ainsi défini selon sa vitesse de rotation Ω et la vitesse de rotation Ω_S de son support (cf. Figure II.7).

La force généralisée statique selon x_S créée par ce mouvement limite beaucoup la valeur que peut prendre Ω lorsque le support est en rotation. Par exemple, pour une vitesse de rotation de l'arbre $\Omega = 1000$ tr/min, la vitesse de rotation du support ne peut pas être supérieure à 60 tr/min, soit 1 Hz. La rotation du support du rotor est donc fortement limitée par les forces constantes qu'elle engendre dans cette direction.

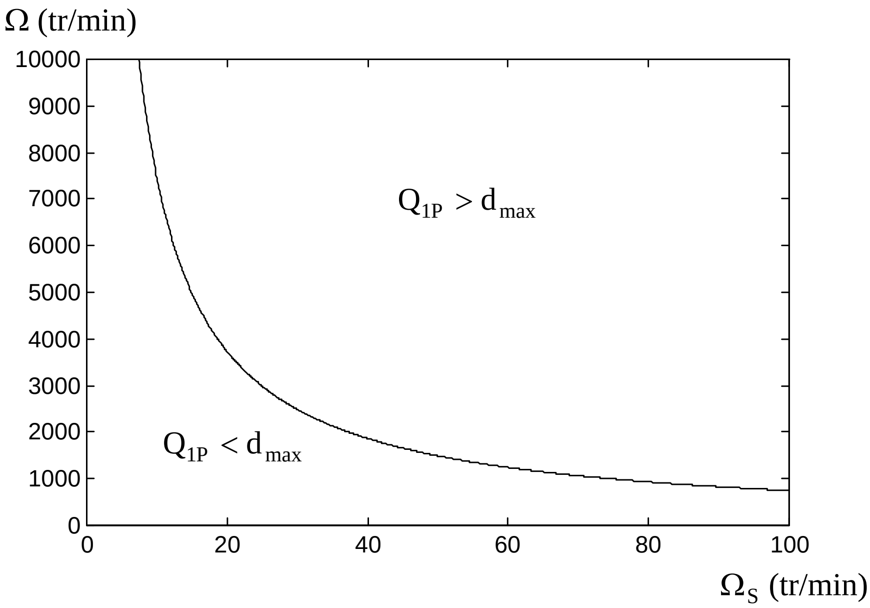


Figure II.7 : Domaine d'utilisation du rotor

.

Pour la direction z_S, la force engendrée est proportionnelle à la distance Z du centre de rotation du support à l'axe du rotor. Cette force peut donc être une limitation pour la déformation de l'arbre, cependant, si le centre de rotation est placé sur l'axe de rotation du rotor, cette limite disparaît. En gardant le même critère que précédemment il faut :

$$\left|Q_{2p}\right| = \left|\frac{-M_1\,\Omega_S^2\,Z}{k-\Omega_S^2 M_2}\right| < d_{max} \tag{2.60}$$

Par exemple si la rotation du support est Ω_S = 1 Hz et pour d_{max} = 1 mm, la distance maximum Z doit être :

$$Z < \frac{d_{max}\left(k-\Omega_S^2 M_2\right)}{M_1\,\Omega_S^2} \tag{2.61}$$

Soit pour le rotor étudié ici : Z < 11.32 m

Ici, Z représente en réalité le rayon de courbure de la rotation constante imposée au support. Cela signifie que ce rayon de courbure est limité pour une vitesse de rotation donnée.

Il est clair que les déplacements engendrés par ces forces constantes restreignent de manière considérable la vitesse de rotation qui peut être imposée au support du rotor.

Système prenant en compte la sollicitation due au balourd (2.43) :

Comme le montrent les termes de droite du système (2.43), le mouvement angulaire du support a une influence sur la réponse à un balourd dans la direction z_S si sa fréquence est significative par rapport à la fréquence de rotation de l'arbre. Pour une rotation Ω de l'arbre de 1000 tr/min, il a été montré précédemment que la vitesse de rotation Ω_S du support peut difficilement dépasser les 60 tr/min. Comme la réponse au balourd est proportionnelle au carré de ces deux vitesses de rotation, pour ces valeurs la contribution de Ω_S par rapport à Ω est de 0,36 %. L'influence du mouvement sur la force due au balourd peut donc être négligée pour les vitesses de rotation du support acceptables du point de vue des forces statiques qu'elles engendrent. Le système à résoudre peut donc être considéré comme un rotor asymétrique soumis à un balourd, et les méthodes classiques peuvent être utilisées.

En résumé, une rotation du support du rotor entraîne les modifications suivantes sur le comportement dynamique du rotor :

- Les raideurs, et donc les fréquences naturelles du rotor, sont diminuées et le rotor se comporte comme s'il était asymétrique.
- Le balourd engendre une force harmonique supplémentaire dans la direction perpendiculaire à la rotation.
- Les forces constantes dues à la rotation du support créent un décalage statique de la position du centre du rotor.

Cependant, les deux premières modifications notées ne peuvent être observées qu'à des vitesses de rotation du support entraînant des forces constantes non réalistes pour le rotor.

II.3.c. Application 2 : influence de l'accélération angulaire

Il s'agit ici d'observer l'influence d'une accélération angulaire du support autour de l'axe x_S. D'après les équations (2.38), l'accélération du support n'a d'influence que sur la déformation de l'arbre dans la direction perpendiculaire à l'axe de rotation :

$$\begin{cases} m\,\ddot{q}_1 - \Omega\, I_{y2}\,\dot{q}_2 + \left(k + \Omega_S^{\,2}\left(I_{m2} - I_{y2}\right)\right)q_1 = m_u\; d\, f(l_1)\,\Omega^2 \sin\Omega\, t + I_{y1}\,\Omega_S\,\Omega \\ m\,\ddot{q}_2 + \Omega\, I_{y2}\,\dot{q}_1 + \left(k - \Omega_S^{\,2} M_2\right)q_2 = m_u\; d\, f\left(l_1\right)\left(\Omega^2 + \Omega_S^{\,2}\right)\cos\Omega\, t - \left(M_5 + I_{m1} + M_1\, Y\right)\dot{\Omega}_S + M_1\,\Omega_S^{\,2}\, Z \end{cases} \tag{2.62}$$

De même, d'après ces équations, l'influence de l'accélération sur la déformée de l'arbre va dépendre de la position Y du point A par rapport au centre de rotation du support. Il y a même annulation de cette influence pour une valeur de Y :

$$Y = -\frac{M_5 + I_{m1}}{M_1} \tag{2.63}$$

Application numérique : Pour le modèle simple étudié ici, on obtient : Y = -0.161 m, ce qui place le centre de rotation environ entre le tiers et la moitié de l'arbre.

Des résolutions pas-à-pas du système (2.62) sont effectuées afin de mettre en évidence ce phénomène.

Le mouvement du support est défini de la manière suivante : les conditions initiales en position et en vitesse sont nulles. A t = 0.5 s, la vitesse angulaire du support autour de l'axe x_S augmente pendant 0.1 seconde jusqu'à atteindre la vitesse constante Ω_S = 10 tr/mn. Diverses simulations sont effectuées selon la position Y du point A sur l'axe y_S par rapport au centre de rotation. La distance du centre de rotation à l'axe z_S est nulle : Z = 0.

La vitesse de rotation du moteur est choisie proche de sa première fréquence de résonance : Ω = 314 rad/sec (=3000 tr/mn). Comme précédemment, un amortissement constant est ajouté pour obtenir le régime stabilisé.

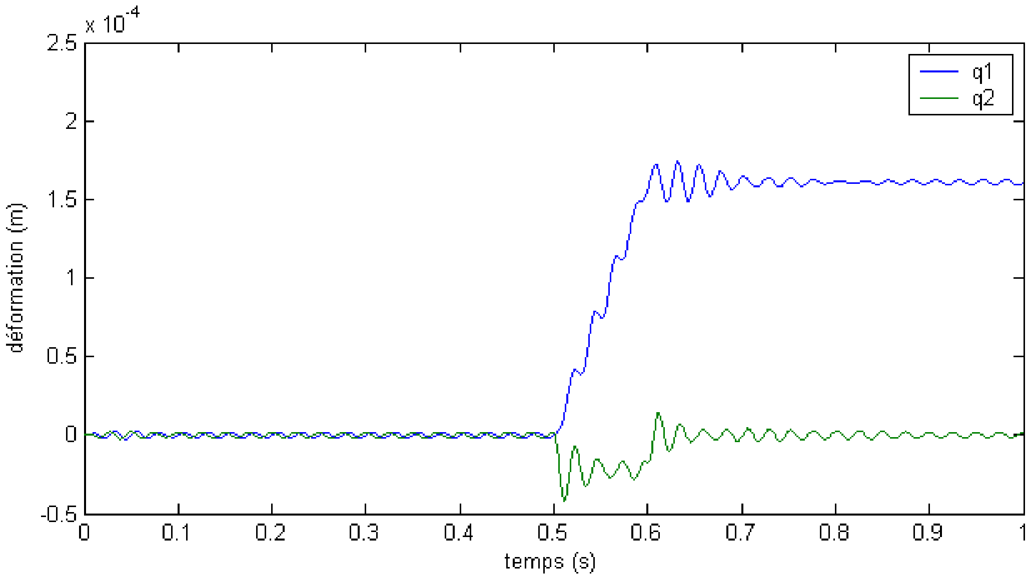


Figure II.8 : Montée en vitesse angulaire linéaire Y = 0

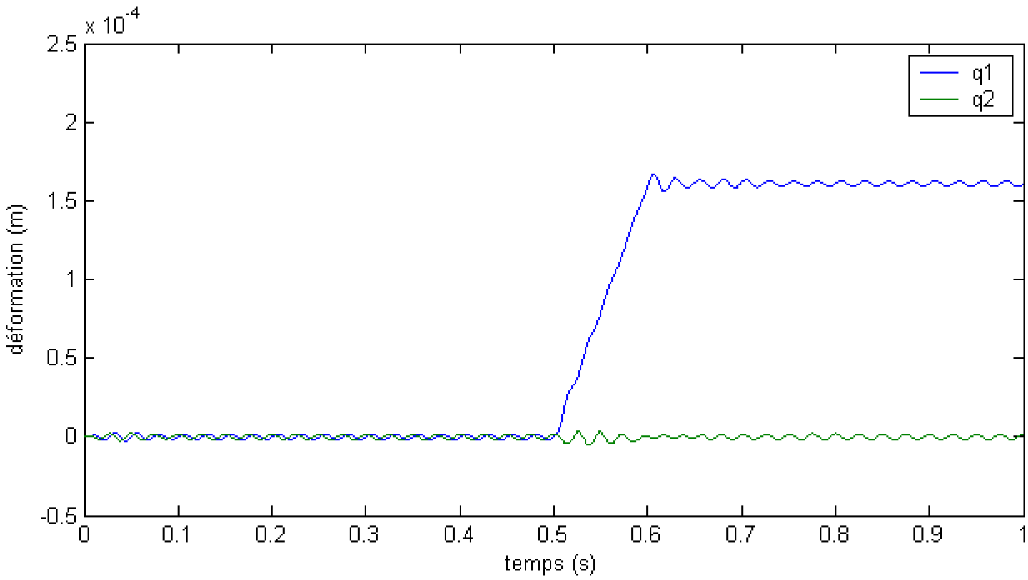


Figure II.9 : Montée en vitesse angulaire linéaire Y = -0.161 m

La figure II.8 montre que comme prévu, la déformation perpendiculaire à l'axe de rotation q_1 n'est perturbée que par la vitesse, tandis que q_2 n'est perturbée que par l'accélération angulaire. Cela est dû au fait que la distance Z est nulle. Dans le cas contraire un terme constant proportionnel à la vitesse de rotation Ω_S et à la distance Z serait ajouté dans la direction z_S. Les petites rotations parasites sont dues au balourd. Il est à noter l'importance que peut avoir un léger mouvement du support sur la réponse en amplitude.

La figure II.9 montre les déformées lorsque Y annule l'influence de l'accélération angulaire. Le comportement obtenu est en accord avec les prédictions : la direction z_S n'est plus du tout excitée par l'accélération angulaire.

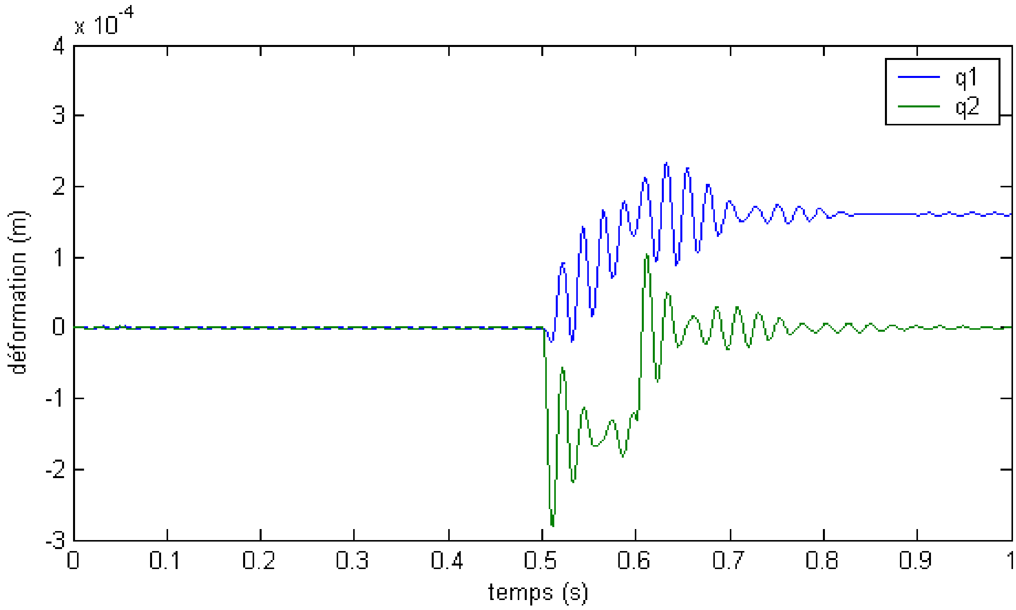


Figure II.10 : Montée en vitesse angulaire linéaire Y = 1 m

La figure II.10 montre que la contribution selon z_S due à l'accélération angulaire est loin d'être négligeable par rapport à la contribution selon x_S due à la vitesse angulaire, en particulier lorsque la distance Y n'est pas nulle.

II.4. Rotation sinusoïdale

Afin de compléter l'étude des mouvements oscillatoires (Chapitre II.2.c), il peut être intéressant d'étudier l'influence d'une rotation sinusoïdale sur la déformée du rotor. Le mouvement le plus simple est une rotation sinusoïdale du support autour d'un seul axe, par exemple l'axe x_S. Le mouvement est donc défini ainsi : X = Y = Z = 0, et dans le repère galiléen : $\beta = a \sin\omega t$, soit, d'après (1.5) :

$$\dot{\alpha}_S = a\,\omega \cos\omega t \qquad \text{et} \qquad \dot{\beta}_S = \dot{\gamma}_S = 0$$

Les équations du mouvement deviennent :

$$\begin{cases} m\,\ddot{q}_1 - \Omega\, I_{y2}\, \dot{q}_2 + (k + a^2 \omega^2 (I_{m2} - I_{y2}) \cos^2(\omega t))\, q_1 = I_{y1}\, a\, \Omega\, \omega \cos\omega t \\ m\,\ddot{q}_2 + \Omega\, I_{y2}\, \dot{q}_1 + (k - a^2 \omega^2 M_2 \cos^2(\omega t))\, q_2 = (M_5 + I_{m1})\, a\, \omega^2 \sin\omega t \end{cases} \tag{2.64}$$

Ce système est un système de deux équations différentielles non-linéaires du second degré avec des seconds membres fonctions du temps. Des termes paramétriques se sont ajoutés aux termes de raideur classiques. Le système ne peut plus être résolu analytiquement. La présence de termes paramétriques tend à prouver que le système comporte des zones d'instabilité. Une étude d'instabilité est réalisée à l'aide de la méthode des échelles multiples.

Le système (2.64) peut s'écrire :

$$\begin{cases} m\,\ddot{q}_1 - \Omega\, I_{y2}\, \dot{q}_2 + k\, q_1 = \varepsilon\, A \cos^2(\omega t)\, q_1 + \varepsilon\, B \cos\omega t \\ m\,\ddot{q}_2 + \Omega\, I_{y2}\, \dot{q}_1 + k\, q_2 = \varepsilon\, C \cos^2(\omega t)\, q_2 + \varepsilon\, D \sin\omega t \end{cases} \tag{2.65}$$

où ε est un paramètre très petit devant l'unité et où les nouvelles constantes introduites sont telles que :

$$A = \frac{a^2 \omega^2 (I_{y2} - I_{m2})}{\varepsilon} \;;\quad B = \frac{I_{y1}\, a\, \Omega\, \omega}{\varepsilon} \;;\quad C = \frac{a^2 \omega^2 M_2}{\varepsilon} \;;\quad D = \frac{a\, \omega^2 (M_5 + I_{m1})}{\varepsilon} \tag{2.66}$$

La méthode des échelles multiples consiste à introduire des nouvelles variables de temps indépendantes telles que (*Nayfeh [29]* et *Nayfeh [30]*):

$$T_n = \varepsilon^n\, t \qquad n = 0,1,2,... \tag{2.67}$$

Il s'ensuit que les dérivées par rapport au temps s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon\, D_1 + \varepsilon^2 D_2 + ... \tag{2.68}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\,\varepsilon\, D_0\, D_1 + \varepsilon^2 (2\, D_0\, D_2 + D_1^2) + ... \tag{2.69}$$

avec

$$D_n = \frac{\partial}{\partial T_n} \qquad n = 0,1,2,... \tag{2.70}$$

Les solutions sont alors cherchées sous la forme :

$$\begin{cases} q_1(t,\varepsilon) = q_{10}(T_0, T_1, T_2 ...) + \varepsilon\, q_{11}(T_0, T_1, T_2 ...) + \varepsilon^2\, q_{12}(T_0, T_1, T_2 ...) + ... \\ q_2(t,\varepsilon) = q_{20}(T_0, T_1, T_2 ...) + \varepsilon\, q_{21}(T_0, T_1, T_2 ...) + \varepsilon^2\, q_{22}(T_0, T_1, T_2 ...) + ... \end{cases} \quad (2.71)$$

Dans les développements qui suivent, les approximations utilisées pour les déplacements sont tronquées au premier ordre. En substituant les équations (2.68), (2.69), (2.71) dans le système (2.65), après avoir regroupé les termes de même puissance d'ε, deux systèmes d'équations apparaissent :

$$\begin{cases} m\, D_0^2\, q_{10} - \Omega\, I_{y2}\, D_0\, q_{20} + k\, q_{10} = 0 \\ m\, D_0^2\, q_{20} + \Omega\, I_{y2}\, D_0\, q_{10} + k\, q_{20} = 0 \end{cases} \quad (2.72)$$

$$\begin{cases} m\, D_0^2\, q_{11} - \Omega\, I_{y2}\, D_0\, q_{21} + k\, q_{11} = \\ \qquad - 2\, m\, D_0\, D_1 q_{10} + \Omega\, I_{y2}\, D_1\, q_{20} + A \cos^2(\omega t)\, q_{10} + B \cos\omega t \\ m\, D_0^2\, q_{21} + \Omega\, I_{y2}\, D_0\, q_{11} + k\, q_{21} = \\ \qquad - 2\, m\, D_0\, D_1 q_{20} - \Omega\, I_{y2}\, D_1\, q_{10} + C \cos^2(\omega t)\, q_{20} + D \sin\omega t \end{cases} \quad (2.73)$$

Les solutions du système (2.72) sont de la forme :

$$\begin{cases} q_{10} = i\, a_1(T_1) \exp(i\, \omega_1 T_0) - i\, b_1(T_1) \exp(i\, \omega_2 T_0) + cc \\ q_{20} = a_1(T_1) \exp(i\, \omega_1 T_0) + b_1(T_1) \exp(i\, \omega_2 T_0) + cc \end{cases} \quad (2.74)$$

où cc désigne la forme complexe conjuguée des termes qui précédent.

ω_1 et ω_2 sont les fréquences de résonance du premier mode du rotor pour une vitesse de rotation de l'arbre Ω (cf. Annexe 6) :

$$\omega_1 = \frac{1}{2\, m}\left(\sqrt{\Omega^2\, a^2 + 4\, k\, m} - a\, \Omega\right) \qquad \text{et} \qquad \omega_2 = \frac{1}{2\, m}\left(\sqrt{\Omega^2\, a^2 + 4\, k\, m} + a\, \Omega\right) \quad (2.75)$$

En remplaçant les solutions (2.74) dans le système (2.73), il vient :

$$\begin{aligned} m\, D_0^2\, q_{11} - \Omega\, I_{y2}\, D_0\, q_{21} + k\, q_{11} = & \left(2\, m\, \dot{a}_1\, \omega_1 + \Omega\, I_{y2}\, \dot{a}_1 + \frac{i}{2} A\, a_1\right) \exp(i\, \omega_1 T_0) \\ & + \left(-2\, m\, \dot{b}_1\, \omega_2 + \Omega\, I_{y2}\, \dot{b}_1 - \frac{i}{2} A\, a_1\right) \exp(i\, \omega_2 T_0) \\ & + \frac{i}{4} A\, a_1 \exp\left(i(2\,\omega + \omega_1) T_0\right) - \frac{i}{4} A\, \bar{a}_1 \exp\left(i(2\,\omega - \omega_1) T_0\right) \\ & - \frac{i}{4} A\, b_1 \exp\left(i(2\,\omega + \omega_2) T_0\right) + \frac{i}{4} A\, \bar{b}_1 \exp\left(i(2\,\omega - \omega_2) T_0\right) \\ & + \frac{B}{2} \exp(i\, \omega\, T_0) + cc \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$
\begin{aligned}
m D_0^2 q_{21} + \Omega I_{y2} D_0 q_{11} + k q_{21} = & \left(-2 i m \dot{a}_1 \omega_1 - i \Omega I_{y2} \dot{a}_1 + \frac{1}{2} C a_1 \right) \exp(i \omega_1 T_0) \\
& + \left(-2 i m \dot{b}_1 \omega_2 + i \Omega I_{y2} \dot{b}_1 + \frac{1}{2} C a_1 \right) \exp(i \omega_2 T_0) \\
& + \frac{1}{4} C a_1 \exp\left(i(2\omega + \omega_1) T_0\right) + \frac{1}{4} C \bar{a}_1 \exp\left(i(2\omega - \omega_1) T_0\right) \\
& + \frac{1}{4} C b_1 \exp\left(i(2\omega + \omega_2) T_0\right) + \frac{1}{4} C \bar{b}_1 \exp\left(i(2\omega - \omega_2) T_0\right) \\
& + \frac{D}{2} \exp(i \omega T_0) + cc
\end{aligned}
\tag{2.77}
$$

Les termes de gauche de ces équations sont similaires à ceux du système (2.72), ils ont donc les mêmes fréquences de résonance ω_1 et ω_2. Les instabilités peuvent apparaître lorsque les termes de droite deviennent des termes séculaires, c'est-à-dire quand les termes en exponentielles sont égaux à ω_1 ou ω_2. A savoir lorsque :

$2\omega + \omega_1 = \omega_1$	$2\omega + \omega_1 = \omega_2$
$2\omega - \omega_1 = \omega_1$	$2\omega - \omega_1 = \omega_2$
$2\omega + \omega_2 = \omega_1$	$2\omega + \omega_2 = \omega_2$
$2\omega - \omega_2 = \omega_1$	$2\omega - \omega_2 = \omega_2$

Il existe 4 possibilités non nulles de résonances internes selon les valeurs de ω par rapport à ω_1 et ω_2 :

$$\omega = \omega_1 \quad ; \quad \omega = \omega_2 \quad ; \quad \omega = (\omega_1 + \omega_2)/2 \quad ; \quad \omega = (\omega_2 - \omega_1)/2.$$

Par la suite, nous étudierons les trois premiers cas de résonance, le dernier présentant peu d'intérêt, étant donné la faible fréquence d'excitation qu'il implique.

Lorsque la pulsation ω est proche de ω_1

Afin d'étudier la stabilité du système autour de la fréquence ω_1, on introduit un terme de perturbation σ, tel que :

$$\omega = \omega_1 + \varepsilon \sigma \tag{2.78}$$

Certains termes de droite des équations (2.76) et (2.77) vont devenir des termes séculaires :

$$\exp(i \omega T_0) = \exp(i \omega_1 T_0 + i \sigma T_1) \qquad \exp\left(i (2\omega - \omega_1) T_0\right) = \exp(i \omega_1 T_0 + 2 i \sigma T_1) \tag{2.79}$$

Pour trouver les conditions de solvabilité, les solutions sont cherchées sous la forme :

$$\begin{cases} q_{11} = P_1(T_1)\exp(i\,\omega_1 T_0) + Q_1(T_1)\exp(i\,\omega_2 T_0) \\ q_{21} = P_2(T_1)\exp(i\,\omega_1 T_0) + Q_2(T_1)\exp(i\,\omega_2 T_0) \end{cases} \tag{2.80}$$

En substituant les solutions (2.80) dans les équations (2.76) et (2.77), et en identifiant les coefficients en $\exp(i\ \omega_i\ T_0)$ de chaque côté, les 4 équations suivantes sont obtenues :

$$\begin{cases} \left(k - m\,\omega_1^2\right)P_1 - i\,\omega_1\,\Omega\,I_{y2}\,P_2 = R_1 \\ i\,\omega_1\,\Omega\,I_{y2}\,P_1 + \left(k - m\,\omega_1^2\right)P_2 = R_2 \end{cases} \tag{2.81}$$

et

$$\begin{cases} \left(k - m\,\omega_2^2\right)Q_1 - i\,\omega_2\,\Omega\,I_{y2}\,Q_2 = S_1 \\ i\,\omega_2\,\Omega\,I_{y2}\,Q_1 + \left(k - m\,\omega_2^2\right)Q_2 = S_2 \end{cases} \tag{2.82}$$

avec

$$\begin{aligned} R_1 &= \left(\Omega\,I_{y2} + 2\,m\,\omega_1\right)\dot{a}_1 + \frac{i}{2}A\,a_1 - \frac{i}{4}A\,\bar{a}_1\exp(2\,i\,\sigma\,T_1) + \frac{1}{2}B\exp(i\,\sigma\,T_1) \\ R_2 &= \left(-i\,\Omega\,I_{y2} - 2\,i\,m\,\omega_1\right)\dot{a}_1 + \frac{1}{2}C\,a_1 + \frac{1}{4}C\,\bar{a}_1\exp(2\,i\,\sigma\,T_1) - \frac{i}{2}D\exp(i\,\sigma\,T_1) \end{aligned} \tag{2.83}$$

et

$$\begin{aligned} S_1 &= \left(\Omega\,I_{y2} - 2\,m\,\omega_2\right)\dot{b}_1 - \frac{i}{2}A\,b_1 \\ S_2 &= \left(i\,\Omega\,I_{y2} - 2\,i\,m\,\omega_2\right)\dot{b}_1 + \frac{1}{2}C\,b_1 \end{aligned} \tag{2.84}$$

Les conditions de solvabilité s'écrivent alors :

$$\begin{vmatrix} k - m\,\omega_1^2 & R_1 \\ i\,\omega_1\,\Omega\,I_{y2} & R_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.85}$$

et

$$\begin{vmatrix} k - m\,\omega_2^2 & S_1 \\ i\,\omega_2\,\Omega\,I_{y2} & S_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.86}$$

Ces conditions conduisent à 2 équations différentielles en a_1 et b_1 à résoudre :

$$i\,\alpha_1\,\dot{a}_1 + \alpha_2\,a_1 + \alpha_3\,\bar{a}_1\exp(2\,i\,\sigma\,T_1) + i\,\alpha_4\exp(i\,\sigma\,T_1) = 0 \tag{2.87}$$

$$i\,\beta_1\,\dot{b}_1 + \beta_2\,b_1 = 0 \tag{2.88}$$

où

$$\alpha_1 = 2\,m^2\,\omega_1^3 - m\,\Omega\,I_{y2}\,\omega_1^2 - \Omega^2\,I_{y2}^2\,\omega_1 - 2\,k\,m\,\omega_1 - k\,\Omega\,I_{y2} \quad (2.89)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}\left(\Omega\,I_{y2}\,\omega_1\,A + k\,C - m\,\omega_1^2\,C\right) \quad (2.90)$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{4}\left(-\Omega\,I_{y2}\,\omega_1\,A + k\,C - m\,\omega_1^2\,C\right) \quad (2.91)$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{2}\left(-\Omega\,I_{y2}\,\omega_1\,B - k\,D + m\,\omega_1^2\,D\right) \quad (2.92)$$

et

$$\beta_1 = 2\,m^2\,\omega_2^3 + m\,\Omega\,I_{y2}\,\omega_2^2 - \Omega^2\,I_{y2}^2\,\omega_2 - 2\,k\,m\,\omega_2 + k\,\Omega\,I_{y2} \quad (2.93)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2}\left(-\Omega\,I_{y2}\,\omega_2\,A + k\,C - m\,\omega_2^2\,C\right) \quad (2.94)$$

La solution de l'équation (2.88) est évidente :

$$b_1(T_1) = b\exp\left(i\frac{\beta_2}{\beta_1}T_1\right) \quad (2.95)$$

où b est une constante.

La solution générale de l'équation (2.87) a pour forme :

$$a_1(T_1) = \left(Ar(T_1) + i\,Ai(T_1)\right)\exp\left(i\,\sigma\,T_1\right) \quad (2.96)$$

où Ar et Ai sont des réels. En substituant cette solution dans l'équation (2.87) et en séparant les parties réelles et imaginaires, il vient :

$$\begin{cases} -\alpha_1\,\dot{A}i + (\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1\,\sigma)\,Ar = 0 \\ \alpha_1\,\dot{A}r + (\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_1\,\sigma)\,Ai + \alpha_4 = 0 \end{cases} \quad (2.97)$$

La solution de l'équation (2.97) est de la forme :

$$\begin{cases} Ar = a_r\,\exp(\gamma\,T_1) \\ Ai = a_i\,\exp(\gamma\,T_1) - \dfrac{\alpha_4}{(\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_1\,\sigma)} \end{cases} \quad (2.98)$$

où a_r, a_i et γ sont des constantes. En remplaçant cette solution dans le système (2.97), il vient :

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1\,\sigma & -\alpha_1\,\gamma \\ \alpha_1\,\gamma & \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_1\,\sigma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_r \\ a_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.99)$$

Afin de ne pas avoir une solution triviale, il faut :

$$\gamma = \pm\sqrt{\frac{(\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_1\,\sigma)(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1\,\sigma)}{-\alpha_1^2}} \tag{2.100}$$

Il en résulte que le mouvement est stable si :

$$\sigma < \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_1} \qquad \text{ou} \qquad \sigma > \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\alpha_1} \tag{2.101}$$

Et les courbes de transition entre les zones stables et instables sont données par :

$$\omega = \omega_1 + \varepsilon\,\frac{\alpha_2 \pm \alpha_3}{\alpha_1} + O(\varepsilon^2) \tag{2.102}$$

Lorsque la pulsation ω est proche de ω_2

En suivant la même procédure que pour $\omega \approx \omega_1$, avec $\omega = \omega_2 + \varepsilon\,\sigma$, d'autres termes séculaires apparaissent :

$$\exp(i\,\omega T_0) = \exp(i\,\omega_2 T_0 + i\,\sigma\,T_1) \qquad \exp\big(i\,(2\,\omega - \omega_2)T_0\big) = \exp(i\,\omega_2 T_0 + 2\,i\,\sigma\,T_1) \tag{2.103}$$

et, de la même manière que précédemment, il vient les équations (2.81), et (2.82), avec cette fois :

$$\begin{aligned} R_1 &= \big(\Omega\,I_{y2} + 2\,m\,\omega_1\big)\dot{a}_1 + \frac{i}{2}A\,a_1 \\ R_2 &= \big(-i\,\Omega\,I_{y2} - 2\,i\,m\,\omega_1\big)\dot{a}_1 + \frac{1}{2}C\,a_1 \end{aligned} \tag{2.104}$$

et

$$\begin{aligned} S_1 &= \big(\Omega\,I_{y2} - 2\,m\,\omega_2\big)\dot{b}_1 - \frac{i}{2}A\,b_1 + \frac{i}{4}A\,\overline{b}_1 \exp(2\,i\,\sigma\,T_1) + \frac{1}{2}B\exp(i\,\sigma\,T_1) \\ S_2 &= \big(i\,\Omega\,I_{y2} - 2\,i\,m\,\omega_2\big)\dot{b}_1 + \frac{1}{2}C\,b_1 + \frac{1}{4}C\,\overline{b}_1 \exp(2\,i\,\sigma\,T_1) - \frac{i}{2}D\exp(i\,\sigma\,T_1) \end{aligned} \tag{2.105}$$

Les équations (2.87) et (2.88) deviennent alors :

$$i\,\alpha_1\,\dot{a}_1 + \alpha_2\,a_1 = 0 \tag{2.106}$$

$$i\,\beta_1\,\dot{b}_1 + \beta_2\,b_1 + \beta_3\,\overline{b}_1 \exp(2\,i\,\sigma\,T_1) + i\,\beta_4 \exp(i\,\sigma\,T_1) = 0 \tag{2.107}$$

avec

$$\beta_3 = \frac{1}{4}\left(\Omega\, I_{y2}\, \omega_2\, A + k\, C - m\, \omega_2^2\, C\right) \tag{2.108}$$

$$\beta_4 = \frac{1}{2}\left(-\Omega\, I_{y2}\, \omega_2\, B - k\, D + m\, \omega_2^2\, D\right) \tag{2.109}$$

Le domaine de stabilité pour la deuxième fréquence de résonance est ainsi déterminé : les courbes de transition entre l'état stable et l'état instable sont données par :

$$\omega = \omega_2 + \varepsilon\, \frac{\beta_2 \pm \beta_3}{\beta_1} + O(\varepsilon^2) \tag{2.110}$$

Lorsque la pulsation ω est proche de $(\omega_1 + \omega_2)/2$

Cette fois, la fréquence d'excitation ω est définie par :

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + \varepsilon\, \sigma \tag{2.111}$$

En suivant le même cheminement que précédemment il vient :

$$i\, \alpha_1\, \dot{a}_1 + \alpha_2\, a_1 + \frac{1}{2}\alpha_2\, \overline{b}_1\, \exp(2\, i\, \sigma\, T_1) = 0 \tag{2.112}$$

$$i\, \beta_1\, \dot{b}_1 + \beta_2\, b_1 + \frac{1}{2}\beta_2\, \overline{a}_1\, \exp(2\, i\, \sigma\, T_1) = 0 \tag{2.113}$$

Les solutions sont à nouveau cherchées sous la forme :

$$\begin{cases} a_1(T_1) = \left(Ar(T_1) + i\, Ai(T_1)\right) \exp\left(i\, \sigma\, T_1\right) \\ b_1(T_1) = \left(Br(T_1) + i\, Bi(T_1)\right) \exp\left(i\, \sigma\, T_1\right) \end{cases} \tag{2.114}$$

Ces solutions sont substituées dans les équations (2.112) et (2.113). La séparation des parties réelles et imaginaires conduit aux 4 équations suivantes :

$$-\alpha_1\, \dot{A}i + (\alpha_2 - \alpha_1\, \sigma)\, Ar + \frac{1}{2}\alpha_2\, Br = 0 \tag{2.115}$$

$$\alpha_1\, \dot{A}r + (\alpha_2 - \alpha_1\, \sigma)\, Ai - \frac{1}{2}\alpha_2\, Bi = 0 \tag{2.116}$$

$$-\beta_1\, \dot{B}i + (\beta_2 - \beta_1\, \sigma)\, Br + \frac{1}{2}\beta_2\, Ar = 0 \tag{2.117}$$

$$\beta_1\, \dot{B}r + (\beta_2 - \beta_1\, \sigma)\, Bi - \frac{1}{2}\beta_2\, Ai = 0 \tag{2.118}$$

En cherchant les solutions sous la forme :

$$\begin{cases} (Ar, Ai) = (a_r, a_i)\exp(\gamma\, T_1) \\ (Br, Bi) = (b_r, b_i)\exp(\gamma\, T_1) \end{cases} \tag{2.119}$$

Il vient les conditions de solvabilité suivantes :

$$\begin{vmatrix} \alpha_2 - \alpha_1\,\sigma & -\alpha_1\,\gamma & \frac{\alpha_2}{2} & 0 \\ \alpha_1\,\gamma & \alpha_2 - \alpha_1\,\sigma & 0 & -\frac{\alpha_2}{2} \\ \frac{\beta_2}{2} & 0 & \beta_2 - \beta_1\,\sigma & -\beta_1\,\gamma \\ 0 & -\frac{\beta_2}{2} & \beta_1\,\gamma & \beta_2 - \beta_1\,\sigma \end{vmatrix} = 0 \tag{2.120}$$

Les courbes de transition entre les zones stables et instables sont ainsi obtenues :

$$\omega = \omega_1 + \varepsilon \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \frac{\beta_2}{\beta_1} \pm \sqrt{\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} + \frac{\beta_2^2}{\beta_1^2} - \frac{\alpha_2\,\beta_2}{\alpha_1\,\beta_1}} \right) + O(\varepsilon^2) \tag{2.121}$$

En résumé, il est possible de tracer les zones d'instabilité du modèle simple de rotor défini précédemment soumis à une rotation oscillante, selon l'amplitude et la fréquence de celle-ci (cf. Figure II.11).

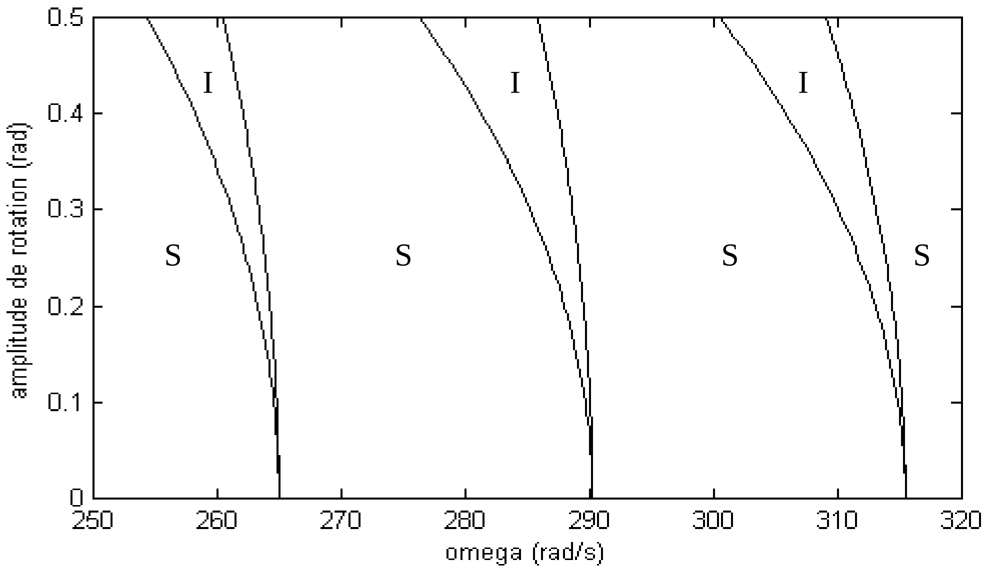


Figure II.11 : Domaines de stabilité du rotor soumis à une rotation sinusoïdale

L'excitation appliquée a été volontairement exagérée car les zones d'instabilité sont fines pour des amplitudes de rotation du support du rotor entraînant des accélérations importantes. En effet, l'accélération en un point du rotor est proportionnelle à sa distance au centre de rotation, à l'amplitude de la rotation et au carré de sa fréquence. Ainsi pour un point situé au milieu de l'arbre, pour une amplitude de 0.1 rad et sur la première fréquence de résonance, l'accélération sera :

$$a*(L/2)*\ \omega\text{^}2 = 0.1*0.2*265\text{^}2 \approx 1400\ m/s^2$$

Le décalage et l'écartement des zones d'instabilité apparaissent donc pour des amplitudes d'excitation qui ne peuvent sans doute pas être atteintes expérimentalement.

Ces zones d'instabilité peuvent tout de même s'observer à l'aide d'une résolution pas-à-pas du modèle numérique simple. Afin de bien mettre en évidence les phénomènes, l'amplitude de rotation du support est prise égale à 0.3 rad. Pour obtenir le régime permanent lorsque le système est stable, un amortissement est ajouté. Cet amortissement va rapidement tendre vers zéro, permettant ainsi d'observer l'amplitude stabilisée de la réponse.

La figure II.13 montre les déplacements q_1 et q_2 en fonction du temps pour une fréquence d'excitation ω telle que $\omega = \omega_1 \approx 265$ rad/s.

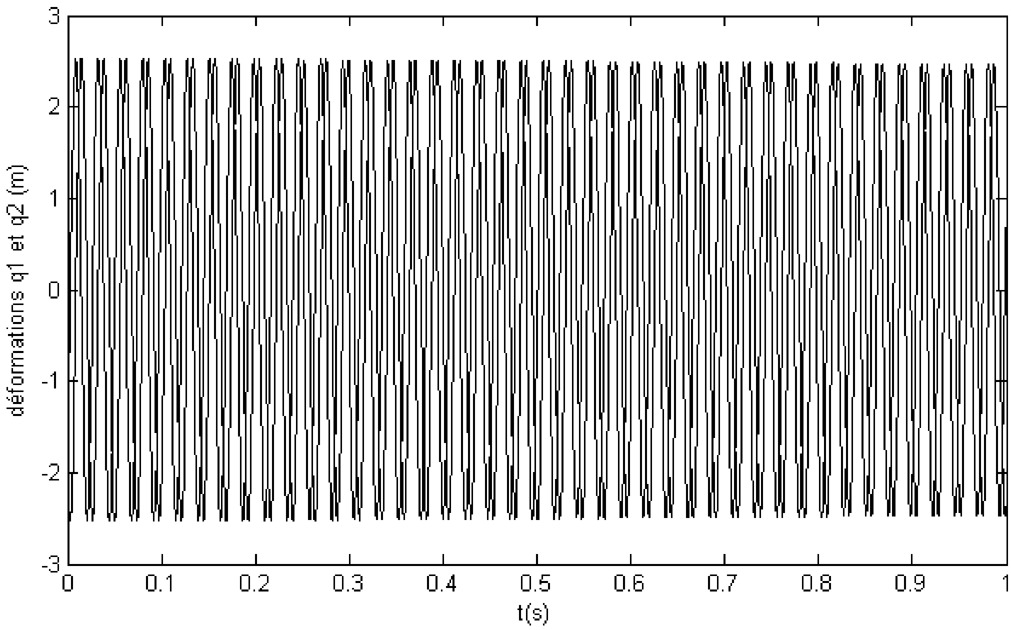


Figure II.13 : Réponse du rotor à une rotation sinusoïdale de fréquence $\omega = \omega_1$

Comme prévu pour de telles amplitudes de déplacement, les déformées obtenues ne sont pas réalistes : plus de 2 m de déformée pour un arbre de 40 cm. Mais, contrairement à ce qui pouvait être pressenti, non seulement le système est stable, mais il n'y a même pas de phénomène de résonance.

La figure II.14 montre la réponse du rotor pour une fréquence d'excitation $\omega = 262$ Hz, c'est à dire dans la zone d'instabilité située sous la première fréquence de résonance ω_1. Comme il a été prévu à l'aide de la méthode des échelles multiples, il y a ici instabilité.

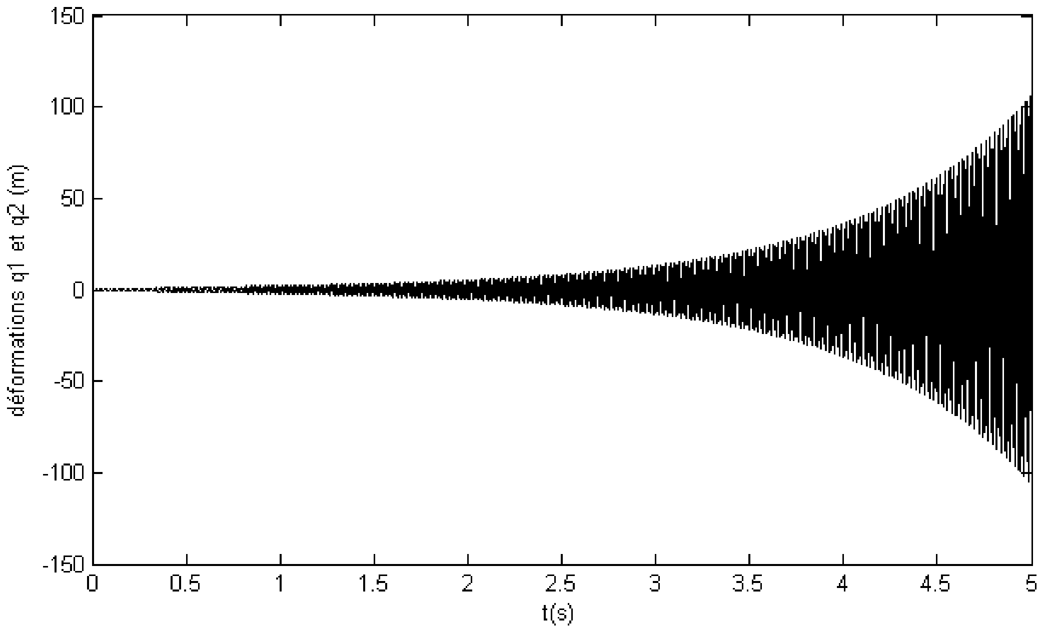


Figure II.14 : Réponse du rotor à une rotation sinusoïdale autour de ω_2

En renouvelant cette opération pour différentes valeurs de fréquence d'excitation, il est possible de vérifier que les approximations faites avec la méthode des échelles multiples étaient justifiées en traçant les zones d'instabilité à l'aide de la méthode pas-à-pas pour des amplitudes d'excitation allant de 0.1 à 0.4 radian. En vue de mieux distinguer les éventuelles différences, des zooms sont réalisés sur les différentes zones d'instabilité. Les figures II.15 à II.17 montrent la vérification des instabilités par la méthode pas-à-pas pour les trois zones.

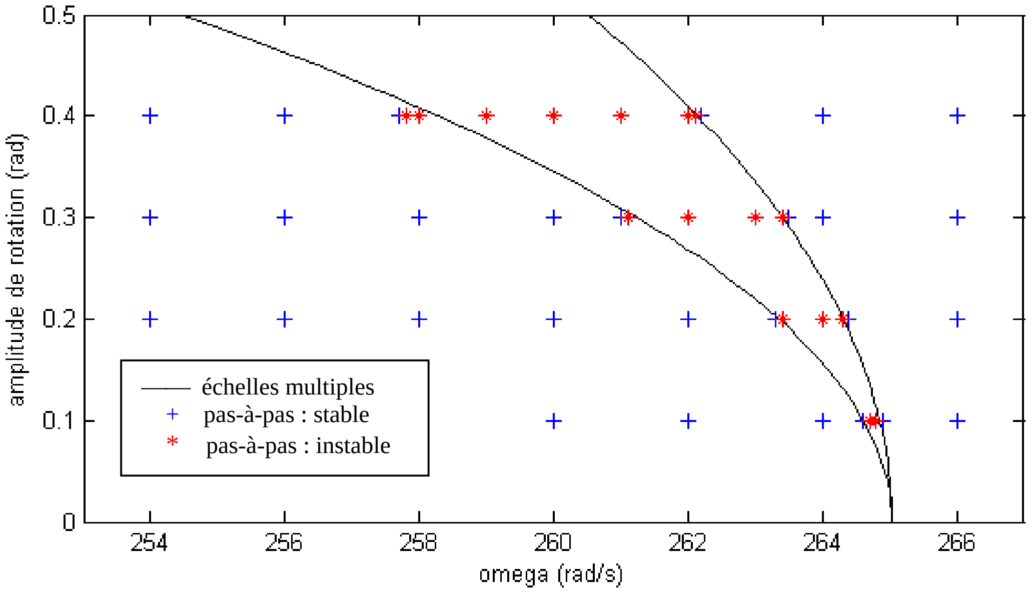


Figure II.15 : Comparaison entre les zones d'instabilité obtenues par la méthode des échelles multiples et par simulation pas-à-pas – 1ère zone d'instabilité ($\omega \approx \omega_1$)

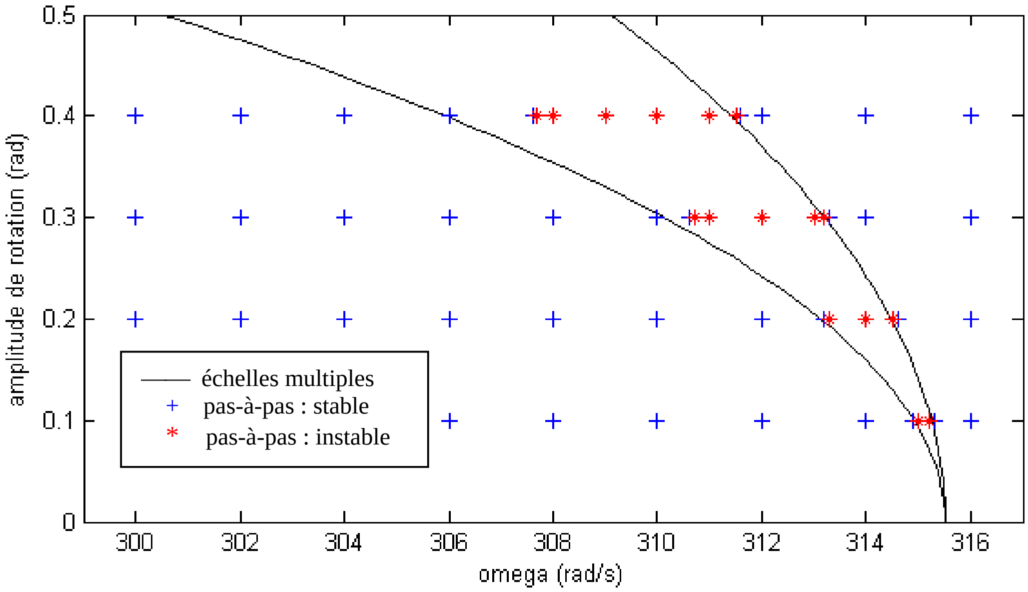


Figure II.16 : Comparaison entre les zones d'instabilité obtenues par la méthode des échelles multiples et par simulation pas-à-pas – 2ème zone d'instabilité ($\omega \approx (\omega_1 + \omega_2)/2$)

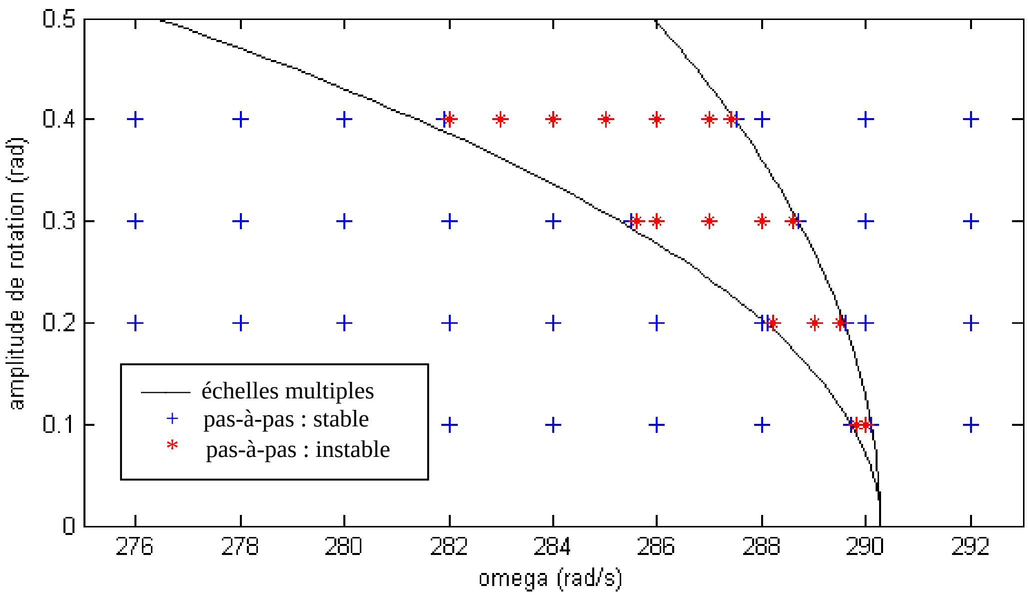


Figure II.17 : Comparaison entre les zones d'instabilité obtenues par la méthode des échelles multiples et par simulation pas-à-pas – 3ème zone d'instabilité ($\omega \approx \omega_2$)

Les simulations numériques correspondent presque parfaitement aux prévisions faites à l'aide de la méthode des échelles multiples. Seul un léger décalage peut être observé pour les courbes de transition situées à gauche des figures. Ce décalage est vers la droite pour la première zone et à gauche pour les deux autres (en particulier pour la 3ème zone).

Conclusion

Cette partie a permis de mettre en évidence des phénomènes de base sur des mouvements simples. Des solutions analytiques ont été présentées pour les mouvements de translation constante, de translation sinusoïdale et de rotation constante. L'influence de l'accélération angulaire a également été étudiée. Plusieurs phénomènes ont été mis en évidence :

- Une translation constamment accélérée du support a une influence uniquement dans la direction de déplacement.
- Lors d'une translation sinusoïdale du support, le déplacement maximal dans la direction du mouvement est constant quelle que soit la vitesse de rotation du rotor, et le déplacement maximal dans la direction perpendiculaire est proportionnel à cette vitesse de rotation.
- Lorsque le support est soumis à une rotation constante, les forces généralisées statiques engendrées par le mouvement sont prépondérantes par rapport aux termes dus au mouvement ajoutés dans la matrice de raideur.
- Pour une rotation simple du support, l'accélération angulaire n'a d'influence que dans la direction perpendiculaire à l'axe de rotation. Si le centre de rotation est situé sur l'axe du rotor, la vitesse de rotation du support n'a d'influence que dans la direction de l'axe de rotation. Il existe dans ce cas une position pour le centre de rotation sur l'axe du rotor pour laquelle l'accélération angulaire n'a plus aucune influence, dans les deux directions.
- Lorsque le support est soumis à une rotation sinusoïdale, les termes paramétriques qui apparaissent dans la matrice de raideur engendrent des instabilités qui ont été détectées à l'aide de la méthode des échelles multiples. Les zones d'instabilité trouvées ont été vérifiées à l'aide de simulations numériques.

Le mouvement de rotation sinusoïdale semble être le plus intéressant car il n'a pas de solution analytique et présente des zones d'instabilité, même si celles-ci semblent apparaître pour des amplitudes de mouvement du support irréaliste. Afin d'étudier plus spécifiquement ce mouvement, un dispositif expérimental est utilisé dans la troisième partie.

PARTIE III : APPLICATION A UN SYSTEME REEL

Excepté le mouvement de rotation oscillatoire, tous les mouvements simples étudiés dans la deuxième partie peuvent être résolus analytiquement. Pour étudier plus spécifiquement ce mouvement, un dispositif expérimental a été développé. Afin de recaler le modèle éléments finis en vue de réaliser des comparaisons, une étude du diagramme de Campbell du système est effectuée. L'étude d'un choc permet d'avoir une idée de l'amortissement du rotor. Une étude peut alors être menée en fonction de l'amplitude du mouvement imposé. L'étude des orbites pour certaines fréquences particulières est également développée. Les instabilités présentées dans la deuxième partie sont mises en évidence à l'aide d'une étude des fréquences de résonance du système selon l'amplitude du mouvement oscillatoire angulaire imposé.

III.1. Dispositif expérimental

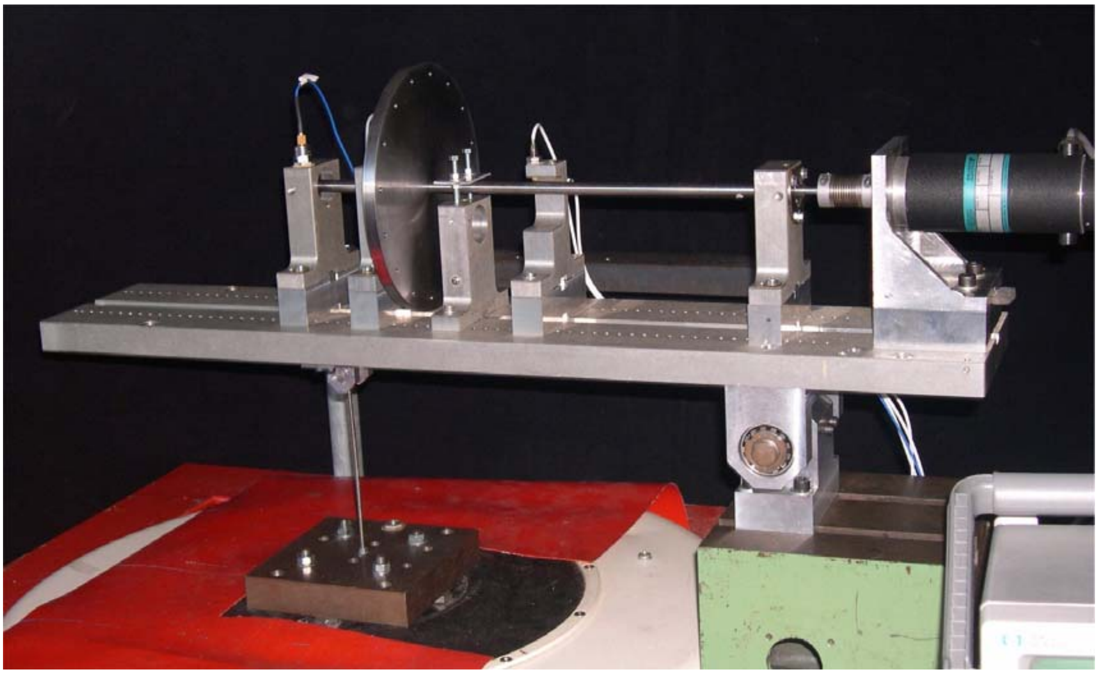


Figure III.1 : Dispositif expérimental

Le rotor expérimental (cf. Figure III.1) développé est du même type que le modèle simple : il est composé d'un arbre flexible de longueur 40 cm et de diamètre 1 cm. L'arbre est appuyé-appuyé en ses deux extrémités à l'aide de deux paliers rotules fixés au support. L'arbre comporte un disque de 10 cm de diamètre et de 1 cm d'épaisseur. La figure III.2 montre une vue de dessus de l'ensemble du rotor.

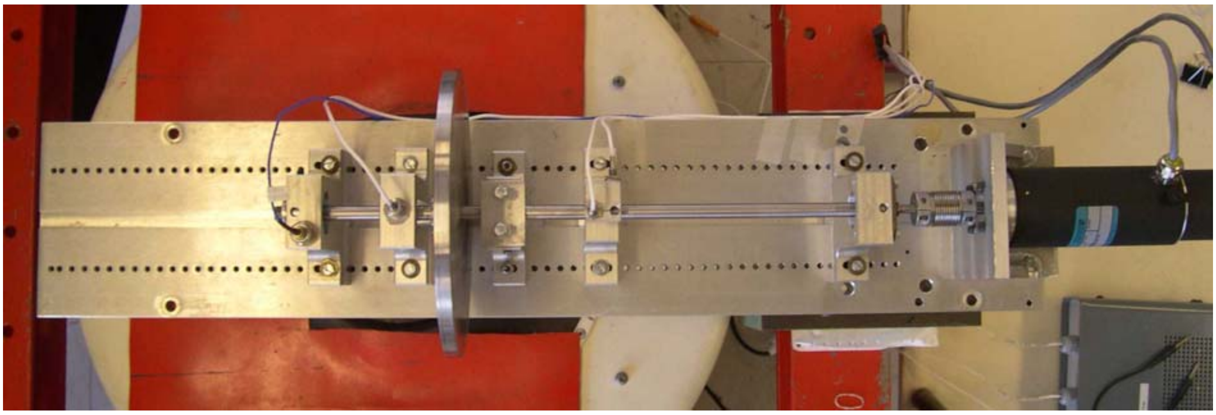


Figure III.2 : Vue du dessus de l'ensemble du rotor

Le disque, placé aux ¾ de la distance entre les paliers, est percé de 16 trous régulièrement répartis permettant de corriger le balourd (cf. Figure III.3). Les dimensions sont choisies pour avoir un effet gyroscopique important sur le premier mode. Elles permettent également d'avoir une première fréquence de résonance du rotor peu élevée, afin de pouvoir étudier les réactions du rotor à des vitesses de rotation supérieures à celle-ci.

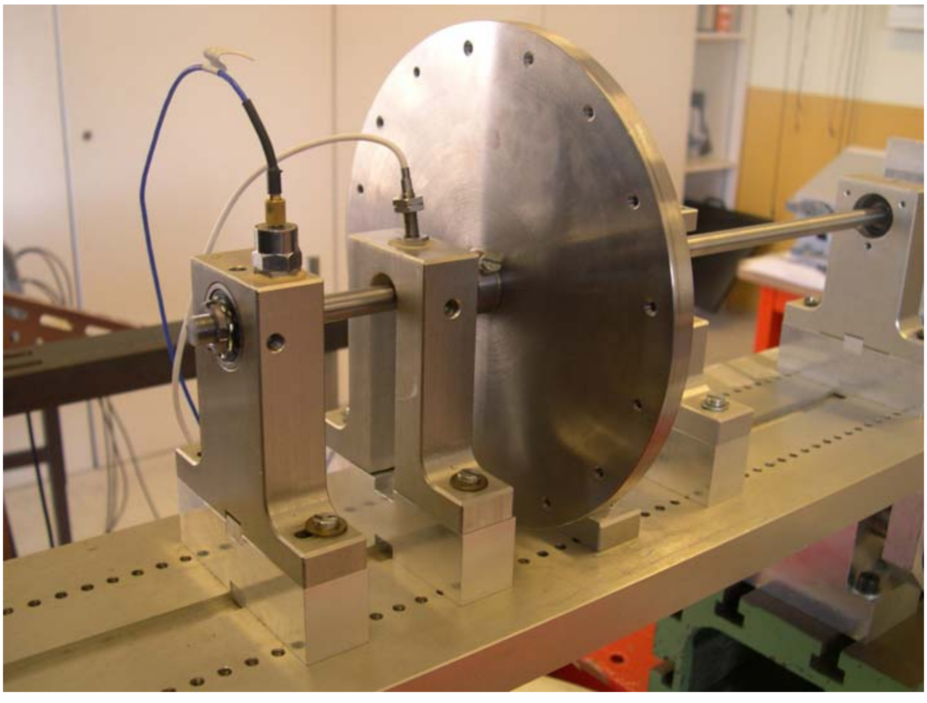


Figure III.3 : Détails du rotor : disque, 2ème plan de mesure, 2ème palier et accéléromètre

L'entraînement est assuré par un moteur asservi en vitesse et piloté par une électronique associée. Le moteur permet d'atteindre des vitesses de rotation de 4500 tr/mn. Il est fixé au support par l'intermédiaire d'une équerre. La liaison moteur-arbre est réalisée par un accouplement homocinétique (cf. Figure III.4). Celui-ci est destiné à compenser les éventuels désalignements et différences angulaires dus à la déformée de l'arbre.

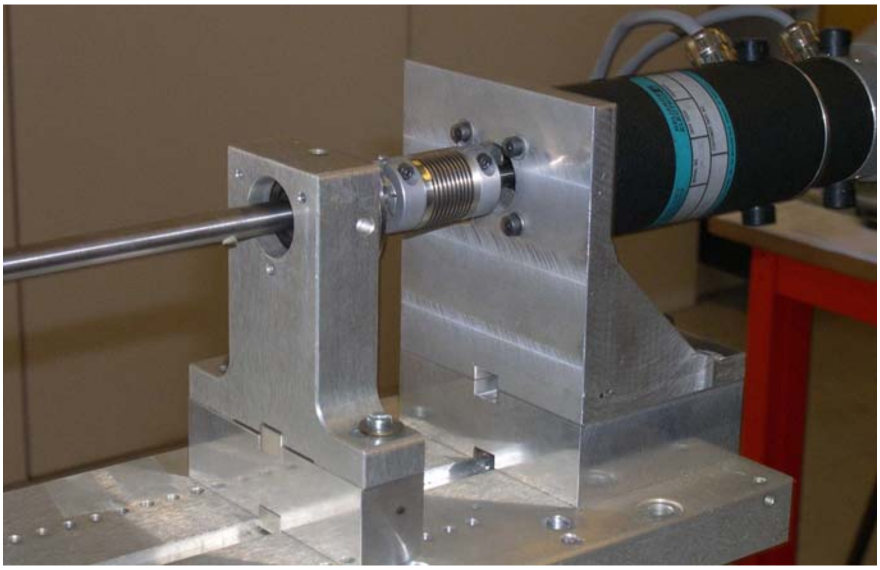


Figure III.4: Détails du rotor : Moteur, équerre, accouplement homocinétique, et 1er palier

Une extrémité du plateau est fixée au sol à l'aide d'une liaison pivot horizontale. L'autre extrémité est reliée à un pot d'excitation Gearing&Watson par l'intermédiaire d'un push-rod (cf. Figure III.5).

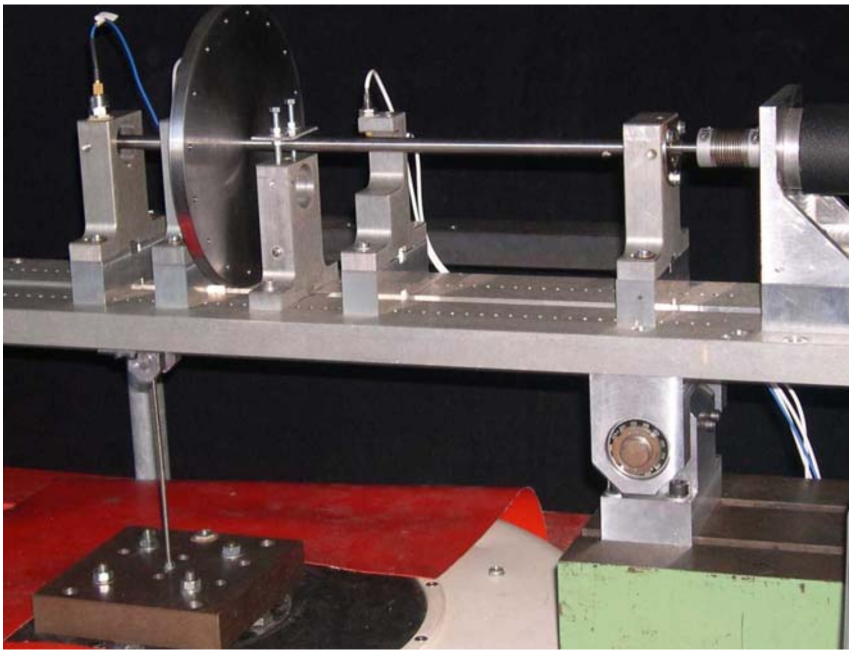


Figure III.5: Système d'attache du support : liaison pivot et push-rod

Le pot d'excitation permet de fournir des efforts allant jusqu'à 4700 N avec une amplitude maximale de 5 cm crête à crête. Le contrôle des déplacements du pot est réalisé grâce à un accéléromètre placé au niveau du second palier (cf. Figure III.3).

Les mesures sont réalisées à partir de capteurs de déplacement sans contact à courant de Foucault (2 capteurs disposés orthogonalement par plan de mesure). Le premier plan de mesure est situé au milieu de l'arbre et est utilisé pour connaître la déformation maximale dans les directions x_S et z_S (cf. Figure III.6). Le deuxième plan de mesure est placé entre le disque et le second palier (cf. Figure III.3), il est utilisé pour détecter le second mode de vibration du rotor.

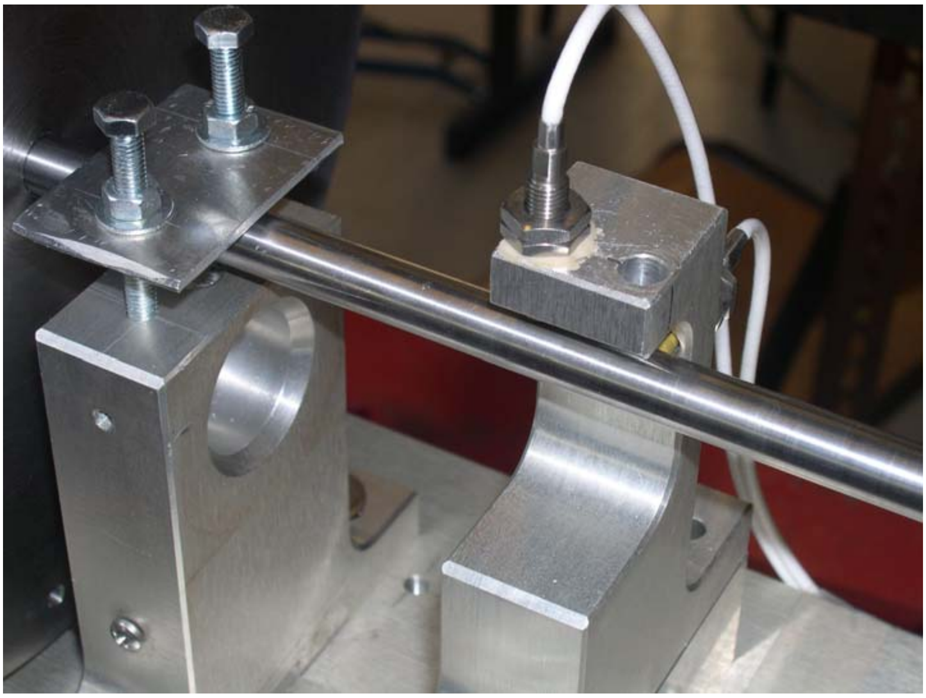
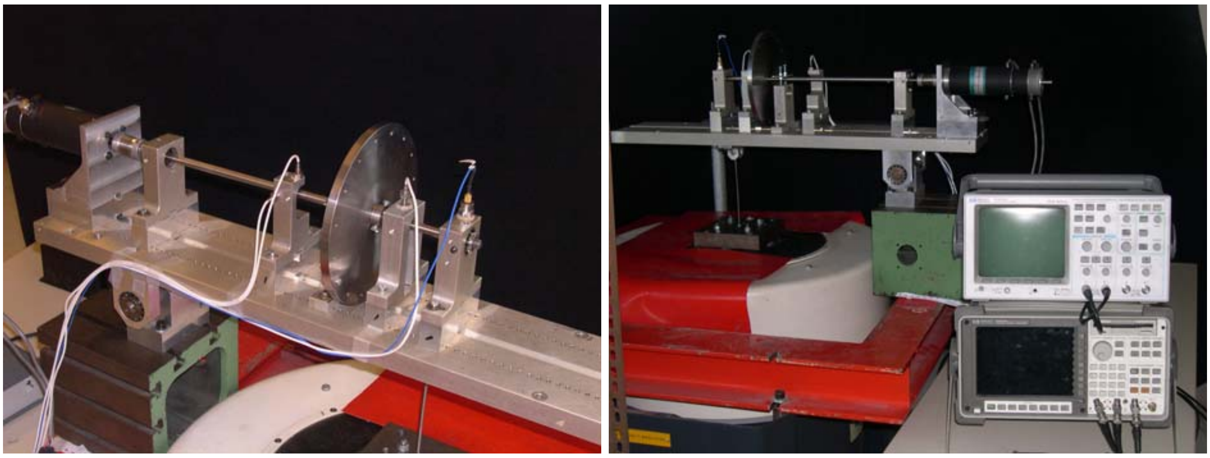


Figure III.6 : Détails du rotor : 1er plan de mesure

L'acquisition et le stockage des données sont réalisés à l'aide d'un analyseur de signal à 4 voies (cf. Figure III.7). Les données stockées sont post-traitées avec un logiciel spécifique.



a) Plans de mesure et câblage

b) Analyseur 4 voies et oscilloscope

Figure III.7 : Système d'acquisition

III.2. Modèle numérique

Le modèle numérique utilisé pour prévoir le comportement du rotor embarqué et comparer les résultats expérimentaux aux simulations est un modèle de type éléments finis (cf. Chapitre I.4). L'arbre de longueur L_1 et de rayon R_1 est composé de 9 nœuds régulièrement répartis. Le disque a un rayon intérieur R_1 et un rayon extérieur R_2 pour une épaisseur h. Il est placé sur le nœud 7 afin d'avoir une distance $l_1 = 3*L_1/4$. Les nœuds 1 et 9 sont reliés au support par des paliers caractérisés par leurs raideurs et leur amortissements.

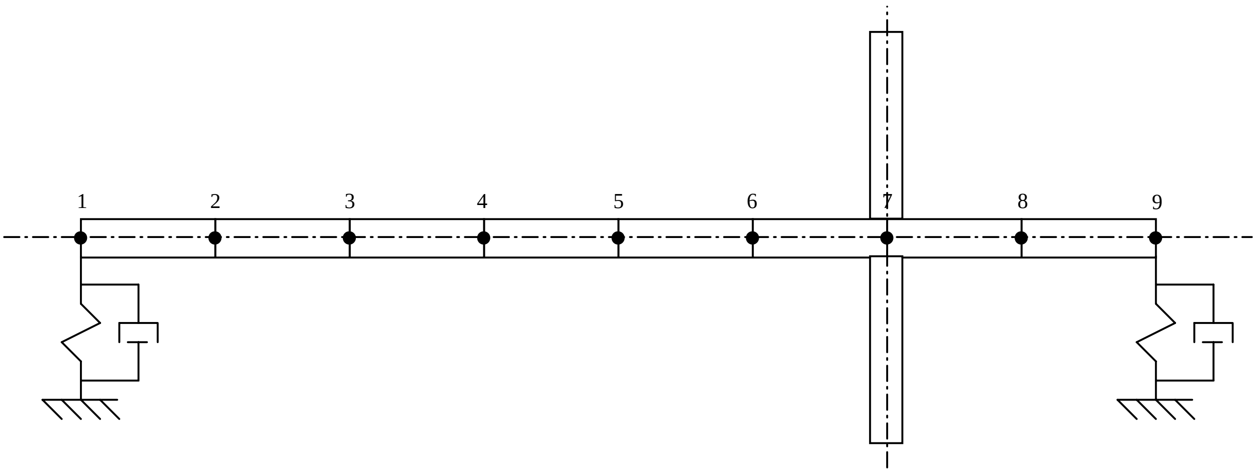


Figure III.8 : Schéma du modèle numérique

III.3. Recalage du modèle

Le but des essais est de comparer les résultats expérimentaux avec les prévisions effectuées à l'aide d'une simulation numérique. Pour cela, il est nécessaire de calibrer le modèle, c'est à dire de recaler les différentes caractéristiques du rotor : masses de l'arbre et du disque, raideurs de l'arbre et des paliers, amortissement de l'ensemble, valeur du balourd.

Le recalage des masses et raideurs du système se fait à l'aide d'une comparaison des diagrammes de Campbell obtenues expérimentalement et numériquement. Le recalage de l'amortissement du système est réalisé à partir d'une étude de la réponse à un choc.

III.3.a. Equilibrage du rotor

Le premier essai effectué est un équilibrage du rotor. Le mode opératoire est basé sur *Mahfoudh [27]* et *Alauze [1]*. Le but est de minimiser le balourd de l'ensemble à l'aide d'un « contre-balourd » placé à la périphérie du disque. L'objectif de cette opération est d'avoir la possibilité de passer la première fréquence de résonance du rotor sans risquer de l'endommager. Le « contre-balourd » est trouvé égal à 1.35 gramme. Il reste toutefois un balourd résiduel mais celui-ci est très faible et les vibrations au passage de la première fréquence de résonance restent inférieures au demi-millimètre, ce qui est largement acceptable pour le modèle expérimental défini. Néanmoins, une déformation constante de l'arbre est observée. Le centre de l'arbre est ainsi excentré d'environ 4.10^{-5} mètre en son milieu. Afin de s'affranchir de ce phénomène, le balourd est recalé dans le modèle numérique selon la vitesse de rotation de l'arbre.

III.3.b. Recalage en fréquence : diagrammes de Campbell

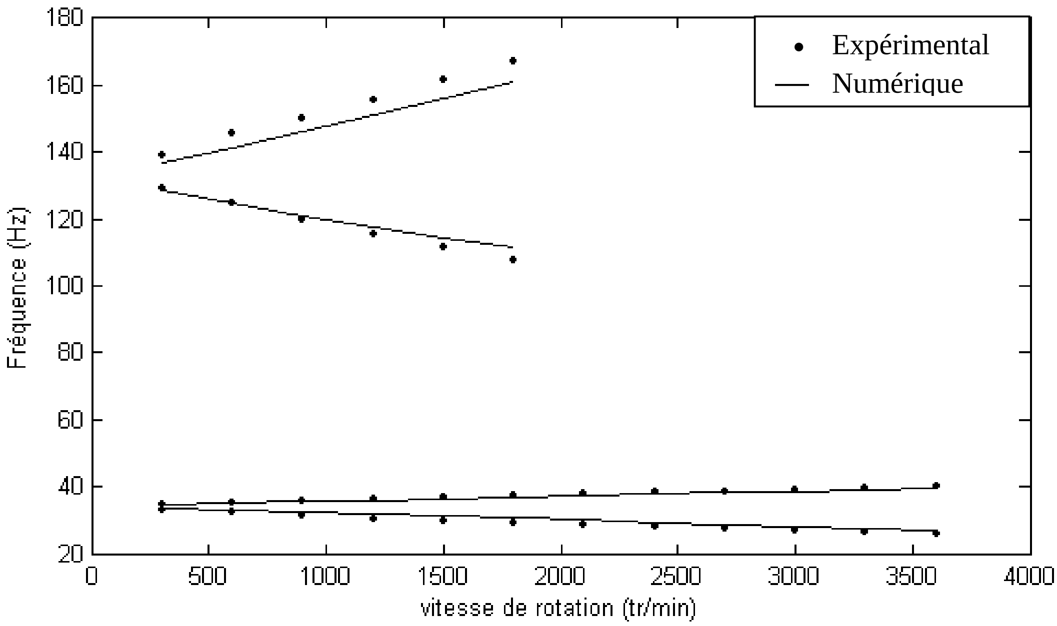
<u>*Mode opératoire :*</u>

Pour obtenir le diagramme de Campbell expérimental du système, la vitesse du rotor est fixée et l'arbre du rotor est excité à l'aide d'un marteau de choc. La déformée de l'arbre est alors enregistrée à l'aide des capteurs de déplacement sans contact à courant de Foucault. La fonction de transfert du signal obtenu est visualisée grâce à l'analyseur de signal. Les fréquences de résonance des deux premiers modes peuvent ainsi être relevées. Cette manipulation est répétée pour différentes vitesses de rotation du rotor (de 0 à 3600 tr/mn tous les 300 tr/mn) dans le but de tracer le diagramme de Campbell.

Afin vérifier les dimensions du modèle, le support est tout d'abord fixé sur un socle indéformable. Les paliers peuvent alors être considérés comme infiniment rigides. Une fois les dimensions du système confirmées, le support est fixé au pot, et les raideurs des paliers sont recalées sur le système complet rotor/support/pot d'excitation.

<u>*Résultats :*</u>

La figure III.9 représente le diagramme de Campbell du rotor dont le support est fixé sur un socle. Les deux premiers modes sont représentés.



<u>*Figure III.9 : Diagramme de Campbell du rotor avec le support fixe (2 premiers modes)*</u>

Les caractéristiques du rotor pour la simulation numérique sont les suivantes :

$E = 2{,}05.10^{11}$ Pa
$\rho = 7800$ kg / m^3
$L = 0.4$ m
$R_1 = 0.005$ m
$R_2 = 0.01$ m
$h = 0.01$ m
$l_1 = 0.3$ m

Les valeurs choisies sont les valeurs théoriques du dispositif expérimental (les trous du disque sont négligés). Le recalage a uniquement été effectué sur la valeur du module d'Young de l'acier. La valeur $E = 2{,}05.10^{11}$ Pa, déterminée après recalage, est dans la fourchette pour le module d'Young d'un acier.

Il est à noter qu'au-delà d'une certaine vitesse de rotation de l'arbre, le deuxième mode est trop amorti pour pouvoir relever les fréquences de résonance équivalentes. Le recalage est donc effectué prioritairement sur le mode 1. Afin d'avoir une meilleure précision dans la comparaison, un zoom est réalisé sur le mode 1 (cf. Figure III.10). La corrélation entre les résultats expérimentaux et les prévisions numériques est excellente (erreur < 5%).

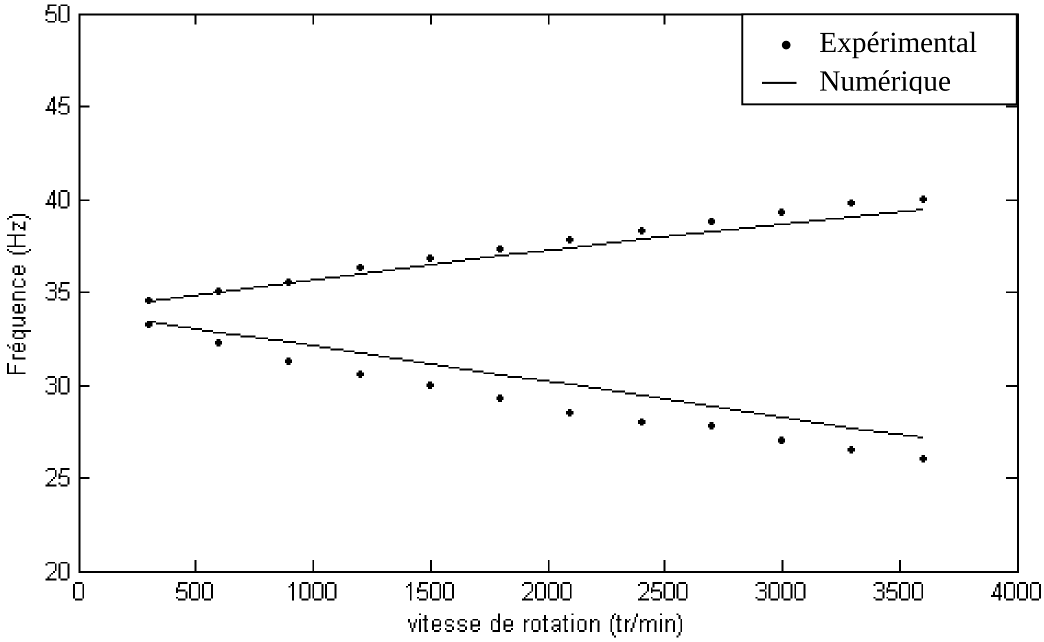


Figure III.10 : Diagramme de Campbell du rotor avec le support fixe (zoom sur le mode 1)

Le support est fixé sur le pot d'excitation. Le mode opératoire est le même que précédemment. Etant donnée la relative souplesse du montage, les paliers ne peuvent plus être considérés comme infiniment rigides. De plus, la géométrie du support entraîne une dissymétrie dans les raideurs des paliers.

Après recalage, les raideurs des paliers sont les suivantes (cf. (1.95)) :

$k_{xx} = 2,1.10^5$ N/m
$k_{zz} = 1,2.10^6$ N/m
$k_{xz} = k_{zx} = 0$ N/m

La dissymétrie engendrée par le montage est bien visible (cf. Figure III.11) : il existe 2 fréquences de résonance pour le mode 1 même lorsque le rotor est à l'arrêt. Le recalage effectué sur les raideurs de palier permet d'avoir une très bonne corrélation entre résultats expérimentaux et prévisions numériques.

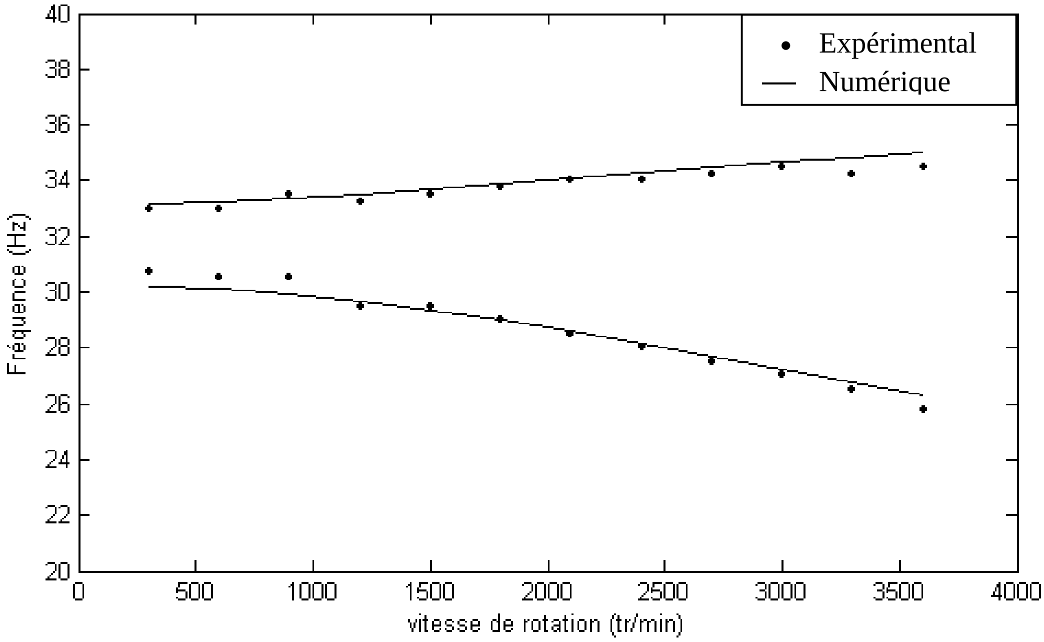


Figure III.11 : Diagramme de Campbell du rotor avec le support fixé au pot d'excitation (mode 1)

Il est à noter que le modèle simple développé à l'aide de la méthode de Rayleigh-Ritz ne peut être utilisé pour modéliser ce système. En effet, celui-ci considère un rotor dont les paliers sont infiniment rigides, ce qui n'est pas le cas ici.

III.3.c. Recalage amortissement : étude de la réponse à un choc

Mode opératoire :

Le but de cette étude est de trouver les amortissements équivalents à appliquer aux paliers du modèle numérique afin d'avoir un comportement comparable à celui du dispositif expérimental. Pour cela, un « choc angulaire » est appliqué à l'aide du pot d'excitation sur le support du rotor. La consigne en déplacement appliquée au pot d'excitation est un créneau de 0.5 seconde et d'amplitude 0.01 m. Il s'agit donc en réalité d'un double choc puisque la force engendrée dépend de la vitesse et de l'accélération angulaire. L'inertie du système amortit de façon importante le déplacement du pot d'excitation et la rotation imposée ne ressemble plus à un créneau (cf. Figure III.12). Néanmoins, les chocs en vitesse et en accélération angulaires sont bien observés (cf. Figure III.13).

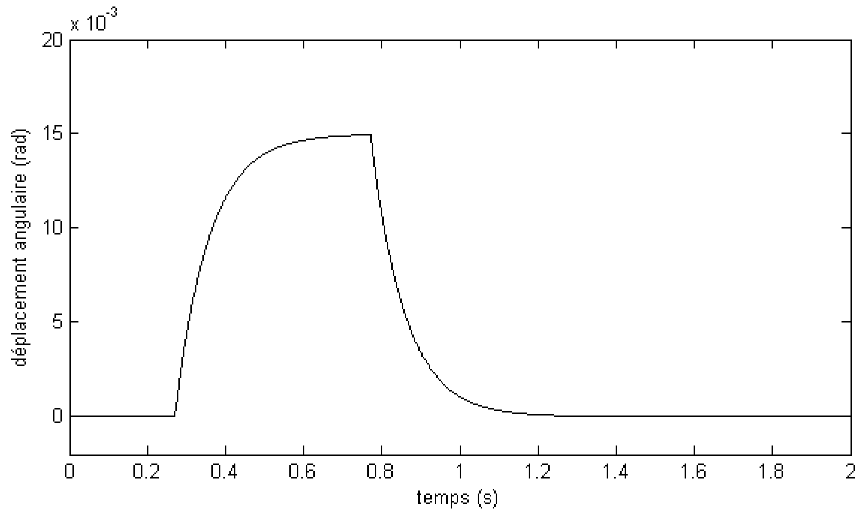


Figure III.12 : Déplacement angulaire imposé au support

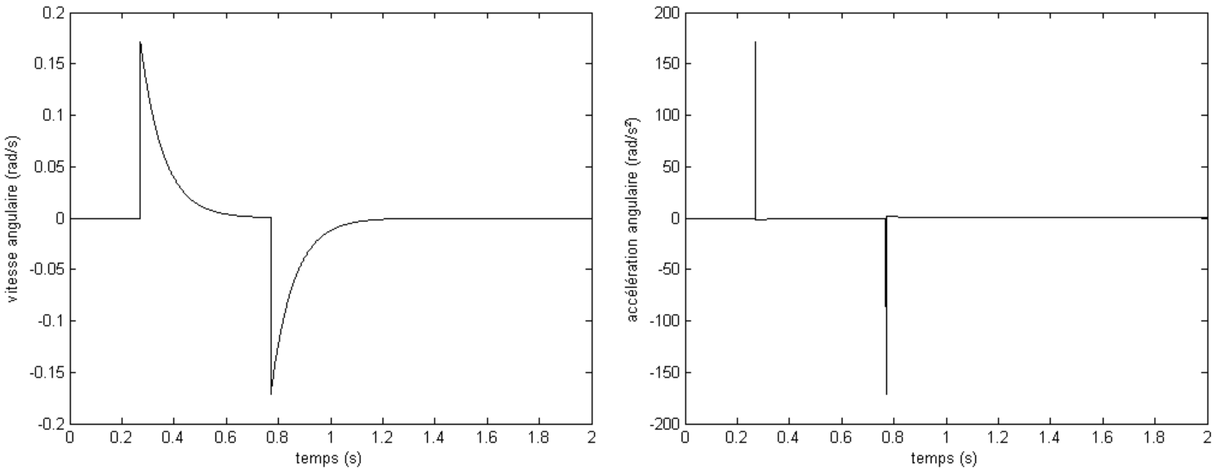


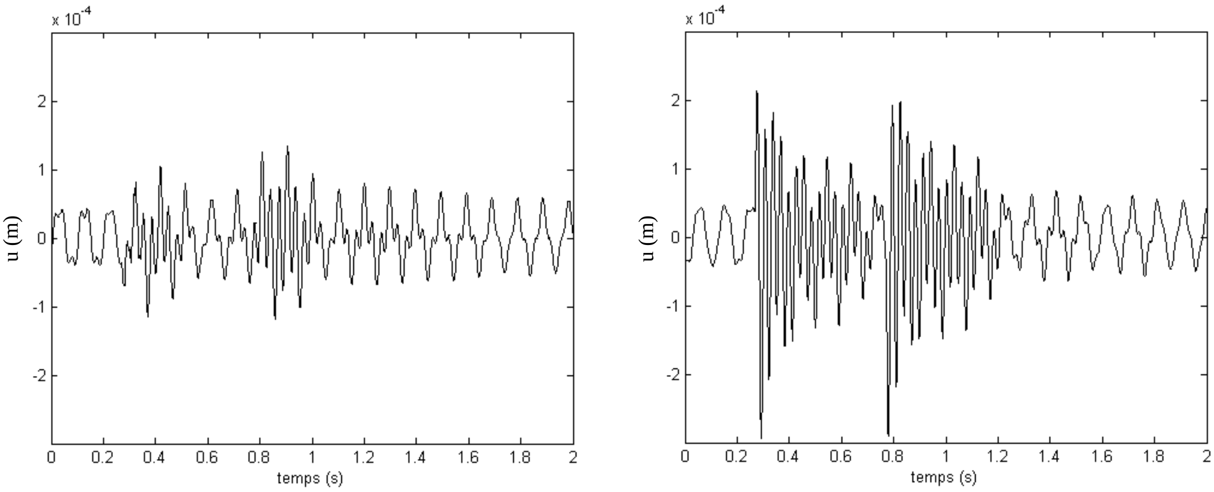
Figure III.13 : Vitesse et accélération angulaires équivalentes

Après avoir ajusté le balourd du modèle numérique, le recalage pour l'amplitude du déplacement maximum imposé est réalisé en comparant la proportion entre l'amplitude de la déformée de l'arbre avant (lorsque le rotor n'est soumis qu'au balourd) et après le choc. L'amplitude angulaire maximale ainsi déterminée est : $\alpha_{max} = 0.015$ rad.

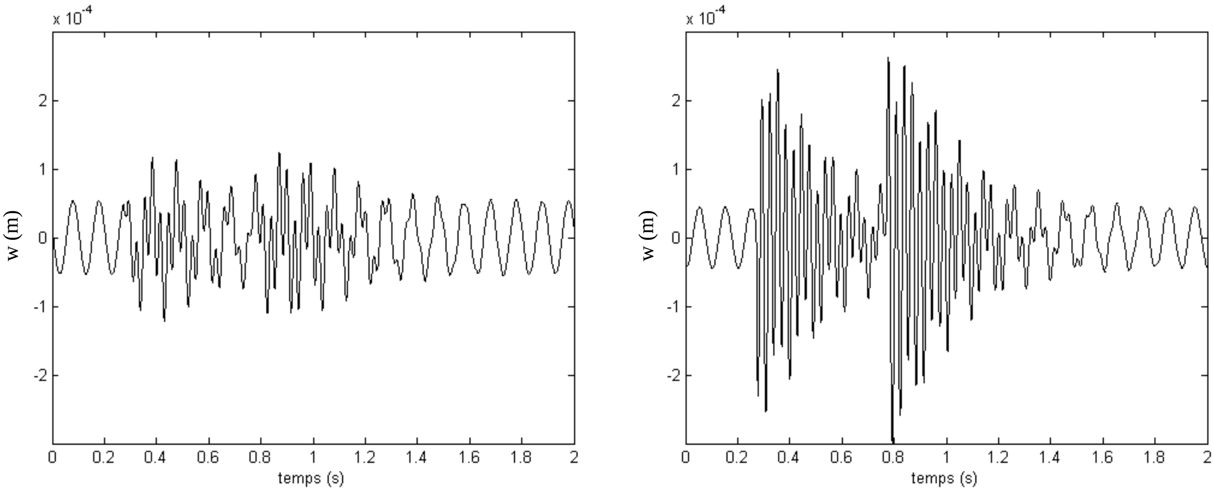
Cette étude expérimentale est réalisée pour différentes vitesses de rotation de l'arbre en vue de constater si l'amortissement du système dépend de Ω.

Résultats :

Pour Ω = 600 tr/mn :



a) Modèle expérimental



b) Modèle numérique

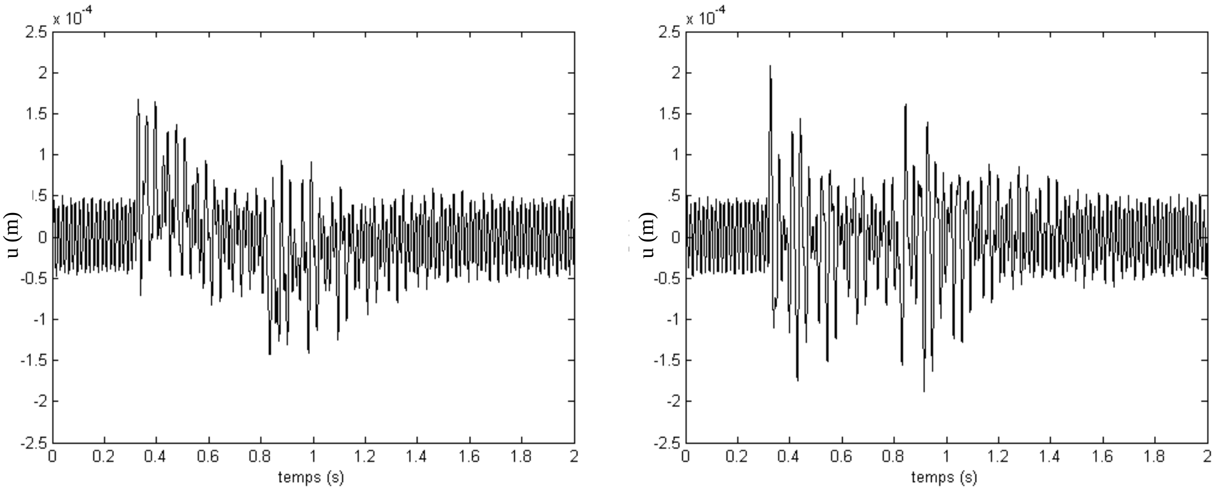
Figure III.14 : Comparaison expérimental/numérique sur un choc (Ω = 600 tr/mn)

Après recalage, l'amortissement équivalent au niveau des paliers est déterminé pour le modèle numérique (cf. (1.95)):

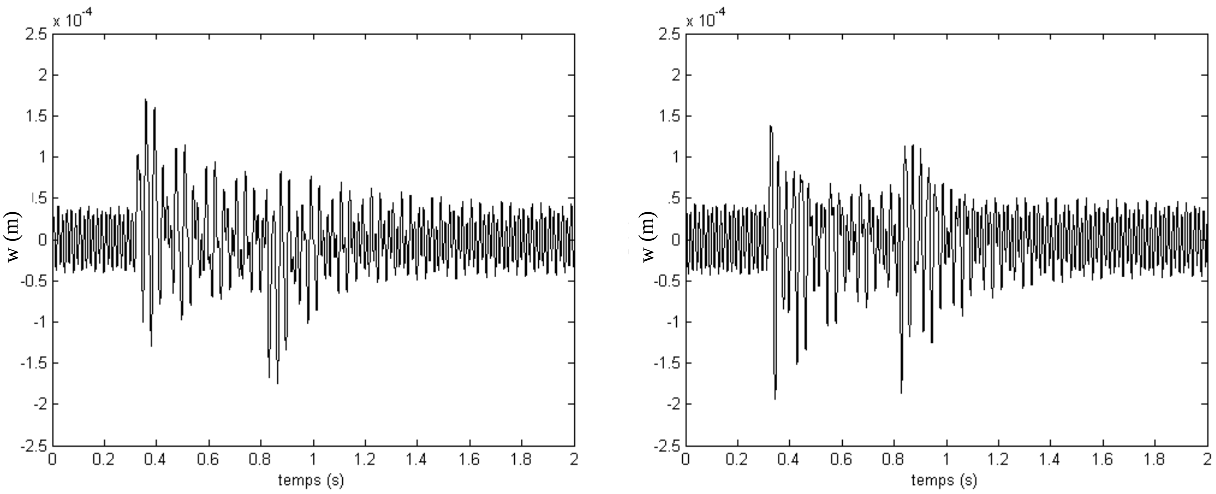
$c_{xx} = c_{zz} = 1500$ N/m/s
$c_{xz} = c_{zx} = 0$ N/m/s

La figure III.14 montre la comparaison entre les résultats expérimentaux et les prévisions numériques pour le choc défini précédemment. Les oscillations périodiques avant le choc traduisent l'effet du balourd. Elles vibrent à la fréquence de rotation de l'arbre : 10Hz. Lors du choc, le rotor se met à osciller à sa première fréquence de résonance : ≈33Hz. Le choc est pratiquement totalement amorti au bout d'une demi-seconde. L'amortissement imposé au niveau des paliers permet d'obtenir une bonne prédiction du comportement du rotor soumis à un choc.

Pour Ω = 3600 tr/mn :



a) Modèle expérimental



b) Modèle numérique

Figure III.15 : Comparaison expérimental/numérique sur un choc (Ω = 3600 tr/mn)

Pour cette vitesse de rotation du rotor, le recalage de l'amortissement équivalent au niveau des paliers pour le modèle numérique est :

$c_{xx} = c_{zz} = 250$ N/m/s
$c_{xz} = c_{zx} = 0$ N/m/s

La figure III.15 montre la comparaison entre les résultats expérimentaux et les prévisions numériques pour le même choc. Les oscillations dues au balourd peuvent encore être observées, cette fois à une fréquence de 60 Hz. Il faut noter la forme de la déformation dans la direction x, en particulier pour le modèle expérimental : la forme de la vitesse angulaire imposée au support est retrouvée. Comme il a été vu dans le chapitre II.3.c, lorsqu'une rotation est imposée dans une direction donnée, la déformation dans cette direction est excitée proportionnellement à l'accélération angulaire alors que la déformation dans la direction perpendiculaire au mouvement imposé est excitée proportionnellement à la vitesse angulaire. Ceci peut être vérifié à l'aide de cette étude expérimentale.

La prévision numérique est encore très proche des résultats expérimentaux mais la valeur de l'amortissement trouvé n'est pas la même pour les deux valeurs de Ω. L'amortissement du système dépend donc de la vitesse de rotation de l'arbre. Après diverses simulations, il a été déterminé que l'amortissement est inversement proportionnel à la vitesse de rotation Ω de l'arbre entre 600 tr/mn et 3600 tr/mn. *Lalanne [25]* explique ce phénomène en considérant l'expression de l'énergie de dissipation au cours d'un cycle lors d'un mouvement harmonique :

$$E = \pi\, c\, \Omega\, X^2 \tag{3.1}$$

où X est l'amplitude de déplacement, Ω sa fréquence et c l'amortissement visqueux équivalent. Il a été également observé que pour la plupart des systèmes réels, l'amortissement n'est pas un amortissement visqueux mais un amortissement structural. Et dans ce cas, l'énergie dissipée au cours d'un cycle a la forme suivante :

$$E = a\, X^2 \tag{3.2}$$

où a est une constante de proportionnalité. L'amortissement visqueux c équivalent s'écrit alors :

$$c = \frac{a}{\pi\Omega} \tag{3.3}$$

Pour la suite, les observations sont toutes effectuées une fois le régime permanent atteint (quand le régime transitoire a entièrement été amorti). L'amortissement n'a donc pas besoin d'être connu de manière très précise. La formule utilisée pour l'amortissement visqueux équivalent est la suivante :

$$c = \frac{15000}{\Omega(\mathrm{Hz})} \tag{3.4}$$

Le modèle numérique étant recalé sur le modèle expérimental, des études sont effectuées sur le mouvement de rotation sinusoïdale.

III.4. Etude d'une rotation sinusoïdale

Dans ce chapitre, le mouvement plus spécifique de rotation sinusoïdale est étudié à l'aide du dispositif expérimental et du modèle numérique. La première étude est une comparaison, entre expérimental et numérique, des amplitudes de déformation de l'arbre en fonction de l'amplitude de la rotation sinusoïdale du support du rotor. Des observations sont faites sur certaines orbites particulières engendrées par ce type de mouvement. Une étude est effectuée afin de mettre en évidence les zones d'instabilité trouvées dans le chapitre II.4.

III.4.a. Comparaison amplitude

Mode opératoire :

Afin d'étudier les amplitudes des déformées lorsque le support est soumis à une rotation sinusoïdale, la vitesse de rotation Ω de l'arbre et la fréquence d'excitation ω sont fixées alors que l'amplitude de l'excitation varie. Le contrôle de l'amplitude de l'excitation est réalisé à l'aide de l'accéléromètre placé au niveau du deuxième palier. L'amplitude du déplacement du pot d'excitation est calculée en divisant l'accélération maximale ainsi obtenue par le carré de la fréquence d'excitation. Il est alors possible de calculer l'amplitude du déplacement angulaire appliqué au support. L'expression de l'amplitude du déplacement angulaire en fonction de l'amplitude de l'accélération relevée sur le deuxième palier est alors :

$$\tan(\alpha_{max}) = \frac{x_{max}}{L} = \frac{a_{max}}{\omega^2 L} \tag{3.5}$$

où a_{max} est l'amplitude de l'accélération relevée par l'accéléromètre, x_{max} le déplacement équivalent, et α_{max} l'amplitude du déplacement angulaire correspondant, L étant la longueur de l'arbre.

En vue de comparer expérimental et numérique, le mouvement imposé au support dans le modèle numérique a alors la forme (1.5) :

$$\alpha = \alpha_{max} \sin(\omega t) \tag{3.6}$$

Résultats :

Les essais sont réalisés pour des fréquences d'excitation ω de 23 Hz, c'est à dire juste avant la première fréquence de résonance, et de 93 Hz, c'est à dire bien au-delà de la première fréquence de résonance. Ces valeurs ont été prises les plus quelconques possibles afin d'éviter les phénomènes de composition de fréquences présentés dans le chapitre suivant. Pour ces deux valeurs de fréquence d'excitation, les simulations sont effectuées pour des vitesses de rotation de l'arbre, allant de 600 tr/mn à 3600 tr/mn, régulièrement réparties.

Pour ω = 23 Hz, l'amplitude d'excitation varie de 0 à 2 g avec un pas de 0.25 g.
Pour ω = 93 Hz, l'amplitude d'excitation varie de 0 à 5 g avec un pas de 0.5 g.

ω = 23 Hz :

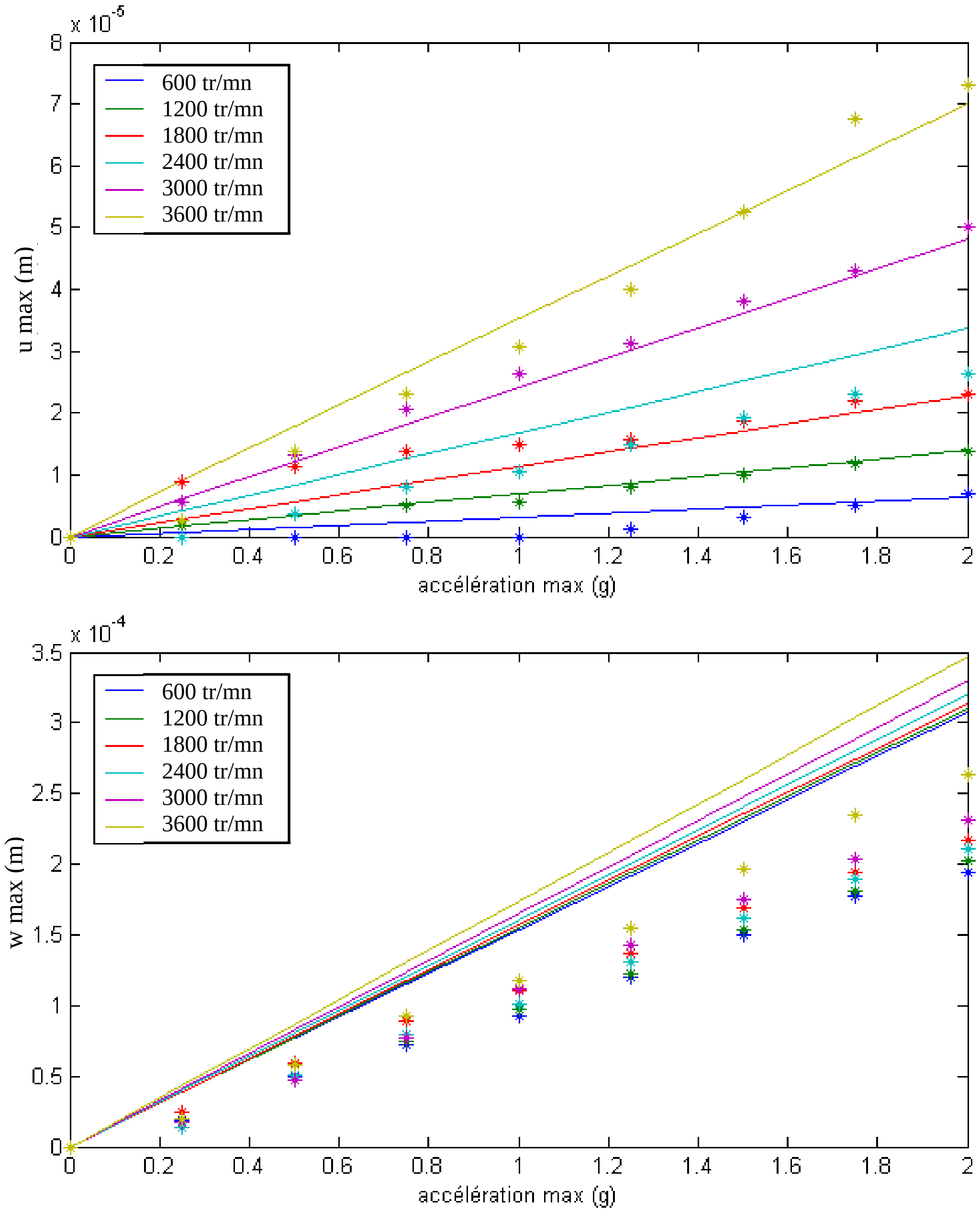


Figure III.16 : Recalage amplitude pour une fréquence d'excitation ω = 23 Hz

La figure III.16 montre l'influence de l'amplitude de l'accélération appliquée au support sur les déplacements maximums de l'arbre dans les deux directions pour une fréquence d'excitation de 23 Hz. La corrélation entre les résultats expérimentaux (représenté par des *) et numériques est très bonne pour la direction x_S (u), par contre dans la direction z_S (w), il est à noter un écart allant de 20% à 30%. Le comportement d'ensemble est toutefois très similaire dans les deux cas : le déplacement maximum est proportionnel à l'amplitude de l'accélération imposée, et le couplage est plus important dans la direction x_S, ce qui est logique puisque le déplacement imposé est perpendiculaire à cette direction. Les déplacements maximaux augmentent dans les deux directions lorsque la vitesse de rotation de l'arbre Ω augmente. Cela est dû au fait que lorsque Ω augmente, les deux fréquences de résonance du premier mode s'écartent (cf. diagramme de Campbell figure III.11).

La figure III.17 montre le déplacement maximum obtenu par simulation numérique pour un balayage de la fréquence d'excitation ω de 10 Hz à 50 Hz, pour une amplitude d'excitation de 2 g et pour différentes vitesses de rotation Ω de l'arbre.

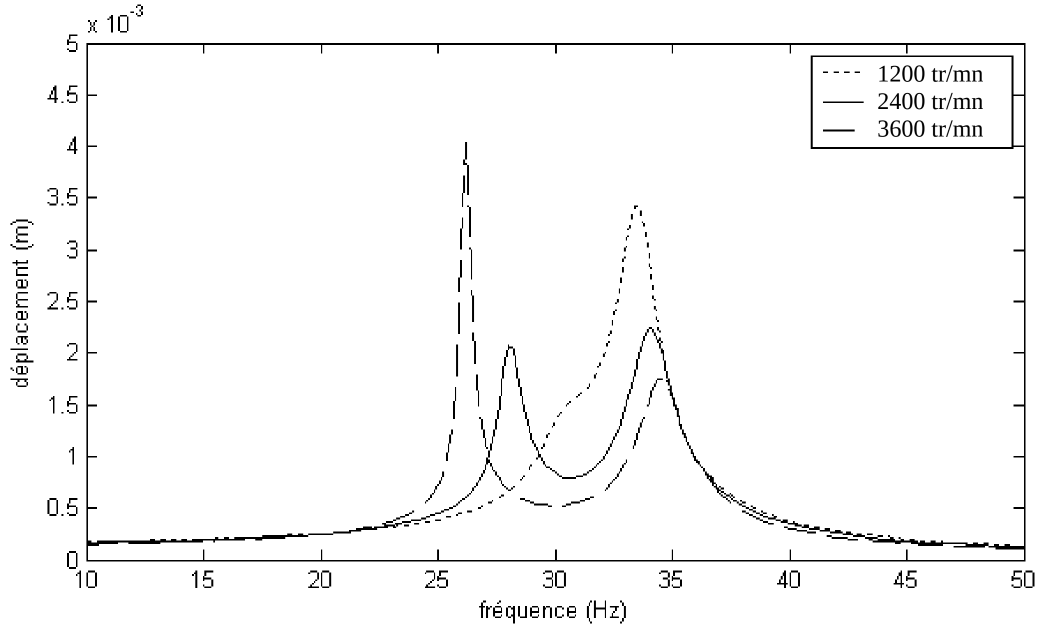


Figure III.17 : Balayage de la fréquence d'excitation ω entre 10 Hz et 50 Hz

Il faut constater que la fréquence d'excitation ω = 23 Hz se trouve au début du premier pic de résonance. Et plus la vitesse de rotation Ω de l'arbre augmente, plus ce premier pic va être proche de 23 Hz et plus la réponse en déplacement à cette fréquence va être importante. D'où les comportements observés précédemment dans les deux directions. La proximité de ce premier pic de résonance peut également expliquer les 20% à 30% d'écart observés dans la direction z_S : en effet, si le recalage n'est pas parfait, les pics peuvent être décalés de 2% ou 3% ce qui peut entraîner un décalage beaucoup plus important sur la réponse en amplitude du déplacement de l'arbre.

Un autre phénomène intéressant peut être observé sur la figure III.17 : quand la vitesse de rotation Ω de l'arbre est faible, la première fréquence de résonance du mode 1 n'apparaît presque pas. Cela s'explique par le fait que le premier pic a pour direction privilégiée x_S et le deuxième pic z_S. Ainsi, comme l'excitation est dans la direction z_S, le couplage étant peu important pour des vitesses de rotation Ω faibles, le premier pic n'apparaît que très peu.

En revanche, quand la vitesse de rotation Ω de l'arbre est importante, la première fréquence est prépondérante par rapport à la deuxième. Les deux pics ont pratiquement la même hauteur pour une vitesse de rotation Ω égale à 2400 tr/mn.

ω = 93 Hz :

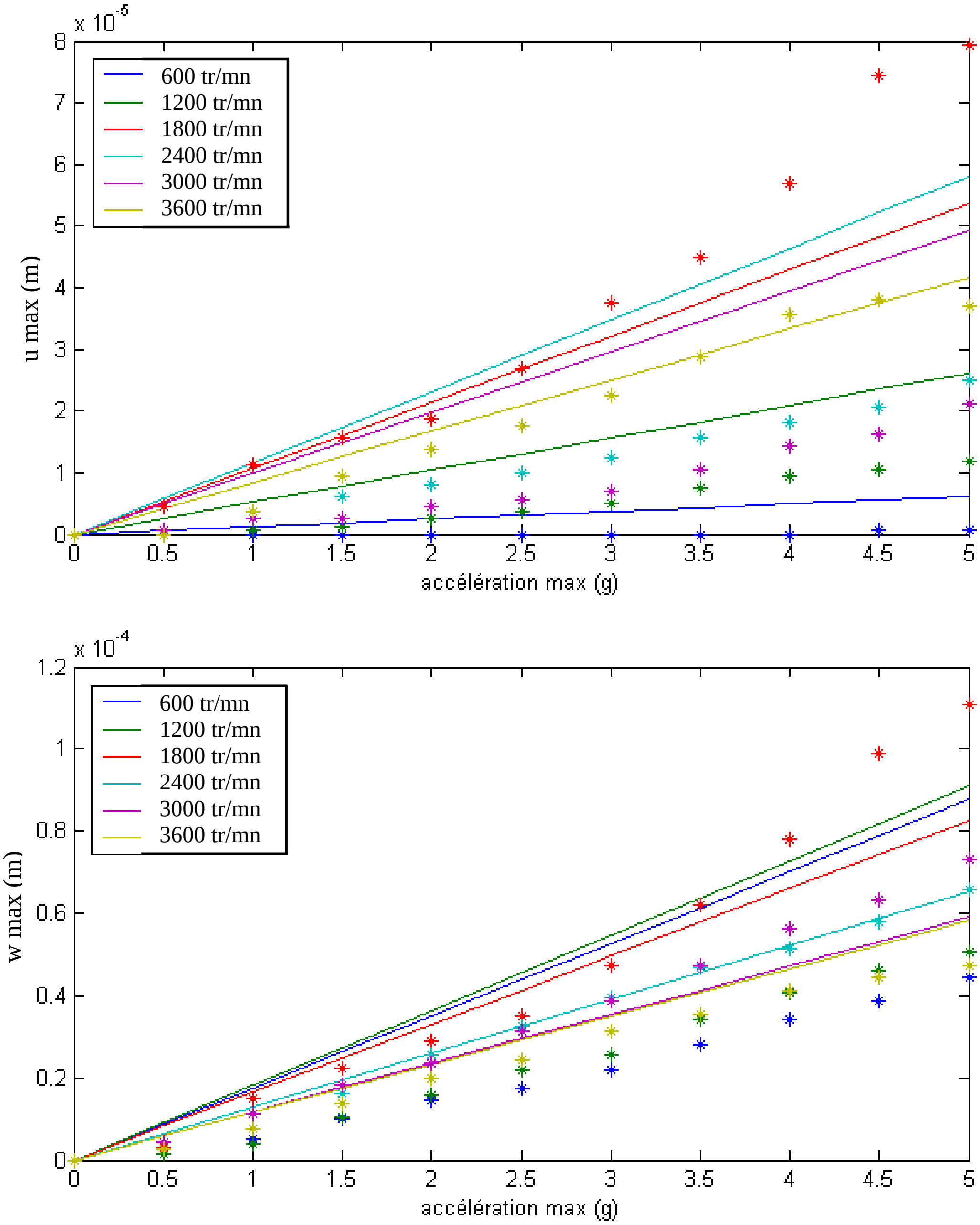


Figure III.18 : Recalage amplitude pour une fréquence d'excitation ω = 93 Hz

Les résultats sont plus désordonnés et les observations réalisées pour la fréquence d'excitation ω = 23 Hz ne sont plus vérifiées : le déplacement n'augmente pas toujours avec la vitesse de rotation Ω de l'arbre, et le couplage n'est pas forcément prépondérant pour u. Par exemple, les courbes obtenues dans les deux directions pour Ω = 3600 tr/mn sont en dessous de celles obtenues pour Ω = 1800 tr/mn. Un seul phénomène observé à ω = 23 Hz se retrouve ici : il s'agit de la proportionnalité entre l'amplitude d'accélération imposée et les déplacements maximaux dans les deux directions.

Si l'ordre de grandeur est équivalent pour les résultats expérimentaux et les simulations numériques, il n'y a pas une très bonne corrélation sur l'ordre des différentes courbes en fonction de la vitesse de rotation Ω de l'arbre. Afin d'expliquer ces différences, comme précédemment, un balayage de la fréquence d'excitation ω de 50 Hz à 120 Hz est effectué à l'aide du modèle numérique. Ce balayage est effectué avec une amplitude de 5 g et pour différentes vitesses de rotation Ω de l'arbre. La figure III.19 montre les résultats de cette simulation.

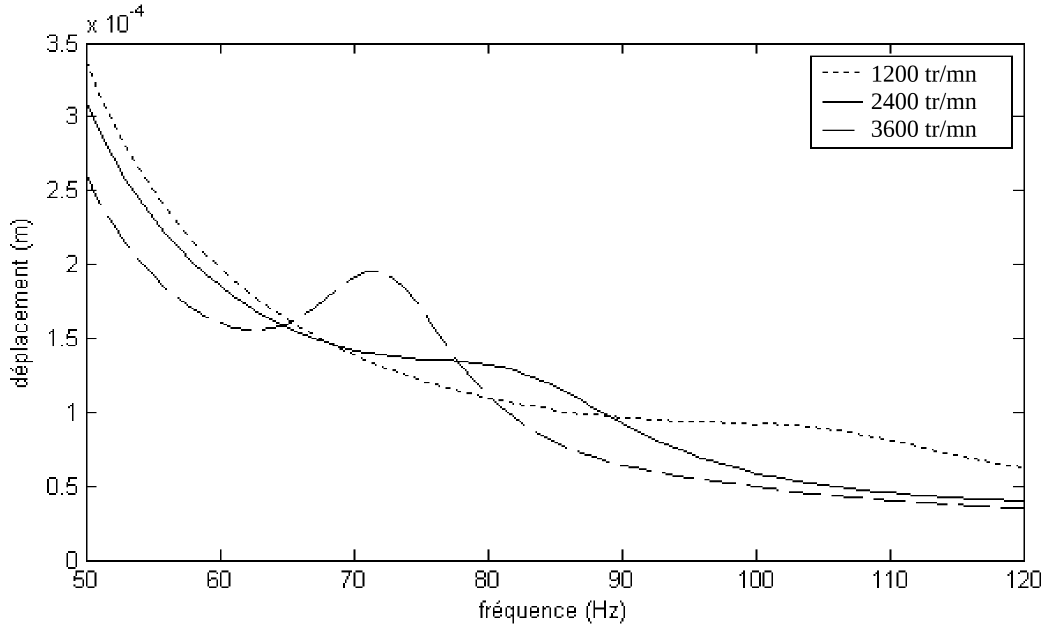


Figure III.19 : Balayage de la fréquence d'excitation ω entre 50 Hz et 120 Hz

Sur cette figure, la fin du deuxième pic du premier mode de résonance du rotor peut s'observer pour les fréquences d'excitation faibles. Le pic qui apparaît tout d'abord très amorti pour de faibles vitesses de rotation Ω de l'arbre, puis très nettement pour Ω = 3600 tr/mn, est dû à la première fréquence de résonance du deuxième mode du rotor (cf. diagramme de Campbell figure III.9). Le rotor est donc cette fois excité sur ses deux premiers modes.

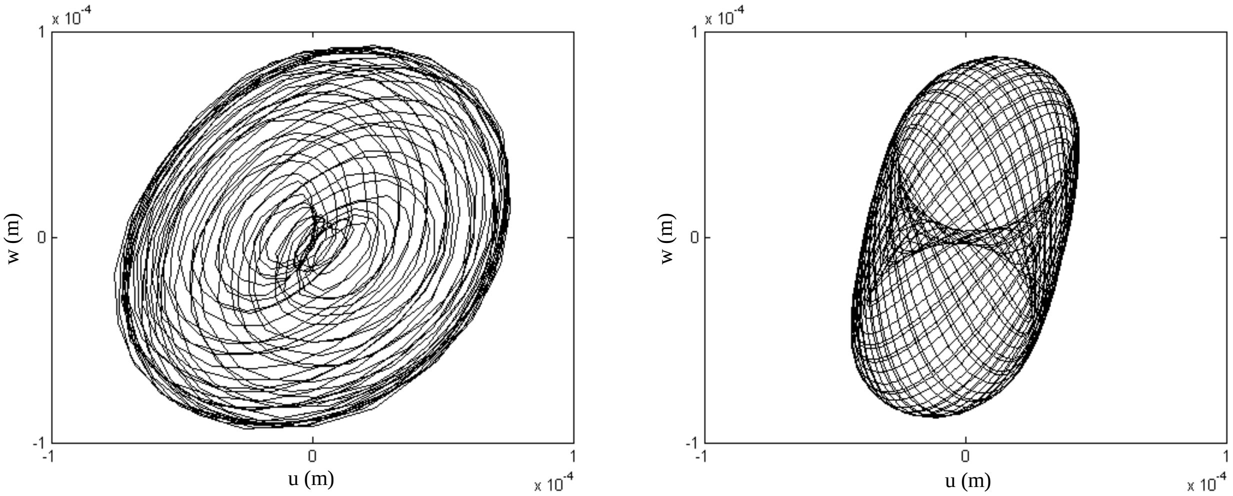
Pour la fréquence d'excitation ω = 93 Hz, il est à noter que la courbe pour Ω = 3600 tr/mn se trouve en-dessous de celle pour Ω = 2400 tr/mn, qui elle-même se trouve en dessous de celle pour Ω = 1200 tr/mn. Cela explique les résultats obtenus par simulation numérique. Les différences entre les résultats expérimentaux et numériques sont dues au fait que le recalage a été prioritairement réalisé sur le premier mode. Il existe donc un léger décalage pour le deuxième mode, qui peut suffire à changer le comportement du rotor selon sa vitesse de rotation, et même changer l'ordre des courbes dans la figure III.18 : par exemple, si les courbes de la figure III.19 sont décalées de 5 Hz sur la droite, celle pour Ω = 3600 tr/mn est toujours en dessous des deux autres, mais la courbe pour Ω = 2400 tr/mn est cette fois au dessus de celle pour Ω = 1200 tr/mn.

III.4.b. Orbites particulières

Il s'agit ici d'observer et de comparer les orbites obtenues avec le dispositif expérimental et celles obtenues par simulations numériques pour certaines valeurs particulières de fréquences d'excitation. Dans toute cette étude, les figures présentées montrent le déplacement horizontal du centre de l'arbre en fonction de son déplacement vertical, et pour chaque figure, les résultats expérimentaux et numériques sont présentés.

Le rotor est soumis à une excitation sinusoïdale par son balourd et une excitation sinusoïdale de fréquence différente par le pot d'excitation. La déformation de l'arbre est donc la superposition de deux sinus de fréquences différentes, avec un déphasage. Cela entraîne, lorsque les deux fréquences sont quelconques l'une par rapport à l'autre, un décalage et un déphasage à chaque rotation rendant très difficile l'observation de ces orbites.

La figure III.20 montre un exemple d'orbite obtenue lorsque la vitesse de l'arbre Ω (exprimée en Hertz) et la fréquence du mouvement d'ensemble du rotor ω sont quelconques l'un par rapport à l'autre. Les valeurs numériques sont : Ω = 40 Hz, et ω = 55Hz. A noter la forme en tore qui donne l'impression d'une figure en trois dimensions.

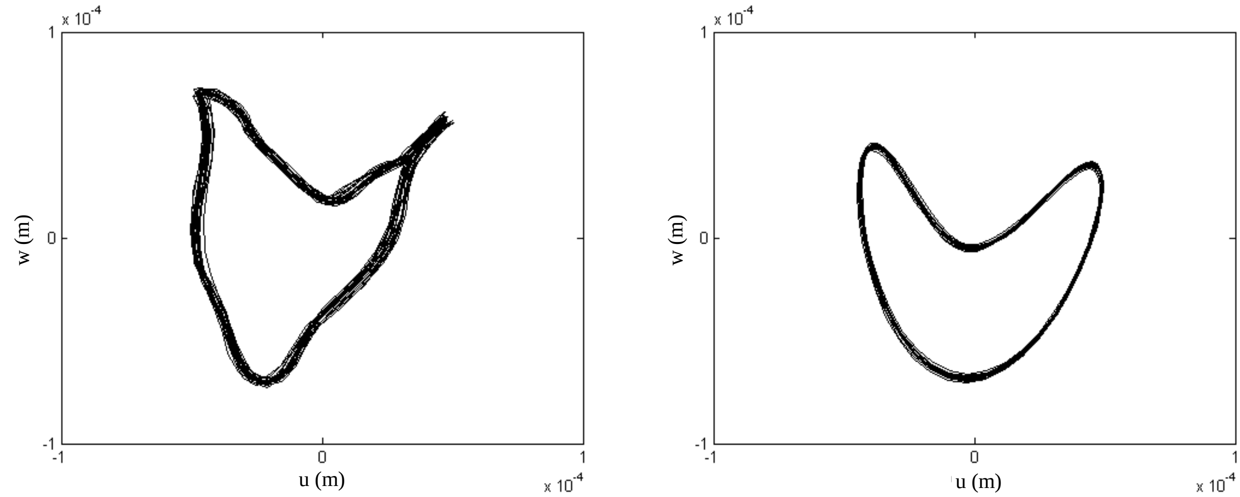


a) Expérimental b) Numérique

Figure III.20 : Exemple d'orbite obtenue lorsque Ω et ω sont quelconques

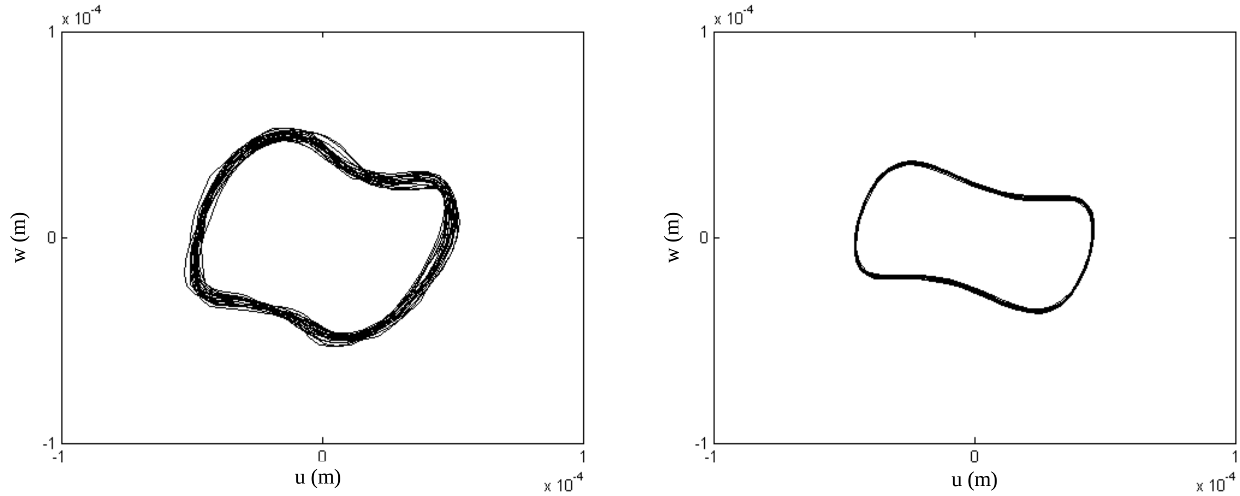
Pour certaines valeurs particulières de Ω et ω, les orbites obtenues sont plus « fixes », car le déphasage s'annule au bout d'un très petit nombre de périodes, permettant ainsi une observation plus facile des phénomènes.

C'est le cas par exemple lorsque ω est un multiple de Ω. Dans ce cas, le déphasage créé par la différence de fréquence des deux sinus s'annule à chaque période de Ω. Les figures suivantes (cf. Figures III.21 à III.24) montrent les orbites obtenues lorsque l'arbre tourne à une vitesse Ω = 20 Hz, et que le support est excité à une fréquence $\omega = n\ \Omega$, avec n = 2,3,4,5.



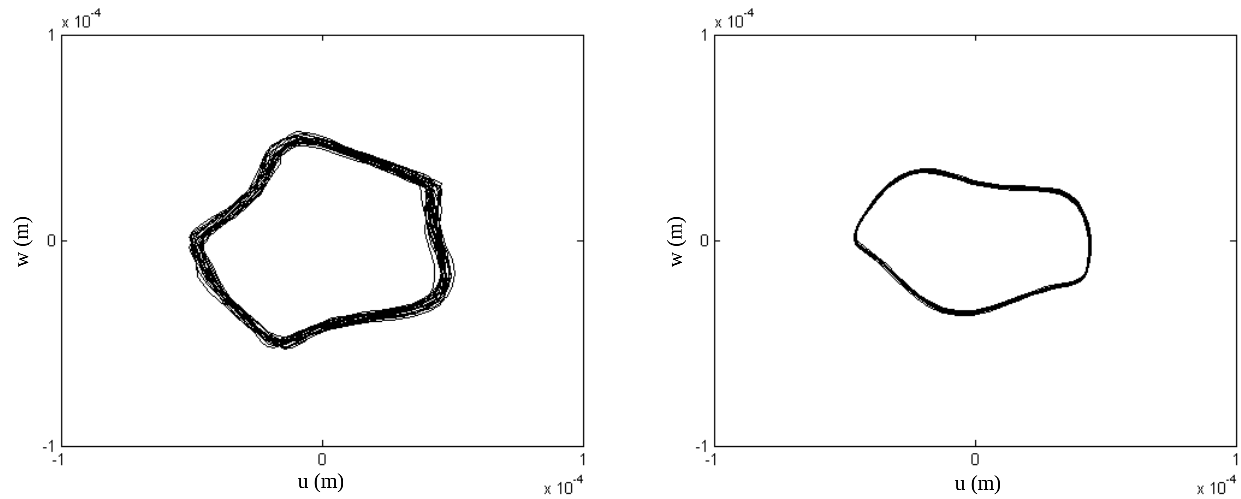
a) Expérimental b) Numérique

Figure III.21 : Orbites obtenues pour Ω =20 Hz et ω = 40 Hz



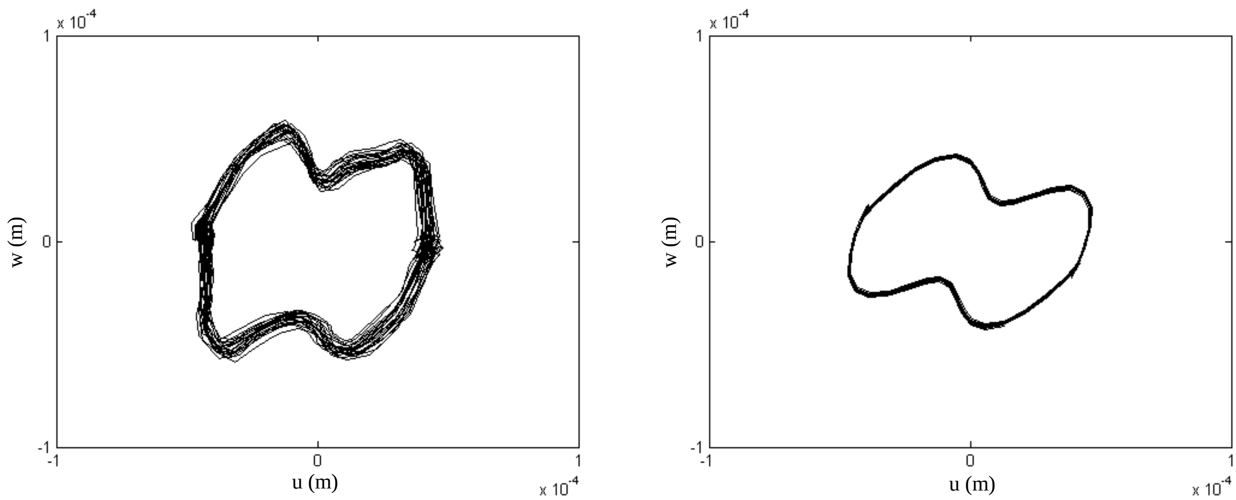
a) Expérimental b) Numérique

Figure III.22 : Orbites obtenues pour Ω =20 Hz et ω = 60 Hz



a) Expérimental b) Numérique

Figure III.23 : Orbites obtenues pour Ω =20 Hz et ω = 80 Hz



a) Expérimental b) Numérique

Figure III.24 : Orbites obtenues pour Ω =20 Hz et ω = 100 Hz

Ces résultats sont tout d'abord obtenus à l'aide du dispositif expérimental puis les simulations numériques sont effectuées pour les mêmes fréquences, en recalant l'amplitude d'accélération imposée tout d'abord à l'aide de l'étude effectuée dans le chapitre précédent, puis en observant l'amplitude de déplacement obtenue afin d'avoir une meilleure précision. Pour avoir une figure ayant précisément la même forme, le déphasage doit également être ajusté. Il a en général été choisi de manière à obtenir une orbite présentant une certaine symétrie.

Suite à ces différents réglages, les résultats obtenus sont très satisfaisants, avec une très grande ressemblance entre les simulations numériques et les résultats obtenus à l'aide du dispositif expérimental.

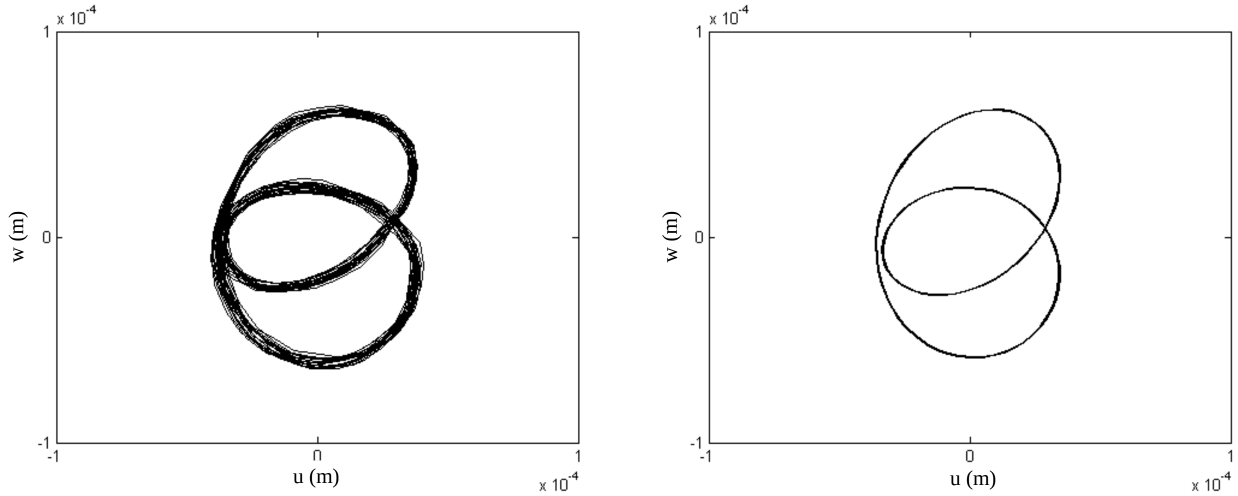
Le même phénomène se produit pour d'autres rapports de fréquence. En fait, à chaque fois que la fréquence d'excitation ω peut s'écrire sous la forme :

$$\omega = \frac{a}{b}\Omega \tag{3.7}$$

où 'a' et 'b' sont des entiers. Dans ces cas là, la fréquence Ω parcourt 'b' périodes pendant que la fréquence ω parcourt 'a' périodes et le déphasage s'annule au bout d'une période de $\frac{\Omega}{b}$. A noter que plus 'b' est grand plus la figure obtenue est compliquée et moins l'orbite peut être qualifiée de fixe. A ce titre, l'orbite présentée figure III.20 ne peut par exemple plus être réellement considérée comme fixe même s'il est possible d'écrire :

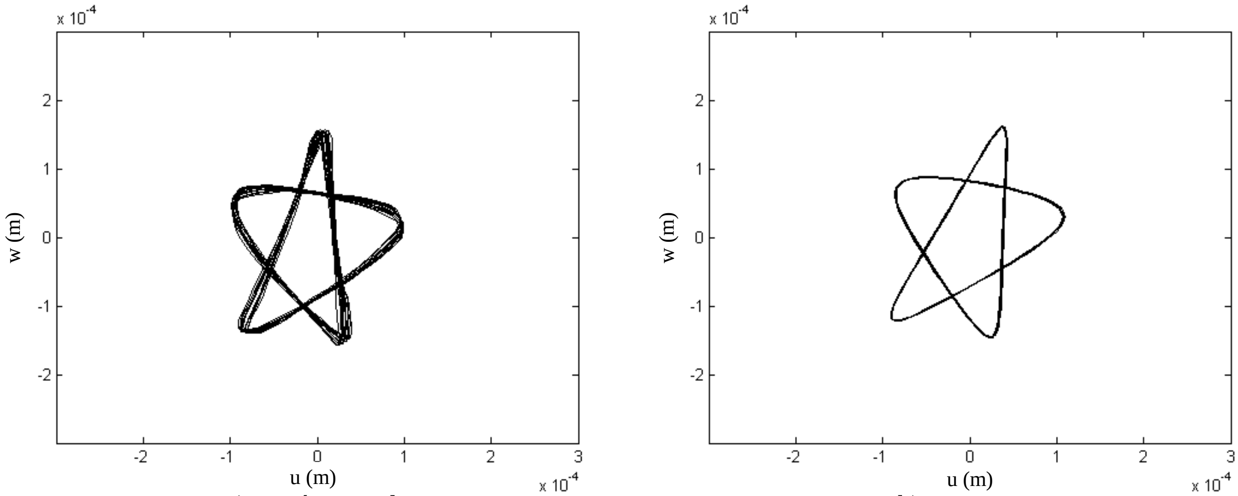
$$\omega = \frac{11}{8}\Omega$$

Les figures suivantes (cf. Figures III.25 à III.27) représentent les orbites du rotor pour une vitesse de rotation de l'arbre Ω = 40 Hz, et pour des fréquences d'excitation du support ω = n Ω, avec n = 1/2,2/3,3/4.



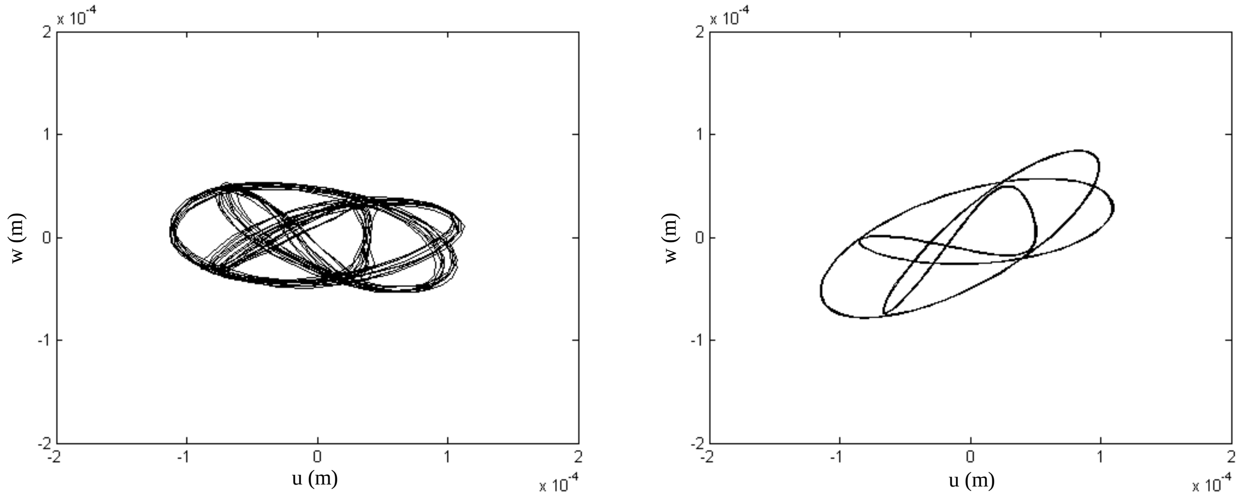
a) Expérimental b) Numérique

Figure III.25 : Orbites obtenues pour Ω =40 Hz et ω = 20 Hz



a) Expérimental b) Numérique

Figure III.26 : Orbites obtenues pour Ω =40 Hz et ω = 26.67 Hz



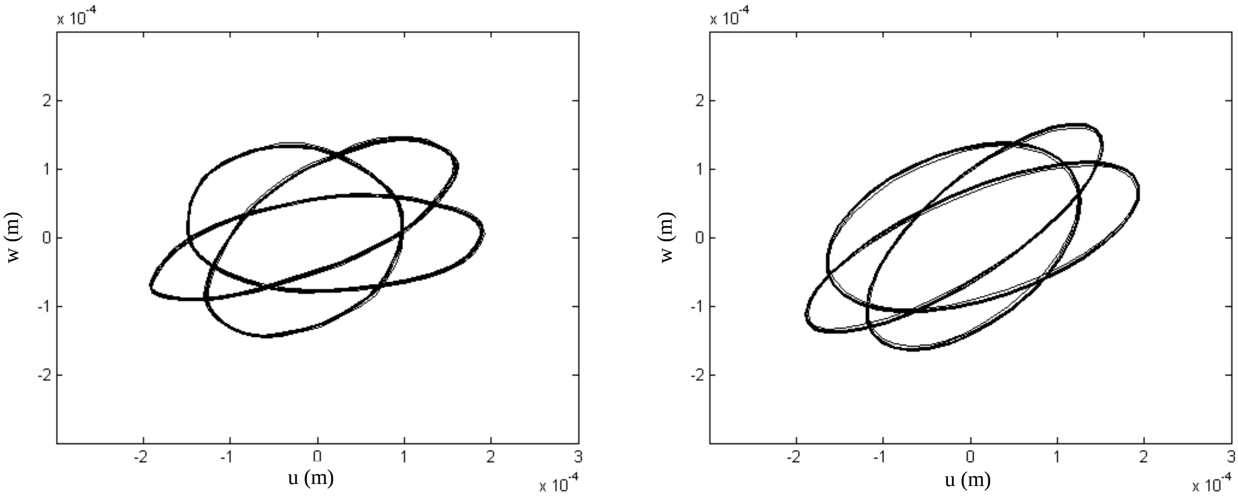
a) Expérimental b) Numérique

Figure III.27 : Orbites obtenues pour Ω =40 Hz et ω = 30 Hz

La corrélation entre les résultats obtenus par expérimentation et ceux obtenus par simulation est encore très bonne. Comme prévu, plus le dénominateur b est grand, plus la figure obtenue est compliquée. L'ajustement des déphasages de la simulation numérique permet d'obtenir exactement les mêmes formes d'orbites que pour les essais expérimentaux.

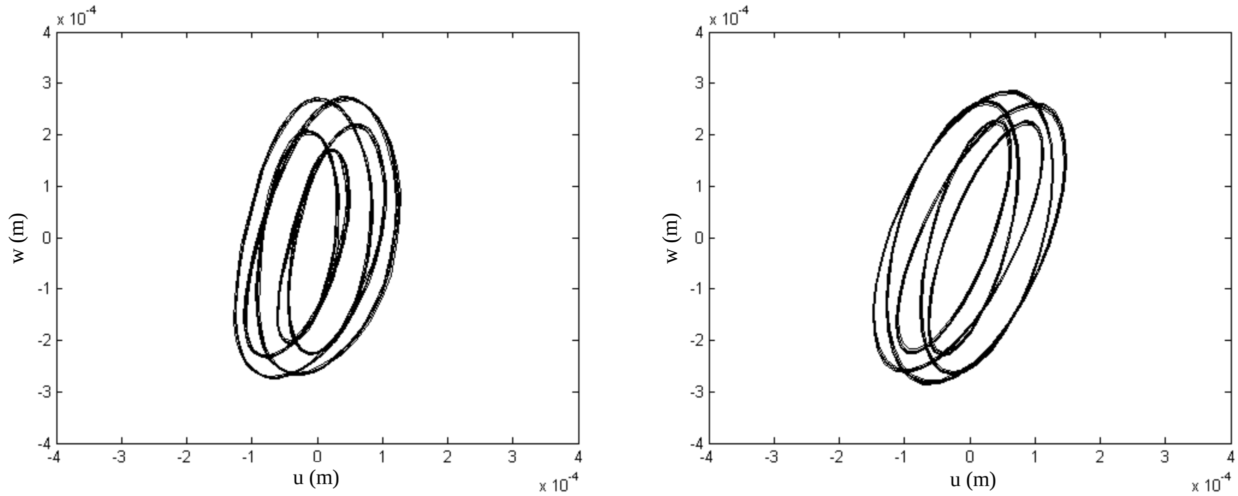
Il peut également être intéressant d'observer les orbites obtenues lorsque le rotor est proche de ses fréquences de résonance. Les figures III.28 et III.29 montrent les orbites obtenues à la résonance pour une vitesse de rotation de l'arbre Ω = 20 Hz. Les orbites obtenues sont fixes car les fréquences de résonance à cette vitesse se confondent avec des rapports de Ω et ω. Ainsi pour la première fréquence de résonance : $\frac{\omega}{\Omega} = \frac{3}{2}$ et pour la seconde fréquence de résonance : $\frac{\omega}{\Omega} = \frac{5}{3}$.

Les comparaisons entre simulations numériques et résultats expérimentaux montrent encore une fois la bonne qualité de la modélisation effectuée à l'aide des éléments finis.



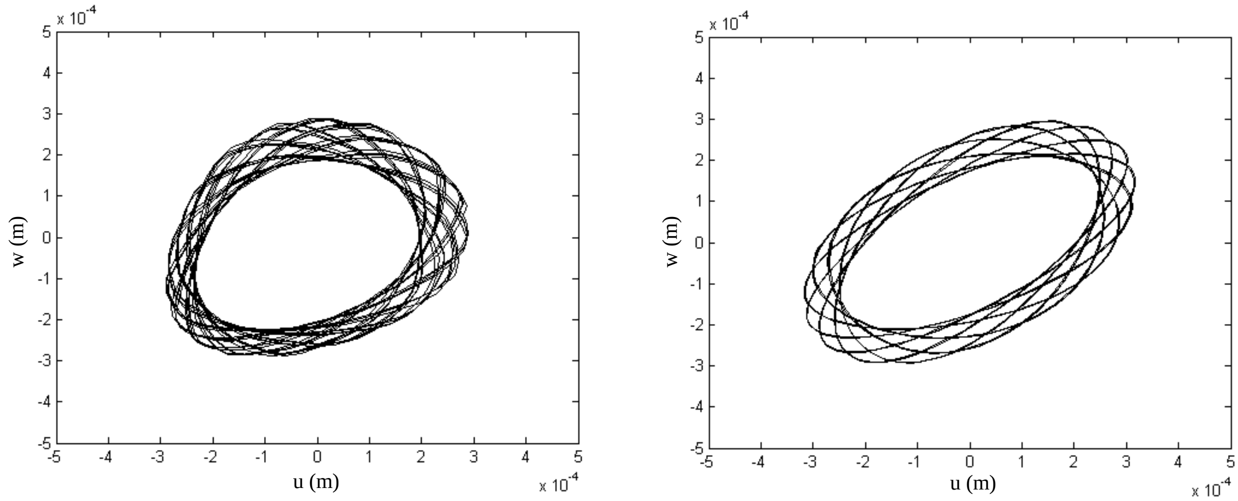
a) Expérimental b) Numérique

Figure III.28 : Orbites obtenues pour Ω =20 Hz et ω = 30 Hz ($\approx\omega_{11}$)



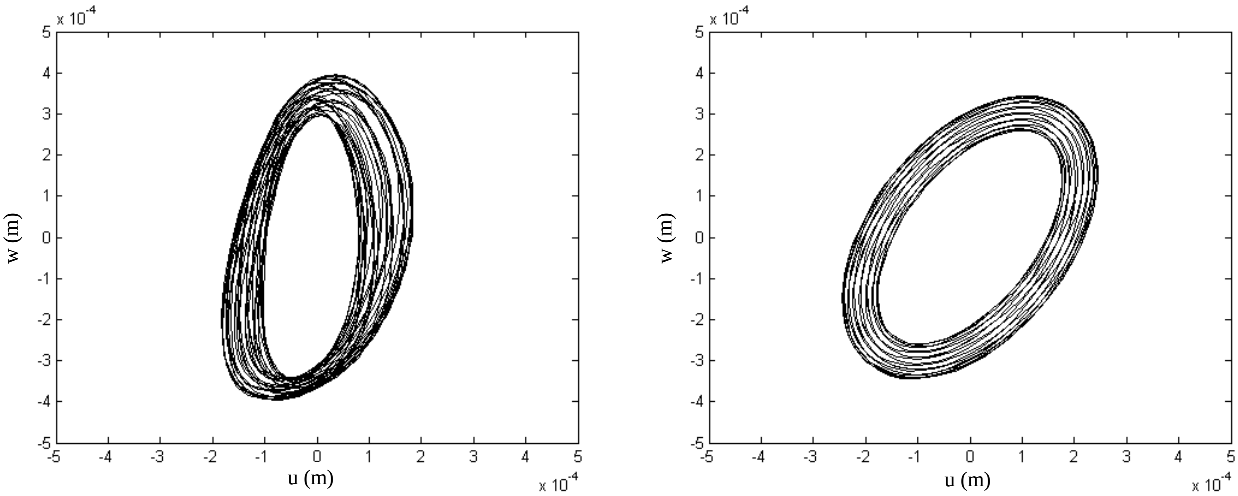
a) Expérimental b) Numérique

Figure III.29 : Orbites obtenues pour Ω =20 Hz et ω = 33.3 Hz ($\approx\omega_{12}$)



a) Expérimental b) Numérique

Figure III.30 : Orbites obtenues pour Ω =40 Hz et ω = 28 Hz ($\approx\omega_{11}$)



a) Expérimental b) Numérique

Figure III.31 : Orbites obtenues pour Ω =40 Hz et ω = 34 Hz ($\approx\omega_{12}$)

Les figures III.30 et III.31 montrent les orbites obtenues à la résonance pour une vitesse de rotation de l'arbre Ω = 40 Hz. Cette fois, les orbites ne sont plus fixes car le dénominateur entier du rapport des fréquences est plus grand, en particulier sur la deuxième fréquence de résonance. Toutefois, les résultats numériques et expérimentaux sont encore une fois en accord.

III.4.c. Observation des instabilités

Le but de ce chapitre est de mettre en évidence les instabilités trouvées à l'aide de la méthode des échelles multiples sur le modèle simple dans le chapitre II.4. Les zones d'instabilité déterminées dans ce chapitre sont très fines pour des accélérations imposées au support relativement importantes, et le phénomène d'augmentation exponentielle propre aux systèmes instables n'apparaît que pour des déformées de l'arbre non réalistes. La volonté de ne pas détruire le dispositif expérimental et la présence d'un amortissement structural dans le système empêchent donc d'obtenir expérimentalement les zones d'instabilité. Toutefois, un décalage vers la gauche doit pouvoir s'observer sur les fréquences d'excitation pour lesquelles la déformation va être maximale lorsque l'amplitude du déplacement angulaire imposé augmente.

Mode opératoire :

Afin d'observer ce décalage des fréquences de résonance du système, des balayages de la fréquence du mouvement imposé au support sont effectués pour différentes amplitudes d'accélération. L'amplitude de l'accélération est relevée à l'aide de l'accéléromètre posé sur le deuxième palier du rotor. La valeur maximale imposée est de 0.75 g pour ne pas endommager le système. Le balayage est réalisé autour des fréquences de résonance du rotor, lentement et le plus finement possible pour distinguer les éventuels décalages. Les fréquences d'excitation sont relevées pour les maximums de déformation de l'arbre dans les deux directions. Ce mode opératoire est répété pour différentes valeurs de la vitesse de rotation Ω de l'arbre.

Résultats :

Les figures suivantes montrent les résultats obtenus pour des vitesses de rotation de l'arbre de 1200 tr/mn, 2400 tr/mn et 3600 tr/mn.

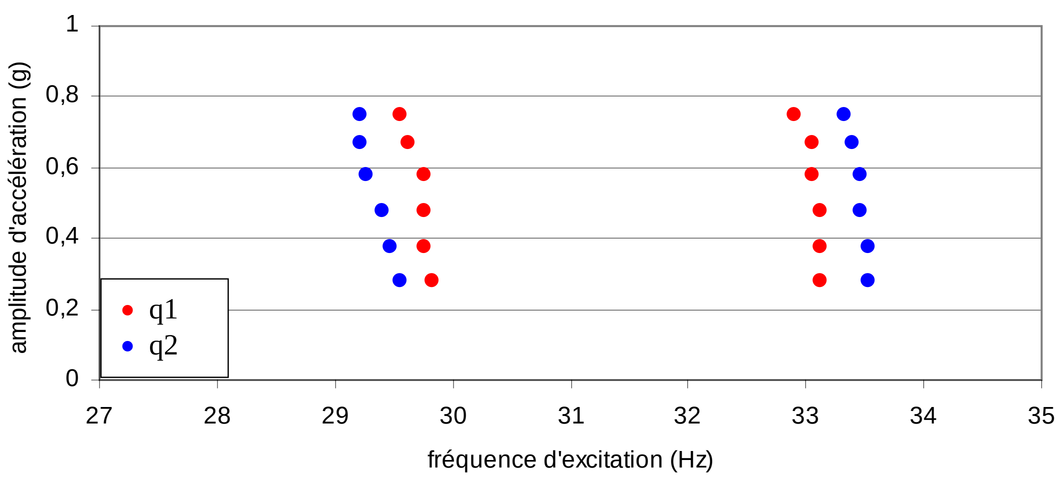


Figure III.32 : Influence de l'amplitude d'accélération sur la fréquence de résonance pour Ω = 1200 tr/mn

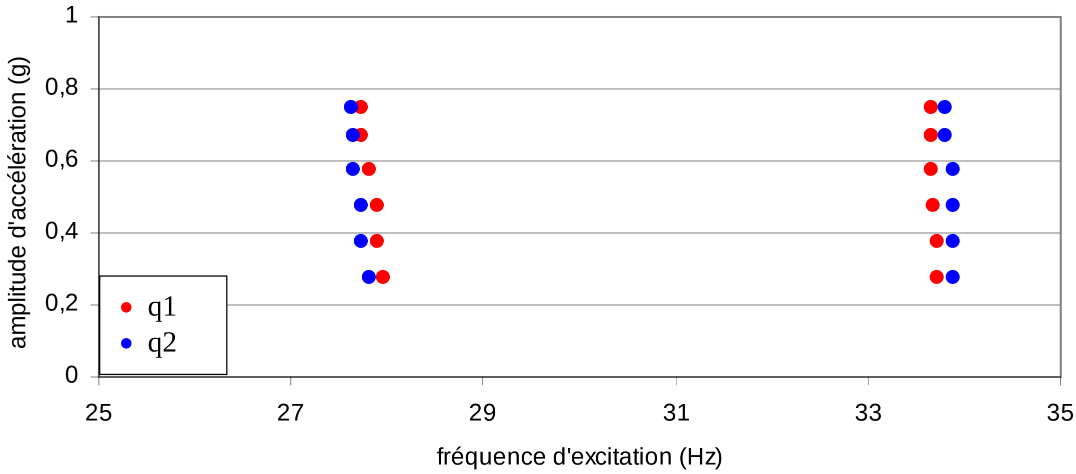


Figure III.33 : Influence de l'amplitude d'accélération sur la fréquence de résonance pour $\Omega = 2400$ tr/mn

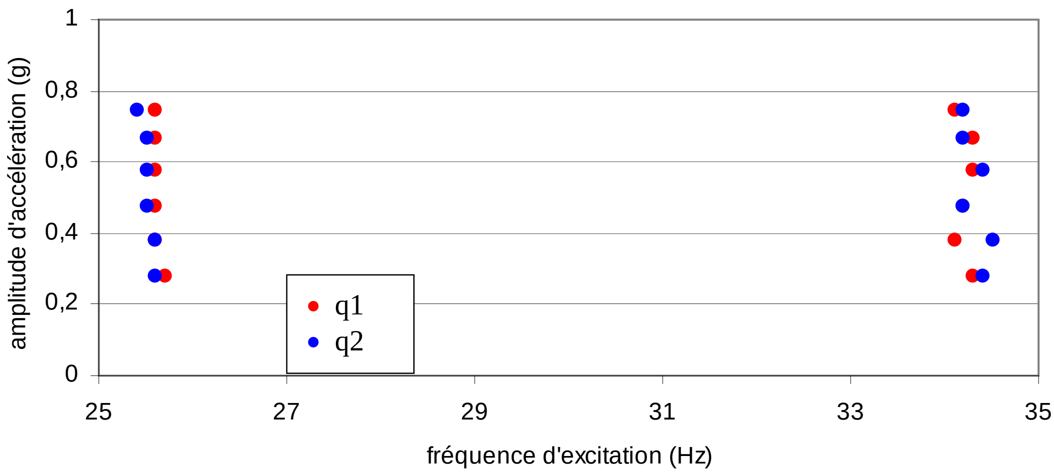


Figure III.34 : Influence de l'amplitude d'accélération sur la fréquence de résonance pour $\Omega = 3600$ tr/mn

Les points rouges représentent les fréquences du mouvement imposé au support pour lesquelles la déformée est maximale dans la direction x_S et les points bleus représentent les fréquences pour lesquelles la déformée est maximale dans la direction z_S. Il est à noter que plus la vitesse de rotation de l'arbre augmente, plus ces fréquences se rapprochent.

La première remarque qui peut être faite sur cette étude est que la zone d'instabilité qui avait été trouvée autour de la fréquence d'excitation $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$ n'apparaît pas ici. Elle est complètement absorbée par l'amortissement du système. Par contre, pour les fréquences ω_1 et ω_2, un décalage très net de la fréquence pour laquelle l'amplitude de déformation est maximale peut s'observer lorsque l'amplitude de l'accélération augmente. Toutefois, ce décalage se produit pour des accélérations beaucoup plus faibles que ce qui était attendu. En effet, les prédictions faites à l'aide de la méthode des échelles multiples prévoyaient l'observation d'un décalage significatif à partir d'une centaine de g. Il semble donc que le phénomène soit sous-estimé.

Conclusion

Le dispositif expérimental développé permet d'étudier le comportement du rotor lorsque son support est soumis à une seule rotation. Le modèle éléments finis utilisé pour comparer résultats théoriques et expérimentaux permet un recalage fin : une fois les dimensions du modèle vérifiées, le réglage des raideurs de palier permet un bon recalage du diagramme de Campbell et donc des fréquences de résonance du système. L'ajout de coefficients d'amortissement au niveau des paliers permet de bien modéliser l'amortissement structural du système réel. Les comparaisons sur les essais de chocs sont très concluantes.

Une fois ce recalage effectué, des études des phénomènes plus spécifiques apparaissant lorsque le support du rotor est soumis à une rotation sinusoïdale peuvent être menées. Les comparaisons entre les résultats expérimentaux et les prévisions numériques sur les amplitudes de déformation obtenues pour ce type de mouvement donnent de bons résultats lorsque la fréquence d'excitation est faible. Par contre, lorsque la fréquence d'excitation augmente et va exciter le deuxième mode, les résultats sont moins bons, même si les ordres de grandeur restent corrects. L'étude des orbites particulières obtenues pour ce type de mouvement du support prouve que, d'un point de vue qualitatif, le modèle numérique est très proche de la réalité. Les instabilités mises en évidence à l'aide de la méthode des échelles multiples ne peuvent pas être directement observées à cause de l'amortissement du système réel. Toutefois, une diminution des fréquences de résonance est observée lorsque l'amplitude du mouvement imposé au support augmente. Cette diminution est plus prononcée que ne l'avait prévu la méthode des échelles multiples.

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

Les calculs des différentes énergies et travaux virtuels des différents éléments d'un rotor dont le support est soumis à un mouvement quelconque ont été développés pour la première fois en tenant compte des possibles asymétries de l'arbre ou des disques. Cela a permis de définir les équations du mouvement pour deux modèles permettant de simuler le comportement en flexion des rotors embarqués :

- Le premier modèle est un modèle simple obtenu à l'aide de la méthode de Rayleigh-Ritz. Il est utilisé pour mettre en évidence des phénomènes de base intervenant pour ce type de systèmes en raison de sa simplicité : seulement deux équations du mouvement. Les résolutions pas-à-pas sont donc très rapides et certains mouvements basiques peuvent être résolus analytiquement. Les inconvénients de ce modèle sont qu'il ne permet d'étudier qu'un mode à la fois et que l'imprécision est importante lorsque la déformée du mode est mal connue. De plus, il considère les paliers comme infiniment rigides.

- Le deuxième modèle présenté a été développé à l'aide de la méthode des éléments finis. Il est utilisé pour modéliser les systèmes réels car il est plus précis et permet d'étudier l'ensemble des modes de vibration du rotor. Il est également modulaire car chaque élément du rotor possède ses propres caractéristiques. Des éléments peuvent donc être ajoutés ou enlevés au gré de l'utilisateur qui peut également ajouter des raideurs, des amortissements ou des forces extérieures en chaque nœud. Le désavantage évident de cette méthode est que les calculs sont plus « lourds », même si les modèles éléments finis appliqués à la dynamique des rotors sont en général de petite taille : jusqu'à une centaine de degrés de liberté.

Le modèle simple développé à l'aide de la méthode de Rayleigh-Ritz a permis d'étudier plusieurs phénomènes se produisant lors des mouvements de base : translation accélérée, translation sinusoïdale, rotation constante, accélérée et rotation sinusoïdale. Certains des phénomènes mis en évidence peuvent sembler relativement intuitifs, d'autres moins :

- La translation constamment accélérée du support a une influence uniquement dans la direction de déplacement.
- Pour une translation sinusoïdale du support, le déplacement maximal dans la direction du mouvement est constant quelle que soit la vitesse de rotation du rotor, et le déplacement maximal dans la direction perpendiculaire est proportionnel à cette vitesse de rotation.
- Pour une rotation constante du support, les forces généralisées statiques engendrées par le mouvement sont prépondérantes par rapport aux termes ajoutés dans la matrice de raideur dus au mouvement.

- Pour une rotation simple du support, l'accélération angulaire n'a d'influence que dans la direction perpendiculaire à l'axe de rotation. Si le centre de rotation est situé sur l'axe du rotor, la vitesse de rotation du support n'a d'influence que dans la direction de l'axe de rotation. Il existe dans ce cas une position du centre de rotation sur l'axe du rotor pour laquelle l'accélération angulaire n'a plus aucune influence, dans les deux directions. Une étude pourrait dans un futur proche être réalisée à l'aide du dispositif expérimental pour mettre en évidence ce phénomène.
- Pour la rotation sinusoïdale, les termes paramétriques qui apparaissent dans la matrice de raideur engendrent des instabilités qui ont été détectées à l'aide de la méthode des échelles multiples. Cette méthode a encore démontré son efficacité dans l'étude des instabilités en dynamique des rotors puisque les zones d'instabilité trouvées ont été vérifiées à l'aide de simulations numériques. Par la suite, les autres mouvements simples étudiés ayant tous des solutions analytiques, d'autres mouvements tels que des compositions de translation et de rotation pourraient être étudiés à l'aide de cette méthode.

Quelques-uns des phénomènes mis en évidence amènent à penser que certains termes ajoutés dans les matrices de raideur et d'amortissement en raison des mouvements du support n'ont que très peu d'influence sur le comportement d'ensemble du rotor. Il serait intéressant de réaliser une étude sur l'influence de ces différents termes afin de pouvoir simplifier les modèles développés ici.

Un dispositif expérimental a été créé en vue de tester le modèle développé à l'aide de la méthode des éléments finis. Le mouvement principalement étudié a été le mouvement de rotation sinusoïdale qui semblait le plus intéressant au vu des phénomènes décris à l'aide du modèle simple. Le recalage des fréquences de résonance du système a permis de mettre en évidence la relative flexibilité de l'ensemble support + pot d'excitation. Toutefois, la souplesse du modèle éléments finis développé a permis de compenser ce phénomène en ajustant les raideurs de palier. L'étude d'un rotor embarqué sur un support flexible ne semble donc pas une priorité. Le recalage de l'amortissement réalisé sur une étude de chocs angulaires a montré que la modélisation obtenue était très bonne en répartissant l'amortissement structural sur les paliers.

Après le recalage, les comparaisons entre simulations numériques et résultats expérimentaux sur les amplitudes de déformation de l'arbre et sur les orbites particulières observées démontrent que le modèle éléments finis proposé permet d'obtenir de très bonnes prédictions sur le comportement dynamique en flexion d'un rotor embarqué.

Le phénomène de décalage des fréquences de résonance vers la gauche lorsque l'amplitude du mouvement augmente qui était pressenti suite à l'étude d'instabilité a été observé expérimentalement de manière beaucoup plus importante que ce qui avait été prévu. Des études supplémentaires devraient être effectuées dans cette direction afin de comprendre ce phénomène.

L'étude de la dynamique des rotors embarqués sert beaucoup de nos jours pour l'analyse des machines tournantes soumises à des séismes. C'est donc la direction dans laquelle devrait s'orienter les prochaines recherches effectuées au laboratoire. Le modèle éléments finis ayant prouvé sa fiabilité, l'application de méthodes spectrales sur celui-ci ne devrait pas poser de problèmes.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] **Alauze C.** *Equilibrage actif des machines tournantes : Application aux grandes lignes d'arbre*, Thèse de doctorat de l'INSA-Lyon, 1998, 133 p.

[2] **Al Majid A., Allezy A., Dufour R.** *Metric of MDOF systems in high transient motion*, Proceedings of ASME Design Engineering Technical Conferences, 2–6 September, 2003 Chicago, Illinois, USA, DETC2003/VIB-48613, 6 p.

[3] **Beley-Sayettat A.** *Effet des dissymétries et effet sismique en dynamique des rotors*, Thèse de doctorat de l'INSA-Lyon, 1994, 159 p.

[4] **Berlioz A., Der Hagopian J., Dufour R., Draoui E.** *Dynamic behavior of a drill-string. Experimental investigation of lateral instabilities*, ASME, Journal of Vibration and Acoustics, 1996, vol. 118, pp. 292-298.

[5] **Berlioz A., Dufour R., Ferraris G.** *Etude des phénomènes vibratoires dans les trains de tige de forage pétrolier*, Mécanique Industrielle et Matériaux, 1996, vol. 49, n° 4, pp. 193-195.

[6] **Bonello P., Brennan M. J.** *Modelling the dynamical behaviour of a supercritical rotor on a flexible foundation using the mechanical impedance technique*, Journal of Sound and Vibration, 2001, vol. 239, n° 3, pp. 445-466.

[7] **Campbell R.** *Théorie Générale de l'Equation de Mathieu (et de quelques autres équations différentielles de la mécanique)*, Paris, Masson et Cie, 1955, 271p.

[8] **Duchemin M., Berlioz A., Ferraris G.** *Modélisation du comportement dynamique des rotors embarqués*, Actes du colloque de Giens 2001, pp. 385-392.

[9] **Duchemin M., Berlioz A., Ferraris G.** *Comportement dynamique d'un rotor soumis à un choc : simulation - expérimentation*, Actes du 15ème congrès français de mécanique, Nancy 2001.

[10] **Dufour R.** *Influence d'un couple axial sur le comportement dynamique des rotors flexibles*, Thèse LMSt. Lyon : INSA de Lyon, 1985, 112 p.

[11] **Dufour R., Berlioz A.** *Parametric instability of a beam due to axial excitations and to boudary conditions*, ASME, Journal of Vibration and Acoustics, 1998, vol. 120, pp. 461-467.

[12] **Ecker H., Pumhössel T., Tondl A.** *A study on parametric excitation for suppressing self-excited rotor vibrations*, IFToMM, **In :** "Proceedings of the sixth international conference on rotor dynamics", Sidney, Australia, 30 September - 4 October 2002, pp. 85-92, ISBN 0-7334-1963-1.

[13] **Edwards S., Lees A. W., Friswell M. I.** *Experimental identification of excitation and support parameters of a flexible rotor-bearings-foundation system from a single run-down*, Journal of Sound and Vibration, 2000, vol. 232, n° 5, pp. 963-992.

[14] **El-Shafei A.** *Perturbation solution of Reynolds equation for finite journal bearing*, IFToMM, **In :** "Proceedings of the sixth international conference on rotor dynamics", Sidney, Australia, 30 September - 4 October 2002, pp. 588-598, ISBN 0-7334-1963-1.

[15] **Ganesan R., Sankar T. S.** *Resonant oscillations and stability of asymmetric rotors*, ASME, Dynamics and vibration of Time-Varying Systems and Structures, 1993, DE-Vol. 56, pp. 131-137.

[16] **Ganesan R., Sankar T. S.** *Non-stationary vibrations of rotor systems with non-symmetric clearance*, ASME, Dynamics and vibration of Time-Varying Systems and Structures, 1993, DE-Vol. 56, pp. 295-301.

[17] **Huang Y. M., Lin M. S.** *On the dynamics of a beam rotating at nonconstant speed*, ASME, Rotating Machinery and Vehicle Dynamics, 1991, DE-Vol. 35, pp. 147-154.

[18] **Ishida Y., Murakami S., Inoue T.** *Nonstationary oscillations of a nonlinear rotor system with internal resonance during acceleration through critical speed*, JSME International Journal, Series 3: Vibration, Control Engineering, Engineering for Industry, Sepember 1992, Vol. 35, n° 3, pp. 360-368.

[19] **Ishida Y., Ikeda T., Yamamoto T., Murakami S.** *Nonstationary oscillations of a rotating shaft with nonlinear spring characteristics during acceleration through critical speed*, Memoirs of the School of Engineering, Nagoya University, October 1992,Vol. 44, n°1, pp. 1-70.

[20] **Ji Z., Zu J. W.** *Method of multiple scales for vibration of rotor-shaft systems with non-linear bearing pedestal model*, Journal of Sound and Vibration, 1998, Vol. 218, n° 2, pp. 293-305.

[21] **Kassaï A.** *Contribution à l'étude dynamique des rotors amortis*, Thèse de doctorat de l'INSA-Lyon, 1989, 159 p.

[22] **Kreider W., Nayfeh A. H., Chin C. M.** *Two-to-one internal resonances in buckled beams*, ASME, Design Engineering Technical Conferences, 1995, DE-Vol. 84-1, Volume 3 – Part A, pp. 345-356.

[23] **Lacroix J.** *Comportement dynamique d'un rotor au passage des vitesses critiques*, Thèse de doctorat de l'INSA-Lyon, 1988, 161 p.

[24] **Lalanne M., Ferraris G.** *Rotordynamics prediction in engineering*, 2nd Edition, Chichester, John Wiley, 1998, 254 p.

[25] **Lalanne M., Berthier P., Der Hagopian J.** *Mechanical vibrations for engineers*, Chichester, Wiley Interscience, 1984, 196 p.

[26] **Ma C. K., Haddow A. G.** *Nonlinear dynamics of a spinning beam*, ASME, Design Engineering Division, 1989, DE-Vol. 18, n° 5, pp. 313-320.

[27] **Mahfoudh J.** *Contribution à l'équilibrage des machines tournantes*, Thèse de doctorat de l'INSA-Lyon, 1990, 139 p.

[28] **Myklestad N. O.** *A new method of calculating natural modes of uncoupled bending vibration of airplane wings and other types of beams*, J. of Aeronaut. Sci., 1944, pp. 153-162.

[29] **Nayfeh A. H., Mook D. T.** *Non-linear oscillations*, New York : Wiley Interscience, 1979, 704p.

[30] **Nayfeh A. H.** *Introduction to perturbation techniques*, J Wiley , New-York, 1993, 519p, ISBN 0-471-31013-1.

[31] **Nelson H. D., Mac Vaugh J. M.** *The dynamic of rotor bearing systems using finite elements*, ASME J. of Eng. for Ind., 1976, Vol. 5, pp.593-599.

[32] **Prohl, M. A.** *A general method for calculating critical speeds of flexible rotors*, ASME Journal of Applied Mechanics, 1945, Vol. 12, pp. A142-A148.

[33] **Samali B., Kim K. B., Yang J. N.** *Random vibration of rotating machines under earthquake excitations*, Journal of Engineering Mechanics, June 1986,Vol. 112, n° 6, pp. 550-565.

[34] **Singh M. P., Chang T. S., Suarez L. E.** *A response spectrum method for seismic design evaluation of rotating machines*, ASME, October 1992, vol. 114, pp. 454-460.

[35] **Suarez L. E., Rohanimanesh M. S., Singh M. P.** *Seismic response of rotating machines*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1992, vol. 21, pp. 21-36.

[36] **Subbiah R., Bhat R. B., Sankar T. S.** *Response of rotors subjected to random support excitations*, Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, October 1985, Vol. 107, pp. 453-459.

[37] **Tondl A.** *Some problems of rotor dynamics*, London, Chapman and Hall, 1965, 433 p.

[38] **Tran D. M.** *Etude du comportement dynamique des rotors flexibles*, Thèse Université C. Bernard, Lyon, 1981.

[39] **Yamamoto T., Ota H., Kono K.** *On the vibrations of a rotor with rotating inequality and with variable rotating speed*, Memoirs of the Faculty of Engineering, Nagoya University, May 1972, Vol. 24, n°1, pp. 1-80.

[40] **Yamamoto T., Ishida Y.** *On the vibrations of a rotating shaft with nonlinear spring characteristics*, Memoirs of the Faculty of Engineering, Nagoya University, May 1978, Vol. 30, n°1, pp. 59-109.

[41] **Yamamoto T., Ishida Y., Ikeda T.** *Vibrations of a rotating shaft with nonlinear spring characteristics and unsymetry*, Memoirs of the Faculty of Engineering, Nagoya University, November 1983, Vol. 35, n°2, pp. 131-204.

[42] **Zienkiewicz O. C.** *La méthode des éléments-finis*, Paris, MacGraw-Hill, 1979, 851p, ISBN 2-7042-1007-1.

ANNEXES

ANNEXE 1

Calculs des fonctions t_1, t_2, t_3, et t_4

1. <u>Calcul de $t_1(y,t)$</u>

$$\begin{aligned} t_1\left(y,t\right) = u_C^{\,2} + v_C^{\,2} + w_C^{\,2} &= \left(\dot{X} + \dot{u} + \dot{\beta}_S\left(Z+w\right) - \dot{\gamma}_S\left(Y+y\right)\right)^2 \\ &+ \left(\dot{Y} + \dot{\gamma}_S\left(X+u\right) - \dot{\alpha}_S\left(Z+w\right)\right)^2 + \left(\dot{Z} + \dot{w} + \dot{\alpha}_S\left(Y+y\right) - \dot{\beta}_S\left(X+u\right)\right)^2 \end{aligned} \tag{A1.1}$$

$$\begin{aligned} t_1\left(y,t\right) &= \left(\left(\dot{X} + \dot{\beta}_S Z - \dot{\gamma}_S Y\right) - \dot{\gamma}_S y + \left(\dot{u} + \dot{\beta}_S w\right)\right)^2 + \left(\left(\dot{Y} + \dot{\gamma}_S X - \dot{\alpha}_S Z\right) + \dot{\gamma}_S\left(r u - \dot{\alpha}_S w\right)\right)^2 \\ &+ \left(\left(\dot{Z} + \dot{\alpha}_S Y - \dot{\beta}_S X\right) + \dot{\alpha}_S y + \left(\dot{w} - \dot{\beta}_S u\right)\right)^2 \end{aligned} \tag{A1.2}$$

$$\begin{aligned} t_1\left(y,t\right) &= \left(\dot{X} + \dot{\beta}_S Z - \dot{\gamma}_S Y\right)^2 + \dot{\gamma}_S^{\,2} y^2 + \left(\dot{u} + \dot{\beta}_S w\right)^2 - 2\,\dot{\gamma}_S\left(\dot{X} + \dot{\beta}_S Z - \dot{\gamma}_S Y\right)y - 2\,\dot{\gamma}_S\left(\dot{u} + \dot{\beta}_S w\right)y \\ &+ 2\left(\dot{X} + \dot{\beta}_S Z - \dot{\gamma}_S Y\right)\left(\dot{u} + \dot{\beta}_S w\right) + \left(\dot{Y} + \dot{\gamma}_S X - \dot{\alpha}_S Z\right)^2 + \left(\dot{\gamma}_S u - \dot{\alpha}_S w\right)^2 \\ &+ 2\left(\dot{Y} + \dot{\gamma}_S X - \dot{\alpha}_S Z\right)\left(\dot{\gamma}_S u - \dot{\alpha}_S w\right) + \left(\dot{Z} + \dot{\alpha}_S Y - \dot{\beta}_S X\right)^2 + \dot{\alpha}_S^{\,2} y^2 + \left(\dot{w} - \dot{\beta}_S u\right)^2 \\ &+ 2\,\dot{\alpha}_S\left(\dot{Z} + \dot{\alpha}_S Y - \dot{\beta}_S X\right)y + 2\,\dot{\alpha}_S\left(\dot{w} - \dot{\beta}_S u\right)y + 2\left(\dot{Z} + \dot{\alpha}_S Y - \dot{\beta}_S X\right)\left(\dot{w} - \dot{\beta}_S u\right) \end{aligned} \tag{A1.3}$$

$$\begin{aligned} t_1(y,t) &= \left[\dot{\alpha}_S^{\,2} + \dot{\gamma}_S^{\,2}\right]y^2 + 2\left[\dot{\alpha}_S\left(\dot{Z} + \dot{w} + \dot{\alpha}_S Y - \dot{\beta}_S\left(X+u\right)\right) - \dot{\gamma}_S\left(\dot{X} + \dot{u} - \dot{\gamma}_S Y + \dot{\beta}_S\left(Z+w\right)\right)\right]y \\ &+ \left(\dot{X} + \dot{u} + \dot{\beta}_S\left(Z+w\right) - \dot{\gamma}_S Y\right)^2 + \left(\dot{Y} + \dot{\gamma}_S\left(X+u\right) - \dot{\alpha}_S\left(Z+w\right)\right)^2 + \left(\dot{Z} + \dot{w} + \dot{\alpha}_S Y - \dot{\beta}_S\left(X+u\right)\right)^2 \end{aligned} \tag{A1.4}$$

Ou en classant les termes par ordre de grandeur :

$$\boxed{\begin{aligned} t_1\left(y,t\right) &= \left[\left(\dot{X} + \dot{\beta}_S Z - \dot{\gamma}_S Y\right)^2 + \left(\dot{Y} + \dot{\gamma}_S X - \dot{\alpha}_S Z\right)^2 + \left(\dot{Z} + \dot{\alpha}_S Y - \dot{\beta}_S X\right)^2\right] \\ &+ 2\left[-r\left(\dot{X} + \dot{\beta}_S Z - \dot{\gamma}_S Y\right) + \dot{\alpha}_S\left(\dot{Z} + \dot{\alpha}_S Y - \dot{\beta}_S X\right)\right]y + \left[\dot{\alpha}_S^{\,2} + \dot{\gamma}_S^{\,2}\right]y^2 \\ &+ 2\left[-\dot{\gamma}_S\left(\dot{u} + \dot{\beta}_S w\right) + \dot{\alpha}_S\left(\dot{w} - \dot{\beta}_S u\right)\right]y \\ &+ 2\left[\left(\dot{X} + \dot{\beta}_S Z - \dot{\gamma}_S Y\right)\left(\dot{u} + \dot{\beta}_S w\right) + \left(\dot{Y} + \dot{\gamma}_S X - \dot{\alpha}_S Z\right)\left(\dot{\gamma}_S u - \dot{\alpha}_S w\right) + \left(\dot{Z} + \dot{\alpha}_S Y - \dot{\beta}_S X\right)\left(\dot{w} - \dot{\beta}_S u\right)\right] \\ &+ \left[\left(\dot{u} + \dot{\beta}_S w\right)^2 + \left(\dot{\gamma}_S u - \dot{\alpha}_S w\right)^2 + \left(\dot{w} - \dot{\beta}_S u\right)^2\right] \end{aligned}} \tag{A1.5}$$

2. Calcul de $t_2(y,t)$

$$t_2(y,t) = \omega_x{}^2 + \omega_z{}^2$$
$$= \left(\left(\dot\alpha_S \cos\psi + \dot\beta_S \sin\psi + \dot\theta\right)\cos\Phi - \left(\left(\dot\alpha_S \sin\psi - \dot\beta_S \cos\psi\right)\sin\theta + \left(\dot\gamma_S + \dot\psi\right)\cos\theta\right)\sin\Phi\right)^2$$
$$+ \left(\left(\dot\alpha_S \cos\psi + \dot\beta_S \sin\psi + \dot\theta\right)\sin\Phi + \left(\left(\dot\alpha_S \sin\psi - \dot\beta_S \cos\psi\right)\sin\theta + \left(\dot\gamma_S + \dot\psi\right)\cos\theta\right)\cos\Phi\right)^2 \tag{A1.6}$$

$$t_2(y,t) = \left(\dot\alpha_S \cos\psi + \dot\beta_S \sin\psi + \dot\theta\right)^2 + \left(\left(\dot\alpha_S \sin\psi - \dot\beta_S \cos\psi\right)\sin\theta + \left(\dot\gamma_S + \dot\psi\right)\cos\theta\right)^2 \tag{A1.7}$$

Les angles θ et ψ et leurs dérivées sont des infiniment petits d'ordre 1. Les termes contenant des infiniment petits d'ordre supérieur à 2 sont supprimés. Ainsi les sinus et cosinus sont remplacés par leurs développement limités :

$$\sin\theta = \theta + o\left(\theta^3\right) \approx \theta \qquad \sin\psi \approx \psi$$
$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + o\left(\theta^4\right) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \qquad \cos\psi \approx 1 - \frac{\psi^2}{2} \tag{A1.8}$$

$$t_2(y,t) = \left(\dot\alpha_S \left(1 - \frac{\psi^2}{2}\right) + \dot\beta_S \psi + \dot\theta\right)^2 + \left(\left(\dot\alpha_S \psi - \dot\beta_S \left(1 - \frac{\psi^2}{2}\right)\right)\theta + \left(\dot\gamma_S + \dot\psi\right)\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)\right)^2 \tag{A1.9}$$

$$t_2(y,t) = \left(\dot\alpha_S - \dot\alpha_S \frac{\psi^2}{2} + \dot\beta_S \psi + \dot\theta\right)^2 + \left(\dot\alpha_S \psi\theta - \dot\beta_S \theta + \dot\beta_S \frac{\psi^2}{2}\theta + \dot\gamma_S + \dot\psi - \dot\gamma_S \frac{\theta^2}{2} - \dot\psi \frac{\theta^2}{2}\right)^2 \tag{A1.10}$$

En supprimant les infiniment petits d'ordre 3, il vient :

$$t_2(y,t) = \left(\dot\alpha_S - \dot\alpha_S \frac{\psi^2}{2} + \dot\beta_S \psi + \dot\theta\right)^2 + \left(\dot\alpha_S \psi\theta - \dot\beta_S \theta + \dot\gamma_S + \dot\psi - \dot\gamma_S \frac{\theta^2}{2}\right)^2 \tag{A1.11}$$

$$t_2(y,t) = \dot\alpha_S{}^2 + \dot\alpha_S{}^2 \frac{\psi^4}{4} + \dot\beta_S{}^2 \psi^2 + \dot\theta^2 - \dot\alpha_S{}^2\psi^2 + 2\dot\alpha_S \dot\beta_S \psi + 2\dot\alpha_S \dot\theta - \dot\alpha_S \dot\beta_S \psi^3 - \dot\alpha_S \psi^2 \dot\theta$$
$$+ 2\dot\beta_S \psi \dot\theta + \dot\alpha_S{}^2 \psi^2 \theta^2 + \dot\beta_S{}^2 \theta^2 + \dot\gamma_S{}^2 + \dot\psi^2 + \dot\gamma_S{}^2 \frac{\theta^4}{4} - 2\dot\alpha_S \dot\beta_S \psi \theta^2 + 2\dot\alpha_S \dot\gamma_S \psi\theta$$
$$+ 2\dot\alpha_S \psi \theta \dot\psi - \dot\alpha_S \dot\gamma_S \psi \theta^3 - 2\dot\beta_S \dot\gamma_S \theta - 2\dot\beta_S \theta \dot\psi + \dot\beta_S \dot\gamma_S \theta^3 + 2\dot\gamma_S \dot\psi - \dot\gamma_S{}^2 \theta^2 - \dot\gamma_S \theta^2 \dot\psi \tag{A1.12}$$

En ne gardant que les termes d'ordre 0, 1 et 2 :

$$t_2\,(y,t) = \dot{\alpha}_S{}^2 + \dot{\beta}_S{}^2\,\psi^2 + \dot{\theta}^2 - \dot{\alpha}_S{}^2\psi^2 + 2\,\dot{\alpha}_S\,\dot{\beta}_S\,\psi + 2\,\dot{\alpha}_S\,\dot{\theta} + 2\,\dot{\beta}_S\,\psi\,\dot{\theta} + \dot{\beta}_S{}^2\,\theta^2 + \dot{\gamma}_S{}^2 + \dot{\psi}^2$$
$$+ 2\,\dot{\alpha}_S\,\dot{\gamma}_S\,\psi\,\theta - 2\,\dot{\beta}_S\,\dot{\gamma}_S\,\theta - 2\,\dot{\beta}_S\,\theta\,\dot{\psi} + 2\,\dot{\gamma}_S\,\dot{\psi} - \dot{\gamma}_S{}^2\,\theta^2 \tag{A1.13}$$

Soit

$$\begin{aligned} t_2\,(y,t) = {} & \left(\dot{\alpha}_S{}^2 + \dot{\gamma}_S{}^2\right) + \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\right) + \theta^2\left(\dot{\beta}_S{}^2 - \dot{\gamma}_S{}^2\right) + \psi^2\left(\dot{\beta}_S{}^2 - \dot{\alpha}_S{}^2\right) \\ & + 2\left[\dot{\alpha}_S\,\dot{\theta} + \dot{\gamma}_S\,\dot{\psi} + \dot{\beta}_S\left(\psi\,\dot{\theta} - \theta\,\dot{\psi}\right) + \dot{\beta}_S\left(\dot{\alpha}_S\,\psi - \dot{\gamma}_S\,\theta\right) + \dot{\alpha}_S\,\dot{\gamma}_S\,\psi\,\theta\right] \end{aligned} \tag{A1.14}$$

Et en classant les termes par ordre de grandeur :

$$\boxed{\begin{aligned} t_2\,(y,t) = {} & \left[\dot{\alpha}_S{}^2 + \dot{\gamma}_S{}^2\right] + 2\left[\dot{\beta}_S\left(\dot{\alpha}_S\,\psi - \dot{\gamma}_S\,\theta\right) + \dot{\alpha}_S\,\dot{\theta} + \dot{\gamma}_S\,\dot{\psi}\right] \\ & + \left[\left(\dot{\beta}_S\,\theta + \dot{\psi}\right)^2 + \left(\dot{\beta}_S\,\psi + \dot{\theta}\right)^2 - \left(\dot{\alpha}_S\,\psi - \dot{\gamma}_S\,\theta\right)^2\right] \end{aligned}} \tag{A1.15}$$

3. Calcul de $t_3(y,t)$

$$t_3\,(y,t) = \omega_y{}^2 = \left(-\left(\dot{\alpha}_S\,\sin\psi - \dot{\beta}_S\,\cos\psi\right)\cos\theta + \left(\dot{\gamma}_S + \dot{\psi}\right)\sin\theta + \dot{\Phi}\right)^2 \tag{A1.16}$$

En remplaçant les sinus et cosinus par leurs développement limités et en prenant $\dot{\Phi} = \Omega$:

$$t_3\,(y,t) = \left(-\left(\dot{\alpha}_S\,\psi - \dot{\beta}_S\left(1 - \frac{\psi^2}{2}\right)\right)\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) + \left(\dot{\gamma}_S + \dot{\psi}\right)\theta + \Omega\right)^2 \tag{A1.17}$$

$$t_3\,(y,t) = \left(-\dot{\alpha}_S\,\psi + \dot{\beta}_S - \dot{\beta}_S\,\frac{\psi^2}{2} + \dot{\alpha}_S\,\psi\frac{\theta^2}{2} - \dot{\beta}_S\,\frac{\theta^2}{2} + \dot{\beta}_S\,\frac{\psi^2\,\theta^2}{4} + \dot{\gamma}_S\,\theta + \dot{\psi}\,\theta + \Omega\right)^2 \tag{A1.18}$$

Après suppression des termes d'ordre 3 et 4 dans la parenthèse et regroupement:

$$t_3\,(y,t) = \left(\left(\dot{\beta}_S + \Omega\right) + \left(\dot{\gamma}_S\,\theta - \dot{\alpha}_S\,\psi\right) + \left(\dot{\psi}\,\theta - \dot{\beta}_S\,\frac{\psi^2}{2} - \dot{\beta}_S\,\frac{\theta^2}{2}\right)\right)^2 \tag{A1.19}$$

$$t_3\,(y,t) = \left(\dot{\beta}_S + \Omega\right)^2 + \left(\dot{\gamma}_S\,\theta - \dot{\alpha}_S\,\psi\right)^2 + \left(\dot{\psi}\,\theta - \dot{\beta}_S\,\frac{\psi^2}{2} - \dot{\beta}_S\,\frac{\theta^2}{2}\right)^2 + 2\left(\dot{\beta}_S + \Omega\right)\left(\dot{\gamma}_S\,\theta - \dot{\alpha}_S\,\psi\right)$$
$$+ 2\left(\dot{\beta}_S + \Omega\right)\left(\dot{\psi}\,\theta - \dot{\beta}_S\,\frac{\psi^2}{2} - \dot{\beta}_S\,\frac{\theta^2}{2}\right) + 2\left(\dot{\gamma}_S\,\theta - \dot{\alpha}_S\,\psi\right)\left(\dot{\psi}\,\theta - \dot{\beta}_S\,\frac{\psi^2}{2} - \dot{\beta}_S\,\frac{\theta^2}{2}\right) \tag{A1.20}$$

En ne gardant que les termes d'ordre 0, 1 et 2 :

$$t_3(y,t) = \left(\dot{\beta}_S + \Omega\right)^2 + \left(\dot{\gamma}_S\,\theta - \dot{\alpha}_S\,\psi\right)^2 + 2\left(\dot{\beta}_S + \Omega\right)\left(\dot{\gamma}_S\,\theta - \dot{\alpha}_S\,\psi\right) + 2\left(\dot{\beta}_S + \Omega\right)\left(\dot{\psi}\,\theta - \dot{\beta}_S\frac{\psi^2}{2} - \dot{\beta}_S\frac{\theta^2}{2}\right) \tag{A1.21}$$

Soit

$$t_3(y,t) = \left(\dot{\beta}_S + \Omega + \dot{\gamma}_S\,\theta - \dot{\alpha}_S\,\psi\right)^2 + \left(\dot{\beta}_S + \Omega\right)\left[2\,\dot{\psi}\,\theta - \dot{\beta}_S\left(\psi^2 + \theta^2\right)\right] \tag{A1.22}$$

Et en classant les termes par ordre de grandeur :

$$\boxed{t_3(y,t) = \left(\dot{\beta}_S + \Omega\right)^2 + 2\left(\dot{\beta}_S + \Omega\right)\left(\dot{\gamma}_S\,\theta - \dot{\alpha}_S\,\psi\right) + \left(\dot{\gamma}_S\,\theta - \dot{\alpha}_S\,\psi\right)^2 + \left(\dot{\beta}_S + \Omega\right)\left[2\,\dot{\psi}\,\theta - \dot{\beta}_S\left(\psi^2 + \theta^2\right)\right]} \tag{A1.23}$$

4. Calcul de $t_4(y,t)$

$$\begin{aligned} t_2(y,t) &= \omega_x{}^2 - \omega_z{}^2 \\ &= \left(\left(\dot{\alpha}_S\cos\psi + \dot{\beta}_S\sin\psi + \dot{\theta}\right)\cos\Phi - \left(\left(\dot{\alpha}_S\sin\psi - \dot{\beta}_S\cos\psi\right)\sin\theta + \left(\dot{\gamma}_S + \dot{\psi}\right)\cos\theta\right)\sin\Phi\right)^2 \\ &\quad - \left(\left(\dot{\alpha}_S\cos\psi + \dot{\beta}_S\sin\psi + \dot{\theta}\right)\sin\Phi + \left(\left(\dot{\alpha}_S\sin\psi - \dot{\beta}_S\cos\psi\right)\sin\theta + \left(\dot{\gamma}_S + \dot{\psi}\right)\cos\theta\right)\cos\Phi\right)^2 \end{aligned} \tag{A1.24}$$

$$\begin{aligned} t_2(y,t) &= -4\left(\dot{\alpha}_S\cos\psi + \dot{\beta}_S\sin\psi + \dot{\theta}\right)\left(\left(\dot{\alpha}_S\sin\psi - \dot{\beta}_S\cos\psi\right)\sin\theta + \left(\dot{\gamma}_S + \dot{\psi}\right)\cos\theta\right)\sin\Phi\cos\Phi \\ &+ \left(\dot{\alpha}_S\cos\psi + \dot{\beta}_S\sin\psi + \dot{\theta}\right)^2 + \left(\left(\dot{\alpha}_S\sin\psi - \dot{\beta}_S\cos\psi\right)\sin\theta + \left(\dot{\gamma}_S + \dot{\psi}\right)\cos\theta\right)^2\left(\cos^2\Phi - \sin^2\Phi\right) \end{aligned} \tag{A1.25}$$

$$\begin{aligned} t_2(y,t) &= -4\left(\dot{\alpha}_S\cos\psi + \dot{\beta}_S\sin\psi + \dot{\theta}\right)\left(\left(\dot{\alpha}_S\sin\psi - \dot{\beta}_S\cos\psi\right)\sin\theta + \left(\dot{\gamma}_S + \dot{\psi}\right)\cos\theta\right)\sin 2\Phi \\ &+ \left(\dot{\alpha}_S\cos\psi + \dot{\beta}_S\sin\psi + \dot{\theta}\right)^2 + \left(\left(\dot{\alpha}_S\sin\psi - \dot{\beta}_S\cos\psi\right)\sin\theta + \left(\dot{\gamma}_S + \dot{\psi}\right)\cos\theta\right)^2\cos 2\Phi \end{aligned} \tag{A1.26}$$

Comme la vitesse angulaire $\dot{\Phi}$ est constante, on pose $\Phi = \Omega\,t$:

$$\begin{aligned} t_2(y,t) &= -4\left(\dot{\alpha}_S\cos\psi + \dot{\beta}_S\sin\psi + \dot{\theta}\right)\left(\left(\dot{\alpha}_S\sin\psi - \dot{\beta}_S\cos\psi\right)\sin\theta + \left(\dot{\gamma}_S + \dot{\psi}\right)\cos\theta\right)\sin 2\Omega\,t \\ &+ \left(\dot{\alpha}_S\cos\psi + \dot{\beta}_S\sin\psi + \dot{\theta}\right)^2 + \left(\left(\dot{\alpha}_S\sin\psi - \dot{\beta}_S\cos\psi\right)\sin\theta + \left(\dot{\gamma}_S + \dot{\psi}\right)\cos\theta\right)^2\cos 2\Omega\,t \end{aligned} \tag{A1.27}$$

En remplaçant les sinus et cosinus par leurs développements limités:

$$
\begin{aligned}
t_4(y,t) = &-2\left(\dot{\alpha}_S\left(1-\frac{\psi^2}{2}\right)+\dot{\beta}_S\,\psi+\dot{\theta}\right)\left(\left(\dot{\alpha}_S\,\psi-\dot{\beta}_S\left(1-\frac{\psi^2}{2}\right)\right)\theta+\left(\dot{\gamma}_S+\dot{\psi}\right)\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)\right)\cos 2\Omega t \\
&\left(\left(\dot{\alpha}_S\left(1-\frac{\psi^2}{2}\right)+\dot{\beta}_S\,\psi+\dot{\theta}\right)^2-\left(\left(\dot{\alpha}_S\,\psi-\dot{\beta}_S\left(1-\frac{\psi^2}{2}\right)\right)\theta+\left(\dot{\gamma}_S+\dot{\psi}\right)\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)\right)^2\right)\cos 2\Omega t
\end{aligned}
\tag{A1.28}
$$

$$
\begin{aligned}
t_4(y,t) = &-2\left(\dot{\alpha}_S-\dot{\alpha}_S\frac{\psi^2}{2}+\dot{\beta}_S\,\psi+\dot{\theta}\right)\left(\dot{\alpha}_S\,\psi\theta-\dot{\beta}_S\,\theta-\dot{\beta}_S\frac{\psi^2}{2}\theta+\dot{\gamma}_S+\dot{\psi}-\dot{\gamma}_S\frac{\theta^2}{2}-\dot{\psi}\frac{\theta^2}{2}\right)\cos 2\Omega t \\
&\left(\left(\dot{\alpha}_S-\dot{\alpha}_S\frac{\psi^2}{2}+\dot{\beta}_S\,\psi+\dot{\theta}\right)^2-\left(\dot{\alpha}_S\,\psi\theta-\dot{\beta}_S\,\theta-\dot{\beta}_S\frac{\psi^2}{2}\theta+\dot{\gamma}_S+\dot{\psi}-\dot{\gamma}_S\frac{\theta^2}{2}-\dot{\psi}\frac{\theta^2}{2}\right)^2\right)\cos 2\Omega t
\end{aligned}
\tag{A1.29}
$$

Après suppression des termes d’ordre 3 et 4 dans les parenthèses:

$$
\begin{aligned}
t_4(y,t) = &-2\left(\dot{\alpha}_S-\dot{\alpha}_S\frac{\psi^2}{2}+\dot{\beta}_S\,\psi+\dot{\theta}\right)\left(\dot{\alpha}_S\,\psi\theta-\dot{\beta}_S\,\theta+\dot{\gamma}_S+\dot{\psi}-\dot{\gamma}_S\frac{\theta^2}{2}\right)\cos 2\Omega t \\
&\left(\left(\dot{\alpha}_S-\dot{\alpha}_S\frac{\psi^2}{2}+\dot{\beta}_S\,\psi+\dot{\theta}\right)^2-\left(\dot{\alpha}_S\,\psi\theta-\dot{\beta}_S\,\theta+\dot{\gamma}_S+\dot{\psi}-\dot{\gamma}_S\frac{\theta^2}{2}\right)^2\right)\cos 2\Omega t
\end{aligned}
\tag{A1.30}
$$

$$
\begin{aligned}
t_4(y,t) = &\Big(\dot{\alpha}_S^2+\dot{\alpha}_S^2\frac{\psi^4}{4}+\dot{\beta}_S^2\,\psi^2+\dot{\theta}^2-\dot{\alpha}_S^2\psi^2+2\,\dot{\alpha}_S\,\dot{\beta}_S\,\psi+2\,\dot{\alpha}_S\,\dot{\theta}-\dot{\alpha}_S\,\dot{\beta}_S\,\psi^3-\dot{\alpha}_S\,\psi^2\,\dot{\theta} \\
&+2\dot{\beta}_S\,\psi\,\dot{\theta}-\dot{\alpha}_S^2\,\psi^2\,\theta^2-\dot{\beta}_S^2\,\theta^2-\dot{\gamma}_S^2-\dot{\psi}^2+2\,\dot{\alpha}_S\,\dot{\beta}_S\,\psi\,\theta^2-2\,\dot{\alpha}_S\,\dot{\gamma}_S\,\psi\,\theta-2\,\dot{\alpha}_S\,\psi\,\theta\,\dot{\psi} \\
&+\dot{\alpha}_S\,\dot{\gamma}_S\,\psi\,\theta^3+2\,\dot{\beta}_S\,\dot{\gamma}_S\,\theta+2\,\dot{\beta}_S\,\theta\,\dot{\psi}-\dot{\beta}_S\,\dot{\gamma}_S\,\theta^3-\dot{\gamma}_S^2\frac{\theta^4}{4}-2\,\dot{\gamma}_S\,\dot{\psi}+\dot{\gamma}_S^2\,\theta^2+\dot{\gamma}_S\,\theta^2\,\dot{\psi}\Big)\cos 2\Omega\, t \\
&-2\Big(\dot{\alpha}_S^2\,\psi\,\theta-\dot{\alpha}_S\,\dot{\beta}_S\,\theta+\dot{\alpha}_S\,\dot{\gamma}_S+\dot{\alpha}_S\,\dot{\psi}-\dot{\alpha}_S\,\dot{\gamma}_S\frac{\theta^2}{2}-\dot{\alpha}_S^2\frac{\psi^3}{2}\theta+\dot{\alpha}_S\,\dot{\beta}_S\frac{\psi^2}{2}\theta-\dot{\alpha}_S\,\dot{\gamma}_S\frac{\psi^2}{2} \\
&-\dot{\alpha}_S\frac{\psi^2}{2}\dot{\psi}+\dot{\alpha}_S\,\dot{\gamma}_S\frac{\psi^2\,\theta^2}{4}+\dot{\alpha}_S\,\dot{\beta}_S\,\psi^2\,\theta-\dot{\beta}_S^2\,\psi\,\theta+\dot{\beta}_S\,\dot{\gamma}_S\,\psi+\dot{\beta}_S\,\psi\,\dot{\psi}-\dot{\beta}_S\,\dot{\gamma}_S\,\psi\frac{\theta^2}{2}+\dot{\alpha}_S\,\psi\theta\,\dot{\theta} \\
&-\dot{\beta}_S\,\theta\,\dot{\theta}+\dot{\gamma}_S\,\dot{\theta}+\dot{\psi}\,\dot{\theta}-\dot{\gamma}_S\frac{\theta^2}{2}\dot{\theta}\Big)\sin 2\Omega t
\end{aligned}
\tag{A1.31}
$$

En ne gardant que les termes d'ordre 0, 1 et 2 :

$$\begin{aligned}
t_4(y,t) = & \Big(\dot{\alpha}_S^{\,2} + \dot{\beta}_S^{\,2}\,\psi^2 + \dot{\theta}^2 - \dot{\alpha}_S^{\,2}\psi^2 + 2\,\dot{\alpha}_S\,\dot{\beta}_S\,\psi + 2\,\dot{\alpha}_S\,\dot{\theta} + 2\,\dot{\beta}_S\,\psi\,\dot{\theta} - \dot{\beta}_S^{\,2}\,\theta^2 - \dot{\gamma}_S^{\,2} - \dot{\psi}^2 \\
& - 2\,\dot{\alpha}_S\,\dot{\gamma}_S\,\psi\,\theta + 2\,\dot{\beta}_S\,\dot{\gamma}_S\,\theta + 2\,\dot{\beta}_S\,\theta\,\dot{\psi} - 2\,\dot{\gamma}_S\,\dot{\psi} + \dot{\gamma}_S^{\,2}\,\theta^2\Big)\cos 2\Omega\,t \\
& - \Big(2\dot{\alpha}_S^{\,2}\,\psi\,\theta - 2\dot{\alpha}_S\,\dot{\beta}_S\,\theta + 2\dot{\alpha}_S\,\dot{\gamma}_S + 2\dot{\alpha}_S\,\dot{\psi} - \dot{\alpha}_S\,\dot{\gamma}_S\,\theta^2 - 2\dot{\beta}_S^{\,2}\,\psi\,\theta + 2\dot{\beta}_S\,\dot{\gamma}_S\,\psi \\
& - 2\dot{\beta}_S\,\theta\,\dot{\theta} + 2\dot{\gamma}_S\,\dot{\theta} + 2\dot{\psi}\,\dot{\theta} - \dot{\alpha}_S\,\dot{\gamma}_S\,\psi^2 + 2\dot{\beta}_S\,\psi\,\dot{\psi}\Big)\sin 2\Omega\,t
\end{aligned} \qquad \text{(A1.32)}$$

$$\begin{aligned}
t_4(y,t) = & \Big(\big(\dot{\alpha}_S^{\,2} - \dot{\gamma}_S^{\,2}\big) + 2\big(\dot{\beta}_S\,(\dot{\alpha}_S\,\psi + \dot{\gamma}_S\,\theta) + \dot{\alpha}_S\,\dot{\theta} - \dot{\gamma}_S\,\dot{\psi}\big) \\
& + \dot{\beta}_S^{\,2}\big(\psi^2 - \theta^2\big) + \dot{\gamma}_S^{\,2}\,\theta^2 - \dot{\alpha}_S^{\,2}\psi^2 + \dot{\theta}^2 - \dot{\psi}^2 + 2\,\dot{\beta}_S\,\big(\psi\,\dot{\theta} + \theta\,\dot{\psi}\big) - 2\,\dot{\alpha}_S\,\dot{\gamma}_S\,\psi\,\theta\Big)\cos 2\Omega\,t \\
& - \Big(2\,\dot{\alpha}_S\,\dot{\gamma}_S + 2\dot{\beta}_S\,(\dot{\gamma}_S\,\psi - \dot{\alpha}_S\,\theta) + 2\,\dot{\alpha}_S\,\dot{\psi} + 2\,\dot{\gamma}_S\,\dot{\theta} + 2\big(\dot{\alpha}_S^{\,2} - \dot{\beta}_S^{\,2}\big)\psi\,\theta \\
& - \dot{\alpha}_S\,\dot{\gamma}_S\,\big(\theta^2 + \psi^2\big) + 2\dot{\beta}_S\,\big(\psi\,\dot{\psi} - \theta\,\dot{\theta}\big) + 2\,\dot{\psi}\,\dot{\theta}\Big)\sin 2\Omega\,t
\end{aligned} \qquad \text{(A1.33)}$$

Ou en classant les termes par ordre de grandeur :

$$\boxed{\begin{aligned}
t_4(y,t) = & \Big[\big(\dot{\alpha}_S^{\,2} - \dot{\gamma}_S^{\,2}\big)\cos 2\Omega\,t - 2\dot{\alpha}_S\,\dot{\gamma}_S\,\sin 2\Omega\,t\Big] \\
& + 2\Big[\big(\dot{\beta}_S\,(\dot{\alpha}_S\,\psi + \dot{\gamma}_S\,\theta) + \dot{\alpha}_S\,\dot{\theta} - \dot{\gamma}_S\,\dot{\psi}\big)\cos 2\Omega\,t - \big(\dot{\beta}_S\,(\dot{\gamma}_S\,\psi - \dot{\alpha}_S\,\theta) + \dot{\alpha}_S\,\dot{\psi} + \dot{\gamma}_S\,\dot{\theta}\big)\sin 2\Omega\,t\Big] \\
& + \Big[\big(\dot{\beta}_S^{\,2}\big(\psi^2 - \theta^2\big) + \dot{\gamma}_S^{\,2}\,\theta^2 - \dot{\alpha}_S^{\,2}\psi^2 + \dot{\theta}^2 - \dot{\psi}^2 + 2\,\dot{\beta}_S\,\big(\psi\,\dot{\theta} + \theta\,\dot{\psi}\big) - 2\,\dot{\alpha}_S\,\dot{\gamma}_S\,\psi\,\theta\big)\cos 2\Omega\,t \\
& \qquad - 2\left(\big(\dot{\alpha}_S^{\,2} - \dot{\beta}_S^{\,2}\big)\psi\,\theta - \frac{\dot{\alpha}_S\,\dot{\gamma}_S}{2}\big(\theta^2 + \psi^2\big) + \dot{\beta}_S\,\big(\psi\,\dot{\psi} - \theta\,\dot{\theta}\big) + \dot{\psi}\,\dot{\theta}\right)\sin 2\Omega\,t\Big]
\end{aligned}}$$

(A1.34)

ANNEXE 2

Expression des fonctions t_1, t_2, t_3, et t_4, pour le modèle simple

L'introduction des fonctions de Rayleigh dans les expressions calculées dans l'Annexe 1 donne :

- Pour t_1 :

$$\begin{aligned}
t_1(y,t) = & \left[\left(\dot{X}+\dot{\beta}_S\, Z-\dot{\gamma}_S\, Y\right)^2+\left(\dot{Y}+\dot{\gamma}_S\, X-\dot{\alpha}_S\, Z\right)^2+\left(\dot{Z}+\dot{\alpha}_S Y-\dot{\beta}_S\, X\right)^2\right] \\
& +2\left[-r\left(\dot{X}+\dot{\beta}_S\, Z-\dot{\gamma}_S\, Y\right)+\dot{\alpha}_S\left(\dot{Z}+\dot{\alpha}_S\, Y-\dot{\beta}_S\, X\right)\right]y+\left[\dot{\alpha}_S{}^2+\dot{\gamma}_S{}^2\right]y^2 \\
& +2\left[-\dot{\gamma}_S\left(\dot{q}_1+\dot{\beta}_S\, q_2\right)+\dot{\alpha}_S\left(\dot{q}_2-\dot{\beta}_S\, q_1\right)\right]y\, f(y) \\
& +2\left[\left(\dot{X}+\dot{\beta}_S\, Z-\dot{\gamma}_S\, Y\right)\left(\dot{q}_1+\dot{\beta}_S\, q_2\right)+\left(\dot{Y}+\dot{\gamma}_S\, X-\dot{\alpha}_S\, Z\right)\left(\dot{\gamma}_S\, q_1-\dot{\alpha}_S\, q_2\right)\right. \\
& \left.+\left(\dot{Z}+\dot{\alpha}_S\, Y-\dot{\beta}_S\, X\right)\left(\dot{q}_2-\dot{\beta}_S\, q_1\right)\right]f(y) \\
& +\left[\left(\dot{q}_1+\dot{\beta}_S\, q_2\right)^2+\left(\dot{\gamma}_S\, q_1-\dot{\alpha}_S\, q_2\right)^2+\left(\dot{q}_2-\dot{\beta}_S\, q_1\right)^2\right]f^2(y)
\end{aligned} \qquad \text{(A2.1)}$$

- Pour t_2 :

$$\begin{aligned}
t_2(y,t) = & \left[\dot{\alpha}_S{}^2+\dot{\gamma}_S{}^2\right]+2\left[\dot{\beta}_S\left(\dot{\alpha}_S\, q_1-\dot{\gamma}_S\, q_2\right)+\dot{\alpha}_S\, \dot{q}_2+\dot{\gamma}_S\, \dot{q}_1\right]g(y) \\
& +\left[\left(\dot{\beta}_S\, q_2+\dot{q}_1\right)^2+\left(\dot{\beta}_S\, q_1+\dot{q}_2\right)^2-\left(\dot{\alpha}_S\, q_1-\dot{\gamma}_S\, q_2\right)^2\right]g^2(y)
\end{aligned} \qquad \text{(A2.2)}$$

- Pour t_3 :

$$\begin{aligned}
t_3(y,t) = & \left(\dot{\beta}_S+\Omega\right)^2+2\left(\dot{\beta}_S+\Omega\right)\left(\dot{\gamma}_S\, q_2-\dot{\alpha}_S\, q_1\right)g(y) \\
& +\left(\dot{\gamma}_S\, q_2-\dot{\alpha}_S\, q_1\right)^2 g^2(y)+\left(\dot{\beta}_S+\Omega\right)\left[2\dot{q}_1\, q_2-\dot{\beta}_S\left(q_1{}^2+q_2{}^2\right)\right]g^2(y)
\end{aligned} \qquad \text{(A2.3)}$$

- Pour t_4 :

$$\begin{aligned}
t_4(y,t) = & \left[\left(\dot{\alpha}_S{}^2-\dot{\gamma}_S{}^2\right)\cos 2\Omega\, t-2\dot{\alpha}_S\, \dot{\gamma}_S \sin 2\Omega t\right] \\
& +2\left[\left(\dot{\beta}_S\left(\dot{\alpha}_S\, q_1+\dot{\gamma}_S\, q_2\right)+\dot{\alpha}_S\, \dot{q}_2-\dot{\gamma}_S\, \dot{q}_1\right)\cos 2\Omega t-\left(\dot{\beta}_S\left(\dot{\gamma}_S\, q_1-\dot{\alpha}_S\, q_2\right)+\dot{\alpha}_S\, \dot{q}_1+\dot{\gamma}_S\, \dot{q}_2\right)\sin 2\Omega t\right]g(y) \\
& +\left[\left(\dot{\beta}_S{}^2\left(q_1{}^2-q_2{}^2\right)+\dot{\gamma}_S{}^2\, q_2{}^2-\dot{\alpha}_S{}^2 q_1{}^2+\dot{q}_2{}^2-\dot{q}_1{}^2+2\dot{\beta}_S\left(q_1\, \dot{q}_2+q_2\, \dot{q}_1\right)-2\,\dot{\alpha}_S\, \dot{\gamma}_S\, q_1\, q_2\right)\cos 2\Omega\, t\right. \\
& \left.-\left(2\left(\dot{\alpha}_S{}^2-\dot{\beta}_S{}^2\right)q_1\, q_2-\dot{\alpha}_S\, \dot{\gamma}_S\left(q_2{}^2+q_1{}^2\right)+2\dot{\beta}_S\left(q_1\, \dot{q}_1-q_2\, \dot{q}_2\right)+2\dot{q}_1\, \dot{q}_2\right)\sin 2\Omega\, t\right]g^2(y)
\end{aligned}$$

(A2.4)

ANNEXE 3

Expression des constantes caractéristiques du rotor utilisées dans la méthode de Rayleigh-Ritz :

Cas général :

$$M_T = M_D + \int_0^L \rho\, S\, dy$$

$$M_1 = M_D\, f(l_1) + \int_0^L \rho\, S\, f(y)\, dy$$

$$M_2 = M_D\, f^2(l_1) + \int_0^L \rho\, S\, f^2(y)\, dy$$

$$I_{mT} = I_{Dm} + \int_0^L \rho\, I_m\, dy$$

$$I_{m1} = I_{Dm}\, g(l_1) + \int_0^L \rho\, I_m\, g(y)\, dy$$

$$I_{m2} = I_{Dm}\, g^2(l_1) + \int_0^L \rho\, I_m\, g^2(y)\, dy$$

$$I_{aT} = I_{Da} + \int_0^L \rho\, I_m\, dy$$

$$I_{a1} = I_{Da}\, g(l_1) + \int_0^L \rho\, I_a\, g(y)\, dy$$

$$I_{a2} = I_{Da}\, g^2(l_1) + \int_0^L \rho\, I_a\, g^2(y)\, dy$$

$$M_3 = M_D\, l_1 + \int_0^L \rho\, S\, y\, dy$$

$$M_4 = M_D\, l_1^{\,2} + \int_0^L \rho\, S\, y^2\, dy$$

$$M_5 = M_D\, l_1\, f(l_1) + \int_0^L \rho\, S\, y\, f(y)\, dy$$

$$I_{yT} = I_{Dy} + 2\int_0^L \rho\, I_m\, dy$$

$$I_{y1} = I_{Dy}\, g(l_1) + 2\int_0^L \rho\, I_m\, g(y)\, dy$$

$$I_{y2} = I_{Dy}\, g^2(l_1) + 2\int_0^L \rho\, I_m\, g^2(y)\, dy$$

$$k = E\int_0^L I_m\, h^2(y)\, dy$$

$$k_a = E\int_0^L I_a\, h^2(y)\, dy$$

Application numérique pour le modèle simple du chapitre II.1

Toutes les constantes exprimées précédemment sont utilisées dans le calcul des énergies, mais toutes n'apparaissent pas dans les équations. D'autres constantes sont spécifiques aux rotors dissymétriques. Seules les constantes intervenant dans les équations pour le modèle symétrique sont calculées.

Les valeurs utilisées pour les applications numériques sont les suivantes :

L = 40 cm	$l_1 = L/3$
R1 =1 cm	ρ = 7800 kg / m^3
R2 =15 cm	E=2.10^{11} Pa
h = 3 cm	

A partir de ces valeurs, les grandeurs suivantes caractéristiques de l'arbre et du disque peuvent être calculées :

- Masse du disque : $M_D = \pi \left(R_2{}^2 - R_1{}^2\right) h\, \rho$
- Surface d'une section droite de l'arbre : $S = \pi R_1{}^2$
- Inertie de section de l'arbre : $I_m = I_x = I_z = \dfrac{\pi R_1{}^4}{4}$
- Inerties principales du disque : $I_{Dm} = I_{Dx} = I_{Dz} = \dfrac{M_D}{12}\left(3 R_1{}^2 + 3 R_2{}^2 + h^2\right)$

$$I_{Dy} = \frac{M_D}{2}\left(R_1{}^2 + R_2{}^2\right)$$

Numériquement :

$$M_D = 16{,}467 \text{ kg}$$

$$S = 3{,}1416.10^{-4} \text{ m}^2$$

$$I = 7{,}8540.10^{-9} \text{ m}^4$$

$$I_{Dm} = 9{,}4273.10^{-2} \text{ kg.m}^2$$

$$I_{Dy} = 0{,}18608 \text{ kg.m}^2$$

A partir de ces grandeurs, les constantes caractéristiques du rotor introduites au chapitre I.2 sont obtenues. Ces constantes dépendent du mode considéré. Leurs expressions analytiques et numériques sont présentées pour les deux premiers modes.

$\underline{\textit{1}^{er}\textit{ mode :}}$ $f(y) = \sin \frac{\pi y}{L}$

$$M_1 = M_D \sin\left(\frac{\pi l_1}{L}\right) + \frac{2\rho S L}{\pi}$$

$$M_2 = M_D \sin^2\left(\frac{\pi l_1}{L}\right) + \frac{\rho S L}{2}$$

$$M_5 = M_D\, l_1 \sin\left(\frac{\pi l_1}{L}\right) + \frac{\rho S L^2}{2}$$

$$I_{m1} = I_{Dm}\ \frac{\pi}{L} \cos\left(\frac{\pi l_1}{L}\right)$$

$$I_{m2} = I_{Dm} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi l_1}{L}\right) + \frac{\rho I_m \pi^2}{2L}$$

$$I_{y1} = I_{Dy} \frac{\pi}{L} \cos\left(\frac{\pi l_1}{L}\right)$$

$$I_{y2} = I_{Dy} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi l_1}{L}\right) + \frac{\rho I_m \pi^2}{L}$$

$$k = \frac{E I_m \pi^4}{2L^3}$$

Application numérique :

$I_{m1} = 0{,}37021\ \text{kg.m}$

$I_{m2} = 1{,}4546\ \text{kg}$

$I_{y1} = 0{,}73072\ \text{kg.m}$

$I_{y2} = 2{,}8710\ \text{kg}$

$M_1 = 14{,}885\ \text{kg}$

$M_2 = 12{,}840\ \text{kg}$

$M_5 = 2{,}0262\ \text{kg.m}$

$k = 1{,}1954.10^6\ \text{N/m}$

$m_u\, d^* = 1{,}2990.10^{-5}\ \text{kg.m}$

2

$$\underline{\textit{2}^{eme}\ \textit{mode :}}\quad f(y)=\sin\frac{2\pi y}{L}$$

$$M_1 = M_D \sin\left(\frac{2\pi l_1}{L}\right)$$

$$M_2 = M_D \sin^2\left(\frac{2\pi l_1}{L}\right)+\frac{\rho S L}{2}$$

$$M_5 = M_D\, l_1 \sin\left(\frac{2\pi l_1}{L}\right)-\frac{\rho S L^2}{2\pi}$$

$$I_{m1} = I_{Dm}\ \frac{2\pi}{L}\cos\left(\frac{2\pi l_1}{L}\right)$$

$$I_{m2} = 4 I_{Dm}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \cos^2\left(\frac{2\pi l_1}{L}\right)+\frac{2\rho I_m \pi^2}{L}$$

$$I_{y1} = 2 I_{Dy}\ \frac{\pi}{L}\cos\left(\frac{2\pi l_1}{L}\right)$$

$$I_{y2} = 4 I_{Dy}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \cos^2\left(\frac{2\pi l_1}{L}\right)+\frac{4\rho I_m \pi^2}{L}$$

$$k=\frac{8 E I_m \pi^4}{L^3}$$

Application numérique :

$I_{m1} = -0,74042$ kg.m

$I_{m2} = 5,8183$ kg

$I_{y1} = -1,4614$ kg.m

$I_{y2} = 11,484$ kg

$M_1 = 14,261$ kg

$M_2 = 12,840$ kg

$M_5 = 1,8390$ kg.m

$k = 1,9126.10^7$ N / m

$m_u\ d^* = 1,2990.10^{-5}$ kg.m

ANNEXE 4

Matrices élémentaires pour le disque

Vecteur modal : $\delta = \left[u, w, \theta, \Psi\right]^{T}$

$$M_d = \begin{bmatrix} MD & 0 & 0 & 0 \\ 0 & MD & 0 & 0 \\ 0 & 0 & IDm + IDa\cos(2\Phi) & -IDa\sin(2\Phi) \\ 0 & 0 & -IDa\sin(2\Phi) & IDm - IDa\cos(2\Phi) \end{bmatrix}$$

$$C_d = \begin{bmatrix} 0 & 2\,MD\,q & 0 & 0 \\ -2\,MD\,q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\,IDa\,\Omega\sin(2\Phi) & 2\,q\,IDm - IDy(q+\Omega) - 2\,IDa\,\Omega\cos(2\Phi) \\ 0 & 0 & -2\,q\,IDm + IDy(q+\Omega) - 2\,IDa\,\Omega\cos(2\Phi) & -2\,IDa\,\Omega\sin(2\Phi) \end{bmatrix}$$

$$K_d = \begin{bmatrix} -MD(r^2+q^2) & MD(p\,r+\dot{q}) & 0 & 0 \\ MD(p\,r-\dot{q}) & -MD(p^2+q^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (IDm-IDy)(r^2-q^2) + IDy\,q\,\Omega + IDa\left[(2\,\Omega\,q + q^2 - r^2)\cos(2\Phi) + (\dot{q} - p\,r)\sin(2\Phi)\right] & IDy\,p\,r + (\dot{q}-p\,r)\,IDm + \left[(p^2-q^2-2\,\Omega\,q)\sin(2\Phi) + (\dot{q}+p\,r)\cos(2\Phi)\right]IDa \\ 0 & 0 & (\dot{q}+p\,r)(IDy-IDm) + \left[(p^2-q^2-2\,\Omega\,q)\sin(2\Phi) + (\dot{q}+p\,r)\cos(2\Phi)\right]IDa & (IDm-IDy)(p^2-q^2) + IDy\,q\,\Omega + \left[(p^2-q^2-2\,\Omega\,q)\cos(2\Phi) - (\dot{q}+p\,r)\sin(2\Phi)\right]IDa \end{bmatrix}$$

$$F_d = -\begin{bmatrix} MD\left[\ddot{X} - 2\,r\,\dot{Y} + 2\,q\,\dot{Z} - (r^2+q^2)\,X + (p\,q - \dot{r})(Y+y) + (\dot{q} + r\,p)\,Z\right] \\ MD\left[\ddot{Z} - 2\,q\,\dot{X} + 2\,p\,\dot{Y} - (\dot{q} - p\,r)\,X + (\dot{p} + q\,r)(y+Y) - (q^2+p^2)\,Z\right] \\ IDm(\dot{p} + q\,r) - IDy\,r\,(q+\Omega) + IDa\left[(\dot{p} - q\,r - 2\,\Omega\,r)\cos(2\Phi) + (\dot{r} - p\,q - 2\,\Omega\,p)\sin(2\Phi)\right] \\ IDm(\dot{r} - p\,q) + IDy\,p\,(q+\Omega) + IDa\left[-(\dot{r} + p\,q + 2\,\Omega\,p)\cos(2\Phi) + (-\dot{p} + 2\,\Omega\,r + q\,r)\sin(2\Phi)\right] \end{bmatrix}$$

ANNEXE 5

Matrices élémentaires pour l'arbre

Energie cinétique :

$$Ma = \rho\, S\, M1 + \rho\, Im\, M2 + \rho\, Ia\left[M4 \sin(2\,\Phi) - M3\cos(2\,\Phi)\right] \tag{A5.1}$$

$$Ca = 2\,\rho\left\{\dot{\beta}_S\; S\,C1 - Im\,\Omega\,C2 + Ia\,\Omega\left[M3\sin(2\,\Phi) + M4\cos(2\,\Phi)\right]\right\} \tag{A5.2}$$

$$\begin{aligned} Ka = {} & \rho\, S\,(K1 + \ddot{\beta}_S\; C1 + \dot{\gamma}_S\; \dot{\alpha}_S\; K2) + \rho\, Im\left[K3 - (\ddot{\beta}_S + \dot{\gamma}_S\; \dot{\alpha}_S)\, M4 + 2\,\dot{\beta}_S\;(\dot{\beta}_S + \Omega)\, M2\right] \\ & + \rho\, Ia\left\{\cos(2\,\Phi)\, K4 - \left[(\ddot{\beta}_S + \dot{\gamma}_S\; \dot{\alpha}_S)\cos(2\,\Phi) + (\dot{\alpha}_S{}^2 - \dot{\beta}_S{}^2 - 2\,\dot{\beta}_S\;\Omega)\sin(2\,\Phi)\right]M4 \right. \\ & \left. - \left[\ddot{\beta}_S\;\sin(2\,\Phi) + 2\,\dot{\beta}_S\;\Omega\cos(2\,\Phi)\right]M3 - \dot{\gamma}_S\;\dot{\alpha}_S\;\sin(2\,\Phi)\,M2\right\} \end{aligned} \tag{A5.3}$$

$$\begin{aligned} Fa = {} & \left\{\rho\, S\left[\ddot{X} + 2\,\dot{\beta}_S\;\dot{Z} - 2\,\dot{\gamma}_S\;\dot{Y} + (\ddot{\beta}_S + \dot{\gamma}_S\;\dot{\alpha}_S)\,Z + (\dot{\alpha}_S\;\dot{\beta}_S - \dot{r})\,Y - (\ddot{\gamma}_S{}^2 + \dot{\beta}_S{}^2)\,X\right]V1 \right. \\ & + \left[\ddot{Z} + 2\,\dot{\alpha}_S\;\dot{Y} - 2\,\dot{\beta}_S\;\dot{X} + (\dot{\alpha}_S\;\dot{\gamma}_S - \ddot{\beta}_S)\,X + (\ddot{\alpha}_S + \dot{\gamma}_S\;\dot{\beta}_S)\,Y - (\dot{\alpha}_S{}^2 + \dot{\beta}_S{}^2)\,Z\right]V2 \\ & \left. + (\dot{\alpha}_S\;\dot{\beta}_S - \ddot{\gamma}_S)\,V3 + (\ddot{\alpha}_S + \dot{\gamma}_S\;\dot{\beta}_S)\,V4\right\} \\ & + \rho\, Im\left\{(\dot{\alpha}_S\;\dot{\beta}_S - \ddot{\gamma}_S)\,V5 + (\ddot{\alpha}_S + \dot{\gamma}_S\;\dot{\beta}_S)\,V6 - 2\,(\dot{\beta}_S + \Omega)\,(\dot{\alpha}_S\;V5 + \dot{\gamma}_S\;V6)\right\} \\ & + \rho\, Ia\left\{\left[(\ddot{\gamma}_S + \dot{\alpha}_S\;\dot{\beta}_S + 2\,\dot{\alpha}_S\;\Omega)\cos(2\,\Phi) + (\ddot{\alpha}_S - \dot{\beta}_S\;\dot{\gamma}_S - 2\,\dot{\gamma}_S\;\Omega)\sin(2\,\Phi)\right]V5 \right. \\ & \left. + \left[(\ddot{\alpha}_S - \dot{\beta}_S\;\dot{\gamma}_S - 2\,\dot{\gamma}_S\;\Omega)\cos(2\,\Phi) - (\ddot{\gamma}_S + \dot{\alpha}_S\;\dot{\beta}_S + 2\,\dot{\alpha}_S\;\Omega)\sin(2\,\Phi)\right]V6\right\} \end{aligned} \tag{A5.4}$$

Avec

$$M1 = \frac{L}{420}\begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ & & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ & & & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ & \text{Sym} & & & 156 & 0 & 0 & 22L \\ & & & & & 156 & -22L & 0 \\ & & & & & & 4L^2 & 0 \\ & & & & & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$
M2=\frac{1}{30L}\begin{bmatrix}
36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\
 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\
 & & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\
 & & & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\
 & & & & 36 & 0 & 0 & 3L \\
 & \text{Sym} & & & & 36 & -3L & 0 \\
 & & & & & & 4L^2 & 0 \\
 & & & & & & & 4L^2
\end{bmatrix}
$$

$$
M3=\frac{1}{30L}\begin{bmatrix}
36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\
 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\
 & & -4L^2 & 0 & 0 & 3L & L^2 & 0 \\
 & & & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\
 & & & & 36 & 0 & 0 & 3L \\
 & \text{Sym} & & & & -36 & 3L & 0 \\
 & & & & & & -4L^2 & 0 \\
 & & & & & & & 4L^2
\end{bmatrix}
$$

$$
M4=\frac{1}{30L}\begin{bmatrix}
0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\
 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\
 & & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\
 & & & 0 & 0 & 3L & L^2 & 0 \\
 & & & & 0 & 36 & -3L & 0 \\
 & \text{Sym} & & & & 0 & 0 & 3L \\
 & & & & & & 0 & -4L^2 \\
 & & & & & & & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
C1=\frac{1}{30L}\begin{bmatrix}
0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\
 & 0 & 0 & 22L & -54 & 0 & 0 & -13L \\
 & & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\
 & & & 0 & 0 & -13L & 3L^2 & 0 \\
 & & & & 0 & 156 & -22L & 0 \\
 & \text{Antisym} & & & & 0 & 0 & -22L \\
 & & & & & & 0 & 4L^2 \\
 & & & & & & & 0
\end{bmatrix}
$$

$$C2=\frac{1}{30L}\begin{bmatrix} 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ & & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ & & & 0 & 0 & 3L & L^2 & 0 \\ & & & & 0 & 36 & -3L & 0 \\ & \text{Antisym} & & & & 0 & 0 & -3L \\ & & & & & & 0 & 4L^2 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$K1=\frac{L}{420}\begin{bmatrix} -156\,c_1 & 0 & 0 & 22L\,c_1 & -54\,c_1 & 0 & 0 & -13L\,c_1 \\ & -156\,c_2 & -22L\,c_2 & 0 & 0 & -54\,c_2 & 13L\,c_2 & 0 \\ & & -4L^2\,c_2 & 0 & 0 & -13L\,c_2 & 3L^2\,c_2 & 0 \\ & & & -4L^2\,c_1 & 13L\,c_1 & 0 & 0 & 3L^2\,c_1 \\ & & & & -156\,c_1 & 0 & 0 & -22L\,c_1 \\ & \text{Sym} & & & & -156\,c_2 & 22L\,c_2 & 0 \\ & & & & & & -4L^2\,c_2 & 0 \\ & & & & & & & -4L^2\,c_1 \end{bmatrix}$$

où $\begin{cases} c_1 = \dot{\beta}_S^2 + \dot{\gamma}_S^2 \\ c_2 = \dot{\alpha}_S^2 + \dot{\beta}_S^2 \end{cases}$

$$K2=\frac{L}{420}\begin{bmatrix} 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ & & 0 & -4L^2 & 13L & 0 & 0 & 3L^2 \\ & & & 0 & 0 & -13L & 3L^2 & 0 \\ & & & & 0 & 156 & -22L & 0 \\ & \text{Sym} & & & & 0 & 0 & 22L \\ & & & & & & 0 & -4L^2 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$K3=\frac{1}{30L}\begin{bmatrix} 36\,c_2 & 0 & 0 & -3L\,c_2 & -36\,c_2 & 0 & 0 & -3L\,c_2 \\ & 36\,c_1 & 3L\,c_1 & 0 & 0 & -36\,c_1 & 3L\,c_1 & 0 \\ & & 4L^2\,c_1 & 0 & 0 & -3L\,c_1 & -L^2\,c_1 & 0 \\ & & & 4L^2\,c_2 & 3L\,c_2 & 0 & 0 & -L^2\,c_2 \\ & & & & 36\,c_2 & 0 & 0 & 3L\,c_2 \\ & & & & & 36\,c_1 & -3L\,c_1 & 0 \\ & \text{Sym} & & & & & 4L^2\,c_1 & 0 \\ & & & & & & & 4L^2\,c_2 \end{bmatrix}$$

$$K4 = \frac{1}{30L}\begin{bmatrix} 36\,c_3 & 0 & 0 & -3L\,c_3 & -36\,c_3 & 0 & 0 & -3L\,c_3 \\ & -36\,c_4 & -3L\,c_4 & 0 & 0 & 36\,c_4 & -3L\,c_4 & 0 \\ & & -4L^2\,c_4 & 0 & 0 & 3L\,c_4 & L^2\,c_4 & 0 \\ & & & 4L^2\,c_3 & 3L\,c_3 & 0 & 0 & -L^2\,c_3 \\ & & & & 36\,c_3 & 0 & 0 & 3L\,c_3 \\ & \text{Sym} & & & & -36\,c_4 & 3L\,c_4 & 0 \\ & & & & & & -4L^2\,c_4 & 0 \\ & & & & & & & 4L^2\,c_3 \end{bmatrix}$$

où $\begin{cases} c_1 = \dot{\alpha}_S^2 - \dot{\beta}_S^2 \\ c_2 = \dot{\gamma}_S^2 - \dot{\beta}_S^2 \end{cases}$

$$V1 = \frac{L}{12}\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ -L \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ L \end{bmatrix} \qquad V2 = \frac{L}{12}\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ L \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ -L \\ 0 \end{bmatrix} \qquad V3 = \frac{L^2}{60}\begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ -2L \\ 21 \\ 0 \\ 0 \\ 3L \end{bmatrix}$$

$$V4 = \frac{L^2}{60}\begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 2L \\ 0 \\ 0 \\ 21 \\ -3L \\ 0 \end{bmatrix} \qquad V5 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad V6 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Energie de déformation :

$$Ku = E\,Im\,Ku1 + E\,Ia\cos(2\,\Phi)\,Ku2 + E\,Ia\sin(2\,\Phi)\,Ku3$$

avec

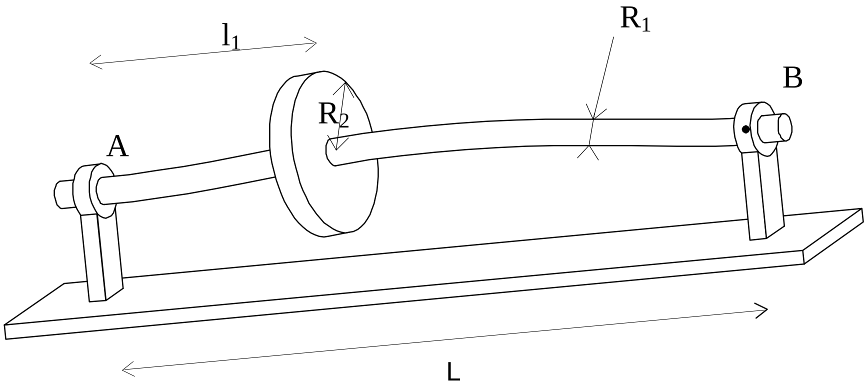
$$Ku1 = \frac{1}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ & & 4L^2 & 0 & 0 & -6L & 2L^2 & 0 \\ & & & 4L^2 & 6L & 0 & 0 & 2L^2 \\ & & & & 12 & 0 & 0 & 6L \\ & & & & & 12 & -6L & 0 \\ & \text{Sym} & & & & & 4L^2 & 0 \\ & & & & & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$Ku2 = \frac{1}{L^3}\begin{bmatrix} -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ & & 4L^2 & 0 & 0 & -6L & 2L^2 & 0 \\ & & & -4L^2 & -6L & 0 & 0 & -2L^2 \\ & & & & -12 & 0 & 0 & -6L \\ & & & & & 12 & -6L & 0 \\ & \text{Sym} & & & & & 4L^2 & 0 \\ & & & & & & & -4L^2 \end{bmatrix}$$

$$Ku3 = \frac{1}{L^3}\begin{bmatrix} 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ & & 0 & -4L^2 & -6L & 0 & 0 & -2L^2 \\ & & & 0 & 0 & 6L & -2L^2 & 0 \\ & & & & 0 & 12 & -6L & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 6L \\ & \text{Sym} & & & & & 0 & -4L^2 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

ANNEXE 6

Rappel des caractéristiques du modèle simple utilisé dans le chapitre II.1



Les caractéristiques du rotor sont les suivantes :

Pour l'arbre :

- Longueur : L
- Rayon : R1
- Masse volumique : ρ
- Module de Young : E

Pour le disque :

- Rayon intérieur : R1
- Rayon extérieur : R2
- Epaisseur : h
- Position : l_1
- Masse volumique : ρ
- Module de Young : E

Pour le balourd :

- Masse : m_u
- distance au centre: d = R2

Les valeurs utilisées pour les applications numériques sont les suivantes :

L = 40 cm
R1 =1 cm
R2 =15 cm
h = 3 cm
$l_1 = L/3$
ρ = 7800 kg / m^3
E = 2.10^{11} Pa
m_u = 10^{-4} kg

Les équations pour ce modèle dans le cas d'un support fixe sont les suivantes :

$$\begin{cases} m\,\ddot{q}_1 - \Omega\, I_{y2}\,\dot{q}_2 + k\,q_1 = m_u d\, f\,(l_1)\,\Omega^2 \sin\Omega t \\ m\,\ddot{q}_2 + \Omega\, I_{y2}\,\dot{q}_1 + k\,q_2 = m_u d\, f\,(l_1)\,\Omega^2 \cos\Omega t \end{cases} \tag{A6.1}$$

Les solutions de ce système sont la somme des solutions du système homogène associé et des solutions particulières dues au second membre.

Système homogène associé :

$$\begin{cases} m\,\ddot{q}_1 - \Omega\, I_{y2}\,\dot{q}_2 + k\,q_1 = 0 \\ m\,\ddot{q}_2 + \Omega\, I_{y2}\,\dot{q}_1 + k\,q_2 = 0 \end{cases} \tag{A6.2}$$

Les solutions sont cherchées sous la forme :

$$\begin{cases} q_1 = Q_1\, e^{rt} \\ q_2 = Q_2\, e^{rt} \end{cases} \tag{A6.3}$$

En remplaçant ces solutions dans le système homogène, il vient :

$$\begin{bmatrix} m\,r^2 + k & -I_{y2}\,\Omega\, r \\ I_{y2}\,\Omega\, r & m\,r^2 + k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = 0 \tag{A6.4}$$

Les autres solutions que la solution triviale $Q_1 = Q_2 = 0$ sont obtenues pour :

$$\det \begin{vmatrix} m\,r^2 + k & -I_{y2}\,\Omega\, r \\ I_{y2}\,\Omega\, r & m\,r^2 + k \end{vmatrix} = 0 \tag{A6.5}$$

soit $$\left(mr^2+k\right)^2+I_{y2}{}^2\Omega^2 r^2=0 \tag{A6.6}$$

qui peut s'écrire $$m^2 r^4+\left(2mk+I_{y2}{}^2\,\Omega^2\right)r^2+k^2=0 \tag{A6.7}$$

Lorsque le rotor est à l'arrêt ($\Omega = 0$) les racines de cette équation sont :

$$r_{10}^2=r_{20}^2=j^2\Omega_{10}^2=j^2\Omega_{20}^2-\frac{k}{m} \tag{A6.8}$$

Et les fréquences de résonance du rotor à l'arrêt sont : $$\Omega_{10}=\Omega_{20}=\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{A6.9}$$

Lorsque le rotor est en rotation, les racines de l'équation deviennent :

$$r_1^2=-\left[\Omega_{10}^2+\frac{I_{y2}^2\,\Omega^2}{2m^2}\left(1-\sqrt{1+\frac{4m^2\Omega_{10}^2}{I_{y2}^2\,\Omega^2}}\right)\right] \tag{A6.10}$$

$$r_2^2=-\left[\Omega_{10}^2+\frac{I_{y2}^2\,\Omega^2}{2m^2}\left(1+\sqrt{1+\frac{4m^2\Omega_{10}^2}{I_{y2}^2\,\Omega^2}}\right)\right] \tag{A6.11}$$

Et les fréquences de résonance s'écrivent : $$r_i=\pm j\Omega_i \tag{A6.12}$$

$$\Omega_1=\sqrt{\Omega_{10}^2+\frac{I_{y2}^2\,\Omega^2}{2m^2}\left(1-\sqrt{1+\frac{4m^2\Omega_{10}^2}{I_{y2}^2\,\Omega^2}}\right)} \tag{A6.13}$$

$$\Omega_2=\sqrt{\Omega_{10}^2+\frac{I_{y2}^2\,\Omega^2}{2m^2}\left(1+\sqrt{1+\frac{4m^2\Omega_{10}^2}{I_{y2}^2\,\Omega^2}}\right)} \tag{A6.14}$$

qui peut également s'écrire :

$$\Omega_1=\frac{1}{2m}\left(\sqrt{\Omega^2\,I_{y2}^2+4km}-I_{y2}\,\Omega\right) \tag{A6.15}$$

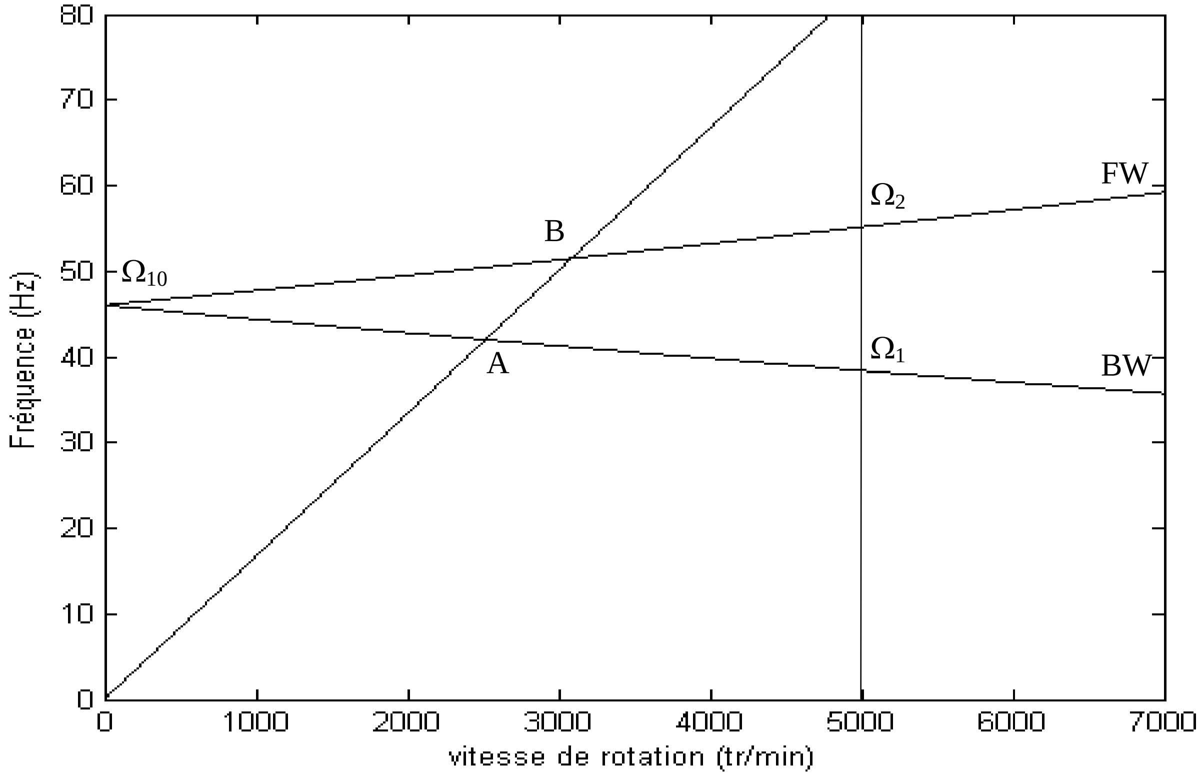
$$\Omega_2=\frac{1}{2m}\left(\sqrt{\Omega^2\,I_{y2}^2+4km}+I_{y2}\,\Omega\right) \tag{A6.16}$$

Les expressions générales des solutions du système homogène sont alors :

$$
\begin{aligned}
q_1(t) &= jA_1\, e^{j\Omega_1 t} - jB_1\, e^{-j\Omega_1 t} - jA_2\, e^{j\Omega_1 t} + jB_2\, e^{-j\Omega_1 t} \\
q_2(t) &= A_1\, e^{j\Omega_1 t} + B_1\, e^{-j\Omega_1 t} + A_2\, e^{j\Omega_1 t} + B_2\, e^{-j\Omega_1 t}
\end{aligned}
\tag{A6.17}
$$

où les constantes A_1, B_1, A_2, et B_2 sont déterminées par les conditions initiales.

Le diagramme de Campbell qui représente les fréquences de résonance du rotor en fonction de sa vitesse de rotation peut maintenant être tracé :



Ω_{10} est la fréquence de résonance du rotor à l'arrêt. A et B sont les points pour lesquels la vitesse de rotation du rotor coïncide avec ses fréquences de résonance. Ω_1 et Ω_2 sont les fréquences de résonance du rotor lorsque celui-ci tourne à 5000 tr/min. Ces valeurs sont utilisées dans le chapitre II.1.

Les applications numériques donnent les valeurs suivantes :

Ω_0 = 46.02 Hz

A = 42 Hz = 2520 tr/min

B = 51.48 Hz = 3089 tr/min

Ω_1 = 38.41 Hz = 2305 tr/min

Ω_2 = 55.15 Hz = 3309 tr/min

Les solutions particulières du système complet sont maintenant cherchées :

$$\begin{cases} m\,\ddot{q}_1 - \Omega\, I_{y2}\, \dot{q}_2 + k\, q_1 = m_u d\, f\,(l_1)\, \Omega^2 \sin\Omega t \\ m\,\ddot{q}_2 + \Omega\, I_{y2}\, \dot{q}_1 + k\, q_2 = m_u d\, f\,(l_1)\, \Omega^2 \cos\Omega t \end{cases} \tag{A6.18}$$

Les solutions sont cherchées sous la forme :

$$\begin{aligned} q_1 &= Q_1 \sin\Omega\, t \\ q_2 &= Q_2 \cos\Omega\, t \end{aligned} \tag{A6.19}$$

En remplaçant ces fonctions dans le système, il vient :

$$\begin{cases} -m\Omega^2\, Q_1 + \Omega^2\, I_{y2}\, Q_2 + k\, Q_1 = m_u d\, f\,(l_1)\, \Omega^2 \\ -m\Omega^2\, Q_2 + \Omega^2\, I_{y2}\, Q_1 + k\, Q_2 = m_u d\, f\,(l_1)\, \Omega^2 \end{cases} \tag{A6.20}$$

soit
$$Q_1 = Q_2 = \frac{m_u d\, f(l_1)\Omega^2}{k + (I_{y2} - m)\Omega^2} \tag{A6.21}$$

La vitesse critique d'un rotor soumis à un balourd correspond à la valeur de Ω pour laquelle le déplacement est infini. C'est à dire lorsque le dénominateur est égal à 0 :

$$\Omega_c = \sqrt{\frac{k}{m - I_{y2}}} \tag{A6.22}$$

Cette valeur correspond au point B du diagramme de Campbell.

FOLIO ADMINISTRATIF

THESE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

NOM : **DUCHEMIN** DATE de SOUTENANCE : 05/12/2003
(avec précision du nom de jeune fille, le cas échéant)

Prénoms : **Matthieu**

TITRE :

Contribution à l'étude du comportement dynamique des rotors embarqués

NATURE : Doctorat Numéro d'ordre : 03 ISAL

Ecole doctorale : Mécanique

Spécialité :

RESUME :

L'objectif de ces travaux était de développer un modèle permettant de simuler le comportement dynamique d'un rotor embarqué. Les calculs des différentes énergies et travaux virtuels des différents éléments d'un rotor dont le support est soumis à un mouvement quelconque ont été développés pour la première fois en tenant compte des possibles asymétries de l'arbre ou des disques. Un modèle simple a été défini à partir de la méthode de Rayleigh-Ritz afin d'étudier des phénomènes de base. Pour traiter des systèmes réels, une modélisation par éléments finis a été développée. Les équations non-linéaires du mouvement ont été obtenues par application des équations de Lagrange.

Les phénomènes de base relatifs à la dynamique des rotors dont le support est en mouvement ont été étudiés sur le modèle simple. Diverses études analytiques ont été effectuées sur des mouvements simples : translation simple, translation sinusoïdale, rotation constante, rotation accélérée. Pour tous ces mouvements, les équations de déformation restent linéaires. Par contre, sur un mouvement simple de rotation sinusoïdale, des termes paramétriques viennent s'ajouter dans les équations. Une étude d'instabilité a donc été réalisée sur ce mouvement à l'aide de la méthode des échelles multiples. Cette méthode a permis de déterminer les zones d'instabilité. Une résolution pas-à-pas a été utilisée pour vérifier ces zones d'instabilité sur le modèle de Rayleigh-Ritz.

Un dispositif expérimental a été créé en vue de tester le modèle développé à l'aide de la méthode des éléments finis. Le mouvement principalement étudié a été le mouvement de rotation sinusoïdale qui semblait le plus intéressant au vu des phénomènes décris à l'aide du modèle simple. Le recalage des fréquences de résonance du système a été réalisé en ajustant les raideurs de palier. L'étude d'un rotor embarqué sur un support flexible ne semble donc pas une priorité. Le recalage de l'amortissement réalisé sur une étude de chocs angulaires a montré que la modélisation obtenue était très bonne en répartissant l'amortissement structural sur les paliers. Après le recalage, les comparaisons entre simulations numériques et résultats expérimentaux sur les amplitudes de déformation de l'arbre et sur les orbites particulières observées ont démontré que le modèle éléments finis proposé permet d'obtenir de très bonnes prédictions sur le comportement dynamique en flexion d'un rotor embarqué.

MOTS-CLES : ROTOR - EMBARQUE - DYNAMIQUE - LAGRANGE - RAYLEIGH-RITZ - ELEMENTS FINIS - NUMERIQUE - EXPERIMENTAL - NON-LINEAIRE - ECHELLES MULTIPLES

Laboratoire (s) de recherches :

Laboratoire de Dynamique des Machines et des Structures

Directeur de thèse: Professeur Guy FERRARRIS

Président de jury :

Composition du jury : A. BERLIOZ R. DUFOUR G. FERRARIS B. PESEUX (rapporteur) J. PIRANDA (rapporteur) F. THOUVEREZ