

# **THESE**

Présentée devant

**L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON**

Pour obtenir

## **LE GRADE DE DOCTEUR**

Formation doctorale : Mécanique

Ecole doctorale des Sciences pour l'Ingénieur de Lyon : MEGA

Par

**Abdul Hamid MOHAMAD**  
(Ingénieur Université d'Alep)

## **REPONSE FORCEEE DES ENSEMBLES TOURNANTS DE TURBOMACHINES APPLICATION AU CAS D'UNE TURBINE A GAZ**

Soutenue le 28 juin 2002 devant la Commission d'examen

Jury MM

E. CHATELET	Maître de Conférences (INSA de Lyon)
G. JACQUET-RICHARDET	Professeur (INSA de Lyon)
J. L. ROBERT	Professeur (IUT de Montluçon) Rapporteur
M. EL HAJEM	Maître de Conférences (INSA de Lyon)
P. SWIDER	Professeur (Université Paul Sabatier TOULOUSE 3 ) Rapporteur

Directeur : A.STORCK

## Professeurs :

AUDISIO S.	PHYSICOCHIMIE INDUSTRIELLE
BABOT D.	CONT. NON DESTR. PAR RAYONNEMENT IONISANTS
BABOUX J.C.	GEMPPM*
BALLAND B.	PHYSIQUE DE LA MATIERE
BAPTISTE P.	PRISMA
BARBIER D.	PHYSIQUE DE LA MATIERE
BASTIDE J.P.	THERMODYNAMIQUE APPLIQUEE
BAYADA G.	MODELISATION MATHEMATIQUE ET CALCUL SCIENTIFIQUE
BETEMPS M.	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
BIENNIER F.	PRISMA
BLANCHARD J.M.	LAEPSI***
BOISSON C.	VIBRATIONS-ACOUSTIQUE
BOIVIN M. (Prof. émérite)	MECANIQUE DES SOLIDES
BOTTA H.	Equipe DEVELOPPEMENT URBAIN
BOTTA-ZIMMERMANN M. (Mme)	Equipe DEVELOPPEMENT URBAIN
BOULAYE G. (Prof. émérite)	INFORMATIQUE
BOYER J.C.	MECANIQUE DES SOLIDES
BRAU J.	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Thermique du bâtiment
BRISSAU M.	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
BRUNET M.	MECANIQUE DES SOLIDES
BRUNIE L.	INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION
BUREAU J.C.	THERMODYNAMIQUE APPLIQUEE
CAVILLE J.Y.	GEMPPM*
CHANTE J.P.	CEGELY**** - Composants de puissance et applications
CHOCAT B.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Hydrologie urbaine
COUSIN M.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Structures
DOUTHEAU A.	CHIMIE ORGANIQUE
DUFOUR R.	MECANIQUE DES STRUCTURES
DUPUY J.C.	PHYSIQUE DE LA MATIERE
EMPTOZ H.	RECONNAISSANCE DES FORMES ET VISION
ESNOUF C.	GEMPPM*
EYRAUD L. (Prof. émérite)	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
FANTOZZI G.	GEMPPM*
FAVREL J.	PRISMA - PProductique et Informatique des Systèmes Manufacturiers
FAYARD J.M.	BIOLOGIE APPLIQUEE
FAYET M.	MECANIQUE DES SOLIDES
FERRARIS-BESSO G.	MECANIQUE DES STRUCTURES
FLAMAND L.	MECANIQUE DES CONTACTS
FLEISCHMANN P.	GEMPPM*
FLORY A.	INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION
FOUGERES R.	GEMPPM*
FOUQUET F.	GEMPPM*
FRECON L.	INFORMATIQUE
GERARD J.F.	MATERIAUX MACROMOLECULAIRES
GERMAIN P.	LA. ANAL. ENVIR. PROCEDES ET SYST. INDUS.
GIMENEZ G.	CREATIS**
GOBIN P.F. (Prof. émérite)	GEMPPM*
GONNARD P.	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
GONTRAND M.	CEGELY**** - Composants de puissance et applications
GOUTTE R. (Prof. émérite)	CREATIS**
GRANGE G.	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
GUENIN G.	GEMPPM*
GUICHARDANT M.	BIOCHIMIE ET PHARMACOLOGIE
GUILLOT G.	PHYSIQUE DE LA MATIERE
GUINET A.	PRISMA - PProductique et Informatique des Systèmes Manufacturiers
GUYADER J.L.	VIBRATIONS-ACOUSTIQUE
GUYOMAR D.	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
HEIBIG A.	LAB. MATHEMATIQUE APPLIQUEES LYON
JACQUET RICHARDET G.	MECANIQUE DES STRUCTURES
JAYET Y.	GEMPPM*
JOLION J.M.	RECONNAISSANCE DES FORMES ET VISION
JULLIEN J.F.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Structures
JUTARD A. (Prof. émérite)	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
KASTNER R.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Géotechnique
KOULOUMDJIAN J.	INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION
LAGARDE M.	BIOCHIMIE ET PHARMACOLOGIE
LALANNE M. (Prof. émérite)	MECANIQUE DES STRUCTURES
LALLEMAND A.	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Energétique et thermique
LALLEMAND M. (Mme)	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Energétique et thermique
LAREAL P.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Géotechnique
LAUGIER A.	PHYSIQUE DE LA MATIERE

JANVIER 2002

LAUGIER C.	BIOCHIMIE ET PHARMACOLOGIE
LEJEUNE P.	GENETIQUE MOLECULAIRE DES MICROORGANISMES
LUBRECHT A.	MECANIQUE DES CONTACTS
MARTINEZ Y.	INGENIERIE INFORMATIQUE INDUSTRIELLE
MAZILLE H.	PHYSICOCHIMIE INDUSTRIELLE
MERLE P.	GEMPPM*
MERLIN J.	GEMPPM*
MIGNOTTE A. (Mle)	L3I
MILLET J.P.	PHYSICOCHIMIE INDUSTRIELLE
MIRAMOND M.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Hydrologie urbaine
MOREL R.	MECANIQUE DES FLUIDES
MOSZKOWICZ P.	LAEPSI****
NARDON P. (Prof. émérite)	BIOLOGIE APPLIQUEE
NAVARRO A.	LAEPSI****
NIEL E.	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
NOURI A. (Mme)	MODELISATION MATHEMATIQUE ET CALCUL SCIENTIFIQUE
ODET C.	CREATIS**
OTTERBEIN M. (Prof. émérite)	LAEPSI***
PASCAULT J.P.	MATERIAUX MACROMOLECULAIRES
PAVIC G.	VIBRATIONS-ACOUSTIQUE
PELLETIER J.M.	GEMPPM*
PERA J.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Matériaux
PERRIAT P.	GEMPPM*
J. PERRIN J.	ESCHIL – Equipe Sciences Humaines de l’Insa de Lyon
PINARD P. (Prof. émérite)	PHYSIQUE DE LA MATIERE
PINON J.M.	INGENIERIE DES SYSTEMES D’INFORMATION
PLAY D.	CONCEPTION ET ANALYSE DES SYSTEMES MECANIQUES
PONCET A.	PHYSIQUE DE LA MATIERE
POUSIN J.	MODELISATION MATHEMATIQUE ET CALCUL SCIENTIFIQUE
PREVOT P.	GRACIMP – Groupe de Recherche en Apprentissage, Coopération et Interfaces Multimodales pour la Productique
PROST R.	CREATIS**
RAYNAUD M.	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Transferts Interfaces et Matériaux
REDARCE H.	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
REYNOUARD J.M.	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL - Structures
RIGAL J.F.	CONCEPTION ET ANALYSE DES SYSTEMES MECANIQUES
RIEUTORD E. (Prof. émérite)	MECANIQUE DES FLUIDES
ROBERT-BAUDOUY J. (Mme) (Prof. émérite)	GENETIQUE MOLECULAIRE DES MICROORGANISMES
ROUBY D.	GEMPPM*
ROUX J.J.	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON
RUBEL P.	INGENIERIE DES SYSTEMES D’INFORMATION
RUMELHART C.	MECANIQUE DES SOLIDES
SACADURA J.F.	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON - Transferts Interfaces et Matériaux
SAUTEREAU H.	MATERIAUX MACROMOLECULAIRES
SCAVARDA S.	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
THOMASSET D.	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
UBEDA S.	CENTRE D’INNOV. EN TELECOM ET INTEGRATION DE SERVICES
UNTERREINER R.	CREATIS**
VELEX P.	MECANIQUE DES CONTACTS
VIGIER G.	GEMPPM*
VINCENT A.	GEMPPM*
VUILLERMOZ P.L. (Prof. émérite)	PHYSIQUE DE LA MATIERE
<b>Directeurs de recherche C.N.R.S. :</b>	
Y.BERTHIER	MECANIQUE DES CONTACTS
N.COTTE-PATAT (Mme)	UNITE MICROBIOLOGIE ET GENETIQUE
P.FRANCIOSI	GEMPPM*
M.A. MANDRAND (Mme)	UNITE MICROBIOLOGIE ET GENETIQUE
J.F.QUINSON	GEMPPM*
A.ROCHE	MATERIAUX MACROMOLECULAIRES
A. SEGUELA	GEMPPM*
<b>Directeurs de recherche I.N.R.A. :</b>	
G.FEBVAY	BIOLOGIE APPLIQUEE
S.GRENIER	BIOLOGIE APPLIQUEE
<b>Directeurs de recherche I.N.S.E.R.M. :</b>	
A-F.PRIGENT (Mme)	BIOLOGIE ET PHARMACOLOGIE
I.MAGNIN (Mme)	CREATIS**

\* **GEMPPM** GROUPE D’ETUDE METALLURGIE PHYSIQUE ET PHYSIQUE DES MATERIAUX

\*\* **CREATIS** CENTRE DE RECHERCHE ET D’APPLICATIONS ENTRAITEMENT DE L’IMAGE ET DU SIGNAL

\*\*\* **LAEPSI** LABORATOIRE D’ANALYSE ENVIRONNEMENTALE DES PROCÉDES ET SYSTEMES INDUSTRIELS

\*\*\*\* **CEGELY** CENTRE DE GENIE ELECTRIQUE DE LYON

## **REMERCIEMENT**

Cette étude a été réalisée au Laboratoire de Mécanique des Structures de l'INSA de Lyon, UMR CNRS 5006, dirigé par Monsieur le Professeur G. Ferraris. Je tiens à le remercier vivement pour son accueil au sein du laboratoire.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur le professeur G. Jacquet-Richardet pour avoir accepté d'être directeur de ma thèse et pour son aide considérable qu'il m'a apportée pour réaliser cette thèse.

Je remercie tout particulièrement Monsieur le professeur J. L. ROBERT, de l'IUT de Montluçon, et Monsieur le professeur P SWIDER, de Université Paul Sabatier Toulouse 3, qui ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse et de participer au jury.

Je remercie également Monsieur E. CHATELET et Monsieur M. EL HAJEM, Maîtres de Conférences à L'INSA de Lyon d'avoir accepté d'être examinateurs de cette thèse.

Je remercie sincèrement l'équipe du laboratoire de Mécanique de fluide notamment Abdul Rahman Akhras, qui m'ont permis d'utiliser des outils de calcul disponibles dans ce laboratoire et pour l'aide qui m'ont apportée.

Enfin, je remercie ma femme Zinab et mes enfants Majdi, Marwa et Walid pour leur patience.

# SOMMAIRE

<b>INTRODUCTION GENERALE .....</b>	<b>1</b>
<b>CHAPITRE 1 : Réponse Forcée des Aubages.....</b>	<b>5</b>
1. Introduction .....	6
2. Mécanisme de Base .....	7
2.1 Aubes ponctuelles.....	7
2.2 Modèle continu.....	11
2.2.1 Force ponctuelle fixe .....	13
2.2.2 Ensemble de forces ponctuelles distribuées de façon uniforme .....	15
2.2.3 Charge distribuée.....	16
3. Modèle de référence .....	17
3.1 Introduction .....	17
3.2 Equation différentielle du mouvement .....	18
3.3 Vibrations libres .....	21
3.4 Réponse harmonique .....	24
3.4.1 Excitation ponctuelle .....	28
3.4.2 Excitation sur une ligne de circonférence.....	30
4. conclusion.....	32
<b>CHAPITRE 2 : Prise en compte des excitations réparties dans les modèles des éléments finis – Techniques adapter – Validations.....</b>	<b>33</b>
1. Introduction .....	34
2. Description des Modèles .....	34
3. Réponse forcée – Validation et étude paramétrique.....	39
3.1 Réponse à une excitation ponctuelle .....	39
3.2 Réponse à une excitation répartie.....	41
3.2.1 Calcul des forces nodales équivalentes .....	42
3.2.2 Application et validation .....	44
3.3 Influence des approximations de répartitions.....	46
3.4 Influence des forces nodales équivalentes.....	50
4. Conclusion.....	51
<b>CHAPITRE 3: Etude détaillée des mécanismes de réponse.....</b>	<b>53</b>
1. Introduction .....	54
2. Présentation du modèle.....	54
2.1 Vibration libre.....	56

---

2.2 Réponse forcée à une excitation .....	57
2.2.1 Structure à l'arrêt – Excitation harmonique .....	58
2.2.2 Structure en rotation .....	59
3. Applications Complémentaire .....	63
3.1 Description des modèles - réponse a l'arrêt.....	63
3.2 Structures en rotation.....	67
4. Conclusion .....	69
<b>CHAPITRE 4: Application à un étage de turbine.....</b>	<b>70</b>
1. Introduction .....	71
2. Ecoulements en turbomachine – modèles de base.....	71
3. Présentation du modèle.....	73
3.1 Introduction .....	73
3.2 Description du cas test – modèles fluide et structure .....	73
3.3 Modèles structure et fluide .....	76
3.3.1 Modèle structure .....	76
3.3.2 Modèle fluide.....	77
4. Résultats.....	79
4.1 Comportement de la structure isolée .....	79
4.2 Comportement du fluide.....	81
4.3 Réponse de la structure en rotation.....	83
4.3.1 Réponse de la structure.....	84
5. Conclusion .....	86
<b>CONCLUSION GENERALE.....</b>	<b>87</b>
<b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....</b>	<b>90</b>
<b>ANNEXE .....</b>	<b>96</b>

# **INTRODUCTION GENERALE**

## **POSITION DU PROBLEME**

Les turbomachines sont les pièces maîtresses de domaines stratégiques comme le transport (moteur d'avion, turbo-compresseur de véhicule automobile...) et la production d'énergie (turbine à vapeur de centrale...). Du fait des impératifs forts de fiabilité, de sécurité, de flexibilité d'utilisation et de respect de l'environnement imposés à ces machines, les constructeurs doivent disposer d'outils d'analyse de plus en plus fins et précis dès le stade de conception. Dans ce contexte, les roues aubées sont des éléments essentiels et sont donc l'objet d'attentions particulières. Cependant, compte tenu de la complexité de leur comportement dynamique et de la richesse des excitations possibles, on constate que :

- 1/ les aubes subissent encore des ruptures non prévues, avec des conséquences considérables en terme de coût de réparation et surtout de perte d'exploitation.
- 2/ un fonctionnement sécurisé entraîne des limitations des plages d'utilisation qui sont pénalisantes et qui pourraient être élargies grâce à des analyses prédictives plus fines.
- 3/ la limitation des amplitudes vibratoires est souvent liée à des dispositifs issus de l'expérience propre à chaque constructeur, et donc généralement difficiles à faire évoluer et à optimiser.

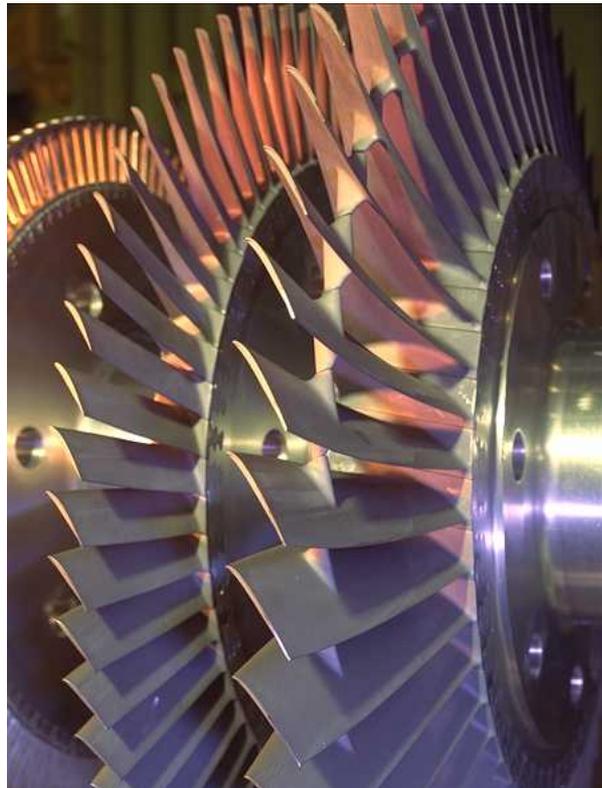


Figure 1 : Etages d'aubes de turbomachine (Thermodyn)

L'un des mécanismes principaux d'excitation des aubages est lié à la rotation de la structure dans un champ fluide stationnaire perturbé. Ces perturbations sont les inévitables conséquences des obstacles traversés par le fluide (pattes de fixation des carters, étages amont...). Conjuguées à la rotation, elles agissent sur l'aubage comme une force répartie variable au cours du temps et sont donc capables, sous certaines conditions, d'exciter ses fréquences naturelles et de donner lieu à des réponses de grandes amplitudes (Figure 3)

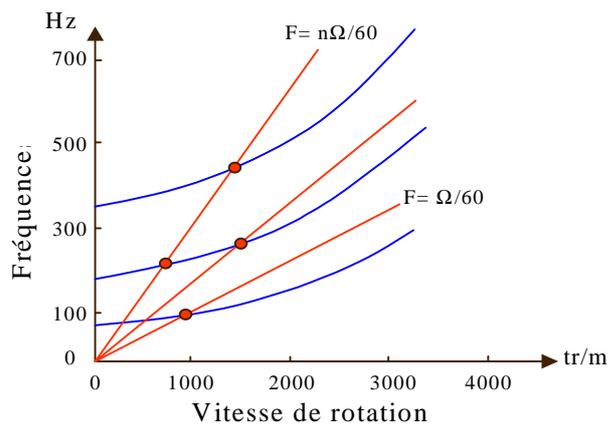


Figure 2. Diagramme de Campbell

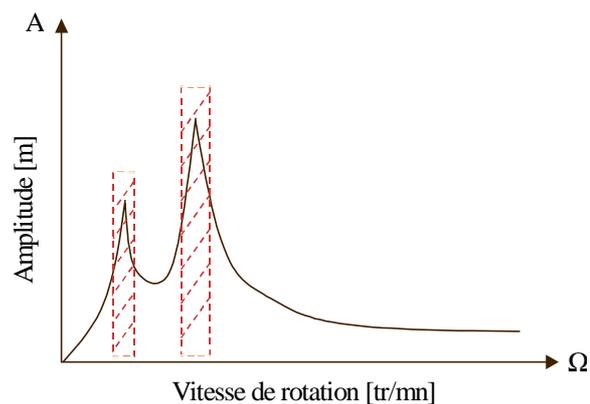


Figure 3. Réponse en rotation

Les techniques de conception couramment employées sont basées sur l'utilisation du diagramme de Campbell qui superpose l'évolution des fréquences naturelles et de l'excitation, en fonction de la vitesse de rotation (figure 2). Les croisements entre ces deux séries de courbes sont associés à des vitesses de rotations particulières qui peuvent donner lieu à résonance et qui sont systématiquement éliminées de la plage de fonctionnement autorisée.

Ce type de conception est efficace mais beaucoup trop limitatif dans la mesure où les machines se caractérisent par un comportement dynamique très riche. Dans ce cas, éliminer l'ensemble des résonances possibles devient incompatible avec les flexibilités d'utilisation requises et n'est pas forcément nécessaire puisque toute résonance n'est pas dangereuse. Il devient donc indispensable d'être en mesure de simuler le comportement réel de la structure en fonctionnement, simulation de type réponse forcée sous excitations induites par l'environnement. Cet objectif est un enjeu majeur dans le domaine des turbomachines et mobilise des efforts de recherche importants. Il n'est cependant pour l'instant que très partiellement atteint

L'objectif du travail présenté est de conduire une série d'études de base afin d'être en mesure de mieux maîtriser les mécanismes mis en jeu dans le cadre de la réponse forcée des aubages ainsi que les techniques numériques adaptées à leur modélisation.

Le premier chapitre recense les modèles couramment rencontrés et établit un modèle analytique utilisé comme référence pour la suite du travail.

Le second chapitre permet d'établir les techniques de prise en compte des excitations réparties dans les modèles éléments finis, pour les structures cycliques.

Le troisième chapitre clarifie le domaine de validité des mécanismes de réponse connus.

Enfin, le dernier chapitre présente une application sur un aubage réel de turbine.

**CHAPITRE 1**  
**REPONSE FORCEE DES AUBAGES**

## 1. INTRODUCTION

Pour l'étude de la réponse forcée des aubages de turbomachines, deux niveaux d'analyse peuvent être considérés. Le premier a trait aux mécanismes qui gouvernent ce type de réponse et le second concerne les techniques de prise en compte d'excitations réparties dans le cadre de modélisations éléments finis.

La première partie de ce chapitre présente les mécanismes de réponse généralement mis en évidence dans la littérature. Ces derniers reposent sur des approches associées à deux cas limites, lorsque les aubes sont faiblement liées et fines ou à l'autre extrémité lorsqu'elles sont fortement liées et de grande envergure. Dans le premier cas, le mécanisme d'excitation est supposé mis en évidence à l'aide d'un système de structures indépendantes, ponctuelles, dont la vibration circonférentielle est organisée. Dans le second cas, la vibration de la structure est supposée homogène à celle d'un disque circulaire continu.

La modélisation de la réponse forcée induite par un chargement distribué pose deux problèmes importants.

Dans le processus de discrétisation par la technique des éléments finis, les charges réparties sont prises en compte après calcul des forces nodales équivalentes. Sur le plan physique, le champ de forces nodales équivalentes associé à un champ de pression connu traduit bien le même apport d'énergie à la structure mais ces deux champs peuvent avoir des répartitions spatiales différentes. Ces différences sont susceptibles d'affecter notablement les comportements en dynamique puisque dans ce cas la réponse de la structure est conditionnée par l'amplitude de l'excitation mais également par sa répartition.

Sur un plan plus pratique, se pose également le problème de la prise en compte d'un champ de pression de forme complexe dans un modèle élément fini. Les forces nodales équivalentes peuvent être calculées précisément, à partir d'une approximation fine de la pression sur chaque élément. Cependant les codes de calculs disponibles se limitent souvent à la prise en compte de pressions constantes sur chaque élément ou au mieux de pressions variant linéairement à partir des pressions données aux nœuds extrémité.

Pour avancer vers une meilleure maîtrise de ces problèmes, il est nécessaire de disposer d'un modèle de référence efficace et représentatif des cas traités. Pour cela, le cas de la plaque circulaire a été choisi et les développements analytiques associés sont présentés dans la seconde partie du chapitre.

## 2. MECANISMES DE BASE

### 2.1 AUBES PONCTUELLES

La figure 1.1 représente schématiquement un ensemble aubé constitué d'un étage fixe situé à l'amont d'un étage mobile. Le nombre d'aubes des étages fixe et mobile est respectivement  $H$  et  $N$  et ces aubes ne sont pas liées entre elles. Deux repères sont considérés: le premier, référencé  $\phi$ , est lié à l'étage fixe et le second, référencé  $\theta$ , est lié à l'étage mobile et tourne avec celui-ci à la vitesse notée  $\Omega$ .

L'écoulement, uniforme en entrée, est perturbé par la présence des aubes fixes. Cette perturbation sera supposée ici d'allure sinusoïdale et crée un effort, qui agit sur l'étage mobile, écrit sous la forme [JAY84] :

$$F(\theta, t) = F_0 \cos H(\theta - \Omega t) \quad (1-1)$$

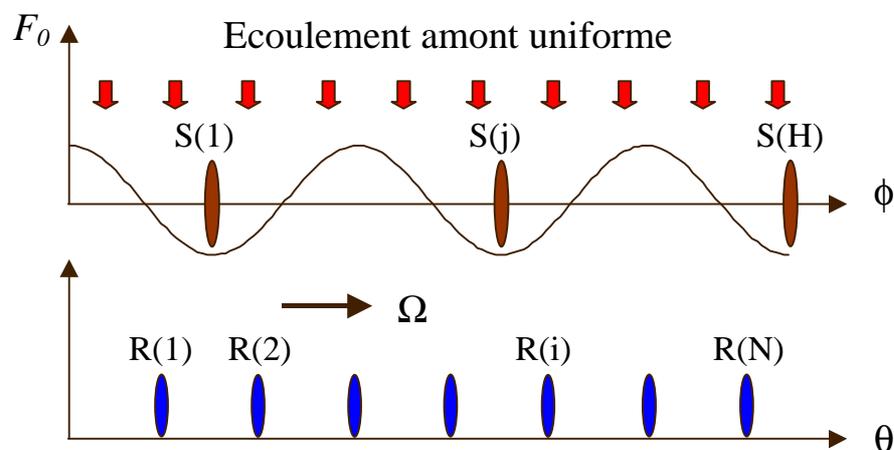


Figure 1.1 : Ensemble étage fixe / étage mobile

Par analogie avec les systèmes à un degré de liberté, l'énergie cinétique d'une aube  $i$  est donnée par :

$$T_i = \frac{1}{2} m \dot{q}_i^2(t) \quad (1-2)$$

où  $q_i(t)$  est le déplacement généralisé de l'aube  $i$ , pour un mode  $n$  donné, et  $m$  la masse modale associée à ce même mode. Les aubes sont supposées vibrer selon une organisation circumférentielle caractéristique des modes axisymétriques à diamètres, soit:

$$q_i(\theta_i, t) = q_c(t) \cos(n\theta_i) + q_s(t) \sin(n\theta_i) \quad (1-3)$$

En reportant (1-3) dans (1-2) il vient:

$$T_i = \frac{1}{2} m (\dot{q}_c^2(t) \cos^2(n\theta_i) + \dot{q}_s^2(t) \sin^2(n\theta_i) + 2\dot{q}_c(t)\dot{q}_s(t) \cos(n\theta_i) \sin(n\theta_i)) \quad (1-4)$$

D'autre part, l'énergie de déformation de la même aube s'écrit en fonction de la raideur modale  $k$ :

$$U_i = \frac{1}{2} k q_i^2(t) \quad (1-5)$$

Considérant la relation (1-3), l'expression de l'énergie de déformation peut être réécrite sous la forme:

$$U_i = \frac{1}{2} k (q_c^2(t) \cos^2(n\theta_i) + q_s^2(t) \sin^2(n\theta_i) + 2q_c(t)q_s(t) \cos(n\theta_i) \sin(n\theta_i)) \quad (1-6)$$

Compte tenu des propriétés classiques associées aux séries trigonométriques (annexe A), soit:

$$\sum_{i=1}^N \cos(a\theta_i) \cos(b\theta_i) = \begin{cases} \frac{N}{2} & \text{pour } a = \alpha N \pm b \\ 0 & \text{pour } a \neq \alpha N \pm b \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^N \cos(a\theta_i) \sin(b\theta_i) = 0 \quad \forall a \text{ et } b$$

l'énergie cinétique pour l'ensemble des aubes devient :

$$T = \sum_{i=1}^N T_i^n = \frac{N}{2} m (\dot{q}_c^2(t) + \dot{q}_s^2(t)) \quad (1-7)$$

De même, l'énergie de déformation totale s'écrit:

$$U = \sum_{i=1}^N U_i^n = \frac{N}{2} k (q_c^2(t) + q_s^2(t)) \quad (1-8)$$

L'application des équations de lagrange conduit aux équations du mouvement suivantes :

$$N(m\dot{q}_c(t) + k q_c(t)) = \frac{\partial W}{\partial q_c} \quad (1-9)$$

$$N(m\dot{q}_s(t) + k q_s(t)) = \frac{\partial W}{\partial q_s} \quad (1-10)$$

où  $W$  représente le travail des efforts externes. Lorsque les aubes peuvent être considérées comme ponctuelles et compte tenue de (1-1) et (1-3), le travail associé à l'aube  $i$  peut être exprimé par:

$$\begin{aligned} W_i &= F_0 \cos H(\theta - \Omega t) \cdot (q_c(t) \cos(n\theta_i) + q_s(t) \cos(n\theta_i)) \\ &= F_0 q_c(t) \cos(H\theta_i) \cos(n\theta_i) \cos(H\Omega t) + F_0 q_s(t) \sin(H\theta_i) \sin(n\theta_i) \sin(H\Omega t) + \\ &F_0 q_s(t) \cos(H\theta_i) \sin(n\theta_i) \cos(H\Omega t) + F_0 q_c(t) \sin(H\theta_i) \cos(n\theta_i) \sin(H\Omega t) \end{aligned} \quad (1-11)$$

et le travail total devient:

$$\begin{aligned} W &= \sum_{i=1}^N (F_0 q_c(t) \cos(H\theta_i) \cos(n\theta_i) \cos(H\Omega t) + F_0 q_s(t) \sin(H\theta_i) \sin(n\theta_i) \sin(H\Omega t)) + \\ &\sum_{i=1}^N (F_0 q_s(t) \cos(H\theta_i) \sin(n\theta_i) \cos(H\Omega t) + F_0 q_c(t) \sin(H\theta_i) \cos(n\theta_i) \sin(H\Omega t)) \end{aligned} \quad (1-12)$$

Soit encore:

$$W = NF_0 q_c(t) \cos(H\Omega t) + NF_0 q_s(t) \sin(H\Omega t) \quad (1-13)$$

Expression qui, dérivée par rapport aux variables généralisées, donne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial q_c} &= NF_0 \cos(H\Omega t) \\ \frac{\partial W}{\partial q_s} &= NF_0 \sin(H\Omega t) \end{aligned} \quad (1-14)$$

Les équations (1-14) reportées dans (1-9) et (1-10) donnent les équations différentielles du mouvement associées à la réponse de la structure en rotation dans un champ fluide perturbé par  $H$  obstacles:

$$\begin{aligned} m \ddot{q}_c(t) + k q_c(t) &= F_0 \cos(H\Omega t) \\ m \ddot{q}_s(t) + k q_s(t) &= F_0 \sin(H\Omega t) \end{aligned} \quad (1-15)$$

En supposant que la solution des équations (1-15) est de la forme :

$$\begin{aligned} q_c(t) &= A_c \cos(H\Omega t) \\ q_s(t) &= A_s \cos(H\Omega t) \end{aligned} \quad (1-16)$$

il vient:

$$\begin{aligned} A_c &= \frac{F_0}{k - m(H\Omega)^2} \\ A_s &= \frac{F_0}{k - m(H\Omega)^2} \end{aligned}$$

Termes qui, reportés dans (1-3), conduisent à:

$$q(\theta_i, t) = \frac{F_0 \cos(n\theta_i)}{k - m(H\Omega)^2} \cos(H\Omega t) + \frac{F_0 \sin(n\theta_i)}{k - m(H\Omega)^2} \sin(H\Omega t) \quad (1-17)$$

$$q(\theta_i, t) = F_0 \frac{\cos(n\theta_i - H\Omega t)}{k - m(H\Omega)^2} \quad (1-18)$$

A partir de l'expression de la réponse de la structure (1-18), on déduit les conditions de résonance associées à :

$$\omega_n = H\Omega \quad (1-19)$$

en rappelant bien que ces résonances ne sont possibles que si:

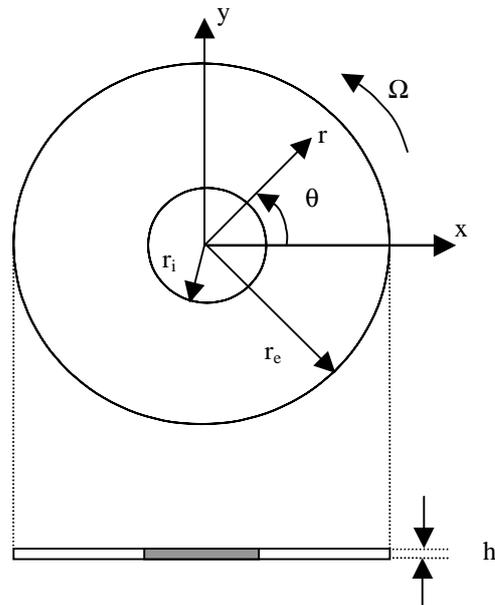
$$n = \alpha N \pm H \quad (1-20)$$

avec :

- $n$  ordre de vibration (nombre de diamètres nodaux)
- $H$  ordre d'excitation
- $N$  nombre d'aubes mobiles
- $\alpha$  nombre entier

## 2.2 MODÈLE CONTINU

Lorsque le nombre d'aubes est important, les mécanismes de réponse sont assimilés à ceux des systèmes axisymétriques. Seuls les éléments principaux, utiles pour la compréhension sont donnés ici, sachant que le développement d'un modèle analytique associé aux plaques circulaires est détaillé dans le chapitre suivant.



**Figure 1.2 : Plaque circulaire**

Le déplacement axial d'un point de la surface moyenne d'un disque uniforme peut être décrit sous la forme [WIL79] :

$$w(r, \theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} R_{mn}(r) [A_{mn}(t) \cos(n\theta) + B_{mn}(t) \sin(n\theta)] \quad (1-21)$$

où  $r$  et  $\theta$  représentent les coordonnées polaires,  $R_{mn}(r)$  est liée à la forme du mode caractérisé par  $n$  diamètres nodaux et  $m$  cercles nodaux, et  $A_{mn}$  et  $B_{mn}$  sont des coefficients fonction du temps, des paramètres physiques de la structure, des conditions aux limites et de la charge. Concernant la charge appliquée on distingue les cas d'une force ponctuelle fixe (2.2.1), d'un ensemble de forces ponctuelles distribuées uniformément (2.2.2) et d'une charge distribuée (2.2.3).

### 2.2.1 FORCE PONCTUELLE FIXE

Pour une force ponctuelle  $F$ , fixe et concentrée à un rayon  $R$  par rapport à l'axe de rotation coïncidant avec l'axe de symétrie du disque ( $z$ ), la forme de la force agissant sur la structure est donnée par :

$$F(r, \theta, t) = F_0 \delta(\theta - \Omega t) \delta(r - R) \quad (1-22)$$

où  $\delta$  dénote la fonction Dirac. Le travail de cette force est décomposé en deux parties  $\phi_{cmn}$  et  $\phi_{smn}$  respectivement associées aux termes en  $\cos(n\theta)$  et  $\sin(n\theta)$  [MOH01] :

$$\begin{aligned} \phi_{cmn}(t) &= \int_{r_i}^{r_e} \int_0^{2\pi} F(r, \theta, t) R_{mn}(r) \cos n\theta r dr d\theta \\ &= R R_{mn}(R) F_0 \cos(n\Omega t) \end{aligned} \quad (1-23)$$

$$\begin{aligned} \phi_{smn}(t) &= \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_e} F(r, \theta, t) R_{mn}(r) \sin n\theta r dr d\theta \\ &= R R_{mn}(R) F_0 \sin(n\Omega t) \end{aligned} \quad (1-24)$$

En tenant compte du travail de la force donné par (1-23) et (1-24) ainsi que de l'expression du déplacement donnée par (1-21) et en résolvant les équations du mouvement [WIL79], il vient :

$$\begin{aligned} w(r, \theta, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} R_{mn}(r) \left( \frac{F_0 \cos n\Omega t}{\omega_{mn}^2 - (n\Omega)^2} \cos n\theta + \frac{F_0 \sin n\Omega t}{\omega_{mn}^2 - (n\Omega)^2} \sin n\theta \right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} R_{mn}(r) \frac{F_0 \cos n(\theta - \Omega t)}{\omega_{mn}^2 - (n\Omega)^2} \end{aligned} \quad (1-25)$$

Dans ce cas tous les modes sont susceptibles de répondre pourvu que la relation suivante soit vérifiée:

$$\omega_{mn} = \pm n\Omega$$

Si la force d'excitation varie elle même de manière harmonique à la fréquence  $\omega_F$ , par conséquent si:

$$F(r, \theta, t) = F_0 \cdot \cos \omega_F t \cdot \delta(\theta - \Omega t) \delta(r - R) \quad (1-26)$$

le travail de la force s'écrit [MOH01] :

$$\phi_{cmn}(t) = \frac{R R_{mn}(R) F_0}{2} \left( \cos n \left( \Omega + \frac{\omega_F}{n} \right) t + \cos n \left( \Omega - \frac{\omega_F}{n} \right) t \right)$$

$$\phi_{smn}(t) = \frac{R R_{mn}(R) F_0}{2} \left( \sin n \left( \Omega + \frac{\omega_F}{n} \right) t + \sin n \left( \Omega - \frac{\omega_F}{n} \right) t \right)$$

et la réponse est gouvernée par :

$$w(r, \theta, t) = \frac{1}{2} F_0 \sum_m \sum_n R_{mn}(r) \left\{ \frac{\cos n \left[ \theta - \left( \Omega - \frac{\omega_F}{n} \right) t \right]}{\omega_{mn}^2 - (n\Omega - \omega_F)^2} + \frac{\cos n \left[ \theta - \left( \Omega + \frac{\omega_F}{n} \right) t \right]}{\omega_{mn}^2 - (n\Omega + \omega_F)^2} \right\} \quad (1-27)$$

Les conditions de résonance peuvent être déduites de (1-27), soit:

$$\omega_{mn} = \left| \pm n\Omega \pm \omega_F \right| \quad (1-28)$$

Ces conditions sont identifiées en traçant les lignes d'excitation sur le diagramme donnant les fréquences en fonction de l'ordre du mode (nombre de diamètres nodaux) figure 1.3 . Chaque coïncidence entre une fréquence naturelle de la structure et les lignes d'excitation indique une résonance possible.

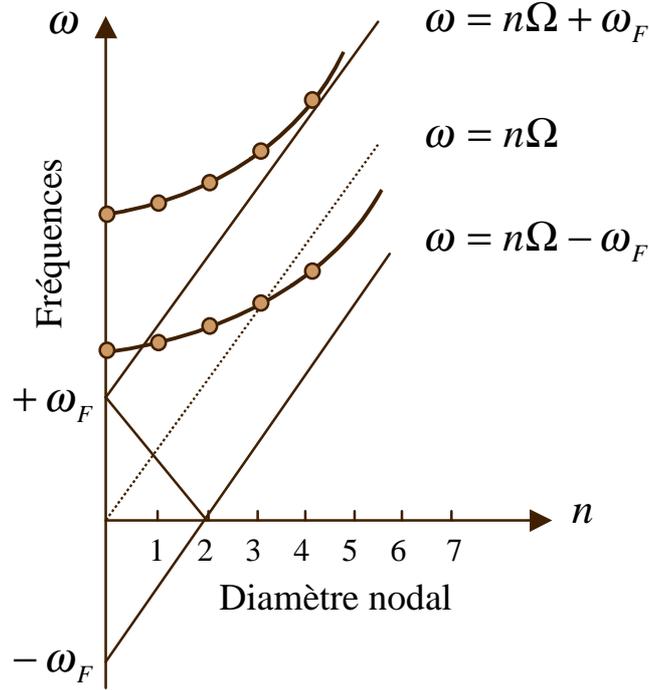


Figure 1.3 : diagramme d'interférence

### 2.2.2 ENSEMBLE DE FORCES PONCTUELLES DISTRIBUEES DE FAÇON UNIFORME

Dans le cas où la structure est excitée par plusieurs ( $s$ ) forces ponctuelles, distribuées sur la circonférence selon la relation  $f(\theta) = \cos(H\theta)$ , le chargement est donné par :

$$F(r, \theta, t) = F_0 \cos(H\theta) \delta(r - R) \sum_{l=1}^s \delta\left(\theta - \Omega t - l \frac{2\pi}{s}\right) \quad (1-29)$$

Et le travail des forces généralisées sur les termes en  $\cos(n\theta)$  et  $\sin(n\theta)$  devient [JAY84] :

$$\begin{aligned} \phi_{cnn}(t) &= \int_0^{2\pi r_0} \int_{\tilde{r}_i} F(r, \theta, t) \cos n\theta R_{mn}(r) r dr d\theta \\ &= \frac{R R_{mn}(R)}{2} s F_0 \left[ \delta_{H+n,s} \cos(H+n)\Omega t + \delta_{H-n,s} \cos(H-n)\Omega t \right] \end{aligned} \quad (1-30)$$

et

$$\begin{aligned}\phi_{smn}(t) &= \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_e} F(r, \theta, t) \sin n\theta R_{mn}(r) r dr d\theta \\ &= \frac{R R_{mn}(R)}{2} sF_0 [\delta_{H+n,s} \sin(H+n)\Omega t + \delta_{H-n,s} \sin(H-n)\Omega t]\end{aligned}\quad (1-31)$$

Dans ces expressions,  $\delta_{H\pm n,s} = 1$  pour  $H \pm n = \alpha s$  et  $\delta_{H\pm n,s} = 0$  pour  $H \pm n \neq \alpha s$ . La réponse du système est, dans ce cas, donnée par :

$$w(r, \theta, t) = \frac{sF_0}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} R_{mn}(r) \left\{ \frac{\delta_{H+n,s} \cdot \cos(n\theta - (H+n)\Omega t)}{\omega_{mn}^2 - ((H+n)\Omega)^2} + \frac{\delta_{H-n,s} \cdot \cos(n\theta + (H-n)\Omega t)}{\omega_{mn}^2 - ((H-n)\Omega)^2} \right\} \quad (1-32)$$

L'excitabilité des modes propres étant gouvernée par le facteur  $\delta_{H\pm n,s}$  les conditions de résonances s'écrivent :

$$\omega_{mn} = (H \pm n)\Omega = \alpha s \Omega \quad \text{avec} \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots \quad (1-33)$$

### 2.2.3 CHARGE DISTRIBUEE

La charge distribuée est exprimée selon l'équation  $F(\theta, t) = F_0 \cos H(\theta - \Omega t)$  (1-1) et le déplacement axial, d'un point de la surface moyenne de la structure est donné par la relation (1-21). Le calcul du travail associé conduit aux conditions de résonance suivantes :

$$\omega_{mn} = H\Omega \quad \text{avec} \quad n = H \quad (1-34)$$

Dans ce cas, une excitation d'ordre H n'est susceptible d'exciter que les modes à H diamètres nodaux.

### 3. MODELE DE REFERENCE

#### 3.1 INTRODUCTION

L'utilisation du cas particulier des plaques circulaires comme application de référence présente des avantages évidents puisque dans ce cas la structure reste simple, avec un comportement maîtrisé et suffisamment représentatif du comportement global des aubages. De plus, un modèle analytique peut être développé et le comportement dynamique constitué de modes à diamètres et cercles nodaux purs permet d'identifier facilement toute réponse aberrante.

Les plaques circulaires en vibration libre ont donné lieu à de nombreuses publications: [VOG65] [LEI77], [LEI78], [LEI81], [LEI87], [IRI80]. [RAM73] considèrent la cas des plaques orthotropes, [CEL80], [HUT84] s'intéressent au cas des plaques épaisses, alors que [HUA00] considèrent le comportement de plaques fissurées. [WEI89] présent des informations sur les fréquences naturelles pour les plaques circulaires et annulaires.

La première analyse en rotation a été réalisée par [LAM21] qui ont calculé les fréquences naturelles et les modes propres de vibration transversale d'un disque complet. Ces travaux ont été complétés par ceux de [EVE68], [EVE69], [RAO75], [NAY99]. [HAM99] considèrent quant à eux le comportement dans le plan. [CHE92], [CHE94], [CHE97] étudient le comportement dynamique d'un disque en rotation soumis à une charge stationnaire. [SHE91] traitent les problèmes des plaques circulaires soumises à des forces tournantes stationnaires

La réponse forcée des plaques circulaires à fait l'objet d'études centrées essentiellement sur le cas des excitations ponctuelles: [SRI80], [HON85], [HUT88], [WEI93]. [LEI92] propose une formulation approché. [GUL95], [GHO97], considèrent des plaques circulaires reposant sur des fondations élastiques. [MAN91] s'intéresse aux plaques épaisses.

[GUP99], [GUP00], analysent la réponse forcée de plaques circulaires non uniformes soumises à des excitations réparties uniformes.

L'étude développée ici vise à compléter les études existantes par le développement d'un modèle analytique adapté à l'analyse de la réponse des plaques circulaires soumises à une excitation quelconque, répartie sur toute la surface de la plaque. Ce modèle pourra être ainsi utilisé comme référence pour juger de la qualité de différents types de modélisations élément finis.

### 3.2 EQUATION DIFFERENTIELLE DU MOUVEMENT

Soit une plaque circulaire mince, homogène et isotrope d'épaisseur uniforme, encastrée à son contour intérieur et libre à son contour extérieur figure 1.4 . Les caractéristiques de cette plaque sont définies par :  $r_e$  rayon extérieur,  $r_i$  rayon intérieur,  $h$  épaisseur,  $\rho$  masse volumique,  $E$  module d'Young et  $\nu$  coefficient de poisson.

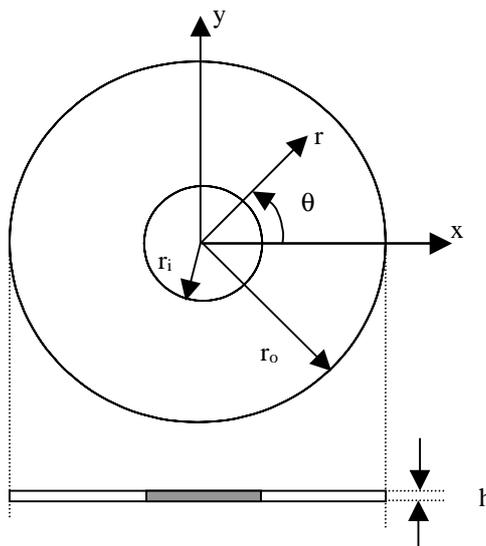


Figure 1.4

Le plan  $xy$  définit le plan moyen de la plaque et  $z$  représente la distance d'un point de la plaque au plan moyen. La plaque étant supposée mince, les effets secondaires sont négligés. Le déplacement d'un point du plan moyen suivant  $z$  est noté  $w$  et les expressions classiques des déformations s'écrivent [SZI74] :

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (1-35)$$

Les déformations sont reliées aux contraintes par :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = D\boldsymbol{\varepsilon} \quad (1-36)$$

L'expression générale de l'énergie de déformation est donnée par:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\tau} \boldsymbol{\varepsilon}' \boldsymbol{\sigma} d\tau \quad (1-37)$$

qui s'écrit, compte tenu de (1-35) et (1-36) sous la forme suivante:

$$U = \int_{\tau} \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} d\tau \quad (1-38)$$

L'épaisseur  $h$  de la plaque étant constante, (1-38) devient :

$$U = \frac{D}{2} \int_s \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (1-39)$$

avec  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  constante des coques en flexion (1-40)

L'énergie cinétique est donnée par:

$$T = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 d\tau \quad (1-41)$$

soit, pour une épaisseur constante:

$$T = \frac{\rho h}{2} \int_s \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy \quad (1-42)$$

Dans le cas où  $w$  est fonction de plusieurs variables et où la fonctionnelle a des dérivées d'ordre supérieur à un, on peut prolonger l'équation classique d'Euler-Lagrange par l'équation d'Euler-Ostrogradsky [MYS75] :

$$\sum_k (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial x_i^{q_i}} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial^k y_p}{\partial x_i^{q_i}} \right)} \right) = 0 \quad \forall \sum q_i = k \quad (1-43)$$

Avec  $L = T - U$  Lagrangien du système et  $y_p$  degré de liberté.

Dans notre cas :  $y_p = w$  et

$$L = \frac{1}{2} \int_s \left[ \rho h \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 - D \left( \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (1-44)$$

L'équation d'Euler-Ostrogradsky s'écrit donc sous la forme:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial L}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right)} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)} \right) \\ & + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \right)} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t \partial y} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial y} \right)} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1-45)$$

compte tenu de la relation (1-44), (1-45) donne l'équation différentielle du mouvement libre de la plaque en coordonnées cartésienne :

$$D \left[ \frac{d^4 w(x, y, t)}{dx^4} + \frac{d^4 w(x, y, t)}{dy^4} + 2 \frac{d^4 w(x, y, t)}{dx^2 dy^2} \right] + \rho h \frac{d^2 w(x, y, t)}{dt^2} = 0 \quad (1-46)$$

expression qui peut s'écrire sous la forme :

$$D \nabla^4 w(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1-47)$$

où  $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2$  opérateur biharmonique.

Cette équation différentielle peut être également exprimée en coordonnées polaires selon:

$$D \nabla_r^2 \nabla_r^2 w(r, \theta, t) + \rho h \frac{\partial^2 w(r, \theta, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1-48)$$

Avec :

$$\nabla_r^2 = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \quad (1-49)$$

### 3.3 VIBRATIONS LIBRES

La solution générale de l'équation (1-48) peut être développée selon une série de fonctions connues. Les variations radiales peuvent être approximées par une série de fonction de Bessel alors que les variations circonférentielles peuvent être approximées par une série de Fourier (fonctions cosinus et sinus) [VOG65] :

$$w(r, \theta, t) = R_n(r) (\cos(n\theta) + \sin(n\theta)) \sin(\omega t) \quad (1-50)$$

$$R_n(r) = \eta_{1,n} J_n(\alpha r) + \eta_{2,n} Y_n(\alpha r) + \eta_{3,n} I_n(\alpha r) + \eta_{4,n} K_n(\alpha r)$$

$$\alpha^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D} \quad (1-51)$$

où

- $\omega$  pulsation en rad/sec.
- $J_n$  fonction de Bessel de 1<sup>ère</sup> espèce
- $Y_n$  fonction de Bessel de 2<sup>ème</sup> espèce
- $I_n$  fonction de Bessel modifiée de 1<sup>ère</sup> espèce
- $K_n$  fonction de Bessel modifiée de 2<sup>ème</sup> espèce
- $\eta_{1,n}$ ,  $\eta_{2,n}$ ,  $\eta_{3,n}$  et  $\eta_{4,n}$  constantes

Le contour intérieur ( $r = r_i$ ) est encastré, ce qui induit un déplacement et une pente nuls [SZI63]. Soit:

$$w(r, \theta, t) \Big|_{r=r_i} = 0 \quad (1-52)$$

$$\frac{\partial w(r, \theta, t)}{\partial r} \Big|_{r=r_i} = 0 \quad (1-53)$$

Le contour extérieur ( $r = r_e$ ) est libre. Cette condition limite se traduit par un moment et une force transverse définis par les conditions de Kirchoff nulles. Exprimée en fonction de la flèche  $w$  il vient :

$$\left( \frac{\partial^2 w(r, \theta, t)}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w(r, \theta, t)}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w(r, \theta, t)}{\partial r} \right) \right) \Big|_{r=r_e} = 0 \quad (1-54)$$

$$\left( \frac{\partial \nabla_r^2 w(r, \theta, t)}{\partial r} + \frac{1-\nu}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w(r, \theta, t)}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w(r, \theta, t)}{\partial \theta} \right) \right) \Big|_{r=r_e} = 0 \quad (1-55)$$

L'ensemble des conditions aux limites peut s'écrire sous forme matricielle pour chaque ordre  $n$ , soit :

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{1,n} \\ \eta_{2,n} \\ \eta_{3,n} \\ \eta_{4,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1-56)$$

ou:

$$[M]_n \cdot \{\eta\}_n = 0 \quad (1-57)$$

Les coefficients  $M_{ij}$  sont obtenus par substitution des équations (1-52) à (1-55) dans (1-50) et la matrice  $[M]_n$  est développée en annexe B.

La solution triviale, où les constantes  $\eta_{1,n}$ ,  $\eta_{2,n}$ ,  $\eta_{3,n}$  et  $\eta_{4,n}$  sont nulles, n'a pas intérêt pratique puisqu'elle donne une flèche  $w$  nulle à tout instant  $t$ . Il faut donc rechercher les valeurs de  $\alpha_n$  pour lesquelles le déterminant de la matrice des conditions aux limites  $[M]_n$  s'annule :

$$\det([M]_n) = 0 \quad (1-58)$$

Les valeurs propres de la matrice  $[M]_n$ , notées  $\alpha_{mn}$ , sont recherchées à l'aide de la méthode de Newton [DEM81]. Elles sont reliées à la pulsation propre  $\omega_{mn}$  de la plaque par la relation (1-51) réécrite sous la forme:

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{D\alpha_{mn}^4}{\rho h}} \quad (1-59)$$

Avec :

$n$  : Nombre de diamètres nodaux.

$m$  : Nombre de cercles nodaux.

### **APPLICATION :**

Soit une plaque de caractéristiques suivantes: rayon intérieur  $r_i=0.1$  m, rayon extérieur  $r_e=0.2$  m, épaisseur  $h=0.003$  m, module d'Young  $E=1.1e11$  N/m<sup>2</sup>, masse volumique  $\rho = 4430$  kg/m<sup>3</sup>, coefficient de poisson  $\nu=0.35$ .

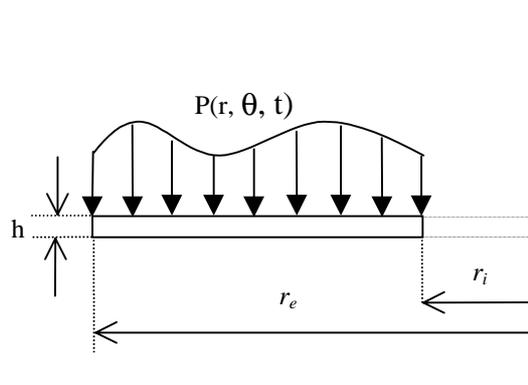
Les fréquences naturelles et les modes propres associés sont obtenus à partir des équations (1-58) et (1-59). Les fréquences calculées sont reportées dans le tableau 1.1.1 ( $n$  diamètre nodal,  $m$  cercle nodal).

m	n=0	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8
0	240.52	244.25	266.89	333.25	458.03	639.93	873.22	1153.30	1477.20
1	1562.70	1592.50	1682.30	1833.40	2047.40	2325.90	2669.90	3080.00	3555.20
2	4470.70	4502.10	4596.90	4756.10	4981.40	5274.60	5637.20	6070.60	6576.10

**TABLEAU 1.1** : Fréquences naturelles [Hz] et modes propres associés

### 3.4 RÉPONSE HARMONIQUE

La forme générale de la pression transverse appliquée sur la structure est notée  $p(r, \theta, t)$ , expression utilisée pour représenter toute charge paramétrée en fonction de la position et du temps. Figure 1.5 .



**Figure 1.5** : Distribution de la charge transverse

L'équation différentielle, qui gouverne la réponse forcée, est homogène à celle reportée équation (1-48):

$$D\nabla_r^2\nabla_r^2 w(r, \theta, t) + \rho h \frac{\partial^2 w(r, \theta, t)}{\partial t^2} + \gamma h \frac{\partial w(r, \theta, t)}{\partial t} = p(r, \theta, t) \quad (1-60)$$

où  $\gamma$  représente l'amortissement par unité de volume.

En utilisant une série de Bessel-Fourier (annexe C), on peut écrire la solution de l'équation (1-60) sous la forme suivante [WEI93] :

$$w(r, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} R_{mn}(r) [A_{mn}(t) \cdot \cos(n\theta) + B_{mn}(t) \cdot \sin(n\theta)] \quad (1-61)$$

avec :

$$R_{mn}(r) = \eta_{1,mn} J_n(\alpha_{mn} r) + \eta_{2,mn} Y_n(\alpha_{mn} r) + \eta_{3,mn} I_n(\alpha_{mn} r) + \eta_{4,mn} K_n(\alpha_{mn} r)$$

$\eta_{1,mn}, \eta_{2,mn}, \eta_{3,mn}$  et  $\eta_{4,mn}$  : constantes données par l'équation (1-56).

$A_{mn}(t)$  et  $B_{mn}(t)$  : coefficients fonction du temps, des paramètres physiques de la plaque, des conditions aux limites et de la charge.

En reportant l'équation (1-61) dans (1-60) il vient:

$$\begin{aligned} \rho h R_{mn}(r) \left( \ddot{A}_{mn}(t) + \frac{\gamma}{\rho} \dot{A}_{mn}(t) + \frac{D\alpha_{mn}^4}{\rho h} A_{mn}(t) \right) \cos(n\theta) + \\ \rho h R_{mn}(r) \left( \ddot{B}_{mn}(t) + \frac{\gamma}{\rho} \dot{B}_{mn}(t) + \frac{D\alpha_{mn}^4}{\rho h} B_{mn}(t) \right) \sin(n\theta) = p(r, \theta, t) \end{aligned} \quad (1-62)$$

L'équation (1-62) est multipliée par :  $\int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_e} R_{mn}(r) \cos(n\theta) r dr d\theta$  . Considérant que [PIS74] :

$$\int_0^{2\pi} \cos(n\theta) \cdot \cos(n\theta) d\theta = \frac{2\pi}{1 + \operatorname{sgn}(n)} \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) \cdot \sin(n\theta) d\theta = 0 \quad \forall n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

elle peut s'écrire sous la forme:

$$\ddot{A}_{mn}(t) + \frac{\gamma}{\rho} \dot{A}_{mn}(t) + \frac{D\alpha_{mn}^4}{\rho h} A_{mn}(t) = \frac{1 + \operatorname{sgn}(n)}{2\pi \rho h Q_{mn}} \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_e} p(r, \theta, t) R_{mn}(r) \cos(n\theta) r dr d\theta \quad (1-63)$$

$$Q_{mn} = \int_{r_i}^{r_e} R_{mn}^2(r) r dr \quad \text{et} \quad \operatorname{sgn}(n) = 0 \text{ pour } n = 0 \text{ et } 1 \text{ pour } n = 1, 2, 3, \dots$$

De même, l'équation (1-62) multipliée par :

$$\int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_e} R_{mn}(r) \sin(n\theta) r dr d\theta \quad \text{avec} \quad \int_0^{2\pi} \sin(n\theta) \cdot \sin(n\theta) d\theta = \frac{2\pi}{1 + \operatorname{sgn}(n)} \quad \forall n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

s'écrit sous la forme :

$$\ddot{B}_{mn}(t) + \frac{\gamma}{\rho} \dot{B}_{mn}(t) + \frac{D\alpha_{mn}^4}{\rho h} B_{mn}(t) = \frac{1 + \operatorname{sgn}(n)}{2\pi\rho h Q_{mn}} \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_e} p(r, \theta, t) R_{mn}(r) \sin(n\theta) r dr d\theta \quad (1-64)$$

L'intégration des équations (1-63) et (1-64), développée en annexe D, conduit à:

$$A_{mn}(t) = A_{mn}^*(t) = \frac{1 + \operatorname{sgn}(n)}{2\pi\rho h Q_{mn}} G_c \quad (1-65)$$

$$B_{mn}(t) = B_{mn}^*(t) = \frac{1 + \operatorname{sgn}(n)}{2\pi\rho h Q_{mn}} G_s \quad (1-66)$$

avec

$$G_c = \int_0^t \left\{ \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_e} R_{mn}(r) \cos(n\theta) p(r, \theta, \tau) r dr d\theta \right\} \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2} \omega_{mn}} e^{-\xi \omega_{mn}(t-\tau)} \sin(\sqrt{1 - \xi^2} \omega_{mn}(t - \tau)) d\tau$$

$$G_s = \int_0^t \left\{ \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_e} R_{mn}(r) \sin(n\theta) p(r, \theta, \tau) r dr d\theta \right\} \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2} \omega_{mn}} e^{-\xi \omega_{mn}(t-\tau)} \sin(\sqrt{1 - \xi^2} \omega_{mn}(t - \tau)) d\tau$$

Le facteur d'amortissement  $\xi$  est relié à l'amortissement par unité de volume  $\gamma$  par la relation:

$$\xi = \frac{\gamma}{2\rho\omega_{mn}} \quad (1-67)$$

Lorsque les variations spatiales et temporelles peuvent être découplées, donc quand:

$$p(r, \theta, t) = P_0 f(r, \theta) e^{i\omega t}. \quad (1-68)$$

$$P_0 \text{ en } \left(\frac{N}{m^2}\right).$$

les équations (1-65) et (1-66) deviennent après intégration temporelle:

$$\text{Amp}(A_{mn}(t)) = \frac{1 + \text{sgn}(n)}{2\pi\rho h Q_{mn} \omega_{mn}^2} \frac{P_0}{((1 - x_{mn}^2) + 2i\xi x_{mn})} \int_0^{2\pi r_e} \int_{r_i} R_{mn}(r) \cos(n\theta) f(r, \theta) r dr d\theta \quad (1-69)$$

$$\text{Amp}(B_{mn}(t)) = \frac{1 + \text{sgn}(n)}{2\pi\rho h Q_{mn} \omega_{mn}^2} \frac{P_0}{((1 - x_{mn}^2) + 2i\xi x_{mn})} \int_0^{2\pi r_e} \int_{r_i} R_{mn}(r) \sin(n\theta) f(r, \theta) r dr d\theta \quad (1-70)$$

avec:

$$x_{mn} = \frac{\omega}{\omega_{mn}}.$$

En tenant compte des équations (1-69), (1-70) et en considérant que  $w(r, \theta, t) = W(r, \theta) f(t)$ , l'équation (1-61) s'écrit sous la forme suivante :

$$W(r, \theta) = \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1 + \text{sgn}(n)}{2\pi\rho h Q_{mn} \omega_{mn}^2} P_0 R_{mn}(r) \left[ \frac{1}{(1 - x_{mn}^2) + 2i\xi x_{mn}} \right] (I_{r\theta}^c \cos(n\theta) + I_{r\theta}^s \sin(n\theta)) \quad (1-71)$$

où :

$$I_{r\theta}^c = \int_0^{2\pi r_e} \int_{r_i} R_{mn}(r) \cos(n\theta) f(r, \theta) r dr d\theta$$

$$I_{r\theta}^s = \int_0^{2\pi r_e} \int_{r_i} R_{mn}(r) \sin(n\theta) f(r, \theta) r dr d\theta$$

La résolution de cette équation donne la réponse harmonique, en amplitude, d'une plaque circulaire excitée à la pulsation  $\omega$  par une charge d'excitation de la forme  $p(r, \theta, t) = P_0 f(r, \theta) e^{i\omega t}$  et ceci en tout point  $(r, \theta)$ . Il est intéressant de noter que la formulation adoptée permet également de traiter le cas d'une excitation ponctuelle ou répartie linéiquement sur une circonférence.

### 3.4.1 EXCITATION PONCTUELLE

L'excitation ponctuelle est traduite par une pression appliquée sur une petite surface élémentaire  $S$ , équivalente à  $F_0/S$ . La forme de la fonction  $p(r, \theta)$  peut, dans ce cas être représentée par la relation suivante :

$$p(r, \theta) = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{F_0}{\iint_S r_f dr d\theta} = \lim_{\substack{\Delta r \rightarrow 0 \\ \Delta \theta \rightarrow 0}} \frac{F_0}{\int_{r_f}^{r_f + \Delta r} r dr \int_{\theta_f}^{\theta_f + \Delta \theta} d\theta} \quad (1-72)$$

avec :

$F_0$  : Force en  $N$ .

$S$  : Surface élémentaire en  $m^2$ .

$r_f, \theta_f$  : Coordonnées du point d'application de la force.

La fonction (1-72) est équivalente de la fonction de Dirac quand  $S$  tend vers zéro (annexe E), soit :

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{\iint_S r dr d\theta} = Dirac(r_f, \theta_f)$$

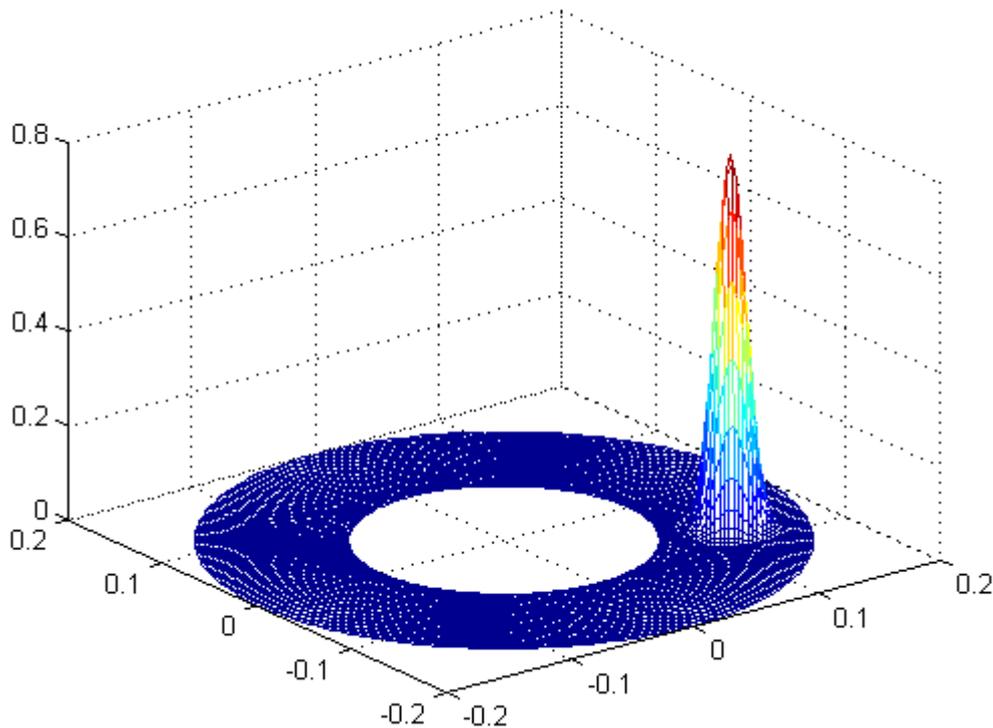
En pratique, on obtient une convergence suffisante de la solution à partir de  $\Delta r = 2 \cdot 10^{-4} m$  et  $\Delta \theta = 6.25 \cdot 10^{-2}$  degré

La relation (1-72) se développe également en utilisant la fonction de Gauss, qui ramène la charge distribuée sur la structure à une charge appliquée sur une surface élémentaire autour du point d'excitation  $(r_f, \theta_f)$ : équation (1-73) et figure 1.6 .

$$f(r, \theta) = \frac{1}{2\pi\sigma_r\sigma_\theta} e^{-\left(\frac{r-r_f}{\sqrt{2}\sigma_r}\right)^2 - \left(\frac{\theta-\theta_f}{\sqrt{2}\sigma_\theta}\right)^2} \quad (1-73)$$

La surface sur laquelle est appliquée la charge est paramétrée par  $\sigma_r$  et  $\sigma_\theta$ , écarts quadratiques moyens principaux : plus ces valeurs sont petites et plus la charge est concentrée. Ceci est traduit par l'égalité suivante :

$$\lim_{\substack{\sigma_r \rightarrow 0 \\ \sigma_\theta \rightarrow 0}} (gauss(r_f, \theta_f)) = Dirac(r_f, \theta_f)$$



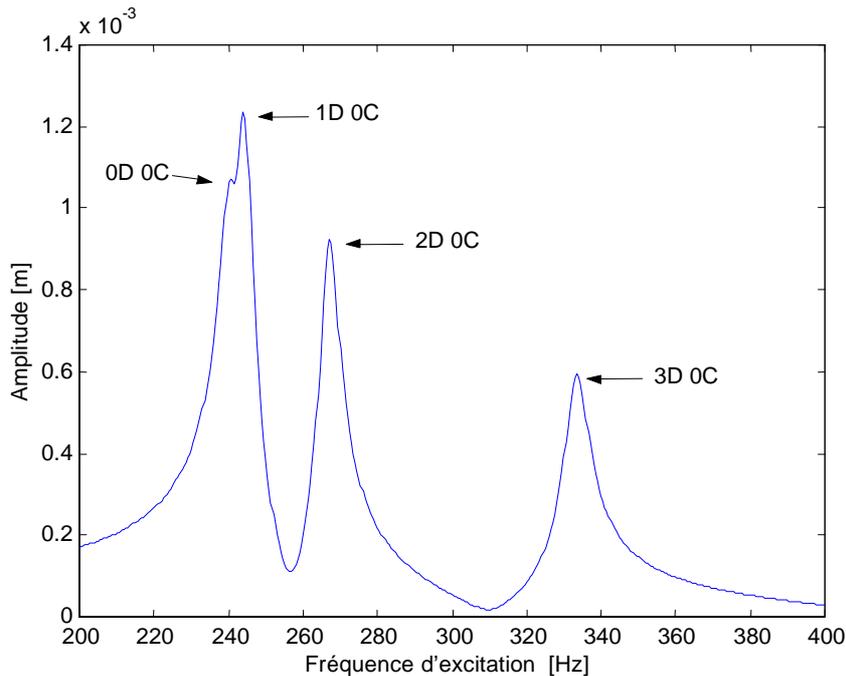
**Figure 1.6 :** Charge concentrée

### **APPLICATION :**

Cet exemple présente une application numérique de l'équation (1-71) dans le cas d'une excitation ponctuelle. La structure est identique à celle considérée précédemment: plaque circulaire, figure 1.4 . L'amortissement est introduit sous forme modale avec un facteur

d'amortissement  $\xi = 0.01$  identique pour chaque mode. La force appliquée  $F_0 = 10\text{ N}$  est située au point  $r = r_e$ ,  $\theta = 0^\circ$ .

La réponse obtenue au point d'excitation est présentée figure 1.7, pour la gamme de fréquence entre 200 et 400 Hz, où sont situées les quatre premières fréquences propres de la plaque associées aux modes 0D0C, 1D0C, 2D0C et 3D0C (*D* diamètre nodal et *C* cercle nodal). S'agissant d'une excitation ponctuelle, l'ensemble des fréquences naturelles répondent.



**Figure 1.7 :** Réponse à une excitation ponctuelle

### 3.4.2 EXCITATION SUR UNE LIGNE DE CIRCONFERENCE

Pour une charge appliquée sur une ligne circonférentielle, la répartition de la charge s'écrit  $p(r, \theta) = P_0 f(r, \theta)$ , avec  $P_0$  amplitude de la charge ( $N/m$ ) et:

$$f(r, \theta) = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{2\pi r_f f(\theta)}{\int_{r_f} \int_0^{2\pi} r dr d\theta} \quad (1-74)$$

$f(\theta)$  représente la répartition circonférentielle de la charge d'excitation de 0 à  $2\pi$

**APPLICATION :**

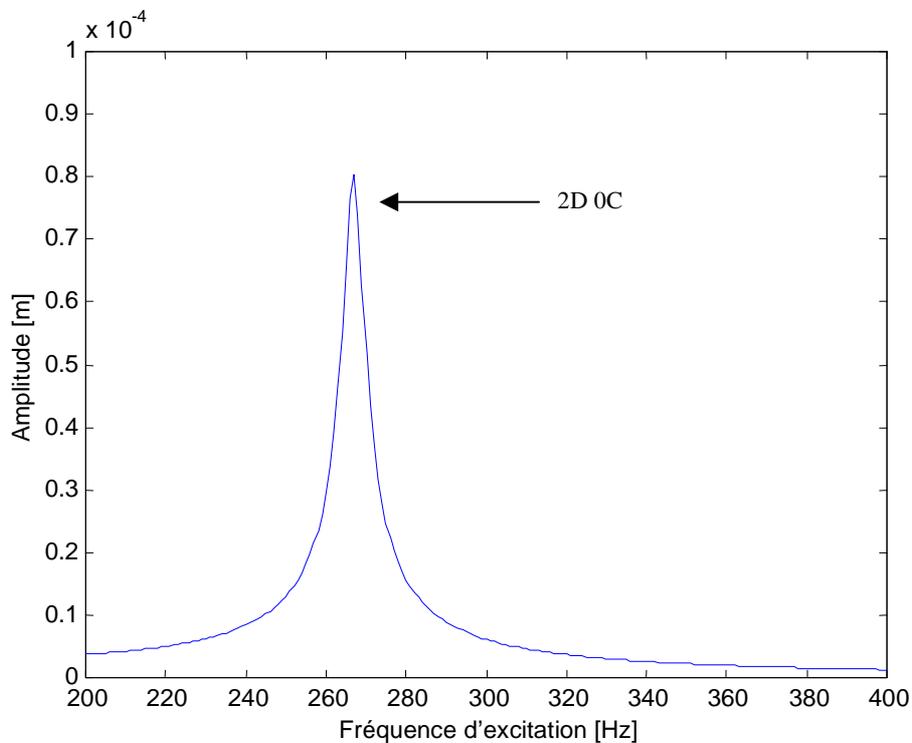
La réponse de la plaque définie précédemment est considérée ici pour le cas d'une excitation par chargement réparti sur une bande circonférentielle. Les caractéristiques du chargement sont :

$$p(r, \theta) = P_0 f(r, \theta) \text{ avec } P_0 = 100 \text{ N/m}^2 \text{ et } f(r, \theta) = \cos(2\theta)$$

Le domaine d'action de cette charge est donné par:

$$r \in \left[ \frac{5}{6}(r_e - r_i) \quad r_e \right] \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

La réponse obtenue au point au point  $r = r_e$ ,  $\theta = 0^\circ$  est présentée figure 1.8 pour la gamme de fréquence entre 200 et 400 Hz. S'agissant d'une excitation de type  $2\theta$ , on vérifie bien que seul le mode à deux diamètres nodaux répond.



**Figure 1.8 :** Réponse à une excitation répartie

## 4. CONCLUSION

Pour les structures axisymétriques, une excitation circonférentielle réparties de type  $\cos(H\theta)$  n'est en mesure d'exciter que les modes à  $H$  diamètres nodaux. En revanche, lorsque l'on considère un ensemble aubé constitué de  $N$  aubes et que ces aubes peuvent être supposées comme ponctuelles, la réponse de la structure est plus riche puisque l'excitation de type  $\cos(H\theta)$  est susceptible d'exciter les modes à  $H$  diamètres nodaux, mais également ceux à  $n = \alpha N \pm H$  diamètres ( $\alpha=1, 2\dots$ ). Ces mécanismes de réponse sont connus. En revanche, ils correspondent à des cas limites qui n'ont que très peu de similitudes avec des aubages réels.

Pour être en mesure de mieux maîtriser les prévisions de type réponse forcée des aubages deux phases d'études sont nécessaires.

Dans la première phase, il s'agit d'acquérir la maîtrise de la prise en compte d'excitations réparties dans les modélisations de type éléments finis. En effet, le processus de transformation des champs de pression en forces nodales équivalentes est susceptible de perturber la répartition spatiale de l'excitation et la prise en compte de ces champs d'excitation répartie reste lourde. Ces points seront examinés dans le chapitre suivant à partir du modèle analytique adapté au cas des plaques circulaires développé dans la seconde partie de ce chapitre.

Pour la seconde phase, objet du chapitre 3, il s'agira de considérer des systèmes de référence plus proches des ensembles aubés que ceux généralement utilisés, afin de mieux comprendre les domaines de validité des mécanismes de réponse connus.

## **CHAPITRE 2**

# **PRISE EN COMPTE DES EXCITATIONS REPARTIES** **DANS LES MODELES ELEMENTS FINIS –** **TECHNIQUES ADAPTEES – VALIDATION**

## 1 INTRODUCTION

La prise en compte d'une excitation répartie pour la modélisation de la réponse forcée des structures cycliques, à partir d'une discrétisation de type éléments finis, pose deux problèmes. En premier lieu, les pressions physiques doivent être transformées en forces nodales équivalentes. Ces forces dépendent des fonctions de forme intrinsèques à chaque élément fini et leur répartition spatiale n'est pas nécessairement identique à la répartition de la pression dont elles sont issues. Etant donnée la forte dépendance du comportement dynamique des structures considérées par rapport à la répartition de l'excitation, ce processus de transformation peut avoir des conséquences importantes qu'il s'agit d'examiner. En second lieu, il s'agit également d'étudier l'effet de différents types de prise en compte des champs de pression. Une prise en compte précise est difficile à mettre en oeuvre et n'est pas toujours possible lorsque l'on utilise des codes de calcul commerciaux.

Pour examiner ces problèmes il est indispensable de se placer dans un contexte où le comportement dynamique de la structure étudiée est parfaitement connu. C'est la cas de l'application considérée qui porte sur une plaque circulaire encastree-libre. Cette structure reste simple et se caractérise par un comportement dynamique suffisamment représentatif de celui des aubages. De plus elle possède deux avantages évidents :

1. Le modèle analytique développé précédemment peut servir de référence.
2. Les modes sont constituées par des diamètres et des cercles nodaux purs et le comportement en réponse est connu. Les réponses parasites peuvent donc être facilement identifiées.

## 2 DESCRIPTION DES MODELES

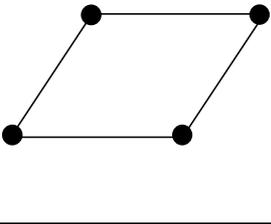
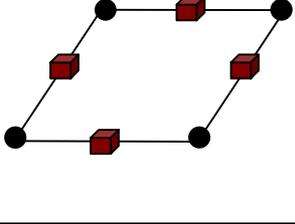
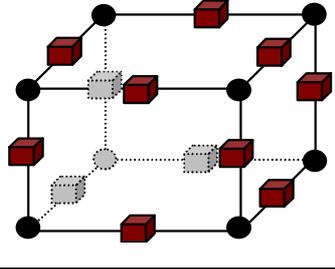
L'étude porte sur une plaque circulaire mince, homogène, isotrope, d'épaisseur uniforme, encastree sur le contour intérieur et libre sur le contour extérieur (figure 1.4). Les caractéristiques de la plaque sont : rayon intérieur  $r_i = 0.1$  m, rayon extérieur  $r_e = 0.2$  m,

épaisseur  $h = 0.003$  m, module d'Young  $E = 1.1e11$  N/m<sup>2</sup>, densité  $\rho = 4430$  kg/m<sup>3</sup>, coefficient de poisson  $\nu = 0.35$  et facteur d'amortissement  $\xi = 0.01$ .

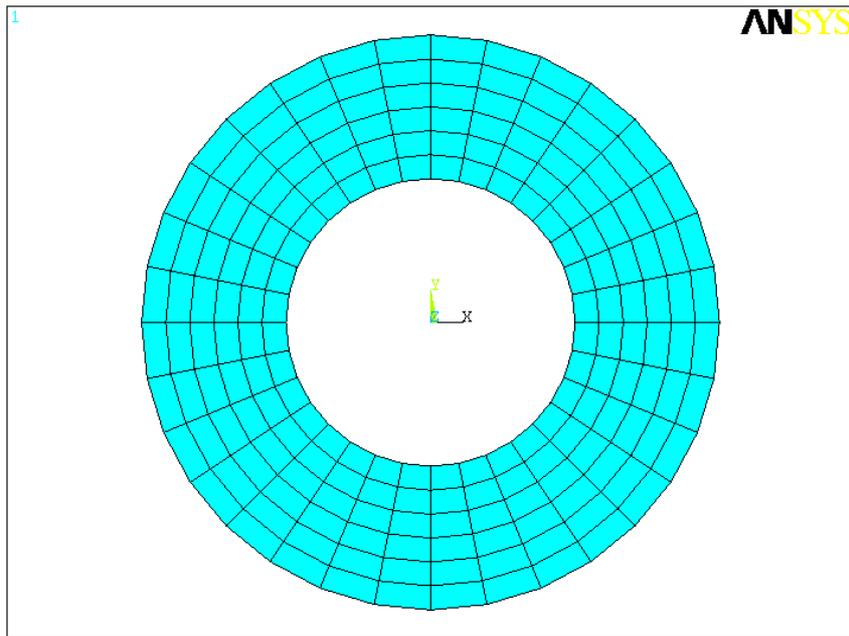
Les résultats donnés par le modèle analytique développé dans le chapitre précédent sont considérés comme référence pour juger de la qualité des résultats obtenus à partir de différentes analyses éléments finis. Trois types d'éléments sont considérés: deux éléments de coque avec respectivement 4 nœuds (*Q4*, ANSYS *shell63*) et 8 nœuds (*Q8*, ANSYS *shell93*) et un élément volumique isoparamétrique à 20 nœuds (*H20*, ANSYS *solid95*). Ces éléments sont présentés dans le tableau 2.1 [ANS01].

Pour chaque type d'élément, deux maillages différents sont construits. La dimension de l'élément de base est  $r_b = (r_e - r_i)/6$ ,  $\theta_b = 2\pi/32$  pour le premier maillage (figure 2.1) et  $r_b = (r_e - r_i)/6$ ,  $\theta_b = 2\pi/64$  pour le deuxième, (figure 2.2). Les fréquences calculées à partir du code de calcul des structures ANSYS, en utilisant les différentes configurations, sont reportées dans le tableau 2.2, pour trois modes représentatifs caractérisés par 2, 8 et 24 diamètres nodaux.

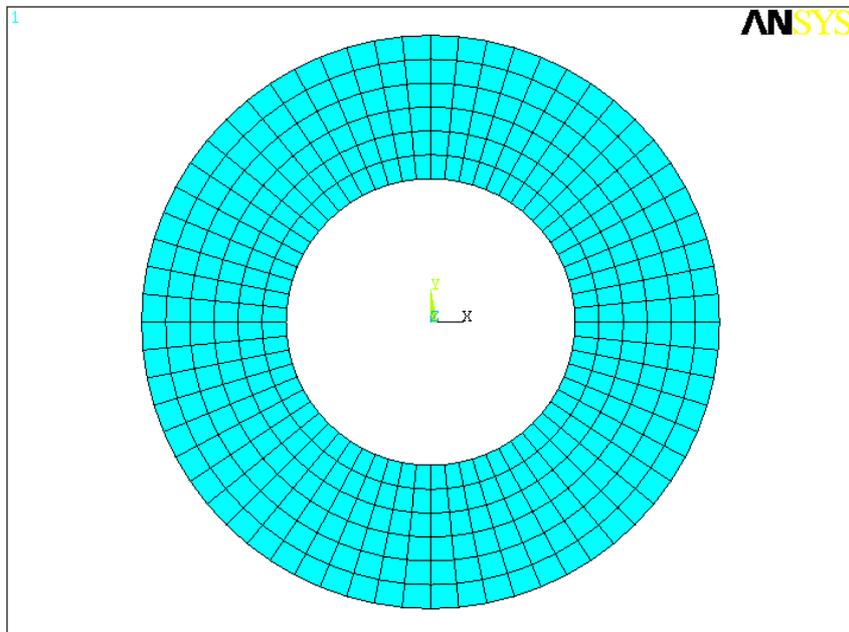
La comparaison des fréquences calculées avec les résultats obtenus analytiquement converge d'une façon classique en ce qui concerne le type et la dimension des éléments finis. Les éléments Q4 et H20 présentent une convergence d'allure décroissante, alors que l'élément Q8 présente une convergence d'allure croissante.

	Q4 (shell 63)	Q8 (shell 93)	H20 (solid 95)
Géométrie			
Nb de nœuds	4	8	20
Nb de ddl par nœud	Translations (X, Y, Z), Rotations (X, Y, Z)	Translations (X, Y, Z) Rotations (X, Y, Z)	Translations (X, Y, Z)

**TABLEAU 2.1** : Géométrie et caractéristiques principales des éléments utilisés (références ANSYS)



**Figure 2.1 : Maillage 1**



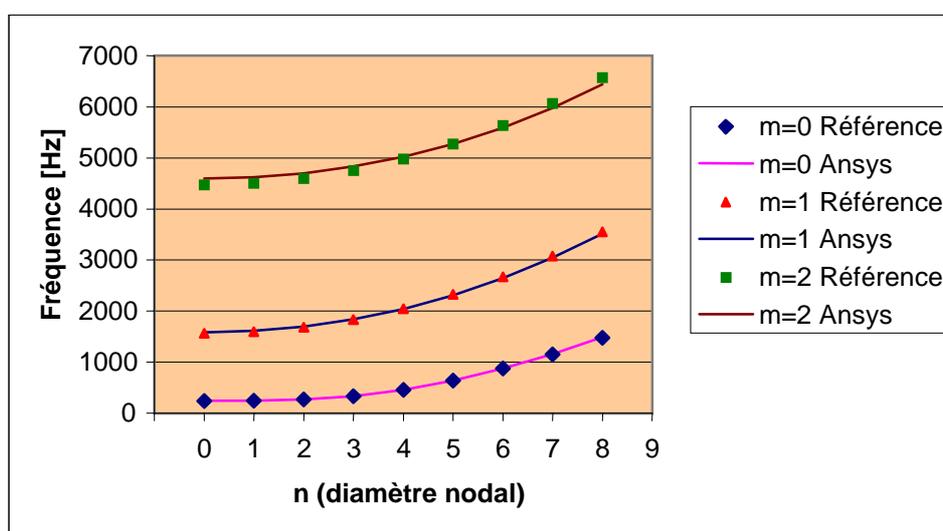
**Figure 2.2: Maillage 2**

Maillage	Élément	2D			8D			24D		
		Fréquences		$\Delta \%$	Fréquences		$\Delta \%$	Fréquences		$\Delta \%$
		Ansys	Ref.		Ansys	Ref.		Ansys	Ref.	
1	Q4	268.7	266.89	<b>0.68</b>	1531.4	1477.2	<b>3.67</b>	---	11974	---
	Q8	265.4	266.89	<b>-0.55</b>	1458.5	1477.2	<b>-1.26</b>	---	11974	---
	H20	275.5	266.89	<b>3.23</b>	1662.2	1477.2	<b>12.52</b>	---	11974	---
2	Q4	267.6	266.89	<b>0.28</b>	1493.3	1477.2	<b>1.08</b>	12529.5	11974	<b>4.64</b>
	Q8	265.5	266.89	<b>-0.53</b>	1457.1	1477.2	<b>-1.36</b>	11540.7	11974	<b>-3.62</b>
	H20	275.3	266.89	<b>3.16</b>	1503.6	1477.2	<b>1.78</b>	14666.6	11974	<b>22.48</b>

**TABLEAU 2.2** : Comparaison des fréquences [Hz] obtenues pour les modes 2D0C, 8D0C et 24D0C. Modélisations analytique de référence et élément fini (D diamètres)

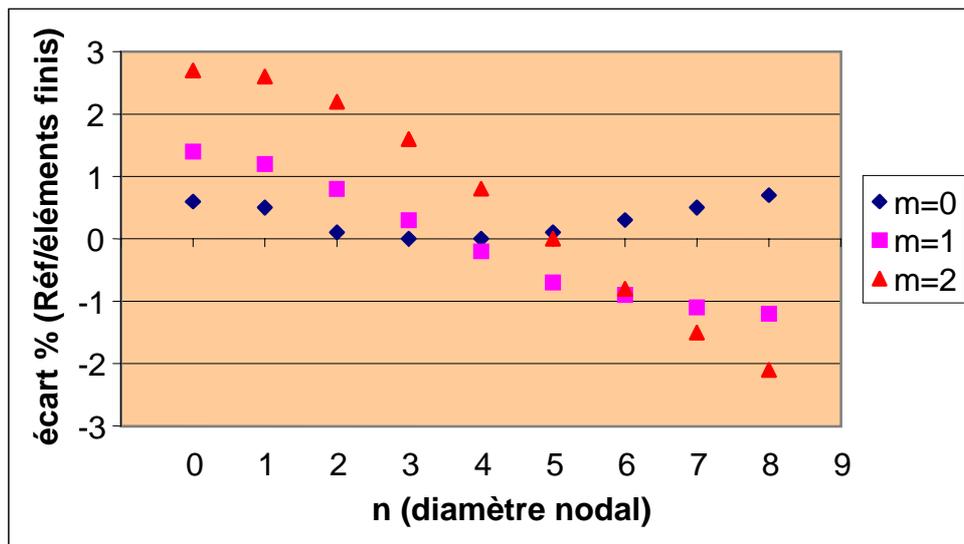
L'élément H20 est pénalisé par le fait que les calculs ont été effectués sans utilisation de la technique d'intégration réduite qui permet d'éviter le phénomène de verrouillage au cisaillement lorsque les éléments sont peu épais.

Une modélisation basée sur un maillage plus fin améliore la convergence, comme le montrent les résultats présentés figure 2.3 et 2.4, obtenus à partir d'un maillage de type Q4, avec une dimension élémentaire de  $r_b = (r_e - r_i) / 6$ ,  $\theta_b = 2\pi / 120$  et ceci pour les modes des familles à 0, 1 et 2 cercles nodaux jusqu'à 8 diamètres



**Figure 2.3.** Comparaison des fréquences analytiques de référence et élément fini (Q4 - Shell 63 - maillage fin). Familles 0C, 1C et 2C jusqu'à 8D.

M		0D	1D	2D	3D	4D	5D	6D	7D	8D
0	Réf	240.52	244.25	266.89	333.25	458.03	639.93	873.22	1153.30	1477.20
	Ansys	241.93	245.41	267.14	333.11	457.86	640.64	875.83	1159.00	1487.20
$\Delta$ %		<b>0.6</b>	<b>0.5</b>	<b>0.1</b>	<b>0.0</b>	<b>0.0</b>	<b>0.1</b>	<b>0.3</b>	<b>0.5</b>	<b>0.7</b>
1	Réf	1562.70	1592.50	1682.30	1833.40	2047.40	2325.90	2669.90	3080.00	3555.20
	Ansys	1585.00	1612.60	1696.50	1838.70	2042.40	2310.30	2644.50	3046.00	3514.30
$\Delta$ %		<b>1.4</b>	<b>1.2</b>	<b>0.8</b>	<b>0.3</b>	<b>-0.2</b>	<b>-0.7</b>	<b>-0.9</b>	<b>-1.1</b>	<b>-1.2</b>
2	Réf	4470.70	4502.10	4596.90	4756.10	4981.40	5274.60	5637.20	6070.60	6576.10
	Ansys	4595.50	4621.20	4699.00	4831.40	5021.9	5274.30	5592.90	5981.40	6443.10
$\Delta$ %		<b>2.7</b>	<b>2.6</b>	<b>2.2</b>	<b>1.6</b>	<b>0.8</b>	<b>0</b>	<b>-0.8</b>	<b>-1.5</b>	<b>-2.1</b>



**Figure 2.4** : Ecart en fréquence associés à la figure 2.3  
(solution numérique / référence analytique)

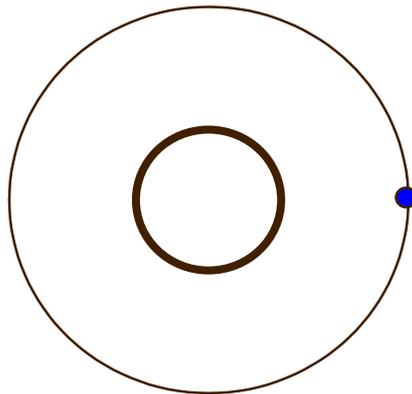
Cependant la convergence donnée par les maillages présentés figures 2.1 et 2.2 est jugée suffisante pour l'étude envisagée, dans la mesure où seules les erreurs relatives seront examinées.

### 3 REPONSE FORCEE - VALIDATION ET ETUDE PARAMETRIQUE

Pour l'étude de la réponse forcée, l'excitation est tout d'abord supposée ponctuelle, puis distribuée le long d'une bande circonférentielle. L'amortissement est introduit sous forme modale avec un facteur d'amortissement  $\xi = 0.01$  identique pour chaque mode.

#### 3.1 REPONSE A UNE EXCITATION PONCTUELLE

Une force ponctuelle harmonique  $F = F_0 e^{j\omega t}$ , avec  $F_0 = 10\text{ N}$  pour les modes en dessous de 2000 Hz et  $F_0 = 100\text{ N}$  pour les modes au-delà, est appliquée au point  $r = r_e$ ,  $\theta = 0^\circ$  (figure 2.5). La réponse obtenue au même point en utilisant les éléments Q8, Q4 et H20, est respectivement présentée sur les figures de 2.6 à 2.8. La gamme de fréquence est comprise entre 200 et 400 Hz, où sont situées les quatre premières fréquences propres de la plaque associées aux modes 0D0C, 1D0C, 2D0C et 3D0C.



**Figure 2.5 .** Point d'excitation et de réponse

Les différences entre le modèle numérique et le modèle analytique de référence sont quantifiées dans le tableau 2.3, pour les modes représentatifs déjà considérés (2, 8 et 24 diamètres nodaux).

L'excitation ponctuelle est bien en mesure d'exciter l'ensemble des modes de la structure et les différences obtenues sur les amplitudes sont homogènes avec celles constatées sur le comportement fréquentiel.

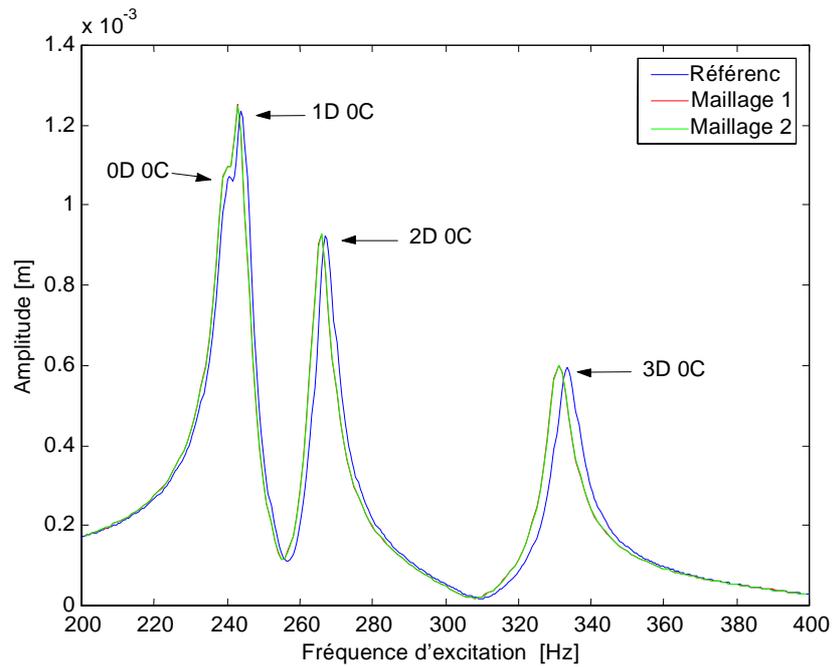


Figure 2.6 : Réponse à une excitation ponctuelle - élément Q8

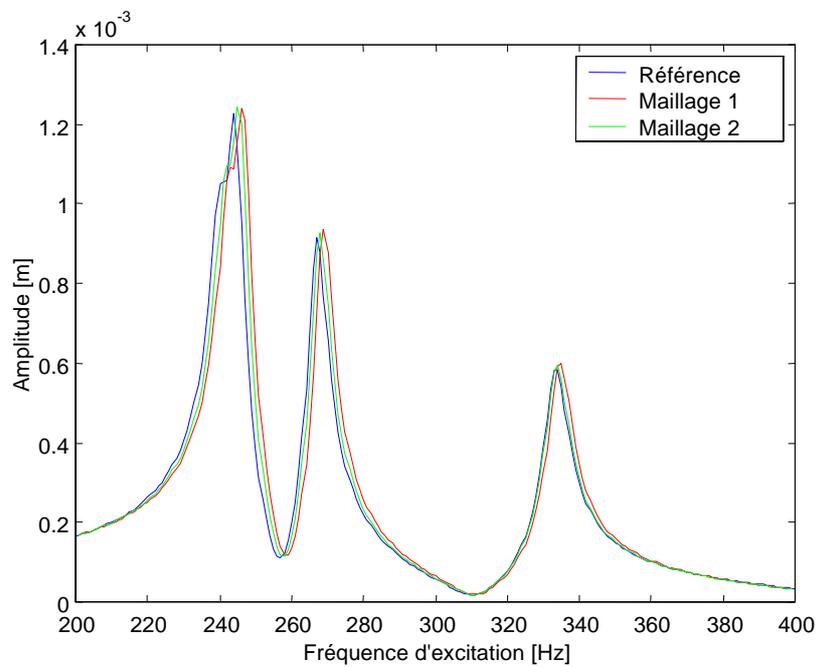
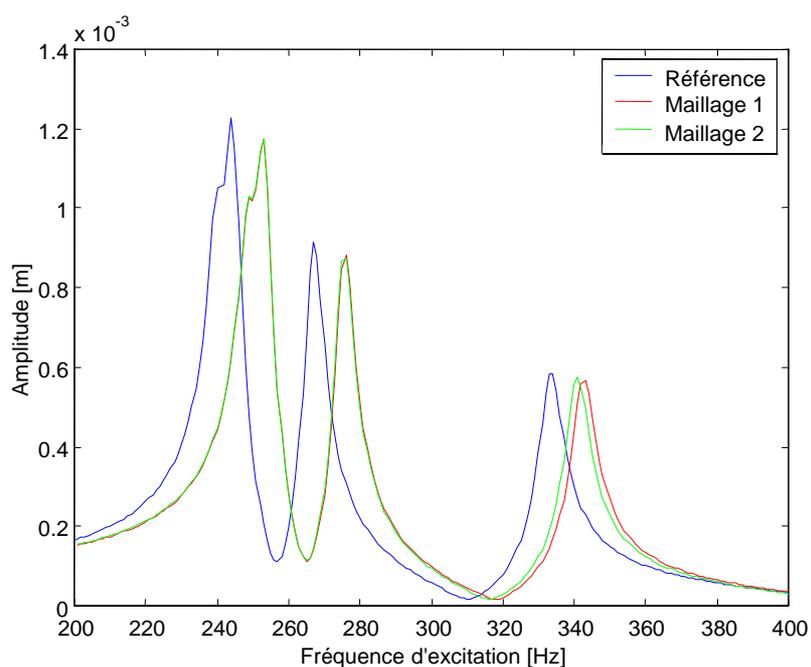


Figure 2.7 : Réponse à une excitation ponctuelle - élément Q4


**Figure 2.8** : Réponse à une excitation ponctuelle - élément H20

Maillage	élément	2D		8D		24D	
		Amplitude	$\Delta$ %	Amplitude	$\Delta$ %	Amplitude	$\Delta$ %
1	Q4	0.936	<b>1.2</b>	0.415e-1	<b>7.2</b>	---	---
	Q8	0.928	<b>0.4</b>	0.423e-1	<b>9.3</b>	---	---
	H20	0.880	<b>-4.7</b>	0.505e-1	<b>30.6</b>	---	---
2	Q4	0.926	<b>0.13</b>	0.382e-1	<b>-1.2</b>	0.132e-1	<b>4.5</b>
	Q8	0.925	<b>0.09</b>	0.410e-1	<b>5.9</b>	0.181e-1	<b>43.5</b>
	H20	0.873	<b>-5.5</b>	0.385e-1	<b>-0.56</b>	0.789e-2	<b>-37.3</b>

**TABLEAU 2.3** : Réponse à une excitation ponctuelle - Amplitude (mm),  $\Delta$  % différence par rapport à la solution analytique

### 3.2 REPONSE A UNE EXCITATION REPARTIE

Soit une charge distribuée appliquée sur la plaque, de la forme suivante :

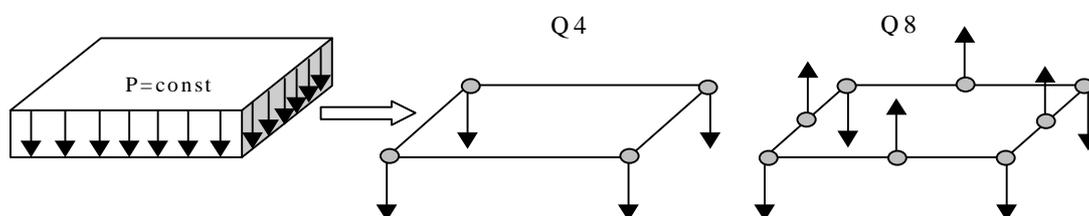
$$P(r, \theta, t) = P_0 \cos(H\theta) e^{j\omega t} \quad (2-1)$$

avec :

$P_0$  Amplitude de l'excitation.

$H$  ordre d'excitation.

$\omega$  pulsation d'excitation.



**Figure 2.9 :** Transformation d'un champ de pression uniforme en forces nodales équivalentes

La méthode des éléments finis transforme la pression physique appliquée sur la structure en forces nodales équivalentes qui sont associées aux fonctions de forme propres à chaque type d'élément (figure 2.9).

### 3.2.1 CALCUL DES FORCES NODALES EQUIVALENTES

Le calcul des forces nodales équivalentes est une étape nécessaire pour bien prendre en compte l'amplitude des excitations induites par des champs de pression. Dans la modélisation par élément finis, la pression est remplacée par un champ de forces ponctuelles appliquées aux nœuds du maillage. Ces forces nodales équivalentes se caractérisent par le même travail que celui du champ de pression sur les déplacements. Soit :

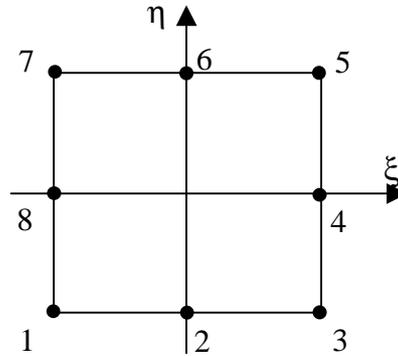
$$\delta W = \iint_s p(x, y) \delta w(x, y) dx dy \quad (2-2)$$

avec :  $p$  pression appliquée

$\delta w$  déplacement.

La discrétisation éléments finis suppose que les déplacements peuvent se décomposer sur la base des fonctions de forme de l'élément, ce qui conduit pour l'élément Q8 présenté figure 2.9 à écrire à partir de l'espace parent  $(\xi, \eta)$  [DHA81] :

$$\delta w(x, y) = \sum_{i=1}^8 N_{Q8}^i(\xi, \eta) \delta w_i \quad (2-3)$$



**Figure 2.10** : Espace parent de référence

$$N_{Q8}^1 = 1/4(-1 + \xi^2 + \xi\eta + \eta^2 - \xi^2\eta - \xi\eta^2)$$

$$N_{Q8}^2 = 1/2(1 - \eta - \xi^2 + \xi^2\eta)$$

$$N_{Q8}^3 = 1/4(-1 + \xi^2 - \xi\eta + \eta^2 - \xi^2\eta + \xi\eta^2)$$

$$N_{Q8}^4 = 1/2(1 + \xi - \eta^2 - \xi\eta^2)$$

$$N_{Q8}^5 = 1/4(-1 + \xi^2 + \xi\eta + \eta^2 + \xi^2\eta + \xi\eta^2)$$

$$N_{Q8}^6 = 1/2(1 + \eta - \xi^2 - \xi^2\eta)$$

$$N_{Q8}^7 = 1/4(-1 + \xi^2 - \xi\eta + \eta^2 + \xi^2\eta - \xi\eta^2)$$

$$N_{Q8}^8 = 1/2(1 - \xi - \eta^2 + \xi\eta^2)$$

Fonctions de forme

En conséquence l'expression du travail (2-2), identique pour le champ de pression et le champ de forces nodales équivalentes, devient après discrétisation éléments finis:

$$\delta W = \sum_{k=1}^8 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{p}(\xi, \eta) \delta w_i N_{Q8}^i(\xi, \eta) |J| d\xi d\eta$$

$$= \sum_{i=1}^8 F_i \delta w_i$$
(2-4)

où  $J$  est le jacobien de la transformation géométrique entre espace parent et espace réel.

L'expression des forces nodales équivalentes est donc obtenue à partir de:

$$F_i = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{p}(\xi, \eta) N_{Q8}^i(\xi, \eta) |J| d\xi d\eta$$
(2-5)

Les forces nodales équivalentes aux nœuds du maillage sont obtenues par assemblage des  $F_i$  sur tous les éléments. L'équation (2-5) donne les forces nodales équivalentes aux nœuds de l'élément Q8. La procédure est de même nature pour tous les éléments considérés.

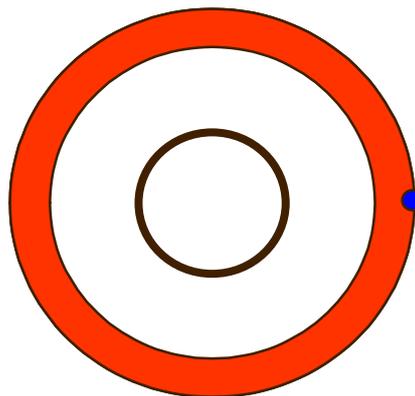
### 3.2.2 APPLICATION ET VALIDATION

Il s'agit ici de comparer les résultats numériques obtenus à partir des différentes modélisations aux résultats du modèle analytique de référence, pour ce qui concerne la réponse forcée à une excitation répartie de forme donnée par la relation (2-1). La zone d'excitation et le point de réponse sont donnés dans la figure 2.11

#### Paramètres d'excitation

$$P_0 = 100 \text{ N/m}^2$$

$$H = 2, 8 \text{ et } 24$$



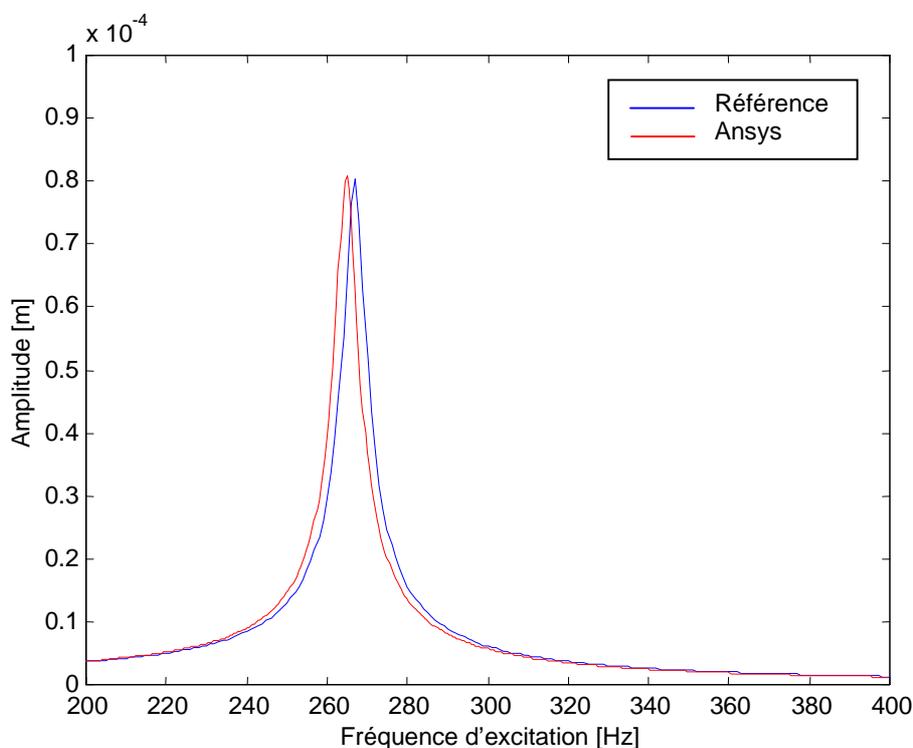
**Figure 2.11** : Zone d'excitation et point de réponse

Pour les calculs éléments finis, les forces nodales équivalentes sont calculées à partir d'une description polynomiale fine de la pression sur chaque élément. Les résultats obtenus en terme d'amplitude de vibration à la résonance sont reportés dans le tableau 2.4, pour les trois modes représentatifs déjà considérés.

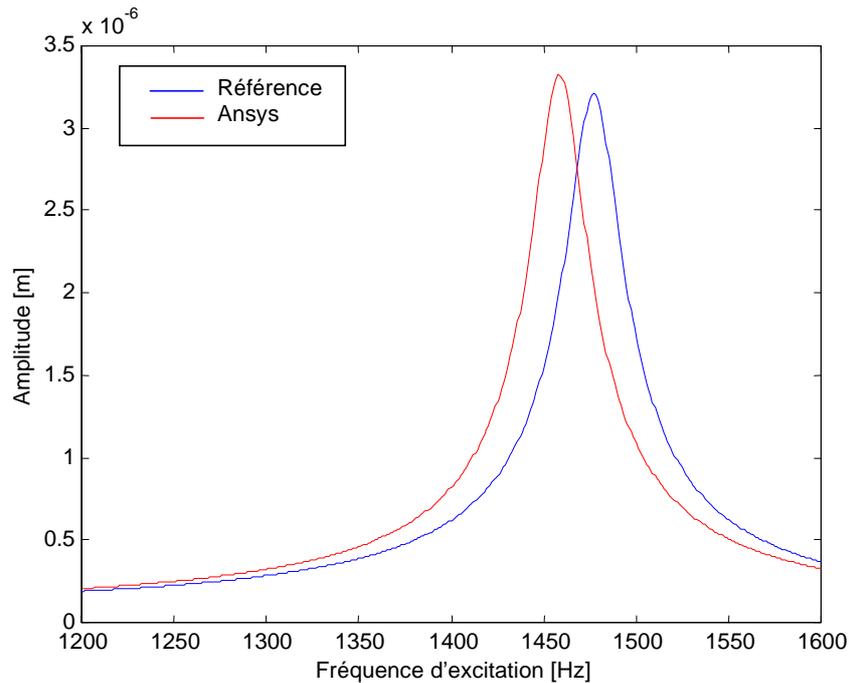
Maillage	élément	2D		8D		24D	
		Amplitude	$\Delta$ %	Amplitude	$\Delta$ %	Amplitude	$\Delta$ %
1	Q4	0.799e-1	<b>-0.70</b>	0.244e-2	<b>-23.9</b>	---	---
	Q8	0.810e-1	<b>0.67</b>	0.332e-2	<b>3.40</b>	---	---
	H20	0.783e-1	<b>-2.68</b>	0.301e-2	<b>-6.23</b>	---	---
2	Q4	0.803e-1	<b>-0.18</b>	0.297e-2	<b>-7.42</b>	0.396e-4	<b>-47.7</b>
	Q8	0.812e-1	<b>0.86</b>	0.332e-2	<b>3.20</b>	0.855e-4	<b>12.9</b>
	H20	0.781e-1	<b>-2.98</b>	0.313e-2	<b>-2.62</b>	0.657e-4	<b>-13.2</b>

**TABLEAU 2.4** : Amplitude (mm) avec une excitation répartie,  $\Delta$  % différence par rapport à la solution analytique

Les figures 2.12 et 2.13 montrent les courbes de réponses pour les excitations d'ordre 2 et 8. Dans ce cas, seuls les résultats numériques issus l'élément Q8 sont reportés et on vérifie bien qu'une excitation de type *H* n'est susceptible d'exciter que les modes à *H* diamètres nodaux.



**Figure 2.12** : Maillage\_1, Q8, H=2.



**Figure 2.13** : Maillage\_1, Q8, H=8

### 3.3 INFLUENCE DES APPROXIMATIONS DE REPARTITIONS

Le calcul des forces nodales équivalentes associées au champ de pression exact appliqué sur chaque élément est généralement fastidieux et souvent impossible. C'est pourquoi la plupart des analyses en réponse sont basées sur des modèles simplifiés. La pression est par exemple supposée constante sur chaque élément ou peut être considérée comme variant de manière linéaire ou parabolique. Le champ constant est obtenu à partir de la valeur de la pression au centre des éléments et les variations linéaires et paraboliques sont interpolées à partir des valeurs de la pression aux nœuds.

L'effet de différentes approximations de champ de pression est illustré dans le tableau 2.6 sous forme synthétique et figures de 2.14 à 2.17 de manière plus détaillée. Ces résultats confirment que de bonnes valeurs peuvent être obtenues en utilisant des approximations d'ordre élevé ou des maillages assez fins (assez fini en regard de la complexité de l'excitation). De manière plus surprenante, le tableau 2.6 montre clairement que l'approximation linéaire ne donne aucun avantage par rapport à l'approximation constante et même donne des résultats qui sont moins précis.

En réalité ceci s'explique mathématiquement par analogie avec les techniques d'approximation des intégrales associées à des fonctions de type  $y=f(x)$ . [RAD90] montre que l'écart obtenu en

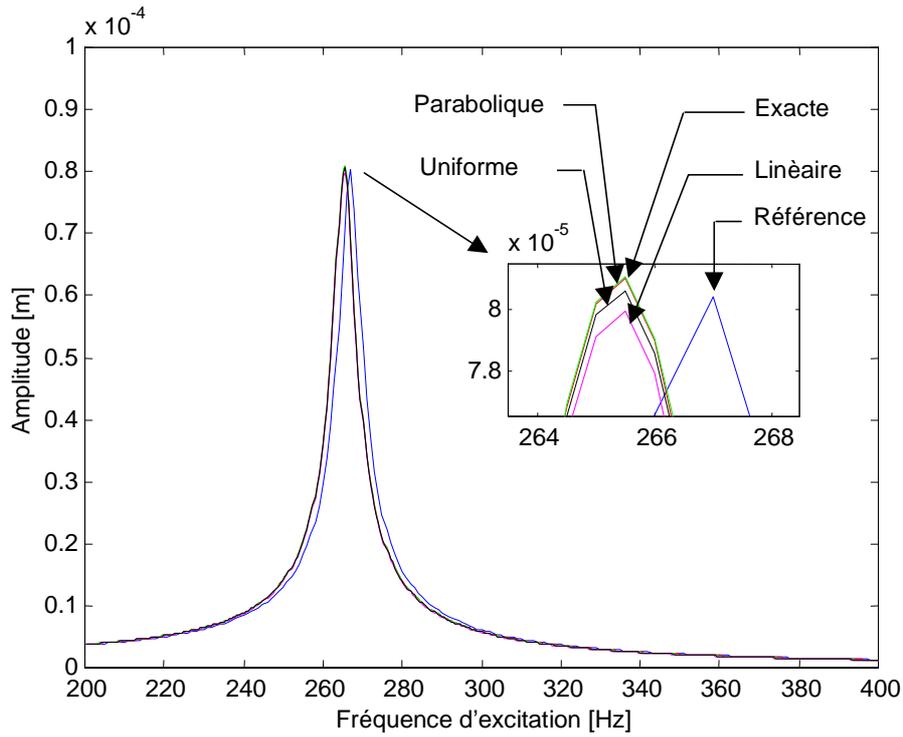
considérant une approximation linéaire est deux fois plus grand que celui obtenu en considérant une approximation uniforme, tableau 2.5 .

Type d'approximation	Uniforme	Linéaire
Écarts	$R_1 = \frac{(b-a)h^2}{24} \ddot{f}(\xi)$	$R_2 = \frac{(b-a)h^2}{12} \ddot{f}(\xi)$

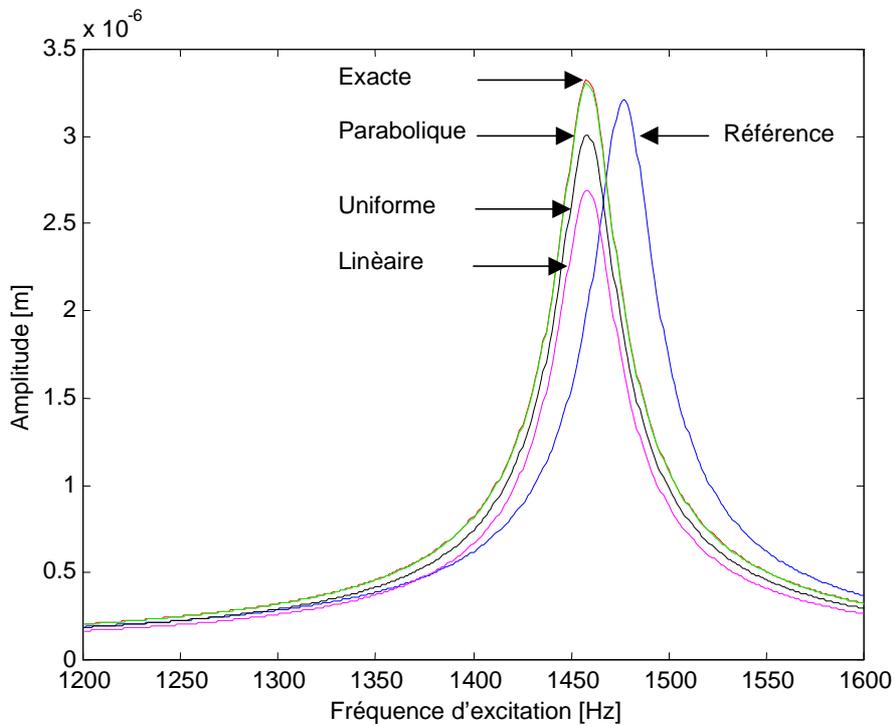
**TABLEAU 2.5 :** Approximations intégrales: écarts obtenus par rapport à la solution exacte dans l'intervalle  $a < \xi < b$

Approximation	Élément	2D		8D		24D	
		Amplitude	$\Delta \%$	Amplitude	$\Delta \%$	Amplitude	$\Delta \%$
Exact	Q4	0.804e-1	<b>ref</b>	0.298e-2	<b>ref</b>	0.396e-4	<b>ref</b>
	Q8	0.812e-1	<b>ref</b>	0.332e-2	<b>ref</b>	0.855e-4	<b>ref</b>
	H20	0.781e-1	<b>ref</b>	0.330e-2	<b>ref</b>	0.657e-4	<b>ref</b>
Uniforme	Q4	0.801 e-1	<b>-0.25</b>	0.289e-2	<b>-2.76</b>	0.279e-4	<b>-29.4</b>
	Q8	0.810e-1	<b>-0.28</b>	0.322e-2	<b>-2.81</b>	0.679e-4	<b>-20.5</b>
	H20	0.778e-1	<b>-0.38</b>	0.317e-2	<b>-3.82</b>	0.552e-4	<b>-16.0</b>
Linéaire	Q4	0.801e-1	<b>-0.33</b>	0.283e-2	<b>-4.85</b>	0.246e-4	<b>-37.7</b>
	Q8	0.808e-1	<b>-0.51</b>	0.316e-2	<b>-4.76</b>	0.528e-4	<b>-38.2</b>
	H20	0.777e-1	<b>-0.54</b>	0.316e-2	<b>-4.28</b>	0.394e-4	<b>-40.1</b>
Parabolique	Q4	0.804e-1	<b>0.00</b>	0.297e-2	<b>0.00</b>	0.379e-4	<b>-4.26</b>
	Q8	0.812e-1	<b>0.00</b>	0.332e-2	<b>0.00</b>	0.836e-4	<b>-2.27</b>
	H20	0.781e-1	<b>0.00</b>	0.330e-2	<b>0.00</b>	0.648e-4	<b>-1.44</b>

**TABLEAU 2.6 :** Comparaison des amplitudes (mm) obtenus en utilisant le maillage\_2 et les trois types d'approximations sur la pression,  $\Delta \%$  différence par rapport à la solution exacte.



**Figure 2.14** : Solutions analytique et éléments finis. Effet de différentes approximations de la pression (maillage\_1, Q8, H=2)



**Figure 2.15** : Solutions analytique et éléments finis (maillage\_1, Q8, H=8)

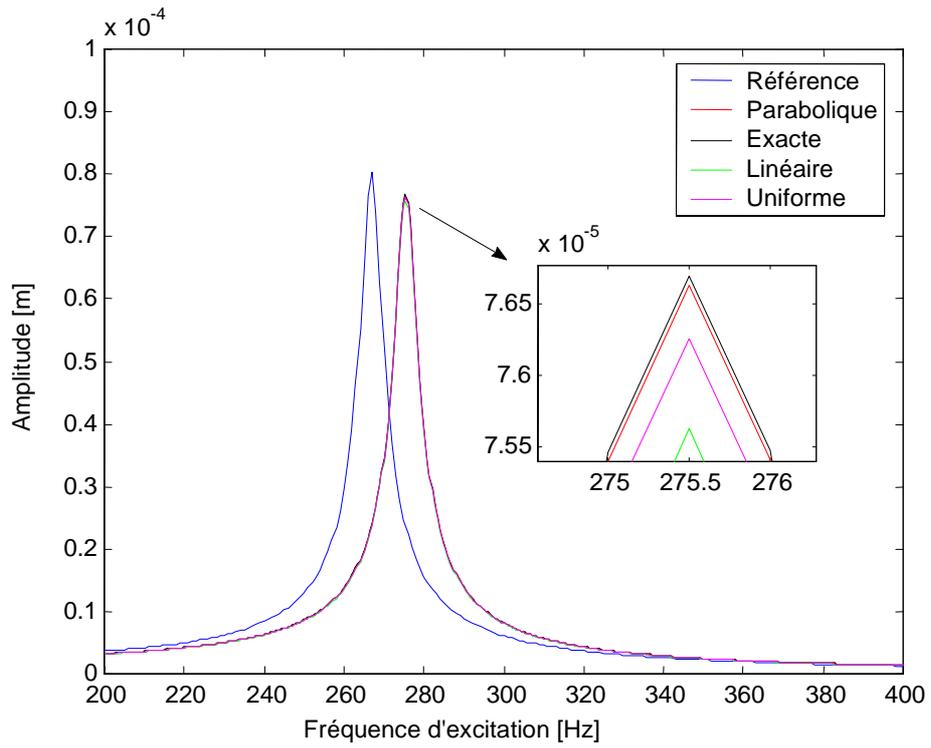


Figure 2.16 : Solutions analytique et éléments finis (maillage\_1, H20, H=2)

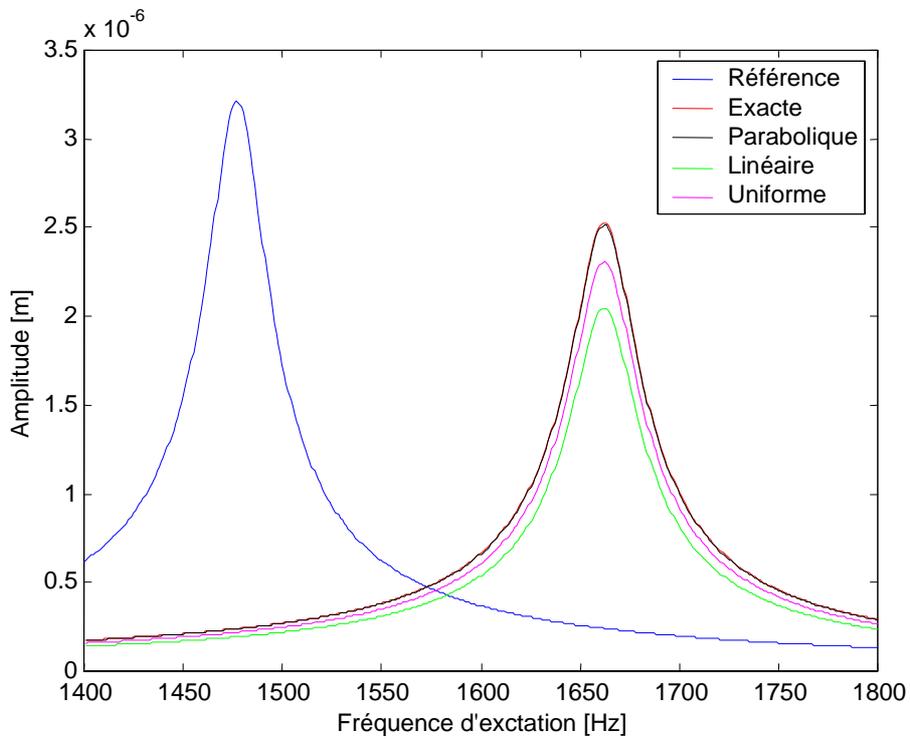
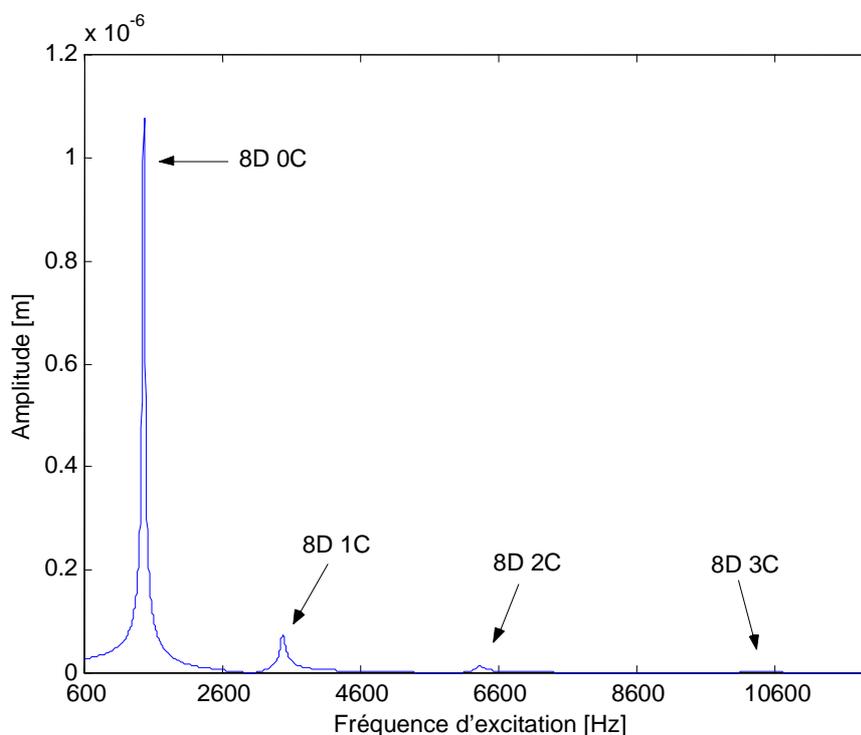


Figure 2.17 : Solutions analytique et éléments finis (maillage\_1, H20, H=8)

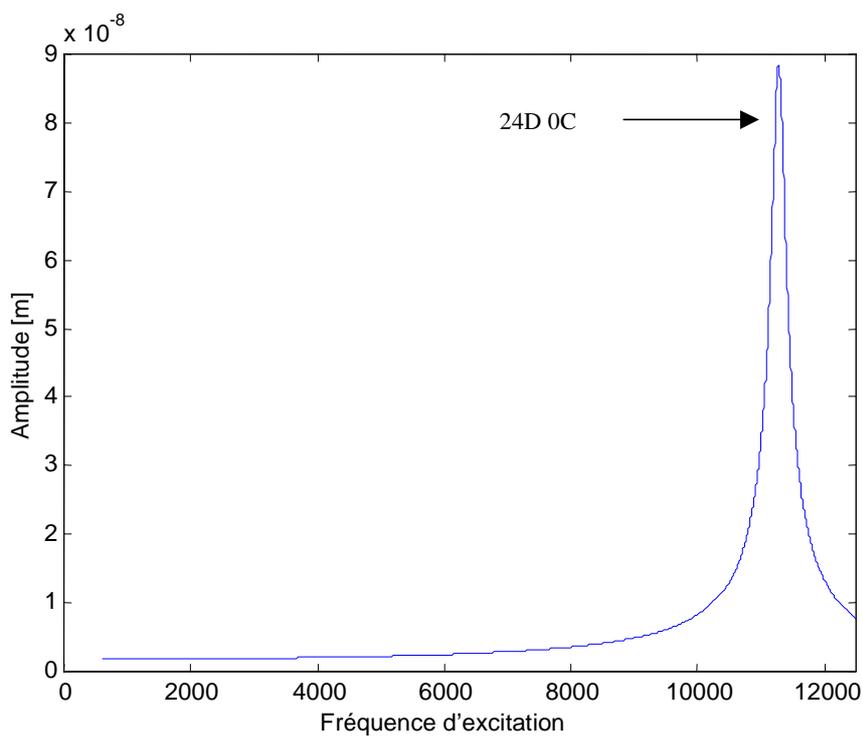
### 3.4 INFLUENCE DES FORCES NODALES EQUIVALENTES

Si le maillage est constitué par  $S$  éléments, également distribués sur la circonférence, l'excitation répartie en  $\cos(H\theta)$  se réduit à  $S$  forces ponctuelles discrètes, du fait du processus de calcul des forces nodales équivalentes. Ces forces sont capables d'exciter les modes avec  $H$  diamètres nodaux, mais aussi des modes parasites avec  $H^*$  diamètres nodaux, où  $H^*$  vérifie (paragraphe 2.2.2 chapitre 1)  $H^* = \alpha S \pm H$  avec  $\alpha = 1, 2, \dots$

Quand le maillage est assez fin, les modes parasites sont repoussés vers les hautes fréquences. Cependant, quand le maillage n'est pas assez fin par rapport à la complexité de l'excitation, les réponses parasites peuvent apparaître à des fréquences situées dans la plage étudiée. Le maillage 1 est assez fin pour des excitations de type  $H = 2$  (figures 2.14 et 2.16) et  $H = 8$  (figures 2.15 et 2.17). Dans ce cas, seule la réponse associée au mode à  $H$  diamètres nodaux apparaît. En revanche, une excitation avec  $H = 24$  appliquée sur le maillage 1 induit une réponse des modes à  $H^* = 8$  diamètres, réponse qui apparaît à des fréquences bien inférieure à celle attendue pour le mode à 24 diamètres ( $S = 32, H = 24$ , figure 2.18). Ces réponses parasites disparaissent en utilisant le maillage 2 ( $S = 64$ , figure 2.19).



**Figure 2.18** : Charge distribuée, (maillage\_1, Q8, H = 24)



**Figure 2.19** : Charge distribuée, (maillage\_2, Q8, H = 24)

## 4 CONCLUSION

Les excitations réparties ont une influence majeure sur le comportement en réponse des ensembles disque-aubes. Dans ce contexte, ce chapitre concerne l'amélioration de la compréhension des mécanismes de prise en compte des excitations réparties dans les modèles éléments finis.

Les développements effectués reposent sur une application de référence, simple mais représentative, constituée d'une plaque annulaire encastrée-libre. Cette application a fait l'objet du développement d'une solution analytique et présente l'avantage d'avoir un comportement dynamique parfaitement connu et maîtrisé.

L'application numérique porte sur le traitement de plusieurs configurations faisant varier le type d'élément fini, la finesse du maillage ainsi que la finesse de l'approximation retenue pour modéliser la pression sur chaque élément.

Les résultats montrent des tendances classiques de convergence de la solution numérique par rapport à la solution de référence. Les résultats sont d'autant meilleurs que l'élément fini

choisi est adapté, que la finesse du maillage est importante et que l'approximation de la pression est meilleure. On constate également que :

- La finesse du maillage doit être établie en fonction des caractéristiques intrinsèques de la structure mais également en fonction de la complexité du champ de pression à considérer. Un maillage de finesse suffisante pour rendre compte correctement des fréquences et modes de la structure peut s'avérer insuffisant lorsqu'il s'agit de prendre en compte de fortes variations spatiales du champ d'excitation en réponse forcée.
- Une hypothèse de variation linéaire de la répartition de pression sur chaque élément donne des résultats moins bon qu'une hypothèse de répartition constante. Lorsque le maillage est suffisamment fin, ce dernier type d'approximation est donc satisfaisant.
- Le processus de transformation du champ de pression en forces nodales équivalentes peut conduire à des réponses parasites. Cet inconvénient disparaît lorsque le maillage est fin.

## **CHAPITRE 3**

# **ETUDE DETAILLEE DES MECANISMES DE** **REPONSE**

## 1. INTRODUCTION

En prenant appui sur une structure au comportement parfaitement connu, modélisable à partir d'une approche analytique de référence, le chapitre précédent a permis de valider les modèles éléments finis pour le calcul de la réponse des structures cycliques à des champs d'excitation répartis. Cette étape était nécessaire dans la mesure où la réponse de ces structures est conditionnée dans ce cas par les paramètres d'amplitude et de répartition de l'excitation, qui doivent par conséquent être rendus de manière la plus précise possible.

Ce chapitre s'intéresse à des géométries encore plus proches de celles des ensembles disques-aubes afin d'examiner les mécanismes de réponse qui les caractérisent.

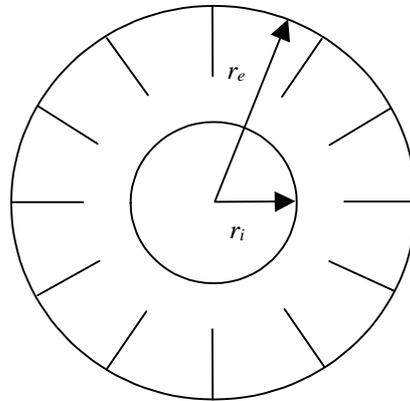
Pour ce faire, trois applications sont considérées. La première application consiste en un simple découpage de la plaque circulaire par des lignes radiales équiréparties. Dans ce cas la structure conserve la même surface en prise avec l'excitation mais se compose d'ailettes liées entre elles en pied par une bande continue. La seconde application est de même nature mais comporte des ailettes de plus petites tailles et est donc plus représentative d'un ensemble aubé. La dernière application est également représentative d'un ensemble aubé dont les aubes sont liées entre elles en tête par une bande continue.

La réponse de ces structures est examinée pour différentes configurations, à l'arrêt soumise à un champ d'excitation réparti variant de manière harmonique et en rotation dans un champ d'excitation stationnaire perturbé. Plusieurs variations circonférentielles sont considérées afin de ne pas particulariser l'étude.

## 2. PRESENTATION DU MODELE

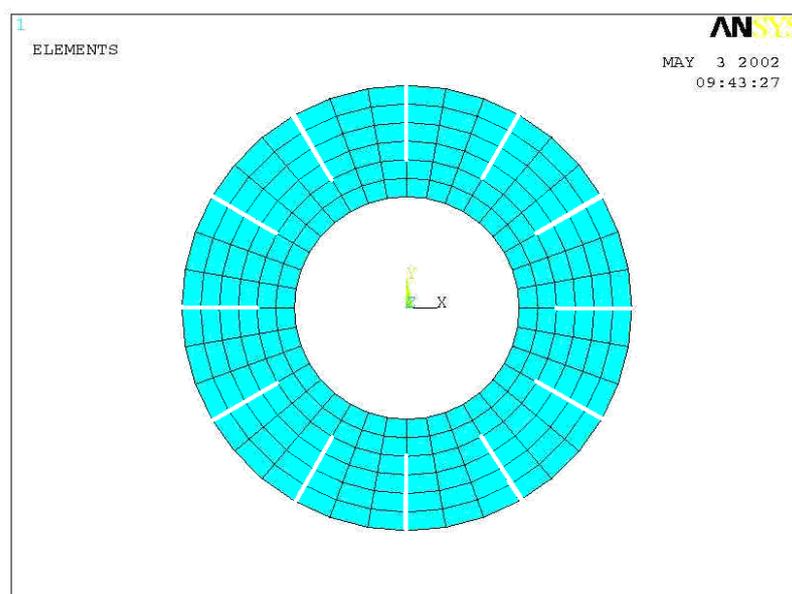
La première étape, qui permet de s'approcher d'un ensemble disque-aubes consiste à découper radialement la plaque circulaire considérée précédemment. La structure présente alors la même surface soumise à l'excitation répartie mais est constituée de secteurs faiblement liés. L'étude porte ici sur une plaque circulaire mince, homogène d'épaisseur

constante, découpée régulièrement par douze fentes identiques ( $N=12$ ) réparties sur la circonférence, de longueur égale à  $2/3(r_e - r_i)$  (figure 3.1 ).



**Figure 3.1 :** plaque circulaire avec des fentes radiales

Les caractéristiques de la plaque sont : rayons intérieur  $r_i = 0.1$  m et extérieur  $r_e = 0.2$  m, épaisseur  $h = 0.008$  m, module d'Young  $E = 1.1e11$  N/m<sup>2</sup>, densité  $\rho = 4430$  kg/m<sup>3</sup>, coefficient de poisson  $\nu = 0.35$ . La structure est discrétisé avec des éléments de coque à 4 nœuds ( $Q4$ , ANSYS shell63). La finesse du maillage est présentée figure 3.2 : discrétisation à partir de 6 éléments dans la direction radiale et 36 éléments dans la direction circonférentielle. La plaque est considérée encastree à son contour intérieur et libre à son contour extérieur.



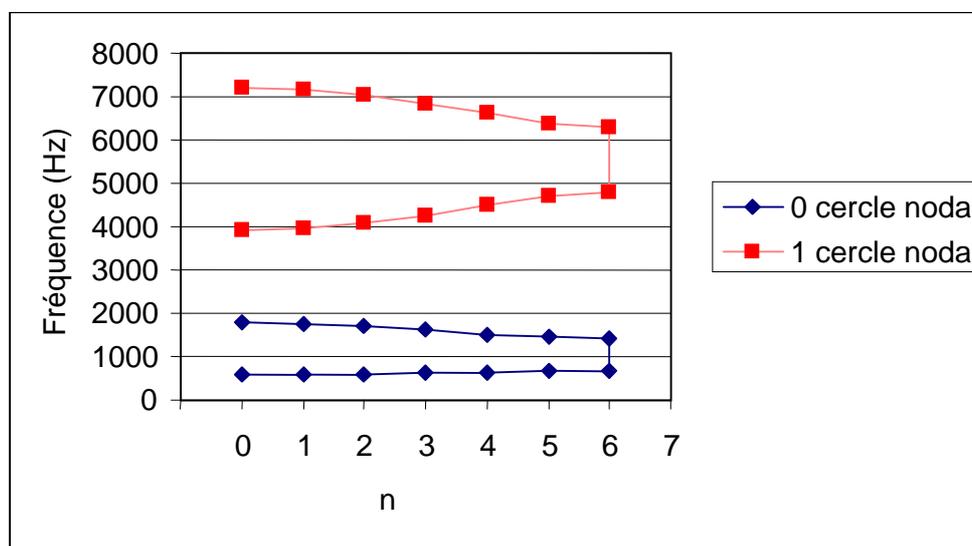
**Figure 3.2 :** Disque découpé (élément Q4).

## 2.1 VIBRATION LIBRE

Les fréquences et les modes propres de la plaque obtenus avec l'élément  $Q4$  sont reportés dans le tableau 1 et sur la figure 3.3, pour les deux familles à 0 et 1 cercle nodal. La figure 3.3 utilise la représentation classique associée aux structures à périodicité cyclique. Dans ce cas, si la structure se caractérise par  $N$  secteurs identiques, le comportement dynamique est obtenu à partir de  $N/2$  ou  $(N-1)/2$  calculs indépendants, selon que  $N$  est pair ou impair. Pour le cas considéré, le nombre de secteurs est  $N=12$ .

	0D	1D	2D	3D	4D	5D	6D	6D	7D	8D
0C	588.18	590.95	599.70	614.99	635.25	654.31	662.43	1427.0	1451.8	1517.5
1C	3897.6	3941.9	4068.2	4259.3	4488.0	4702.8	4800.8	6294.0	6428.2	6743.2.0

**TABLEAU 1** : Fréquences naturelles [Hz]



**Figure 3.3** : Fréquences naturelles classées

Quelques formes modales sont présentées figures (3.4) et (3-5)

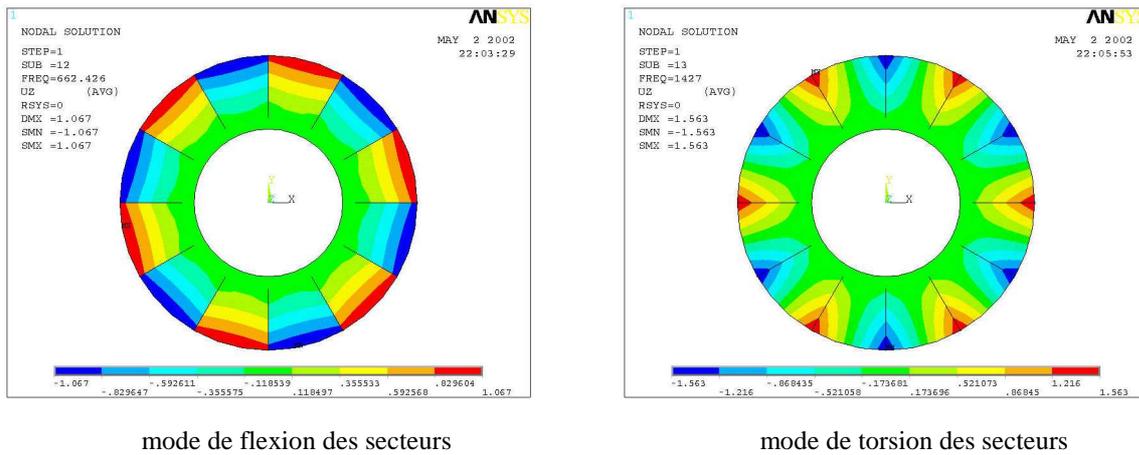


Figure 3.4: Modes à 6 diamètres nodaux

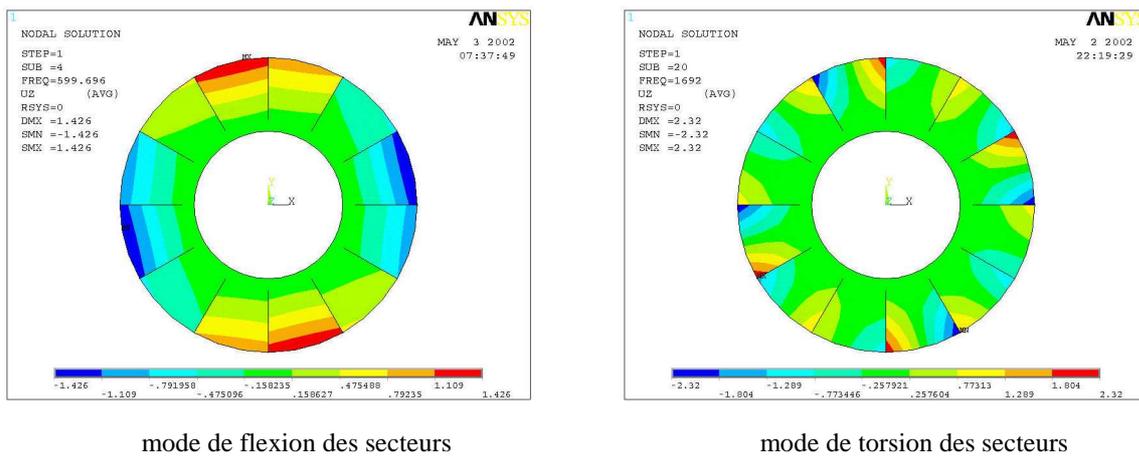


Figure 3.5: Modes à 2 et 10 diamètres nodaux

## 2.2 REPONSE FORCEE A UNE EXCITATION

Les mécanismes de réponse forcée sont examinés sur deux configurations. La première concerne la structure à l'arrêt soumise à une excitation répartie harmonique, alors que la seconde s'intéresse à la structure en rotation dans un champ perturbé d'efforts répartis stationnaires.

### 2.2.1 STRUCTURE A L'ARRET - EXCITATION HARMONIQUE

La réponse de la structure est examinée pour une sollicitation répartie d'allure identique à celle déjà considérée en (2-1), soit :

$$P(r, \theta, t) = P_0 \cos(H\theta) e^{j\omega t}$$

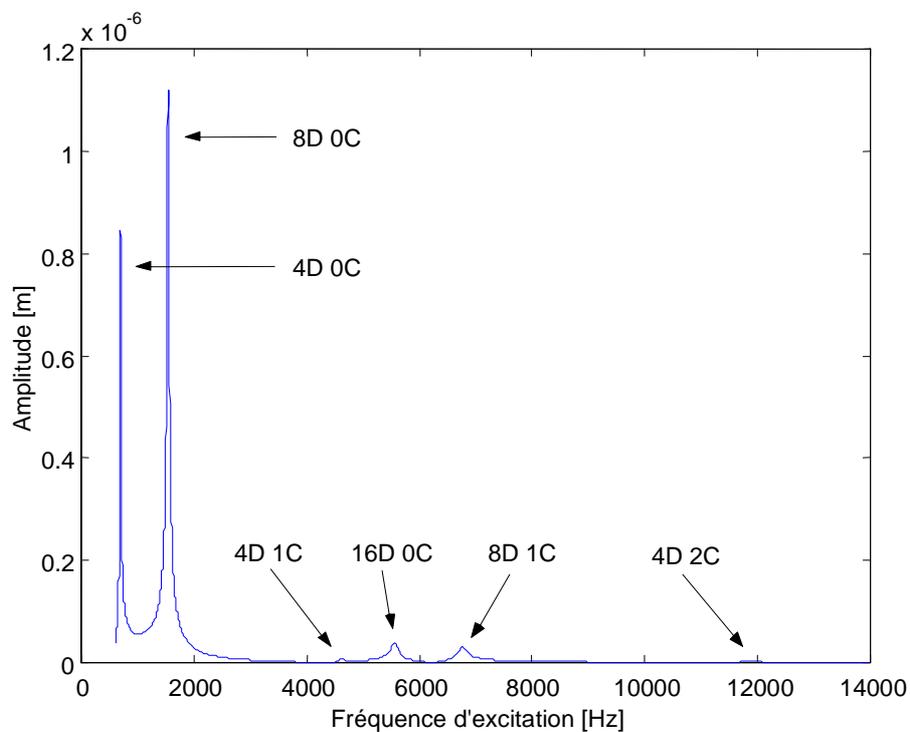
Les paramètres d'excitation sont :

$$P_0 = 100 \text{ N/m}^2$$

$$H = 8 : \text{ordre d'excitation}$$

$$\xi = 0.01 : \text{facteur d'amortissement identique pour tous les modes}$$

Les résultats de l'analyse harmonique sont reportés figure 3.6 pour la plage de fréquences entre 0 et 14000 Hz où sont situés les 100 premiers modes propres de la structure. Le point de réponse représenté est situé à  $(r_e, 0)$ .



**Figure 3.6 :** Disque découpé : excitation par  $\text{Cos}(8\theta)$

La réponse de la plaque axisymétrique à une sollicitation de type  $H = 8$  ne fournissait qu'un pic de résonance associé au mode à 8 diamètres. En examinant la figure 3.6, on peut constater que la réponse de la plaque fendue, sollicitée avec la même excitation, présente un pic de résonance correspondant au mode à 8 diamètres, mais également d'autres pics associés aux modes à 4 et 16 diamètres. Le seul fait de découper la plaque, bien que la surface soumise à la sollicitation soit la même dans les deux cas, conduit à des mécanismes de réponse identiques à ceux mis en évidence dans le premier chapitre pour les ensembles aubés où les aubes sont considérées comme ponctuelles.

Pour le disque découpé, les modes excités par une excitation de type  $H$  sont bien les modes à  $H^*$  diamètres nodaux donnés dans la relation (1-20) :

$$H^* = \alpha N \pm H \quad \text{avec} \quad \alpha = 0, 1, 2, 3, \dots$$

## 2.2.2 STRUCTURE EN ROTATION

Afin de se rapprocher des configurations de type ensembles disque-aubes en fonctionnement, l'objectif ici est d'analyser la réponse du disque découpé, en rotation dans un champ d'excitation stationnaire perturbé. Dans ce cas, comme spécifié dans le chapitre 1, la mise en équation se fait dans le repère tournant lié à la structure et l'excitation devient :

$$F(\theta, t) = F_0 \cos H(\theta - \Omega t) \quad (3-1)$$

L'équation différentielle du mouvement de la plaque s'écrit, après discrétisation éléments finis, sous la forme:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{w}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (3-2)$$

Avec :

$\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  : respectivement matrices de masse, d'amortissement visqueux et de raideur

$\mathbf{F}(t)$  : vecteur des efforts externes

$\mathbf{w}(t)$  : vecteur des déplacements nodaux

La résolution du problème en vibrations libres et non amorties, associé à (3-2), fournit un ensemble de déformées modales regroupées dans une matrice  $\Phi$ . Ces déformées sont classiquement utilisées pour réduire la taille du système (3-2) par projection en base modale. Cette opération correspond au changement de variables suivant [LAL92] :

$$\mathbf{w}(t) = \Phi \mathbf{q}(t) \quad (3-3)$$

avec :

$\Phi$  : matrice modale

$\mathbf{q}(t)$  : vecteur des déplacements modaux

En reportant (3-3) et en pré multipliant par  $\Phi^t$ , l'équation (3-2) devient :

$$m_{ij} \ddot{q}_j(t) + c_{ij} \dot{q}_j(t) + k_{ij} q_j(t) = f_i(t) \quad (3-4)$$

avec :

$m_{ij} = \phi_{il}^t M_{lh} \phi_{hj}$  : matrice de masse modale

$k_{ij} = \phi_{il}^t K_{lh} \phi_{hj}$  : matrice de raideur modale

$c_{ij} = \phi_{il}^t C_{lh} \phi_{hj} = (2\xi \sqrt{k_{ii} m_{ii}})$  : matrice d'amortissement modal

$f_i(t) = \phi_{il}^t F_l(t)$  : vecteur des forces nodales

$\xi$  est le facteur d'amortissement modal supposé ici constant pour tous les modes. Compte tenu des conditions d'orthogonalité, le système (3-4) est constitué de  $n$  équations différentielles découplées. Après résolution des  $n$  équations indépendantes, le retour aux variables initiales se fait par (3-3). La solution en régime permanent de l'équation (3-4) est recherchée sous la forme:

$$q_j(t) = q_j^c \cos n\Omega t + q_j^s \sin n\Omega t, \quad (3-5)$$

De plus, sachant que :

$$\cos H(\theta - \Omega t) = \cos H\theta \cos H\Omega t + \sin H\theta \sin H\Omega t$$

il vient :

$$\begin{aligned} -m_{ij}n^2\Omega^2 q_j^c + c_{ij}n\Omega q_j^s + k_{ij}q_j^c &= f_{0i} \cos H\theta \\ -m_{ij}n^2\Omega^2 q_j^s - c_{ij}n\Omega q_j^c + k_{ij}q_j^s &= f_{0i} \sin H\theta \end{aligned} \quad (3-6)$$

Les équations (3-6) peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} k_{ij} - m_{ij}n^2\Omega^2 & c_{ij}n\Omega \\ -c_{ij}n\Omega & k_{ij} - m_{ij}n^2\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_j^c \\ q_j^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{0i} \cos H\theta \\ f_{0i} \sin H\theta \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

La résolution des équations (3-7) permet d'obtenir les déplacements modaux,  $q_j^c, q_j^s$ . Les déplacements physiques sont alors calculés par application de l'équation (3-3).

#### **APPLICATION AU DISQUE DECOUPE:**

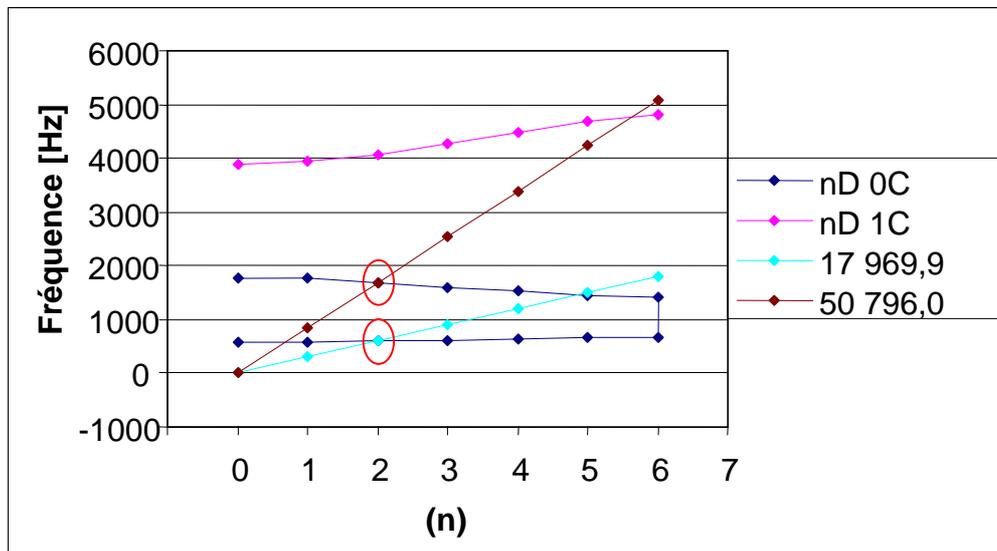
Il s'agit d'illustrer la réponse du disque découpé (figure 3.2) en rotation dans un champ d'excitation stationnaire perturbé. La charge est donnée par la relation (3-1) avec  $H=2$ .

Les mécanismes de réponse mis en évidence dans le chapitre 1 sont associés à une excitation de fréquence  $H\Omega$  susceptible d'exciter les modes de type 2 diamètres mais aussi 10, 14... diamètres (respectivement 12-2, 12+2,...  $\alpha 12\pm 2$ ). Dans la mesure où les effets de la rotation ne sont pas considérés ici pour le calcul du comportement dynamique de la structure, les points de réponse possibles peuvent être trouvés à l'aide de la figure 3.8. Si on s'en tient aux deux premières réponses possibles elles sont associées aux intersections entre les lignes d'excitation de fréquences  $2\Omega$  et les fréquences naturelles associées aux modes 2D0C et 10D0C. Ces coïncidences apparaissent respectivement aux vitesses de rotation suivantes :

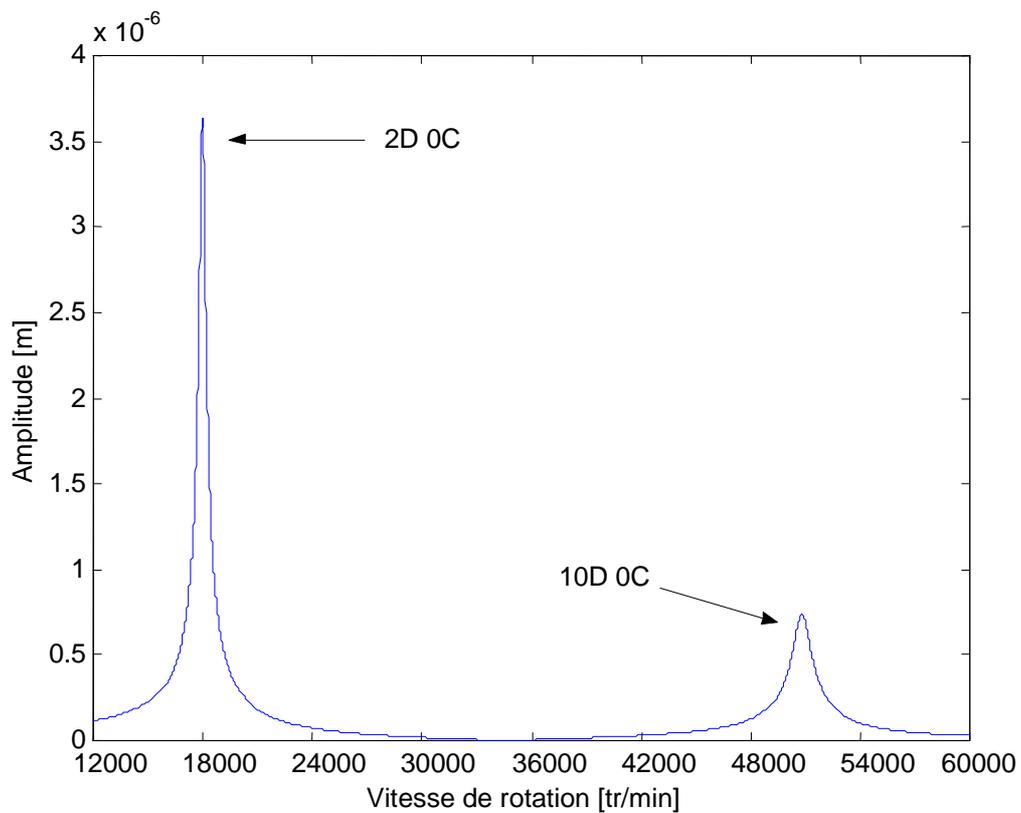
- pour le mode 2D0C  $2\Omega=3763.6$  Rd/s soit  $\Omega=17\ 969.9$  tr/mn
- pour le mode 10D0C  $2\Omega=10\ 638.7$  Rd/s soit  $\Omega=50\ 796.0$  tr/mn

Ces résonances possibles sont confirmées par l'examen de la figures 3.8 qui donne la réponse de la structure au point  $(r_e, 0)$ , pour la gamme de rotation de 12 000 à 60 000 tr/mn. La figure

3.7 montre clairement deux pics de réponse aux vitesses identifiées ci-dessus et correspondant aux modes 2D0C et 10D0C.



**Figure 3.7** Disque découpé - Mécanismes de réponse associés à une excitation d'ordre 2



**Figure 3.8** Réponse du disque découpé soumis à une excitation d'ordre 2

### 3. APPLICATIONS COMPLEMENTAIRES

Des applications complémentaires sont étudiées afin de disposer d'éléments permettant de mieux comprendre les mécanismes de réponse des deux catégories caractéristiques d'ensembles disque-aubes, soit:

- les ensembles constitués d'aubes indépendantes, seulement liées entre elles par le disque sur lequel elles sont montées
- les ensembles liaisonnées où les aubes sont liées par des dispositifs d'interconnexion (shrouds...)

#### 3.1 DESCRIPTION DES MODELES - REPONSE A L'ARRET

Les deux applications complémentaires considérées sont les suivantes :

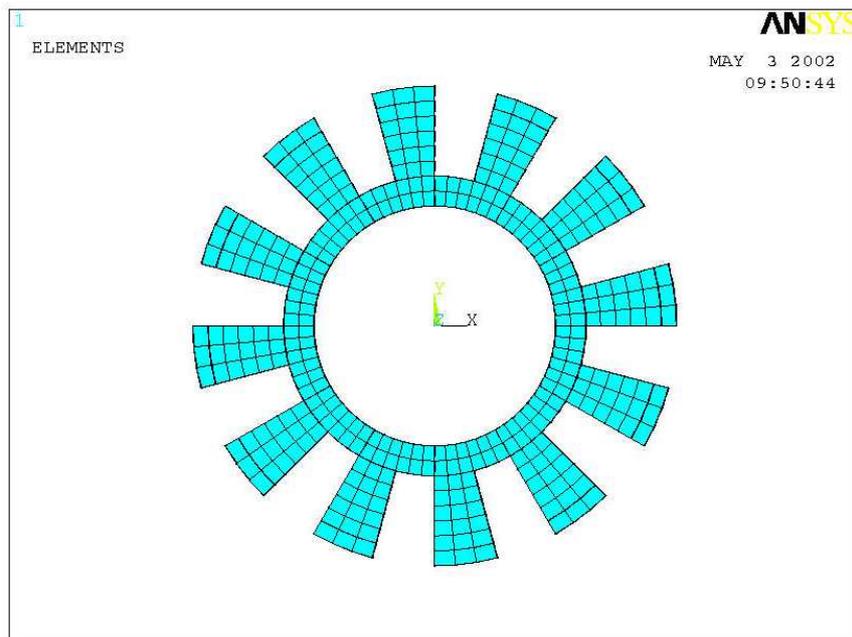
- La première est représentative d'un ensemble disque-aubes sans liaison entre aubes (figure 3.9). Avec  $r_i = 0.1\text{ m}$ ,  $r_e = 0.2\text{ m}$ ,  $r = 0.125\text{ m}$  (rayon au pied des aubes),  $\theta = 15^\circ$  (taille circonférentielle de chaque aube)
- A l'opposé, la seconde est représentative d'un ensemble disque-aubes avec liaison inter-aubes par bande continue en tête d'aube (shroud) d'une largeur  $\Delta r = 0.0125\text{ m}$  (figure 3.10).

Les éléments finis utilisés sont de même nature que ceux considéré précédemment. Le chargement est appliqué sur une bande d'éléments situés au niveau des ailettes, (septième rangée d'éléments en partant du centre).

La réponse de ces structures est reportée respectivement figures 3.11 pour la structure 1 sur la plage de fréquences entre 500 et 5000 Hz, et figure 3.12 pour la structure 2 sur la plage de fréquences entre 1000 Hz et 5000 Hz. Ces plages encadrent les 30 premières fréquences naturelles et le point de la réponse considéré est situé à  $(r_e, 0)$ .

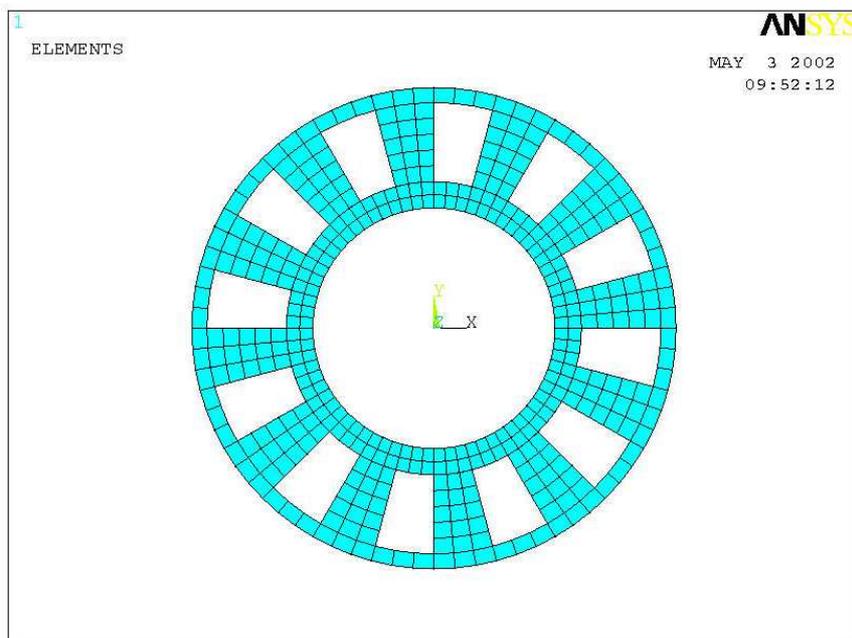
L'examen des figures 3.11 et 3.12 montre clairement que les structures répondent toutes deux selon les mêmes mécanismes et que les modes excités sont bien les modes à  $H$  et  $H^*$  diamètres nodaux donnés par la relation (1-20) :

$$H^* = \alpha N \pm H \quad \text{avec} \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots$$

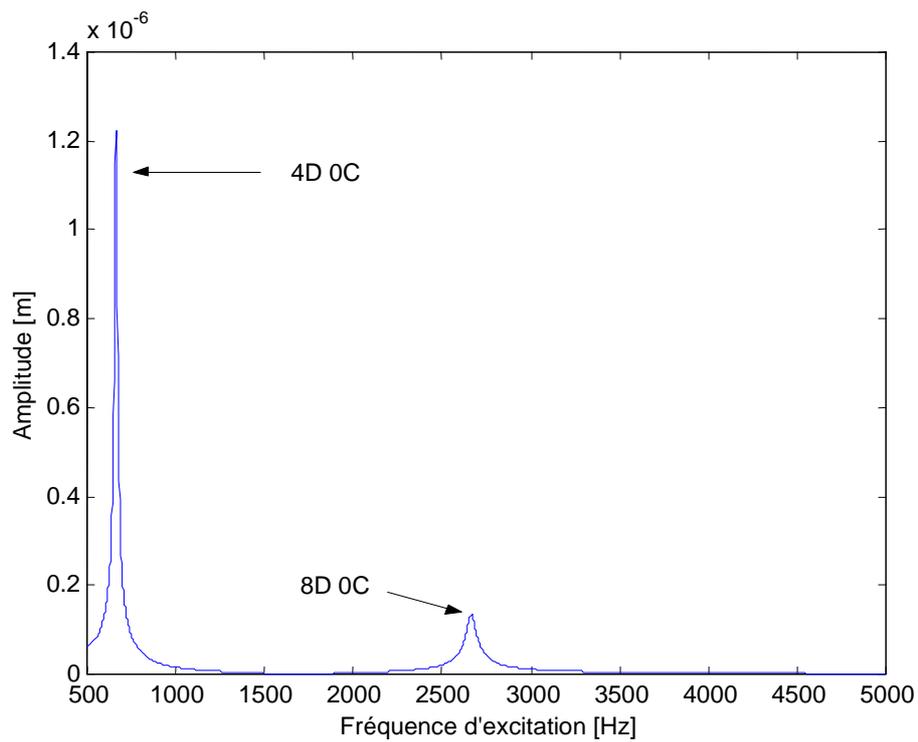


**Figure 3.9 :** Structure représentative d'un aubage non liaisonné (élément Q4)

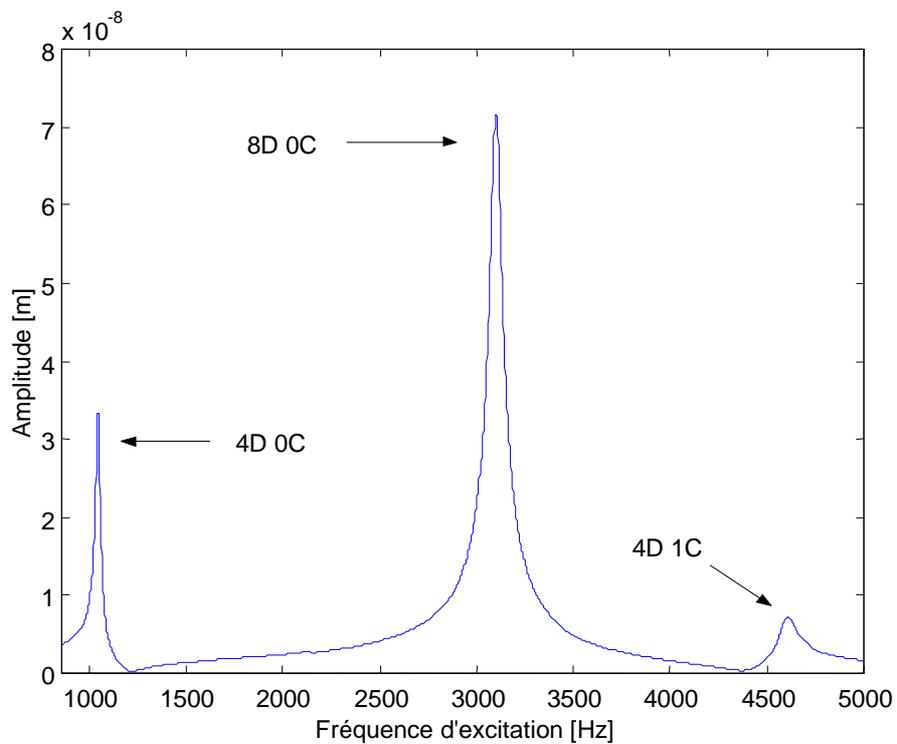
Les déformées modales correspondant aux pics d'amplitude de la réponse de la structure 2 (disque-aubes avec bande de liaison) sont illustrées figures 3.13 à 3.15 . Ces déformées sont respectivement de nature suivante :  $4D\ 0C$ ,  $8D\ 0C$  et  $4D\ 1C$ .



**Figure 3.10 :** Structure représentative d'un aubage liaisonné (élément Q4)



**Figure 3.11 :** Disque-aubes non liaisonné: excitation par  $\text{Cos}(8\theta)$



**Figure 3.12 :** Disque-aubes avec liaison, excitation par  $\text{Cos}(8\theta)$

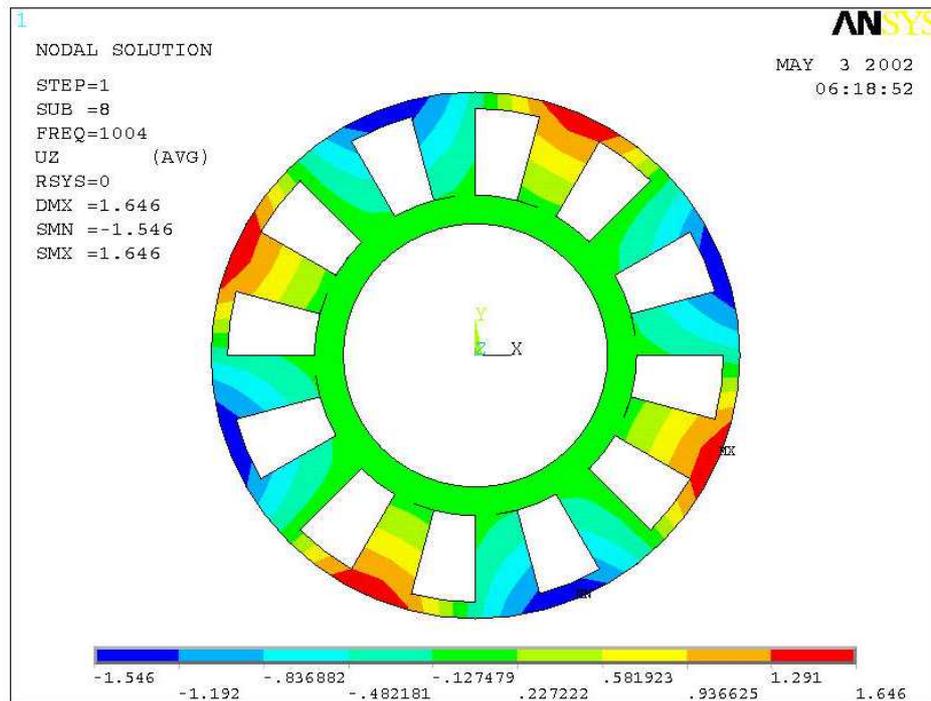


Figure 3.13 : mode à 4D 0C

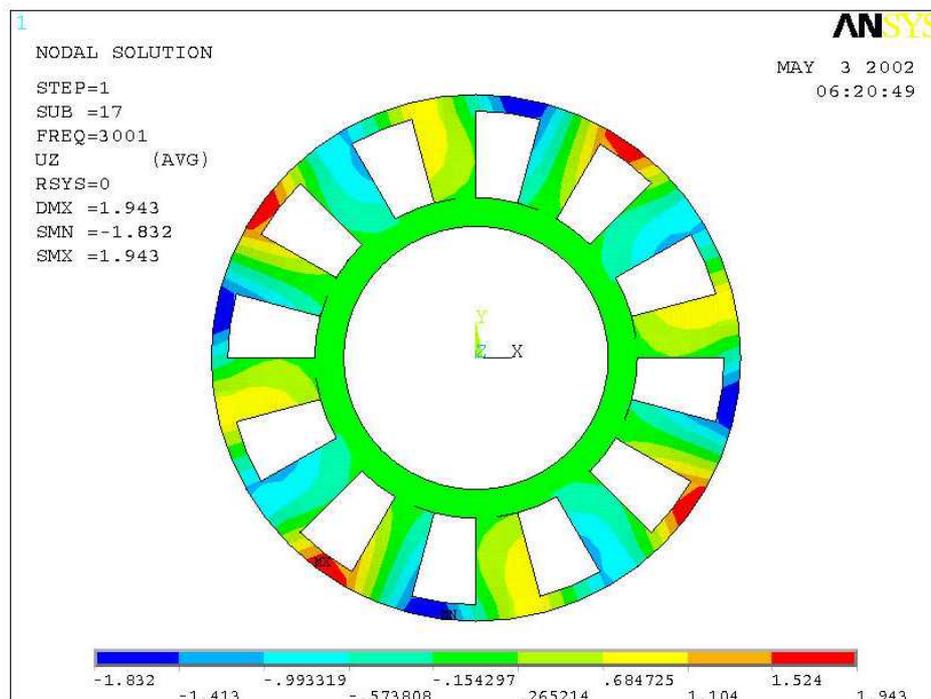


Figure 3.14 : mode à 8D 0C

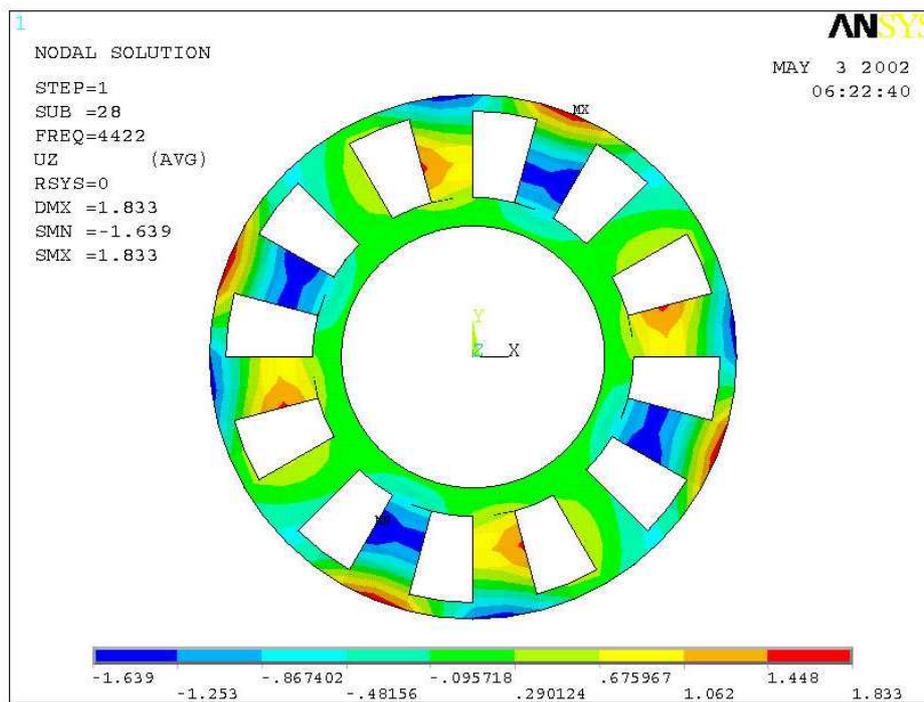


Figure 3.15 : mode à 4D 1C

## 3.2 STRUCTURES EN ROTATION

Le comportement de la structure 1 en rotation est de manière évidente de même nature que celui du disque découpé. En conséquence, seul le cas de la structure 2 sera considéré ici. Le champ d'excitation stationnaire dans lequel tourne la structure est gouverné par la relation (3-1) et l'ordre d'excitation retenu est  $H=8$ .

Compte tenu des effets centrifuges, supposés négligeables sur l'évolution des fréquences naturelles, les premières résonances possibles sont identifiées sur les diagrammes présentés figure 3.16 (l'excitation se situe sur les lignes en  $8\Omega$ ). Les fréquences susceptibles d'être excitées sont associées aux nombres de Fourier  $n=8$  (modes à 4, 8... diamètres nodaux).

Les amplitudes en  $(r_e, \theta)$  obtenues en fonction de la vitesse de rotation, reportées figure 3.17 confirment ces résultats.

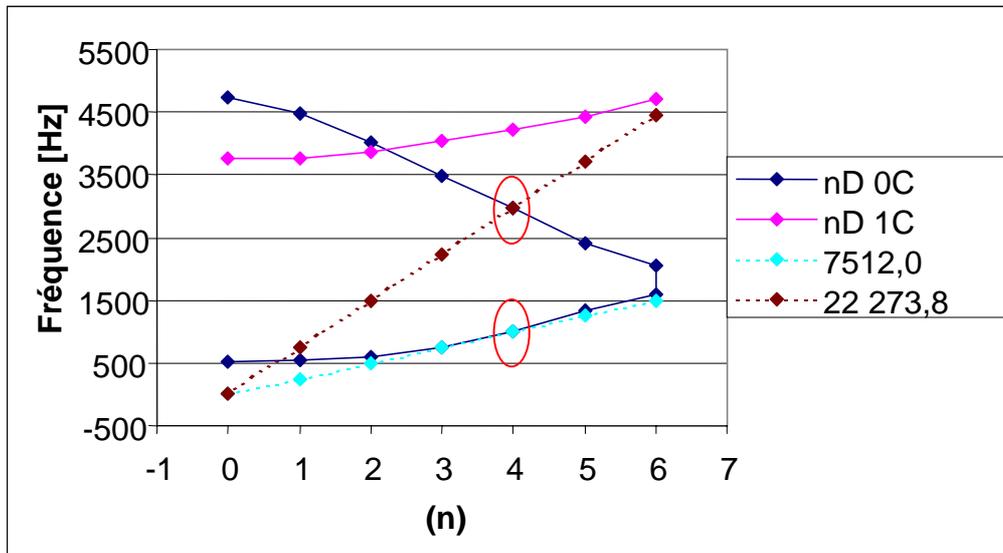


Figure 3.16 : Disque liaisonné: mises en évidence des excitations possibles

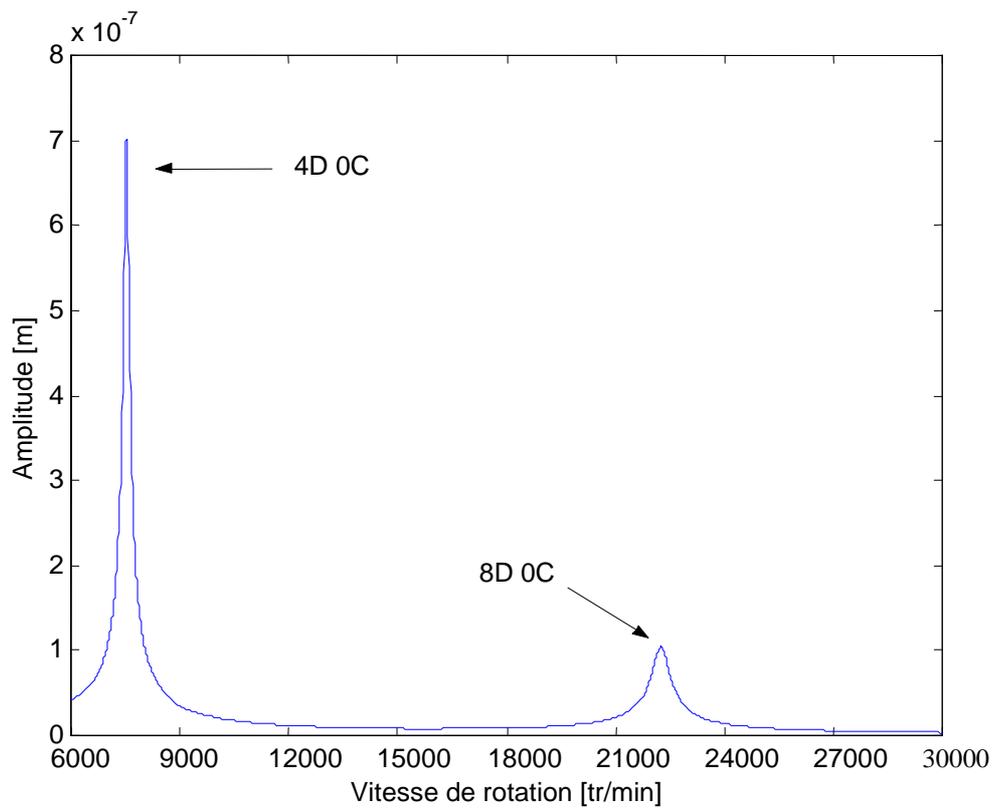


Figure 3.17 : Réponse du Disque liaisonné

## 4. CONCLUSION

Dans la littérature, les mécanismes de réponse des aubages sont essentiellement mis en évidence à l'aide de modèles très simplifiés qui n'ont que peu de rapport avec des structures réelles. L'objectif visé ici est de considérer des structures plus représentatives et d'analyser leurs mécanismes de réponses sous excitations réparties en utilisant l'approche décrite précédemment, donc sans formuler d'hypothèses réductrices.

La première structure considérée est un disque circulaire simplement découpé par des fentes sans épaisseur équiréparties. Cette structure présente donc la même surface en prise avec l'excitation qu'un disque axisymétrique équivalent mais devient géométriquement plus proche d'un ensemble aubé. Pour un ordre d'excitation  $H$ , le disque continu ne présenterait une réponse que sur le mode à  $H$  diamètres. Or, les résultats obtenus montrent que le disque découpé répond sur les modes d'ordre  $H$  mais également sur les modes d'ordre  $H^*$  avec

$$H^* = \alpha N \pm H \quad \text{avec} \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots$$

Le simple fait de découper le disque change le mécanisme de réponse qui devient homogène à celui mis en évidence dans le chapitre 1 pour le cas des structures ponctuelles

Les deux autres configurations traitées confirment ces mécanismes de réponse.

## **CHAPITRE 4**

### **APPLICATION A UN ETAGE DE TURBINE**

## 1. INTRODUCTION

Les chapitres précédents ont porté sur des structures au comportement représentatif mais qui restent académiques. L'objectif de ce dernier chapitre est d'examiner le problème de la réponse forcée des aubages sur une configuration réaliste. L'application retenue est basé sur une configuration de turbine basse vitesse à 4 étages.

Ce chapitre débute par un rappel rapide des modèles adaptés au calcul des écoulements en turbomachines. Il se poursuit ensuite par les développements effectués sur l'exemple test.

## 2. ECOULEMENTS EN TURBOMACHINE - MODELES DE BASE

Les équations qui régissent l'écoulement d'un fluide léger en équilibre thermodynamique sont les équations de Navier et Stokes. Cet écoulement dans les turbomachines est souvent de nature tridimensionnelle et instationnaire. Compte tenu de la complexité des problèmes rencontrés et de l'effort de calcul nécessaire à la résolution des équations de Navier et Stokes tridimensionnelles instationnaires, ce type de modélisation reste encore souvent inaccessible. De manière pratique, des approximations sont introduites afin d'alléger l'effort de calcul.

La nature de ces approximations dépend de divers facteurs. Les plus importants concernent le niveau d'exactitude requis et les ressources informatiques disponibles. Après analyse de la nature et de l'ordre d'importance des diverses forces en présence, il est possible de négliger certaines composantes. Les différents niveaux d'approximations généralement rencontrés sont les suivants [PEY90] :

**Equations de Navier-Stokes** : Les équations de Navier-Stokes sont considérées comme les équations les plus générales. Elles sont susceptibles de rendre compte des écoulements transsoniques, des ondes de chocs, des couches limites et des séparations.

Les équations de Navier-Stokes s'écrivent sous forme compacte, qui traduit la conservation des trois quantités fondamentales d'écoulement,  $\rho, \rho \mathbf{v}, \rho E$ . ( $\rho$  densité,  $\mathbf{v}$  vitesse,  $E$  énergie total). Le système des équations de Navier-Stokes doit être complété par une série d'équations complémentaires (lois constitutives définissant le tenseur des contraintes de cisaillement en fonction des autres variables d'écoulement, lois thermodynamiques des gaz...)

Pour permettre le traitement, un premier niveau d'approximation consiste à moyennner au cours du temps les fluctuations turbulantes. Ceci conduit aux équations de Navier-Stokes moyennées.

**Equations de Navier-Stokes Moyennées :** Bien qu'il y ait plusieurs manières de moyennner les quantités caractéristiques d'écoulement, la manière la plus commune est basée sur la moyenne de Reynolds. C'est une moyenne dans le temps avec un pas de temps qui est grand relativement à la période caractéristique du niveau de turbulence mais petit comparé aux échelles de temps de tous autres phénomènes instationnaires. En complément, un bon modèle de turbulence est nécessaire pour une prévision précise.

**Equations d'Euler :** Les équations d'Euler sont obtenues en négligeant les effets visqueux. Cette approximation introduit un changement fondamental puisque dans ce cas le système d'équations aux dérivées partielles à résoudre passe du deuxième au premier ordre.

**Equations Potentielles :** La simplification la plus importante est obtenue lorsque l'écoulement peut être considéré non-visqueux et irrotationnel. Dans ce cas, le champ tridimensionnel de vitesse peut être décrit comme dérivant d'un potentiel et traduit par une fonction simple scalaire  $\phi$ . Ainsi, la connaissance des trois composantes de vitesse se ramène à la détermination de la fonction potentielle  $\phi$ .

Les équations décrivant les écoulements potentiels peuvent être employées quand les ondes de choc sont absentes ou peu prononcées dans le domaine d'écoulement.

**Equations en petites perturbations de l'équation potentielle :** Dans des écoulements transsoniques stables ou instables autour des ailes ou des aubes, lorsque le rapport épaisseur/corde est faible (quelques pour cent), on peut généralement considérer que l'écoulement se fait principalement le long de la corde des profils. Dans ce cas, les vitesses

dans la direction transverse peuvent être négligées, ce qui conduit aux équations potentielles en petites perturbations.

Les méthodes numériques utilisées pour résoudre ces équations sont largement basées sur la technique des différences finies.

### **3. PRESENTATION DU MODELE**

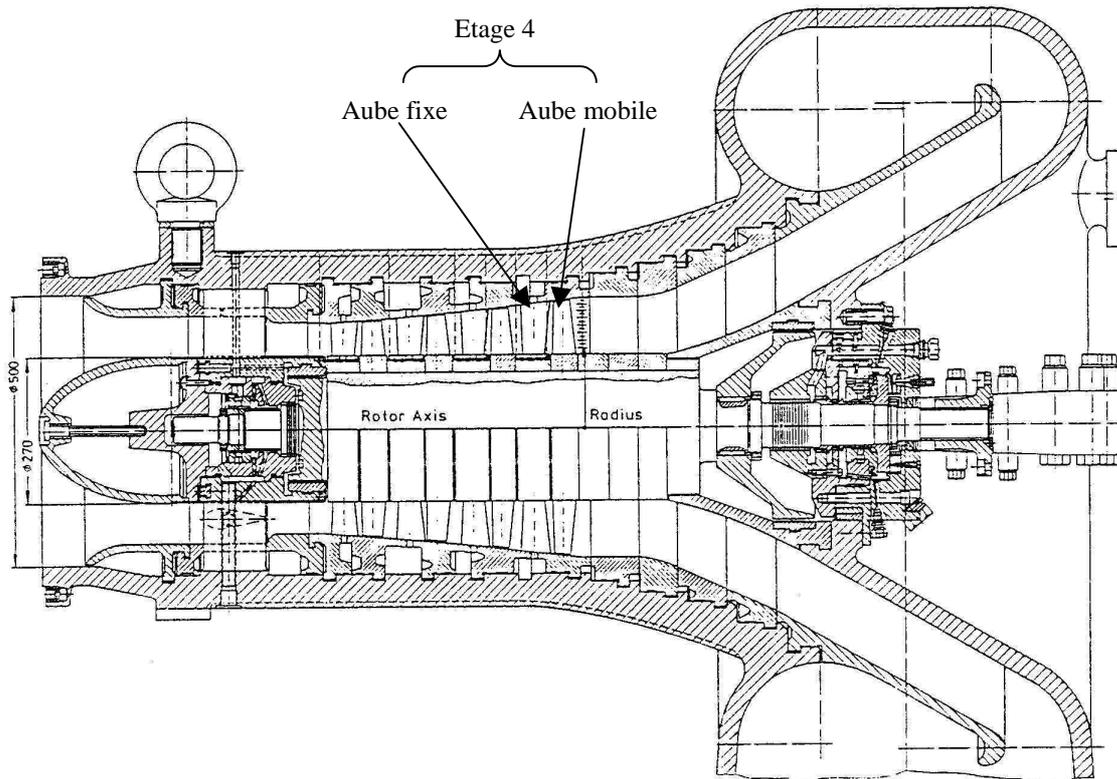
#### **3.1 INTRODUCTION**

L'exemple test utilisé est issu des travaux développés par l'un des groupes de travail AGARD (Advisory Group for Aerospace Research and Development) de l'Organisation du Traité de l'Atlantique Nord (OTAN). L'objectif de ce groupe était l'établissement et la diffusion de cas test expérimentaux pour servir de base à la validation des techniques numériques adaptées à la conception et à l'analyse des écoulements fluides en turbomachine. Le cas test retenu concerne une turbine basse vitesse de quatre étages. Il est tiré du rapport AGARD AR n° 275, "Exemples de Tests pour le Calcul des Ecoulements Internes dans les Organes des Moteurs d'Avion" [AGA90] et il s'agit du cas E/TU-4.

Les calculs d'écoulement ont été réalisés à partir du logiciel CFX-TASCflow [CFX00], adapté à l'étude des écoulements en turbomachines. Cet outil permet de traiter les écoulements subsoniques, transsoniques et supersoniques ainsi que les interactions rotor-stator. Il traite les fluides monophasés incompressibles ou compressibles, en régime stable ou transitoire, laminaire ou turbulent dans le cas de géométries complexes.

#### **3.2 DESCRIPTION DU CAS TEST - MODELES FLUIDE ET STRUCTURE**

La turbine axiale composée de quatre étages est présentée en coupe figure 4.1. L'application porte sur le dernier étage (numéro quatre) constitué d'un ensemble aubage fixe et aubage mobile.



**Figure 4.1** : Coupe d'une turbine axiale de 4 étages

Les conditions de fonctionnement de la turbine sont les suivantes :

$\Omega = 2008 \text{ tr/mn}$	Vitesse de rotation
$m_o = 7.8 \text{ kg/sec}$	Débit total
$P_1 = 260000 \text{ Pa}$	Pression statique en entrée
$T = 413 \text{ }^\circ\text{K}$	Température en entrée
$P_o = 102200 \text{ Pa}$	Pression statique en sortie
$T = 319 \text{ }^\circ\text{K}$	Température en sortie

Le diamètre de l'arbre supportant les aubes est constant et égal à 270 mm. La hauteur des aubes varie de 64 mm à 89 mm. La géométrie des aubes de l'étage 4 est donnée figure 4.2 et 4.3 . Les coordonnées des profils sont disponibles dans l'annexe F.

Le nombre d'aubes fixes est  $H = 30$  et le nombre d'aubes mobiles est  $N = 32$ .

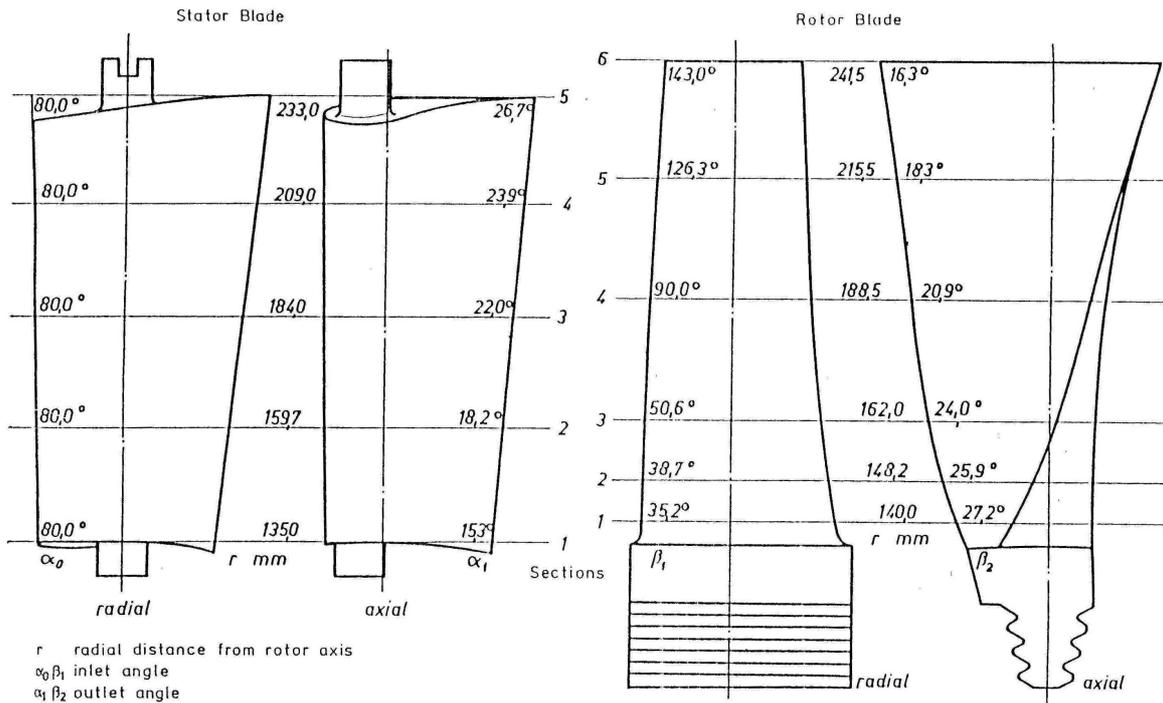


Figure 4.2 : Géométrie des aubes de l'étage 4

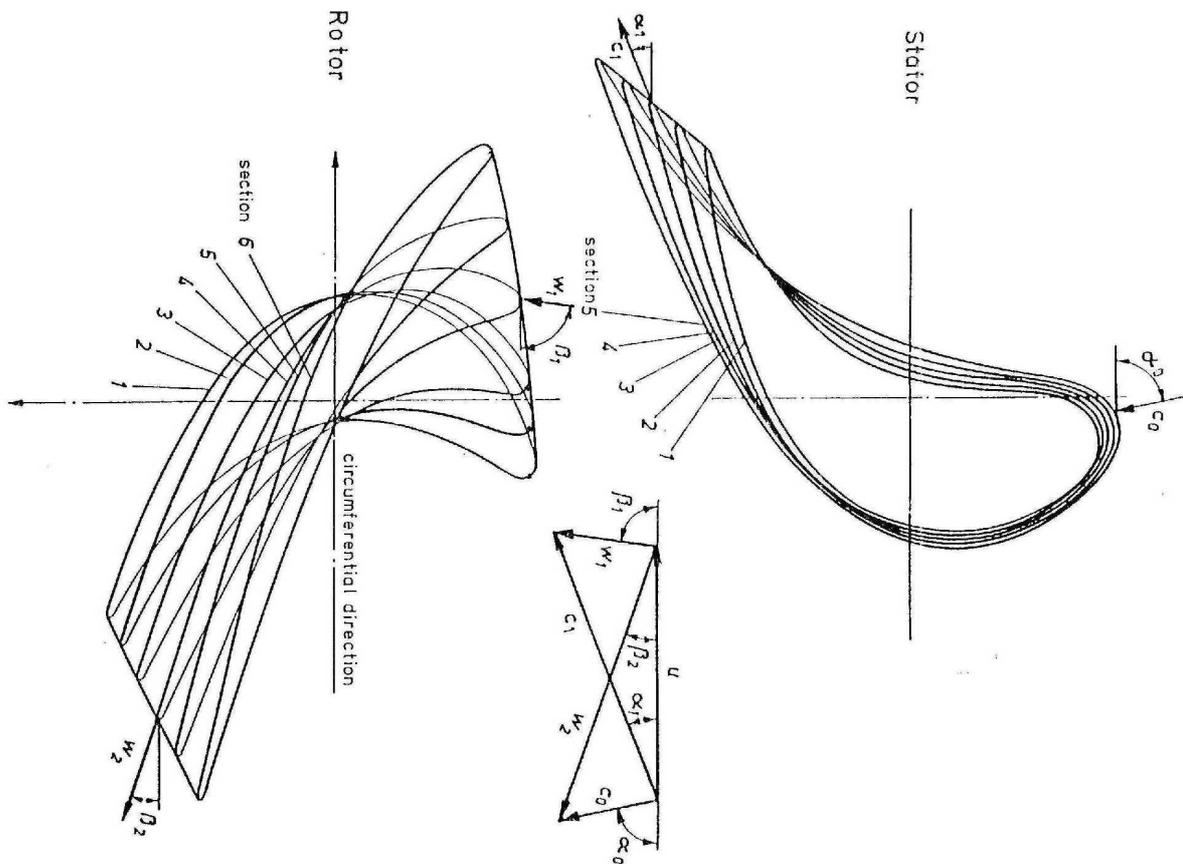
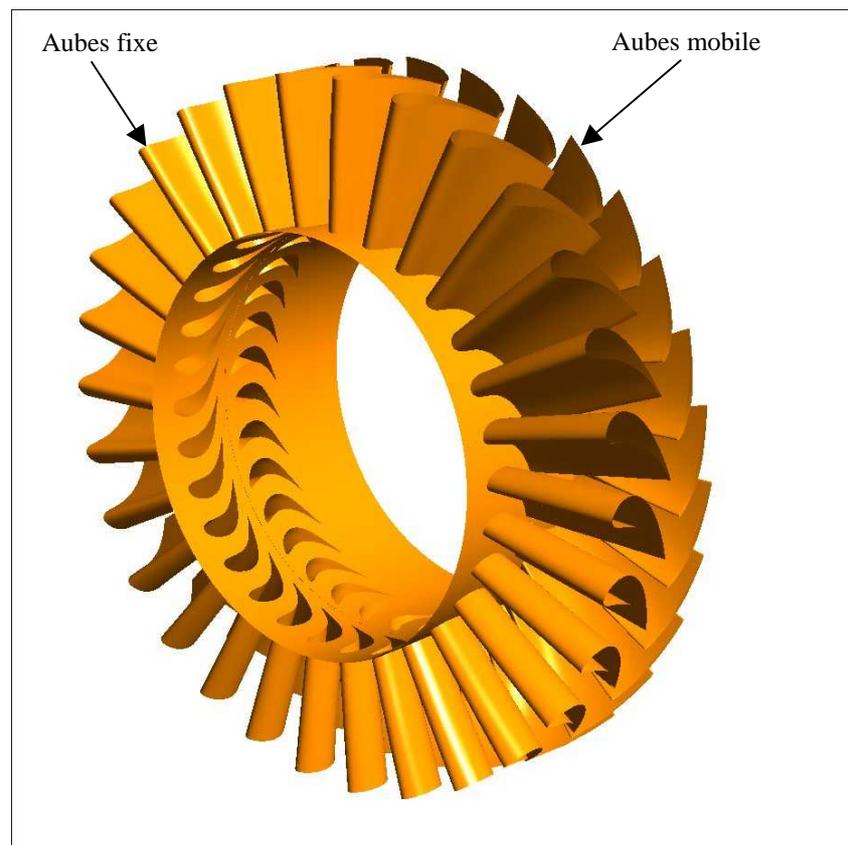


Figure 4.3 : Sections superposées des profils des aubes du stator et du rotor

### 3.3 MODELES STRUCTURE ET FLUIDE

S'agissant du calcul de la réponse de l'étage mobile dans un champ fluide perturbé par la traversée de l'étage fixe, le modèle structure n'est concerné que par l'étage mobile. La construction du maillage est faite avec le logiciel ANSYS, à partir des données fournies pour les profils en différentes hauteurs des aubes.

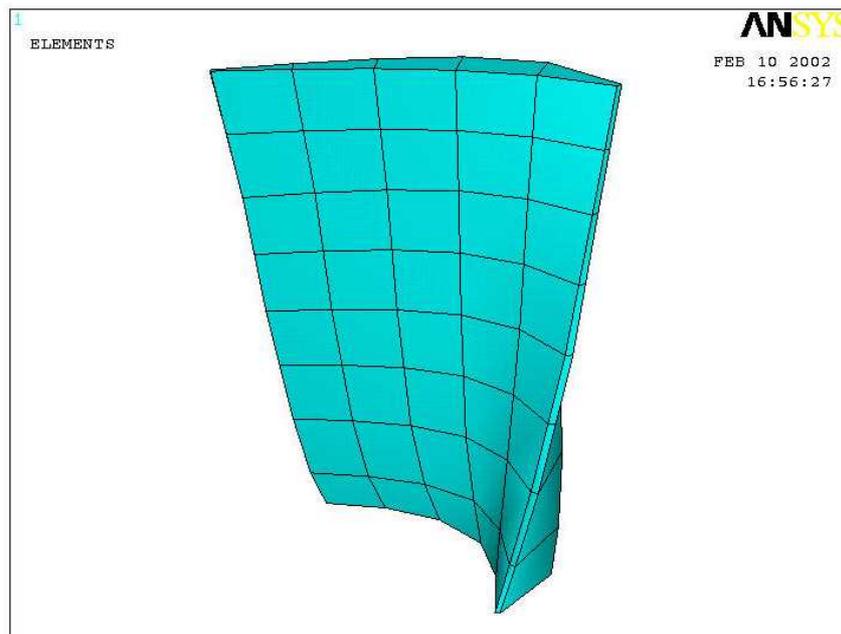
La modélisation de l'écoulement fluide concerne quant à elle les deux étages fixe et mobile (Figure 4.4 ) [CFX00]..



**Figure 4.4 :** Etages fixe et mobile

#### 3.3.1 MODELE STRUCTURE

Les aubes de l'étage mobile sont toutes identiques et la liaison aube/moyeu est supposée parfaitement rigide. Le calcul est donc fait à partir de la discrétisation d'une seule aube encastrée en pied. Une fois le modèle géométrique établi, le maillage est effectué en utilisant des éléments volumiques isoparamétriques à 20 nœuds (ANSYS Solid95). Le maillage est volontairement choisi grossier afin d'alléger la procédure de prise en compte des pressions fluides (40 éléments finis, 348 nœuds et 1044 degrés de liberté, figure 4.5 ).



**Figure 4.5 :** Maillage d'une aube mobile

Les conditions aux limites sont définies par un encastrement en pied d'aube (au rayon de 135 mm par rapport à l'axe de rotation) et libre ailleurs. L'amortissement est négligé ainsi que les effets gyroscopiques.

Le matériau considéré est le Titane avec les caractéristiques suivantes:

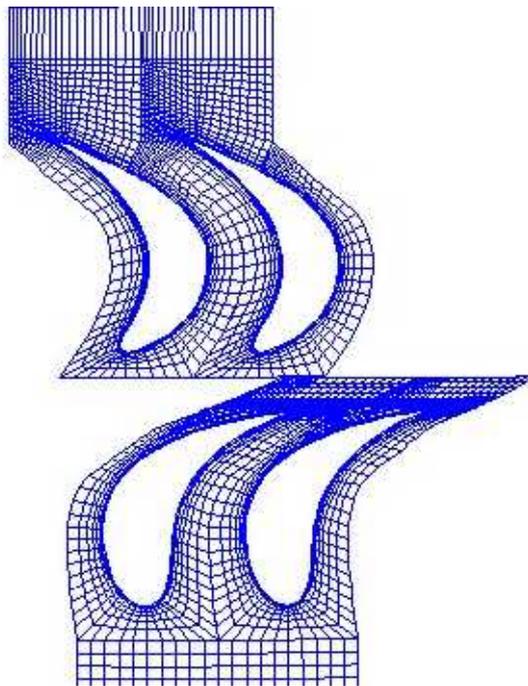
$$\begin{aligned}
 E &= 1.1e11 \text{ N/m}^2 && \text{Module d'Young} \\
 \rho &= 4430 \text{ kg/m}^3 && \text{Densité} \\
 \nu &= 0.35 && \text{Coefficient de poisson}
 \end{aligned}$$

### 3.3.2 MODELE FLUIDE

Le maillage des domaines fluide est effectué automatiquement en utilisant un élément volumique à 8 nœuds. Le résultat donne un maillage structuré. Cette technique de maillage présente l'avantage de mailler directement le volume mais le volume ainsi maillé ne suit pas au mieux la géométrie qui est de forme complexe. Le maillage obtenu, illustré figure 4.6 pour une section donnée est cependant suffisant pour l'étude envisagée.

Le fluide utilisé pour la simulation numérique est l'air avec les caractéristiques suivantes :

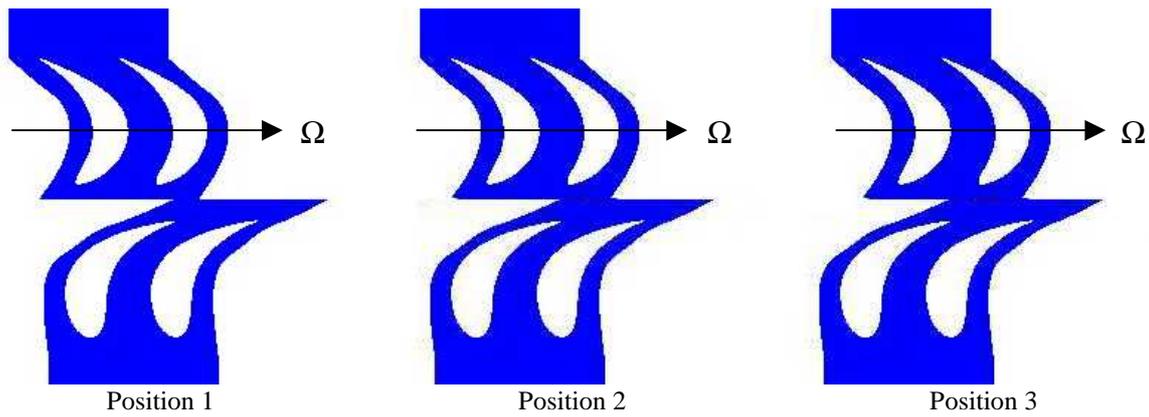
$\rho = 1.164 \text{ kg/m}^3$	Masse volumique
$\mu = 1.824 \text{ E}^{-5} \text{ kg/m.s}$	Viscosité
$C_p = 1012 \text{ J/kg k}$	Chaleur spécifique sous pression constante
$C_v = 718 \text{ J/kg k}$	Chaleur spécifique sous volume constant



**Figure 4.6 :** Maillage du fluide aux pieds des aubes

La partie mobile tourne à vitesse de rotation  $\Omega$  par rapport à la partie fixe et il s'agit de déterminer les efforts qui s'appliquent sur l'aubage mobile au cours de sa rotation dans l'écoulement perturbé issu de l'aubage fixe. L'interaction rotor/stator est modélisée ici de manière extrêmement simplifiée en supposant que ces efforts sont interpolés à partir de trois calculs discrets correspondant à différentes positions relatives des aubages: calcul à l'instant  $t=t_1$  où la position relative aube mobile aube fixe est illustrée par la position 1, à l'instant  $t=t_2=t_1+\Delta t$  (position 2) et à l'instant  $t=t_3=t_2+\Delta t$  (position 3). La Figure 4.7 montre les trois configurations.

Le régime d'écoulement est considéré comme globalement turbulent et les calculs réalisés sont des calculs stationnaires.



**Figure 4.7 :** Positions relatives des aubes aux instants  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$

## 4. RESULTATS

### 4.1 COMPORTEMENT DE LA STRUCTURE ISOLEE

L'évolution des fréquences propres avec la rotation est donnée figure 4.9 pour l'aube isolée. Les quatre premiers modes sont illustrés figure 4.8 . Les modes 1 et 4 sont des modes de flexion et les modes 2, 3 sont des modes de torsion (Tableau 4.1).

$\Omega$ tr/min	0	2000	4000	6000	8000	10000	12000
<b>1F</b>	1002.9	1003.9	1012.1	1022.4	1036.6	1054.5	1075.9
<b>1T</b>	2160.3	2161.5	2164.8	2170.4	2178.3	2188.2	2200.2
<b>2T</b>	2876.2	2877.2	2880.2	2885.1	2691.9	2900.7	2911.3
<b>2F</b>	3902.7	3904.9	3911.3	3922.0	3936.9	3955.9	3979.1

**TABLEAU 4.1 :** Fréquences naturelles [Hz]

L'étage fixe induit une perturbation d'ordre  $H = 30$ . Cette perturbation est susceptible d'exciter le premier mode de flexion des aubes mobiles ( $1003.9$  Hz), ceci à la vitesse de rotation  $\Omega=2008$  tr/mn (figure 4.9)

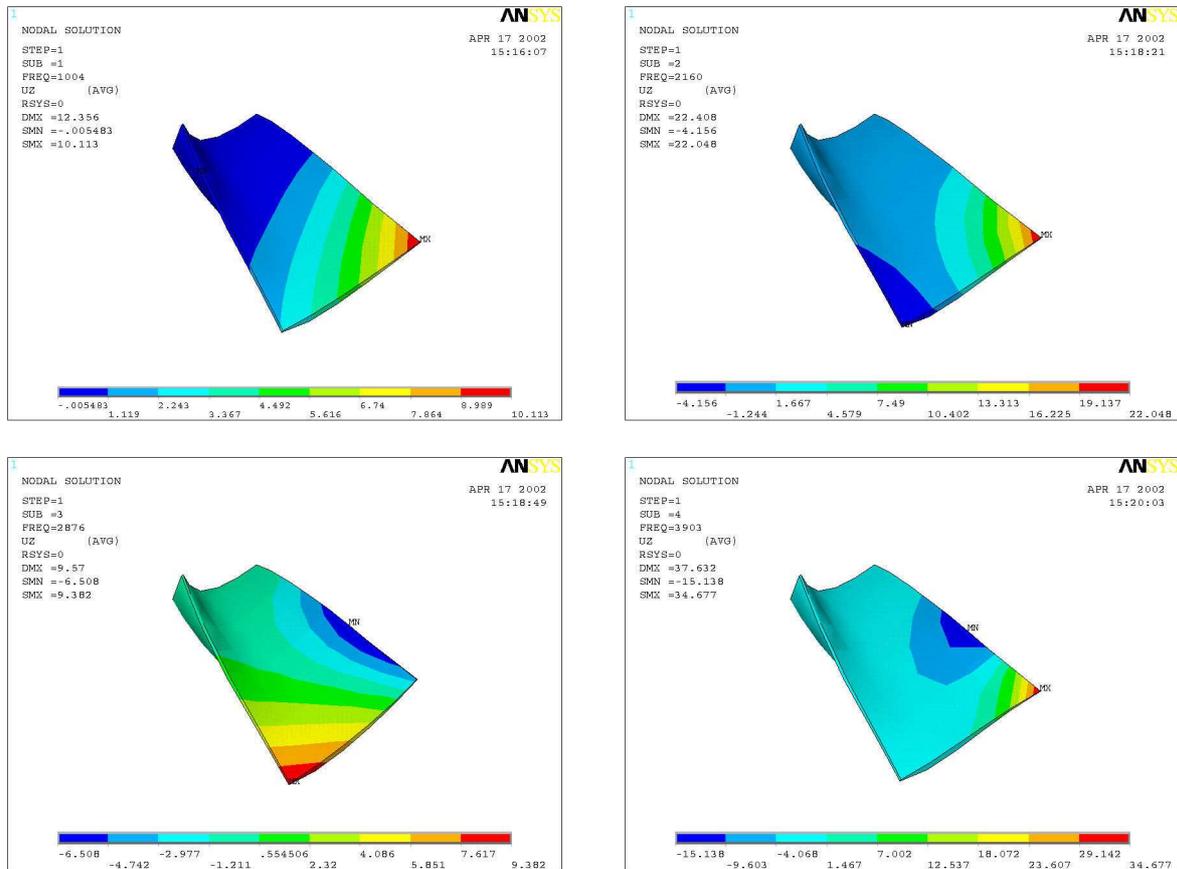


Figure 4.8 : Premiers modes de vibration naturelle de l'aube

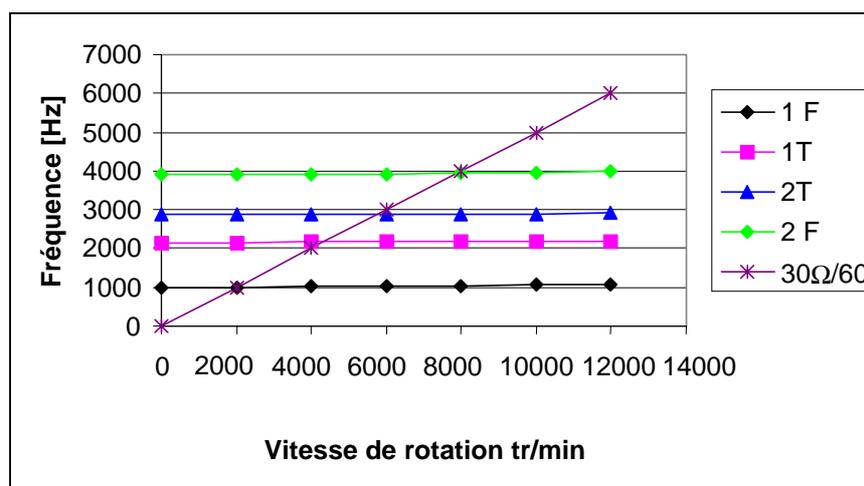
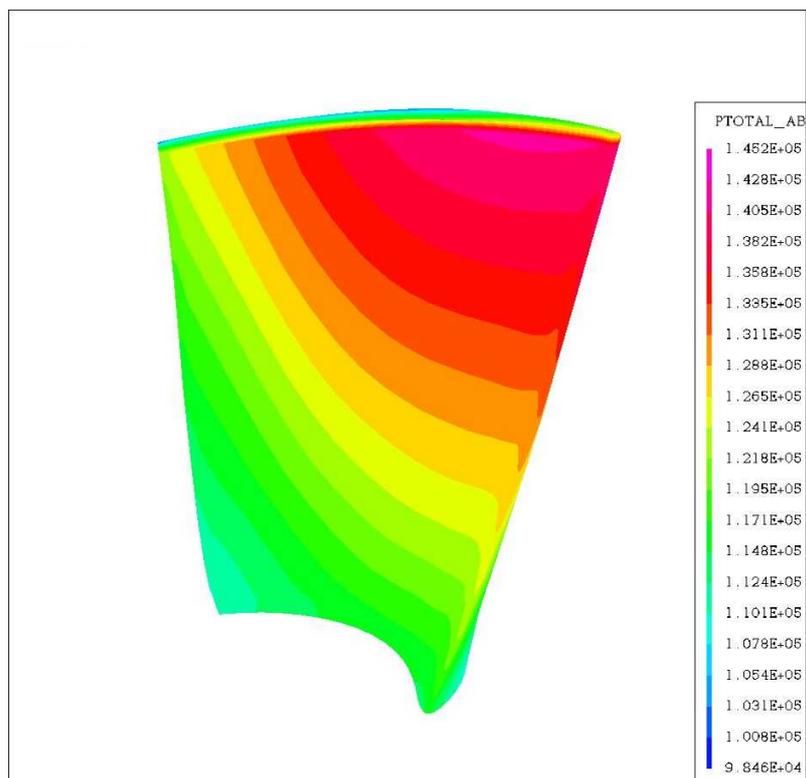


Figure 4.9 : Diagramme de Campbell. Résonances possibles

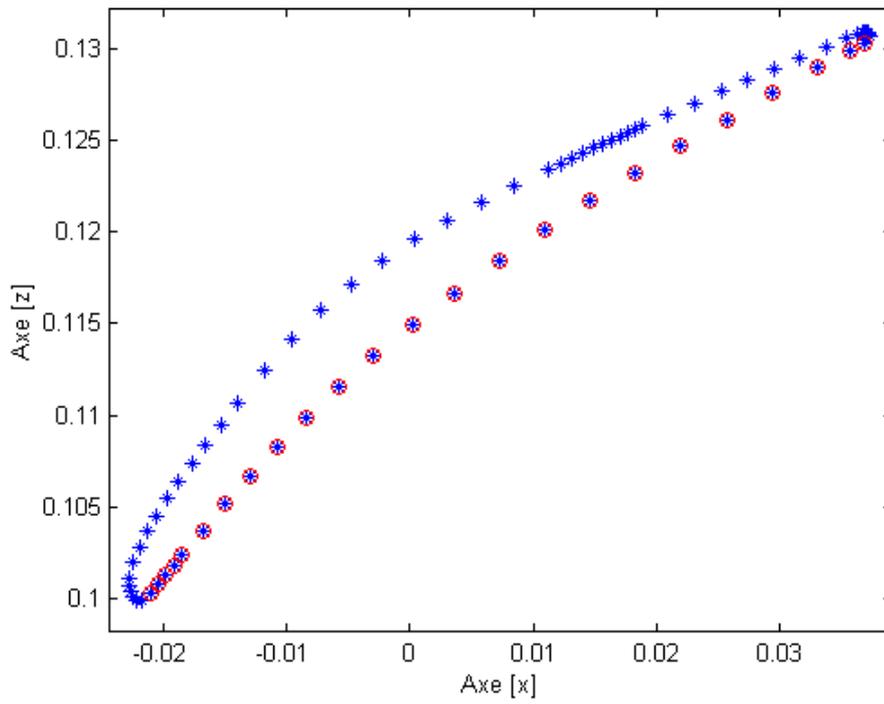
## 4.2 COMPORTEMENT DU FLUIDE

Les trois calculs, aux instants  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$ , fournissent le champ de pression qui agit sur la surface des aubes mobiles. Le champ de pression sur l'intrados des aubes à l'instant  $t_1$  est visualisé figure 4.10 sous forme d'iso-couleurs,.

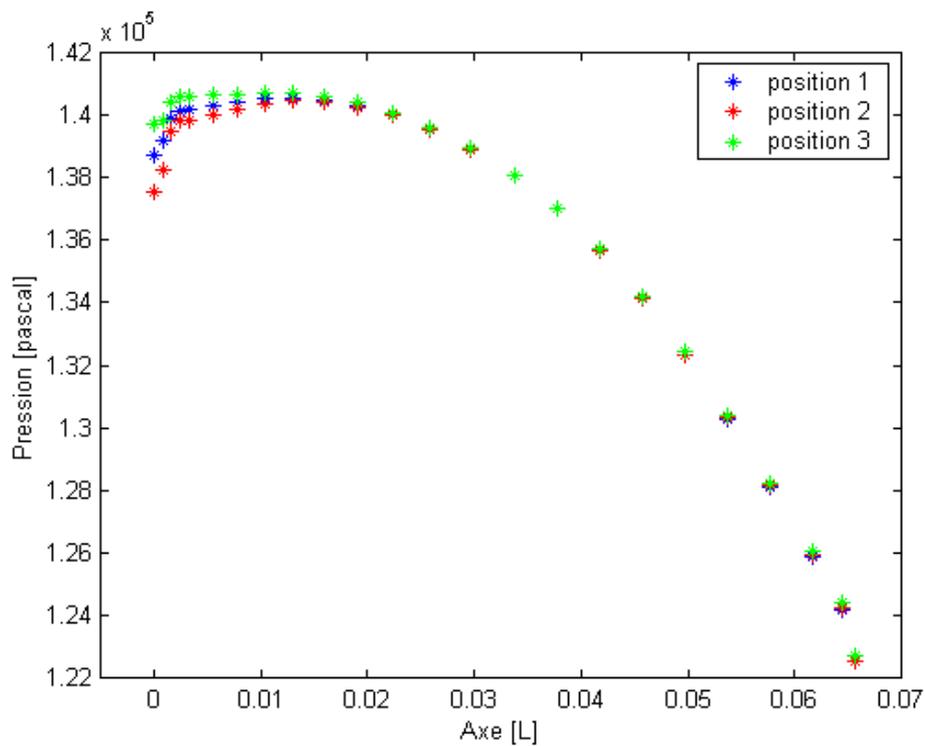
La figure 4.11 illustre les points de calcul de la pression pour une section donnée (rayon  $r=0.234\text{ m}$ ). La répartition de la pression sur l'intrados des aubes au niveau de cette section est reportée figure 4.12, pour une abscisse allant du bord d'attaque au bord de fuite et pour les trois positions considérées.



**Figure 4.10 :** Champ de pression sur l'intrados des aubes mobiles à l'instant  $t_1$



**Figure 4.11 :** Section d'aube mobile au rayon  $r = 0.234 \text{ m}$



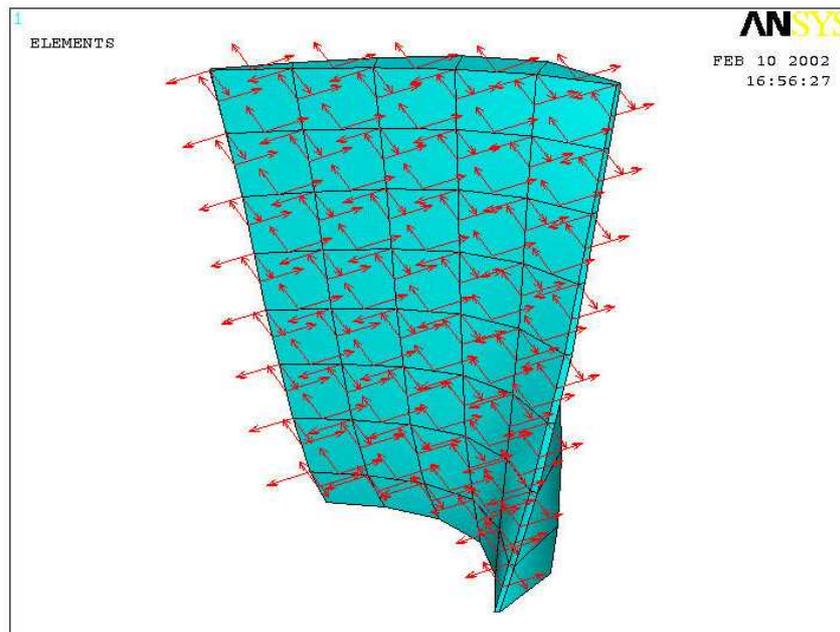
**Figure 4.12 :** Variation des pressions sur le profile au rayon  $r = 0.234 \text{ m}$

### 4.3 REPONSE DE LA STRUCTURE EN ROTATION

Le comportement dynamique de la structure est régi par l'équation (3-2) :

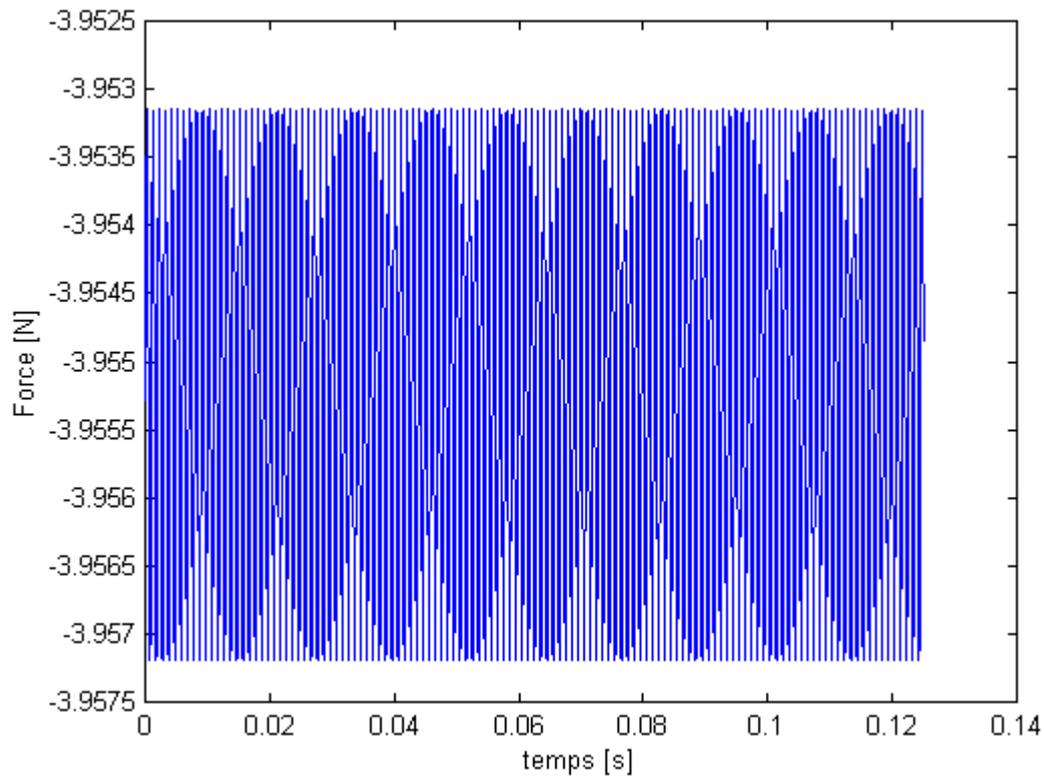
$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{w}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (4-1)$$

La transformation des champs de pression en forces nodales équivalentes se fait sur chaque élément après calcul des normales aux nœuds et en utilisant les fonctions de formes des éléments (cf chapitre 2 paragraphe 3.2.1). La procédure utilisée pour résoudre l'équation linéaire (4-1) est la méthode d'intégration temporelle pas à pas de Newmark.



**Figure 4.13 :** Forces nodales équivalentes

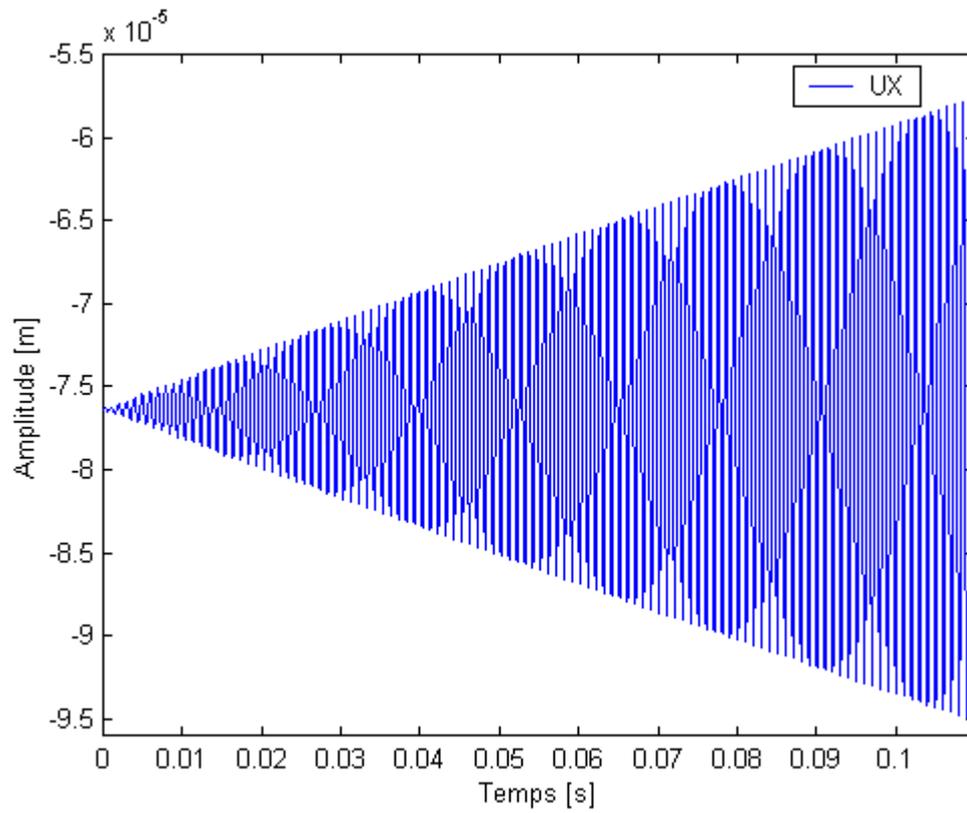
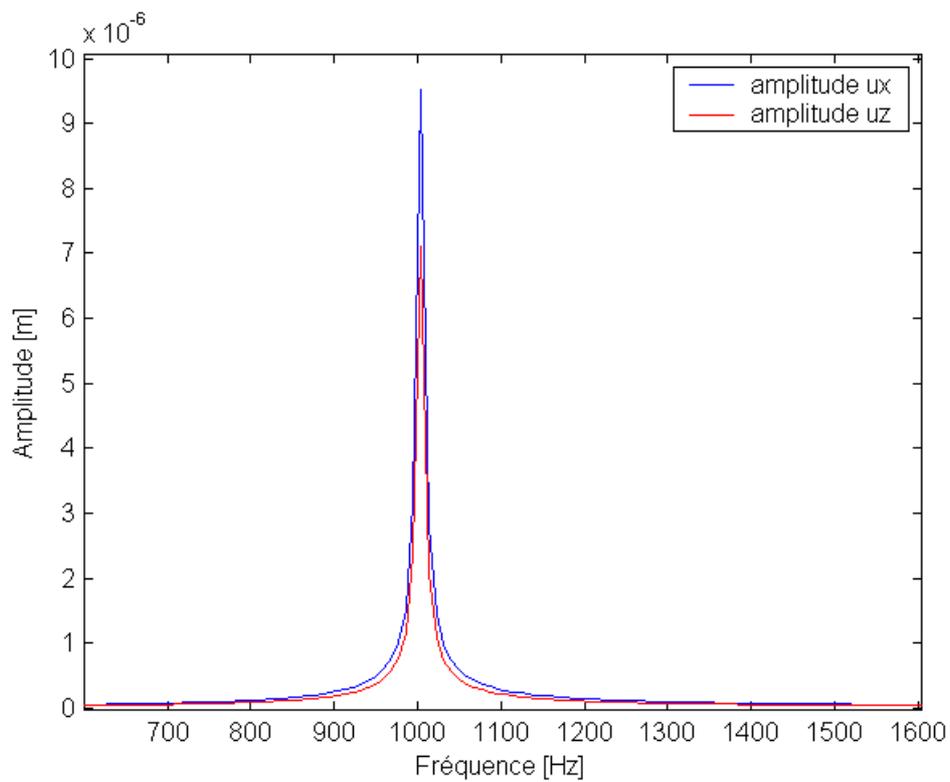
La variation des efforts appliqués sur une période est interpolée à partir des calculs effectués aux instants  $t_1$  à  $t_3$  et permet d'obtenir l'allure des forces nodales appliquées au cours du temps (figure 4.14)



**Figure 4.14 :** Variation des forces nodales équivalentes, au cours du temps

### 4.3.1 REPONSE DE LA STRUCTURE

La réponse de la structure, présentée figure 4.15, met clairement en évidence un état de résonance (augmentation linéaire des amplitudes au cours du temps). L'analyse du signal ne fait ressortir qu'un seul pic à 1003.9 Hz qui correspond bien au premier mode propre de la structure excité par la rotation à 2008 tr/mn dans un champ fluide perturbé (figure 4.9).

**Figure 4.15 : Réponse temporelle****Figure 4.16 : Pic de résonance**

## 5. CONCLUSION

Ce dernier chapitre porte sur une structure réelle et présente les calculs de réponse d'un étage de turbine excité par la rotation dans un champ fluide perturbé par la présence d'un étage fixe situé à l'amont.

Les calculs, simplifiés, sont effectués à l'aide de codes de calcul commerciaux: ANSYS pour la structure et CFX-TASCFlow pour le fluide.

Les calculs de réponse confirment bien l'excitation possible prédite à partir d'un diagramme de Campbell. De plus, ils fournissent les niveaux vibratoires nécessaires pour juger de la dangerosité des résonances détectées.

## **CONCLUSION GENERALE**

L'un des mécanismes principaux d'excitation des aubages est lié à la rotation de la structure dans un champ fluide stationnaire perturbé. Ces perturbations sont induites par les obstacles traversés par le fluide (pattes de fixation des carters, étages amont...). Conjuguées à la rotation elles agissent sur l'aubage comme une force répartie variable au cours du temps et sont donc capables, sous certaines conditions, d'exciter ses fréquences naturelles.

L'objectif du travail présenté ici est double et consiste à améliorer les techniques de modélisation adaptées au problème et à les utiliser pour mieux maîtriser les mécanismes d'excitation susceptibles d'intervenir sur les structures réelles.

L'amélioration des techniques de modélisation passe par la maîtrise de la prise en compte de champs d'excitation répartis dans les modélisations éléments finis. Il s'agit de déterminer l'influence de la transformation des champs de pression en forces nodales équivalentes et de mettre en évidence l'effet des approximations retenues pour la modélisation de la pression .

Les mécanismes d'excitation mis en évidence dans la littérature sont quant à eux associés à des cas limites où les aubes sont par exemple supposées ponctuelles. Il s'agit donc de prolonger ces études et de mettre en évidence la validité des mécanismes sur des structures plus proches de structures réelles.

Le premier chapitre se divise en deux parties. La première rappelle les mécanismes d'excitation connus alors que la seconde présente le développement d'un modèle analytique portant sur la réponse forcée des plaques circulaires uniformes. Ce type d'application offre l'avantage d'être suffisamment proche des comportements envisagés et de se caractériser par un comportement dynamique parfaitement connu et maîtrisé.

Le second chapitre s'intéresse à la prise en compte des champ de pression dans les modèles éléments finis. Le modèle analytique développé sert de référence. Les résultats permettent de conclure que:

- La finesse des maillages doit être établie en fonction des caractéristiques intrinsèques de la structure mais également en fonction de la complexité des champs de pression à considérer. Un maillage de finesse suffisante pour rendre compte correctement des fréquences et modes de la structure peut s'avérer insuffisant lorsqu'il s'agit de prendre en compte de fortes variations spatiales du champ d'excitation en réponse forcée.

- Une hypothèse de variation linéaire de la répartition de pression sur chaque élément donne des résultats moins bon qu'une hypothèse de répartition constante. Lorsque le maillage est suffisamment fin, ce dernier type d'approximation est donc satisfaisant.
- Le processus de transformation du champ de pression en forces nodales équivalentes peut conduire à des réponses parasites. Cet inconvénient disparaît lorsque le maillage est fin.

Le troisième chapitre est basé sur trois applications qui, tout en restant simples, ont un comportement proche de ceux des aubages réels. L'ensemble des résultats obtenus montre que les mécanismes de réponse des ensembles aubés sont homogènes et que toute excitation d'ordre  $H$  est susceptible d'exciter les modes d'ordre  $H$  mais également les modes d'ordre  $H^*$  où:  $H^* = \alpha N \pm H$  avec  $\alpha = 1, 2, 3, \dots$

Le dernier chapitre s'intéresse à une configuration réelle. Il s'agit d'étudier la réponse d'un étage de turbine excité par la rotation de ce dernier dans un champ fluide perturbé par la présence d'un étage fixe situé à l'amont. Les résultats confirment les mécanismes d'excitation mis en évidence et permettent d'accéder au niveau de réponse réels sous excitation induite par l'environnement.

## **REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES**

- [ANS01] **ANSYS**, User's Manuals, Swanson Analysis Systems, Version 5.7.1.
- [CEL80] **CELEP Z.** Free Vibration of Some Circular Plates of Arbitrary Thickness. *Journal of Sound and Vibration*, 1980, vol 70 n° 3, pp 379-388.
- [CFX00] **CFX** (Computational Fluid Dynamics), Software Version 2.10 2000, AEA Technology.
- [CHE92] **CHEN J. S., BOGY D. B.** Effects of Loed Parameters on the Natural Frequencies and Stability of Flexible Spinning Disk With a Stationary load System, *Journal of Applied Mechanics*, 1992, vol 59, pp 230-235.
- [CHE94] **CHEN J. S.** Stability Analysis of a Spinning Elastic Disk Under a Statioary Concentrated Edge Load, *Journal of Applied Mechanics*, 1994, vol 61, pp 788-792.
- [CHE97] **CHEN J. S.** Parametric Resonance of a Spinning Disk Under Space-Fixed Pulsating Edge Loads, *Journal of Applied Mechanics*, 1997, vol 64, pp 139-143.
- [DEM81] **DEMINDOVICH B. P., MARON I. A.** *Computational Mathematics*, 3<sup>e</sup> Edition Moscow : Mir Publishers., 1981, 688 p.
- [DHA81] **DHATT G., TOUZOT G.** *Une Présentation de la Méthode des éléments finis*, 2<sup>e</sup> Edition. Paris : Maloine S. A. Editeur, 1984, 543 p. (Collection Université de compiegne) IBSN 2.224-00924-0 (Maloine)
- [AGA90] **ADVISORY GROUP FOR AEROSPACE RESEARCH AND DEVELOPEMENT**, Exemples de Tests pour le Calcul des Ecoulements Internes dans les Organes des Moteurs d'avion, Rapport AGARD AR n° 275, 1990, 391 p.
- [EVE68] **EVERSMAN W.** Transverse Vibrations of a Clamped Spinning Membrane, *AIAA Journal*, 1968, vol 6 n° 7, pp 1395-1397.
- [EVE69] **EVERSMAN W., DODSON R O.** Free Vibration of Centrally Clamped Spinning Circular Disk, *AIAA journal*, 1969, vol 7 n° 10, pp 2010-2012.
- [GHO97] **GHOSH A. K.** Axisymmetric Dynamic Response of a Circular Plate on an Elastic Foundation, *Journal of Sound and Vibration*, 1997, vol 205 n° 1, pp 112-120.
- [GUL95] **GULLER K., CELEP Z.** Static and Dynamic Response of a Circular Plate on a Tensionless Elastic Foundation, *Journal of Sound and Vibration*, 1995, vol 183 n° 2, pp 185-195.
- [GUP99] **GUPTA A. P., GOYAL N.** Forced Axymmetric Response of Linearly Tapered Circular Plates, *Journal of Sound and Vibration*, 1999, vol 220 n° 4, pp 641-657.

- [GUP00] **GUPTA U. S., ANSARI A. H.** Formced Axi-Symmetric Response of Polar Orthotropic Linearly Tapered Circular Plates, *Journal of Sound and Vibration*, 2000, vol 236 n° 4, pp 623-636.
- [HAM99] **HAMIDZADEH H. R., DEHGHANI M.** Linear In-Plane Free Vibration of A Rotating Disk, *ASME paper*, 1999, DETC99/VIB-8146, 10 p.
- [HAN00] **HANSEN M. H.** Effect of High-Frequency Excitation on Natural Frequencies of Spinning Discs, *Journal of sound and Vibration*, 2000, Vol 234 n° 4, pp 577-589.
- [HON85] **HONDA Y., MATSUHISA H., SATO S.** Modal Response of a Disk to a Moving Concentrated Harmonic Force. *Journal of sound and Vibration*, 1985, Vol 102, pp 457-472.
- [HUA00] **HUANG CHI-HUNG., MA CHIEN-CHING.** Vibration of Cracked Circular Plates at Resonance Frequencies. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, vol 236 n° 4, pp 637-656.
- [HUT84] **HUTCHINSON J. R.** Vibration of Thick Free Circular Plates, Exact Versus Approximate Solutions. *Journal of Sound and Vibration*, 1984, vol 51, pp 581-585.
- [HUT88] **HUTCHINSON J. R.** Response of a Free Circular Plate to a Central Transverse load, *Journal of Sound and Vibration*, 1988, vol 123 n° 1 pp 129-143.
- [IRI80] **IRIE T., YAMADA G, AOMURA S.** Natural Frequencies of Minlin Circular Plates. *Journal of applied Mechanics*, 1980, vol 47, pp 652-655.
- [JAC92] **JACQUET-RICHARDET G., DELBEZ A., HENRY R.** Comportement dynamique d'une roue de Turbine en Rotation, *Mécanique Matériaux Electricité*, 1992, n° 444, pp 45-48.
- [JAY84] **JAY R. L., MACBAIN J. C., BURNS D. W.** Structural Response Due to Blade Vane Interaction. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 1984, vol 106, pp 50-56.
- [KRZ00] **KRZYZYNSKI T., POPP K., SEXTRO W.** One Same Regularities in dynamic Response of cyclic periodic Structures, *Chaos, Solutions and Fractals*, 2000, vol 11, pp 1597-1609.
- [LAL92] **LALANNE M., BERTHIER P., DER HAGOPIAN J.** *Mécanique des Vibrations Linéaires*, 2<sup>e</sup> Edition, Paris : Masson, 1992, 243 p.
- [LAM21] **LAMB H., SOUTHWELL R. V.** The vibration of Spinning Disc, *proceedings of the Royal Society*, london, 1921, vol 99, pp 272-280.

- [LEI77] **LEISSA A. W.** Recent Research in plate Vibrations : Classical Theory. *Shock and Vibration Digest*, 1977, vol 9, pp 13-24.
- [LEI78] **LEISSA A. W.** Recent Research in plate Vibrations, 1973-1976 : Complicating effects. *Shock and Vibration Digest*, 1978, vol 10, pp 21-35.
- [LEI81] **LEISSA A. W.** Plate Vibrations Research, 1976-1980 : Complicating effects. *Shock and Vibration Digest*, 1981, vol 13, pp 19-36.
- [LEI87] **LEISSA A. W.** Recent Studies in Plate Vibrations, 1981-1985, part I. Classical Theory, *Shock and Vibration Digest*, 1987, vol 19, pp 11-18.
- [LEI87] **LEISSA A. W.** Recent Studies in Plate Vibrations, 1981-1985, part II. Complicating effects, *Shock and Vibration Digest*, 1987, vol 19, pp 10-24.
- [LEI92] **LEISSA A. W., CHERN Y.** Approximate Analysis of Forced Vibration Response of Plates, *Journal of Vibration and Acoustics*, 1992, vol 114, pp 106-111.
- [LUO00] **LUO A. C. J., MOTE C. D., Jr.** Nonlinear Vibration of Rotating Thin Disks, *Journal of Vibration and Acoustics*, 2000, vol 122, pp 376-383.
- [LUO01] **LUO A. C. J., CHEN A.** Resonant and Stationary Waves in Rotating Disks, *Nonlinear Dynamics*, 2001, vol 24, pp 359-372.
- [MAN91] **MANOACH E.** Dynamic Response of Elastoplastic Mindlin Plate by Mode Superposition Method, *Journal of Sound and Vibration*, 1991, vol 162 n° 1, pp 165-175.
- [MEH92] **MEHDIGHOLI H., ROBB D. A., EWINS D. J.** Prediction of Forced Response of a Rotating Disc, *International Conference on Engineering Applications of Mechanics*, Tahrán, 1992, pp 274-282.
- [MOH01] **MOHAMAD A. H., JACQUET-RICHARDET G., RAVOUX J.** Forced Response of Disks Due to Distributed Pressure Fields. USA : *ASME paper*, DETC2001/VIB-21392, 2001, 9 p.
- [MOT78] **MOTE C. D., SZYMANI, R.** Circular Saw Vibration Research, *Shock and Vibration Digest*, 1978, Vol 10, pp 15-30.
- [MOT82] **MOTE C. D., SCHAJER G. S., Wu W. Z.** Band Saw and Circular Saw Vibration and Stability. *Shock and Vibration Digest*, 1982, Vol 14, pp 19-25
- [MOY98] **MOYROUD F.** *Fluid-Structure integrated computational methods for turbomachinery blade flutter and forced response predictions.* Thèse de doctorat : INSA de Lyon (98 ISAL 0101) thesis : KTH Stockholm (TRITA-KRV-1998-2), 1998. 148 p.

- [MYS75] **MYSKIS A. D.** *Advanced Mathematics for Engineers*, Moscow : Mir Publishers, 1975, 794 p.
- [NAY99] **NAYFEY A. H., JILANI A., MANZIONE P.** Transverse Vibrations of a Centrally Clamped Rotating Circular Disk, *ASMS paper*, 1999, DETC99/VIB-8177, 12 p.
- [PAS67] **PASKE T. F., SCHLACK A. L.** Dynamic Response of Plates Due to Moving Loads, *Journal of the Acoustical Society of America*, 1967, vol 42, n° 3 pp 625-635.
- [PEY90] **PEYRET R., TAYLOR T. D.** *Computational Methods for Fluid Flow*, New York : Springer-Verlag, 1990, 357 p.
- [PIS74] **PISKUNOV, N.**, *Differential and Integral calculus*. vol II. Moscow : Mir Publishers, 1974, 328 p.
- [RAD90] **RADE L., WESTERGEN B.** (BETA) *Mathematics Handbook, Concepts, Theorems, Methods, Algorithms, Formulas, Graphs, Tables*, 2° Edition. Lund, Sweden : Studentlitteratur, 1990, 495 p. ISBN 91-44-25052-5
- [RAM73] **RAMAIAH G. K., VIJAYAKUMAR K.** Natural Frequencies of Polar Orthotropic Annular Plates, *Journal of Sound and Vibration*, 1973, vol 26 n° 3, pp 517-531.
- [RAO75] **RAO S. S., PRASAD A. S.** Vibration of Annular Plates Including the Effects of Rotatory Inertia and Transverse Shear Deformation, *Journal of Sound and Vibration*, 1975, vol 42 n° 3, pp 305-324.
- [RZA96] **RZADKOWSKI R.** Transient Nozzle Excitation Of Mistuned Bladed Discs, *Journal of Sound and Vibration*, 1996, vol 190 n° 4 pp 629-643.
- [SHE91] **SHEN I. Y., MOTE C. D., Jr.** On the Mecanisms of Instability of Circular Plate Under a Rotating Spring-Mass-Dashpot system, *Journal of Sound and Vibration*, 1991, vol 148 n° 2, pp 307-318.
- [SRI80] **SRINIVASAN V., RAMAMURTI V.** Dynamic Response of An Annular Disk to a Moving Concetrated, In-Plane Edge Load, *Journal of Sound and Vibration*, 1980, vol 72 n° 2 pp 251-262.
- [SZI74] **SZILARD R.** *Theory and analysis of plates classical and numerical methods*, New Jersey : Prentice-Hall, INC., Englewood Cliffs, 1974, 413 p.
- [THO79] **THOMAS D. L.** Dynamics of Rotationally periodic structures, *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, 1979, vol 14, pp 81-102.

- [VOG65] **VOGEL S. M., SKINNER D. W.** Natural Frequencies of Transversely Vibrating Uniform Annular Plates. *Journal of Applied Mechanics*, 1965, vol 32 n° 4 pp 926-931.
- [WEI89] **WEISENSEL G. N.** Natural Frequency Information For Circular and Annular Plates. *Journal of Sound and Vibration*, 1989, vol 133 n° 1, pp 129-134.
- [WEI89] **WEISENSEL G. N., SCHLACK A. L.** Forced response of Rotating Thin Annular Plates to Moving Concentrated Transverse loads With Sudden Changes Radial Position, *Modal analysis. 7<sup>th</sup> International Conference*, las Vegas, Nevada, 1989, vol 7, pp 1199-1204.
- [WEI90] **WEISENSEL G. N., SCHLACK A. L., Jr.** Annular Plate Response to Circumferentially Moving Loads With Sudden Radial Position Changes, *The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, 1990, vol 5 n° 4 pp 239-250.
- [WEI93] **WEISENSEL G. N., SCHLACK A. L., Jr.** Response of Annular Plates to Circumferentially Moving loads. *Journal of Applied Mechanics*, 1993, Vol 60, pp 649-661.
- [WIL79] **WILDHEIM S. J.** Excitation of Rotationally Periodic Structures. *Journal of Applied Mechanics*, 1979, vol 46, pp 878-882.
- [YU87] **YU R. C., MOTE C.D.** Vibration and Parametric Excitation in Asymmetric Circular Plates Under Moving Loads, *Journal of Sound and Vibration*, 1987, vol 119 n° 3 pp 409-427.

## **ANNEXES**

**ANNEXE A****SERIES DE FOURIER DISCRETES :****Conditions d'orthogonalité**

Soit  $F(\theta, t)$ , une fonction continue représentant les efforts générés sur un ensemble de  $N$  aubes ponctuelle et donnée par la relation suivante :

$$F(\theta, t) = F_0 \cos H(\theta - \Omega t) \quad (\text{A-1})$$

Le travail exercé sur chaque aube est donné par la relation :

$$\int_0^{2\pi} F(\theta, t) \cos(n\theta) \delta(\theta - \theta_i) d\theta \quad (\text{A-2})$$

avec  $\delta$  fonction Dirac et  $\theta_i = \frac{2\pi}{N}(i-1)$

La fonction Dirac  $\delta(\theta - \theta_i)$  peut être développée sur la période  $T = 2\pi/N = 2l$ , en utilisant les séries de Fourier :

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta \quad (\text{A-3})$$

$$\delta(\theta - \theta_i) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi\theta}{l} + b_k \sin \frac{k\pi\theta}{l} \quad (\text{A-4})$$

avec :

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\theta) d\theta$$

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\theta) \cos \frac{k\pi\theta}{l} d\theta$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\theta) \sin \frac{k\pi\theta}{l} d\theta$$

Soit après calcul:

$$a_0 = \frac{N}{\pi}$$

$$a_0 = \frac{N \cos(2\pi k(i-1))}{\pi}$$

$$a_0 = \frac{N \sin(2\pi k(i-1))}{\pi}$$

$$\delta(\theta - \theta_i) = \frac{a_0}{2} + \left( \sum_{k=1}^L \left( \frac{N \cos(2\pi k(i-1)) \cos(kN\theta)}{\pi} + \frac{N \cos(2\pi k(i-1)) \cos(kN\theta)}{\pi} \right) \right) \quad (\text{A-5})$$

Le passage d'une période  $T = 2\pi/N = 2l$  à une période de  $2\pi$  (ensemble des aubes) se fait par sommation:

$$\sum_{i=1}^N \delta(\theta - \theta_i)$$

$$\delta(\theta - \theta_i) = \sum_{i=1}^N \frac{a_0}{2} + \left( \sum_{k=1}^{\alpha} \left( \frac{N \cos(2\pi k(i-1)) \cos(kN\theta)}{\pi} + \frac{N \cos(2\pi k(i-1)) \cos(kN\theta)}{\pi} \right) \right) \quad (\text{A-6})$$

avec :  $\alpha$  ordre de la série de Fourier

L'équation (A-6) peut être réécrite sous la forme :

$$\delta(\theta - \theta_i)(N, \alpha) = \frac{N^2}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \cos(N\theta) + \cos(2N\theta) + \dots + \cos(\alpha N\theta) \right) \quad (\text{A-7})$$

expression qui compte tenu de la relation (2) est nulle sauf pour :

$$n = \alpha N \pm H \quad \text{avec} \quad \alpha = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A-8})$$

Cette propriété peut également être démontrée à partir des relations (A-1) et (A-2). En reportant (A-1) dans (A-2) et en ne conservant que l'un des deux termes obtenus, il vient:

$$\int_0^{2\pi} \cos(n\theta) \cos(H\theta) \delta(\theta - \theta_i) d\theta \quad (\text{A-9})$$

Compte tenu des propriétés de la fonction Dirac, (A-9) s'écrit:

$$\sum_{i=1}^N \cos(n\theta_i) \cos(H\theta_i) \quad (\text{A-10})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \cos(H+n)\theta_i + \cos(H-n)\theta_i$$

$$= \frac{1}{2} R_e \left( \left( \sum_{i=1}^N e^{j(H+n)\theta_i} \right) + \left( \sum_{i=1}^N e^{j(H-n)\theta_i} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} R_e \left( \left( \sum_{i=1}^N e^{j \frac{(H+n)2\pi}{N} i} \right)^{i-1} + \left( \sum_{i=1}^N e^{j \frac{(H-n)2\pi}{N} i} \right)^{i-1} \right) \text{ avec } \theta_i = \frac{2\pi}{N} (i-1)$$

$$= \frac{1}{2} R_e \left( \left( \frac{1 - e^{j \frac{(H+n)2\pi N}{N}}}{1 - e^{j \frac{(H+n)2\pi}{N}}} \right) + \left( \frac{1 - e^{j \frac{(H-n)2\pi N}{N}}}{1 - e^{j \frac{(H-n)2\pi}{N}}} \right) \right)$$

Cette dernière relation se décompose à l'aide d'une série géométrique de la forme :

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{N-1} = \begin{cases} \frac{1 - a^N}{1 - a} & \text{si } a \neq 1 \\ N & \text{si } a = 1 \end{cases} \quad (\text{A-11})$$

En considérant cette série géométrique, on déduit,

$$\sum_{i=1}^N \cos(n\theta_i) \cos(H\theta_i) = \frac{1}{2} R_e \{(N) + (0)\} \quad \text{si} \quad H + n = \alpha N$$

$$\sum_{i=1}^N \cos(n\theta_i) \cos(H\theta_i) = \frac{1}{2} R_e \{(0) + (N)\} \quad \text{si} \quad H - n = \alpha N$$

$$\sum_{i=1}^N \cos(n\theta_i) \cos(H\theta_i) = \frac{1}{2} R_e \{(0) + (0)\} \quad \text{si} \quad H \pm n \neq \alpha N$$

On retrouve donc bien un travail nul sauf lorsque:

$$n = \alpha N \pm H \quad \text{avec} \quad \alpha = 0, 1, 2, 3, \dots$$

## ANNEXE B

### COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES PLAQUES CIRCULAIRES: Matrice M

La matrice  $M$  qui apparaît dans l'établissement de la solution analytique de la réponse forcée d'une plaque circulaire est de la forme suivante:

$$M(\alpha, n) = \begin{bmatrix} J_n(\alpha r_i) & Y_n(\alpha r_i) & I_n(\alpha r_i) & K_n(\alpha r_i) \\ \alpha J_n'(\alpha r_i) & \alpha Y_n'(\alpha r_i) & \alpha I_n'(\alpha r_i) & \alpha K_n'(\alpha r_i) \\ M(3,1) & M(3,2) & M(3,3) & M(3,4) \\ M(4,1) & M(4,2) & M(3,3) & M(3,4) \end{bmatrix} \quad (\text{B-1})$$

avec

$$M(3,1) = \alpha^2 J_n''(\alpha r_e) - n^2 \frac{\nu}{r_e^2} J_n(\alpha r_e) + \frac{\nu \alpha}{r_e} J_n'(\alpha r_e) \quad (\text{B-2})$$

$$M(3,2) = \alpha^2 J_n Y_n''(\alpha r_e) - n^2 \frac{\nu}{r_e^2} Y_n(\alpha r_e) + \frac{\nu \alpha}{r_e} Y_n'(\alpha r_e) \quad (\text{B-3})$$

$$M(3,3) = \alpha^2 I_n''(\alpha r_e) - n^2 \frac{\nu}{r_e^2} I_n(\alpha r_e) + \frac{\nu \alpha}{r_e} I_n'(\alpha r_e) \quad (\text{B-4})$$

$$M(3,4) = \alpha^2 K_n''(\alpha r_e) - n^2 \frac{v}{r_e^2} K_n(\alpha r_e) + \frac{v\alpha}{r_e} K_n'(\alpha r_e) \quad (\text{B-5})$$

$$M(4,1) = \alpha^3 J_n'''(\alpha r_e) - n^2 \frac{2-v}{r_e^2} \alpha J_n'(\alpha r_e) + n^2 \frac{3-v}{r_e^3} J_n(\alpha r_e) + \frac{1}{r_e} \alpha^2 J_n''(\alpha r_e) - \frac{1}{r_e^2} \alpha J_n'(\alpha r_e) \quad (\text{B-6})$$

$$M(4,2) = \alpha^3 Y_n'''(\alpha r_e) - n^2 \frac{2-v}{r_e^2} \alpha Y_n'(\alpha r_e) + n^2 \frac{3-v}{r_e^3} Y_n(\alpha r_e) + \frac{1}{r_e} \alpha^2 Y_n''(\alpha r_e) - \frac{1}{r_e^2} \alpha Y_n'(\alpha r_e) \quad (\text{B-7})$$

$$M(4,3) = \alpha^3 I_n'''(\alpha r_e) - n^2 \frac{2-v}{r_e^2} \alpha I_n'(\alpha r_e) + n^2 \frac{3-v}{r_e^3} I_n(\alpha r_e) + \frac{1}{r_e} \alpha^2 I_n''(\alpha r_e) - \frac{1}{r_e^2} \alpha I_n'(\alpha r_e) \quad (\text{B-8})$$

$$M(4,4) = \alpha^3 K_n'''(\alpha r_e) - n^2 \frac{2-v}{r_e^2} \alpha K_n'(\alpha r_e) + n^2 \frac{3-v}{r_e^3} K_n(\alpha r_e) + \frac{1}{r_e} \alpha^2 K_n''(\alpha r_e) - \frac{1}{r_e^2} \alpha K_n'(\alpha r_e) \quad (\text{B-9})$$

## ANNEXE C

### SERIES DE FOURIER

Soit la fonction  $f(x)$  définie dans l'intervalle  $(-L, L)$  et à l'extérieur de cet intervalle par  $f(x+2L) = f(x)$ , c'est à dire supposons que la fonction  $f(x)$  soit de période  $2L$ . La série de Fourier ou l'expansion de Fourier correspondant à  $f(x)$  est donnée par:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (\text{D-1})$$

où les coefficients de Fourier  $a_n$  et  $b_n$  sont obtenus à partir de :

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx.$$

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{D-2})$$

Si  $f(x)$  est de période  $2L$ , les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  peuvent être déterminés par :

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ b_n = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \end{cases} \quad (\text{D-3})$$

où  $c$  est un nombre réel quelconque.

## FORME COMPLEXE DES SERIES DE FOURIER

Soit  $f$  une fonction réelle périodique, de période  $T$ , de classe  $C^1$  par morceaux sur tout intervalle  $[\alpha, \alpha+T]$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) de longueur  $T$ . Le terme général de la série de Fourier associée à  $f$  est :

$$u_n = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t).$$

En utilisant les formules d'Euler, il vient :

$$u_n = a_n \frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} + b_n \frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2i}$$

Soit encore:

$$u_n = \left[ \frac{a_n - ib_n}{2} \right] e^{in\omega t} + \left[ \frac{a_n + ib_n}{2} \right] e^{-in\omega t}$$

En posant :  $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$  et  $\bar{c}_n = \frac{a_n + ib_n}{2}$  (conjugué de  $c_n$  car  $a_n$  et  $b_n$  sont réels),

l'expression de  $u_n$  devient :

$$u_n = c_n e^{in\omega t} + \bar{c}_n e^{-in\omega t}$$

Compte tenu des expressions de  $a_n$  et  $b_n$  il vient :

$$c_n = \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \cos(n\omega t) dt - i \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \sin(n\omega t) dt \right]$$

$$c_n = \frac{1}{T} \left[ \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) (\cos(n\omega t) - i \sin(n\omega t)) dt \right]$$

Considérant que  $e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i \sin(\theta)$ , l'expression de  $c_n$  devient :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) e^{-in\omega t} dt$$

$$\bar{c}_n = \frac{1}{T} \overline{\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) e^{-in\omega t} dt} = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) e^{+in\omega t} dt, \text{ que l'on note } c_{-n} \text{ car } f(t) \text{ est un réel.}$$

On a donc :  $\bar{c}_n = c_{-n}$ . et ainsi:

$$u_n = c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t}$$

Sachant que  $c_0 = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) dt = a_0$ , le développement de la fonction  $f$  en séries de Fourier s'écrit :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} [c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t}]$$

Résultat qui est représenté symboliquement par :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z}$$

## FONCTIONS DE BESSEL

Les fonctions de Bessel interviennent dans de nombreux problèmes physiques par l'intermédiaire de solution particulière de certaines équations aux dérivées partielles. On les voit notamment apparaître dans les solutions de l'équation de Laplace et généralement elles apparaissent comme solution de l'équation différentielle de Bessel :

$$x^2 \ddot{y} + x\dot{y} + (x^2 - n^2)y = 0 \quad n \geq 0 \quad (\text{D-4})$$

La solution générale de cette équation est donnée par la relation suivante :

$$y = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x) \quad (\text{D-5})$$

$J_n$ , qui a une limite finie lorsque  $x$  tend vers zéro, est une fonction de Bessel de première espèce et d'ordre  $n$ . La solution  $Y_n$  qui n'a aucune limite finie lorsque  $x$  tend vers zéro, est une fonction de Bessel de deuxième espèce et d'ordre  $n$  ou encore fonction de Neumann.

Si la variable indépendante  $x$  de l'équation (D-4) est changée en  $\lambda x$  où  $\lambda$  est une constante, l'équation résultante devient:

$$x^2 \ddot{y} + x\dot{y} + (\lambda^2 x^2 - n^2)y = 0 \quad (\text{D-6})$$

avec pour solution générale :

$$y = c_1 J_n(\lambda x) + c_2 Y_n(\lambda x) \quad (\text{D-7})$$

## FONCTIONS DE BESSEL DE PREMIERE ESPECE

Les fonctions de Bessel de première espèce et d'ordre  $n$  sont définies par la relation suivante :

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)} \left\{ 1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \dots \right\} \quad (\text{D-8})$$

où :

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (x/2)^{n+2r}}{r! \Gamma(n+r+1)} \quad (\text{D-9})$$

avec  $\Gamma(n+1)$  fonction de gamma.

Si  $n$  est positif,  $\Gamma(n+1) = n!$ ,  $\Gamma(1) = 1$ . Pour  $n=0$ , l'équation (D-9) devient :

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots \quad (\text{D-10})$$

La série (D-9) converge pour chaque valeur de  $x$ . Les fonctions  $J_0$  et  $J_1$  sont illustrées figure 1. Si  $n$  est la moitié d'un nombre impair,  $J$  peut être exprimé en termes de sinus et cosinus. La fonction  $J_n(x)$ ,  $n > 0$ , peut être définie en remplaçant  $n$  par  $-n$  en (D-8) ou (D-9). Si  $n$  est un nombre entier il vient :

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (\text{D-11})$$

si  $n$  n'est pas un nombre entier,  $J_n(x)$  et  $J_{-n}(x)$  sont linéairement indépendantes, et pour ce cas la solution générale de (D-4) est:

$$y = AJ_n(x) + BJ_{-n}(x) \quad n \neq 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{D-12})$$

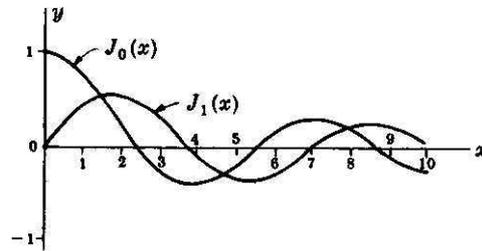


Figure 1

## FONCTIONS DE BESSEL DE DEUXIEME ESPECE

Les fonctions de Bessel de deuxième espèce sont définies par la relation suivante :

$$Y_n(x) = \begin{cases} \frac{J_n(x)\cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi} & n \neq 0, 1, 2, 3, \dots \\ \lim_{p \rightarrow n} \frac{J_p(x)\cos p\pi - J_{-p}(x)}{\sin p\pi} & n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (\text{D-13})$$

Pour le cas où  $n = 0, 1, 2, \dots$  l'expansion de la série associée  $Y_n(x)$  s'écrit.

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} \{ \ln(x/2) + \gamma \} J_n(x) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k-1)! (x/2)^{2k-n} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \{ \Phi(k) + \Phi(n+k) \} \frac{(x/2)^{2k+n}}{k!(n+k)!} \quad (\text{D-14})$$

où  $\gamma = 0.5772156 \dots$  constante d'Euler

$$\Phi(p) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p}, \quad \Phi(0) = 0 \quad (\text{D-15})$$

## FONCTIONS ASSOCIEES AUX FONCTIONS DE BESSEL

**Fonctions de Hankel de première et seconde espèce:**

$$\begin{aligned} H_n^1(x) &= J_n(x) + iY_n(x) \\ H_n^2(x) &= J_n(x) - iY_n(x) \end{aligned} \quad (\text{D-16})$$

### Fonctions de Bessel modifiées

La fonction de Bessel modifiée de première espèce et d'ordre  $n$  est définie par:

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix) = e^{-n\pi i/2} J_n(ix) \quad (\text{D-17})$$

Dans le cas où  $n$  est un nombre entier la relation  $I_{-n} = I_n(x)$  est vérifiée. Dans le cas contraire  $I_n(x)$  et  $I_{-n}(x)$  sont linéairement indépendantes.

La fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce et d'ordre  $n$  est définie par:

$$K_n(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \left[ \frac{I_{-n}(x) - I_n(x)}{\sin n\pi} \right] & n \neq 0, 1, 2, 3, \dots \\ \lim_{p \rightarrow n} \frac{\pi}{2} \left[ \frac{I_{-p}(x) - I_p(x)}{\sin p\pi} \right] & n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (\text{D-18})$$

Ces fonctions satisfont l'équation :

$$x^2 \ddot{y} + x \dot{y} - (x^2 + n^2)y = 0 \quad (\text{D-19})$$

dont la solution générale est :

$$y = c_1 I_n(x) + c_2 K_n(x) \quad (\text{D-20})$$

$$y = c_1 I_n(x) + c_2 K_n(x) \quad \text{pour} \quad n \neq 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{D-21})$$

### Fonctions Ber, Bei, Ker, Kei

Les fonctions  $Ber_n(x)$  et  $Bei_n(x)$  sont les parties réelle et imaginaire de  $J_n(i^{3/2}x)$ , soit:

$$i^{3/2} = i^{3\pi/4} = (\sqrt{2}/2)(i-1),$$

$$J_n(i^{3/2}x) = Ber_n(x) + iBei_n(x) \quad (D-22)$$

Les fonctions  $Ker_n(x)$  et  $Kei_n(x)$  sont les parties réelle et imaginaire de  $e^{-n\pi i/2} K_n(i^{1/2}x)$ , soit:

$$i^{1/2} = i^{\pi/4} = (\sqrt{2}/2)(i+1),$$

$$e^{-n\pi i/2} K_n(i^{1/2}x) = Ker_n(x) + iKei_n(x) \quad (D-23)$$

Ces fonctions sont utiles pour résoudre les équations de type :

$$x^2 \ddot{y} + x\dot{y} - (ix^2 + n^2)y = 0 \quad (D-24)$$

dont la solution générale est :

$$y = c_1 J_n(i^{3/2}x) + c_2 K_n(i^{1/2}x) \quad (D-25)$$

## SERIE DE FONCTIONS DE BESSEL

Comme dans le cas des séries de Fourier, il est possible de démontrer que si la fonction  $f(x)$  satisfait les conditions de Dirichlet, alors cette fonction peut être développée sous forme de séries de Bessel dans l'intervalle  $0 < x < 1$  de la forme

$$f(x) = A_1 J_n(\lambda_1 x) + A_2 J_n(\lambda_2 x) + \dots = \sum_{p=1}^{\infty} A_p J_n(\lambda_p x) \quad (D-26)$$

où  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$  sont les racines positives de l'équation suivante:

$$RJ_n(x) + SxJ_n'(x) = 0 \quad (\text{D-27})$$

$R$  et  $S$  des constants qui satisfont les contraintes  $R/S \geq 0$  et  $S \neq 0$  et:

$$A_p = \frac{2\lambda_p^2}{(\lambda_p^2 - n^2 + R^2/S^2)J_n^2(\lambda_p)} \int_0^1 xJ_n(\lambda_p x)f(x)dx \quad (\text{D-28})$$

Dans le cas où  $S = 0$ , les quantités  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ , sont des racines de  $J_n(x) = 0$  et:

$$A_p = \frac{2}{J_{n+1}^2(\lambda_p)} \int_0^1 xJ_n(\lambda_p x)f(x)dx \quad (\text{D-29})$$

## ANNEXE D

La solution des équations (1-63) et (1-64) est de la forme :

$$A_{mn} = \hat{A}_{mn}(t) + A_{mn}^*(t) \quad (\text{E-1})$$

avec  $\hat{A}_{mn}(t)$  solution homogène et  $A_{mn}^*(t)$  solution particulière obtenues à partir de:

$$\ddot{A}_{mn}(t) + \frac{\gamma}{\rho} \dot{A}_{mn}(t) + \frac{D\alpha_{mn}^4}{\rho h} A_{mn}(t) = 0 \quad (\text{E-2})$$

En supposant que la solution de l'équation (E-1) est de la forme :

$$A_{mn}(t) = e^{at}$$

il vient:

$$a^2 + \frac{\gamma}{\rho}a + \frac{D\alpha_{mn}^4}{\rho h} = 0 \quad (\text{E-3})$$

avec :

$$\omega_{mn}^2 = \frac{D\alpha_{mn}^4}{\rho h} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{\gamma}{2\rho\omega_{mn}}$$

$$a = \omega_{mn} \left( -\xi \mp i\sqrt{1-\xi^2} \right) \quad (\text{E-4})$$

En utilisant l'équation (E-3) on peut écrire la solution homogène sous la forme suivante :

$$\hat{A}_{mn}(t) = c_{mn}e^{a_1t} + d_{mn}e^{a_2t}$$

$$= e^{-\omega_{mn}\xi t} \left( c_{mn}e^{-i\sqrt{1-\xi^2}\omega_{mn}t} + d_{mn}e^{i\sqrt{1-\xi^2}\omega_{mn}t} \right) \quad (\text{E-5})$$

expression qui tend vers zéro lorsque le temps augmente.

La solution particulière s'écrit :

$$A_{mn}^* = \int_0^t \tilde{A}_{mn}(\tau).G(t-\tau)d\tau \quad (\text{E-6})$$

où  $G(t-\tau)$  est la fonction de Green qui prend dans notre cas la forme suivante [RAD90] :

$$G(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}\omega_{mn}} e^{-\xi\omega_{mn}t} \cdot \sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_{mn}t) \quad (\text{E-7})$$

La fonction de Green permet d'expliciter la réponse de l'oscillateur à une excitation  $f(t)$  quelconque sous la forme d'un produit de convolution.

## ANNEXE E

## CHARGE PONCTUELLE

Pour le cas des excitations ponctuelles, la forme de la charge utilisée dans l'équation (1-71) peut être écrite sous la forme:

$$f(r, \theta) = \lim_{\substack{\Delta r \rightarrow 0 \\ \Delta \theta \rightarrow 0}} \frac{1}{\int_{r_f}^{r_f + \Delta r} \int_{\theta_f}^{\theta_f + \Delta \theta} r \, dr \, d\theta} = \lim_{\substack{\Delta r \rightarrow 0 \\ \Delta \theta \rightarrow 0}} \frac{1}{R_f \int_{r_f}^{r_f + \Delta r} dr \int_{\theta_f}^{\theta_f + \Delta \theta} d\theta} \quad (\text{F-1})$$

$$= \frac{1}{R_f} \lim_{\substack{\Delta r \rightarrow 0 \\ \Delta \theta \rightarrow 0}} \left( \frac{1}{\int_{r_f}^{r_f + \Delta r} dr} \right) \left( \frac{1}{\int_{\theta_f}^{\theta_f + \Delta \theta} d\theta} \right) \quad (\text{F-2})$$

Considérant que  $H(r, r_f) - H(r, r_f + \Delta r) = 1$ , avec  $H$  fonction de Heaviside, l'équation (F-2) se transforme en:

$$f(r, \theta) = \frac{1}{R_f} \lim_{\substack{\Delta r \rightarrow 0 \\ \Delta \theta \rightarrow 0}} \left( \frac{H(r, r_f) - H(r, r_f + \Delta r)}{r_f + \Delta r - r_f} \right) \left( \frac{H(\theta, \theta_f) - H(\theta, \theta_f + \Delta \theta)}{\theta_f + \Delta \theta - \theta_f} \right) \quad (\text{F-3})$$

$$= \frac{1}{R_f} \lim_{\substack{\Delta r \rightarrow 0 \\ \Delta \theta \rightarrow 0}} \left( \frac{H(r, r_f + \Delta r) - H(r, r_f)}{r_f + \Delta r - r_f} \right) \left( \frac{H(\theta, \theta_f + \Delta \theta) - H(\theta, \theta_f)}{\theta_f + \Delta \theta - \theta_f} \right) \quad (\text{F-4})$$

D'où l'on peut déduire facilement que :

$$f(r, \theta) = \frac{1}{R_f} \delta(r_f) \delta(\theta_f) \quad (\text{F-5})$$

avec  $\delta$  fonction Dirac

## ANNEXE F

Table 1  
Profile data of stator blade

Section 1		Section 2		Section 3		Section 4		Section 5	
r=	135.0 mm	r=	159.7 mm	r=	184.0 mm	r=	209.0 mm	r=	233.0 mm
s/t=	1.7135	s/t=	1.5676	s/t=	1.4529	s/t=	1.3643	s/t=	1.3021
s=	50.12 mm	s=	54.05 mm	s=	58.17 mm	s=	61.78 mm	s=	65.73 mm
δs=	55.6 deg	δs=	55.8 deg	δs=	56.6 deg	δs=	56.5 deg	δs=	56.8 deg
δ1=	118.5 deg	δ1=	80.5 deg	δ1=	79.0 deg	δ1=	80.5 deg	δ1=	114.5 deg
δ2=	15.3 deg	δ2=	18.2 deg	δ2=	22.0 deg	δ2=	23.9 deg	δ2=	26.7 deg
x <sub>s</sub> =	18.95 mm	x <sub>s</sub> =	20.20 mm	x <sub>s</sub> =	21.70 mm	x <sub>s</sub> =	22.63 mm	x <sub>s</sub> =	23.23 mm
y <sub>s</sub> =	10.79 mm	y <sub>s</sub> =	11.15 mm	y <sub>s</sub> =	11.30 mm	y <sub>s</sub> =	11.79 mm	y <sub>s</sub> =	12.08 mm
l <sub>x</sub> =	10347 mm <sup>4</sup>	l <sub>x</sub> =	12690 mm <sup>4</sup>	l <sub>x</sub> =	14738 mm <sup>4</sup>	l <sub>x</sub> =	17162 mm <sup>4</sup>	l <sub>x</sub> =	19935 mm <sup>4</sup>
l <sub>y</sub> =	65130 mm <sup>4</sup>	l <sub>y</sub> =	83702 mm <sup>4</sup>	l <sub>y</sub> =	109044 mm <sup>4</sup>	l <sub>y</sub> =	131777 mm <sup>4</sup>	l <sub>y</sub> =	155111 mm <sup>4</sup>
A=	483.6 mm <sup>2</sup>	A=	542.7 mm <sup>2</sup>	A=	605.8 mm <sup>2</sup>	A=	665.3 mm <sup>2</sup>	A=	722.6 mm <sup>2</sup>
x [mm]	y [mm]	x [mm]	y [mm]	x [mm]	y [mm]	x [mm]	y [mm]	x [mm]	y [mm]
50.070	.060	54.054	.600	58.140	-.400	61.755	.070	65.732	.196
49.958	.019	53.942	.009	58.000	-.460	61.690	.000	65.710	.080
49.800	.060	53.803	.023	57.800	-.400	61.355	.012	65.570	.000
49.400	.299	53.400	.255	57.500	-.240	61.000	.200	65.409	.035
49.000	.580	53.000	.500	57.000	.030	58.000	1.610	65.000	.200
48.000	1.259	52.000	1.040	55.000	1.070	54.000	3.400	64.000	.670
44.000	3.740	48.000	3.120	52.440	2.308	50.000	5.000	60.000	2.420
40.000	5.720	44.000	4.920	48.400	4.060	46.000	6.300	56.000	4.080
36.000	7.300	40.000	6.440	44.400	5.510	42.000	7.240	52.000	5.530
32.142	8.350	36.000	7.580	40.440	6.640	38.000	7.900	48.000	6.700
28.434	8.720	32.000	8.340	36.440	7.440	33.100	8.281	44.000	7.580
24.000	8.340	28.000	8.540	32.440	7.920	30.000	8.250	40.000	8.080
20.000	7.210	24.000	8.080	28.440	8.040	26.000	7.760	36.000	8.260
16.000	5.400	20.000	6.980	24.420	7.680	22.000	6.790	32.000	8.160
12.000	2.940	16.000	5.230	22.400	7.280	18.000	5.390	28.000	7.640
8.000	.800	12.000	2.950	20.440	6.730	13.807	3.550	24.000	6.800
6.000	.200	10.100	1.780	18.430	6.045	11.824	2.600	20.000	5.600
4.000	.040	8.000	.770	16.440	5.130	9.775	1.610	16.000	4.120
3.000	-.160	6.100	-.180	14.320	4.070	7.746	.800	11.868	2.330
2.000	.550	4.000	.040	12.050	2.820	5.871	.300	9.978	1.474
1.113	1.294	3.000	.190	10.086	1.750	4.465	.165	7.943	.684
.240	3.000	2.000	.600	8.082	.870	3.000	.320	5.958	.200
.000	4.660	1.000	1.490	6.380	.340	2.000	.810	3.979	.170
-.300	6.860	.280	3.000	4.420	.020	1.000	1.800	2.000	.780
1.000	8.800	.000	4.780	3.440	.120	.200	3.600	1.000	1.640
2.000	10.650	.280	7.000	2.440	-.460	.000	5.460	.220	3.300
3.000	12.100	1.000	9.140	1.440	1.180	.260	7.840	.000	5.520
4.000	13.320	2.000	11.180	.600	2.400	.950	10.180	.250	7.920
8.000	17.090	3.000	12.700	.200	3.650	2.000	12.300	1.000	10.910
12.000	19.250	4.000	14.000	.000	5.300	2.804	13.660	2.000	13.050
16.000	20.300	8.000	17.880	.140	7.000	6.011	17.581	4.000	16.240
20.000	20.440	12.000	20.170	.520	8.500	10.000	20.290	8.000	19.990
24.000	19.760	16.000	21.360	1.488	10.710	13.938	21.780	12.000	22.010
28.000	18.300	20.000	21.620	2.440	12.380	18.000	22.470	16.000	23.050
32.000	16.280	24.000	21.090	3.440	17.760	22.000	22.470	20.000	23.320
36.000	13.600	28.000	19.780	5.740	16.300	25.894	21.920	24.000	22.990
40.000	10.400	32.000	17.780	8.440	18.650	30.000	20.790	28.000	22.100
44.000	6.770	36.000	15.260	12.420	20.620	34.000	19.210	32.736	20.470
48.000	2.740	40.000	12.380	16.440	21.600	38.000	17.200	36.000	19.030
49.000	1.600	44.000	9.180	20.440	21.750	42.000	14.820	40.000	17.000
49.400	1.180	48.000	5.860	24.420	21.250	46.000	12.190	44.000	14.750
49.440	1.132	52.000	2.320	28.440	20.100	50.000	9.320	48.000	12.300
49.480	1.084	53.041	1.390	32.440	18.420	53.753	6.530	52.000	9.750
49.520	1.036	53.095	1.334	36.440	16.350	58.316	3.060	56.000	7.120
49.560	.988	53.148	1.279	40.440	13.930	58.766	2.699	60.126	4.300
49.600	.940	53.201	1.223	44.400	11.250	59.216	2.338	63.918	1.627
49.640	.892	53.255	1.167	48.528	8.100	59.666	1.976	64.200	1.424
49.680	.844	53.309	1.111	53.500	3.920	60.116	1.615	64.400	1.281
49.720	.796	53.363	1.056	55.620	2.100	60.566	1.254	64.600	1.137
49.760	.748	53.416	1.000	57.340	.600	61.007	.900	64.800	.994
49.800	.700	53.800	.630	57.800	-.180	61.397	.600	65.000	.850
50.059	.373	54.050	.310	58.100	-.130	61.715	.344	65.398	.550
50.120	.200	54.086	-.196	58.170	-.240	61.780	.200	65.690	.310

Table 2  
Profile data of rotor blade

Section 1		Section 2		Section 3		Section 4		Section 5		Section 6	
r=	140.0 mm	r=	148.2 mm	r=	162.0 mm	r=	188.5 mm	r=	215.5 mm	r=	241.5 mm
s/t=	1.5654	s/t=	1.5209	s/t=	1.4577	s/t=	1.4059	s/t=	1.3712	s/t=	1.3877
s=	45.9 mm	s=	47.2 mm	s=	49.5 mm	s=	55.5 mm	s=	61.9 mm	s=	70.2 mm
δs=	72.5 deg	δs=	63.8 deg	δs=	54.2 deg	δs=	41.7 deg	δs=	32.8 deg	δs=	25.0 deg
δ1=	35.2 deg	δ1=	38.7 deg	δ1=	50.6 deg	δ1=	90.0 deg	δ1=	126.3 deg	δ1=	143.0 deg
δ2=	27.2 deg	δ2=	25.9 deg	δ2=	24.0 deg	δ2=	20.9 deg	δ2=	18.3 deg	δ2=	26.3 deg
xs=	17.55 mm	xs=	16.63 mm	xs=	17.33 mm	xs=	20.48 mm	xs=	24.29 mm	xs=	28.71 mm
ys=	13.13 mm	ys=	11.70 mm	ys=	9.99 mm	ys=	7.63 mm	ys=	5.88 mm	ys=	3.90 mm
lx=	10277 mm <sup>4</sup>	lx=	7661 mm <sup>4</sup>	lx=	4752 mm <sup>4</sup>	lx=	2133 mm <sup>4</sup>	lx=	1147 mm <sup>4</sup>	lx=	469 mm <sup>4</sup>
ly=	50003 mm <sup>4</sup>	ly=	45672 mm <sup>4</sup>	ly=	43908 mm <sup>4</sup>	ly=	44156 mm <sup>4</sup>	ly=	49365 mm <sup>4</sup>	ly=	58631 mm <sup>4</sup>
A=	411.9 mm <sup>2</sup>	A=	370.9 mm <sup>2</sup>	A=	323.6 mm <sup>2</sup>	A=	253.8 mm <sup>2</sup>	A=	228.0 mm <sup>2</sup>	A=	204.0 mm <sup>2</sup>

x [mm]	y [mm]										
45.850	.060	46.950	.045	49.450	.150	55.450	-.050	61.880	.140	70.190	.175
45.770	.010	46.850	.005	49.420	.085	55.350	-.105	61.800	.050	70.130	.080
45.700	.000	46.780	.000	49.350	.025	55.250	-.140	61.600	.000	70.000	.020
45.300	.240	46.600	.040	49.250	.000	55.000	-.095	61.400	.020	69.800	.010
45.000	.490	46.400	.150	49.000	.090	54.200	.192	61.000	.100	69.200	.080
44.000	1.360	46.000	.430	48.500	.310	51.200	1.122	60.000	.320	66.200	.437
40.000	4.530	44.000	1.630	48.000	.550	47.200	2.290	56.000	1.160	62.200	.884
36.000	7.140	40.000	3.280	46.000	1.480	43.200	3.400	52.000	1.960	58.200	1.300
32.000	9.180	36.000	6.060	44.000	2.370	39.200	4.410	48.000	2.710	54.200	1.683
28.000	10.590	32.000	7.820	40.000	4.050	35.200	5.300	44.000	3.400	50.200	2.030
24.000	11.351	28.000	9.220	36.000	5.560	31.200	6.020	40.000	3.960	46.200	2.334
21.950	11.470	24.000	10.080	32.000	6.830	27.200	6.530	36.000	4.420	42.200	2.587
20.000	11.400	20.000	10.380	28.000	7.820	23.200	6.782	32.000	4.790	38.200	2.780
18.030	11.120	16.000	9.890	24.000	8.460	19.200	6.722	28.000	5.000	34.200	2.906
16.000	10.626	12.000	8.120	20.000	8.700	15.200	6.270	24.000	5.070	30.200	2.960
13.830	9.800	8.000	5.200	16.000	8.330	11.200	5.180	20.000	4.880	26.200	2.937
12.000	8.820	6.000	3.410	12.000	7.000	9.030	4.327	16.000	4.380	22.200	2.829
10.130	7.560	5.000	2.490	8.000	4.740	7.200	3.400	12.000	3.550	18.200	2.625
8.000	5.840	4.000	1.530	4.000	1.750	5.865	2.647	8.000	2.480	14.200	2.307
6.050	3.990	3.000	.670	3.000	0.920	4.585	1.846	3.620	1.050	10.200	1.840
4.000	1.800	2.000	.075	2.000	0.180	3.200	.890	1.816	.420	6.200	1.170
3.000	.900	1.400	.000	1.300	.000	2.230	.360	1.353	.240	2.200	.240
2.000	.180	1.000	.080	.600	.280	1.470	.110	.988	.130	1.200	.040
1.400	.003	.800	.190	.150	1.000	.900	.087	.620	.100	.800	.020
1.200	.024	.500	.550	.020	2.000	.640	.153	.400	.190	.475	.085
1.000	.088	.200	1.230	.000	3.000	.400	.290	.200	.410	.200	.270
.800	.205	.000	2.890	.080	4.000	.200	.493	.115	.949	.033	.554
.600	.404	.100	4.980	.460	6.000	.060	.755	-.273	1.637	.008	.882
.280	1.000	.200	5.950	.960	8.000	.000	1.240	.418	2.032	.200	1.430
.066	2.000	.500	7.830	1.700	10.000	.200	2.270	.620	2.340	1.200	2.400
.040	4.000	1.000	9.910	2.760	11.960	.600	3.320	1.010	2.840	6.200	4.640
.472	7.205	2.000	12.650	4.340	14.000	1.400	4.900	1.440	3.300	10.200	5.795
1.150	9.982	3.000	14.410	8.000	16.560	2.200	6.240	2.000	3.820	14.200	6.532
2.406	12.970	4.000	15.670	12.000	17.580	3.200	7.680	4.000	5.400	18.200	6.953
4.000	15.900	5.000	16.790	16.000	17.540	7.200	11.400	8.000	7.880	22.200	7.137
8.000	19.860	6.000	17.680	20.000	18.740	11.200	12.980	12.000	9.500	26.200	7.121
12.000	22.040	8.000	19.050	24.000	15.360	15.200	13.440	16.000	10.350	30.200	6.923
16.000	22.900	12.000	20.470	28.000	13.580	19.200	13.200	20.000	10.580	34.200	6.563
20.000	22.670	16.000	20.520	32.000	11.500	23.200	12.510	24.000	10.280	38.200	6.071
24.000	21.400	20.000	19.710	36.000	9.160	27.200	11.500	28.000	9.660	42.200	5.489
28.000	19.050	24.000	18.180	40.000	6.680	31.200	10.260	32.336	8.810	46.200	4.853
32.000	15.920	28.000	15.892	44.000	4.100	35.200	8.866	36.000	7.980	50.200	4.183
36.000	12.080	32.000	13.100	46.000	2.760	39.200	7.340	40.000	6.990	54.200	3.490
38.350	9.610	36.000	10.000	48.000	1.400	43.200	5.720	44.000	5.910	58.200	2.781
41.400	6.030	40.000	6.600	48.170	1.293	47.200	4.034	48.000	4.780	62.200	2.060
44.000	2.920	44.000	3.090	48.340	1.186	51.200	2.280	52.000	3.600	63.200	1.878
44.700	2.000	46.000	1.300	48.510	1.079	54.184	.920	56.000	2.380	64.200	1.695
45.000	1.620	46.400	.906	48.680	.972	55.000	.500	60.000	1.110	65.200	1.513
45.470	1.000	46.600	.705	48.850	.865	55.250	.360	61.000	.800	66.200	1.330
45.680	.697	46.850	.450	49.000	.770	55.350	.280	61.389	.656	69.200	.760
45.850	.390	46.900	.398	49.250	.555	55.450	.170	61.600	.540	70.000	.492
45.900	.200	46.950	.326	49.400	.395	55.500	.080	61.740	.470	70.140	.370
45.890	.120	47.000	.165	49.460	.230	55.490	.000	61.885	.300	70.185	.260

## FOLIO ADMINISTRATIF

THESE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

NOM : <b>MOHAMAD</b> (avec précision du nom de jeune fille, le cas échéant)	DATE DE SOUTENANCE 28 juin 2002
Prénoms : <b>Abdul Hamid</b>	
TITRE : <b>REPONSE FORCEE DES ENSEMBLES TOURNANTS DE TURBOMACHINES APPLICATION AU CAS D'UNE TURBINE A GAZ</b>	
NATURE : <b>Doctorat</b> Formation doctorale : <b>Mécanique</b>	Numéro d'ordre : <b>02 ISAL 0035</b>
Cote B.I.U. - Lyon : <b>T 50/210/19 / et bis</b> CLASSE :	
<b>RESUME :</b> <p>Les turbomachines sont les pièces maîtresses de domaines stratégiques comme le transport (moteur d'avion, turbo-compresseur de véhicule automobile...) et la production d'énergie (turbine à vapeur de centrale...).</p> <p>Compte tenu de la complexité de leur comportement dynamique, la richesse des excitations possibles et pour bien avancer vers un meilleur contrôle de leurs problèmes, la conception des machines ne peut plus être basée sur la prévision des seules caractéristiques de type fréquences et modes propres. Il devient donc indispensable d'être en mesure de simuler le comportement réel de la structure en fonctionnement, simulation de type réponse forcée sous excitations induites par l'environnement. Cet objectif est un enjeu majeur dans le domaine des turbomachines et mobilise des efforts de recherche importants. Il n'est cependant pour l'instant que très partiellement atteint.</p> <p>L'un des mécanismes principaux d'excitation des aubages est lié à la rotation de la structure dans un champ fluide stationnaire perturbé. Ces perturbations sont les inévitables conséquences des obstacles traversés par le fluide. Conjuguées à la rotation elles agissent sur l'aubage comme une force répartie variable au cours du temps et sont donc capables, sous certaines conditions, d'exciter ses fréquences naturelles.</p> <p>L'objectif du travail présenté est de conduire une série d'études de base afin d'être en mesure de mieux maîtriser les mécanismes mis en jeu ainsi que les techniques numériques adaptées à leur modélisation.</p> <p>Le premier chapitre recense les modèles couramment rencontrés et établit un modèle analytique utilisé comme référence pour la suite du travail.</p> <p>Le second chapitre permet d'établir les techniques de prise en compte des excitations réparties dans les modèles éléments finis, pour les structures cycliques.</p> <p>Le troisième chapitre clarifie le domaine de validité des mécanismes de réponse mis en évidence.</p> <p>Enfin, le dernier chapitre présente une application sur un aubage réel de turbine.</p>	
MOTS-CLES : <b>Réponse – Turbomachine – Disque – Aube – Mécanisme – Excitation – Vibration – comportement dynamique</b>	
Laboratoire (s) de recherche : <b>Laboratoire de Mécanique des structures (LMSt) UMR CNRS 5006</b>	
Directeur de thèse : <b>G. JACQUET-RICHARDET</b>	
Président de jury : <b>ROBERT J. L.</b>	
Composition du jury : <b>CHATELET. E, EL HAJEM. M, JACQUET-RICHARDET.G, ROBERT J. L, SWIDER P.</b>	