

Thèse

# Etude tribologique d'une butée aérodynamique en régime supersonique

Présentée devant  
L'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

Pour obtenir  
Le grade de docteur

Formation doctorale :  
Génie mécanique  
École doctorale : École doctorale MEGA

Par  
Florence Dupuy  
Soutenue le 10 décembre 2015 devant la Commission d'examen

## Jury

---

Président	M. SEEMANN Wolfgang	Professeur Karlsruhe Institute of Technology
Rapporteur	M. TICHY John	Professeur Rensselaer Polytechnic Institute Troy
Examineur	M. BRUNETIERE Noël	Chargé de Recherches HdR Institut Pprime Poitiers
	M. HAJJAM Mohamed	Professeur Institut Pprime Poitiers
	M. ESCRIVA Xavier	Maitre de Conférences LMFA Lyon
Directeur de thèse	M. GARCIA Mathieu	Ingénieur Docteur Liebherr Aerospace Toulouse
	M. BOU-SAID Benyebka	Professeur LaMCoS Insa de Lyon

---

Laboratoire de recherche : LaMCoS



INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales – Quinquennal 2011-2015

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
<b>CHIMIE</b>	<b>CHIMIE DE LYON</b> <a href="http://www.edchimie-lyon.fr">http://www.edchimie-lyon.fr</a> Sec : Renée EL MELHEM Bat Blaise Pascal 3 <sup>e</sup> étage 04 72 43 80 46 Insa : R. GOURDON <a href="mailto:secretariat@edchimie-lyon.fr">secretariat@edchimie-lyon.fr</a>	<b>M. Jean Marc LANCELIN</b> Université de Lyon – Collège Doctoral Bât ESCPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 13 95 <a href="mailto:directeur@edchimie-lyon.fr">directeur@edchimie-lyon.fr</a>
<b>E.E.A.</b>	<b>ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</b> <a href="http://edeea.ec-lyon.fr">http://edeea.ec-lyon.fr</a> Sec : M.C. HAVGOUDOUKIAN <a href="mailto:Ecole-doctorale.eea@ec-lyon.fr">Ecole-doctorale.eea@ec-lyon.fr</a>	<b>M. Gérard SCORLETTI</b> Ecole Centrale de Lyon 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 60.97 Fax : 04 78 43 37 17 <a href="mailto:Gerard.scorletti@ec-lyon.fr">Gerard.scorletti@ec-lyon.fr</a>
<b>E2M2</b>	<b>EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION</b> <a href="http://e2m2.universite-lyon.fr">http://e2m2.universite-lyon.fr</a> Sec : Safia AIT CHALAL Bat Atrium- UCB Lyon 1 04.72.44.83.62 Insa : S. REVERCHON <a href="mailto:Safia.ait-chalal@univ-lyon1.fr">Safia.ait-chalal@univ-lyon1.fr</a>	<b>M. Fabrice CORDEY</b> Laboratoire de Géologie de Lyon Université Claude Bernard Lyon 1 Bât Géode – Bureau 225 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.72.44.83.74 <a href="mailto:Sylvie.reverchon-pescheux@insa-lyon.fr">Sylvie.reverchon-pescheux@insa-lyon.fr</a> <a href="mailto:fabrice.cordey@univ-lyon1.fr">fabrice.cordey@univ-lyon1.fr</a>
<b>EDISS</b>	<b>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE</b> <a href="http://www.ediss-lyon.fr">http://www.ediss-lyon.fr</a> Sec : Safia AIT CHALAL Bat Atrium – UCB Lyon 1 04 72 44 83 62 Insa : <a href="mailto:Safia.ait-chalal@univ-lyon1.fr">Safia.ait-chalal@univ-lyon1.fr</a>	<b>Mme Emmanuelle CANET-SOULAS</b> INSERM U1060, CarMeN lab, Univ. Lyon 1 Bâtiment IMBL 11 avenue Jean Capelle INSA de Lyon 696621 Villeurbanne Tél : 04.72.11.90.13 <a href="mailto:Emmanuelle.canet@univ-lyon1.fr">Emmanuelle.canet@univ-lyon1.fr</a>
<b>INFOMATHS</b>	<b>INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUES</b> <a href="http://infomaths.univ-lyon1.fr">http://infomaths.univ-lyon1.fr</a> Sec :Renée EL MELHEM Bat Blaise Pascal 3 <sup>e</sup> étage <a href="mailto:infomaths@univ-lyon1.fr">infomaths@univ-lyon1.fr</a>	<b>Mme Sylvie CALABRETTO</b> LIRIS – INSA de Lyon Bat Blaise Pascal 7 avenue Jean Capelle 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 43. 80. 46 Fax 04 72 43 16 87 <a href="mailto:Sylvie.calabretto@insa-lyon.fr">Sylvie.calabretto@insa-lyon.fr</a>
<b>Matériaux</b>	<b>MATERIAUX DE LYON</b> <a href="http://ed34.universite-lyon.fr">http://ed34.universite-lyon.fr</a> Sec : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Direction 1 <sup>er</sup> et. <a href="mailto:Ed.materiaux@insa-lyon.fr">Ed.materiaux@insa-lyon.fr</a>	<b>M. Jean-Yves BUFFIERE</b> INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Saint Exupéry 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 71.70 Fax 04 72 43 85 28 <a href="mailto:Ed.materiaux@insa-lyon.fr">Ed.materiaux@insa-lyon.fr</a>
<b>MEGA</b>	<b>MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE</b> <a href="http://mega.universite-lyon.fr">http://mega.universite-lyon.fr</a> Sec : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Direction 1 <sup>er</sup> et. <a href="mailto:mega@insa-lyon.fr">mega@insa-lyon.fr</a>	<b>M. Philippe BOISSE</b> INSA de Lyon Laboratoire LAMCOS Bâtiment Jacquard 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72 .43.71.70 Fax : 04 72 43 72 37 <a href="mailto:Philippe.boisse@insa-lyon.fr">Philippe.boisse@insa-lyon.fr</a>
<b>ScSo</b>	<b>ScSo*</b> <a href="http://recherche.univ-lyon2.fr/scso/">http://recherche.univ-lyon2.fr/scso/</a> Sec : Viviane POLSINELLI Brigitte DUBOIS Insa : J.Y. TOUSSAINT <a href="mailto:viviane.polsinelli@univ-lyon2.fr">viviane.polsinelli@univ-lyon2.fr</a>	<b>Mme Isabelle VON BUELTZINGLOEWEN</b> Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.77.23.86 Fax : 04.37.28.04.48 <a href="mailto:isavonb@dbmail.com">isavonb@dbmail.com</a>

\*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie







---

# Remerciements

Cette thèse a été effectuée au Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures (LaMCoS) dans l'Institut National des Sciences appliquées (INSA) de Lyon et dans l'entreprise Liebherr Aerospace Toulouse. Elle s'inscrit dans l'un des axes majeurs de recherche du laboratoire et de l'entreprise consacré à l'étude de la lubrification haute vitesse pour les systèmes de pivoterie à air.

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur le Professeur Benyebka Bou-Saïd, comme directeur de thèse, qui m'a fait partager son savoir et son expérience sur le monde de la lubrification, et qui m'a offert une excellente base de connaissance pour pouvoir entreprendre sereinement ces travaux dans une discipline, la tribologie, que je ne connaissais pas jusqu'alors. Son encadrement et sa collaboration a été pour moi une expérience très positive car ses conseils étaient précieux.

Je souhaite maintenant remercier mon encadrement au sein de l'entreprise et tous les collaborateurs qui ont pu m'aider dans ce travail. Je tiens particulièrement à remercier Mathieu Garcia, Grégory Grau, Jérôme Rocchi et Matthieu Crespo qui m'ont apporté leur soutien au quotidien.

Je remercie infiniment à remercier Messieurs John Tichy et Noël Brunetière d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce mémoire. Je remercie également Messieurs Xavier Escriva et Wolfgang Seemann d'avoir accepté de participer à la soutenance de cette thèse.

J'adresse aussi un grand merci à tous mes collègues doctorants qui ont pu me côtoyer au sein du laboratoire et avec qui j'ai pu partager de bons moments. Mais je tiens particulièrement à remercier Marine et Vincent qui sont pour moi des personnes qui me sont chères.

Enfin, je tiens à remercier plus que tout mes proches qui m'ont soutenu, aidé et guidé dans les moments difficiles durant ces trois années, en particulier mes parents. Mon dernier merci et le plus important revient à Antoine, ma moitié qui a été à mes côtés à chaque instant.





---

# Résumé

## Etude tribologique d'une butée aérodynamique en régime supersonique

L'amélioration des turbomachines passe par l'augmentation de leurs vitesses de rotation et peut conduire leurs composants à se trouver en présence d'un régime d'écoulement supersonique, en particulier leurs systèmes de pivoterie à air. L'étude d'une butée aérodynamique en régime supersonique est traitée dans ce manuscrit et s'inscrit dans la continuité de la recherche sur les butées hautes vitesses mais qui n'a que très peu été abordée dans la littérature. Ce problème se trouve à la frontière entre deux domaines scientifiques : la lubrification et l'aérodynamique. L'enjeu ici est développer un modèle réaliste traduit par un code de calcul écrit en FORTRAN, capable de capturer les phénomènes liés au régime supersonique (choc, détente) et d'être adapté à la géométrie des films minces.

Pour cela, deux modèles ont été développés et codés à l'aide de la méthode numérique des différences finies : les équations de Reynolds Modifiées et les équations de Navier-Stokes adaptées aux films minces. Le premier modèle est une extension de l'équation de Reynolds généralisée, prenant en compte l'inertie et déjà utilisé dans des études de la lubrification. Le second modèle a été établi à partir des équations de Navier-Stokes et conserve leur forme. Ce système possède l'avantage de pouvoir utiliser les outils numériques adaptés à la capture de choc (WENO). La comparaison des deux modèles montre que les équations de Reynolds Modifiées ne sont pas suffisantes pour l'étude d'un écoulement film mince en régime supersonique.

Les résultats des simulations menées montrent la présence d'une détente sur le changement d'inclinaison du double profil qui dépend de la vitesse, de la température et de l'angle de la géométrie. Cette détente, même dans des conditions sévères de fonctionnement (grandes vitesses ou fort convergent), n'a pas beaucoup d'influence sur le comportement global statique de la butée. Les résultats montrent également que contrairement à la théorie des écoulements supersoniques, aucun choc n'est observé en film mince supersonique. Une transition géométrique obtenue par homothétie, entre un écoulement contenant un choc et un autre n'en contenant pas, a été observée à une certaine valeur du rapport des longueurs d'adimensionnement pour une vitesse et une géométrie donnée. L'extrapolation de ces résultats pour un cas réaliste montre qu'un choc ne peut se produire qu'à partir de 5500 m/s pour une épaisseur de film de 40  $\mu\text{m}$  avec  $\varepsilon = 0.001$ . Il est donc peu probable qu'un choc ne se produise dans une butée en conditions supersoniques dans le cadre industriel.

---

**Mots-Clés:** lubrification, butée aérodynamique, compressible, choc, supersonique, WENO



---

# Abstract

## **Tribological study of an aerodynamic thrust bearing in a supersonic regime**

The improvement of turbomachines requires to increase their rotational speeds and can leads components to be in presence of a supersonic regime, particularly their air bearing systems. This manuscript deals with a study of an aerodynamic thrust bearing in a supersonic regime. This work belongs to the research field on the high-speed thrust bearings, but very few studies are focused on this subject. This problem is at the boundary between two scientific fields: lubrication and aerodynamic. The aim of this study is to develop models transcribed as a FORTRAN code, able to capture phenomenon related to the supersonic regime (shock, expansion wave) and adapted to the thin film geometry.

For this, two models have been developed as well as computer codes related to these models using the finite difference method: the Modified Reynolds equations and the Navier-Stokes equations adapted to thin films. The first model is an extension of the generalized Reynolds equation, taking into account inertia effects. It is a model already used in lubrication studies. The second model was developed from the Navier-Stokes and has their shape. This system has the advantage of using numerical schemes for shock capturing (WENO). The comparison of the two models shows that the Modified Reynolds equations are not appropriate to the study of a supersonic air thin film.

Numerical results show the presence of an expansion wave at the end of the sloping region of the taper flat geometry which depends on speed, on temperature and on the angle of the geometry. This expansion wave, under severe conditions, does not have much influence on the overall static behavior of the thrust bearing. The results also show that, contrary to the supersonic flow theory, a shock is not observed in a supersonic thin film. A geometrical transition obtained by homothetic, between a flow containing a shock and another with no shock, is observed at a given value of the characteristic length ratio for a given speed and geometry. Extrapolation of these results for a realistic case shows that a shock occurs from 5500 m/s for a film thickness of 40  $\mu\text{m}$  with  $\varepsilon = 0.001$ . It is therefore unlikely that a shock occurs in a supersonic thrust bearing in industrial settings.

---

**Key-words:** lubrication, air thrust bearing, compressible, shock, supersonic, WENO



# Table des matières

<b>Remerciements</b> .....	<b>vii</b>
<b>Résumé</b> .....	<b>ix</b>
<b>Abstract</b> .....	<b>xi</b>
<b>Table des matières</b> .....	<b>xiii</b>
<b>Nomenclature</b> .....	<b>xvii</b>
<b>Table des figures</b> .....	<b>xix</b>
<b>Table des tableaux</b> .....	<b>xxiii</b>
<b>Introduction</b> .....	<b>1</b>
<b>Partie 1: État de l'art</b> .....	<b>7</b>
1.1. Présentation générale des butées aérodynamiques .....	9
1.1.1 Introduction .....	9
1.1.2 Définition générale d'une butée et des équations de la lubrification.....	9
1.1.3 Recherches visant à améliorer les performances de la butée .....	14
1.1.4 Conclusion.....	16
1.2. Etude de la lubrification à haute vitesse .....	17
1.2.1 Introduction.....	17
1.2.2 Prise en compte de la turbulence .....	17
1.2.3 Prise en compte des effets d'inertie.....	20
1.2.4 Conclusion.....	24
1.3. Étude du régime supersonique .....	25
1.3.1 Introduction.....	25
1.3.2 Propriétés des écoulements supersoniques .....	25
1.3.3 Travaux sur les butées aérostatiques en régime supersonique .....	29
1.3.4 Conclusion.....	33
<b>Partie 2: Modèles physiques et méthodes numériques associées pour les butées aérodynamiques en régime supersonique</b> .....	<b>35</b>
2.1. Résolution des équations de Reynolds Modifiées .....	37
2.1.1 Introduction.....	37
2.1.2 Présentation du système à résoudre .....	37

2.1.3	<i>Présentation des méthodes numériques</i> .....	41
2.1.4	<i>Résultats préliminaires</i> .....	46
2.1.5	<i>Conclusion</i> .....	49
2.2.	<b>Résolution des équations de Navier Stokes adaptées aux films minces</b> .....	<b>50</b>
2.2.1	<i>Introduction</i> .....	50
2.2.2	<i>Présentation du système à résoudre</i> .....	51
2.2.3	<i>Méthodes numériques utilisées</i> .....	54
2.2.4	<i>Résultats : comparaison des deux méthodes</i> .....	62
2.2.5	<i>Conclusion</i> .....	63
<b>Partie 3:</b>	<b>Résultats</b> .....	<b>65</b>
3.1.	<b>Influence de la vitesse, de la température et de l'inertie</b> .....	<b>67</b>
3.1.1	<i>Introduction</i> .....	67
3.1.2	<i>Influence de la vitesse et comparaison entre parois isolantes et parois isothermes</i> .....	68
3.1.3	<i>Influence de la température aux parois</i> .....	73
3.1.4	<i>Influence de l'inertie</i> .....	75
3.1.5	<i>Conclusions</i> .....	77
3.2.	<b>Influence des différents paramètres géométriques</b> .....	<b>79</b>
3.2.1	<i>Introduction</i> .....	79
3.2.2	<i>Influence de la charge au travers du rapport des hauteurs de film</i> .....	79
3.2.3	<i>Influence du rapport des longueurs d'adimensionnement <math>\epsilon</math></i> .....	81
3.2.4	<i>Limite de présence de choc</i> .....	84
3.2.5	<i>Conclusions</i> .....	87
	<b>Conclusion générale et perspectives</b> .....	<b>89</b>
	<b>Bibliographie</b> .....	<b>95</b>
<b>Partie 4:</b>	<b>Annexe</b> .....	<b>105</b>
4.1.	<b>Démonstration des équations de Reynolds Modifiées</b> .....	<b>107</b>
4.1.1	<i>Simplifications des équations de la mécanique</i> .....	107
4.1.2	<i>Intégration dans l'épaisseur du film et profil de vitesse</i> .....	108
4.1.3	<i>Système final</i> .....	110
4.1.4	<i>Equation de l'énergie</i> .....	111
4.2.	<b>Validation de de l'outil numérique CERMAC</b> .....	<b>113</b>
4.2.1	<i>Introduction</i> .....	113
4.2.2	<i>Validation du code pour un plan incliné.</i> .....	113
4.2.3	<i>Validation du code pour un double profil.</i> .....	114

---

4.3.	Démonstration des équations de Navier Stokes adaptées aux films minces.....	116
4.3.1	<i>Adimensionnement du système</i> .....	116
4.3.2	<i>Calcul des valeurs propres</i> .....	118
4.4.	Prise en compte de la géométrie et méthode de raffinement de maillage.....	122
4.4.1	<i>Introduction</i> .....	122
4.4.2	<i>Changement de variable généralisé et nouveau système à résoudre</i> .....	122
4.4.3	<i>Définition d'un maillage dans le domaine physique</i> .....	123
4.5.	Validation de l'outil numérique CAMEAS .....	125
4.5.1	<i>Validation de la routine WENO</i> .....	125
4.5.2	<i>Validation en film mince</i> .....	127





---

# Nomenclature

## Symboles romains

$a, b$	Paramètres de dilatation du maillage
$c$	Vitesse du son
$c_l$	Coefficient de Lagrange (WENO)
$c_p$	Chaleur spécifique à pression constante
$c_v$	Chaleur spécifique à volume constant
$C$	Constante de la loi de Sutherland
$d_k$	Poids idéaux (WENO)
$E_t$	Energie totale
$f_i$	Vecteur des variables $f = (\rho, u, v, w, E_t)$
$F$	Vecteur flux dans les directions $x_i$ ( $F_e, F_v, G_e, G_v, H_e, H_v$ pour Euler et visqueux)
$G_i$	Termes relatif à la moyenne des termes $I$ et $J$ dans l'épaisseur de film
$h$	Hauteur maximale de film au point courant
$H$	Hauteur d'adimensionnement
$H_1$	Hauteur en entrée
$H_2$	Hauteur en sortie
$I, J$	Termes après intégration de la viscosité dans l'épaisseur du film
$I_{ij}$	Termes représentant la contribution de l'inertie dans l'épaisseur du film
$K$	Coefficient de conductivité thermique
$l$	Longueur de mélange
$L$	Longueur caractéristique (taille du patin)
$\mathcal{L}$	Opérateur des contributions spatiales
$m$	Différences calculées dans la méthode de tir
$M$	Nombre de Mach
$N_i$	Nombre de points du maillage dans les directions $x_i$
$N_d$	Nombre de diffusion
$p$	Pression
$P^*$	Pression modifiée (nombre adimensionnel)
$P_e$	Nombre de Peclet
$P_r$	Nombre de Prandtl
$p_w$	Puissance dissipée
$q_i$	Débit linéique suivant $x_i$
$Q_i$	Composante du vecteur densité de flux de chaleur par conduction suivant $x_i$
$\Re_e$	Nombre de Reynolds

---

$R$	Constante des gaz parfaits
$S_r$	Stencil (groupe de points) pour WENO
$t$	Temps
$T$	Température
$u$	Vecteur des vitesses $u = (u, v, w)$ ou $u = (u_1, u_2, u_3)$
$W$	Charge linéique
$x$	Vecteur position en coordonnées cartésiennes $x = (x, y, z)$ ou $x = (x_1, x_2, x_3)$

## Symboles grecs

$\alpha_r$	Poids normalisé (WENO)
$\beta_r$	Indicateur de régularité (WENO)
$\gamma$	Rapport des chaleurs spécifiques
$\delta_{i,j}$	Symbole de Kronecker : 1 si $i = j$ et 0 si $i \neq j$
$\delta_e$	Coefficient de pondération pour le modèle de turbulence
$\delta_l$	Epaisseur de la couche limite
$\Delta t$	Pas de temps
$\Delta x_i$	Pas d'espace dans la direction $x_i$
$\varepsilon$	Rapport géométrique des longueurs d'adimensionnement
$\theta$	Angle de la pente de double profil
$\kappa$	Constante de Karman
$\lambda$	Valeur propre
$\Lambda$	Nombre de compressibilité
$\mu$	Viscosité dynamique
$\nu$	Viscosité cinématique
$\nu_t$	Viscosité turbulente
$\rho$	Masse volumique
$\tau_{ij}$	Tenseur des contraintes visqueuses
$\omega_r$	Coefficient pondération (WENO)

## Notations

$(\bar{\cdot})$	Valeur adimensionnée
$(\cdot_0)$	Valeur de référence
$(\cdot^+)$	Valeur adimensionnée dans le modèle de turbulence
$(\hat{\cdot})$	Valeur extrapolée
$(\cdot^*)$	Valeur moyenne dans la décomposition de Reynolds
$(\cdot')$	Valeur fluctuante dans la décomposition de Reynolds

# Table des figures

<b>Illustration 1</b> : Pack de conditionnement d'air et ses applications. ....	3
<b>Illustration 2</b> : Schéma d'une turbomachine.....	3
<b>Illustration 3</b> : Photographie d'une butée LTS. ....	3
<b>Figure 1-1</b> : Schéma d'un palier axial. ....	9
<b>Figure 1-2</b> : Principales technologies de butées aérodynamiques [1].....	10
<b>Figure 1-3</b> : Profil de géométrie de patin, a) Rayleigh, b) incliné, c) double profil. ....	10
<b>Figure 1-4</b> : Forme des profils de pression pour les patins de a) Rayleigh [4], b) incliné [4], c) double profil [5] (B largeur du patin $B_0$ ou $X_0$ position du changement d'inclinaison).....	11
<b>Figure 1-5</b> : Technologie MITI utilisée par LTS [1]. ....	11
<b>Figure 1-6</b> : Schéma d'un profil de patin d'une butée LTS. ....	12
<b>Figure 1-7</b> : Système d'axe et notations utilisées par Frêne <i>et al.</i> [13]. ....	13
<b>Figure 1-8</b> : Système d'axe avec paroi à l'origine utilisé par Frêne <i>et al.</i> [13]. ....	13
<b>Figure 1-9</b> : Principe de rugosité sur un contact rotor/butée [1]. ....	15
<b>Figure 1-10</b> : Profils de vitesse dans la direction radiale a) et dans l'épaisseur de film b) dans la direction de l'entraînement c) calculés par Huebner [51]. ....	19
<b>Figure 1-11</b> : Profils de pression calculés par Huebner [51] dans le cas laminaire (- - -) et dans le cas turbulent (---) en comparant également une résolution isotherme et THD. ....	19
<b>Figure 1-12</b> : Influence de l'inertie étudiée par Constantinescu [59], à gauche comparaison de la pression avec et sans inertie, à droite influence du nombre de Reynolds modifié sur la génération d'inertie. ....	22
<b>Figure 1-13</b> : Influence de la géométrie sur les effets d'inertie obtenue par Chowdhury et Ahamadi [69]. ....	22
<b>Figure 1-14</b> Etude des effets d'inertie sur une butée à huile obtenue par Chowdhury et Ahamadi [69], à gauche influence du Reynolds, à droite influence de la prise en compte de la température.....	23
<b>Figure 1-15</b> : Influence du coefficient d'échange thermique sur la pression dans un blochet à haute vitesse obtenu par Dupuy <i>et al.</i> [73]. ....	23
<b>Figure 1-16</b> : Représentation des régimes d'écoulement. ....	26
<b>Figure 1-17</b> : Avion de chasse en vol transsonique (United States Navy ID 061105-N-8591H-389). ....	26
<b>Figure 1-18</b> : Missile à vitesse supersonique (Schlieren photographie NASA). ....	26
<b>Figure 1-19</b> : Apparition d'une onde de choc [74]. ....	27
<b>Figure 1-20</b> : Création d'une onde de choc (à gauche) ou d'une détente (à droite) pour un écoulement supersonique le long d'une paroi [74]. ....	27
<b>Figure 1-21</b> : Schéma d'interaction choc et couche limite [74] ....	29
<b>Figure 1-22</b> : Principe d'une butée aérostatique.....	29
<b>Figure 1-23</b> : Vue de profil d'une butée aérostatique. ....	30
<b>Figure 1-24</b> : Description des différentes zones d'écoulement d'une butée aérostatique [79]. ....	30
<b>Figure 1-25</b> : Théorie des trois régions décrite par Yoshimoto <i>et al.</i> [82]. ....	31
<b>Figure 1-26</b> : Résultats de la comparaison des méthodes par rapport aux résultats expérimentaux d'une butée aérostatique supersonique obtenus par Yoshimoto <i>et al.</i> [82]. ....	31
<b>Figure 1-27</b> : Champ de pression d'une butée aérostatique [83]. ....	32
<b>Figure 1-28</b> : Résultats en isocontour de la pression obtenus par CFD par Eleshaky [85]. ....	32
<b>Figure 1-29</b> : Schéma descriptif de la dynamique de l'écoulement proposé par Eleshaky [85]. ....	33
<b>Figure 2-1</b> : Configuration géométrique d'un double profil. ....	37
<b>Figure 2-2</b> : Exemple de maillage utilisé dans CERMAC ..... ..	42

<b>Figure 2-3</b> : Conditions limites utilisées dans CERMAC. ....	43
<b>Figure 2-4</b> : Schémas représentant les deux géométries étudiées.....	46
<b>Figure 2-5</b> : Résultats de la simulation avec turbulence – sans inertie – isotherme a) géométrie 1 et b) géométrie 2.....	47
<b>Figure 2-6</b> : Résultats de la simulation avec turbulence – avec inertie – isotherme.....	48
<b>Figure 2-7</b> : Résultats de la simulation avec turbulence – avec inertie – adiabatique.....	48
<b>Figure 2-8</b> : Configuration de choc dans une tuyère [75].....	50
<b>Figure 2-9</b> : Premier cas de figure grande proportion supersonique. ....	50
<b>Figure 2-10</b> : Second cas de figure proportion supersonique moyenne. ....	51
<b>Figure 2-11</b> : Troisième cas de figure faible proportion supersonique. ....	51
<b>Figure 2-12</b> : Phénomène de Gibbs (—) solution analytique et (---) solution numérique (Crespo 2009).....	54
<b>Figure 2-13</b> : Maillage utilisé dans CAMEAS. ....	58
<b>Figure 2-14</b> : Conditions limites utilisées dans CAMEAS.....	59
<b>Figure 2-15</b> : Comparaison de CERMAC et de CAMEAS pour un même cas.....	62
<b>Figure 3-1</b> : Conditions limites utilisées par le code CAMEAS.....	67
<b>Figure 3-2</b> : Influence de la vitesse sur le profil de pression avec parois isolantes.....	69
<b>Figure 3-3</b> : Maximums de température/pression et charge/puissance dissipée en fonction de la vitesse avec les parois adiabatiques. ....	69
<b>Figure 3-4</b> : Influence de la vitesse sur le profil de pression avec parois isothermes à 0°C. ....	70
<b>Figure 3-5</b> : Proportion d'un écoulement à 1000 m/s à gauche et à 500 m/s à droite. ....	70
<b>Figure 3-6</b> : Maximums de température/pression et charge/puissance dissipée en fonction de la vitesse avec les parois isothermes à 0°C. ....	71
<b>Figure 3-7</b> : Influence de la vitesse sur le profil de pression avec parois isothermes à 80 °C. ....	71
<b>Figure 3-8</b> : Maximums de température/pression et charge/puissance dissipée en fonction de la vitesse avec les parois isothermes à 80°C. ....	72
<b>Figure 3-9</b> : Champ du nombre de Mach dans le cas adiabatique à gauche, parois à 0°C au centre et parois à 80°C à droite pour une vitesse de 800 m/s.....	72
<b>Figure 3-10</b> : Etude de l'influence de la température sur le profil de pression. ....	73
<b>Figure 3-11</b> : Maximums de température/pression à gauche et charge/puissance dissipée en fonction de la température sur la gamme -100°C à 100°C. ....	74
<b>Figure 3-12</b> : Influence des hautes températures aux parois sur le champ de pression.....	74
<b>Figure 3-13</b> : Influence des hautes températures sur le nombre de Mach, a) 0°C, b) 100°C, c) 500°C, d) 1000°C. ....	75
<b>Figure 3-14</b> : Influence de l'inertie sur le profil de pression avec des parois isothermes à 0°C. ....	76
<b>Figure 3-15</b> : Influence de l'inertie sur les maximums de pression et de température et sur la puissance dissipée et la charge en fonction de l'inertie. ....	77
<b>Figure 3-16</b> : Illustration d'une butée non chargée et d'une butée chargée pour une même géométrie de patin. ....	79
<b>Figure 3-17</b> : Influence de la charge (rapport $H1/H2$ ) sur le profil de pression.....	80
<b>Figure 3-18</b> : Maximums de pression/température et charge/puissance dissipée de l'étude de l'influence de la charge. ....	81
<b>Figure 3-19</b> : Champ de température pour trois rapports de hauteurs : 2 à gauche, 3 au centre et 4.33 à droite.....	81
<b>Figure 3-20</b> : Influence du rapport géométrique $\epsilon$ sur le champ de pression.....	82
<b>Figure 3-21</b> : Influence du rapport géométrique sur le champ de Mach $\epsilon$ entre 1.25 et 0.00125.....	83
<b>Figure 3-22</b> : Evolution du champ de Mach pour $\epsilon=0.24$ et pour $\epsilon=0.2375$ avec $t = 0s$ pour a) et d), $t = 2s$ pour b) et e) et $t = 8s$ c) et f).....	84

<b>Figure 3-23</b> : Champ de Mach pour les dernières valeurs de $\varepsilon$ où l'écoulement contient un choc avec a) 500 m/s, b) 600 m/s, c) 700 m/s, d) 800 m/s, e) 900 m/s et f) 1000 m/s. ....	85
<b>Figure 3-24</b> : Champ de pression pour les valeurs dernières valeurs de $\varepsilon$ où l'écoulement contient un choc avec a) 500 m/s, b) 600 m/s, c) 700 m/s, d) 800 m/s, e) 900 m/s et f) 1000 m/s. ....	86
<b>Figure 3-25</b> : Relation entre la valeur de $\varepsilon$ limite et la vitesse calculée à gauche, et à droite extension de la tendance vers des valeurs de $\varepsilon$ rencontrées en film mince.....	86
<b>Figure 4-1</b> : Différentes géométries étudiées, blochet à gauche et double profil à droite [90]. ....	113
<b>Figure 4-2</b> : Profils de pression obtenus pour un blochet, à gauche obtenus par Gross [90], à droite par CERMAC. ....	114
<b>Figure 4-3</b> : Résultats d'un patin à double profil obtenu par Gross [90].....	115
<b>Figure 4-4</b> : Résultats numériques pour un patin à double profil.....	115
<b>Figure 4-5</b> : Transformation liant l'espace physique à l'espace de calcul [109]. ....	122
<b>Figure 4-6</b> : Représentation du domaine adimensionnel d'un double profil. ....	123
<b>Figure 4-7</b> : Exemple de maillage raffiné pour un double profil utilisé dans CAMEAS. ....	123
<b>Figure 4-8</b> : Solution du problème de Sod en masse volumique (résultats de Crespo (-o-) et solution analytique (—) à gauche, résultats de CAMEAS à droite).....	125
<b>Figure 4-9</b> : Solution du problème de Lax en masse volumique (résultats de Crespo (-o-) et solution analytique (—) à gauche, résultats de CAMEAS à droite).....	126
<b>Figure 4-10</b> : Condition initiale du problème de Riemann 2D.....	126
<b>Figure 4-11</b> : Champs de pression du problème de Riemann 2D au temps $t=0.8s$ .....	127
<b>Figure 4-12</b> : Profils de pression d'un patin à double profil obtenu par Gross [90].....	128
<b>Figure 4-13</b> : Profils de pression d'un patin à double profil obtenu par CAMEAS. ....	128



---

# Table des tableaux

<b>Tableau 2-1</b> : Données des géométries utilisées. ....	46
<b>Tableau 2-2</b> : Cas de calcul à nombre de compressibilité constant.....	47
<b>Tableau 2-3</b> : Coefficients de pondération du schéma WENO 3. ....	57
<b>Tableau 3-1</b> : Géométrie et gamme de vitesse utilisées pour l'étude de l'influence de la vitesse. ....	68
<b>Tableau 3-2</b> : Géométrie et gamme de températures utilisées pour l'étude de l'influence de la température.....	73
<b>Tableau 3-3</b> : Géométrie et gamme de vitesse utilisée pour l'étude de l'influence de l'inertie.....	76
<b>Tableau 3-4</b> : Géométrie et gamme de hauteurs utilisées pour l'étude de l'influence de la charge. ....	80
<b>Tableau 3-5</b> : Géométrie étudiée pour l'influence de $\varepsilon$ . ....	82
<b>Tableau 3-6</b> : Gamme de valeur de $\varepsilon$ et hauteurs associées.....	82
<b>Tableau 3-7</b> : Géométries étudiée pour la recherche de la disparition du choc.....	85
<b>Tableau 4-1</b> : Géométrie du blochet utilisée pour valider le code CERMAC.....	113
<b>Tableau 4-2</b> : Gamme de vitesse utilisée pour la validation du blochet.....	113
<b>Tableau 4-3</b> : Géométries étudiée pour valider CERMAC avec un double profil. ....	114
<b>Tableau 4-4</b> : Gamme de vitesse étudiée pour valider CERMAC en double profil.....	114
<b>Tableau 4-5</b> : Géométrie utilisée pour la validation de CAMEAS en film mince.....	127
<b>Tableau 4-6</b> : Gamme de vitesse étudiée pour la validation de CAMEAS en film mince. ....	127



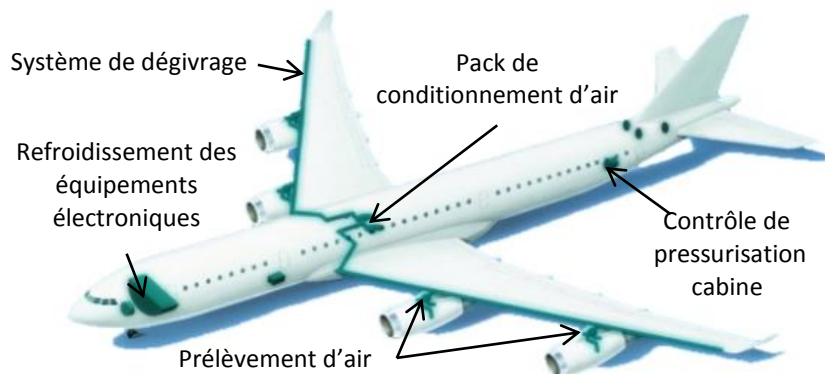


---

# Introduction

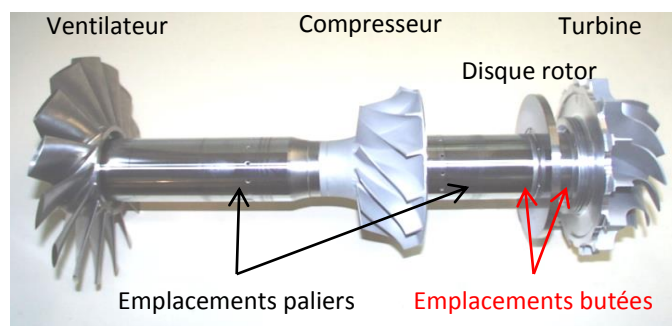


L'entreprise Liebherr Aerospace Toulouse (LTS) conçoit et produit des systèmes de management d'air pour avion. Ces dispositifs sont utilisés pour le contrôle de la température et de la pression dans l'habitacle mais aussi pour le refroidissement des équipements électroniques et pour le dégivrage des ailes. Le pack de conditionnement d'air se situe au centre de la surface inférieure de l'avion, et prélève de l'air à partir des moteurs comme le montre l'illustration 1.



**Illustration 1 :** *Pack de conditionnement d'air et ses applications.*

Un pack est composé entre autres d'un échangeur, d'un extracteur d'eau, et plus particulièrement d'une machine à cycle à air (Air Cycle Machine) qui s'occupe de refroidir l'air. L'ACM comporte une turbomachine, présentée dans l'illustration 2, chargée de comprimer et de détendre l'air afin de le refroidir.



**Illustration 2 :** *Schéma d'une turbomachine.*

Le rotor qui entraîne la turbomachine a ses efforts contrebalancés par des systèmes de pivoterie à air. L'effort radial du rotor est compensé par les paliers à air et l'effort axial est compensé par les butées, dont une photographie est donnée dans l'illustration 3.



**Illustration 3 :** *Photographie d'une butée LTS.*

Le but de LTS est de concevoir des packs de conditionnement d'air de plus en plus compacts et légers, afin d'augmenter l'espace habitable de l'avion mais aussi de diminuer la consommation de carburant. Pour que les performances des packs s'améliorent, la turbomachine doit tourner plus vite et ainsi peut amener la vitesse linéaire au niveau du disque rotor à être supérieure à celle du son. Le film d'air présent entre le rotor et la butée peut ainsi être en régime supersonique. La question qui se pose est donc la suivante :

*Quel est le comportement du film d'air dans une butée aérodynamique en régime supersonique ?*

Ce problème se situe à la frontière entre deux domaines de la mécanique. En effet, les butées aérodynamiques et la lubrification relèvent de la tribologie, et les écoulements supersoniques avec la présence de phénomènes spécifiques comme des chocs relèvent de l'aérodynamique. La principale différence entre ces deux spécialités est l'échelle des écoulements considérés. Dans la lubrification, les écoulements sont de type film mince, c'est-à-dire qu'une dimension de la géométrie est très faible par rapport aux autres, alors qu'en aérodynamique, toutes les dimensions sont généralement du même ordre de grandeur. Cette différence est à l'origine de la difficulté à résoudre les problèmes de lubrification avec les logiciels commerciaux de l'aérodynamique, puisqu'ils utilisent généralement des maillages du même ordre de grandeur dans toutes les directions. Le maillage doit alors être très raffiné pour traiter un problème en film mince. Cependant LTS souhaite faire du dimensionnement de butée hautes vitesses et donc utiliser un code rapide. C'est pour cette raison que ce problème sera traité à l'aide de codes, programmés en Fortran, rapides car ils seront adaptés à la physique et à la géométrie du problème.

L'objectif de cette étude est de déterminer le comportement d'un film d'air dans une butée en régime supersonique. Pour cela, il faut établir un système d'équations adapté à la géométrie et qui prend en compte les effets liés aux hautes vitesses et au régime supersonique : inertie, turbulence, thermique, et la possible présence de choc. À l'heure actuelle, il n'y a pas de résultats théoriques, numériques ou expérimentaux publiés permettant de confronter les simulations numériques menées dans cette étude, il s'agit donc d'une première approche du problème.

Ce mémoire se divise en trois grandes parties. La première traitera de l'état de l'art autour des butées aérodynamiques. Une description détaillée du fonctionnement et du design de la butée sera d'abord donnée. Ensuite les différentes études visant à améliorer la connaissance liée aux grandes vitesses seront présentées : travaux sur la prise en compte des effets thermiques, de la turbulence et de l'inertie. Puis, quelques définitions sur les écoulements supersoniques seront données ainsi que les principales propriétés des chocs et des détente. Enfin, quelques études de films minces en régime supersonique, réalisées sur des butées aérostatiques, seront présentées. Ce chapitre permettra de déterminer un point de départ pour l'établissement du modèle physique permettant de résoudre le problème.

La seconde partie présentera deux modèles physiques permettant d'étudier une butée aérodynamique en régime supersonique, à savoir les équations de Reynolds Modifiées et les équations de Navier-Stokes adaptées aux films minces. Le premier système est une extension de l'équation de Reynolds généralisée qui prend en compte également l'inertie et la variation de viscosité dans l'épaisseur de film. Les principales hypothèses, la méthode d'établissement, ainsi

que le modèle de turbulence seront détaillés. Puis, les schémas numériques et les méthodes de résolutions en différences finies pour ce système seront expliqués. Enfin, une étude préliminaire sur l'influence de l'inertie et les conséquences d'un régime supersonique dans une butée sera analysée. Le second modèle sera élaboré à partir les équations de Navier Stokes. La démonstration de ce nouveau système et les méthodes numériques utilisées pour le résoudre seront ensuite explicitées. Enfin une étude comparative des deux modèles sera menée pour définir quel modèle est le plus adapté au problème.

La troisième partie de ce manuscrit présentera l'ensemble des simulations menées, permettant de déterminer le fonctionnement d'une butée aérodynamique en régime supersonique, et sera séparée en deux grands thèmes, l'étude de l'influence de différentes variables (vitesse, température et inertie) et celle des paramètres géométriques (rapport des hauteurs, et des longueurs d'adimensionnement). Dans le premier paragraphe, l'influence de la vitesse sera étudiée sur une gamme allant de 200  $m/s$  jusqu'à 1000  $m/s$  pour différentes conditions limites aux parois en températures (adiabatiques et isothermes). Ensuite l'influence de la température aux parois sera analysée pour déterminer le cas d'étude le plus intéressant. Enfin, l'influence de l'inertie sera décrite pour une gamme de vitesse allant de 100  $m/s$  à 1000  $m/s$ . Le second paragraphe se consacrera d'abord à l'étude de l'influence du rapport des hauteurs de film en entrée et en sortie, permettant de faire varier la géométrie suivie par le fluide. Ensuite l'étude du rapport des longueurs d'adimensionnement permettra de justifier l'absence de choc dans un film mince supersonique. Enfin, à partir du même critère géométrique, la recherche de la transition entre un écoulement contenant un choc et un n'en contenant pas sera menée pour différentes vitesses afin de pouvoir estimer si la présence d'un choc en film mince est possible

Les conclusions générales résumeront les résultats obtenus au travers des différentes méthodes et études menées, et donnera une réponse sur l'influence du régime supersonique sur une butée aérodynamique. Les perspectives de cette étude seront finalement proposées.



---

# Partie 1: État de l'art

---

1.1.	Présentation générale des butées aérodynamiques	9
1.1.1	<i>Introduction</i>	9
1.1.2	<i>Définition générale d'une butée et des équations de la lubrification</i>	9
1.1.3	<i>Recherches visant à améliorer les performances de la butée</i>	14
1.1.4	<i>Conclusion</i>	16
1.2.	Etude de la lubrification à haute vitesse	17
1.2.1	<i>Introduction</i>	17
1.2.2	<i>Prise en compte de la turbulence</i>	17
1.2.3	<i>Prise en compte des effets d'inertie</i>	20
1.2.4	<i>Conclusion</i>	24
1.3.	Étude du régime supersonique	25
1.3.1	<i>Introduction</i>	25
1.3.2	<i>Propriétés des écoulements supersoniques</i>	25
1.3.3	<i>Travaux sur les butées aérostatiques en régime supersonique</i>	29
1.3.4	<i>Conclusion</i>	33





# 1.1. Présentation générale des butées aérodynamiques

## 1.1.1 Introduction

Une butée aérodynamique est un composant de turbomachine qui compense les efforts axiaux d'un rotor. C'est un disque immobile solidaire du carter, opposé à un disque tournant entraîné par le rotor. Lorsque celui-ci est en rotation, l'air ambiant est entraîné entre les deux disques et joue le rôle de lubrifiant en formant un « coussin d'air ». La butée est constituée de patins qui forment des convergents afin de permettre à l'air d'être comprimé et de créer une surpression. La figure 1-1 montre ce système.

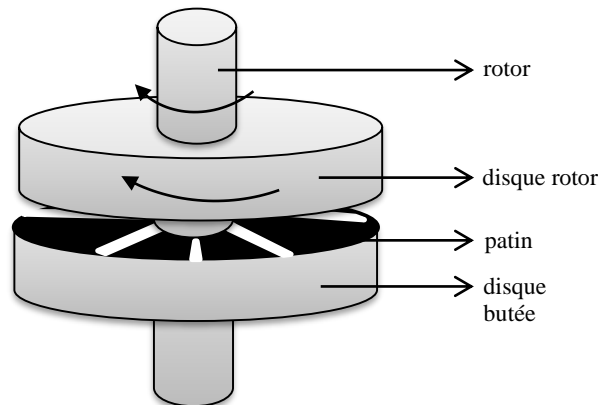


Figure 1-1 : Schéma d'un palier axial.

Ce dispositif remplace de plus en plus les systèmes de pivoterie à billes et à huile. Les avantages majeurs de l'utilisation de l'air sont sa capacité à fonctionner à haute température et de ne pas nécessiter d'alimentation.

Dans ce premier chapitre, un descriptif détaillé des butées sera donné, ainsi que les équations du comportement du film. Ensuite, un résumé des travaux visant à améliorer le fonctionnement de la butée par la compréhension des phénomènes liés à la température et des déformations induites, ou proposant de nouveaux designs de butées, sera présenté.

## 1.1.2 Définition générale d'une butée et des équations de la lubrification

### 1.1.2.1 Fonctionnement de la butée à feuilles

L'objectif des industriels est de concevoir et d'utiliser des butées offrant les meilleures performances possibles. Les performances d'une butée sont caractérisées par sa capacité de charge, par sa puissance dissipée, par sa stabilité et par son adaptation aux sollicitations. La capacité de charge est la force maximale que peut exercer le rotor sur la butée. La puissance dissipée est l'énergie perdue principalement sous forme de chaleur et elle est liée au couple résistant induit par les contraintes de cisaillement dans le film d'air. La stabilité d'une butée est liée à sa conception et aux conditions de fonctionnement. Elle détermine si les sollicitations du rotor peuvent provoquer, ou non, une vibration capable de rompre le film d'air. L'adaptation d'une butée vient du design des patins et de leur technologie ; elle doit être capable de

compenser au mieux certains défauts de fabrication tels que le désalignement des disques (c'est-à-dire lorsque les disques de rotor et de butée ne sont pas parfaitement parallèles). Les enjeux sont d'augmenter la capacité de charge de la butée, de diminuer sa puissance dissipée, de maîtriser sa stabilité et d'élargir son champ de fonctionnement.

Il existe deux grandes familles de butées aérodynamiques en fonction de leurs profils. Ces familles regroupent plusieurs catégories qui dépendent des technologies employées. Les butées utilisées par LTS sont des butées à feuilles téflonnées appuyées sur une feuille ondulée déformable. Elles correspondent à la catégorie la plus à droite de la figure 1-2.

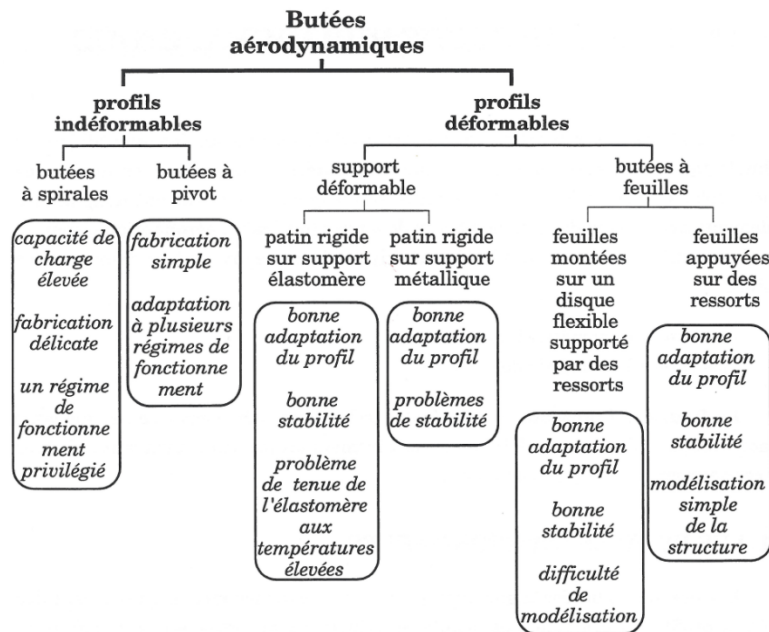


Figure 1-2 : Principales technologies de butées aérodynamiques [1].

Plusieurs publications présentent des états de l'art sur plusieurs de ces technologies. Par exemple, la publication de Glavatskih [2] donne un aperçu des travaux menés sur les butées à pivots largement utilisées dans l'industrie énergétique. Heshmat et Hermel [3] proposent un résumé de la technologie des butées à feuilles utilisées dans l'industrie aéronautique.

Un des paramètres important d'une butée est la forme de ses patins qui dépend de la technologie utilisée. Elles caractérisent la forme du convergent dans lequel l'air va être entraîné et être comprimé et elles influent directement sur les performances de la butée. Les principales géométries de patin sont décrites dans la figure 1-3.

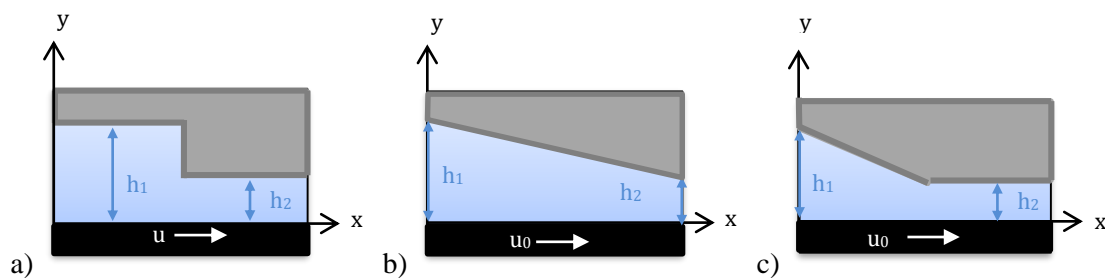
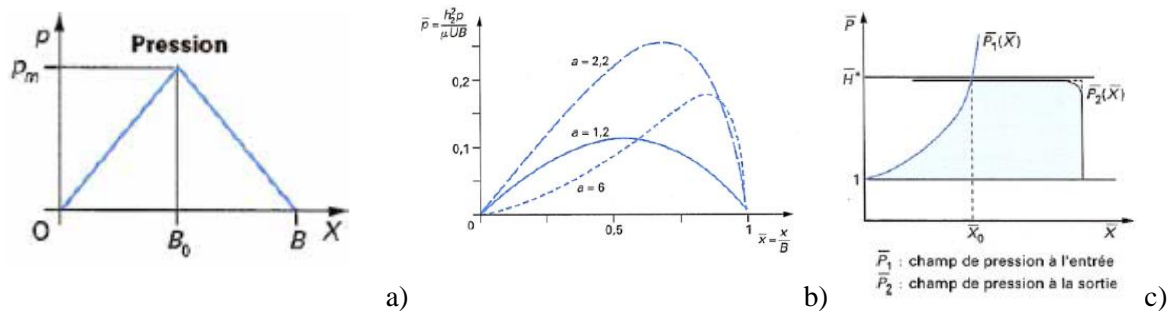


Figure 1-3 : Profil de géométrie de patin, a) Rayleigh, b) incliné, c) double profil.

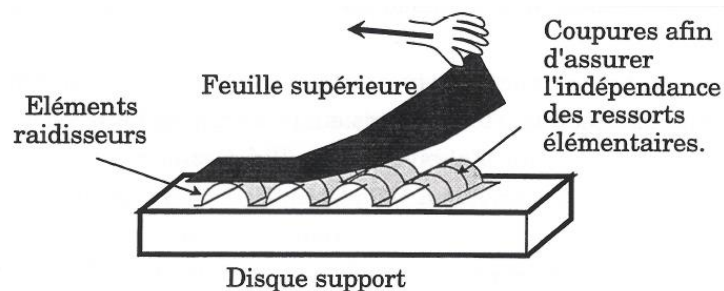
Le comportement du lubrifiant est très différent en fonction de ces géométries. Cela se remarque à travers l'observation des profils de pression dont Frêne [4] et Stephan et Iordanoff [5] montrent leur forme générale pour chacune des géométries.



**Figure 1-4 :** Forme des profils de pression pour les patins de a) Rayleigh [4], b) incliné [4], c) double profil [5] ( $B$  largeur du patin  $B_0$  ou  $X_0$  position du changement d'inclinaison).

Le profil de pression pour un patin de Rayleigh a une forme triangulaire pour un fluide incompressible et de créneau pour un fluide compressible. Dans le cas incliné, le profil de pression a une forme parabolique. Pour le double profil, la pression croît jusqu'au changement d'inclinaison puis devient constante avant de décroître jusqu'à atteindre la pression atmosphérique en sortie. La géométrie et, par conséquent, la forme du profil influent sur les performances de la butée. Les butées de LTS possèdent des patins à double profils car ils offrent un maximum de pression plus important.

Chez LTS, les butées sont dites à feuilles. Cette technologie va maintenant être présentée. Ses avantages, résumés par Agrawal [6] sont : une plus grande facilité d'utilisation, puisque le lubrifiant est l'air ambiant qui ne nécessite ni alimentation ni entretien, et une plus grande gamme de vitesses et de températures. La technologie à feuille a été développée par MITI (Mohawk Innovative Technology Incorporation). Le patin est constitué d'une feuille ondulée déformable sur laquelle repose une feuille supérieure comme le montre la figure 1-5.

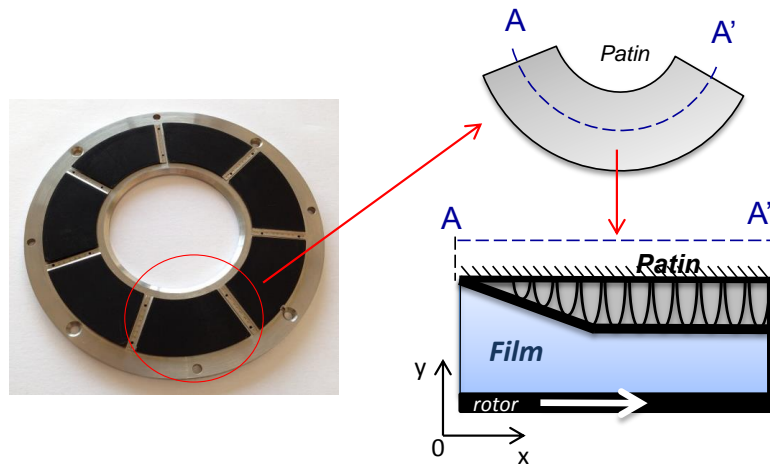


**Figure 1-5 :** Technologie MITI utilisée par LTS [1].

Cette technologie a été le sujet de nombreuses recherches visant à améliorer ses performances, comme l'optimisation de la géométrie du patin. Heshmat *et al.* [7] ont proposé une étude théorique qui optimise les paramètres principaux du profil, à savoir l'angle d'inclinaison du double profil ainsi que sa hauteur. Iordanoff [1] a calculé de façon plus complexe ces mêmes paramètres optimaux. Ces travaux ont permis d'augmenter très largement la capacité de charge et la plage de fonctionnement des butées à feuilles. Un autre exemple d'investigation sur ces butées est l'étude et l'optimisation de la déformabilité des patins. Pour cela un certain nombre de travaux ont déterminé les propriétés élastiques de la structure souple

à l'exemple de Benali *et al.* [8], Park *et al.* [9] et Berger *et al.* [10]. Plus généralement, Bauman [11] montre les différents moyens expérimentaux mis en œuvre pour améliorer ces butées.

Bien que dans cette étude la déformabilité des patins ne soit pas prise en compte, il semble intéressant de présenter cette technologie, en vue de l'intégrer dans des travaux futurs. La figure 1-6 montre la géométrie d'un patin de butée de LTS.



**Figure 1-6** : Schéma d'un profil de patin d'une butée LTS.

La partie structurelle de la butée étant présentée, le paragraphe suivant décrira le comportement du film d'air. La détermination du modèle théorique, caractérisant cet écoulement et sa modélisation, est au cœur des grandes thématiques de la lubrification.

### 1.1.2.2 Equations de lubrification

O. Reynolds en 1886, a proposé une équation qui décrit la distribution de la pression dans un film fluide visqueux. Cette équation est une combinaison de l'équation du mouvement et de l'équation de la conservation de la masse dans une géométrie mince. Les effets d'inertie et les forces volumiques sont négligés devant les forces visqueuses. Dowson [12] propose de généraliser l'équation de Reynolds. Il existe plusieurs niveaux d'équations en fonction des hypothèses. La forme la plus globale est l'équation des films minces visqueux généralisée qui s'appuie sur un certain nombre d'hypothèses.

- Le milieu est continu,
- le fluide est newtonien,
- l'écoulement est laminaire,
- les forces massiques extérieures sont négligeables,
- les forces d'inertie sont négligeables,
- le fluide adhère aux parois,
- la dimension du film est très faible devant les autres dimensions.

Le système d'axe choisi pour établir cette équation est donné dans la figure 1-7.

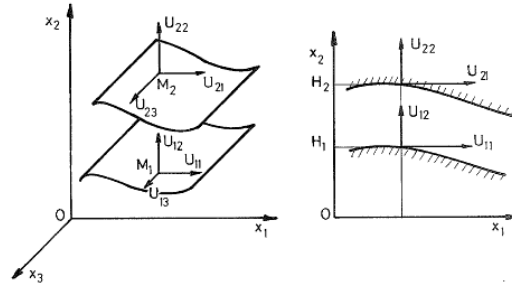


Figure 1-7 : Système d'axe et notations utilisées par Frêne et al. [13].

L'équation des films minces visqueux généralisée est obtenue en adimensionnant les équations de conservation de la masse et du mouvement. Elles font apparaître un facteur géométrique qui découle de la dernière hypothèse :  $\varepsilon = H/L$ , avec  $H$  la hauteur caractéristique choisie pour adimensionner la direction  $x_2$  correspondant à l'épaisseur du film et  $L$  la longueur caractéristique choisie pour adimensionner les longueurs  $x_1$  et  $x_3$  correspondants aux autres directions. Ce rapport géométrique  $\varepsilon$  est de l'ordre de  $10^{-3}$  en lubrification, donc les termes en facteurs de  $\varepsilon$  ou plus sont négligés. Le système simplifié permet d'obtenir les profils de vitesse dans les directions  $x_1$  et  $x_3$  qui sont ensuite injectés dans l'équation de conservation de la masse moyennée dans l'épaisseur du film. Après quelques étapes [12], il en découle la formule suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_1} \left( G \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( G \frac{\partial p}{\partial x_3} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} [U_{21}(R_2 - F) + U_{11}F] - \rho_2 U_{21} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} + \rho_1 U_{11} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_3} [U_{23}(R_2 - F) + U_{13}F] - \rho_2 U_{23} \frac{\partial H_2}{\partial x_3} + \rho_1 U_{13} \frac{\partial H_1}{\partial x_3} + \frac{\partial R_2}{\partial t} \\ &- \rho_2 \frac{\partial H_2}{\partial t} + \rho_1 \frac{\partial H_1}{\partial t} + \rho_2 U_{22} - \rho_1 U_{12} \end{aligned} \quad (1.1-1)$$

Les termes  $R_2$ ,  $F$ , et  $G$  sont explicités dans [13] et dépendent de la moyenne de la densité ainsi que celle de la viscosité à travers l'épaisseur du film. Les conditions limites sur les parois sont les suivantes :

$$\begin{aligned} u_1 = U_{11} \quad u_2 = U_{12} \quad u_3 = U_{13} \quad \text{pour } x_2 = H_1(x_1, x_3, t) \\ u_1 = U_{21} \quad u_2 = U_{22} \quad u_3 = U_{23} \quad \text{pour } x_2 = H_2(x_1, x_3, t) \end{aligned} \quad (1.1-2)$$

Plus couramment, le système d'axe est choisi pour avoir l'origine sur l'une des parois qui est considérée immobile, et ainsi obtenir les conditions limites suivantes :

$$\begin{aligned} u = U_1 \quad v = 0 \quad w = W_1 \quad \text{pour } y = 0 \\ u = U_2 \quad v = V_2 \quad w = W_3 \quad \text{pour } y = h \end{aligned} \quad (1.1-3)$$

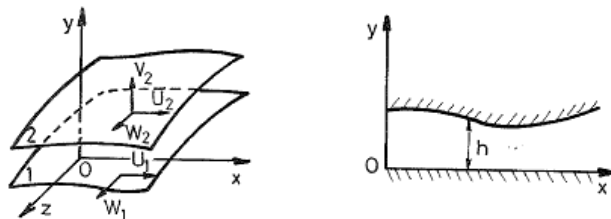


Figure 1-8 : Système d'axe avec paroi à l'origine utilisé par Frêne et al. [13].

Dans la plus grande partie des problèmes de lubrification, la température est supposée constante dans l'épaisseur du film. La masse volumique et la viscosité sont supposées dépendre uniquement de la température et de la pression. Avec ces nouvelles hypothèses, l'équation (1.1-1) devient l'équation de Reynolds généralisée [12]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( G \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( G \frac{\partial p}{\partial z} \right) \\ = \frac{\partial}{\partial x} [U_2(R_2 - F) + U_1 F] - \rho_2 U_2 \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} [W_2(R_2 - F) + W_1 F] - \rho_2 W_2 \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial R_2}{\partial t} \\ - \rho_2 \frac{\partial h}{\partial t} + \rho_2 V_2 \end{aligned} \quad (1.1-4)$$

L'équation de Reynolds classique est obtenue en simplifiant l'équation (1.1-4). Pour cela, la masse volumique et la viscosité sont considérées comme constantes dans l'épaisseur de film, simplifiant l'écriture des termes  $R_2$ ,  $F$ , et  $G$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \\ = 6\rho(U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + 6\rho(W_1 - W_2) \frac{\partial h}{\partial z} + 6h \frac{\partial}{\partial x} \{ \rho(U_1 + U_2) \} \\ + 6h \frac{\partial}{\partial z} \{ \rho(W_1 + W_2) \} + 12\rho V_2 + 12h \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.1-5)$$

Il est intéressant de remarquer que les hypothèses choisies déterminent directement l'équation à résoudre. Cependant, l'étude des butées en présence de hautes vitesses implique de supprimer certaines de ces hypothèses telles que le régime laminaire ou la non prise en compte des effets d'inertie. En régime supersonique, cette étude montrera également que d'autres hypothèses seront aussi retirées.

### 1.1.3 Recherches visant à améliorer les performances de la butée

#### 1.1.3.1 Prise en compte de la thermodynamique du fluide

L'amélioration des performances des butées passe par une meilleure compréhension de la physique dans le fluide lubrifiant. C'est pour cette raison que les recherches se sont intéressées à l'influence de la température sur les films lubrifiants et leur environnement. La température est un facteur prédominant puisque la plupart des lubrifiants (huiles, air, etc..) ont un comportement qui en dépend directement.

L'étude thermique se fait par le biais de l'équation de l'énergie des films fluides visqueux, ce qui a donné lieu à la naissance de la THD (ThermoHydroDynamique). Cette équation est démontrée dans les travaux de Dowson [12] et se résume à la relation suivante.

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \alpha T \left( \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (1.1-6)$$

Avec  $C_p$  la capacité calorifique à pression constante,  $T$  la température,  $\alpha$  le coefficient de dilatation calorimétrique à pression constante valant  $1/T$  pour un gaz parfait, et  $K$  le coefficient de conductivité thermique considéré constant.

Il existe deux étapes pour prendre en compte les effets thermiques dans un contact. La première consiste à calculer la température dans le fluide et d'en déduire sa répartition. Il est ainsi possible de comparer expérimentalement les résultats obtenus. Les travaux d'Ettles [14], Dadouche *et al.* [15] et Markin *et al.* [16] ont permis d'obtenir le champ de température pour

différents types de butées. Ils ont remarqué que la zone la plus chaude se trouve proche du bord de fuite et du diamètre extérieur du patin, que le gradient de température le long du patin est important et que la température est très sensible aux changements de charge et de vitesse de rotation. La seconde étape consiste à déterminer les déformations induites par les gradients thermiques et leurs impacts sur les performances de la butée, donnant naissance à la TEHD (ThermoElastoHydroDynamique), De nombreux chercheurs se sont penchés sur ce phénomène à l'exemple d'Ahmed *et al.* [17] et [18] ont montré que les déformations du disque tournant et des patins peuvent être très importants, en modifiant l'épaisseur de film et potentiellement diminuer les performances de la butée.

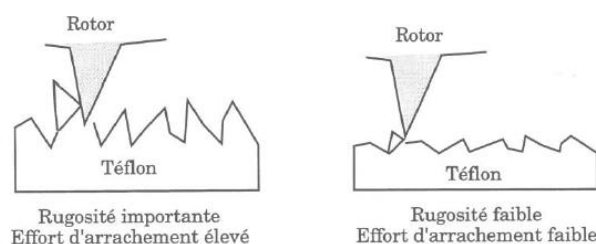
Ainsi des études comme celle de Bruckner [19] ou Dykas [20] prennent en compte tous ces aspects, c'est-à-dire : calcul du champ de température, déformations liées à la thermique et déformations des structures souples. Ces travaux ont permis de mettre en lumière les paramètres prédominants sur le fonctionnement des butées à feuilles, en particulier la difficulté de calcul pour les machines rapides, car les températures sont telles que les déformations sont sous-estimées et peuvent amener à des dysfonctionnements. Ils en ont conclu qu'une bonne gestion des flux thermiques dans le film permettrait d'augmenter les performances.

Un problème récurrent lors de la modélisation de la température dans une butée est le choix des conditions limites. Il est important de noter que les parois, que ce soit celle du disque tournant ou celle du patin, ne sont ni isothermes ni adiabatiques et que la température en entrée est déterminante. De nombreuses investigations ont cherché à mieux déterminer ces conditions limites à l'exemple de Glavatskih [21] qui a mesuré à l'aide de thermocouples, la température à la surface des patins, et Wasilczuk et Rotta [22] qui ont simulé l'interpatin pour mieux déterminer la condition d'entrée ou Banwait et Chandrawat [23] qui ont comparé numériquement différentes conditions limites.

Toutes ces études ont permis de montrer que la température augmente sensiblement avec la vitesse et la charge et qu'elle provoque des déformations diminuant parfois fortement les performances de la butée. Il en résulte que la température doit absolument être prise en compte car elle possède une très grande influence sur le comportement du film. Il existe diverses méthodes permettant de contrôler la température comme une alimentation supplémentaire ou une meilleure maîtrise du revêtement des surfaces.

### 1.1.3.2 Amélioration des revêtements

Le revêtement appliqué sur les patins de la butée possède deux objectifs principaux. Le premier est la limitation des forces de frottement, en particulier lors des phases d'arrêt et de démarrage, en optimisant la rugosité des surfaces. Cette diminution des frottements implique une diminution de la température et des déformations indésirables comme le montrent les travaux de Deresse et Sinha [24]. Chez LTS, la feuille supérieure des butées est revêtue d'une couche de téflon, et le phénomène de frottement lié à la rugosité est décrit dans la figure 1-9.



**Figure 1-9 : Principe de rugosité sur un contact rotor/butée [1].**

Le second avantage est l'élargissement de la gamme de fonctionnement en créant des revêtements capables de s'adapter à des conditions sévères, comme de grandes amplitudes de température mais aussi des disques désalignés. Par exemple Heshmat *et al.* [25] ont comparé différents types de revêtements en cas de très fortes températures, ou Glavatskih et Fillon [26] et [27] ont étudié un revêtement type PTFE (PolyTetraFluoroEthylene) ayant la capacité de pouvoir se déformer aux hautes températures et ainsi permettre à la butée de mieux s'adapter à de grandes charges.

### 1.1.3.3 Création de nouveaux designs et autres recherches

---

Une dernière façon d'améliorer les performances d'une butée est la création de nouveaux designs en améliorant la conception des patins. Par exemple, Heshmat et Shapiro [28] ont proposé un nouveau design de butée où ils doublent la feuille ondulée augmentant les performances et l'adaptation au désalignement. Fesanghary et Khonsari [29] ont proposé d'optimiser la forme du profil du patin et Hashimoto et Ochiai [30] ont comparé quatre designs différents de butées à géométrie fixe. Un nouveau design peut se traduire par l'optimisation de l'alimentation en lubrifiant en particulier lors des phases d'arrêt-démarrage. Par exemple, Heshmat *et al.* [31] ont étudié les performances d'une butée sous-alimentée, De Pellegrin et Hargreaves [32] ont ajouté une rainure au centre du patin pour augmenter l'approvisionnement en huile, Gardner [33] a étudié l'influence du débit d'alimentation sur le comportement de la butée et sur son champ de température. De nombreux travaux ont été publiés sur la texturation des surfaces sur le patin, comme par exemple les travaux de Henry *et al.* [34].

Enfin, des thématiques plus originales peuvent être abordées autour des butées dans des configurations particulières. Dans le domaine des machines de haute précision, des butées à surface poreuses (Sharma et Yadav [35] ou Kucinski *et al.* [36]) ou des butées magnétiques (Nagaya *et al.* [37]) ont été élaborées. Pour mieux maîtriser la température, l'utilisation de gaz réfrigérant a été également étudiée par Garcia [38]. Enfin l'amélioration des méthodes expérimentales est également passée par l'utilisation de visualisation d'écoulement faite par Braun *et al.* [39], [40] ou de nouvelles instrumentations élaborées par Ashman *et al.* [41].

---

### 1.1.4 Conclusion

Les butées aérodynamiques à feuilles utilisées chez LTS sont le produit d'une haute technologie offrant une large gamme de fonctionnement et une bonne adaptabilité. Les études montrent que le contrôle de la température et la bonne modélisation des phénomènes sont à la base de l'amélioration de leur performances.

Cependant dans le cas des butées à grande vitesse, l'équation de Reynolds généralisée ne suffit plus à décrire la physique du fluide. Dans le paragraphe suivant, les phénomènes liés aux vitesses importantes (turbulence et inertie) seront expliqués. Les techniques permettant de les prendre en compte seront présentées et leurs effets sur le fonctionnement d'une butée seront décrits.



# 1.2. Etude de la lubrification à haute vitesse

## 1.2.1 Introduction

La diminution de la taille et du poids des turbomachines implique généralement l'augmentation de sa vitesse de rotation. Afin de modéliser le plus fidèlement possible le comportement du film lubrifiant dans de telles configurations les études se sont intéressées à la prise en compte des effets liés à la turbulence et à l'inertie.

En première partie de ce paragraphe, la thématique de la turbulence sera exposée, avec une description des modèles et les effets constatés dans différentes études. Dans une seconde partie, l'étude des méthodes permettant de tenir compte de l'inertie et les résultats de son influence constatés par différentes investigations seront présentés.

## 1.2.2 Prise en compte de la turbulence

### 1.2.2.1 Modèle de turbulence

En dynamique des fluides, la turbulence est intégrée sous forme de modèles aux équations de la mécanique. Dans le cadre de la lubrification, l'équation de Reynolds peut accueillir un modèle de turbulence, qui sera lui-même adapté aux films minces. Constantinescu [42] a été l'un des premiers à en proposer. Pour cela, les équations de la mécanique sont écrites avec la moyenne de Reynolds et simplifiées pour s'adapter à la géométrie des films minces. La moyenne de Reynolds est une décomposition des variables en une partie moyenne notée ( $\cdot^*$ ) et une partie fluctuante notée ( $\cdot'$ ).

$$\begin{cases} \frac{\partial p^*}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} (-\rho(u'v')^*) \\ \frac{\partial p^*}{\partial y} = (-\rho v'^2)^* \end{cases} \quad (1.2-1)$$

Afin de déterminer le profil de la vitesse et l'équation de la pression, il faut remplacer le tenseur de Reynolds turbulent  $(u'v')^*$  et  $v'^2^*$ . L'hypothèse de Boussinesq, dont l'utilisation a été confirmée dans les travaux de Schmitt [43], permet de relier le tenseur de Reynolds comme une contrainte lié à une viscosité turbulente  $\nu_t$ .

$$\tau = \mu \left( 1 + \frac{\nu_t}{\nu} \right) \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.2-2)$$

Pour  $v'^2^*$ , la pression est écrite ici comme la somme d'une pression  $\pi$  connue aux parois et d'une fonction elliptique de contrainte  $\sigma$  à déterminer.

$$\begin{cases} \sigma(x, y, z) = -\rho \overline{v'^2} \\ \bar{p} = \pi(x, z) + \sigma(x, y, z) \end{cases} \quad (1.2-3)$$

La composante  $(u'v')^*$  est exprimée avec le modèle de longueur de mélange établi par Prandtl et donnée dans la formule (1.2-4), avec  $l$  la longueur de mélange, et  $\kappa$  une constante représentant le coefficient entre  $y$  et  $l$ .

$$-\rho(u'v')^* = \rho l^2 \frac{\partial u^*}{\partial y} \left| \frac{\partial u^*}{\partial y} \right| \text{ ou } v_t = l^2 \left| \frac{\partial u^*}{\partial y} \right|$$

$$\left. \begin{aligned} l &= \kappa y; & 0 \leq y \leq \frac{h}{2} \\ l &= \kappa(h - y); & \frac{\delta}{2} \leq y \leq h \\ \kappa &= 0.4 \end{aligned} \right\} \quad (1.2-4)$$

Ce modèle a été amélioré par Ng [44] en se basant toujours sur l'hypothèse d'une viscosité turbulente, cette fois traduite par la formule de Reichardt avec  $\delta_l$  l'épaisseur de la couche limite fixée à 10,7. Ce sera le modèle utilisé dans la suite de cette étude et dont la démonstration sera rappelée dans le chapitre (2.1).

$$\frac{v_t}{\nu} = \kappa \left[ y^* - \delta_l \tanh\left(\frac{y^*}{\delta_l}\right) \right] \quad (1.2-5)$$

Ng et Pan [45] ont ensuite pris cette définition de la viscosité turbulente et ont supposé que la forme du profil de vitesse est celui d'un Couette turbulent. Ainsi, ils l'ont inséré dans les équations de la mécanique afin d'obtenir l'équation linéarisée de lubrification turbulente, donnée en (1.2-6) et de la même que l'équation de Reynolds généralisée.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{H_x^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{H_z^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \left( \frac{u_0}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) h \quad (1.2-6)$$

Avec  $H_x$  et  $H_z$  des coefficients qui dépendent directement du nombre de Reynolds local et donc de la viscosité turbulente. Ce modèle a été étendu plus généralement par Elrod et Ng [46] et a également été adapté pour les trois grandes configurations de paliers/butées hydrodynamiques, hybrides et pressurisés.

Des études ont comparé ces différents modèles de turbulence. Premièrement entre eux, Bouard *et al.* [47] ont ainsi montré que globalement ces modèles donnent des résultats similaires. Deuxièmement ils ont été comparés à des méthodes plus générales utilisés en aérodynamique comme la LES (Large Eddy Simulation). Durany *et al.* [48] ont montré que la LES est plus précise que le modèle de Constantinescu, cependant le surcote en temps de calcul ne justifie pas son choix. Certaines études ont ensuite tenté d'améliorer les modèles précédents, à l'exemple de Brunetière [49] qui propose une nouvelle écriture du coefficient empirique  $\delta_l$  en fonction du nombre de Reynolds pour certains cas particuliers.

Le principal défaut de ces modèles est la transition du régime laminaire vers le régime turbulent. Dans celui proposé par Constantinescu, il s'agit simplement d'un saut entre les deux états. Dans celui de Ng-Pan et Elrod-Ng, la transition est assurée trop rapidement. Des études ont donc établi un système de pondération afin de prendre en considération le régime transitoire. Brunetière *et al.* [50] par exemple ont choisi une transition à l'aide d'une fonction cosinus du nombre de Reynolds, et qui sera utilisée dans la suite de cette étude.

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_e &= 0 & \text{Si régime laminaire} \\ \delta_e &= \frac{1}{2} \cos\left(\pi \frac{Re_L - Re}{Re_L - Re_T}\right)^{0.6} & \text{Si régime transitoire} \\ \delta_e &= 1 & \text{Si régime turbulent} \end{aligned} \right. \quad (1.2-7)$$

La turbulence étant modélisée, il faut maintenant tenter de décrire ses effets sur le comportement des films minces ainsi que sur les performances d'une butée.

### 1.2.2.2 Effets de la turbulence sur le fonctionnement et les performances

Huebner [51] a comparé les principales caractéristiques d'un palier en régime turbulent par rapport à un régime laminaire. Les conclusions peuvent s'étendre aux butées. Il a montré que la forme des profils de vitesses a une tendance à s'aplatir en forme de créneau. Les résultats montrent que la viscosité turbulente augmente de façon significative les contraintes au niveau des parois. Le profil de vitesse se trouve ainsi déformé comme le montre la figure 1-10 pour les différentes directions du film.

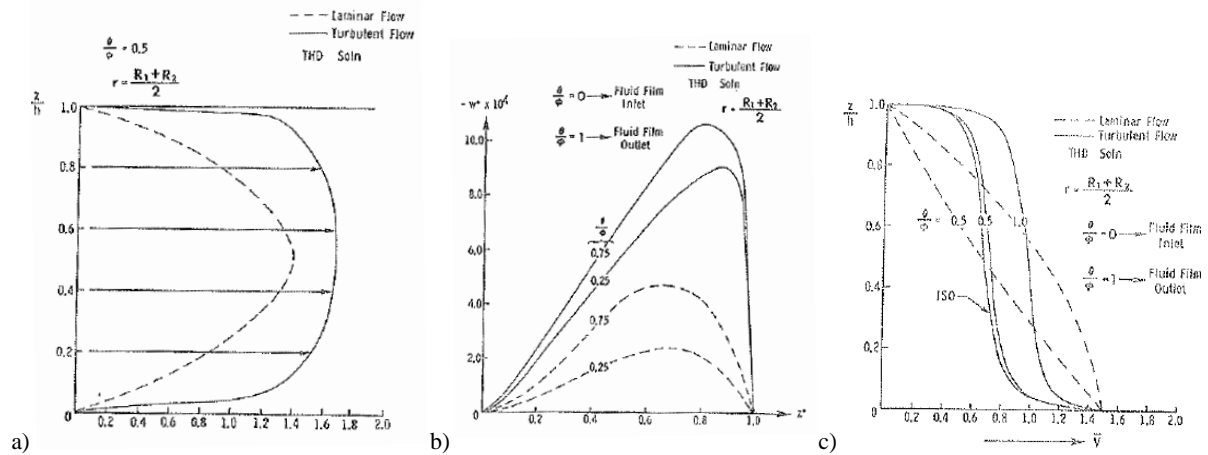


Figure 1-10 : Profils de vitesse dans la direction radiale a) et dans l'épaisseur de film b) dans la direction de l'entraînement c) calculés par Huebner [51].

La pression est très sensible à la turbulence et augmente à cause de l'ajout de la viscosité turbulente. Une remarque peut être faite sur l'influence de la température sur le maximum de pression (cf. figure 1-10). En effet en régime laminaire, la pression a tendance à être surestimée en isotherme par rapport à celle obtenue en THD alors qu'il s'agit de l'inverse en régime turbulent dans le cas d'un lubrifiant liquide. Pour un liquide, une augmentation de la température implique une diminution de la viscosité et donc une augmentation de l'intensité turbulente ce qui se répercute directement sur le maximum de pression. Ces conclusions sont également partagées par Safar et Szeri [52] pour l'étude d'un palier et par Shyu *et al.* pour un blochet infiniment long [53] et de longueur finie [54] qui se sont basés sur la résolution des équations de Navier-Stokes moyennées.

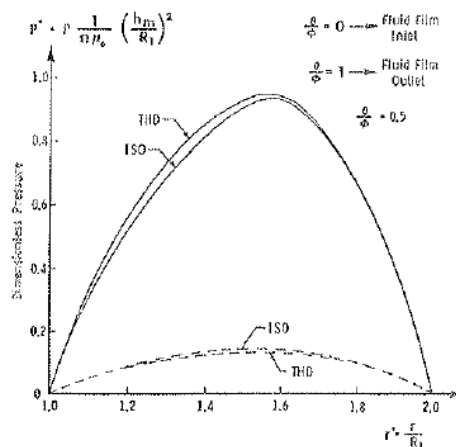


Figure 1-11 : Profils de pression calculés par Huebner [51] dans le cas laminaire (---) et dans le cas turbulent (---) en comparant également une résolution isotherme et THD.

Un effet très important de la turbulence est la création d'instabilités provenant de structures tourbillonnaires pouvant perturber l'écoulement. Ainsi, la transition du régime laminaire au régime turbulent peut également être déterminée à l'aide de la détection de ces perturbations. Cet aspect a été beaucoup étudié expérimentalement, entre autres par Frêne et Godet [55]. Ils ont recherché la présence de tourbillons de Taylor dans des paliers à hautes vitesses. Ils ont confronté pour cela deux théories calculant le nombre de Taylor critique et les ont validées expérimentalement par rapport au couple résistant en fonction de la vitesse. Ils ont prolongé leur étude [56] à des films beaucoup plus minces en utilisant la technique d'anémométrie à film chaud qui leur ont permis de mesurer la vitesse fluctuante de l'écoulement. Ils ont déterminé ainsi la transition pour des cylindres concentriques autour d'un nombre de Reynolds égal à 850. Par ailleurs, Grégory [57] a déterminé expérimentalement par les mesures du couple résistant, de la vitesse, et de la température, la transition dans le cas d'une butée hydrodynamique. D'autres travaux comme celui de Maken et Saibel [58] proposent une synthèse bibliographique commentée sur les méthodes numériques et expérimentales ainsi que sur les résultats obtenus pour l'étude de la turbulence et de la transition.

En conclusion, la turbulence augmente la viscosité, la puissance dissipée et la pression, à cause notamment de l'augmentation des frottements. La température joue un rôle significatif sur le comportement du film.

---

## 1.2.3 Prise en compte des effets d'inertie

### 1.2.3.1 Méthodes de prise en compte de l'inertie

---

Dans la théorie de la lubrification, les forces d'inertie sont généralement négligées par rapport aux efforts visqueux. Mais dans les systèmes à grandes vitesses ou à grandes dimensions, il est important de les considérer. Cependant, l'équation de Reynolds n'est pas établie pour pouvoir les prendre en compte, il faut donc reprendre le système d'équations décrivant l'écoulement du fluide et le modifier en conséquence. L'une des premières méthodes a été proposée par Constantinescu [59]. Elle consiste à conserver les termes d'inertie lors de la simplification des équations de Navier-Stokes incompressibles.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.2-8)$$

Le système est moyenné dans l'épaisseur du film et un profil de vitesse parabolique est ensuite injecté. De la même façon que dans la démonstration de l'équation de Reynolds, la formule obtenue est ensuite utilisée dans l'équation de conservation pour n'obtenir qu'une seule expression décrivant la pression. Cette démarche peut s'étendre de la même façon à l'étude des écoulements compressibles et instationnaires. Frêne *et al.* [60] ont prolongé cette démarche à la troisième dimension et ont ainsi obtenu une formule ressemblant à l'équation de Reynolds généralisée.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{\mu k_x} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{\mu k_z} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{u_0}{2} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (1.2-9)$$

Avec  $k_x$  et  $k_z$  qui sont les termes relatifs à l'inertie. Parallèlement, d'autres techniques de prise en compte de l'inertie ont été mises au point comme la méthode de linéarisation de

Tichy [61]. En partant d'un système équivalent au système (1.2-8) il le linéarise en modifiant les termes non linéaires suivants :

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow U \frac{\partial u}{\partial x} \text{ avec } U = -\frac{h}{x} \frac{\partial h}{\partial t} \\ v \frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow V \frac{\partial u}{\partial y} \text{ avec } V = -\frac{y}{h} \frac{\partial h}{\partial t} \end{cases} \quad (1.2-10)$$

Cette méthode a été améliorée et appliquées à d'autres configurations d'écoulements et de fluides viscoélastiques dans les travaux de Bourgin et Tichy [62], [63].

Plus récemment, la forme l'équation (1.2-9) a évolué comme le montrent les travaux de Tichy et Bou-Saïd [64]. Les termes d'inertie ne sont plus approchés par des constantes mais conservés sous leur forme intégrale avec une notation en  $I$ .

$$\begin{aligned} q_x &= \int_0^h u dy ; q_z = \int_0^h w dy \\ I_{xx} &= \int_0^h u^2 dy ; I_{xz} = \int_0^h u w dy ; I_{zz} = \int_0^h w^2 dy \\ \tau_{xy} &= \mu \frac{\partial u}{\partial y} ; \tau_{zy} = \mu \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.2-11)$$

Dans ces formules,  $q_x$  et  $q_z$  représentent les débits dans les directions  $x$  et  $z$ ,  $I_{xx}$ ,  $I_{xz}$  et  $I_{zz}$  représentent les termes relatifs à l'inertie et les contraintes sont écrites  $\tau_{xy}$  et  $\tau_{zy}$ . Il en résulte un système d'équations à résoudre où un profil de vitesse peut également être imposé pour revenir vers une seule équation de la même forme que (1.2-9).

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_z}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial t} &= 0 \\ \rho \left( \frac{\partial q_x}{\partial t} + \frac{\partial I_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial I_{xz}}{\partial z} \right) &= -h \frac{\partial p}{\partial x} + \tau_{xy}(y=h) - \tau_{xy}(y=0) \\ \left( \frac{\partial q_z}{\partial t} + \frac{\partial I_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial I_{zz}}{\partial z} \right) &= -h \frac{\partial p}{\partial z} + \tau_{zy}(y=h) - \tau_{zy}(y=0) \end{aligned} \quad (1.2-12)$$

Le système (1.2-12) a ensuite été amélioré en considérant la variation de la viscosité dans l'épaisseur de film. Les équations de conservation et du mouvement ne peuvent plus être rassemblées en une seule équation de la forme (1.2-9), il en résulte un système qui sera exposé dans le paragraphe (2.1) Il a été développé par Brunetière et Tournier [65] en incompressible et étendu au cas compressible par Thomas [66].

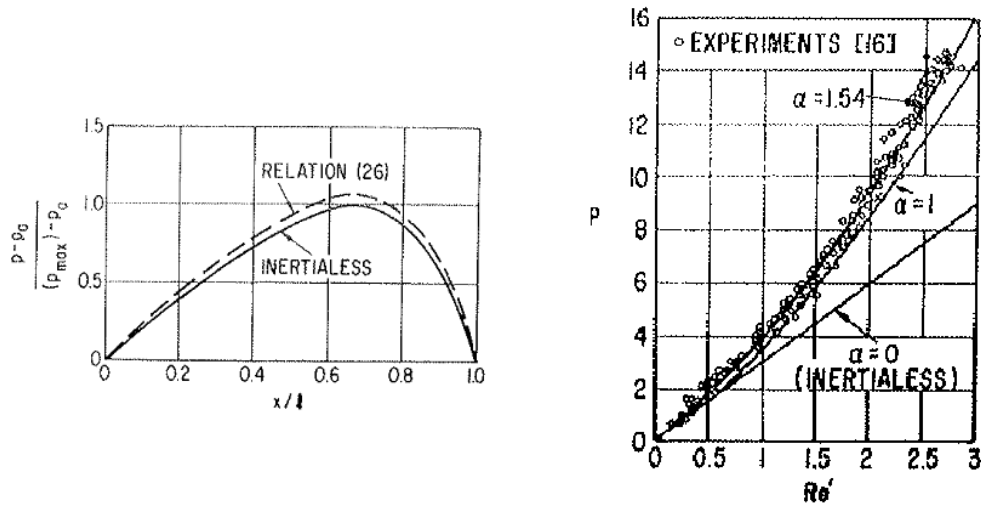
$$\begin{cases} \frac{\partial q_x}{\partial x} + u_0 \frac{\partial G_2}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q_x^2}{G_1^2} I_{11} - \frac{2q_x}{G_1} I_{12} + u_0^2 I_{22} \right) = -h \frac{\partial p}{\partial x} - h \frac{q_x}{G_1} \end{cases} \quad (1.2-13)$$

Les termes  $G_i$  et  $I_{ij}$  sont explicités dans l'annexe (4.1). L'inertie étant maintenant prise en compte, des études se sont intéressées à son influence sur le film lubrifiant.

### 1.2.3.2 Conséquences de l'inertie sur le fonctionnement et les performances

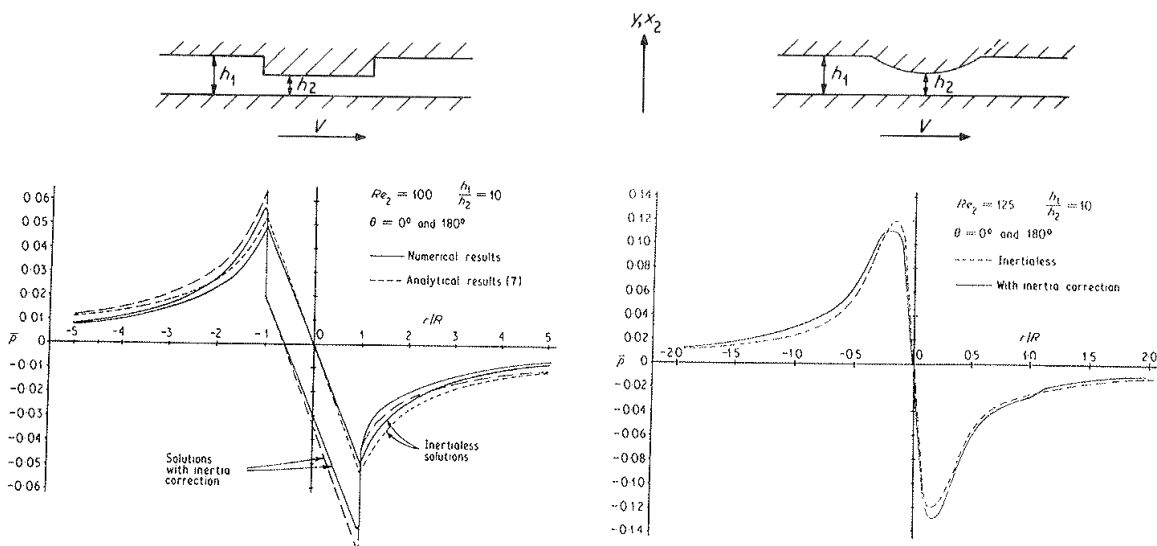
Un certain nombre de travaux ont tenté de comprendre et de déterminer l'influence de l'inertie dans un système lubrifié. Les termes d'inertie, quelle que soit la méthode utilisée, dépendent directement du nombre de Reynolds. Certaines études [59] montrent une faible

contribution de l'inertie si la vitesse est peu importante, mais celle-ci augmente avec la vitesse. La figure 1-12 montre la contribution de l'inertie en fonction de la vitesse, et en comparaison à un cas sans inertie.



**Figure 1-12 :** Influence de l'inertie étudiée par Constantinescu [59], à gauche comparaison de la pression avec et sans inertie, à droite influence du nombre de Reynolds modifié sur la génération d'inertie.

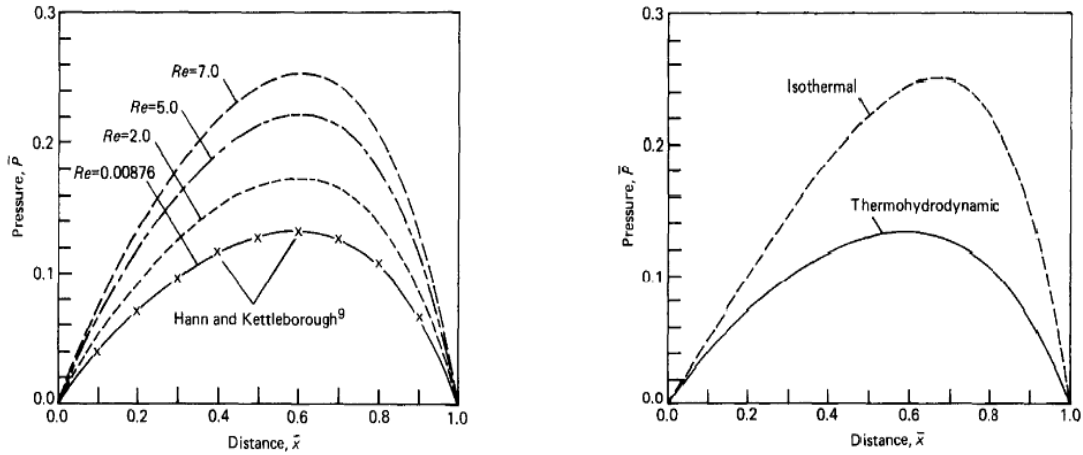
Un facteur influençant de façon significative l'inertie est la géométrie de l'écoulement. Constantinescu [59] a remarqué une augmentation des effets d'inertie avec une plus grande profondeur de rainure d'alimentation. Thieu *et al.* [67] tirent les mêmes conclusions en étudiant différentes hauteurs de patins de Rayleigh. Plus la géométrie est perturbée, plus l'inertie prend de l'importance. Ces conclusions sont partagées par Kennedy *et al.* [68] qui ont étudié différents encombrements d'un canal, similaire à des géométries de paliers.



**Figure 1-13 :** Influence de la géométrie sur les effets d'inertie obtenue par Chowdhury et Ahamadi [69].

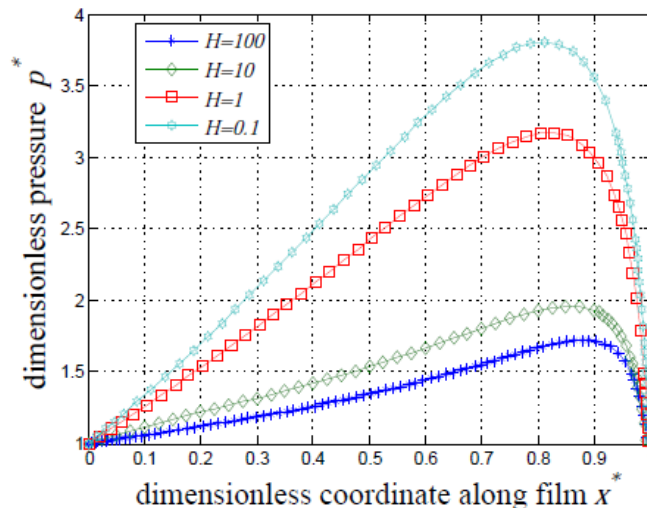
L'inertie augmente favorablement la pression et la capacité de charge [70] dans le cas isotherme. Cependant elle augmente fortement la température [69], ce qui implique dans le cas d'une butée à huile une forte diminution de la viscosité et donc de la génération de pression

comme le montre la figure 1-14. Des différences entre les modèles théoriques et les mesures ont été remarquées. Mori *et al.* [71] ont tenté de les expliquer en étudiant séparément la contribution de l'inertie centrifuge et de l'inertie convective. Ils ont pu ainsi remarquer que l'inertie convective est plus importante que l'autre. Ces conclusions sont également partagées par Kim [72] qui a résolu les équations de Navier Stokes dans ce cas.



**Figure 1-14** Etude des effets d'inertie sur une butée à huile obtenue par Chowdhury et Ahamadi [69], à gauche influence du Reynolds, à droite influence de la prise en compte de la température.

Récemment, Dupuy *et al.* [73] ont démontré que l'influence de l'inertie sur la génération de chaleur va au-delà même de la théorie de la lubrification compressible, citée dans les précédents exemples. Ils montrent qu'à grande vitesse que le coefficient de transfert de chaleur peut faire varier le maximum de pression d'un facteur de quatre, comme le montre la figure 1-15.



**Figure 1-15** : Influence du coefficient d'échange thermique sur la pression dans un blochet à haute vitesse obtenu par Dupuy *et al.* [73].

L'inertie joue un rôle qui peut devenir prépondérant si la vitesse considérée est très élevée. Elle a une tendance à favorablement augmenter la pression, mais aussi la température. De la même façon que pour la prise en compte de la turbulence, le calcul et la maîtrise de la température dans un film lubrifiant est primordiale.

## 1.2.4 Conclusion

L'étude de la lubrification haute vitesse demande la prise en compte d'un certain nombre de phénomènes qui ne sont pas considérés par la théorie de la lubrification classique. Lorsque la vitesse augmente, le nombre de Reynolds augmente également, et l'écoulement peut devenir turbulent.

La turbulence dans un film lubrifiant est modélisée à l'aide de méthodes basées sur une décomposition des variables en une partie moyenne et une partie fluctuante. Le système est fermé en introduisant une définition de viscosité turbulente comme les modèles de Ng-Pan et Ng-Elrod. Expérimentalement et numériquement, les études ont constaté que la turbulence augmente le profil de pression, mais augmente aussi les frottements aux parois du fait de l'ajout d'une viscosité, et par conséquent la température. Des perturbations peuvent être perçues à partir de nombre de Reynolds modérés, ce qui pousse les modèles à prendre en compte le régime transitoire.

Si la vitesse est importante, l'inertie doit également être prise en compte. Pour cela il faut modifier l'équation de Reynolds. L'inertie augmente favorablement la pression, mais elle augmente considérablement la température et donc la puissance dissipée. Elle est très sensible à la géométrie dans laquelle le lubrifiant circule, elle augmente par exemple en fonction de la hauteur d'un obstacle (rainures, patin de Rayleigh...).

La prise en compte de ces phénomènes met en lumière l'importance capitale d'adapter le système d'équations décrivant le comportement du fluide, mais également la prise en compte indispensable de la température. Si la vitesse augmente encore, il est possible que l'écoulement devienne supersonique et que de nouveaux phénomènes se produisent.



# 1.3. Étude du régime supersonique

## 1.3.1 Introduction

Il existe trois grandes catégories de butées ; aérodynamiques (ou hydrodynamiques) qui sont opposées à une paroi mobile entraînant le fluide lubrifiant, aérostatiques alimentées en lubrifiant en leur centre et faisant face à un disque immobile, et hybrides possédant une alimentation et faisant face à un disque tournant.

Les butées aérostatiques vont être présentées, puisqu'il s'agit du seul système lubrifié étudié en présence d'écoulement supersonique. Bien que les butées aérostatiques fonctionnent différemment des butées aérodynamiques, les recherches montrent les nouveautés apportées par le régime supersonique (chocs, détente...).

Pour bien comprendre l'enjeu du régime supersonique et ses phénomènes, un premier paragraphe sera consacré à la théorie de ces écoulements et de ses propriétés. Les définitions générales de chocs et de détente seront présentées, ainsi que des notions de couche limite turbulente supersonique.

## 1.3.2 Propriétés des écoulements supersoniques

### 1.3.2.1 Définitions générales

Un écoulement d'air peut, en fonction de sa vitesse, avoir différentes propriétés. Si la vitesse est très faible, l'air peut être considéré comme un gaz incompressible. Cependant, à partir d'une certaine vitesse (figure 1-16), la compressibilité de l'air ne peut plus être négligée, c'est-à-dire que la masse volumique de l'air n'est pas constante et qu'elle est régie par une loi de comportement. Dans le cas de l'air, la loi des gaz parfait peut être raisonnablement utilisée.

$$p = \rho RT \quad (1.3-1)$$

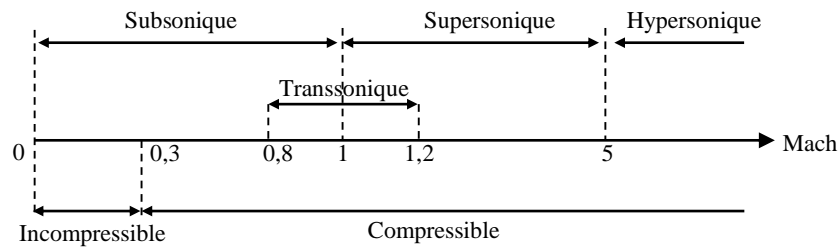
Avec  $R$  la constante spécifique des gaz valant 287 J/kg/K. Lorsque l'air se déplace à très grande vitesse, il se rapproche de la vitesse du son qui est définie par la loi (1.3-2) et qui dépend de la température.

$$c^2 = \gamma RT \quad (1.3-2)$$

Avec  $\gamma$  qui est le rapport des chaleurs spécifiques  $c_p$  et  $c_v$ , constantes pour un gaz parfait. Le comportement de l'air diffère s'il se trouve à une vitesse inférieure ou supérieure à la vitesse du son, c'est-à-dire s'il est subsonique ou supersonique. Un critère a été établi afin de reconnaître rapidement la nature d'un écoulement, il s'agit du nombre de Mach, pouvant être défini aussi localement.

$$M = \frac{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}{c} \quad (1.3-3)$$

Avec ces définitions, les différents régimes d'écoulement peuvent être représentés sur une frise en fonction du nombre de Mach (cf. figure 1-16). Si la vitesse se situe autour du nombre de Mach égal à 1, l'écoulement sera dit transsonique.

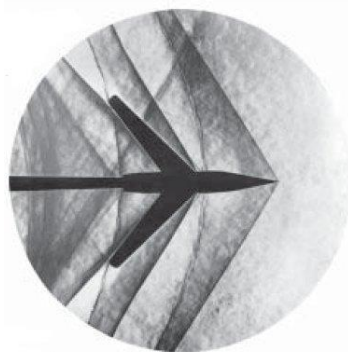


**Figure 1-16 :** Représentation des régimes d'écoulement.

Quelques exemples connus de phénomènes liés au supersonique est un avion passant le mur du son et créant un cône autour de lui nommé « singularité de Prandtl-Glauert » (figure 1-17), ou la visualisation des ondes de choc autour d'un missile.



**Figure 1-17 :** Avion de chasse en vol transsonique (United States Navy ID 061105-N-8591H-389).



**Figure 1-18 :** Missile à vitesse supersonique (Schlieren photographie NASA).

Ces phénomènes apparaissent lorsque l'écoulement est supersonique et possèdent des propriétés bien spécifiques. Pour bien appréhender la physique d'un écoulement supersonique dans une butée, il est important de bien connaître ces définitions et propriétés.

## 1.3.2.2 Propriétés des chocs et des détente

Lorsqu'un écoulement rencontre un obstacle, celui-ci est dévié pour en faciliter le contournement. Ceci se traduit par des perturbations qui remontent l'écoulement en amont de l'obstacle notamment grâce aux ondes sonores. Dans le cas supersonique, le fluide est plus rapide que la vitesse du son et par conséquent des perturbations. Les ondes sonores s'accumulent en amont de l'obstacle formant une onde de choc. C'est en traversant l'onde de choc que l'écoulement peut être dévié pour contourner l'obstacle, comme le montre la figure 1-19.

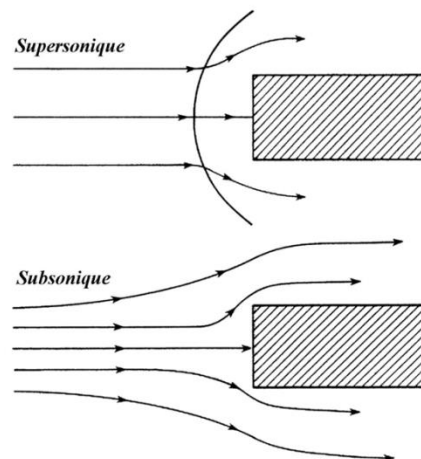


Figure 1-19 : Apparition d'une onde de choc [74].

Un phénomène intéressant pour cette étude est la génération d'ondes à cause d'une déviation pariétale [75]. Lorsqu'un écoulement supersonique suit de façon parallèle une paroi et rencontre un changement de direction de la paroi, il se produit un choc ou une détente. La nature de l'onde dépend de la direction de l'angle du changement d'inclinaison de la paroi. Si la paroi se resserre pour former un convergent il se produira un choc, dans le cas contraire une détente.

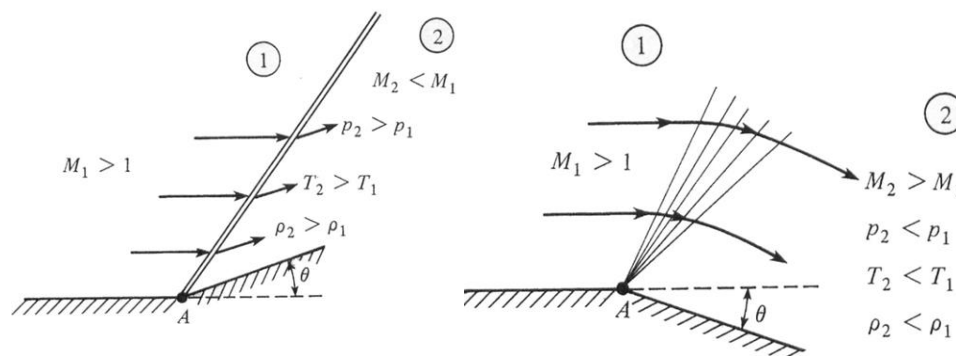


Figure 1-20 : Création d'une onde de choc (à gauche) ou d'une détente (à droite) pour un écoulement supersonique le long d'une paroi [74].

A la traversée du choc les variables évoluent brutalement, dans le cas de la détente les variables changent rapidement mais sans discontinuité selon les tendances données en figure 1-20. Un choc est donc synonyme d'une décélération, d'une compression et d'une augmentation

de la température, alors qu'une détente est synonyme d'une accélération, d'une diminution de la pression et de la température. L'angle du changement d'inclinaison joue un rôle très important car il détermine la position de l'onde de choc oblique. Au-delà d'une certaine valeur, l'onde de choc peut se décaler de la déviation pariétale et se placer plus en amont dans l'écoulement. Si le changement d'inclinaison est perpendiculaire, l'onde de choc devient elle-même perpendiculaire à l'écoulement amont et est appelée onde de choc droite. Un choc « fort » est un cas particulier où l'écoulement passe d'un régime supersonique à subsonique en le traversant.

Ces théories ne sont valables que dans le cas d'un écoulement non adhérent à la paroi. Or généralement, y compris pour l'air, l'écoulement est visqueux, il se crée alors une couche limite. Les ondes ont donc un comportement différent qui va maintenant être décrit.

### 1.3.2.3 Notions autour des couches limites

La couche limite est l'interface entre un écoulement non perturbé d'une vitesse constante  $u_0$  et une paroi immobile. C'est dans cette zone qu'a lieu l'adhérence du fluide à la paroi. Ainsi, l'épaisseur de la couche limite est donnée en fonction de la vitesse de l'écoulement non perturbé à l'infini dans une direction  $x$  par la formule suivante.

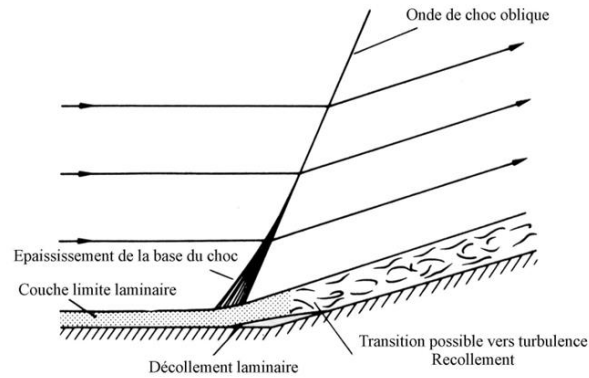
$$u(\delta(x)) = 0,99 \cdot u_0 \quad (1.3-4)$$

Dans le même esprit que dans la lubrification, la dimension de la couche limite est très faible devant les autres dimensions. Ainsi les équations de Navier-Stokes sont simplifiées et il en découle le système d'équations de la couche limite bidimensionnelle.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \\ \left( \frac{\partial \rho u}{\partial t} u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} u + v \frac{\partial \rho u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p_{ext}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = u \frac{\partial p_{ext}}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \end{array} \right. \quad (1.3-5)$$

Avec  $p_{ext}$  la pression de l'écoulement non perturbé à l'extérieur de la couche limite. Ces équations dans leur forme sont très proches des systèmes vus dans le paragraphe (1.2.3), c'est pour cette raison que les phénomènes intervenant dans la couche limite sont très semblables à ceux vu dans la lubrification. Pour décrire la couche limite turbulente, la décomposition de Reynolds est utilisée dans le système précédent.

Lorsque l'écoulement à l'infini est supersonique, les chocs et les détentes se répercutent indirectement dans la couche limite. Un choc se transforme en un delta et il est possible qu'il provoque, lors d'un changement d'inclinaison de la paroi, un décollement de la couche limite, créant ainsi une zone de recirculation et entraînant de la turbulence, comme le montre la figure 1-21.



**Figure 1-21** : Schéma d'interaction choc et couche limite [74]

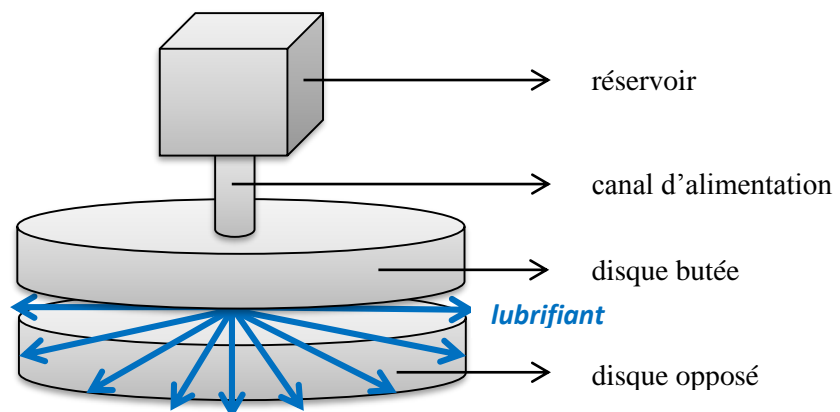
Encore aujourd'hui des études s'intéressent aux phénomènes liés à la couche limite mais aussi aux différents types de couches limites. Par exemple, Konrad *et al.* [76] s'intéressent à la modélisation d'une couche limite supersonique et turbulente. Lebiga [77] traite particulièrement la transition de laminaire vers turbulent dans une couche limite supersonique, et montre la présence de structures caractéristiques. De la même façon que dans les films minces, la température joue un rôle important dans le comportement d'une couche limite à cause des forts cisaillements. Des études s'y intéressent comme celles de Hadjadj *et al.* [78] qui décrivent les transferts thermiques dans une couche limite supersonique.

Ces définitions permettront par la suite de mieux comprendre et de mieux appréhender les caractéristiques d'un écoulement supersonique dans le domaine de la lubrification et particulièrement dans les études déjà réalisées sur les butées aérostatiques.

### 1.3.3 Travaux sur les butées aérostatiques en régime supersonique

#### 1.3.3.1 Définition d'une butée aérostatique

Une butée aérostatique est un disque immobile alimenté en son centre par un lubrifiant parfois sous pression, repoussant de cette façon un second disque immobile. Le lubrifiant s'échappe ensuite par le dégagement entre les disques, forçant ainsi leur séparation. La figure 1-22 montre le principe général de cette configuration.



**Figure 1-22** : Principe d'une butée aérostatique.

Le fluide rentrant dans ce type de dispositif peut avoir une pressurisation et/ou débit si conséquent qu'il atteigne parfois le régime supersonique. Le fluide s'écoule depuis le réservoir, impacte le disque opposé puis est dévié perpendiculairement dans le dégagement comme le montre la figure 1-23. Ainsi différents phénomènes, comme des chocs et des détente, peuvent se produire et ont pu être remarqués.

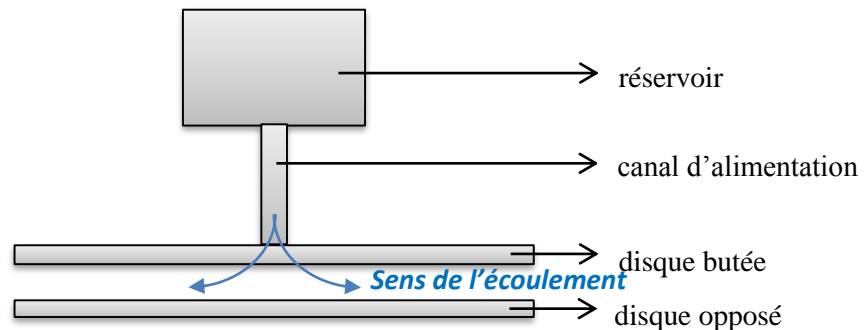


Figure 1-23 : Vue de profil d'une butée aérostatique.

Des études se sont intéressées à ce type de configuration d'écoulement, mais toutes ne tirent pas les mêmes conclusions. Il a été constaté expérimentalement que la pression diminue fortement dès lors que le lubrifiant impacte le disque, puis elle remonte subitement en s'éloignant du centre. Cette augmentation de la pression divise les avis, puisque d'un côté certaines études y voient l'effet de la turbulence et d'autres un choc.

### 1.3.3.2 Travaux sans présence de chocs

Miyake *et al.* [79], [80] et [81] proposent une théorie décrivant l'écoulement d'une butée aérostatique avec une entrée supersonique. Ils découpent pour cela le dégagement des deux disques en plusieurs parties (cf. figure 1-24). La zone (0-1) représente le réservoir. La zone (1-2) représente le canal d'alimentation où l'écoulement est considéré parfaitement non-visqueux. La zone (2-3) représente l'endroit où l'écoulement est dévié et peut devenir supersonique. La zone (3-4) représente le dégagement entre les deux disques où l'écoulement redevient visqueux.

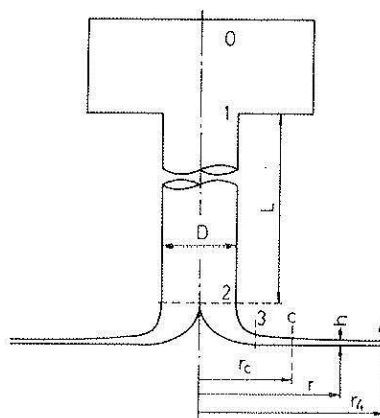
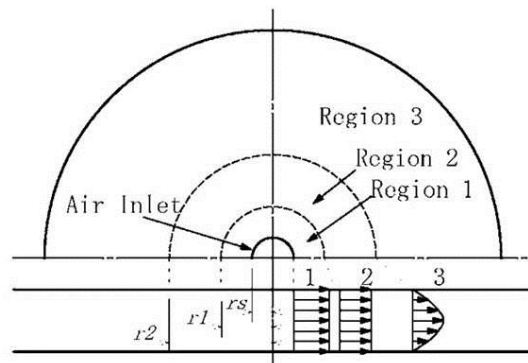


Figure 1-24 : Description des différentes zones d'écoulement d'une butée aérostatique [79].

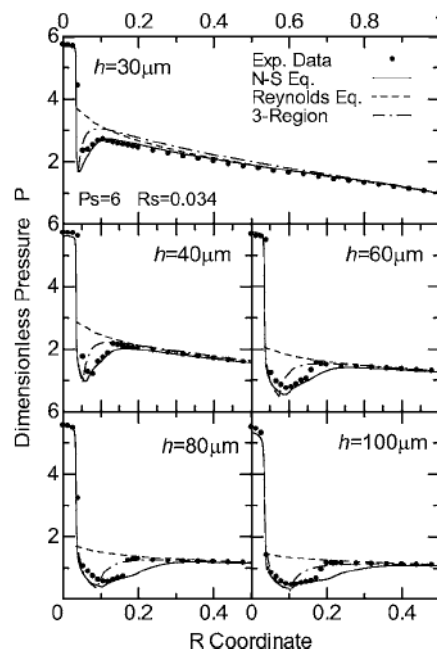
Ils montrent ainsi qu'une zone supersonique peut se produire après la déviation de l'écoulement, mais ne font pas mention de chocs ou de détente.

Yoshimoto *et al.* [82] ont comparé différents modèles décrivant le comportement de l'air dans ce type de butée. Ils ont proposé ainsi de calculer la pression à l'aide de l'équation de Reynolds, des équations de Navier Stokes et de la théorie des trois régions qui s'inspire directement des travaux de Mori (1964) et Miyake *et al.*, comme le montre la figure 1-25.



**Figure 1-25** : Théorie des trois régions décrite par Yoshimoto *et al.* [82].

Ils ont comparé les résultats obtenus à des mesures expérimentales et ont montré que ces équations ne sont pas toutes capables de décrire la phénoménologie de l'écoulement. Ils remarquent que l'équation de Reynolds ne suffit pas à décrire le problème, car elle ignore la forte diminution de la pression. La théorie des trois régions donne de bons résultats bien qu'elle surestime la vitesse et l'amplitude de la compression à la sortie de l'alimentation. En revanche les équations de Navier-Stokes donnent d'excellents résultats, bien que suivant l'épaisseur de film elle surestime légèrement la dépression. Les résultats sont donnés dans la figure 1-26.



**Figure 1-26** : Résultats de la comparaison des méthodes par rapport aux résultats expérimentaux d'une butée aérostatique supersonique obtenus par Yoshimoto *et al.* [82].

Ils en concluent que le retour de la pression suite à sa forte diminution à la sortie de l'alimentation est lié à une augmentation de l'intensité de la turbulence. Ils remarquent également que dans les géométries étudiées, il n'y a pas de chocs, ni de détentes.

Ces conclusions, proposées par Miyake *et al.* et Yoshimoto *et al.*, ne sont pas toujours partagées. Certaines études supposent la présence de chocs et de détente dans ce type de configuration.

### 1.3.3.3 Travaux avec présence de chocs

Dowson [83] a proposé une comparaison d'un modèle théorique établi par Mori [84] à des mesures expérimentales. Le modèle décrit le champ de pression comme une relation logarithmique dépendant du rayon et de la pression d'alimentation négligeant les effets d'inertie. A partir du centre de la butée, la pression diminue jusqu'à devenir négative (c'est-à-dire inférieure à la pression atmosphérique) puis subit un choc qui la rétablit à une valeur positive. Elle décroît ensuite vers la sortie jusqu'à la pression atmosphérique comme le montre la figure 1-27.

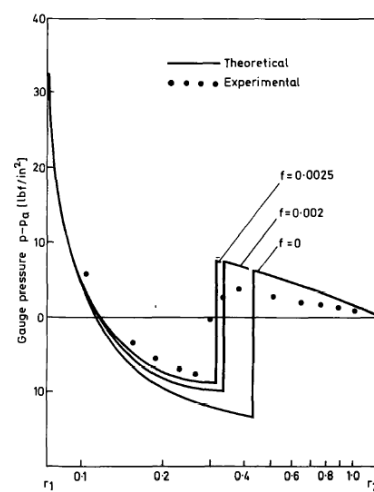


Figure 1-27 : Champ de pression d'une butée aérostatique [83].

Dowson en conclut que la présence de chocs dans une butée aérostatique est tout à fait possible. Eleshaky [85] a proposé de résoudre les équations de Navier Stokes dans ce système afin de confirmer ou non la présence d'ondes.

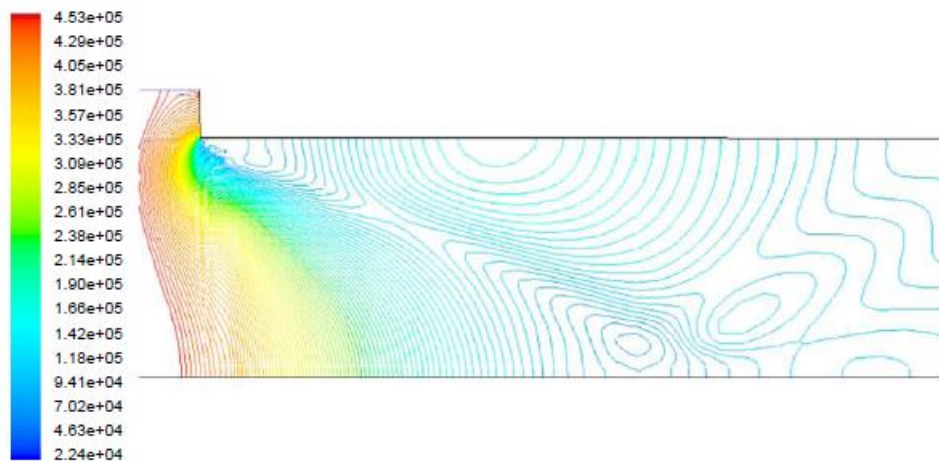
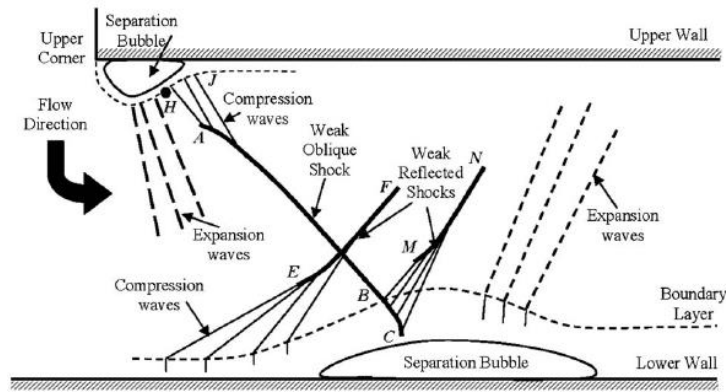


Figure 1-28 : Résultats en isocontour de la pression obtenus par CFD par Eleshaky [85].





**Figure 1-29 :** Schéma descriptif de la dynamique de l'écoulement proposé par Eleshaky [85].

Les résultats des isocontours de la pression montrent une forte influence de la géométrie. La déviation du fluide crée une zone de recirculation avec une détente associée. Il est intéressant de remarquer que la pression n'est pas constante dans l'épaisseur de film à ce niveau-là. Ensuite Eleshaky propose une analyse de la dynamique de l'écoulement par le schéma de la figure 1-29. Un choc oblique apparaît à la suite de la zone de recirculation à l'entrée provoquant ainsi un décollement de la couche limite sur le disque opposé. Ce décollement implique ainsi la création de rampes de compression et de chocs faibles en amont et une détente en aval.

La dynamique du film lubrifiant en régime supersonique a été malheureusement peu étudiée en dehors de ces quelques exemples, et les conclusions ne sont pas toujours en accord. Le débat reste donc ouvert, car les avis sont trop opposés pour comprendre réellement la phénoménologie liée à cette nouvelle thématique.

### 1.3.4 Conclusion

L'étude du régime supersonique nécessite la compréhension et la prise en compte de nouveaux phénomènes tels que les chocs, les détentes et les couches limites. Cette thématique est très originale dans le domaine de la lubrification puisqu'elle va en sens inverse des principales hypothèses stipulant que les efforts visqueux sont prédominants.

Les phénomènes liés au régime supersonique peuvent avoir différentes origines, mais celle qui risque d'être la plus probable dans une butée, est la déviation d'un écoulement supersonique, à cause de la forme en double profil du patin. S'il rencontre un convergent, il peut se produire un choc et s'il rencontre un divergent, il peut se produire une détente. Ces notions sont fondamentales et à conserver en mémoire tout au long de cette étude.

Il n'existe que peu d'études sur un système lubrifié en régime supersonique. Le seul système étudié est la butée aérostatique qui se différencie de la butée aérodynamique par sa géométrie et par l'absence de paroi mobile. Les résultats de ces quelques études montrent deux grandes tendances. Pour certains auteurs, la présence de phénomènes tels que les chocs a été observée, et pour d'autres les forts changements de variables seraient liés à la turbulence. Le débat reste encore ouvert, et les conclusions pour le cas d'une butée aérodynamique ne sont pas triviales.



---

## Partie 2: Modèles physiques et méthodes numériques associées pour les butées aérodynamiques en régime supersonique

---

2.1.	Résolution des équations de Reynolds Modifiées .....	37
2.1.1	<i>Introduction</i> .....	37
2.1.2	<i>Présentation du système à résoudre</i> .....	37
2.1.3	<i>Présentation des méthodes numériques</i> .....	41
2.1.4	<i>Résultats préliminaires</i> .....	46
2.1.5	<i>Conclusion</i> .....	49
2.2.	Résolution des équations de Navier Stokes adaptées aux films minces .....	50
2.2.1	<i>Introduction</i> .....	50
2.2.2	<i>Présentation du système à résoudre</i> .....	51
2.2.3	<i>Méthodes numériques utilisées</i> .....	54
2.2.4	<i>Résultats : comparaison des deux méthodes</i> .....	62
2.2.5	<i>Conclusion</i> .....	63



## 2.1. Résolution des équations de Reynolds Modifiées

### 2.1.1 Introduction

L'étude d'une butée aérodynamique en régime supersonique implique la prise en compte de nombreuses propriétés dynamiques du fluide souvent négligées dans les problèmes de lubrification. Le modèle physique le plus adéquat pour l'étude des écoulements lubrifiés à grandes vitesses est le système des équations de Reynolds Modifiées, basé sur les travaux de Brunetière et Tournier [65] et de Thomas [66]. Ce système prend en compte l'inertie, la turbulence, la compressibilité du fluide et la variation de viscosité dans l'épaisseur du film.

Dans une première partie, le système des équations de Reynolds Modifiées sera présenté avec ses principales hypothèses, sa démonstration se trouvant dans l'annexe (4.1). Ces équations sont résolues à l'aide de la méthode des différences finies, dont les schémas seront présentés dans une seconde partie. Dans une dernière partie, les résultats de plusieurs simulations seront présentés et montreront l'influence de la turbulence d'une part, puis de l'inertie et de la température d'autre part. Ils montreront également l'apparition d'un phénomène inédit, directement lié au régime supersonique. Les propriétés de celui-ci seront décrites afin de mieux comprendre sa nature et son origine.

### 2.1.2 Présentation du système à résoudre

#### 2.1.2.1 Principales hypothèses

Les butées LTS possèdent des patins à géométrie double profil composée d'un convergent et d'un plan droit. L'air est entraîné par le rotor à une vitesse  $u_0$  et comprimé, créant ainsi le régime « lubrifié » (cf. figure 2-1). Le patin et le rotor sont considérés rigides, les déformations induites par la pression et la température ne seront pas prises en compte. Seuls les comportements dynamiques et énergétiques de l'air seront modélisés.

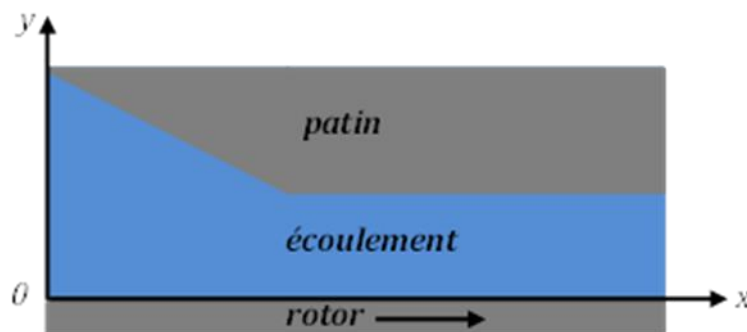


Figure 2-1 : Configuration géométrique d'un double profil.

Pour établir le système des équations de Reynolds Modifiées décrivant le comportement de ce film d'air, certaines hypothèses doivent être faites pour prendre en compte les propriétés d'un écoulement à grande vitesse.

- **Le milieu est continu.**
- **L'écoulement est stationnaire** : l'évolution des variables en fonction du temps n'est pas prise en compte et le régime est permanent.
- **L'air est un gaz parfait** : la masse volumique du fluide dépend de la température et de la pression (cf. équation (1.3-1)).
- **Le fluide est compressible** : la masse volumique varie en fonction des vitesses par l'équation de continuité.
- **Les forces massiques extérieures sont négligeables.**
- **Le fluide adhère aux parois.**
- **La dimension du film est très faible devant les autres dimensions.**
- **Les disques de rotor et de butée sont parfaitement coaxiaux.** Cette hypothèse permet de conserver le caractère ortho-radial de la vitesse du rotor.
- L'étude se fera en deux dimensions.

Ces hypothèses sont moins nombreuses que celles utilisées pour l'établissement de l'équation de Reynolds généralisée, par exemple le régime n'est pas considéré laminaire, l'écoulement peut être inertiel, etc. Ces hypothèses vont maintenant permettre d'établir les équations de Reynolds Modifiées.

### 2.1.2.2 Equations du mouvement et de l'énergie

Les équations de Reynolds Modifiées compressibles ont été établies par Thomas [66] en coordonnées cylindriques et en coordonnées cartésiennes dans un cas incompressible par Brunetière et Tournerie [65]. Ce système permet de s'adapter à des écoulements soumis à des nombres de Reynolds et à des effets d'inertie importants.

L'établissement de ces équations suit la même démarche que celle pour obtenir l'équation de Reynolds généralisée. A l'aide des précédentes hypothèses, il est possible d'adimensionner les équations suivantes.

*Conservation de la masse :*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.1-1)$$

*Conservation de la quantité de mouvement :*

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.1-2)$$

*Tenseur des contraintes visqueuses :*

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \quad (2.1-3)$$

*Conservation de l'énergie :*

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T u_i}{\partial x_i} \right) = \left( \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p u_i}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( K \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) \quad (2.1-4)$$

Le terme  $\delta_{ij}$  correspond au symbole de Kronecker,  $c_p$  à celui de la chaleur massique à pression constante de l'air ici constante, et  $K$  est le coefficient de conductivité thermique considéré constant. Les nombres adimensionnels utilisés pour simplifier les équations (2.1-1 à 2.1-4), sont ceux rencontrés couramment dans la lubrification.

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{L} ; \bar{y} = \frac{y}{H} ; \bar{u} = \frac{u}{u_0} ; \bar{v} = \frac{vL}{u_0H} ; \\ \bar{\mu} &= \frac{\mu}{\mu_0} ; \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} ; \bar{p} = \frac{pH^2}{\mu_0 u_0 L} ; \varepsilon = \frac{H}{L} ; \mathfrak{R}_e = \frac{\rho_0 u_0 H}{\mu_0} \end{aligned} \quad (2.1-5)$$

L'adimensionnement permet de faire apparaître des nombres caractéristiques tels que le rapport géométrique  $\varepsilon$  (de l'ordre de  $10^{-3}$ ) et le nombre de Reynolds ( $\mathfrak{R}_e$ ). Les termes en facteur  $\varepsilon^2$  ou plus sont négligés, comprenant essentiellement des termes visqueux et les termes d'inertie dans la direction  $y$ . Les termes en facteur du produit  $\mathfrak{R}_e \varepsilon$ , qui correspondent aux termes d'inertie dans la direction  $x$ , sont conservés. En effet, si une très grande vitesse est considérée, le nombre de Reynolds peut être de l'ordre de  $10^3$ , ainsi le produit  $\mathfrak{R}_e \varepsilon$  peut être de l'ordre de 1. La simplification donne le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (2.1-6)$$

Le traitement des termes d'inertie, qui sont fortement non-linéaires, n'est pas évident à faire de façon directe. Une méthode simple pour éviter cette difficulté est de moyenner les équations dans l'épaisseur de film à l'aide des conditions limites en vitesses suivantes.

$$\begin{aligned} \text{En } y = 0 \text{ (rotor)} & : u = u_0 ; v = 0 \\ \text{En } y = H \text{ (butée)} & : u = 0 ; v = 0 \end{aligned} \quad (2.1-7)$$

Pour tenir compte de la dynamique de l'écoulement, un profil de vitesse est introduit dans l'équation du mouvement. La forme du profil est la même que dans la lubrification classique, car l'ajout de l'inertie, selon Constantinescu, ne modifie non pas la forme du profil de vitesse mais uniquement son amplitude. Aussi Brunetière [86] propose-t-il le profil de vitesse suivant qui dépend du débit linéique dans la direction  $x$ .

$$u = \frac{-q_x}{G_1} \left( 1 - J \frac{I_2}{J_2} \right) + u_0 \left( 1 - \frac{J}{J_2} \right) \text{ avec } q_x \text{ le débit linéique.} \quad (2.1-8)$$

Il en découle le système suivant, nommé « équations de Reynolds Modifiées » incluant l'équation de l'énergie des films minces visqueux.

$$\begin{cases} \frac{\partial q_x}{\partial x} + u_0 \frac{\partial G_2}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q_x^2}{G_1^2} I_{11} - \frac{2q_x}{G_1} I_{12} + u_0^2 I_{22} \right) = -h \frac{\partial p}{\partial x} - h \frac{q_x}{G_1} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (2.1-9)$$

$$\rho C_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \left( u \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( K \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left( \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) \quad (2.1-10)$$

Les termes  $I_{11}$ ,  $I_{12}$  et  $I_{22}$  sont les termes relatifs à l'inertie (expression dans l'annexe 4.1), et les termes  $G_1$  et  $G_2$  dépendent directement de la moyenne dans l'épaisseur de film de la masse volumique et de la viscosité. Le système (2.1-9) avec (2.1-10) constitue un système de trois équations, correspondant à l'équation de la conservation de la masse, à l'équation du mouvement sur  $x$ , et à l'équation de l'énergie, à trois inconnues  $q_x$ ,  $p$  et  $T$ . La masse volumique et la viscosité sont respectivement déterminées par la loi des gaz parfaits (cf. équation (1.3-1)) et par la formule de Sutherland suivante.

$$\mu = \mu_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + C}{T + C} \quad (2.1-11)$$

Avec  $\mu_0 = 1,711 \cdot 10^{-5} \text{ Pa.s}$  ;  $T_0 = 273,15 \text{ K}$  ;  $C = 110,4 \text{ K}$ .

### 2.1.2.3 Modèle de turbulence

La turbulence dans les équations de Reynolds Modifiées sera prise en compte à l'aide du modèle de Ng-Pan [45]. Il se base sur l'écriture du tenseur des contraintes turbulentes par le biais d'une viscosité turbulente. Pour obtenir ce modèle, il faut premièrement simplifier les équations de Navier-Stokes incompressible en les adaptant à la géométrie de la couche limite.

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial x} = 0 \\ \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \end{cases} \quad (2.1-12)$$

La décomposition des variables en partie moyenne et partie fluctuante ( $u_i = u_i^* + u'_i$ ) est insérée puis les équations sont moyennées, faisant apparaître le tenseur des contraintes turbulentes.

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i^*}{\partial x} = 0 \\ \rho \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial t} + u_j^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \right) - \rho \frac{\partial (\mathbf{u}'_i \mathbf{u}'_j)^*}{\partial x_j} \end{cases} \quad (2.1-13)$$

Ce tenseur  $(\mathbf{u}'_i \mathbf{u}'_j)^*$  peut s'exprimer sous forme d'une viscosité turbulente grâce à l'hypothèse de Boussinesq en fonction du gradient de vitesse à la paroi.

$$\rho (\mathbf{u}' \mathbf{v}')^* = \rho \nu_t \frac{\partial u^*}{\partial y} \quad (2.1-14)$$

Le profil de vitesse dans une couche limite peut être approché par deux équations. Dans la sous couche visqueuse, la vitesse est proportionnelle à la distance à la paroi en fonction de la contrainte pariétale, au-delà de celle-ci, le profil de vitesse a une forme logarithmique.

$$\begin{cases} u^+ = y^+ & \text{sous couche visqueuse} \\ u^+ = \frac{1}{k} \ln(y^+) + Cste & \text{couche limite turbulente} \end{cases} \quad (2.1-15)$$



Avec  $y^+$  qui représente la distance normale à la paroi, l'adimensionnement choisi pour la vitesse est le suivant.

$$\begin{cases} u^+ = \frac{u}{u_\tau} = \frac{u_\tau y}{\nu} \\ u_\tau^2 = \frac{\tau_w}{\rho} = \frac{1}{\rho} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (2.1-16)$$

Pour respecter ces équations, Ng et Pan en 1964 proposent un modèle de viscosité turbulente qui se base sur les travaux de Reichardt :

$$\frac{\nu_t}{\nu} = \kappa \left( y^+ - \delta_l^+ \tanh \left( \frac{y^+}{\delta_l^+} \right) \right) \quad (2.1-17)$$

Avec  $\kappa$  la constante de Karman,  $\delta_l^+$  une échelle de longueur visqueuse. Ces constantes admises sont :

$$\begin{cases} \kappa = 0.4 \\ \delta_l^+ = 10.7 \end{cases} \quad (2.1-18)$$

Et avec la distance à la paroi donnée dans la formule suivante :

$$y^+ = \begin{cases} \eta \frac{h}{\nu} u_\tau & \text{pour } \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \eta = \frac{y}{h} \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \leq \eta \leq 1 \end{array} \right. \\ (1 - \eta) \frac{h}{\nu} u_\tau & \end{cases} \quad (2.1-19)$$

Cette formule n'est valable que pour un écoulement pleinement turbulent. Le régime transitoire doit être pris en compte de façon indépendante. Selon Szeri [87], la transition entre le régime laminaire et le régime transitoire se fait à un nombre de Reynolds  $\Re_{eL} = 1300$ . La transition du régime transitoire au régime turbulent se fait pour un nombre de Reynolds  $\Re_{eT} = 3000$ . La viscosité turbulente dans le régime transitoire est pondérée par un coefficient  $\delta_e$  donnée par la relation suivante établie par Brunetière [49] :

$$\begin{cases} \delta_e = 0 & \text{Si régime laminaire} \\ \delta_e = \frac{1}{2} \cos \left( \pi \frac{\Re_{eL} - \Re_e}{\Re_{eL} - \Re_{eT}} \right)^{0.6} & \text{Si régime transitoire} \\ \delta_e = 1 & \text{Si régime turbulent} \end{cases} \quad (2.1-20)$$

Ce modèle de turbulence permettra de calculer la viscosité totale de l'écoulement qui sera utilisée afin de résoudre le système d'équations de Reynolds Modifiées.

## 2.1.3 Présentation des méthodes numériques

### 2.1.3.1 Schémas numériques et calcul numérique de la vitesse verticale

Les équations de Reynolds Modifiées sont résolues à l'aide de la méthode des différences finies dans un code Fortran 90 nommé CERMAC (Calcul des Equations de Reynolds Modifiées Aérodynamiques Compressibles). Plusieurs schémas numériques seront utilisés en fonction de la nature des termes discrétisés. Le maillage utilisé pour le domaine fluide avec un double profil est le suivant :

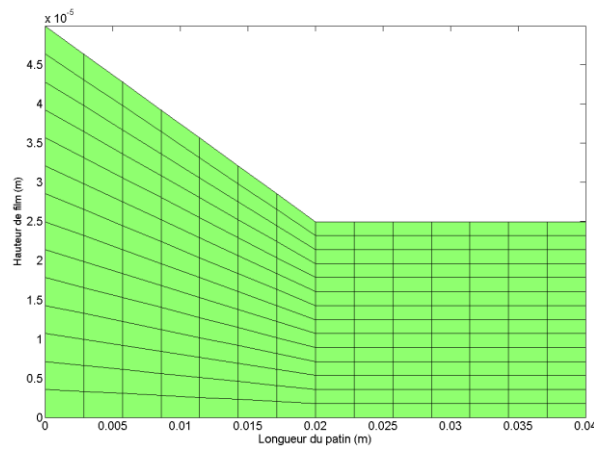


Figure 2-2 : Exemple de maillage utilisé dans CERMAC

Le domaine est discrétisé par un nombre défini de points en hauteur ( $N_2$ ) et en longueur ( $N_1$ ). Ce maillage est régulier en  $x$  et en  $y$  pour chaque  $x$ . Le pas spatial  $\Delta y$  est défini comme suit :

$$h(x) = \begin{cases} H_1 + \frac{H_2 - H_1}{L_1} \text{ pour } x < L_1 \\ H_2 & \text{ pour } x > L_1 \end{cases} \rightarrow \Delta y(x) = \frac{h(x)}{N_2} \text{ et } \Delta x = \frac{L}{N_1} \quad (2.1-21)$$

$L$  représente la longueur totale du patin et  $L_1$  la longueur du convergent. Pour le calcul des termes relatifs à la moyenne de la viscosité et de la masse volumique dans l'épaisseur de film ( $I, J, G_1$  et  $G_2$ ), ainsi que pour le calcul des termes relatifs à l'inertie ( $I_{11}, I_{12}$ , et  $I_{22}$ ), les intégrales sont calculées à l'aide de la méthode des trapèzes.

Les termes visqueux sont discrétisés à l'aide d'un schéma centré d'ordre 2. Les termes non-linéaires et les termes de transport, c'est-à-dire les termes liés à l'inertie de (2.1-9) et les termes d'advection de l'équation de l'énergie (2.1-10), sont discrétisés à l'aide d'un schéma décentré d'ordre 2. En fonction du signe de la vitesse (par exemple  $u$ ), le schéma peut être décentré dans un sens ou dans l'autre comme suit [88].

$$\begin{aligned} \text{Si } u > 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x} &\approx \frac{-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{2\Delta x} \\ \text{Si } u < 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x} &\approx \frac{f_{i-2} - 4f_{i-1} + 3f_i}{2\Delta x} \end{aligned} \quad (2.1-22)$$

Le calcul de la vitesse verticale  $v$ , pour une question de stabilité, se fera en dérivant l'équation de continuité dans la direction de l'épaisseur de film. Il en découle ainsi une expression en dérivée seconde de  $v$ .

$$\frac{\partial^2(\rho u)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2(\rho v)}{\partial y^2} = 0 \quad (2.1-23)$$

Les dérivées secondes seront discrétisées à l'aide d'un schéma d'ordre 2, donné par les expressions suivantes.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &\approx \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{\Delta x^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &\approx \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1} - f_{i-1,j-1} + f_{i+1,j-1}}{4\Delta x \Delta y} \end{aligned} \quad (2.1-24)$$

La résolution des équations se fera en couplage faible, la contrainte des conditions limites expliquée dans le paragraphe suivant nécessitera l'utilisation de la méthode de tir.

### 2.1.3.2 Présentation d'un cas de calcul et méthode de tir (*shooting method*)

La résolution d'un système aux dérivées partielles doit utiliser un certain nombre de conditions limites en fonction de l'ordre de dérivation. Dans une butée, la pression est égale à la pression atmosphérique en entrée et en sortie. Les vitesses aux parois sont également connues grâce à l'hypothèse d'adhérence à la paroi. La vitesse verticale  $v$  est nulle sur les deux parois, la vitesse  $u$  est nulle sur la paroi supérieure correspondant au patin et égale à la vitesse du rotor sur la paroi inférieure. La température est fixée à la température ambiante à l'entrée, et elle est soit fixée dans le cas de parois isothermes, soit égale à une condition de Neumann dans le cas de parois adiabatiques. Ces conditions limites sont résumées dans la figure 2-3.

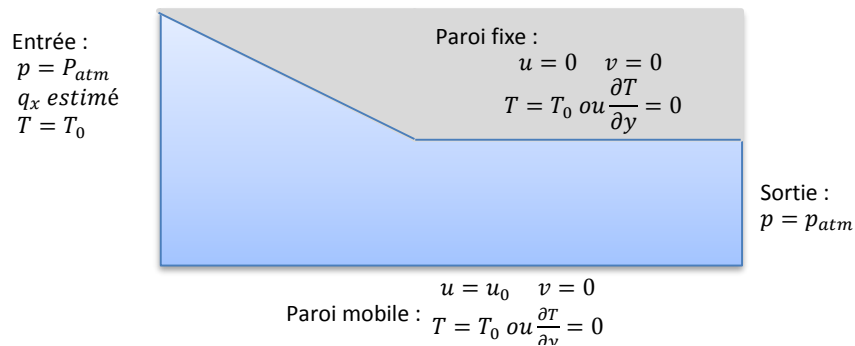


Figure 2-3 : Conditions limites utilisées dans CERMAC.

Le système à résoudre sous forme adimensionnelle (cf. équation (2.1-25)) est composé de trois équations dont deux en dérivée première et une en dérivée seconde, à trois inconnues  $\bar{T}$ ,  $\bar{p}$  et  $\bar{q}_x$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{q}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{G}_2}{\partial \bar{x}} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\bar{q}_x^2}{\bar{G}_1} I_{11} - \frac{2\bar{q}_x}{\bar{G}_1} I_{12} + I_{22} \right) = -\bar{h} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \frac{P^*}{\Re e \varepsilon} - \bar{h} \frac{\bar{q}_x}{\bar{G}_1} \frac{1}{\Re e \varepsilon} \\ P_e \bar{C}_p \bar{\rho} \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) = N_d P^* \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( \bar{K} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) + \bar{\mu} N_d \left( \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right) \end{cases} \quad (2.1-25)$$

$$P^* = \frac{P_a H^2}{L u_0 \mu_0} ; P_e = \frac{\rho_0 C_{p0} u_0 H^2}{K_0 L} ; N_d = \frac{\mu_0 u_0^2}{T_0 K_0} \quad (2.1-26)$$

Dans cette formulation,  $P^*$  est le facteur de pression modifiée,  $P_e$  est le nombre de Peclet et  $N_d$  est le nombre de diffusion. Pour résoudre ce système, il faut une condition limite pour la pression et le débit linéique, et deux pour la température. Cependant aucune condition limite n'est connue pour le débit linéique alors que deux sont connues pour la pression. Une astuce numérique va être mise en place pour pallier ce problème.

Cette astuce consiste à calculer la condition limite du débit nécessaire à l'aide de la seconde condition limite en pression en s'inspirant de la méthode de tir. Cette méthode permet de transformer un problème de condition limite (Boundary Value Problem) en un problème de

condition initial (Initial Value Problem) [89]. C'est-à-dire, il transforme un problème à deux conditions limites en un problème avec une condition limite et une dérivée à la limite, comme suit.

$$\begin{aligned} y''(x) &= f(x, y(x), y'(x)); y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1 \\ y''(x) &= f(x, y(x), y'(x)); y(x_0) = y_0, y'(x_1) = a \\ F(a) &= y(x_1; a) - y_1 \end{aligned} \quad (2.1-27)$$

La méthode de tir consiste à définir la fonction  $F(a)$  qui permet le passage d'un problème à l'autre. Pour résoudre le système (2.1-25) en s'inspirant de cette méthode, il faut estimer la condition en entrée du débit, résoudre le système et comparer la pression obtenue en sortie à la pression atmosphérique. Avec la méthode de la sécante, la condition en entrée est calculée itérativement. Les étapes de résolution des équations de Reynolds Modifiées sont :

- Résolution de l'équation de continuité et du mouvement pour :

$$q_x(x=0)^{(1)} = 0 \quad \text{et} \quad q_x(x=0)^{(2)} = -1$$

- Calcul de la différence sur les conditions limites en sortie:

$$m^{(i)} = p(x=L)_{réel}^{(i)} - p(x=L)_{numérique}^{(i)}$$

- Calcul de la nouvelle condition limite:

$$q_x(x=0)^{(i+1)} = q_x(x=0)^{(i)} - \frac{q_x(x=0)^{(i)} - q_x(x=0)^{(i-1)}}{m^{(i)} - m^{(i-1)}} m^{(i)}$$

- Réitérer tant que :

$$err = \left| \frac{m^{(i)} - m^{(i-1)}}{m^{(i-1)}} \right| > 10^{-6}$$

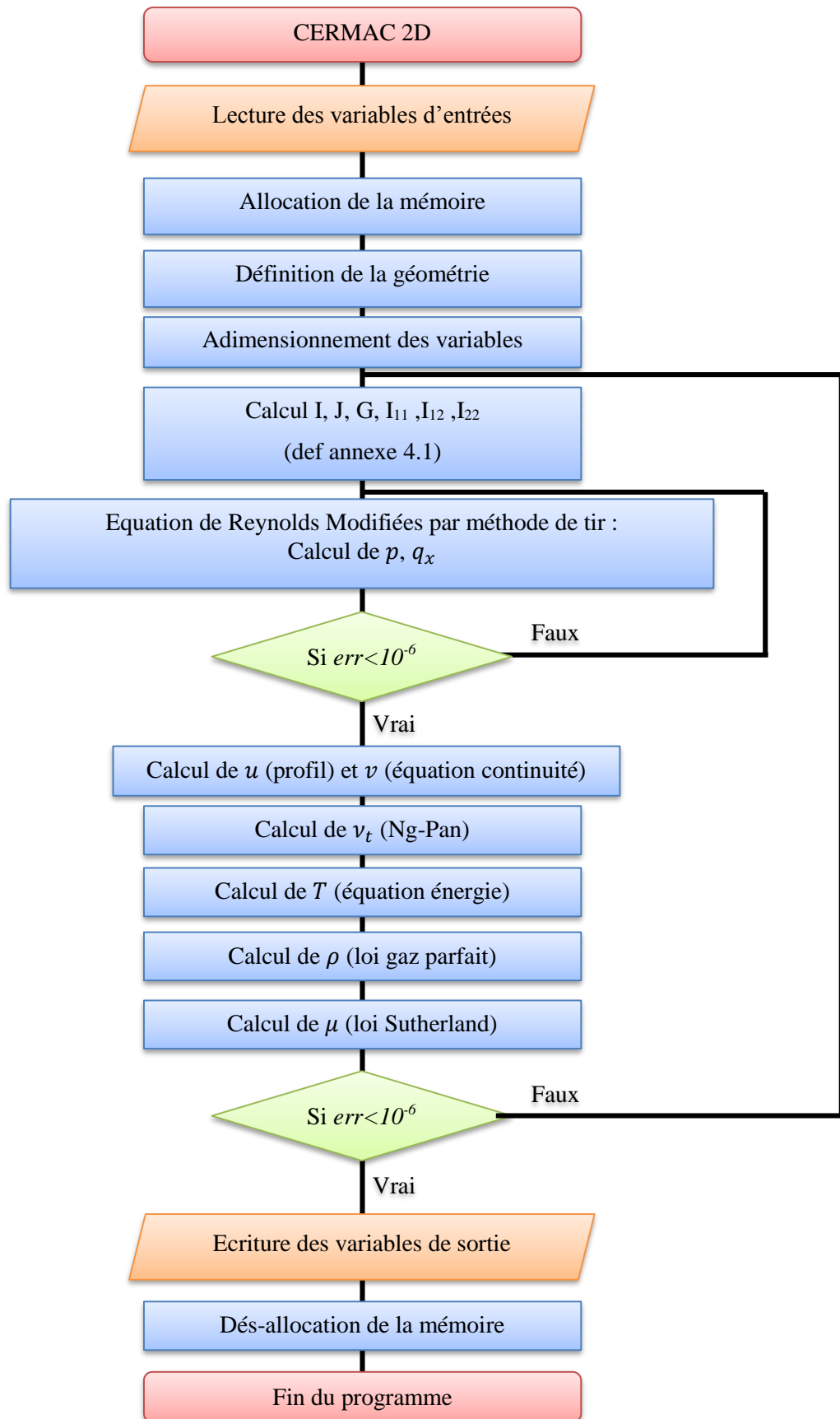
Avec l'exposant (i) représentant le numéro de l'itération. Les deux premières estimations et le critère de convergence sont choisis pour obtenir une précision et une rapidité suffisante. En effet, il a été constaté dans de nombreux cas que la condition en entrée du débit est une valeur négative comprise entre 0 et -1, il paraît donc raisonnable de choisir ses deux valeurs pour encadrer la méthode de la sécante et pour qu'elle puisse converger rapidement.

Cette méthode forme une première boucle afin de calculer le débit et la pression. Ensuite la vitesse  $u$  est calculée à partir de sa définition (2.1-8), et la vitesse  $v$  est obtenue par résolution de l'équation de continuité dérivée selon  $y$  (2.1-23). Puis, la viscosité turbulente est calculée à l'aide du modèle de Ng-Pan (cf. équations (2.1-17) à (2.1-20)). Après, la température peut être calculée grâce à la résolution de l'équation de l'énergie (2.1-25). Enfin, la masse volumique et la viscosité sont calculées à l'aide des équations (1.3-1) et (2.1-11). Une fois tous ces calculs réalisés, un critère de convergence est défini à partir des valeurs calculées et celles de l'itération précédente pour la température, la pression et la masse volumique, (cf. équation (2.1-28)). La résolution est réitérée tant que ce critère de convergence n'atteint pas un seuil souhaité.

$$\left| \frac{f - f^{old}}{f^{old}} \right| < \text{seuil convergence} \quad (2.1-28)$$

Chaque résolution d'équation aux dérivées partielles utilise une méthode de relaxation afin d'améliorer la stabilité numérique mais aussi afin d'accélérer la convergence. Maintenant que toutes les étapes de calcul sont définies et présentées, elles sont résumées dans un organigramme pour montrer l'architecture du programme CERMAC dans le paragraphe suivant.

### 2.1.3.3 Organigramme du programme



## 2.1.4 Résultats préliminaires

### 2.1.4.1 Principe de calcul

Les résultats présentés dans ce paragraphe se basent sur la démarche utilisée par Gross [90]. Lorsqu'un écoulement lubrifié possède le même nombre de compressibilité, *le profil de pression reste toujours le même*, quelle que soit la configuration de l'écoulement. Cette propriété n'est vraie que pour un système lubrifié laminaire, isotherme, et sans inertie. Le nombre de compressibilité est un paramètre adimensionnel défini à partir de la géométrie du patin, de la vitesse de l'écoulement et des propriétés du lubrifiant par la formule suivante :

$$\Lambda = \frac{6\mu_0 u_0 L}{H^2 p_a} \quad (2.1-29)$$

Il est possible de montrer la contribution de la turbulence, de l'inertie et de la température à partir d'un écoulement à même nombre de compressibilité car ces trois paramètres ont une influence sur le profil de pression. Les profils de pression peuvent donc varier si un de ces paramètres a une influence dans l'écoulement considéré. Dans une première partie, seul le modèle de turbulence sera actif dans la résolution, les termes d'inertie seront mis à zéro, et la température sera fixée. Dans une seconde partie, les termes d'inertie sont ajoutés à la résolution. Enfin, dans une dernière partie, la résolution de l'équation de l'énergie sera ajoutée au code avec des parois isothermes.

Les calculs seront menés sur une gamme de vitesses allant jusqu'au régime supersonique et ainsi tenter d'observer s'il y a une incidence sur l'écoulement. Deux géométries de patin seront étudiées : la longueur, les hauteurs de film et la vitesse d'entraînement seront les mêmes, seule la longueur de la rampe change. La première possède une rampe de longueur  $L_1 = L/2$  et la seconde possède une rampe de longueur  $L_1 = 2L/3$ . La figure 2-4, le tableau 2-1 et le tableau 2-2 montrent les deux géométries présentées, les dimensions utilisées et les vitesses étudiées. Le maillage est constitué de 150 points dans chacune des directions.

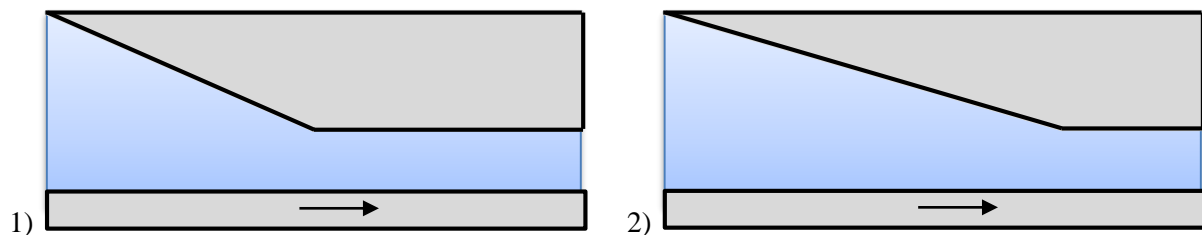


Figure 2-4 : Schémas représentant les deux géométries étudiées.

Géométrie	Longueur totale (mm)	Longueur rampe (mm)	H1/H2	Nombre de compressibilité
1	25	12.5	1.5	3.16
2	25	8.3	1.5	3.16

Tableau 2-1 : Données des géométries utilisées.

Cas n°	Vitesse (m/s)	Epaisseur film entrée (µm)	Epaisseur film sortie (µm)	Nombre de Reynolds
1	12.5	15	10	13
2	50	30	20	107
3	112	45	30	361
4	200	60	40	859
5	316	75	50	1697
6	450	90	60	2900

Tableau 2-2 : Cas de calcul à nombre de compressibilité constant

#### 2.1.4.2 Contribution de la turbulence

Dans ce paragraphe, seul le modèle de turbulence est actif dans la résolution du système. Etant donné que la température est fixée à la température ambiante, la vitesse du son reste constante à 340 m/s, et donc le régime de l'écoulement peut directement être déduit de la vitesse du rotor. La plupart des cas (1 à 4) se trouvent en régime laminaire et les deux cas (5 et 6) se trouvent en régime transitoire, bien que le cas supersonique (6) soit très proche du régime turbulent. La turbulence devrait avoir une contribution uniquement dans les deux derniers cas, les profils de pression pour les autres cas devraient être confondus. Les résultats de la simulation pour les deux géométries sont donnés dans la figure 2-5.

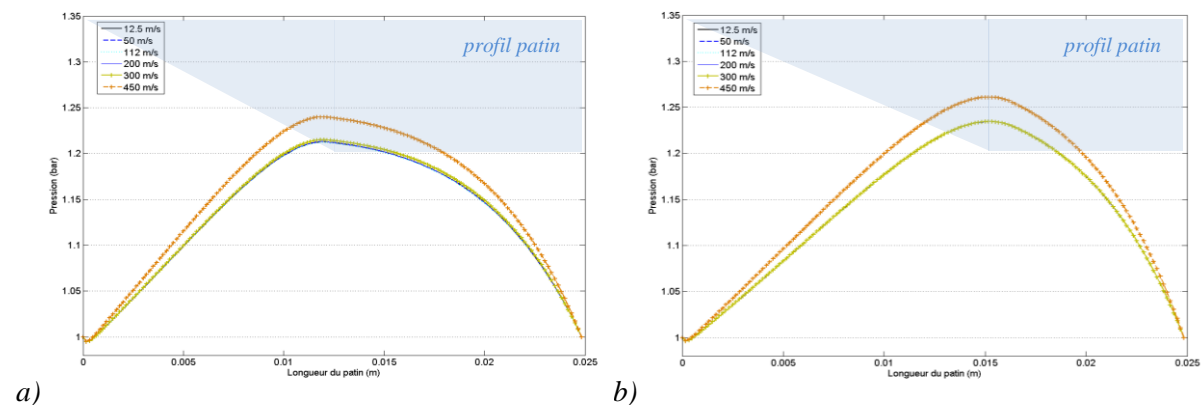


Figure 2-5 : Résultats de la simulation avec turbulence – sans inertie – isotherme a) géométrie 1 et b) géométrie 2.

Les résultats montrent que pour les deux géométries, les profils de pression sont tous confondus à l'exception du cas (6) qui possède un profil plus important. Il est intéressant aussi de noter que pour le cas (5) la turbulence a une contribution tellement faible que le profil de pression est confondu avec les profils laminaires. Les tendances obtenues sont donc les mêmes que celles qui ont été dégagées dans le chapitre (1.2.2). Ces résultats permettront par la suite de bien distinguer la part de l'influence de l'inertie dans ces configurations.

#### 2.1.4.3 Contribution de l'inertie et de la température

Dans une première partie, les termes d'inertie sont ajoutés à la résolution des équations de Reynolds Modifiées (résultats en figure 2-6). Dans une seconde partie, la résolution de l'équation de l'énergie est ajoutée au système (résultats en figure 2-7).

Pour la première partie, il est intéressant de noter que la plupart des profils de pression sont différents. À partir d'une vitesse de 200 m/s le profil de pression devient de plus en plus important. L'inertie augmente donc la pression, mais sa contribution reste faible. De plus, un

phénomène inédit apparaît à partir du cas (5), à savoir une diminution de la pression au niveau du changement d'inclinaison du patin. Ce phénomène se produit pour des vitesses très proches voire au-delà de la vitesse du son et il semble plus marqué pour le premier patin. Avec toutes ces remarques, et les propriétés des écoulements supersoniques vues dans le chapitre (1.3.2), il semble raisonnable d'apparenter ce phénomène à une détente.

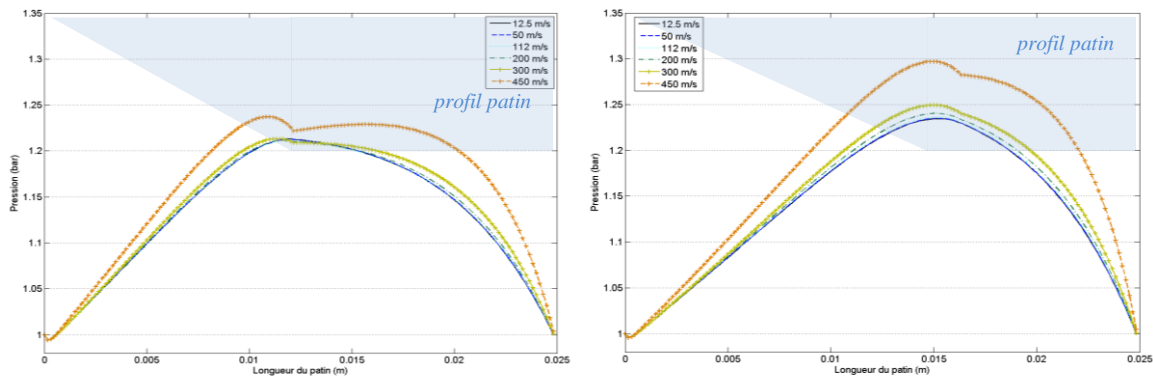


Figure 2-6 : Résultats de la simulation avec turbulence – avec inertie – isotherme.

En seconde partie, lorsque la résolution de l'équation de l'énergie est ajoutée au système, les remarques faites précédemment restent tout à fait valables. L'amplitude de tous les profils de pression augmente d'environ 5% à 10% à cause de l'échauffement. Le phénomène de « détente » au changement d'inclinaison est toujours présent mais il semble être légèrement moins marqué que dans le cas précédent. En effet, l'augmentation de la température accroît également la vitesse du son, ce qui diminue le nombre de Mach, atténuant par conséquent les phénomènes tels que les détentes.

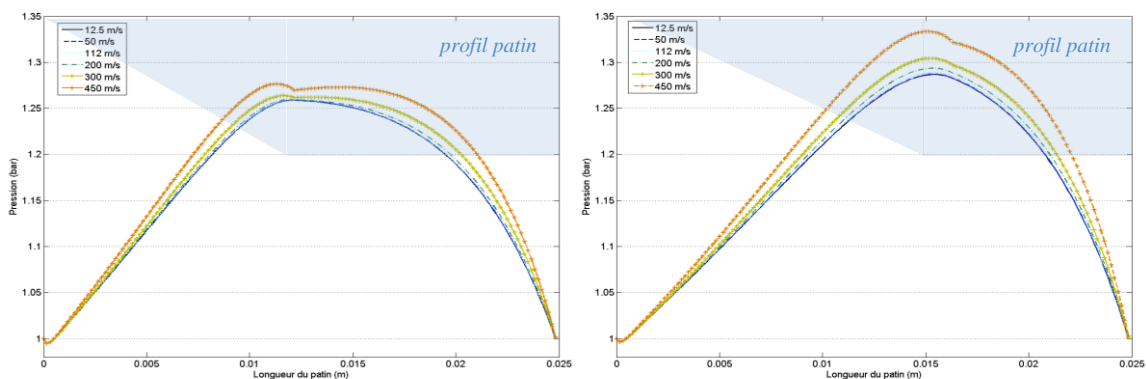


Figure 2-7 : Résultats de la simulation avec turbulence – avec inertie – adiabatique.

En revanche, que ce soit dans le cas isotherme ou non, après la « détente », le profil de pression présente une singularité avant de reprendre une nouvelle diminution sur la partie plane du profil. La dérivée de la pression n'est pas continue en ce point, ce qui pourrait être lié à un problème numérique ou au modèle physique. La résolution du système se fait de façon découplée, ce qui pour une étude compressible et fortement non linéaire est discutable. L'établissement des équations de Reynolds Modifiées demande d'imposer un profil de vitesse et une moyenne des termes d'inertie dans l'épaisseur du film ce qui peut être restrictif dans le cas d'un écoulement supersonique. De plus, de nombreuses simulations ont été menées et beaucoup d'entre elles ne convergent pas si le nombre de compressibilité est supérieur à 4 ou si la vitesse est supérieure à 450 m/s. Il semblerait que le code rencontre des difficultés à calculer la solution si les effets d'inertie sont très importants. En effet lorsque les termes d'inertie



deviennent trop importants, la condition en limite en sortie n'a plus assez d'influence sur la méthode de tir, et la convergence est très difficile à atteindre. Tichy [61] dans ses travaux s'interroge : la prise en compte de vitesses de plus en plus importantes et de termes de plus en plus non linéaires dans des systèmes lubrifiés n'aboutirait elle pas à une limite des outils actuels ? Deux choix sont possibles pour obtenir plus de résultats : améliorer les méthodes numériques utilisées pour discrétiser le système ou élaborer une nouvelle approche du problème. C'est cette seconde option qui sera développée dans cette étude, puisqu'elle permet également une comparaison dans l'attente de résultats expérimentaux.

---

## 2.1.5 Conclusion

La résolution des équations de Reynolds Modifiées se base sur les travaux de Brunetière et Tournerie [65] et de Thomas [66]. Il s'agit d'un système qui prend en compte l'inertie, la compressibilité et la turbulence d'un écoulement lubrifié. Le système à résoudre possède trois équations à trois inconnues, le débit linéique, la pression et la température.

La résolution des équations de Reynolds Modifiées se fait à l'aide des différences finies. L'absence de conditions limites connues pour le débit conduit à l'utilisation de la méthode de tir. A partir d'une deuxième condition limite connue pour la pression, il est possible de calculer à l'aide de la méthode de la sécante la condition limite pour le débit.

Les calculs ont été menés sur deux géométries de patins qui se distinguent par leurs différentes longueurs de rampe. Les simulations ont été faites avec un même nombre de compressibilité qui, pour un écoulement laminaire sans inertie et isotherme, donne toujours le même profil de pression. Ainsi, il a été possible d'étudier séparément la contribution de la turbulence, de l'inertie et de la température.

Les résultats en régime supersonique montrent l'apparition d'un phénomène de type « détente », correspondant à une diminution de la pression au niveau du changement d'inclinaison du patin. Le phénomène dépend de la vitesse mais aussi de l'angle du double profil.

Cependant le code CERMAC rencontre certaines difficultés à obtenir plus de résultats à des vitesses supérieures à 450 m/s ou à des nombres de compressibilité plus importants que 4. De plus le profil de pression montre une singularité après la diminution de la pression qui peut faire penser à une limite du modèle ou à une erreur numérique. Ainsi une deuxième approche va être établie, la résolution des équations de Navier Stokes adaptées aux films minces.

## 2.2. Résolution des équations de Navier Stokes adaptées aux films minces

### 2.2.1 Introduction

En raison des difficultés rencontrées avec le code CERMAC, deux choix sont possibles : améliorer les méthodes numériques utilisées pour résoudre les équations de Reynolds Modifiées ou établir un autre modèle. La deuxième proposition est choisie dans cette étude et pour cela, le raisonnement qui a permis d'établir les équations de Reynolds Modifiées va être effectué dans le sens inverse. Ce raisonnement vient d'une configuration connue en aérodynamique pour des conduites supersoniques qui ont déjà été étudiées par Courant-Friedrichs [75].

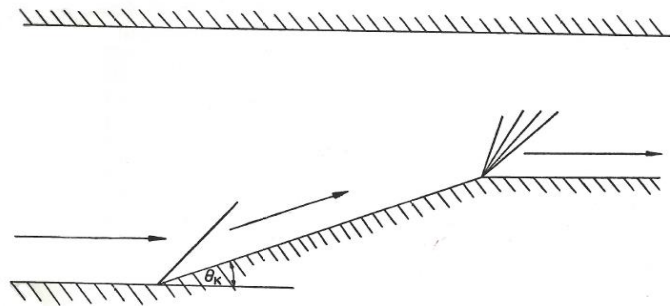


Figure 2-8 : Configuration de choc dans une tuyère [75].

Soit un écoulement supersonique dans une butée aérodynamique. Au vu de la géométrie du patin et des propriétés sur les écoulements supersoniques décrites dans le paragraphe (1.3), plusieurs cas de figure peuvent se produire. Le profil de vitesse est supposé être un profil de Couette, et la direction de l'écoulement en entrée est parallèle au rotor. La proportion supersonique de l'écoulement dépend de la vitesse d'entraînement et conditionne les cas possibles. Dans les figures suivantes, la zone en rouge représente la proportion supersonique de l'écoulement et la zone bleue représente la partie subsonique.

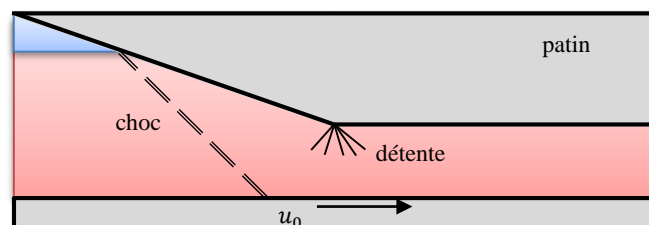


Figure 2-9 : Premier cas de figure grande proportion supersonique.

Si une grande majorité de l'écoulement est supersonique (cf. figure 2-9), un choc peut se produire au niveau du convergent. Ensuite, si ce choc est faible, c'est-à-dire si la vitesse de l'écoulement en aval du choc reste supersonique, une détente peut se produire au changement d'inclinaison du patin.

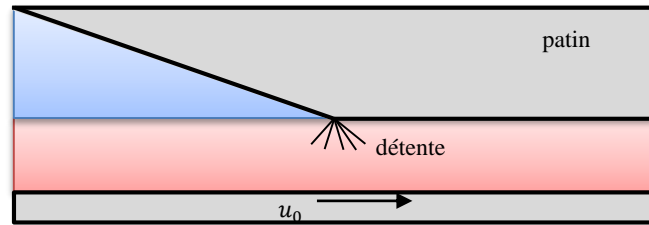


Figure 2-10 : Second cas de figure proportion supersonique moyenne.

Si la proportion d'écoulement supersonique est moyenne, elle n'est déviée qu'au niveau du changement d'inclinaison du patin et une détente peut se produire. C'est ce cas de figure qui semble être calculé avec les équations de Reynolds Modifiées.

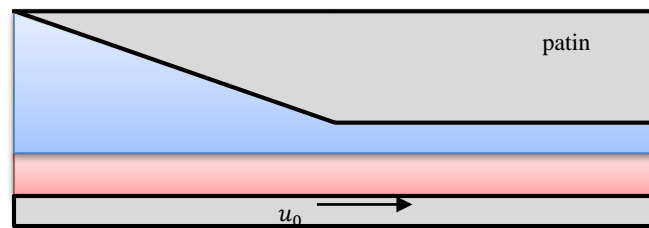


Figure 2-11 : Troisième cas de figure faible proportion supersonique.

Si seule une faible partie de l'écoulement est en régime supersonique, la géométrie du patin n'aura pas d'incidence et aucun phénomène ne se produira.

Au final, il est tout à fait possible qu'un choc oblique se produise dans ce type de géométrie. Si c'est le cas, il créera une discontinuité dans l'écoulement d'une butée supersonique et l'hypothèse de gradient de pression constant dans l'épaisseur de film, présente dans les équations de Reynolds Modifiées, n'est par conséquent plus valable. C'est à partir de ce constat que la seconde approche va être établie.

## 2.2.2 Présentation du système à résoudre

### 2.2.2.1 Principales hypothèses

Les hypothèses du nouveau système sont les mêmes que celles des équations de Reynolds Modifiées, à l'exception de la stationnarité pour des raisons numériques qui seront expliquées dans les paragraphes suivants. Ainsi les principales hypothèses sont :

- Le milieu est continu.
- L'écoulement est *instationnaire*.
- L'air est un gaz parfait.
- Le fluide est compressible.
- Les forces massiques extérieures sont négligeables.
- Le fluide adhère aux parois.
- La dimension du film est très faible devant les autres dimensions.
- Les disques de rotor et de butée sont parfaitement coaxiaux.

### 2.2.2.2 Méthode d'adimensionnement

L'établissement de ce nouveau système s'inspire directement de la démonstration du paragraphe (2.1.2). Les équations de la mécanique sont adimensionnées avec les mêmes paramètres (cf. équation (2.2-1)), à l'exception de la pression qui est adimensionnée par une pression dynamique ( $\rho_0 u_0^2$ ) et non plus par une pression capillaire ( $H^2/\mu_0 u_0 L$ ). Ce choix s'explique par le fait que le maximum de pression est plus important en cas de présence de choc et à des vitesses supersoniques.

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{y} = \frac{y}{H}; \quad \bar{u} = \frac{u}{u_0}, \bar{v} = \frac{vL}{u_0 H}; \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0};$$

$$\bar{t} = \frac{tu_0}{L}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho_0 u_0^2}, \quad \bar{T} = \frac{T}{T_0} \quad (2.2-1)$$

Les équations de la mécanique regroupent l'équation de conservation de la masse (cf. équation (2.1-1)), les équations du mouvement (cf. équation (2.1-2)) et l'équation de l'énergie conservée dans sa forme originale avec comme variable l'énergie totale et non la température.

$$\frac{\partial(E_t)}{\partial t} + \frac{\partial(u_i E_t)}{\partial x_i} = -\frac{\partial p u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial(u_j \tau_{ij} - Q_i)}{\partial x_j} \quad (2.2-2)$$

L'énergie totale  $E_t$  est la somme de l'énergie interne et de l'énergie cinétique et qui, pour un gaz parfait, s'écrit comme suit :

$$E_t = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \quad (2.2-3)$$

Et la densité de flux de chaleur  $q_i$  est une fonction de la conductivité thermique et de la température par la relation suivante.

$$Q_i = K \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (2.2-4)$$

Le système est adimensionné, (cf. démonstration en annexe 4.3), laissant apparaître le facteur géométrique  $\varepsilon$ . Dans la démonstration de l'équation de Reynolds, tous les termes en facteur de  $\varepsilon^2$  sont négligés amenant donc un gradient de pression dans l'épaisseur du film négligeable. Ici tous termes sont conservés en particulier à cause des termes d'inertie dans la direction  $y$  qui sont multipliés par  $\varepsilon^2$ , mais dont le produit pourrait ne plus être négligeable en cas de choc.

Ainsi, le système ne peut plus être moyenné dans l'épaisseur du film et la suite de la démonstration des équations de Reynolds Modifiées ne s'applique plus à partir d'ici. Le système obtenu garde sa forme originale de quatre équations à quatre inconnues  $\rho$ ,  $u$ ,  $v$  et  $p$  ou  $E_t$ , laissant la possibilité de faire de la DNS (*Direct Numerical Simulation*).

### 2.2.2.3 Système couplé

Les équations de Navier-Stokes adaptées aux films minces, c'est-à-dire le système obtenu après adimensionnement, est présenté ici sous forme vectorielle. Cette écriture permet de classer les termes de chacune des équations en trois familles en fonction de leur nature.

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{\text{Contribution temporelle}} = \underbrace{-\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial y}}_{\text{Termes Euler}} + \underbrace{\frac{\partial F_v}{\partial x} + \frac{\partial G_v}{\partial y}}_{\text{Termes visqueux}} \quad (2.2-5)$$

Le vecteur  $q$  regroupe les variables soumises à la dérivée temporelle, et qui sont une combinaison des différentes inconnues. Les termes soumis à des dérivées spatiales peuvent être séparés en deux grandes familles : ceux relatifs à la viscosité et les sources sont regroupés dans la classe des termes visqueux et ceux relatifs aux termes d'inertie sont regroupés dans la classe des termes d'Euler. Séparer les différents termes permettra d'utiliser des schémas numériques adaptés à chaque nature.

Les vecteurs de l'équation (2.2-5) sont composés de la façon suivante : la première ligne est relative à l'équation de continuité, les deuxième et troisième lignes correspondent aux équations du mouvement dans les directions  $x$  et  $y$ , et la quatrième ligne est relative à l'équation de l'énergie.

$$\vec{f} = \begin{Bmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho}\bar{u} \\ \bar{\rho}\bar{v}\varepsilon^2 \\ \bar{E}_t \end{Bmatrix}; \quad \vec{F}(f) = \begin{Bmatrix} \bar{\rho}\bar{u} \\ \bar{\rho}\bar{u}^2 + \bar{p} \\ \bar{\rho}\bar{u}\bar{v}\varepsilon^2 \\ (\bar{E}_t + \bar{p})\bar{u} \end{Bmatrix}; \quad \vec{G}(f) = \begin{Bmatrix} \bar{\rho}\bar{v} \\ \bar{\rho}\bar{u}\bar{v} \\ \bar{\rho}\bar{v}^2\varepsilon^2 + \bar{p} \\ (\bar{E}_t + \bar{p})\bar{v} \end{Bmatrix} \quad (2.2-6)$$

$$\text{Avec } \bar{E}_t = \frac{\bar{p}}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\bar{\rho}(\bar{u}^2 + \varepsilon^2\bar{v}^2 + \bar{w}^2).$$

$$\vec{F}_v(f) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \varepsilon^2\bar{\sigma}_{11} \\ \varepsilon^2\bar{\sigma}_{12} \\ \varepsilon^2(\bar{\sigma}_{11}\bar{u} + \bar{\sigma}_{12}\bar{v} + \bar{Q}_1) \end{Bmatrix}; \quad \vec{G}_v(f) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{\sigma}_{12} \\ \varepsilon^2\bar{\sigma}_{22} \\ \bar{\sigma}_{12}\bar{u} + \varepsilon^2\bar{\sigma}_{22}\bar{v} + \bar{Q}_2 \end{Bmatrix} \quad (2.2-7)$$

Le tenseur des contraintes fait apparaître en forme adimensionnelle le nombre de Reynolds et le facteur géométrique. Le terme source fait apparaître plusieurs nombres adimensionnels comme le nombre de Reynolds (cf. équation (2.1-26)), le nombre de Mach de référence et le nombre de Prandtl (2.2-10)

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11} &= \frac{\bar{\mu}}{\varepsilon\mathcal{R}e} \left( \frac{4}{3} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) & \bar{\sigma}_{12} &= \frac{\bar{\mu}}{\varepsilon\mathcal{R}e} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \\ \bar{\sigma}_{22} &= \frac{\bar{\mu}}{\varepsilon\mathcal{R}e} \left( \frac{4}{3} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right) \end{aligned} \quad (2.2-8)$$

$$\bar{Q}_i = \frac{-1}{(\gamma - 1)M_0^2 \varepsilon \mathcal{R}e P_r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}_i} \quad (2.2-9)$$

$$M_0^2 = \frac{u_0^2}{\gamma R T_0}; \quad P_r = \frac{\mu_0 c_p}{K_0} \quad (2.2-10)$$

Concernant la turbulence, le système peut se passer d'un modèle, car les termes visqueux étant tous conservés, elle est déjà comprise dans la résolution. L'ajout d'un modèle de turbulence permettrait d'étudier plus précisément la fluctuation des variables. Or, l'objectif de cette étude est de décrire les tendances générales du comportement du film mince en régime supersonique, il n'est donc pas nécessaire d'ajouter un modèle de turbulence.

La résolution de ces équations utilisera des outils numériques adaptés à la géométrie film mince, permettant un traitement particulier en cas de choc. Le principal avantage de cette

méthode est de pouvoir modéliser les équations de Navier Stokes sur un petit maillage. En effet l'adimensionnement permet d'avoir un domaine d'étude de la même taille en longueur et en épaisseur, permettant ainsi l'utilisation d'un nombre de points de discrétisation du même ordre de grandeur dans les deux directions. A l'opposé, la plupart des codes commerciaux n'utilisent pas ce type d'adimensionnement, et donc nécessitent un très grand nombre de points dans la longueur pour avoir des mailles homogènes dans la hauteur. Bien que la résolution du problème soit parfaitement possible sur les logiciels commerciaux, elle est beaucoup trop longue et par pour la demande de LTS qui est du dimensionnement de nouvelles butées.

### 2.2.3 Méthodes numériques utilisées

Les équations de Navier-Stokes adaptées aux films minces sont résolues à l'aide de la méthode des différences finies sur un code Fortran 90 nommé CAMEAS (Calcul Multi-échelle des Ecoulements Aérodynamiques Supersoniques). Différents schémas numériques seront utilisés en fonction des classes des termes à savoir : un schéma explicite pour la contribution temporelle, un schéma à capture de choc pour les termes « Euler » et un schéma compact pour les termes visqueux. Ces schémas vont maintenant être explicités.

#### 2.2.3.1 Schémas à capture de choc.

Les calculs numériques en présence de choc, c'est-à-dire de discontinuité de la solution, sont difficiles à faire. En effet les schémas numériques classiques de différences finies en présence d'une discontinuité ont une tendance à être instables et à faire osciller le résultat. Cette instabilité est connue sous le nom d'*effet de Gibbs*. Des schémas numériques plus complexes, capables d'éviter ce phénomène ont été élaborés. Mathématiquement, ce sont les termes « Euler » de l'équation (2.2-5) qui sont responsables de la création des chocs et qui seront traités à l'aide d'un schéma numérique « essentiellement non-oscillant » nommé WENO.

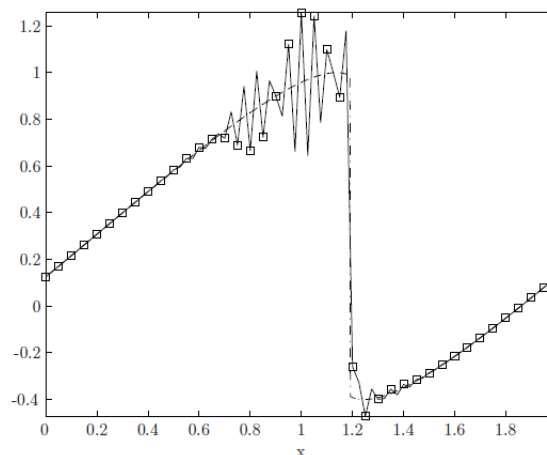


Figure 2-12 : Phénomène de Gibbs (---) solution analytique et (-□-) solution numérique (Crespo 2009).

Harten et al. [91] ont conçu le premier schéma numérique dit « essentiellement non oscillant » ou **ENO** (*Essentially Non-Oscillatory*). Celui-ci a pour principe de calculer les dérivées spatiales à partir de groupes de points candidats (stencils) en choisissant le plus

régulier. Liu et *al.* [92] ont amélioré ce schéma en suggérant d'utiliser l'ensemble des stencils en les pondérant en fonction de leur régularité. Cette nouvelle démarche donne naissance au schéma **WENO** « *Weighed Essentially Non-Oscillatory* ». Le principal avantage de cette méthode est d'améliorer la précision du schéma dans les zones régulières de la solution.

De nombreuses améliorations ont ensuite été apportées au schéma WENO. Jiang et Shu [93] ont défini une nouvelle méthode pour le calcul des poids qui a elle-même été étendue pour de plus grands ordres de précision par Balsara et Shu [94] et Borges et *al.* [95]. Par ailleurs, Henrick et *al.* [96] ont modifié l'expression des poids pour améliorer la précision du schéma au niveau des discontinuités. L'ordre de précision de tous ces schémas a été comparé dans les travaux de Don et Borges [97] résumant ainsi l'historique des schémas non oscillants.

La mise en place du schéma WENO va être présentée dans un cas unidimensionnel. L'extension à des cas bidimensionnels ou tridimensionnels se fait intuitivement. Soit (2.2-11) une fonction hyperbolique sous forme conservative, c'est-à-dire qui s'exprime au travers de ses flux.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot f(u) = 0 \quad (2.2-11)$$

La forme semi-discrétisée de cette équation au point  $x = x_i$  s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial u_i(t)}{\partial t} = - \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_i} \quad i = 0, \dots, N \quad (2.2-12)$$

La dérivée spatiale est discrétisée à l'aide de la méthode des différences finies en une formulation conservative, afin de vérifier la conservation des flux, vérifiant la formule suivante :

$$\int_a^b \frac{\partial f(u(x))}{\partial x} dx = f(u(b)) - f(u(a)) \quad (2.2-13)$$

La dérivée spatiale au point  $x = x_i$  fait donc intervenir la notion de flux numériques  $F$  qui sont une interpolation d'ordre ( $s$ ) du flux réel. Elle s'exprime par la formule suivante:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \frac{F_i - F_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x^s) \quad (2.2-14)$$

La propriété de conservation est donnée par :

$$\int_a^b \frac{\partial f(u(x))}{\partial x} dx \approx \Delta x \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_i \approx \Delta x \sum_{i=1}^N \frac{F_i - F_{i-1}}{\Delta x} = F_N - F_0 \quad (2.2-15)$$

Ainsi, la forme discrétisée de l'équation (2.2-12) est:

$$\frac{\partial u_i(t)}{\partial t} = \frac{F_i - F_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x^s) \quad (2.2-16)$$

La méthode de séparation des flux est utilisée pour évaluer les flux numériques relatifs à la formulation conservative ( $F$ ). Elle se base sur la méthode des caractéristiques qui détermine le sens d'un écoulement hyperbolique [98]. La formule utilisée dans cette étude est appelée Lax Friedreich High Dissipative et elle est donnée par la formule suivante [99].

$$F_i^\pm = \frac{1}{2}(F_i \pm \max(\lambda) * x_i) \quad (2.2-17)$$

$F_i^\pm$  représente le flux soit positif soit négatif, et  $\lambda$  représente les valeurs propres du système. La méthode des caractéristiques et le calcul des valeurs propres sont détaillés dans l'annexe (4.3.2) : ils s'inspirent des démonstrations qui se trouvent dans les travaux de Hirsch [98]. La reconstruction des flux utilise l'opérateur WENO et la somme des flux positifs et négatifs. Ici, seule la démarche pour le flux positif est présentée, celle du flux négatif se fait en décalant les indices d'un cran sur la gauche.

$$\begin{cases} \hat{F}_i^\pm = \mathbb{R}_{WENO}(F_i^\pm) \\ \hat{F}_i = \hat{F}_i^+ + \hat{F}_i^- \end{cases} \quad (2.2-18)$$

L'opérateur  $\mathbb{R}_{WENO}$  combine autour du point courant les flux sur les stencils en fonction de leur régularité. Les points composant un stencil sont ceux pouvant définir la dérivée du flux en un point. Pour une approximation d'ordre 3 (appelé WENO 3), il existe deux stencils  $S_r$ :

$$S_0 = \{x_{i-1}, x_i\} \text{ et } S_1 = \{x_i, x_{i+1}\} \quad (2.2-19)$$

L'opérateur est une approximation polynomiale d'ordre 3 ( $\hat{F}_i = F_i + o(\Delta x^3)$ ) qui s'exprime comme la somme pondérée de valeurs interpolées ( $\hat{F}_i^{(r)}$ ) sur chaque stencil  $S_r$ :

$$\hat{F}_i = \sum_{r=0}^1 \omega_r \hat{F}_i^{(r)} \quad (2.2-20)$$

Cette valeur interpolée ( $\hat{F}_i^{(r)}$ ) est une combinaison des valeurs des flux aux points du stencil et de coefficients de Lagrange  $c_l^{(r)}$ , donnés dans le tableau 2-3.

$$\hat{F}_i^{(r)} = \sum_{l=0}^1 c_l^{(r)} F_{i-r+l} \quad r = 0,1 \text{ et } l = 0,1 \quad (2.2-21)$$

L'approximation polynomiale utilise des coefficients de pondération  $\alpha_r$ , obtenus à partir d'indicateurs de régularité  $\beta_k$  et de poids idéaux  $d_k$ . Les indicateurs de régularité sont des interpolations du flux numérique sur chaque stencil. Les poids idéaux sont obtenus à partir d'écoulements réguliers dont la démonstration est résumée dans les travaux de Ponziani *et al.* [100]. Les poids normalisés  $\omega_r$  sont calculés à l'aide des poids  $\alpha_r$  comme suit.

$$\omega_r = \frac{\alpha_r}{\sum_{l=0}^1 \alpha_l}; \text{ avec } \alpha_r = \frac{d_k}{\beta_k}; \quad r = 0,1 \quad (2.2-22)$$

Pour un schéma d'ordre 3, les indicateurs de régularité définis par Jiang et Shu sont donnés par les formules suivantes:

$$\begin{cases} \beta_0 = (F_i - F_{i-1})^2 \\ \beta_1 = (F_{i+1} - F_i)^2 \end{cases} \quad (2.2-23)$$

Quant aux coefficients de Lagrange et aux poids idéaux utilisés dans l'opérateur WENO3, ils sont résumés dans le tableau 2-3.



$c_l^{(r)+}$	$l = 0$	$l = 1$	$d_k^+$
$r = 0$	-1/2	3/2	1/3
$r = 1$	1/2	1/2	2/3

Tableau 2-3 : Coefficients de pondération du schéma WENO 3.

### 2.2.3.2 Traitement de la contribution temporelle et visqueuse

L'évolution temporelle sera discrétisée par un schéma explicite de type Runge-Kutta. Le problème à résoudre est le suivant ( $u$  étant l'inconnue et  $\mathcal{L}(u)$  l'opérateur de l'ensemble des contributions spatiales) :

$$\frac{du}{dt} = \mathcal{L}(u(t), t) \quad (2.2-24)$$

La méthode explicite présente l'avantage de pouvoir traiter séparément les termes spatiaux et les termes temporels. Le schéma WENO étant difficile à inverser, l'hypothèse instationnaire a été choisie. Pour calculer le résultat à un temps  $t + \Delta t$ , le schéma de Runge-Kutta utilise non seulement le pas de temps précédent, mais aussi des valeurs intermédiaires (sous-pas) de temps entre  $t$  et  $t + \Delta t$ . Dans cette étude, le schéma de Runge Kutta 4 est utilisé et les étapes de calcul sont les suivantes.

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^{(0)} + \frac{1}{2} \Delta t. \mathcal{L}(u^{(0)}) \\ u^{(2)} &= u^{(0)} + \frac{1}{2} \Delta t. \mathcal{L}(u^{(1)}) \\ u^{(3)} &= u^{(0)} + \Delta t. \mathcal{L}(u^{(2)}) \\ u^{(3)} &= -\frac{1}{3} u^{(0)} + \frac{1}{3} u^{(1)} + \frac{2}{3} u^{(2)} + \frac{1}{3} u^{(3)} + \frac{1}{6} \Delta t. \mathcal{L}(u^{(3)}) \end{aligned} \quad (2.2-25)$$

Pour que le schéma converge, il faut que la condition « Courant-Friedrichs-Lewy » suivante soit respectée :

$$CFL = \Delta t. \max_{\Omega} \left[ \frac{|\bar{u}| + \bar{c}}{\Delta x} + \frac{|\bar{v}| + \bar{c}/\bar{\varepsilon}}{\Delta y} \right] \leq 1 \quad (2.2-26)$$

$$c^2 = \frac{\gamma p}{\rho} \quad (2.2-27)$$

Le pas  $\Delta t$  est recalculé à chaque pas de temps afin de toujours respecter cette condition. Dans le cas particulier des films minces, cette condition en écriture adimensionnelle fait apparaître le facteur géométrique  $\varepsilon$ . Sa présence a pour conséquence de diminuer le pas de temps quand  $\varepsilon$  est petit.

La contribution visqueuse est discrétisée à l'aide d'un schéma compact. Le principe du schéma compact est d'écrire la relation liant une variable à sa dérivée sous forme implicite matricielle [101]:

$$A. f^{(\sigma)} = B. f \quad (2.2-28)$$

La matrice  $A$ , rendant le schéma implicite, doit être inversée pour obtenir les valeurs de la dérivée  $f^{(\sigma)}$ . Si  $A$  est la matrice identité, alors la matrice  $B$  contient le coefficient des schémas de différences finis usuels. L'avantage de cette écriture est de pouvoir augmenter la précision, par exemple en utilisant des matrices bandes pour  $A$ , sans utiliser plus de points qu'un schéma standard. Dans cette étude, un schéma d'ordre 2 sera utilisé,  $A$  sera la matrice identité qui, sous une forme matricielle, s'écrit comme suit.

$$\begin{Bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \\ \vdots \\ f'_{n-1} \\ f'_n \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta x} \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 & & & \\ & -0.5 & 0 & 0.5 & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & -0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \{f_i\} \quad (2.2-29)$$

L'ordre de précision total de la résolution est 2 à cause du schéma compact. Un ordre de précision faible a pour conséquence d'augmenter la diffusion numérique qui a une tendance à lisser les phénomènes (disparition des ondes acoustiques par exemple) mais qui stabilise le calcul. Dans le cadre de cette étude, seules les grandes tendances de l'écoulement sont recherchées, l'ordre de grandeur est donc suffisant. Cependant, la construction des schémas numériques permet facilement de passer à des ordres de précision plus importants, (matrice bande pour  $A$ ).

### 2.2.3.3 Présentation d'un cas de calcul et conditions limites

Les schémas de discrétisation spatiale décrits précédemment, que ce soit WENO ou compact, ne s'appliquent qu'à des maillages réguliers (cf. figure 2-13). Ainsi pour que le maillage s'adapte aux schémas numériques, il faut le transformer vers un maillage régulier d'axes  $(\xi, \eta)$  grâce à la relation suivante, qui est une transformation jacobienne (cf. annexe 4.4):

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \vec{0} \quad (2.2-30)$$

La figure suivante montre un exemple de maillage raffiné en cas d'angle de patin sévère. Le nombre de points  $y$  est inférieur au nombre de points régulièrement utilisé pour une meilleure visibilité.

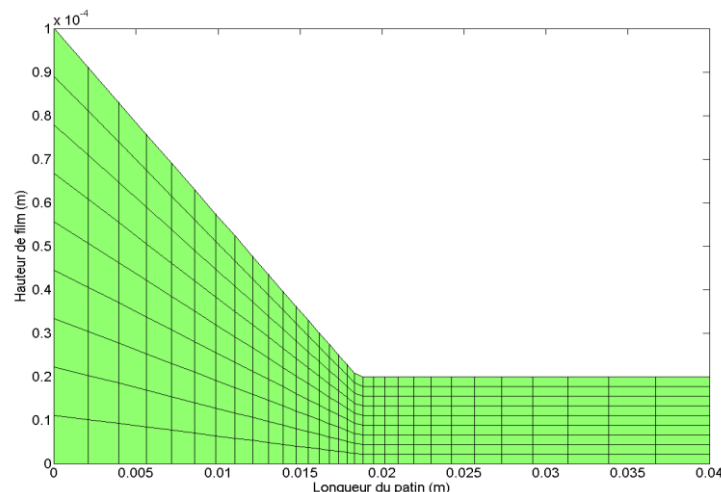


Figure 2-13 : Maillage utilisé dans CAMEAS.

En adimensionnel un paramètre géométrique devient important, l'angle du double profil. Celui-ci noté  $\theta$  est montré sur la figure 4-6 ; plus il est petit (tendant vers un angle droit) plus la géométrie est dite sévère. Les conditions limites à utiliser pour la résolution des équations de Navier-Stokes adaptées aux films minces sont légèrement différentes de celles utilisées pour la résolution des équations de Reynolds Modifiées, puisque la pression est *bidimensionnelle*. Des études comme celle de Thompson [102] [103] ou de Poinso-Lele [104] ont déterminé la forme des conditions limites pour les systèmes hyperboliques. Le système peut s'écrire sous forme non conservative à l'aide de la méthode des caractéristiques. Ils ont montré que les conditions limites dépendent de ces caractéristiques. De plus, une condition limite de sortie est fonction du régime d'écoulement. Si l'écoulement est subsonique une pression peut être imposée en sortie, ce qui rejoint celle de la résolution de l'équation de Reynolds. En revanche si l'écoulement est supersonique, aucune condition de sortie ne peut être définie.

Dans le cas d'une butée aérodynamique, si la vitesse d'entraînement est supersonique, la vitesse en sortie est partiellement supersonique et subsonique. Alors, la pression est imposée à la pression atmosphérique uniquement dans la portion subsonique de la sortie. En entrée, la température et la pression sont imposées. Sur les parois, les vitesses sont connues, et la température est imposée si elles sont considérées comme isothermes.

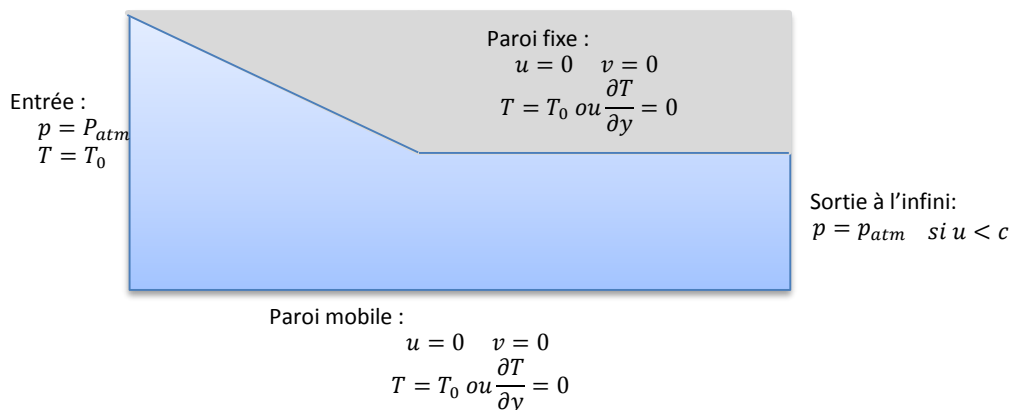


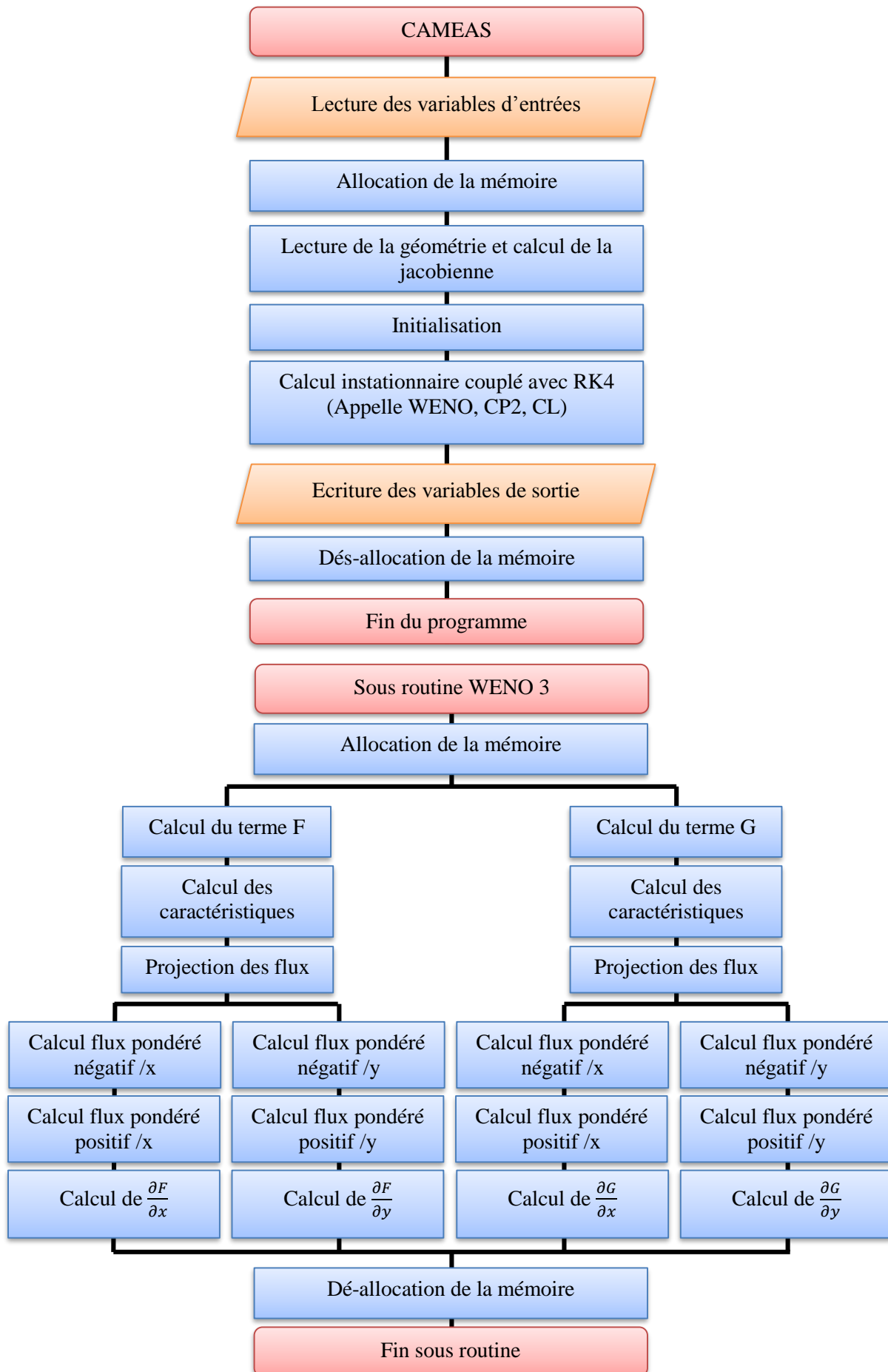
Figure 2-14 : Conditions limites utilisées dans CAMEAS.

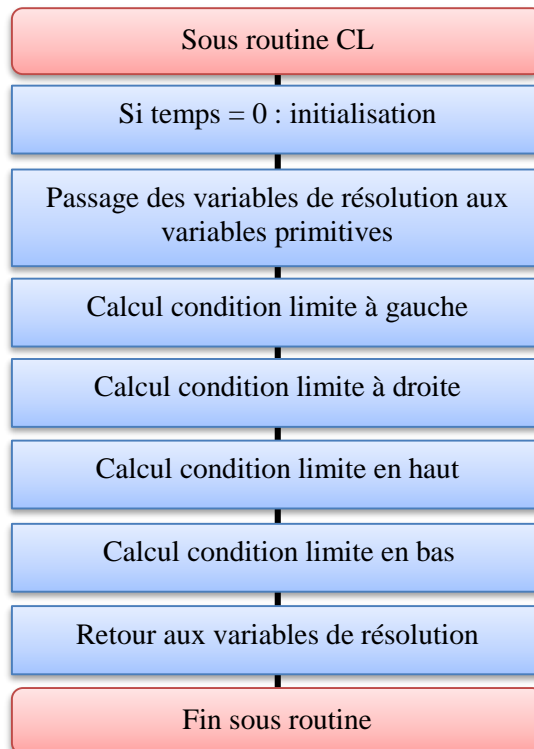
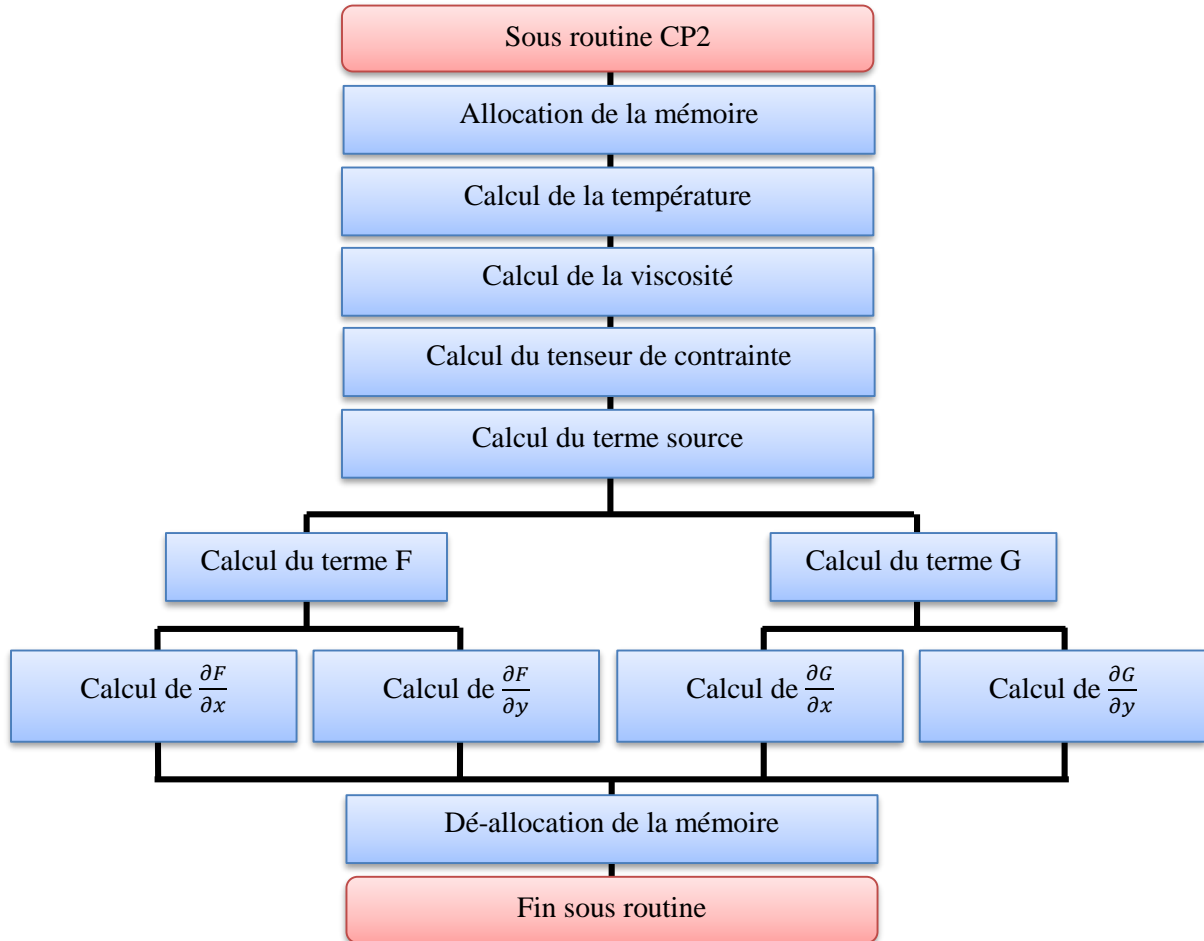
La condition initiale adimensionnée est composée des différentes conditions limites et est donnée par la relation suivante :

$$\begin{cases} \bar{p}(t = 0) = 1 \\ \bar{u}(t = 0) = 1 - y \\ \bar{v}(t = 0) = 0 \\ \bar{p}(t = 0) = \frac{p_{atm}}{\rho_0 u_0^2} \end{cases} \quad (2.2-31)$$

Le but de cette étude consiste à obtenir les grandes tendances visibles sur l'écoulement supersonique dans une butée aérodynamique, il est donc important de rechercher un état stabilisé. L'étude stationnaire étant délicate à cause des choix de schémas numériques, le temps de simulation est choisi comme très long pour atteindre un écoulement permanent. Un critère de convergence stipulant si l'écoulement est stabilisé sera explicité dans le chapitre suivant.

### 2.2.3.4 Organigramme du programme





## 2.2.4 Résultats : comparaison des deux méthodes

Dans ce paragraphe, la résolution des équations de Reynolds Modifiées va être comparée à celle des équations de Navier-Stokes adaptée aux films minces sur un même cas. Les remarques et les observations permettront de confirmer ou non les premières conclusions faites dans le paragraphe (2.1.4).

Le cas de calcul suivant correspond au cas (6) du tableau 2-2 avec la géométrie 1 du tableau 2-1. Les résultats obtenus avec la résolution des équations de Reynolds Modifiées montrent une diminution de la pression après le changement d'inclinaison. Le résultat obtenu avec CAMEAS montre cette même diminution de la pression, mais également un maximum de pression plus important. Il est intéressant de remarquer que la différence de maximum de pression correspond pratiquement à la différence de pression en sortie comme le montre la figure 2-15. Le maillage utilisé dans Navier-Stokes comporte 50 mailles dans les deux directions. Cette différence avec CERMAC vient du fait que les schémas utilisés dans CAMEAS sont plus précis et permettent d'obtenir les mêmes résultats avec un maillage moins raffiné.

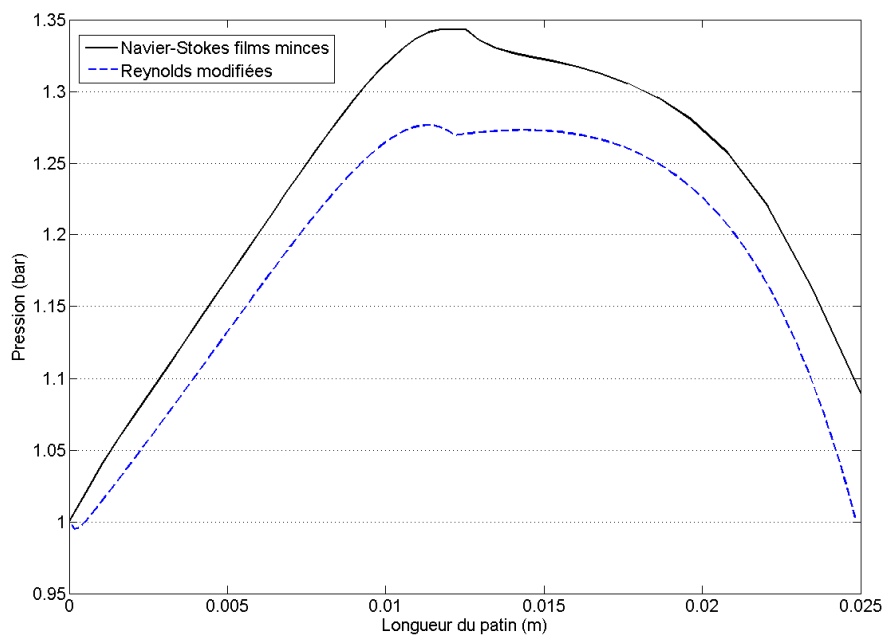


Figure 2-15 : Comparaison de CERMAC et de CAMEAS pour un même cas.

Trois remarques peuvent être faites sur les résultats. Premièrement, le profil de pression calcul par CERMAC est globalement inférieur à celui calculé par CAMEAS. L'amplitude de la différence entre les deux modèles est environ équivalente à la différence de pression observée en sortie de patin. Deuxièmement, la singularité observée sur le profil obtenu par CERMAC n'est pas présente sur le profil calculé par CAMEAS. Troisièmement, pour les deux modèles, une détente apparaît à la fin du convergent.

Ces résultats montrent qu'il est tout à fait possible que la pression imposée en sortie dans CERMAC soit trop restrictive pour décrire un écoulement supersonique et sous-estime la pression. Le fait d'avoir moyenné les termes d'inertie et d'avoir imposé un profil de vitesse peut aussi expliquer la présence de la singularité. En plus des difficultés à obtenir plus de résultats, il est possible de conclure que les équations de Reynolds Modifiées sont insuffisantes pour décrire

l'écoulement d'une butée en régime supersonique. Une solution possible serait de modifier la discrétisation des équations de Reynolds Modifiées pour qu'elle gère mieux les termes d'inertie. Il pourrait être intéressant de modifier la condition en sortie pour qu'elle s'adapte au régime supersonique. Ce genre de démarche a déjà été élaboré dans les travaux de Hashimoto et Wada [105] et Mori et Mori [106] qui ont modifié la condition limite d'entrée en pression pour convenir à certains cas particuliers.

Par ailleurs, la détente qui apparaît à la fin du convergent est un phénomène inédit pour une butée. Elle sera plus amplement étudiée dans le chapitre suivant afin de connaître ses propriétés ainsi que son influence sur le comportement de la butée.

---

## 2.2.5 Conclusion

Dans cette partie a été présenté le second modèle physique mis en place pour décrire le comportement du film d'air : les équations de Navier-Stokes adaptées aux films minces. Pour établir ce système, l'hypothèse de présence d'une onde de choc liée à la géométrie a été faite. Elle a ainsi remis en cause la propriété de pression constante dans l'épaisseur de film observée dans les équations de Reynolds. Ainsi les équations de Navier-Stokes ont été adimensionnées de la même manière que dans la lubrification, mais aucun terme n'a été négligé cette fois. Ce nouveau système possède deux grands avantages :

- Il conserve la forme classique des équations de Navier Stokes, ainsi les outils numériques adaptés à la capture de choc peuvent s'appliquer. Cependant la simulation doit être instationnaire car ces outils s'inversent difficilement.
- Le double adimensionnement permet de garder un nombre faible de points de maillage dans les deux directions. Le code peut ainsi traiter n'importe quelle échelle de géométrie.

Les deux méthodes sont comparées sur un cas d'écoulement supersonique. Le profil de pression calculé par CERMAC est globalement inférieur à celui calculé par CAMEAS, d'une amplitude équivalente à la différence de pression en sortie. La principale remarque est la présence d'une détente au niveau du changement d'inclinaison du patin qui va, dans le chapitre suivant, être étudiée plus en détail. Avec les difficultés rencontrées par CERMAC pour obtenir plus de résultats en supersonique et les différences constatées avec les résultats obtenus avec CAMEAS, il est possible de conclure raisonnablement que les équations de Reynolds Modifiées ne sont pas suffisantes pour décrire un écoulement supersonique dans une butée.





---

## Partie 3: Résultats

---

3.1.	Influence de la vitesse, de la température et de l'inertie	67
3.1.1	<i>Introduction</i>	67
3.1.2	<i>Influence de la vitesse et comparaison entre parois isolantes et parois isothermes</i>	68
3.1.3	<i>Influence de la température aux parois</i>	73
3.1.4	<i>Influence de l'inertie</i>	75
3.1.5	<i>Conclusions</i>	77
3.2.	Influence des différents paramètres géométriques	79
3.2.1	<i>Introduction</i>	79
3.2.2	<i>Influence de la charge au travers du rapport des hauteurs de film</i>	79
3.2.3	<i>Influence du rapport des longueurs d'adimensionnement <math>\epsilon</math></i>	81
3.2.4	<i>Limite de présence de choc</i>	84
3.2.5	<i>Conclusions</i>	87



## 3.1. Influence de la vitesse, de la température et de l'inertie

### 3.1.1 Introduction

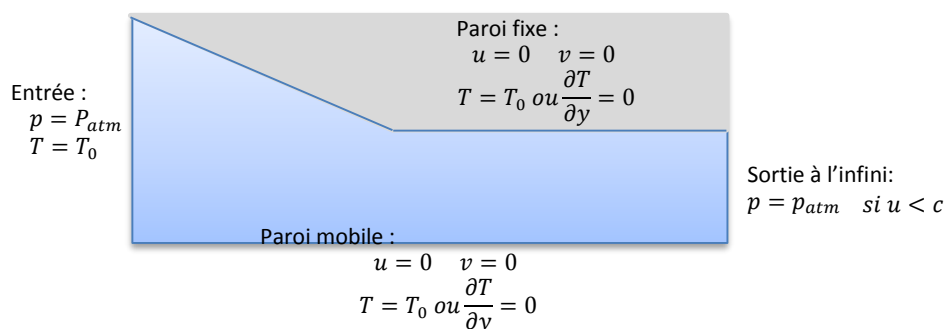
Pour déterminer le fonctionnement d'une butée aérodynamique en régime supersonique, l'influence de plusieurs paramètres va être étudiée. Ces paramètres peuvent être groupés en deux grandes familles : la première concerne les différentes variables (vitesse, température et inertie), et la seconde les paramètres géométriques du patin (le rapport des hauteurs de films et le rapport des longueurs d'adimensionnement).

Dans ce chapitre, l'influence des variables telles que la vitesse, la température et l'inertie sont étudiées sur une même géométrie. L'étude de l'influence de la vitesse sera menée pour trois conditions limites différentes en température aux parois. Ensuite, l'étude de l'influence de la température aux parois sera menée pour une vitesse donnée. Enfin, l'influence de l'inertie sera étudiée faisant suite à celle du paragraphe (2.1.4) pour des vitesses plus grandes.

Suite aux remarques faites dans le paragraphe (2.1.5) à savoir les difficultés à faire converger le code CERMACH pour des cas sévères, les résultats de ce chapitre seront obtenus uniquement à l'aide du code CAMEAS, résolvant les équations de Navier-Stokes adaptées aux films minces. Les simulations sont menées sur un temps long ( $\approx 10s$ ) afin d'obtenir un écoulement permanent. Un critère dépendant de la pression  $p^{(n)}$  à l'instant ( $n$ ), permet d'arrêter la simulation lorsque l'état permanent est atteint.

$$\int_0^L p^{(n)} dx - \int_0^L p^{(n-1)} dx < 10^{-5} \quad (3.1-1)$$

Les conditions limites utilisées dans le code CAMEAS sont rappelées dans la figure 3-1.



**Figure 3-1 :** Conditions limites utilisées par le code CAMEAS.

Le schéma WENO3 utilise deux points avant et après le point courant pour calculer la dérivée spatiale du flux et n'a pas d'écriture particulière à la limite du domaine. Il est donc nécessaire de mettre en place des points fantômes qui nécessitent des conditions limites adaptées. Pour les parois, des conditions limites de type « miroir » sont utilisées, et sont définies par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{i-1} = \rho_{i+1} \\ u_{i-1} = u_{i+1} \\ v_{i-1} = -v_{i+1} \\ p_{i-1} = p_{i+1} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_{i-2} = \rho_{i+2} \\ u_{i-2} = u_{i+2} \\ v_{i-2} = -v_{i+2} \\ p_{i-2} = p_{i+2} \end{array} \right. \quad (3.1-2)$$

Pour l'entrée et la sortie du domaine les variables sont extrapolées à partir des points du domaine, ou simplement imposées. Il a été constaté numériquement qu'imposer la pression atmosphérique au point limite de la sortie subsonique peut induire des erreurs numériques. Pour pallier ce problème, il est possible d'imposer la pression atmosphérique uniquement dans les points fantômes de la sortie subsonique, simulant ainsi une condition à l'infini. Les résultats des calculs contenus dans ce chapitre pourront également être analysés au travers de la charge ou de la puissance dissipée (linéiques), calculées à l'aide des relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} w = \int_0^L p dx \quad (\text{en } N.m^{-1}) \\ p_w = u_0 \int_0^L \frac{1}{h} \int_0^h \mu \frac{\partial u}{\partial y} dy dx \quad (\text{en } W.m^{-1}) \end{array} \right. \quad (3.1-3)$$

### 3.1.2 Influence de la vitesse et comparaison entre parois isolantes et parois isothermes

La première étude consiste à étudier l'influence de la vitesse sur le comportement du film d'air pour une géométrie décrite dans le tableau 3-1.

Longueur rampe	Longueur totale	Hauteur entrée	Hauteur sortie
20 mm	40 mm	100 $\mu\text{m}$	50 $\mu\text{m}$

Vitesse (m/s)	200	400	500	600	800	1000
---------------	-----	-----	-----	-----	-----	------

**Tableau 3-1** : Géométrie et gamme de vitesse utilisées pour l'étude de l'influence de la vitesse.

Les simulations seront faites pour trois conditions limites en température aux parois : adiabatique, isotherme à 0°C, et isotherme à 80 °C. Les parois à 0°C représentent un cas industriel idéalisé, où ces dernières sont très refroidies afin de limiter l'augmentation de température et les déformations thermoélastiques. L'exemple de parois à une température de 80°C est un cas plus réaliste de température machine.

Dans chaque cas, l'écoulement ne présente pas de choc, la pression calculée est constante dans l'épaisseur du film, donc les résultats seront étudiés grâce au profil de pression. Pour des parois isolantes, les résultats sont donnés dans la figure 3-2.

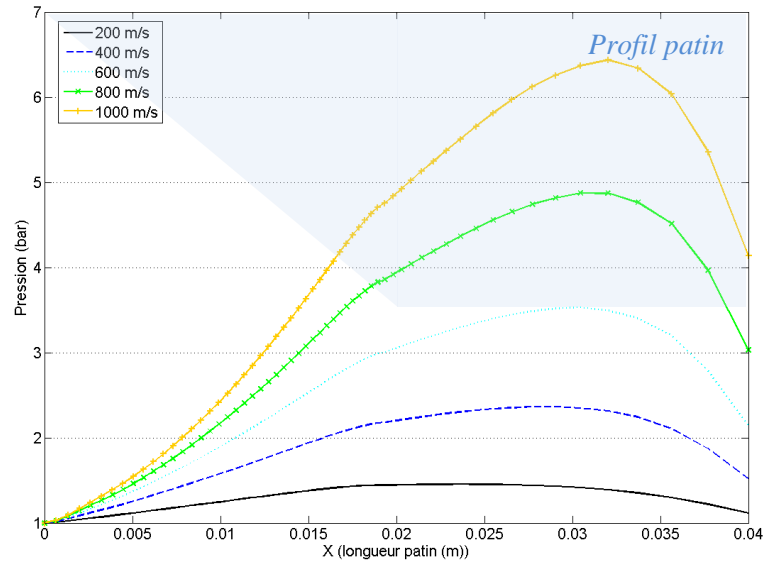


Figure 3-2 : Influence de la vitesse sur le profil de pression avec parois isolantes.

Ces résultats montrent que la pression augmente avec la vitesse et ceci est principalement dû à l'augmentation de la contrainte de cisaillement. Le passage du régime subsonique à supersonique ne semble pas avoir d'influence, à l'exception d'une légère diminution de la compression au niveau du changement d'inclinaison. Les températures atteintes sont très élevées comme le montre la figure 3-3.

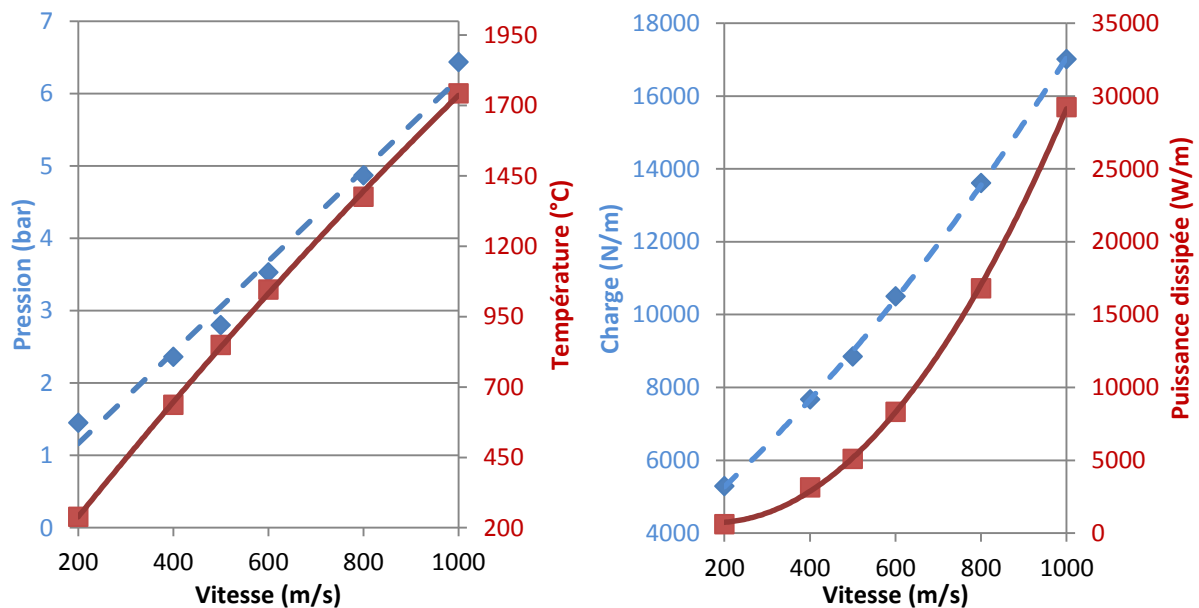
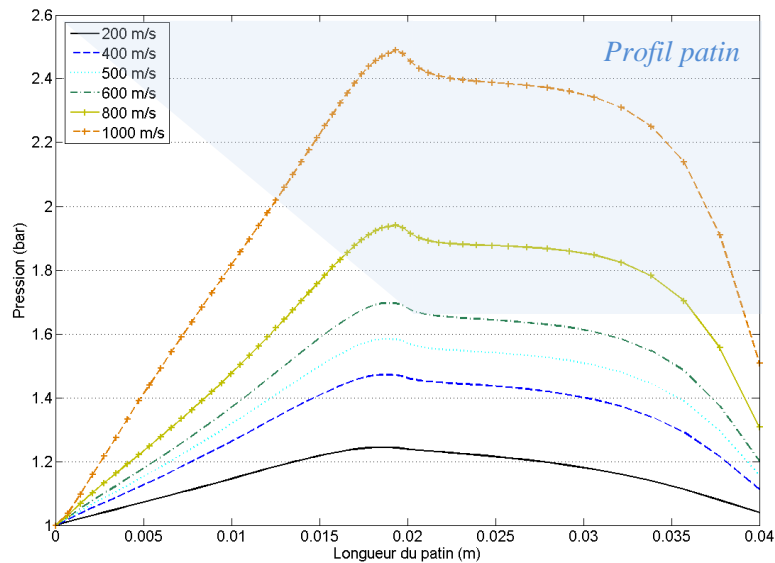


Figure 3-3 : Maximums de température/pression et charge/puissance dissipée en fonction de la vitesse avec les parois adiabatiques.

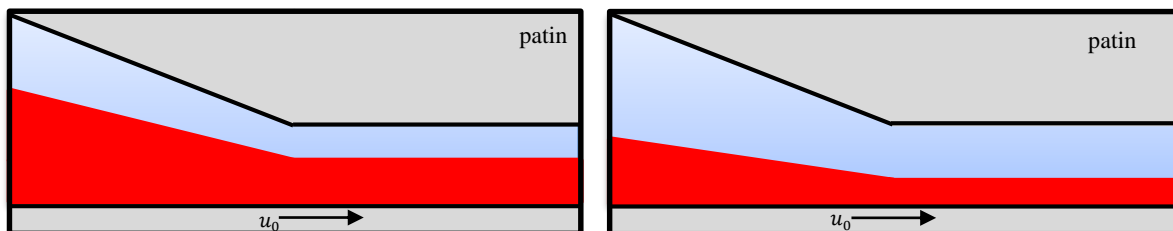
Le maximum de température peut dépasser les 1600°C, ce qui est très élevé par rapport à celui mesuré en machine (environ 200°C pour une vitesse linéaire proche de 400 m/s et un film inférieur à 10  $\mu\text{m}$ ). Des températures si élevées diminuent fortement le nombre de Mach, limitant par conséquent la possibilité à l'écoulement d'être en régime supersonique, et de contenir des phénomènes (détentes ou chocs). La puissance dissipée augmente avec la température et la pression mais ses valeurs sont très élevées. Cependant la tendance polynomiale suivie par la puissance dissipée sera à comparer avec les prochains résultats.

Une simulation a été effectuée avec des parois à 0°C. Il s'agit, dans une étude phénoménologique, d'un cas favorable à l'apparition des chocs et des détentes. En effet l'élévation de température est faible et laisse la possibilité à l'écoulement d'être en régime supersonique. Les profils de pression obtenus sont donnés dans la figure 3-4.



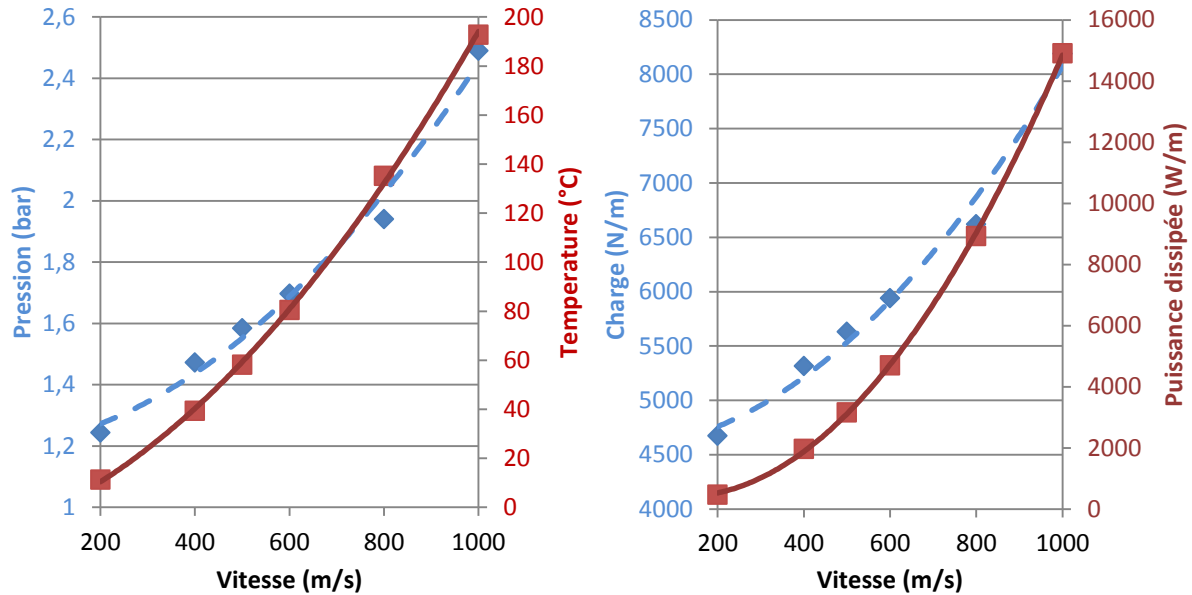
**Figure 3-4 :** Influence de la vitesse sur le profil de pression avec parois isothermes à 0°C.

Les résultats montrent la présence d'un phénomène analogue à celui observé dans les résultats du paragraphe (2.1.4), à savoir une diminution de la pression au niveau du changement d'inclinaison du patin en régime supersonique. Cette détente apparaît car la partie supersonique de l'écoulement est déviée et son amplitude augmente avec la vitesse. À 1000 m/s, l'amplitude générale du profil de pression est beaucoup plus importante que celle obtenue à des vitesses inférieures. Cette différence vient du fait qu'à 1000 m/s la partie supersonique de l'écoulement en entrée se trouve sur une hauteur supérieure à l'épaisseur minimale de film, et donc est dévié plus fortement au niveau du convergent modifiant la vitesse de compression dans le film comme le montre la figure 3-5.



**Figure 3-5 :** Proportion d'un écoulement à 1000 m/s à gauche et à 500 m/s à droite.

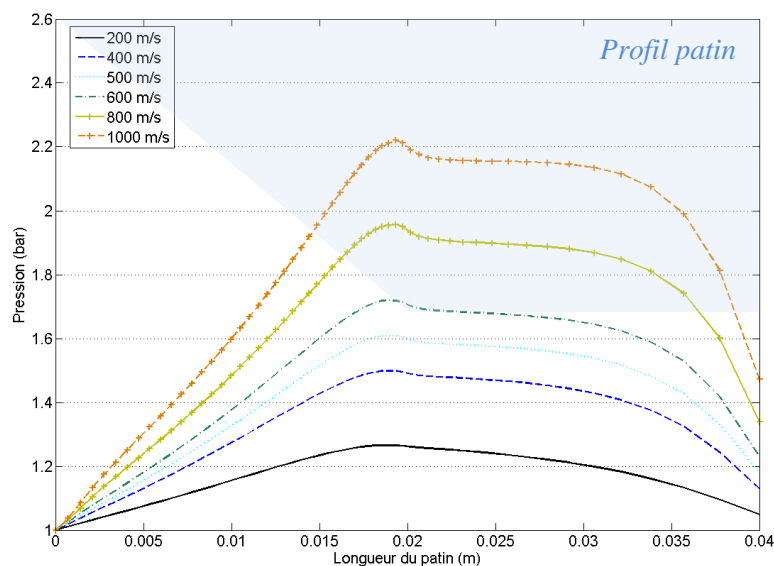
Contrairement au cas décrit dans la figure 2-9, un choc n'apparaît pas à l'entrée du patin. La figure 3-6 montre les résultats obtenus en termes de maximums de température et de pression ainsi que le calcul de la charge et de la puissance dissipée.



**Figure 3-6 :** Maximums de température/pression et charge/puissance dissipée en fonction de la vitesse avec les parois isothermes à 0°C.

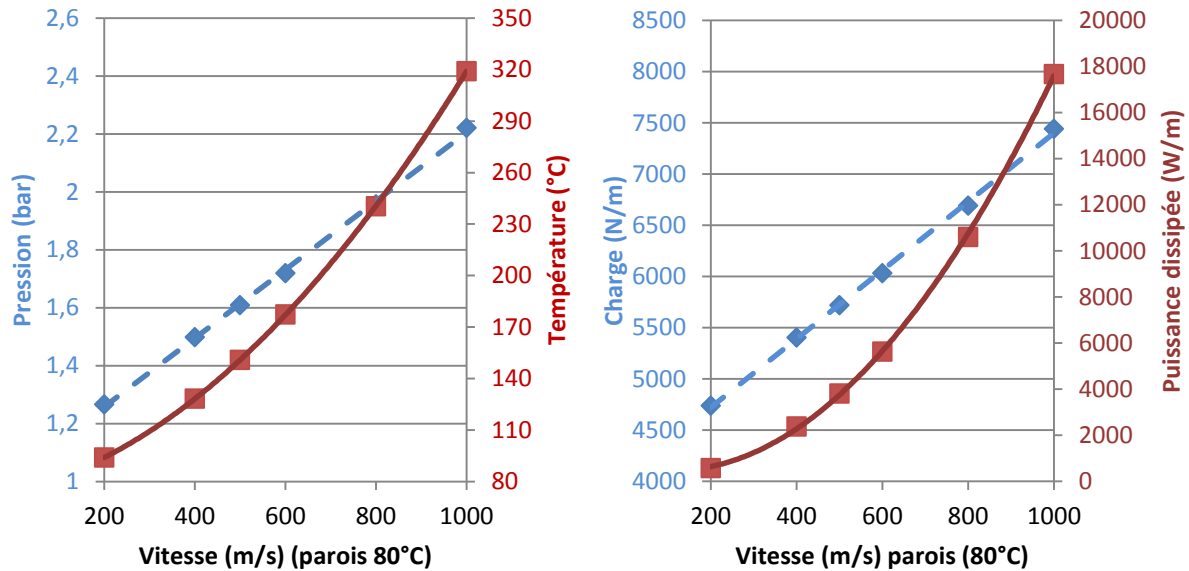
Les tendances observées dans le cas adiabatique pour les maximums de pression (si le cas 1000 m/s est exclu), pour la puissance dissipée et pour la charge se retrouvent dans le cas isotherme. En revanche la croissance de la température, qui est linéaire en condition adiabatique, suit une loi polynomiale en condition isotherme du fait du confinement entre deux parois. De plus, l'ordre de grandeur des valeurs est différent du cas adiabatique, et beaucoup plus proche de celui pouvant être mesuré sur machine. Par ailleurs, les résultats montrent que la présence (cas isotherme) ou l'absence (cas adiabatique) de la détente ne change pas les tendances suivies par la capacité de charge et la puissance dissipée de la butée. Le fonctionnement global de la butée reste inchangé en présence d'un écoulement supersonique.

Une autre simulation va maintenant être analysée, proche des températures mesurées en machines, c'est-à-dire avec des parois isothermes à 80°C. Les profils de pression obtenus sont donnés dans la figure 3-7.



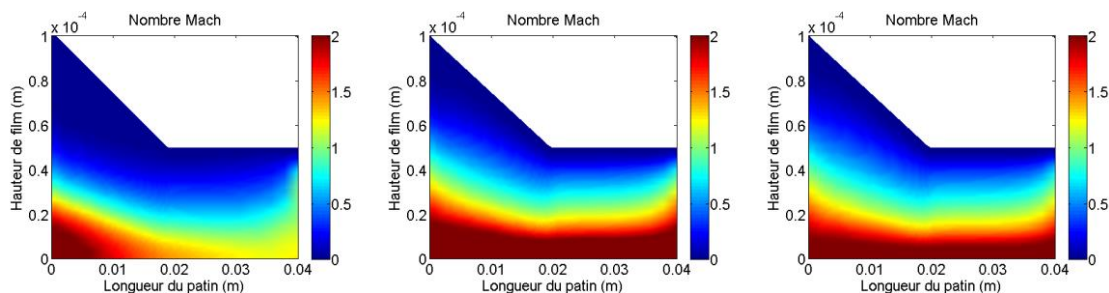
**Figure 3-7 :** Influence de la vitesse sur le profil de pression avec parois isothermes à 80 °C.

Les résultats montrent que les profils de pression pour les vitesses de 200  $m/s$  à 800  $m/s$  sont identiques aux cas précédents. En revanche, pour le cas à 1000  $m/s$  le profil de pression ici est plus faible que celui du cas à 0°C. Cette différence provient de la part supersonique de l'écoulement qui est moins importante que dans le cas précédent (cf. figure 3-5). Les tracés des maximums de pression et de température, ainsi que la puissance dissipée et la charge sont donnés dans la figure 3-8.



**Figure 3-8 :** Maximums de température/pression et charge/puissance dissipée en fonction de la vitesse avec les parois isothermes à 80°C.

Les tendances observées pour chacune des variables sont les mêmes que celles obtenues dans les cas précédents (si le cas 1000  $m/s$  est exclu). La croissance linéaire de la pression et celle de la charge viennent de l'augmentation de la contrainte pariétale qui est une fonction linéaire de la vitesse. Le fait d'échauffer les parois ne change presque pas les profils de pression et la charge, mais change de façon significative la puissance dissipée à cause de l'échauffement de l'air et donc de l'augmentation de sa viscosité. Enfin pour montrer que la présence de la détente est directement liée dans le cas présent à la génération de chaleur, le champ du nombre de Mach est comparé pour chaque cas à la vitesse de 800  $m/s$  dans la Figure 3-9.



**Figure 3-9 :** Champ du nombre de Mach dans le cas adiabatique à gauche, parois à 0°C au centre et parois à 80°C à droite pour une vitesse de 800  $m/s$ .

Les résultats montrent que pour le cas adiabatique la partie supersonique ne se trouve qu'à l'entrée du patin et n'atteint pas le changement d'inclinaison, ce qui explique l'absence de la détente. L'écoulement est tellement chaud qu'il est subsonique partout à l'exception de



l'entrée et de la surface du rotor et il n'est que très peu sensible à la déviation. En revanche cela explique la présence d'une légère diminution de la compression observée dans la figure 3-2. Dans les deux cas isothermes, le champ du nombre de Mach présente une partie supersonique sur toute la longueur du rotor qui est déviée au niveau du changement d'inclinaison créant ainsi la détente. Lorsque la paroi est plus chaude, le champ de Mach est globalement plus faible jouant ainsi sur l'amplitude de la détente.

En conclusion, la vitesse joue un rôle sur l'amplitude de la détente, mais la condition limite en température aux parois est prédominant sur le comportement de l'écoulement, puisqu'elle détermine pour une même vitesse la présence ou l'absence de la détente. L'étude de l'influence de la température des parois va maintenant être menée.

### 3.1.3 Influence de la température aux parois

Le paragraphe précédent a montré l'importance de la température sur le comportement de l'écoulement. Son influence va être étudiée pour une géométrie et une vitesse donnée. Il s'agira de comprendre si des températures très basses font apparaître plus de phénomènes dans le patin ou si, au contraire, des températures très élevées peuvent faire disparaître la détente, et de déterminer l'influence de la température sur l'amplitude de la détente. La géométrie et la gamme de température sont données dans le tableau 3-2.

Longueur rampe	Longueur totale	Hauteur entrée	Hauteur sortie	Vitesse
20 mm	40 mm	100 $\mu\text{m}$	50 $\mu\text{m}$	500 m/s

Température parois ( $^{\circ}\text{C}$ )	0	20	40	60	80	100	500	1000
---	---	----	----	----	----	-----	-----	------

Tableau 3-2 : Géométrie et gamme de températures utilisées pour l'étude de l'influence de la température.

Les résultats de l'influence de la température pour des valeurs aux parois allant de  $0^{\circ}\text{C}$  à  $100^{\circ}\text{C}$  sur le profil de pression sont donnés dans la figure 3-10.

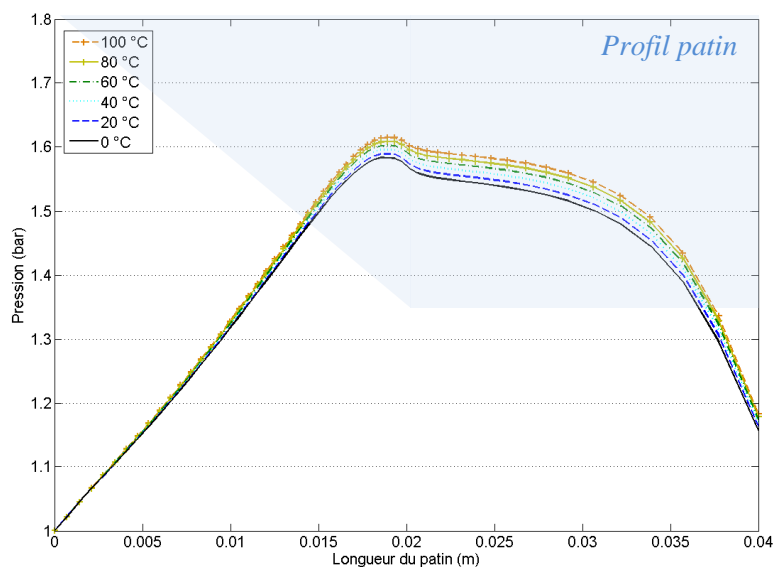
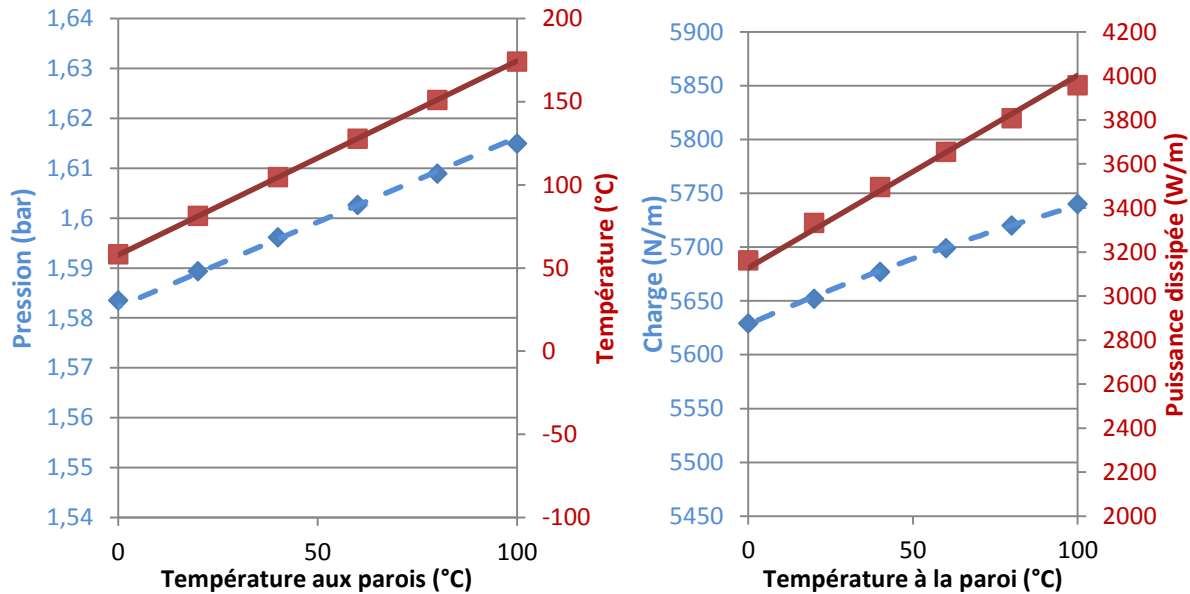


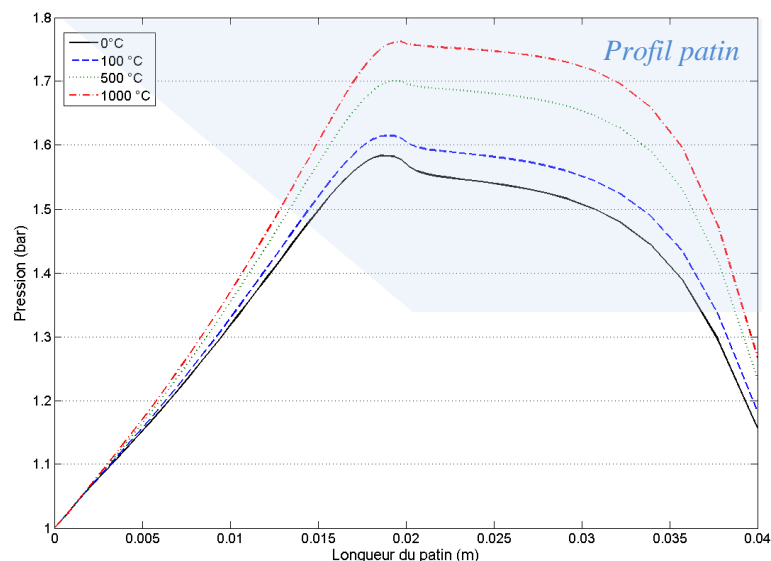
Figure 3-10 : Etude de l'influence de la température sur le profil de pression.

Plusieurs remarques peuvent être faites sur ces résultats. Premièrement, quelle que soit la température aux parois dans cette gamme, la détente est toujours présente. Deuxièmement, l'amplitude de la détente diminue de moitié avec l'augmentation de la température aux parois de 0°C à 100°C. En effet, une ambiance plus froide diminue la vitesse du son, ce qui a pour effet d'augmenter la part supersonique de l'écoulement. La figure 3-11 montre les maximums de pression et de température ainsi que la charge et de la puissance dissipée.



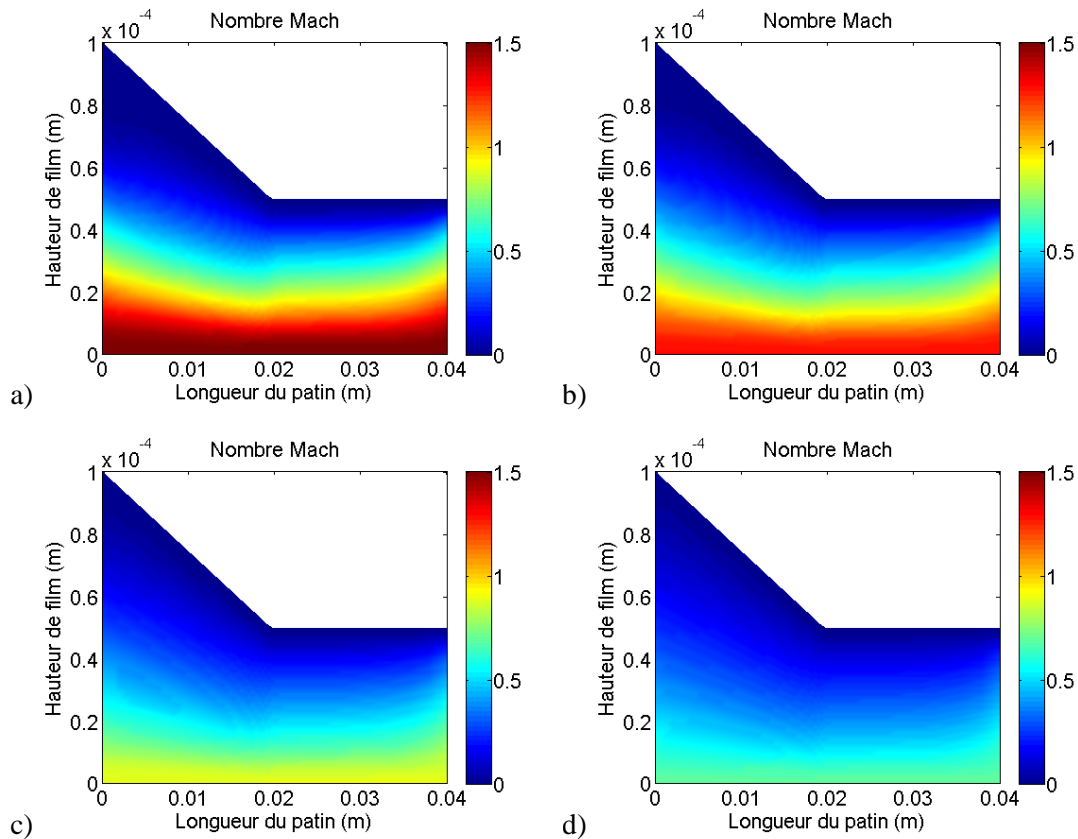
**Figure 3-11 :** *Maximums de température/pression à gauche et charge/puissance dissipée en fonction de la température sur la gamme -100°C à 100°C.*

Les maximums de pression, de température et la puissance dissipée augmentent linéairement en fonction de la température aux parois, mais la capacité de charge croît plus lentement. Ceci s'explique par la diminution de l'amplitude de la détente avec l'augmentation de la température. La détente modifie légèrement le comportement de la butée à température très basse. Les deux derniers cas, présentés dans la figure 3-12, sont pour une température aux parois très élevée (500°C et 1000°C) et seront comparés aux cas de 0°C et 100°C.



**Figure 3-12 :** *Influence des hautes températures aux parois sur le champ de pression.*

Les résultats montrent que lorsque l'environnement est très chaud, la détente n'apparaît plus et que le profil de pression reprend une forme semblable à des cas subsoniques. Les résultats pour ces quatre températures sont donnés en nombre de Mach en figure 3-13, avec la partie supersonique se trouvant dans les tons orangés. Elle diminue sensiblement lorsque la température aux parois augmente. Pour les cas à 500°C et à 1000°C, l'écoulement est totalement subsonique et suit la déviation induite par le convergent sans créer de détente.



**Figure 3-13 :** Influence des hautes températures sur le nombre de Mach, a) 0°C, b) 100°C, c) 500°C, d) 1000°C.

La température joue un rôle très important sur le comportement d'un écoulement supersonique dans une butée. L'augmentation de la température implique une diminution de l'amplitude de la détente mais augmente globalement le champ de pression. Si les températures sont trop élevées la détente disparaît, et si elles sont très basses elles n'impliquent pas de phénomènes supplémentaires. Ces conclusions confortent le choix de faire des simulations avec des parois à 0°C pour étudier l'influence de la détente sur le comportement globale du film d'air.

### 3.1.4 Influence de l'inertie

Dans la continuité de l'étude menée avec le code CERMAC, l'influence de l'inertie à de plus grandes vitesses va maintenant être recherchée. Pour cela, la démarche du paragraphe (2.1.4) va être reprise. Les simulations sont menées sur une même géométrie à nombre de compressibilité fixé à 5. Les hauteurs d'entrée et de sortie sont adaptées à chaque vitesse pour que ce nombre reste constant et sont données dans le tableau 3-3 et les résultats en profil de pression sont donnés dans la figure 3-14.

Longueur rampe	Longueur totale	Rapport H1/H2	Nombre compressibilité
20 mm	40 mm	1.5	5

Vitesse donnée (m/s)	Hauteur entrée ( $\mu\text{m}$ )	Hauteur sortie ( $\mu\text{m}$ )
100	42.75	28.5
200	60.4	40.3
300	75.95	49.3
400	85.4	56.9
500	95.5	63.7
600	104.6	69.7
800	120.8	80.5
1000	135.1	90.0

Tableau 3-3 : Géométrie et gamme de vitesse utilisée pour l'étude de l'influence de l'inertie.

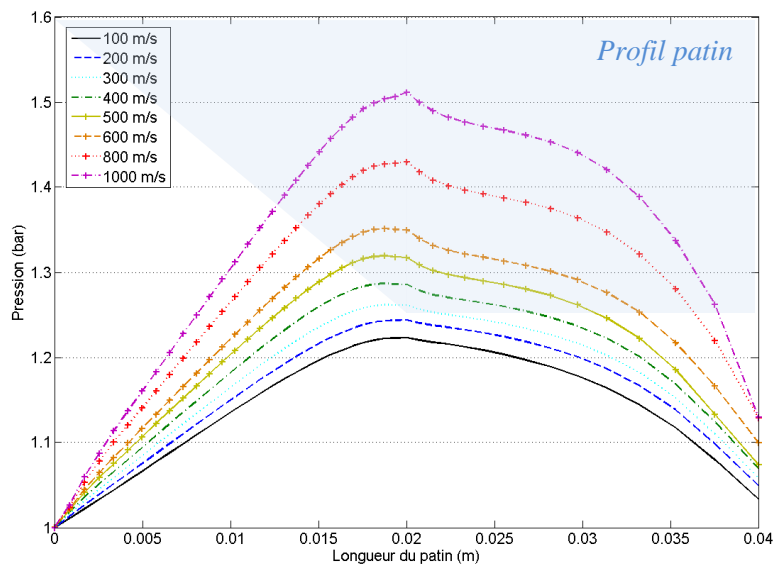
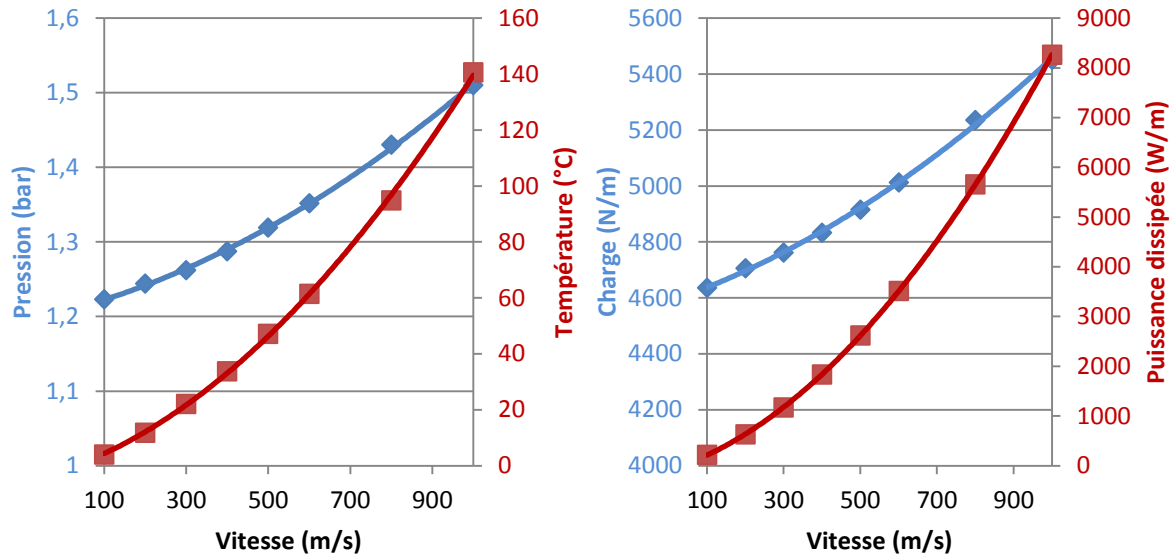


Figure 3-14 : Influence de l'inertie sur le profil de pression avec des parois isothermes à 0°C.

Comme pour les résultats de CERMAC (cf. figure 2-7), les profils de pression sont tous distincts et augmentent avec la vitesse. L'inertie joue un rôle peu important dans la partie subsonique en augmentant la pression d'environ 5%, ce qui a également été constaté dans la littérature ([70], [67] et [59]). Cependant à partir de 400 m/s sa contribution devient de plus en plus importante et elle est à l'origine de la détente. Lorsque la vitesse atteint 1000 m/s, le profil de pression augmente globalement de 25% par rapport au profil non inertiel (figure 2-5). Un léger pic de pression peut être remarqué à 20 mm (changement d'inclinaison) en particulier pour les grandes vitesses. Les termes non linéaires peuvent être difficiles à gérer lorsque leur amplitude est importante et si la pente du patin est sévère. Ce pic a cependant peu d'influence et son amplitude est faible par rapport à la tendance générale du profil de pression. L'influence de l'inertie sur les maximums de pression et de température et le calcul de la puissance dissipée et de la charge sont donnés dans la figure 3-15.



**Figure 3-15 :** Influence de l'inertie sur les maximums de pression et de température et sur la puissance dissipée et la charge en fonction de l'inertie.

Les tendances suivies par chacune des variables est une loi polynomiale d'ordre 2. Ceci se justifie par la contribution des termes d'inertie qui est de l'ordre d'une vitesse au carré. Le régime supersonique n'a en revanche pas d'influence sur les tendances, aucun changement de pente n'est à noter entre 200  $m/s$  et 500  $m/s$  par exemple.

L'augmentation de la vitesse amenant le fluide à un régime supersonique donne naissance à une détente au niveau du changement d'inclinaison du patin. L'inertie est donc bien à l'origine de la détente. Cependant la présence de la détente ne change pas fondamentalement le comportement de la butée en régime supersonique.

### 3.1.5 Conclusions

Afin de mieux appréhender le comportement d'une butée aérodynamique en régime supersonique, l'étude de la vitesse, de la température et de l'inertie a été menée dans ce paragraphe.

L'étude de l'influence de la vitesse s'étend sur une gamme allant de 200  $m/s$  jusqu'à 1000  $m/s$  et avec trois différentes conditions limites en température aux parois : isolantes, isothermes à 0°C et isothermes à 80°C. Les résultats montrent que le profil de pression et la charge augmentent linéairement avec la vitesse à cause de l'augmentation de la contrainte de cisaillement, mais que la température et la puissance dissipée ont une croissance polynomiale. La plus grande différence entre les trois conditions limites est la présence d'une détente lorsque les parois sont isothermes et l'absence de celle-ci lorsque les parois sont adiabatiques. Cette différence est liée aux températures qui sont beaucoup trop élevées lorsque les parois ne sont pas suffisamment refroidies, forçant l'écoulement à être subsonique. C'est pourquoi la condition de parois isothermes a été retenue pour la suite de ce travail afin d'analyser les situations de choc/détentes.

L'étude de différentes températures aux parois montre une faible différence sur le profil de pression global, de l'ordre de 10% sur la plage de 0°C à 100°C. En revanche, l'augmentation de la température diminue sensiblement l'amplitude de la détente jusqu'à, pour des cas très

chauds, faire disparaître la détente. En effet, le nombre de Mach diminue tellement dans un environnement chaud que l'écoulement devient subsonique. Donc pour la suite de ce travail les parois seront fixées à 0°C, parce qu'elles favorisent l'apparition de la détente et représentent un cas idéalisé.

L'étude de l'influence de l'inertie apporte deux conclusions. Ce sont les termes d'inertie qui sont à l'origine de la détente puisque celle-ci apparaît dès que la vitesse d'entraînement est supersonique. L'inertie a également une influence sur la pression, la température, la charge et la puissance dissipée qui suit une loi polynomiale d'ordre 2 justifiée par la nature des termes dans les équations représentatives. La contribution de l'inertie est donc faible en subsonique (de l'ordre de 5% d'augmentation du profil de pression par rapport au cas non inertiel) et devient très importante en supersonique (environ 25% d'augmentation de la pression à 1000 m/s). De plus, le régime supersonique ne change pas fondamentalement le comportement de la butée, même en présence d'une détente.

Les simulations numériques faites dans ce paragraphe ont montré l'influence des variables telles que la température et la vitesse sur le comportement du film d'air. Le paragraphe suivant traitera de la variation des paramètres géométriques, plus particulièrement le rapport des hauteurs (entrée/sortie). Par ailleurs le cas décrit dans la figure 2-9, qui a conduit à l'établissement des équations de Navier Stokes adaptées aux films minces, montrait la possible présence d'un choc dans le double profil, ce qui n'a pas été rencontré jusque-là. Afin de déterminer la configuration permettant l'apparition d'un choc, un second paramètre géométrique a été étudié, à savoir le rapport des longueurs d'adimensionnement représenté par  $\varepsilon$ .

## 3.2. Influence des différents paramètres géométriques

### 3.2.1 Introduction

Dans un premier temps, l'influence de la forme du convergent sur la détente va être étudiée au travers du rapport des hauteurs. Cet aspect est important pour les industriels car il influe directement sur les performances de la butée.

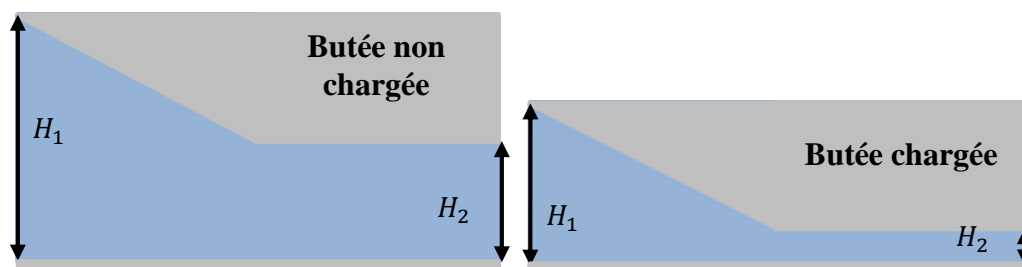
Dans les résultats du paragraphe (3.1), aucun choc n'a été rencontré. Or, selon la théorie de la mécanique des fluides, un écoulement supersonique dévié vers un convergent crée un choc. Pour tenter de comprendre la raison de l'absence de ce choc, une étude du rapport géométrique  $\varepsilon$  va être menée.

De manière générale, les chocs ont déjà nécessité des designs spécifiques liés à l'augmentation locale des contraintes. La recherche de choc dans une butée à feuille, qui est une structure souple, est nécessaire avant toute tentative de design.

Les résultats montrent une transition entre une configuration contenant un choc et une autre n'en possédant pas et ce, pour une valeur de  $\varepsilon$  précise. Par la suite, une recherche de cette limite en termes de  $\varepsilon$  a été menée pour plusieurs vitesses.

### 3.2.2 Influence de la charge au travers du rapport des hauteurs de film

Les performances de la butée se définissent généralement par la capacité de charge et la puissance dissipée. Une étude intéressante consiste à analyser le comportement de la butée lorsque la charge augmente pour un même patin et une même vitesse. Pour simuler cette augmentation, il faut faire varier le rapport des hauteurs  $H_1/H_2$ , tout en conservant la même différence des hauteurs comme le montre le schéma suivant.



**Figure 3-16** : Illustration d'une butée non chargée et d'une butée chargée pour une même géométrie de patin.

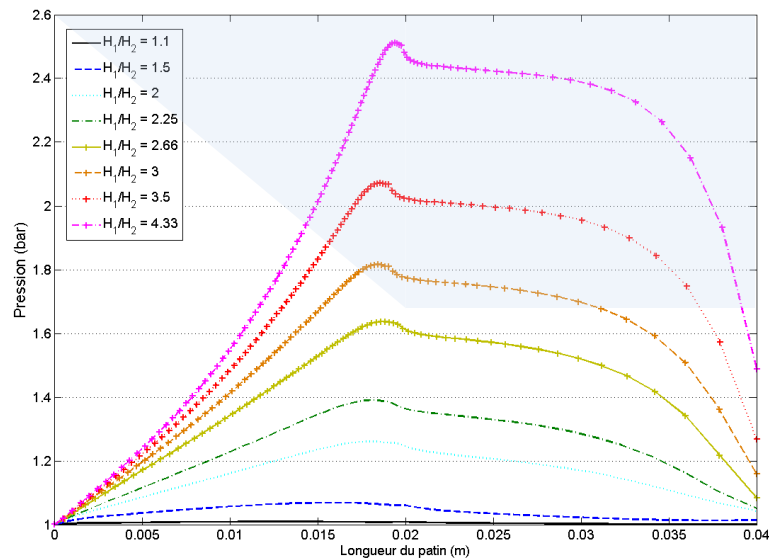
La géométrie, la vitesse et la gamme de hauteurs étudiées sont données dans le tableau 3-4. Selon Boncompain [107], le rapport des hauteurs ne doit pas excéder 4 car des problèmes ont été constatés sur les conditions limites en température à l'entrée. Ici comme la résolution se base sur un autre système d'équations, des valeurs supérieures à 4 vont être étudiées pour voir si

ces constatations sont identiques ici. Les profils de pression obtenus sont donnés dans la figure 3-17.

Longueur rampe	Longueur totale	H1-H2	Vitesse
20 mm	40 mm	100 $\mu\text{m}$	500 m/s

Hauteur entrée ( $\mu\text{m}$ )	Hauteur sortie ( $\mu\text{m}$ )	H1/H2
130	30	4.33
140	40	3.5
150	50	3
160	60	2.66
180	80	2.25
200	100	2
300	200	1.5
1100	1000	1.1

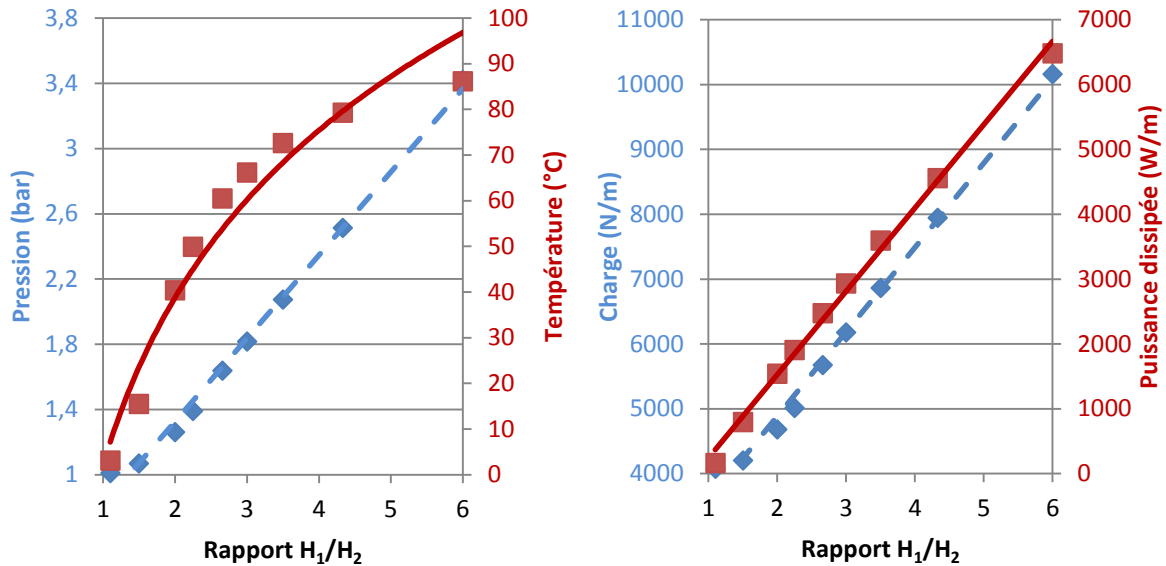
**Tableau 3-4 :** Géométrie et gamme de hauteurs utilisées pour l'étude de l'influence de la charge.



**Figure 3-17 :** Influence de la charge (rapport  $H_1/H_2$ ) sur le profil de pression.

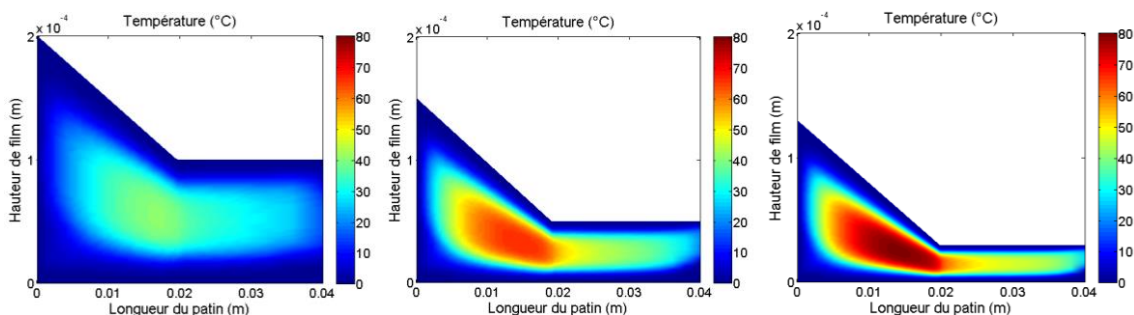
Les résultats montrent que la pression augmente avec la charge. Lorsque celle-ci est faible, le rapport des hauteurs tend vers 1, la géométrie se rapproche de celle d'un patin plan et l'écoulement se rapproche d'un écoulement dit de « Couette ». Plus l'angle  $\theta$  de la géométrie devient petit (cf. figure 4-6), plus la charge augmente plus la déviation pariétale se « rapproche » de la partie supersonique de l'écoulement et plus la détente sera importante (cf. figure 3-19). Les maximums de pression et de température ainsi que la puissance dissipée et la charge sont donnés dans la figure 3-18.





**Figure 3-18 :** Maximums de pression/température et charge/puissance dissipée de l'étude de l'influence de la charge.

Les maximums de température augmentent selon une tendance logarithmique avec l'augmentation de la charge car l'écoulement est de plus en plus confiné entre deux parois isothermes et ne peut s'échauffer indéfiniment comme le montre la figure 3-19. Les maximums de pression suivent une tendance quasi-linéaire. Pour les cas les plus chargés les résultats suivent les mêmes tendances, la remarque de Boncompain ne semble pas s'appliquer ici.



**Figure 3-19 :** Champ de température pour trois rapports de hauteurs : 2 à gauche, 3 au centre et 4.33 à droite.

Encore une fois, aucun choc n'a été constaté, même pour des cas où le patin est très chargé. La prochaine étude sur l'influence du facteur  $\varepsilon$  va tenter d'expliquer la raison de l'absence du choc.

### 3.2.3 Influence du rapport des longueurs d'adimensionnement $\varepsilon$

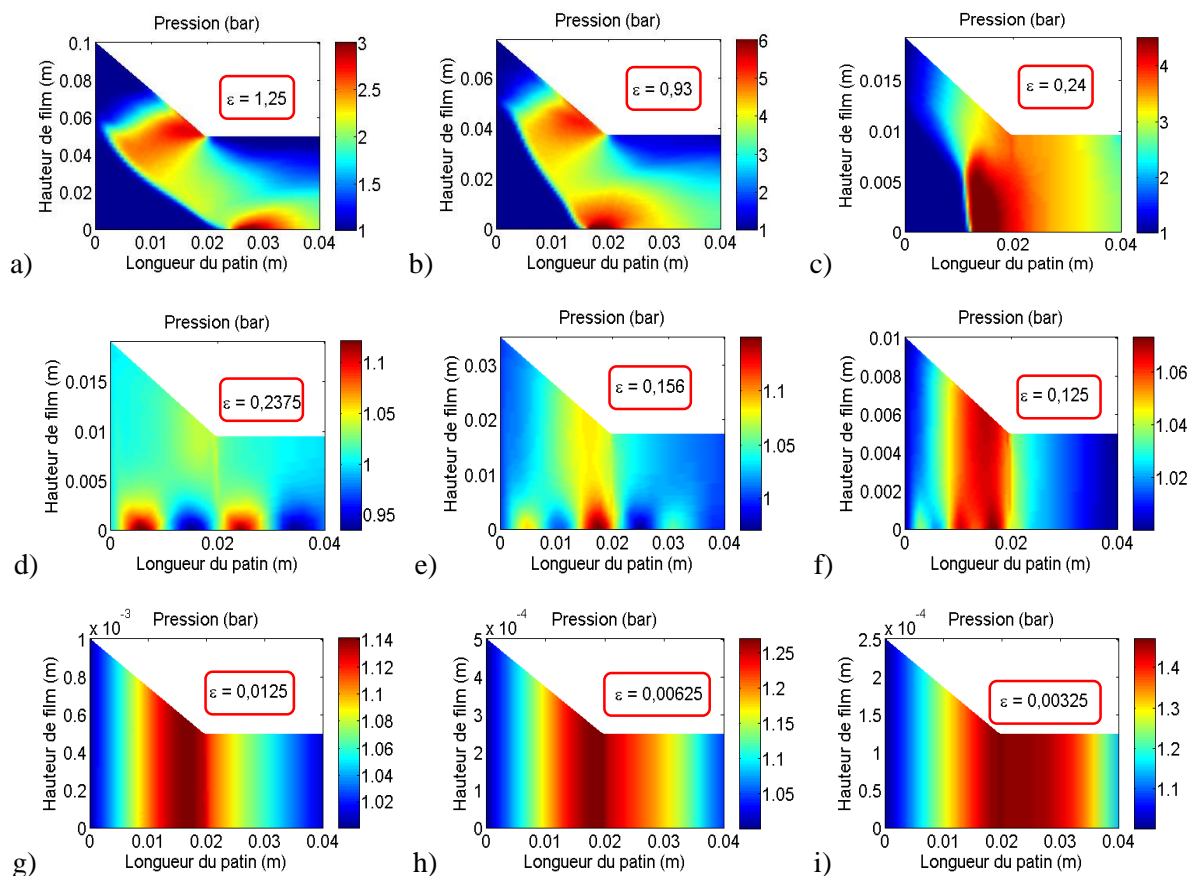
Le facteur géométrique  $\varepsilon$  est le rapport entre des deux longueurs d'adimensionnement, à savoir  $H$  pour la hauteur minimale de film et  $L$  la longueur totale du patin. Il s'agit du coefficient pondérant de nombreux termes des équations de Navier-Stokes pour les adapter à la géométrie des films minces. L'étude consiste à identifier l'influence de  $\varepsilon$  sur une géométrie donnée de double profil. Pour cela, la longueur de la rampe, celle du patin, et la vitesse sont fixées et données dans le tableau 3-5. Les hauteurs d'entrée et de sortie seront calculées afin de

conserver toujours un même rapport de hauteur ( $H_1/H_2$ ) et donc une même forme de convergent par homothétie. Les valeurs de  $\varepsilon$  iront de 1,25 à  $3,25 \cdot 10^{-4}$  (cf. tableau 3-6). Les champs de pression calculés sont donnés dans la figure 3-20.

Longueur rampe	Longueur totale	H1/H2	Vitesse
20 mm	40 mm	2	700 m/s

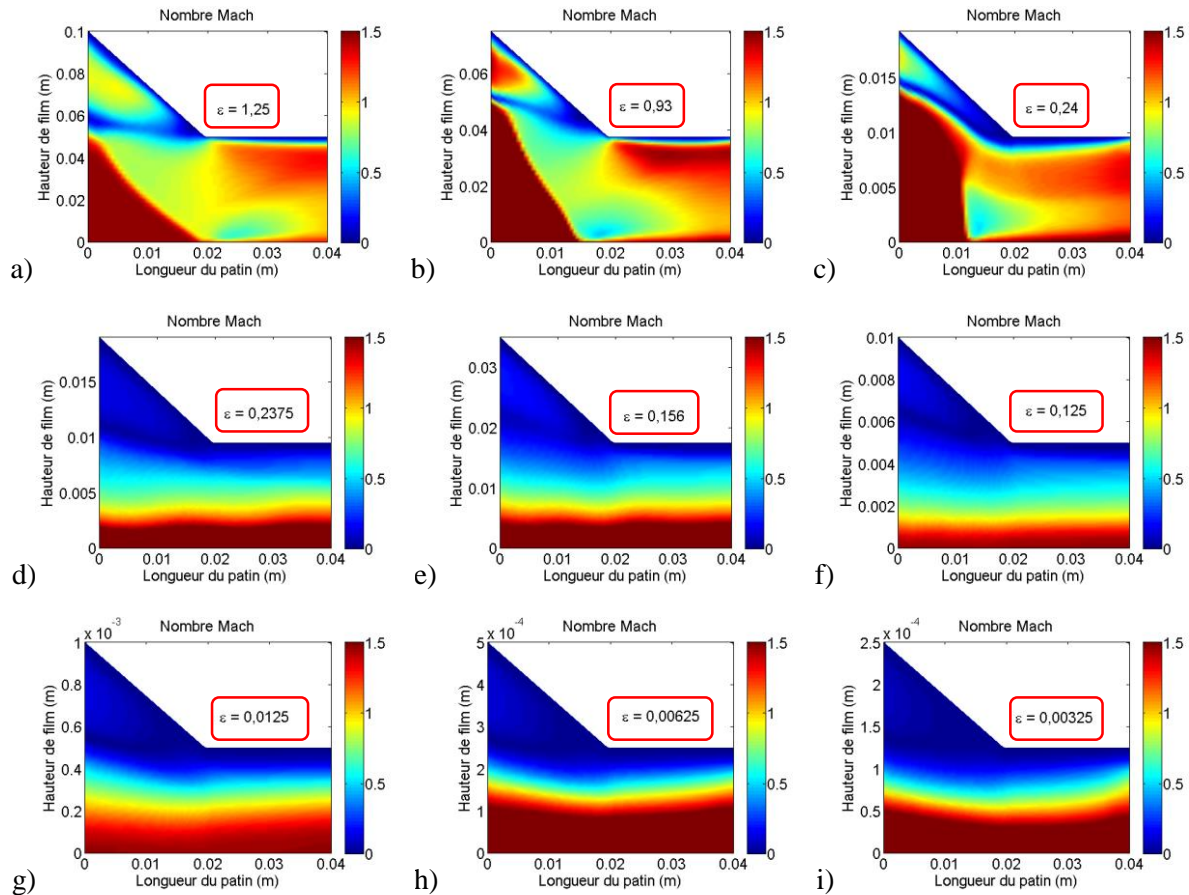
Tableau 3-5 : géométrie étudiée pour l'influence de  $\varepsilon$ .

Cas	Hauteur entrée (mm)	Hauteur sortie (mm)	$\varepsilon$
a	100	50	1.25
b	74.4	37.2	0.93
c	19.2	9.6	0.24
d	19.0	9.5	0.2375
e	12.5	6.25	0.156
f	10	5	0.125
g	1	0.5	0.0125
h	0.5	0.25	0.00625
i	0.25	0.125	0.00325

Tableau 3-6 : gamme de valeur de  $\varepsilon$  et hauteurs associées.Figure 3-20 : Influence du rapport géométrique  $\varepsilon$  sur le champ de pression.

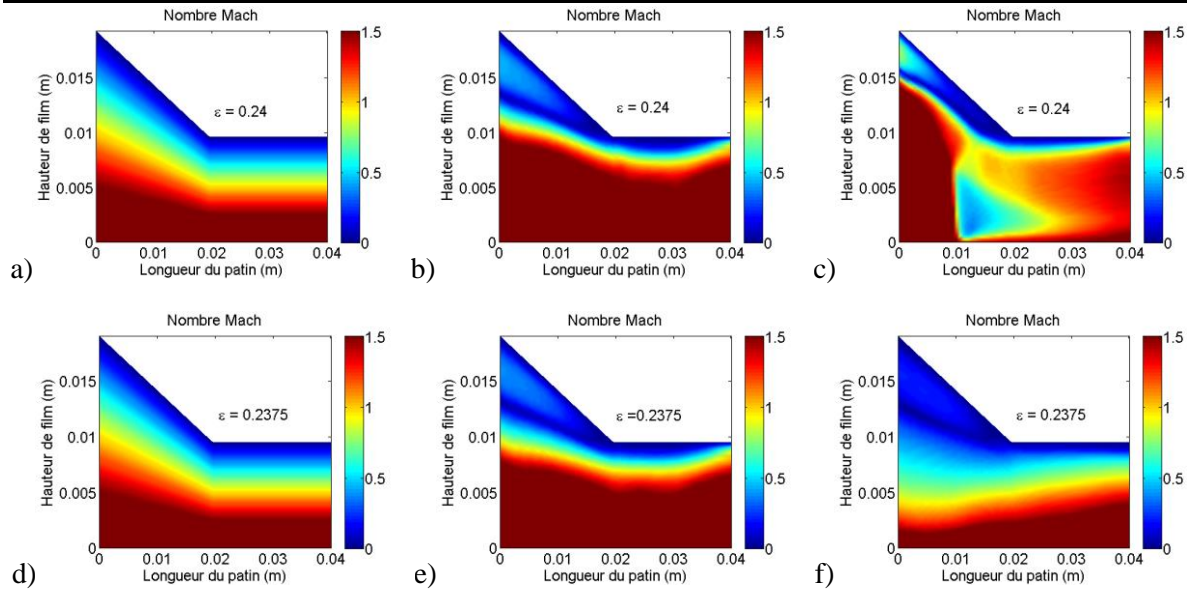
Les résultats montrent trois grandes tendances dans l'écoulement. Pour des écoulements où  $\varepsilon$  est supérieur à 0,24, il se produit un choc car la pression passe subitement de la pression atmosphérique à une pression de 2 à 4 bars. Lorsque  $\varepsilon$  diminue, le choc se redresse jusqu'à devenir droit pour  $\varepsilon$  valant 0,24. En dessous de cette valeur, l'écoulement passe dans une phase

mixte où il n'y a pas de choc, où la pression est très proche de la pression atmosphérique mais n'est pas constante dans la hauteur (cependant quand  $\varepsilon$  diminue elle tend à le devenir). En dessous de  $\varepsilon$  égal à 0,125 l'écoulement est en régime « lubrifié », avec une pression constante dans l'épaisseur du film et un maximum de pression augmentant à mesure que  $\varepsilon$  diminue. Ce résultat s'explique par la diminution de l'épaisseur de film pour une même vitesse.



**Figure 3-21 :** Influence du rapport géométrique sur le champ de Mach  $\varepsilon$  entre 1.25 et 0.00125

Les champs de Mach de la figure 3-21 montrent la nature du choc dans ce type de géométrie. Ainsi dans les cas où  $\varepsilon$  vaut de 1,25 à 0,24 le choc est fort car l'écoulement en aval de celui-ci est en régime subsonique. La distribution du nombre de Mach dans les autres cas a la même forme, c'est-à-dire un profil pratiquement linéaire sur toute la longueur du patin. Entre les valeurs 0,24 et 0,2375 un changement brutal de comportement apparaît. L'étude temporelle du champ de Mach entre ces deux valeurs a donc été menée pour comprendre cette différence. Pour cela les champs de mach sont observés aux trois instants dans la figure 3-22.



**Figure 3-22** : Evolution du champ de Mach pour  $\varepsilon=0.24$  et pour  $\varepsilon=0.2375$  avec  $t = 0s$  pour a) et d),  $t = 2s$  pour b) et e) et  $t = 8s$  c) et f).

A l'instant initial (figure 3-22 a. et d.), la distribution du champ de Mach est identique dans les deux cas, et provient directement du profil de Couette imposé sur la condition initiale, cf. (2.2-31). Ensuite, la partie supersonique s'épaissit à  $t = 2s$ , en se dirigeant vers la paroi du patin (figure 3-22 b. et e.). La différence de comportement se produit lorsque cette partie supersonique rencontre le changement d'inclinaison (figure 3-22 c. et f.) à  $t = 8s$ . Dans le cas où  $\varepsilon$  vaut 0.24, le champ de Mach s'incline créant ainsi le choc, dans le cas où  $\varepsilon$  vaut 0.2375 le champ de Mach semble ne pas être en mesure de s'incliner et donc s'effondre pour reprendre une distribution de Couette. Des simulations supplémentaires ont été menées pour déterminer l'origine mathématique de cette différence. Elles consistent à simuler un écoulement, dans le cas où  $\varepsilon$  vaut 1.25, et à retirer un à un des termes de l'équation de Navier-Stokes et voir si le choc est toujours présent. Il semblerait que le terme en gras dans l'équation (3.2-1) soit à l'origine de cette différence. Il ne serait plus suffisamment important pour être capable d'incliner l'écoulement et créer le choc lorsque  $\varepsilon$  devient inférieur à 0.24.

$$\overrightarrow{F}(q) = \left\{ \begin{array}{l} \bar{\rho}\bar{u} \\ \bar{\rho}\bar{u}^2 + \bar{p} \\ \bar{\rho}\bar{u}\bar{v}\varepsilon^2 \\ (\bar{E}_t + \bar{p})\bar{u} \end{array} \right\} \quad (3.2-1)$$

Le comportement change de façon très importante entre une géométrie macroscopique et une géométrie microscopique. D'autres simulations vont maintenant être menées afin d'observer cette transition pour d'autres vitesses.

### 3.2.4 Limite de présence de choc

La transition entre un écoulement contenant un choc et un n'en contenant pas a été observée dans le paragraphe précédent pour une vitesse et une géométrie donnée. Dans ce paragraphe, cette étude va être prolongée pour différentes vitesses.

Les conclusions qui découlent de cette étude ne seront valables que pour cette forme géométrique. Bien entendu d'autres simulations devront être faites si la géométrie est différente.

La géométrie, la gamme de vitesse et les valeurs de transition obtenues pour chacune des vitesses sont données dans le tableau 3-7.

Longueur rampe	Longueur totale	H1/H2	Vitesse
20 mm	40 mm	2	700 m/s

Cas	Vitesse (m/s)	Hauteur entrée (mm)	Hauteur sortie (mm)	$\varepsilon$	Type écoulement
a	500	57.6	28.8	0.73	Choc
a'	500	58.4	29.2	0.72	Pas choc
b	600	31.2	15.6	0.39	Choc
b'	600	30.4	15.2	0.38	Pas choc
c	700	19.2	9.6	0.24	Choc
c'	700	19.0	9.5	0.2375	Pas choc
d	800	14.4	7.2	0.18	Choc
d'	800	13.6	6.8	0.17	Pas choc
e	900	11.2	5.6	0.14	Choc
e'	900	10.4	5.2	0.13	Pas choc
f	1000	8.8	4.4	0.11	Choc
f'	1000	8	4	0.1	Pas choc

Tableau 3-7 : Géométries étudiée pour la recherche de la disparition du choc.

Les résultats observés pour un  $\varepsilon$  se situant à limite inférieure de la transition sont similaires quelle que soit la vitesse : un écoulement à pression atmosphérique et une distribution linéaire du nombre de Mach (cf. figure 3-20 d. et figure 3-21 d.). Les résultats observés pour un  $\varepsilon$  se situant à limite supérieure de la transition, montrent un écoulement contenant un choc et sont donnés en champs de Mach dans la figure 3-23 et en champ de pression dans la figure 3-24.

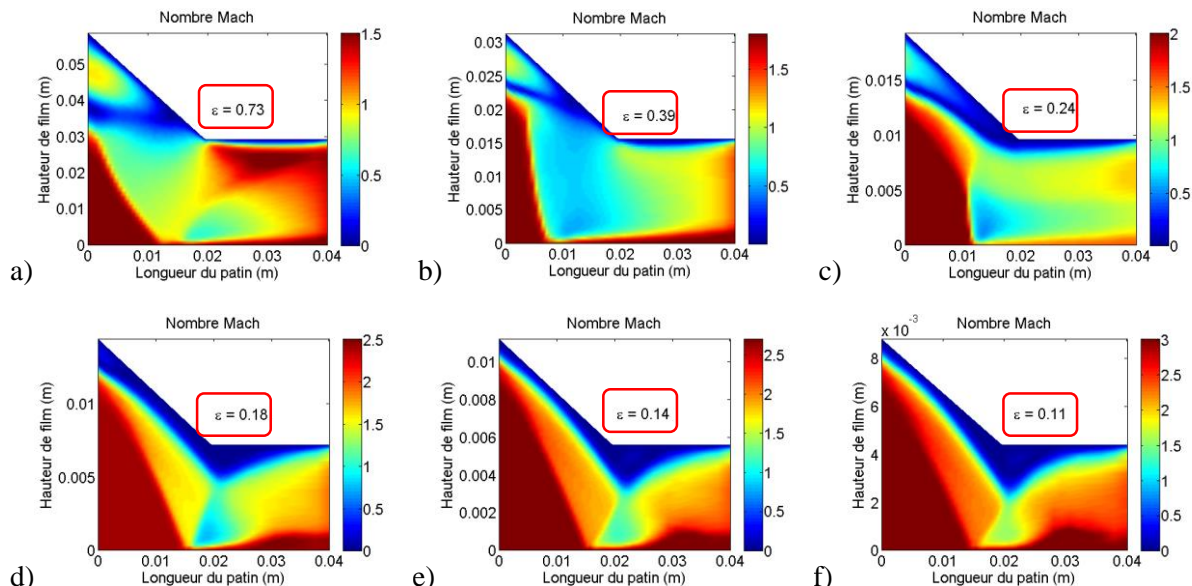


Figure 3-23 : Champ de Mach pour les dernières valeurs de  $\varepsilon$  où l'écoulement contient un choc avec a) 500 m/s, b) 600 m/s, c) 700 m/s, d) 800 m/s, e) 900 m/s et f) 1000 m/s.

Les résultats montrent que l'inclinaison et l'intensité du choc évoluent avec la vitesse. Lorsque la vitesse est faible, le choc est incliné. Lorsque la vitesse augmente le choc se redresse jusqu'à devenir droit pour la vitesse de 700 m/s. Quand la vitesse continue à augmenter le choc

s'incline de nouveau laissant apparaître une forme de « V » signifiant que l'intensité est telle qu'il est réfléchi par la paroi du rotor. Ces remarques sont les mêmes lorsque le champ de pression est étudié. La discontinuité du champ de pression est pratiquement droite pour les vitesses 600 m/s et 700 m/s au travers de laquelle la pression augmente de 3 bars. Puis pour les vitesses supérieures, la discontinuité s'incline créant une surpression de 4 bars puis une seconde discontinuité augmentant la pression de 3 bars se crée à cause de la réverbération sur la paroi du rotor.

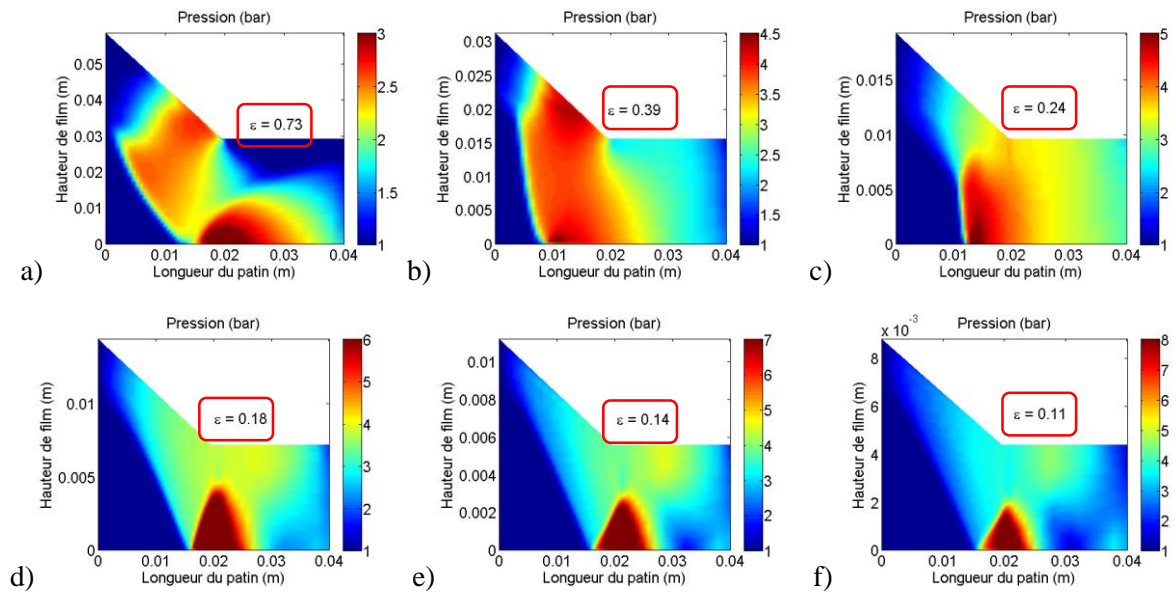


Figure 3-24 : Champ de pression pour les valeurs dernières valeurs de  $\epsilon$  où l'écoulement contient un choc avec a) 500 m/s, b) 600 m/s, c) 700 m/s, d) 800 m/s, e) 900 m/s et f) 1000 m/s.

Les valeurs de  $\epsilon$  se situant à la limite supérieure de la transition du tableau 3-7 peuvent être regroupées dans une courbe pour voir si une tendance se dessine en fonction de la vitesse. Les résultats sont donnés dans la figure 3-25.

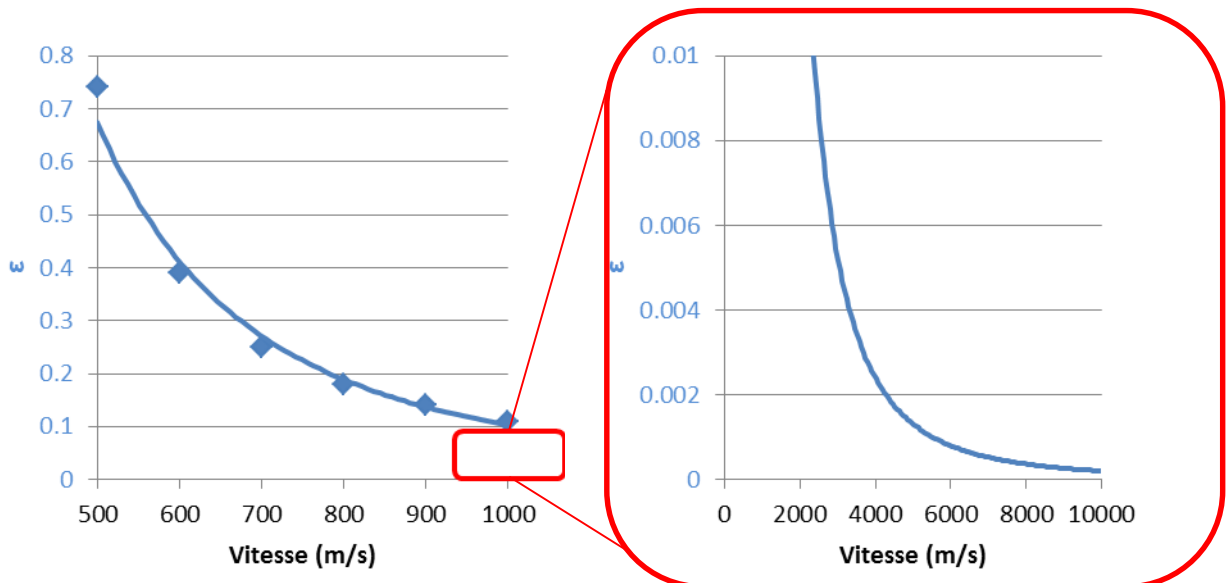


Figure 3-25 : Relation entre la valeur de  $\epsilon$  limite et la vitesse calculée à gauche, et à droite extension de la tendance vers des valeurs de  $\epsilon$  rencontrées en film mince.

Les résultats montrent que les valeurs de transition semblent suivre une loi de puissance en  $1/x^2$ . Dans l'hypothèse où cette tendance est vérifiée, elle peut être prolongée afin d'extrapoler la vitesse à des valeurs de  $\varepsilon$  beaucoup plus faibles. Ainsi dans la courbe de droite de la figure 3-25, pour  $\varepsilon$  de l'ordre de  $10^{-3}$  (correspondant à un film de 40  $\mu\text{m}$  en sortie et 80  $\mu\text{m}$  en entrée : condition de fonctionnement réaliste), il faudrait que la vitesse dépasse les 5500  $\text{m/s}$  pour qu'un choc puisse se créer, et tout ceci dans l'hypothèse que les parois sont maintenues à  $0^\circ\text{C}$ . Il est donc raisonnable de conclure que dans le cas des films minces l'apparition d'un choc est peu probable.

### 3.2.5 Conclusions

Deux paramètres géométriques ont été étudiés dans ce chapitre. Le premier est le rapport des hauteurs traduisant la charge d'une butée et le second est le rapport des longueurs d'adimensionnement  $\varepsilon$ .

La première partie de ce chapitre concerne l'influence de l'angle de la géométrie du convergent. Pour cela, une étude faisant varier le rapport  $H_1/H_2$  a été menée tout en conservant la différence  $H_1 - H_2$ . Les résultats montrent que la largeur de la détente diminue avec l'augmentation du rapport  $H_1/H_2$  et que l'amplitude de cette détente augmente avec la diminution de l'épaisseur de film. La puissance dissipée, le maximum de pression et la charge augmentent linéairement, alors que le maximum de température voit sa croissance diminuer avec la charge. Cette propriété vient du fait que les parois soient maintenues à une température constante et que le confinement de l'écoulement ne peut lui permettre de s'échauffer indéfiniment. Globalement la détente, même pour des cas sévères n'a pas d'influence sur le comportement de la butée.

Dans une seconde partie, l'étude de l'influence du facteur géométrique  $\varepsilon$  a été menée sur une même forme de double profil ( $H_1/H_2$  constant) par homothétie. Le but était de trouver la raison pour laquelle en film mince aucun choc n'a été rencontré contrairement à ce que la théorie de la mécanique des fluides supersoniques laisse supposer. Les résultats montrent qu'en effet un choc est présent dans l'écoulement pour de grandes valeurs de  $\varepsilon$  (échelle macroscopique) mais qu'à partir d'une certaine valeur, le choc disparaît laissant un écoulement avec une pression pratiquement égale à la pression atmosphérique mais qui n'est pas constante dans l'épaisseur du film. Puis lorsque les valeurs de  $\varepsilon$  diminuent encore, la pression devient constante dans l'épaisseur du film et un régime de type « lubrifié » c'est-à-dire avec une génération de pression dans le film. Les résultats montrent que lors de l'évolution temporelle du champ de Mach pour des valeurs proches de la transition entre un écoulement contenant un choc et un n'en contenant pas, l'épaisseur de la partie supersonique augmente jusqu'à se trouver au niveau du patin mais qu'elle n'est pas en mesure de s'incliner pour créer le choc. Plusieurs simulations ont permis de déterminer que c'est un terme du vecteur  $F$  (3.2-1) qui doit être suffisamment important pour que l'écoulement s'incline et que le choc se crée.

Dans une troisième partie, une recherche sur la valeur de  $\varepsilon$  à la transition entre un écoulement contenant un choc et un n'en contenant pas a été menée pour différentes vitesses. Les résultats montrent que cette valeur critique de  $\varepsilon$  diminue avec l'augmentation de la vitesse en suivant une loi de puissance. La courbe a pu ainsi être prolongée vers des valeurs de  $\varepsilon$  beaucoup plus faibles. Les résultats montrent alors que pour qu'un choc se produise dans un film mince ( $\varepsilon = 10^{-3}$ ), la vitesse doit être supérieure à 5500  $\text{m/s}$  dans l'hypothèse où la tendance reste la même et où les parois sont maintenues à  $0^\circ\text{C}$ . Il est donc peu probable de rencontrer un choc dans un double profil en film mince.





---

# Conclusion générale et perspectives



Ce manuscrit traite de l'étude d'une butée aérodynamique en régime supersonique. Les objectifs étaient d'établir un modèle physique permettant de décrire le problème, de mettre en place un code de calcul permettant de le résoudre et de déterminer le comportement de ce type d'écoulement.

L'étude du régime supersonique s'inscrit dans la continuité de l'état de l'art sur les butées hautes vitesses, après la prise en compte de la thermique, de la turbulence et des effets d'inertie. La littérature n'a pas encore beaucoup abordé la thématique supersonique sauf dans le cas de butées aérostatiques et aucune investigation expérimentale n'a encore été publiée sur les butées aérodynamiques en régime supersonique.

Un premier modèle physique nommé les équations de Reynolds Modifiées établies par Brunetière et Tournerie [65] et Thomas [66] a été utilisé pour décrire le problème. Il s'agit d'une extension de l'équation de Reynolds généralisée qui prend en compte en plus les effets d'inertie et la variation de la viscosité dans l'épaisseur du film. Contrairement à l'équation de Reynolds généralisée qui ne comporte qu'une inconnue : la pression, les équations de Reynolds Modifiées constituent un système de deux équations à deux inconnues : la pression et le débit linéique. La difficulté pour résoudre ce système réside dans l'absence de condition limite pour le débit linéique. Pour pallier ce problème, la méthode de tir a été utilisée permettant ainsi d'estimer la condition manquante à partir d'une seconde condition limite connue sur la pression. Les équations de Reynolds Modifiées associées au modèle de turbulence de Ng-Pan [45] et à l'équation de l'énergie sont résolues à l'aide des différences finies.

L'influence de l'inertie a été étudiée sur une gamme de vitesse allant de 10  $m/s$  à 450  $m/s$  sur deux géométries de double profil. Les résultats montrent que l'inertie contribue à une augmentation faible du profil de pression et qu'elle est à l'origine d'une diminution de la pression en aval du changement d'inclinaison de la géométrie à 450  $m/s$ . Ce phénomène a été identifié comme une détente mais une discussion a été faite autour d'une singularité du profil de pression. Cette dernière peut venir directement du modèle physique mais peut également venir d'un problème numérique. Le code rencontre des difficultés à obtenir d'avantage de résultats lorsque les conditions d'écoulement sont sévères, probablement à cause de la forte non-linéarité du problème qui ne peut être traitée avec la méthode de tir. Pour éviter ce problème, mais aussi confronter les résultats obtenus en l'absence de données expérimentales, un second modèle physique a été mis au point.

Ce second modèle physique se nomme les équations de Navier-Stokes adaptées aux films minces. Les équations de la mécanique sont adimensionnées avec les mêmes grandeurs que celles utilisées pour établir les équations de Reynolds Modifiées. Cette fois tous les termes sont conservés et beaucoup d'entre eux sont multipliés par le rapport d'adimensionnement  $\varepsilon$ . La forme de ce nouveau système est identique à celle de Navier Stokes classique et donc présente l'avantage de permettre le passage d'une géométrie macroscopique à une géométrie microscopique tout en conservant un nombre de point modéré. Le second avantage est la possibilité d'utiliser des méthodes numériques classiques de capture de choc qui n'étaient pas facilement adaptables aux équations de Reynolds Modifiées. La principale différence avec le code CERMAC c'est que la condition limite en pression est imposée uniquement dans la partie subsonique de la sortie du domaine, vu que la pression est bidimensionnelle.

Lorsque les modèles sont comparés, les résultats montrent que les équations de Reynolds Modifiées sous-estiment la pression et ne sont pas les plus adéquates à décrire un écoulement

supersonique dans une butée. Les simulations ont donc été menées avec la résolution des équations de Navier Stokes adaptées aux films minces en deux grandes parties : l'influence des variables (vitesse, température et inertie) et l'influence des paramètres géométriques (rapport des hauteurs de film et rapport des longueurs d'adimensionnement).

La première série de simulations a donné différents résultats. L'utilisation de parois isolantes en film mince supersonique crée une surchauffe du système, entraînant la température à des valeurs très supérieures à celles mesurée expérimentalement en subsonique. Lorsque les parois sont isothermes et que l'écoulement est supersonique, une détente se crée au changement d'inclinaison du patin liée aux termes d'inertie. Cette détente voit son amplitude augmenter avec la vitesse, et diminuer avec la température. Dans un environnement très chaud (parois à 500°C) cette détente disparaît, car une température élevée diminue le nombre de Mach et contraint l'écoulement à un régime subsonique. Plus généralement, la détente n'a pas d'influence sur le comportement statique global de la butée car la puissance dissipée et la charge ne varient pas lors du passage au régime supersonique quelle que soit la variable étudiée.

L'influence des paramètres géométriques regroupe celle du rapport de la hauteur en entrée sur la hauteur en sortie, et celle du rapport géométrique  $\varepsilon$ . Les résultats montrent qu'une augmentation du rapport des hauteurs de film diminue l'épaisseur de la détente mais augmente son amplitude grâce à la diminution de l'angle du convergent et de l'épaisseur de film. Même dans des géométries sévères, la détente n'a pas d'influence sur le comportement de la butée. Aucun choc n'a été observé dans ces simulations, alors que la théorie de mécanique des fluides supersoniques en prévoit un. L'étude de l'influence du rapport des longueurs d'adimensionnement a permis de déterminer que le choc apparaît pour de grandes valeurs de  $\varepsilon$  puis disparaît à une valeur précise de  $\varepsilon$  laissant ensuite un écoulement à pression atmosphérique et une distribution linéaire du champ de Mach. L'origine viendrait d'un terme du vecteur flux  $F$  devenant trop faible pour pouvoir incliner l'écoulement dans le convergent et induire le choc. Cette transition très particulière, entre un écoulement contenant un choc et un écoulement n'en contenant pas, dépend de la vitesse et de la géométrie. La recherche de celle-ci a été menée pour une géométrie donnée à différentes vitesses, permettant d'extrapoler les résultats en film mince (faibles valeurs de  $\varepsilon$ ). Dans une configuration réaliste d'une butée avec un film d'air de 40  $\mu\text{m}$  ( $\varepsilon = 0.001$ ), un choc se produirait à partir d'une vitesse de 5500 m/s, et ce avec des parois maintenues à 0°C.

En résumé, une butée aérodynamique en régime supersonique présente une détente au niveau du changement d'inclinaison qui dépend de la vitesse, de la température et de l'angle du changement d'inclinaison du patin, mais qui a peu d'influence sur le comportement global du film d'air. Il est peu probable qu'un choc puisse se produire dans une butée en régime supersonique si la tendance suivie par la transition est confirmée. Cette information est positive puisqu'elle retire un problème délicat qu'est la présence de choc dans une structure souple.

Les perspectives de cette étude sont multiples, que ce soit dans le domaine numérique mais aussi expérimental, comme par exemple :

- Etudier ce problème en trois dimensions, puisque le dispositif réel implique également un effet centrifuge qui modifier les résultats obtenus en 2D.

- Etudier l'influence des fluctuations en ajoutant un modèle de turbulence aux équations de Navier Stokes adaptées aux films minces
- Etudier la géométrie dans son intégralité à savoir ajouter l'inter-patin et le soyaage qui représentent également des géométries pouvant être à l'origine de phénomènes (en particulier l'extrémité libre du patin).
- Etudier l'influence de la déformabilité des patins sur la détente et regarder si elle n'implique pas des phénomènes vibratoires.
- Confronter les résultats obtenus dans l'ensemble des simulations à des résultats expérimentaux d'un banc d'essai de butée hautes vitesses.



---

# Bibliographie





- [1] Y. IORDANOFF, «Palliers axiaux aerodynamiques à atructure à feuille : Analyse et optimisation,» Ph.D. dissertation, Université Paul Sabatier Toulouse, 1996.
- [2] S. B. GLAVATSKIH, «Tilting pad thrust bearings,» *Tribology Series*, vol. 41, pp. 379-390, 2003.
- [3] H. HESHMAT et P. HERMEL, «Compliant foil bearings technology and their applications to high speed turbomachinery,» *Tribology Series*, vol. 25, pp. 559-575, 1993.
- [4] J. FRENE, «Butées et paliers hydrodynamiques,» *Techniques de l'ingénieur, Génie Mécanique, B 5 320*, 1995.
- [5] P. STEPHAN et Y. IORDANOFF, «Butées et Paliers aérodynamiques,» *Techniques de l'ingénieur, Génie Mécanique, B 5 335*, 1996.
- [6] G. L. AGRAWAL, «Foil Air/Gas Bearing Technology - An Overview,» chez *International Gas Turbine & Aero engine Congress & Exhibition*, Orlando USA, 1997.
- [7] H. HESHMAT, J. A. WALOWIT et O. PINKUS, «Analysis of gas lubricated compliant thrust bearings,» *ASME Journal of Lubrication Technology*, vol. 105, pp. 638,646-655, 1983.
- [8] A. BENALI, A. BONIFACIE et D. NICOLAS, «Paper V(iii) Dynamic analysis of tilting pad thrust bearings,» *Tribology Series*, vol. 11, pp. 157-163, 1987.
- [9] D.-J. PARK, C.-H. KIM, G.-H. JANG et Y.-B. LEE, «Theoretical considerations of static and dynamic characteristics of air foil thrust bearing with tilt and slip flow,» *Tribology International*, vol. 41, pp. 282-295, 2008.
- [10] S. BERGER, O. BONNEAU et J. FRENE, «Influence of axial thrust bearing deflects on the dynamic behavior of an elastic shaft,» *Tribology International*, vol. 33, pp. 153-160, 2000.
- [11] S. BAUMAN, «An oil-free thrust foil bearing facility design, calibration, and operation,» *NASA/TM-2005-21358, Glen Research Center, OH*, 2005.
- [12] D. DOWSON, «A generalized Reynolds equation for fluid-film lubrication,» *Int. Journal for Mech. Sciences*, vol. 4, pp. 159-170, 1962.
- [13] J. FRENE, D. NICOLAS, B. DEGUEURCE, D. BERTHE et M. GODET, *Lubrification hydrodynamique : Paliers et Butées*, Eyrolles, 1990.
- [14] C. M. ETTLES, «Three dimensionnal computation of thrust bearings,» *Tribology Series*, vol. 11, pp. 95-104, 1987.
- [15] A. DADOUCHE, M. FILLON et J. C. BLIGOUD, «Experiments on thermal effects in a hydrodynamic thrust bearing,» *Tribology International*, vol. 33, pp. 167-174, 2000.
- [16] D. MARKIN, D. M. C. MCCARTHY et S. B. GLAVATSKIH, «A FEM approach to simulation of tilting-pad thrust bearing assemblies,» *Tribology International*, vol. 36, pp. 807-814, 2003.
- [17] S. A. AHMED et M. FILLON, «Etude des effets thermiques et des déformations mécaniques sur les performances des butées hydrodynamiques à géométrie fixe,» chez *18ieme Congrès Français de Mécanique*, Grenoble, France, 2007.
- [18] S. A. AHMED, M. FILLON et P. MASPEYROT, «Influence of pad and runner mechanical deformations on the performance of a hydrodynamic fixed geometry thrust bearing,» *Journal of*

- Engineering Tribology*, vol. 224, pp. 305-315, 2010.
- [19] J. BRUCKNER, «Simulation and modeling of the hydrodynamic, thermal, and structural behavior of foil thrust bearings,» Ph.D. dissertation, Case Western Reserve University, Ohio, 2004.
- [20] B. D. DYKAS, «Factors influencing the performance of foil gas thrust bearings for oil-free turbomachinery applications,» Ph.D. dissertation, Case Western Reserve University, Ohio, 2006.
- [21] S. B. GLAVATSKIH, «A method of temperature monitoring in fluid film bearings,» *Tribology International*, vol. 37, pp. 143-148, 2004.
- [22] M. WASILCZUK et G. ROTTA, «Modeling lubricant flow between thrust-bearing pads,» *Tribology International*, vol. 41, pp. 908-913, 2008.
- [23] S. S. BANWAIT et H. N. CHANDRAWAT, «Study of thermal boundary conditions for a plain journal bearing,» *Tribology International*, vol. 31, pp. 289-296, 1998.
- [24] G. A. DERESSE et P. SINHA, «THD analysis of finite slider bearing with roughness: special reference to load generation in parallel sliders,» *Acta. Mech.*, vol. 222, pp. 1-15, 2011.
- [25] H. HESHMAT, P. HRYNIEWICZ, J. F. WALTON II, J. P. WILLIS, S. JAHANMIR et C. DELLACORTE, «Low-friction wear-resistant coatings for high-temperature foil bearings,» *Tribology International*, vol. 38, pp. 1059-1075, 2005.
- [26] S. B. GLAVATSKIH et M. FILLON, «TEHD analysis of thrust bearings with PTFE-faced pads,» *ASME Journal of Tribology*, vol. 128, pp. 49-58, 2006.
- [27] M. FILLON et S. B. GLAVATSKIH, «PTFE-faced centre pivot thrust pad bearings: Factors affecting TEHD performance,» *Tribology International*, vol. 41, pp. 1219-1225, 2008.
- [28] H. HESHMAT et W. SHAPIRO, «Advanced development of air lubricated foil thrust bearings,» *ASLE*, vol. 40, 1984.
- [29] M. FESANGHARY et M. M. KHONSARI, «Topological and shape optimization of thrust bearings for enhanced load-carrying capacity,» *Tribology International*, vol. 53, pp. 12-21, 2012.
- [30] H. HASHIMOTO et M. OCHIAI, «Theoretical analysis and optimum design of high speed gas film thrust bearings (Static and dynamic characteristics analysis with experimental verifications),» *Journal of Advanced Mechanical Design, Systems and Manufacturing*, vol. 1, pp. 102-112, 2007.
- [31] H. HESHMAT, A. ARTILES et O. PINKUS, «Parametric study and optimization of starved thrust bearings,» *Tribology Series*, vol. 11, pp. 105-112, 1987.
- [32] D. V. DE PELLEGRIN et D. J. HARGREAVES, «An isoviscous, isothermal model investigating the influence of hydrostatic recesses on a spring-supported tilting pad thrust bearing,» *Tribology International*, vol. 51, pp. 25-35, 2012.
- [33] W. W. GARDNER, «Tilting pad thrust bearing tests - influence of oil flow rate on power loss and temperature,» *Tribology Series*, vol. 34, pp. 211-217, 1998.
- [34] Y. HENRY, J. BOUYER et M. FILLON, «An experimental analysis of the hydrodynamic contribution of textured thrust bearing during steady-state operation: A comparison with the untextured parallel surface configuration,» *Journal of Engineering Tribology*, vol. 229, pp. 362-375, 2015.

- [35] S. C. SHARMA et S. K. YADAV, «Performance analysis of a fully textured hybrid circular thrust pad bearing system operating with non-Newtonian lubricant,» *Tribology International*, vol. 77, pp. 50-64, 2014.
- [36] B. R. KUCINSCHI, K. J. DEWITT et M. D. PASCOVICI, «Thermoelastohydrodynamic (TEHD) analysis of a grooved thrust washer,» *ASME Journal of Tribology*, vol. 126, pp. 267-274, 2004.
- [37] N. NAGAYA, S. TAKEDA, A. SATO, S. IKAI, H. SEKIGUCHI et N. SAITO, «Thrust bearing using a magnetic fluid lubricant under magnetic fields,» *Tribology International*, vol. 26, pp. 11-15, 1993.
- [38] M. GARCIA, «Refrigerant-lubricated gas foil bearing - A thermohydrodynamic study (Application to rigid bearings),» Ph.D. dissertation, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2012.
- [39] M. J. BRAUN et R. C. HENDRICKS, «Non-intrusive laser-based, full-field quantitative flow measurements aided by digital image processing. Part 1: Eccentric cylinders,» *Tribology International*, vol. 24, pp. 195-205, 1991.
- [40] M. J. BRAUN et C. BATUR, «Non-intrusive laser-based, full-field quantitative flow measurements aided by digital image processing. Part 2: hydrostatic journal bearing,» *Tribology International*, vol. 24, pp. 277-289, 1991.
- [41] D. ASHMAN, A. W. PARKER et A. COWLEY, «Paper XIV(iv) Behaviour of a high-speed hydrostatic thrust bearing with recess inserts and grooved lands,» *Tribology Series*, vol. 14, pp. 435-444, 1989.
- [42] V. N. CONSTANTINESCU, «On turbulent Lubrication,» *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, vol. 173, pp. 881-900, 1959.
- [43] F. G. SCHMITT, «About Boussinesq's turbulent viscosity hypothesis: historical remarks and a direct evaluation of its validity,» *C.R. Mecanique*, vol. 335, pp. 617-627, 2007.
- [44] C.-W. NG, «Fluid dynamic foundation of turbulent lubrication theory,» *ASLE Transactions*, vol. 7, pp. 311-321, 1964.
- [45] C. W. NG et C. H. T. PAN, «A linearized turbulent lubrication theory,» *ASME Journal of Basic Engineering*, vol. 87, pp. 675-682, 1965.
- [46] H. G. ELROD et C. W. NG, «A theory for turbulent fluid films and its application to bearings,» *ASME Journal of Lubrication Technology*, vol. 89, pp. 346-362, 1967.
- [47] L. BOUARD, M. FILLON et J. FRENE, «Comparison between three turbulent models - Application to thermohydrodynamic performances of tilting-pad journal bearings,» *Tribology International*, vol. 29, pp. 11-18, 1996.
- [48] J. DURANY, J. PEREIRA-PEREZ et F. VARAS, «About the Constantinescu turbulent model in hydrodynamic lubrication: A comparison with 3-D LES models,» *Tribology International*, vol. 83, pp. 33-41, 2015.
- [49] N. BRUNETIERE, «A modified turbulence model for low Reynolds numbers: Application to hydrostatic seals,» *ASME Journal of Tribology*, vol. 127, pp. 130-140, 2005.
- [50] N. BRUNETIERE, B. TOURNERIE et J. FRENE, «Influence of Fluid Flow Regime on Performance of Non-Contacting Liquid Face Seals,» *ASME Journal of Tribology*, vol. 124, pp. 515-523, 2002.

- [51] K. H. HUEBNER, «Solution for the pressure and temperature in thrust bearings operating in the thermohydrodynamic turbulent regime,» *ASME Journal of Lubrication Technology*, vol. 96, pp. 58-68, 1974.
- [52] Z. S. SAFAR et A. Z. SZERI, «Thermohydrodynamic lubrication in laminar and turbulent regimes,» *ASME Journal of Lubrication Technology*, vol. 96, pp. 48-58, 1974.
- [53] S. H. SHYU, Y.-R. JENG et C.-C. CHANG, «Load capacity for adiabatic infinitely wide plane slider bearings in the turbulent thermohydrodynamic regime,» *STLE Tribology Transactions*, vol. 47, pp. 396-401, 2004.
- [54] S. H. SHYU, Y.-R. JENG et C.-C. CHANG, «Load capacity adiabatic finite-width plane slider bearings in the turbulent thermohydrodynamic regime,» *STLE Tribology Transactions*, vol. 49, pp. 26-32, 2006.
- [55] J. FRENE et M. GODET, «Transition from laminar to Taylor vortex flow in journal bearings,» *Tribology*, vol. 4, pp. 216-217, 1971.
- [56] J. FRENE et M. GODET, «Detection of Taylor vortex transition in very small clearances by hot film wall anemometry,» *Tribology*, vol. 6, pp. 178-183, 1973.
- [57] R. GREGORY, «Operating characteristics of a fluid-film thrust bearing subjected to high shaft speeds,» *chez Proc. Leeds-Lyon Symposium, In super laminar flow in bearings*, 1977.
- [58] N. A. MACKEN et E. A. SAIBEL, «Turbulence and inertia effects in bearings,» *Tribology*, vol. 5, pp. 154-160, 1972.
- [59] V. N. CONSTANTINESCU, «On the influence of inertia forces in turbulent and laminar self-acting films,» *ASME Journal of Lubrication Technology*, vol. 92, pp. 473-480, 1970.
- [60] J. FRENE, M. ARGHIR et V. N. CONSTANTINESCU, «Combined thin film and Navier-Stokes analysis in high Reynolds number lubrication,» *Tribology International*, vol. 39, pp. 747-734, 2006.
- [61] J. TICHY, «Effects of fluid inertia and viscoelasticity on squeeze film bearing forces at large vibration amplitudes,» *Wear*, vol. 76, pp. 69-89, 1982.
- [62] P. BOURGIN et J. TICHY, «Lubricating films of a viscoelastic fluid, including fluid inertia, studied by a linearization method,» *International Journal for Engineering Sciences*, vol. 23, pp. 1135-1149, 1985.
- [63] J. TICHY, «The effect of fluid inertia in hydrodynamic lubrication studied by a linearization method: two useful applications,» *International Journal for Engineering Sciences*, vol. 24, pp. 1607-1613, 1986.
- [64] J. TICHY et B. BOU-SAID, «Hydrodynamic lubrication and bearing behavior with impulsive loads,» *STLE Tribology Transactions*, vol. 34, pp. 505-512, 1991.
- [65] N. BRUNETIERE et B. TOURNERIE, «Finite element solution of inertia influenced flow in thin fluid films,» *ASME Journal of Tribology*, vol. 129, pp. 876-886, 2007.
- [66] S. THOMAS, «Modélisation numérique du comportement thermoaérodynamique des garnitures d'étanchéité pour les gaz réels hautes pressions,» Ph.D. dissertation, Université de Poitiers, 2006.
- [67] A. K. TIEU, «Turbulence and inertia effects in finite width stepped thrust bearings,» *Tribology Series*, vol. 11, pp. 411-416, 1987.

- [68] F. E. KENNEDY, V. N. CONSTANTINESCU et S. GALETUSE, «A numerical method for studying inertia effects in thin film lubrication,» chez *Proc. Leeds-Lyon Symposium, In super laminar flow in bearings*, 1977.
- [69] S. J. CHOWDHURY et AHAMADI, «Thermodynamic analysis of wide thrust bearings operating in laminar inertial flow regimes,» *Tribology International*, vol. 19, pp. 281-288, 1986.
- [70] Z. S. SAFAR et G. S. A. SHAWKI, «Do convective inertia forces affect turbulent bearings characteristics?,» *Tribology International*, vol. 11, pp. 248-249, 1978.
- [71] A. MORI, K. TANAKA et H. MORI, «Effects of fluid inertia forces on the performance of a plane inclined sector pad for an annular thrust bearing under laminar condition,» *ASME Journal of Tribology*, vol. 107, pp. 46-52, 1985.
- [72] E. KIM, «The influence of Reynolds number and heat transfer in fluid film lubrication,» *Mechanics Research Communications*, vol. 23, pp. 441-448, 1996.
- [73] F. DUPUY, B. BOU-SAID et J. TICHY, «High speed subsonic compressible lubrication,» *ASME Journal of Tribology*, vol. 137, 2015.
- [74] X. CARBONNEAU, L. JOLY et G. LAVERGNE, «Physique et mécanique des fluides compressibles,» Département Aerodynamique Energétique et Propulsion, ISAE, 2011.
- [75] R. COURANT et K. FRIEDRICHS, *Supersonic flow and shock waves*, Applied Mathematical Science 21, F. JOHN, L. SIROVICH, J. LASALLE et G. WHITHAM, Éd., Springer-Verlag, 1976.
- [76] W. KONRAD, A. J. SMITS et D. KNIGHT, «A combined experimental and numerical study of a three-dimensional supersonic turbulent boundary layer,» *Experimental Thermal and Fluid Science*, vol. 9, pp. 156-164, 1994.
- [77] V. A. LEBIGA, «The boundary layer transition at supersonic velocities,» *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 78, pp. 114-120, 2014.
- [78] A. HADJADJ, O. BEN-NASR, M. S. SHADLOO et A. CHAUDHURI, «Effect of wall temperature in supersonic turbulent boundary layers: A numerical study,» *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 81, pp. 426-438, 2015.
- [79] Y. MIYAKE, T. INABA et M. HIBI, «An externally pressurized supersonic gas thrust bearing (1st report, static characteristics in supersonic operations),» *ASME Journal of Tribology*, vol. 106, pp. 163-168, 1984.
- [80] Y. MIYAKE, T. INABA et T. MATSUOKA, «An externally pressurized supersonic gas thrust bearing (2nd report, dynamic characteristics in supersonic operations and static characteristics in sonic operations),» *ASME Journal of Tribology*, vol. 106, pp. 169-173, 1984.
- [81] Y. MIYAKE, T. INABA, N. KUBO et J. TAKEOKA, «An experimental study on externally pressurized supersonic gas thrust bearings,» *ASME Journal of Tribology*, vol. 107, pp. 122-127, 1985.
- [82] S. YOSHIMOTO, M. YAMAMOTO et K. TODA, «Numerical calculations of pressure distribution in the bearing clearance of circular aerostatic thrust bearings with a single air supply inlet,» *ASME Journal of Tribology*, vol. 129, pp. 384-390, 2007.
- [83] D. DOWSON, «Laboratory experiments and demonstrations in tribology: 7-Externally pressurised air lubricated thrust bearings,» *Tribology*, vol. 2, pp. 217-220, 1969.

- [84] H. MORI, «A theoretical investigation of pressure depression in externally pressurised gas lubricated thrust bearings,» *Trans ASME Journal of Basic Engineering*, vol. 83, pp. 204-208, 1961.
- [85] M. E. ELESKAKY, «CFD investigation of pressure depressions in aerostatic circular thrust bearings,» *Tribology International*, vol. 42, pp. 1108-1117, 2009.
- [86] N. BRUNETIERE, «Les garnitures mécaniques. Etude théorique et expérimentale,» HDR, Université de Poitiers, 2010.
- [87] A. SZERI, *Fluid film Lubrication: Theory and Design*, Reissue, Éd., Cambridge University Press, 1998.
- [88] E. GONCALVES, «Méthodes, Analyse et Calculs Numériques,» Institut Polytechnique Grenoble, 2005.
- [89] P. DEUFLHARD, Newton methods for nonlinear problems, affine invariance and adaptive algorithms, in *Computational Mathematics 35*, Springer, 2005.
- [90] W. A. GROSS, *Gas Film Lubrication*, John Wiley and Sons, 1962.
- [91] A. HARTEN, B. ENGQUIST, S. OSHER et S. R. CHAKRAVARTHY, «Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, Part III,» *Journal of Computational Physics*, vol. 131, pp. 3-47, 1997.
- [92] X. D. LIU, S. OSHER et T. CHAN, «Weighted essentially non-oscillatory schemes,» *Journal of Computational Physics*, vol. 115, pp. 200-212, 1994.
- [93] G. S. JIANG et C. W. SHU, «Efficient implementation of weighted ENO schemes,» *Journal of Computational Physics*, vol. 126, pp. 202-228, 1996.
- [94] D. S. BALSARA et C. W. SHU, «Monotonicity preserving weighted essentially non-oscillatory schemes with increasingly high order of accuracy,» *Journal of Computational Physics*, vol. 160, pp. 405-452, 2000.
- [95] R. BORGES, M. CARMONA, B. COSTA et W. S. DON, «An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws,» *Journal of Computational Physics*, vol. 227, pp. 3191-3211, 2008.
- [96] A. K. HENRICK, T. D. ASLAM et J. M. POWERS, «Mapped weighted essentially non-oscillatory schemes: achieving optimal order near critical points,» *Journal of Computational Physics*, vol. 207, pp. 542-567, 2005.
- [97] W. S. DON et R. BORGES, «Accuracy of the weighted essentially non-oscillatory conservative finite difference schemes,» *Journal of Computational Physics*, vol. 250, pp. 347-372, 2013.
- [98] C. HIRSCH, *Numerical Computation of Internal and External Flows*, Butterworth-Heinemann, 1990.
- [99] E. TORO, *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*, Springer, 2013.
- [100] D. PONZIANI, S. PIROZZOLI et F. GRASSO, «Development of optimized weighted-ENO schemes for multiscale compressible flows,» *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 42, pp. 953-977, 2003.
- [101] S. K. LELE, «Compact finite difference schemes with spectral-like resolution,» *Journal of Computational Physics*, vol. 103, pp. 16-42, 1992.

- 
- [102] K. W. THOMPSON, «Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems,» *Journal of Computational Physics*, vol. 68, pp. 1-24, 1987.
- [103] K. W. THOMPSON, «Time-dependent boundary conditions for hyperbolic systems, II,» *Journal of Computational Physics*, vol. 89, pp. 439-461, 1990.
- [104] T. J. POINSOT et S. K. LELE, «Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows,» *Journal of Computational Physics*, vol. 101, pp. 104-129, 1992.
- [105] H. HASHIMOTO et S. WADA, «Paper V(ii) Pressure boundary conditions at inlet edge of turbulent thrust bearings,» *Tribology Series*, vol. 11, pp. 149-155, 1987.
- [106] A. MORI et H. MORI, «Paper V(i) Inlet boundary condition for submerged multi-pad bearings relative to fluid inertia forces,» *Tribology Series*, vol. 11, pp. 141-147, 1987.
- [107] R. BONCOMPAIN, «Les paliers lisses en régime thermo hydrodynamique. Aspects théorique et expérimentaux,» Ph.D. dissertation, Université de Poitiers, 1984.
- [108] J. DEVOS, Resolution des équations d'Euler instationnaires par un schéma du second ordre, EDF: Direction des Etudes et Recherches, 1992.
- [109] M. CRESPO, «Étude de l'interaction entre une onde de choc et une turbulence cisailée en présence de gradients moyens de température et de masse volumique,» Ph.D. dissertation, Université de Toulouse, 2009.





---

## Partie 4: Annexe

---

4.1.	Démonstration des équations de Reynolds Modifiées	107
4.1.1	<i>Simplifications des équations de la mécanique</i>	107
4.1.2	<i>Intégration dans l'épaisseur du film et profil de vitesse</i>	108
4.1.3	<i>Système final</i>	110
4.1.4	<i>Equation de l'énergie</i>	111
4.2.	Validation de de l'outil numérique CERMAC	113
4.2.1	<i>Introduction</i>	113
4.2.2	<i>Validation du code pour un plan incliné.</i>	113
4.2.3	<i>Validation du code pour un double profil.</i>	114
4.3.	Démonstration des équations de Navier Stokes adaptées aux films minces	116
4.3.1	<i>Adimensionnement du système</i>	116
4.3.2	<i>Calcul des valeurs propres.</i>	118
4.4.	Prise en compte de la géométrie et méthode de raffinement de maillage	122
4.4.1	<i>Introduction.</i>	122
4.4.2	<i>Changement de variable généralisé et nouveau système à résoudre.</i>	122
4.4.3	<i>Définition d'un maillage dans le domaine physique</i>	123
4.5.	Validation de l'outil numérique CAMEAS	125
4.5.1	<i>Validation de la routine WENO</i>	125
4.5.2	<i>Validation en film mince</i>	127



## 4.1. Démonstration des équations de Reynolds Modifiées

Le système le plus adéquat pour décrire un écoulement lubrifié à grande vitesse est le système des équations de Reynolds Modifiées (cf. chapitre 2.1) avec les hypothèses du paragraphe (2.1.2.1). Sa démonstration 3D est présentée s'inspirant des travaux de Thomas [66] et de Brunetière et Tournier [65]. La réduction à un cas bidimensionnel se fait en retirant les termes relatifs à la dimension  $z$ .

### 4.1.1 Simplifications des équations de la mécanique

Pour établir ce système, il faut adimensionner les équations fondamentales de la mécanique stationnaires, où les forces volumiques sont négligées.

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 : \text{conservation de la masse.} \quad (4.1-1)$$

$$\frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} : \text{conservation du mouvement.} \quad (4.1-2)$$

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) : \text{tenseur des contraintes visqueuses.} \quad (4.1-3)$$

Dans ces formules  $\rho$  est la masse volumique,  $u_i$  sont les composantes de la vitesse selon  $x_i$ ,  $p$  est la pression, et  $\delta$  est le symbole de Kronecker. L'adimensionnement se fait par le biais des grandeurs caractéristiques suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{L} ; \bar{y} = \frac{y}{H} ; \bar{z} = \frac{z}{L} ; \bar{u} = \frac{u}{u_0} ; \bar{v} = \frac{vL}{u_0 H} ; \bar{w} = \frac{w}{u_0} ; \\ \bar{\mu} &= \frac{\mu}{\mu_0} ; \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} ; \bar{p} = \frac{pH^2}{\mu_0 u_0 L} ; \bar{\varepsilon} = \frac{H}{L} ; \Re_e = \frac{\rho_0 u_0 H}{\mu_0} \end{aligned} \quad (4.1-4)$$

Ici,  $L$  représente la longueur de la butée,  $H$  est l'épaisseur minimale du film lubrifiant,  $u_0$  est la vitesse du disque tournant,  $\mu_0$  est la viscosité de référence ( $1,711.10^{-5} Pa.s$ ),  $\rho_0$  est la masse volumique de référence ( $1.225 kg/m^3$ ),  $\varepsilon$  est le rapport des longueurs caractéristiques et  $\Re_e$  est le nombre de Reynolds.

$$\left( \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u})}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{v})}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{w})}{\partial \bar{z}} \right) = 0 \quad (4.1-5)$$

$$\begin{aligned}
\Re_e \left( \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u}^2)}{\partial\bar{x}} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u}\bar{v})}{\partial\bar{y}} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u}\bar{w})}{\partial\bar{z}} \right) \\
= -\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial\bar{x}} \left( \bar{\mu} \left( 2 \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} - \frac{2}{3} \frac{\partial\bar{u}_i}{\partial\bar{x}_i} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial\bar{y}} \left( \bar{\mu} \left( \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} + \varepsilon^2 \frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}} \right) \right) \\
+ \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial\bar{z}} \left( \bar{\mu} \left( \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{z}} + \frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}} \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.1-6}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^3 \Re_e \left( \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u}\bar{v})}{\partial\bar{x}} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{v}^2)}{\partial\bar{y}} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{v}\bar{w})}{\partial\bar{z}} \right) \\
= -\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{y}} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial\bar{x}} \left( \bar{\mu} \left( \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} + \varepsilon^2 \frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}} \right) \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial\bar{y}} \left( \bar{\mu} \left( 2 \frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}} - \frac{2}{3} \frac{\partial\bar{u}_i}{\partial\bar{x}_i} \right) \right) \\
+ \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial\bar{z}} \left( \bar{\mu} \left( \frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}} + \varepsilon^2 \frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{z}} \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.1-7}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon \Re_e \left( \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u}\bar{w})}{\partial\bar{x}} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{v}\bar{w})}{\partial\bar{y}} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{w}^2)}{\partial\bar{z}} \right) \\
= -\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{z}} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial\bar{x}} \left( \bar{\mu} \left( \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{z}} + \frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial\bar{y}} \left( \bar{\mu} \left( \frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{y}} + \varepsilon^2 \frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{z}} \right) \right) \\
+ \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial\bar{z}} \left( \bar{\mu} \left( 2 \frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{z}} - \frac{2}{3} \frac{\partial\bar{u}_i}{\partial\bar{x}_i} \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.1-8}$$

Dans ces expressions, les termes factorisés par  $\varepsilon^2$  seront négligés car  $\varepsilon$  est de l'ordre de  $10^{-3}$ . En revanche, les termes en facteur de  $\varepsilon\Re_e$  sont conservés car à très haute vitesse, ce facteur peut être de l'ordre de 1. Le système simplifié remis en variables dimensionnelles est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial(\rho uw)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{array} \right. \tag{4.1-9}$$

#### 4.1.2 Intégration dans l'épaisseur du film et profil de vitesse

Afin de faciliter le traitement des termes d'inertie fortement non-linéaires, la propriété de pression constante dans l'épaisseur de film est utilisée pour intégrer les équations sur la hauteur. Il en découle le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^h \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dy + \int_0^h \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy + \int_0^h \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dy = 0 \\ \int_0^h u \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dy + \int_0^h v \frac{\partial(\rho u)}{\partial y} dy + \int_0^h w \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} dy = - \int_0^h \frac{\partial p}{\partial x} dy + \int_0^h \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy \\ \int_0^h u \frac{\partial(\rho w)}{\partial x} dy + \int_0^h v \frac{\partial(\rho w)}{\partial y} dy + \int_0^h w \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dy = - \int_0^h \frac{\partial p}{\partial z} dy + \int_0^h \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) dy \\ \int_0^h \frac{\partial p}{\partial y} dy' = p(x, z) \end{array} \right. \quad (4.1-10)$$

L'écriture du système peut être modifiée en utilisant les formules d'intégration de Liebnitz et les conditions aux limites suivantes.

$$\begin{array}{l} \text{En } y = 0 \text{ (rotor)} : u = u_0 ; v = 0 ; w = 0 \\ \text{En } y = H \text{ (butée)} : u = 0 ; v = 0 ; w = 0 \end{array} \quad (4.1-11)$$

Ainsi, le système devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial I_x}{\partial x} + \frac{\partial I_z}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial I_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial I_{xz}}{\partial z} = -h \frac{\partial p}{\partial x} + \mu(h) \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_h + \mu(0) \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_0 \\ \frac{\partial I_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial I_{zz}}{\partial z} = -h \frac{\partial p}{\partial z} + \mu(h) \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_h + \mu(0) \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_0 \end{array} \right. \quad (4.1-12)$$

Avec :

$$\begin{array}{l} I_x = \int_0^h \rho u dy ; I_z = \int_0^h \rho w dy ; \\ I_{xx} = \int_0^h \rho u^2 dy ; I_{xz} = \int_0^h \rho u w dy ; I_{zz} = \int_0^h \rho w^2 dy . \end{array} \quad (4.1-13)$$

Des profils de vitesse selon les directions  $x$  et  $z$  sont injectés dans le système. Le profil de vitesse est donné par la formule suivante mais il ne prend pas en compte les effets d'inertie :

$$u = \frac{\partial p}{\partial x} \left( I - J \frac{I_2}{J_2} \right) + u_0 \left( 1 - \frac{J}{J_2} \right) ; w = \frac{\partial p}{\partial z} \left( I - J \frac{I_2}{J_2} \right) \quad (4.1-14)$$

Avec :

$$\begin{array}{l} I = \int_0^y \frac{\varepsilon}{\mu(x, \varepsilon, z)} d\varepsilon ; J = \int_0^y \frac{d\varepsilon}{\mu(x, \varepsilon, z)} \\ I_2 = \int_0^h \frac{\varepsilon}{\mu(x, \varepsilon, z)} d\varepsilon ; J_2 = \int_0^h \frac{d\varepsilon}{\mu(x, \varepsilon, z)} \end{array} \quad (4.1-15)$$

Lorsque l'inertie est prise en compte, l'hypothèse de Constantinescu disant que seule l'amplitude du profil de vitesse varie par rapport à la formule (4.1-14) est utilisée. Ainsi le profil de vitesse tenant compte de l'inertie fait apparaître les nouvelles inconnues : les débits par unité de longueur  $q_x$  et  $q_z$ .

$$u = \frac{-q_x}{G_1} \left( I - J \frac{I_2}{J_2} \right) + U \left( 1 - \frac{J}{J_2} \right) ; w = \frac{-q_z}{G_1} \left( I - J \frac{I_2}{J_2} \right) \quad (4.1-16)$$

Avec :

$$G_1 = - \int_0^h \rho \left( I - J \frac{I_2}{J_2} \right) dy \quad (4.1-17)$$

### 4.1.3 Système final

Lorsque les profils de vitesse (4.1-16) sont injectés dans le système (4.1-12), les quantités  $q_x$  et  $G_1$  peuvent être sorties des intégrales car elles ne dépendent pas de la hauteur. L'équation de conservation de la masse devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{q_x}{G_1} \int_0^h -\rho \left( I - J \frac{I_2}{J_2} \right) dy \right\} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \rho \left( 1 - \frac{J}{J_2} \right) dy \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{q_z}{G_1} \int_0^h -\rho \left( I - J \frac{I_2}{J_2} \right) dy \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.1-18)$$

L'équation du mouvement sur  $x$  devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{q_x^2}{G_1^2} \int_0^h \rho \left( I - J \frac{I_2}{J_2} \right)^2 dy - \frac{2u_0 q_x}{G_1} \int_0^h \rho \left( I - J \frac{I_2}{J_2} \right) \left( 1 - \frac{J}{J_2} \right) dy \right. \\ \left. + u_0^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \left( 1 - \frac{J}{J_2} \right)^2 dy \right\} \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{q_x q_z}{G_1^2} \int_0^h \rho \left( I - J \frac{I_2}{J_2} \right)^2 dy - \frac{2u_0 q_z}{G_1} \int_0^h \rho \left( I - J \frac{I_2}{J_2} \right) \left( 1 - \frac{J}{J_2} \right) dy \right\} \\ = -h \frac{\partial p}{\partial x} - h \frac{q_x}{G_1} \end{aligned} \quad (4.1-19)$$

Et celle selon  $z$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{q_x q_z}{G_1^2} \int_0^h \rho \left( I - J \frac{I_2}{J_2} \right)^2 dy - \frac{2u_0 q_z}{G_1} \int_0^h \rho \left( I - J \frac{I_2}{J_2} \right) \left( 1 - \frac{J}{J_2} \right) dy \right\} \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{q_z^2}{G_1^2} \int_0^h \rho \left( I - J \frac{I_2}{J_2} \right)^2 dy \right\} = -h \frac{\partial p}{\partial z} - h \frac{q_z}{G_1} \end{aligned} \quad (4.1-20)$$

Finalement le système à résoudre est :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial q_x}{\partial x} + u_0 \frac{\partial G_2}{\partial x} + \frac{\partial q_z}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q_x^2}{G_1^2} I_{11} - \frac{2q_x}{G_1} I_{12} + u_0^2 I_{22} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{q_x q_z}{G_1^2} I_{11} - \frac{2u_0 q_z}{G_1} I_{12} \right) &= -h \frac{\partial p}{\partial x} - h \frac{q_x}{G_1} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q_x q_z}{G_1^2} I_{11} - \frac{2u_0 q_z}{G_1} I_{12} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{q_z^2}{G_1^2} I_{11} \right) &= -h \frac{\partial p}{\partial z} - h \frac{q_z}{G_1} \end{aligned} \right. \quad (4.1-21)$$

Avec  $I_{11}$ ,  $I_{12}$  et  $I_{22}$  les termes relatifs à l'inertie :

$$I_{11} = \int_0^h \rho \left( I - J \frac{I_2}{J_2} \right)^2 dy; I_{12} = \int_0^h \rho \left( I - J \frac{I_2}{J_2} \right) \left( 1 - \frac{J}{J_2} \right) dy; \quad (4.1-22)$$

$$I_{22} = \int_0^h \rho \left( I - J \frac{I_2}{J_2} \right)^2 dy; G_2 = \int_0^h \rho \left( 1 - \frac{J}{J_2} \right) dy$$

Ce système sous forme adimensionnelle devient :

$$\frac{\partial \bar{q}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{G}_2}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{q}_z}{\partial \bar{z}} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\bar{q}_x^2}{\bar{G}_1^2} \bar{I}_{11} - \frac{2\bar{q}_x}{\bar{G}_1} \bar{I}_{12} + \bar{I}_{22} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{\bar{q}_x \bar{q}_z}{\bar{G}_1^2} \bar{I}_{11} - \frac{2\bar{q}_z}{\bar{G}_1} \bar{I}_{12} \right) = -\bar{h} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \frac{P^*}{R_e \varepsilon} - \bar{h} \frac{\bar{q}_x}{\bar{G}_1} \frac{1}{R_e \varepsilon} \quad (4.1-23)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\bar{q}_x \bar{q}_z}{\bar{G}_1^2} \bar{I}_{11} - \frac{2\bar{q}_z}{\bar{G}_1} \bar{I}_{12} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{\bar{q}_z^2}{\bar{G}_1^2} \bar{I}_{11} \right) = -\bar{h} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \frac{P^*}{R_e \varepsilon} - \bar{h} \frac{\bar{q}_z}{\bar{G}_1} \frac{1}{R_e \varepsilon}$$

Avec

$$\bar{q}_x = \frac{q_x}{Hu_0 \rho_0}; \bar{q}_z = \frac{q_z}{Hu_0 \rho_0}; \bar{I} = \frac{I \mu_0}{H^2}; \bar{J} = \frac{J \mu_0}{H}$$

$$\bar{I}_{11} = \frac{I_{11} \mu_0^2}{\rho_0 H^5}; \bar{I}_{12} = \frac{I_{12} \mu_0}{\rho_0 H^3}; \bar{I}_{22} = \frac{I_{22}}{\rho_0 H}; \bar{G}_1 = \frac{G_1 \mu_0}{\rho_0 H^3}; \bar{G}_2 = \frac{G_2}{\rho_0 H} \quad (4.1-24)$$

$$P^* = \frac{P_{atm} H^2}{Lu_0 \mu_0} \text{ pression modifiée}$$

#### 4.1.4 Equation de l'énergie

Au système (4.1-21) il faut ajouter la prise en compte de la température pour faire une étude THD. L'équation de l'énergie est donnée par :

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T u_i}{\partial x_i} \right) = \alpha T \left( \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p u_i}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( K \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial (u_j \tau_{ij})}{\partial x_j} \quad (4.1-25)$$

Dans cette équation  $K$  est la conductivité thermique ( $0.0262 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ),  $c_p$  est la capacité thermique ( $1006 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ), et  $\alpha$  est le coefficient de dilatation (valant  $1/T$  pour un gaz parfait). La méthode d'adimensionnement du paragraphe précédent est utilisée pour simplifier cette équation avec de plus les nombres adimensionnels suivants :

$$P_e = \frac{\rho_0 c_p u_0 H^2}{K_0 L} \text{ nombre de Peclet et } N_d = \frac{\mu_0 u_0^2}{T_0 K_0} \text{ nombre de dissipation} \quad (4.1-26)$$

$$\begin{aligned}
& P_e \bar{\rho} \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}_i} \right) \\
&= N_d \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_i} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} \right) + \varepsilon^2 N_d \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_i} \right)^2 \\
&+ \bar{\mu} N_d \left( \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right) \\
&+ \varepsilon^2 N_d \bar{\mu} \left( 2 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right)^2 + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right)^2 + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right. \\
&\left. + \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right)^2 + 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + 2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right)
\end{aligned} \tag{4.1-27}$$

Les termes en facteur de  $\varepsilon^2$  sont négligés, et le gradient de la pression selon  $y$  est nul. Il en découle l'équation suivante :

$$\rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \left( u \frac{\partial p}{\partial x} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left( \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \tag{4.1-28}$$



## 4.2. Validation de de l'outil numérique CERMAC

### 4.2.1 Introduction

Les résultats présentés ici sont comparés à ceux obtenus par Gross [90]. Le plan incliné simple (ou blochet) sera tout d'abord étudié, puis viendra le double profil dont les schémas sont donnés dans la figure 4-1. Les résultats sont donnés en fonction du nombre de compressibilité défini comme suit :

$$\Lambda = \frac{6\mu u_0 L}{H^2 p_a}$$

La longueur du patin  $L$  est notée  $B$  dans les résultats de Gross et donc sur les résultats de ce chapitre et  $p_a$  représente la pression atmosphérique.

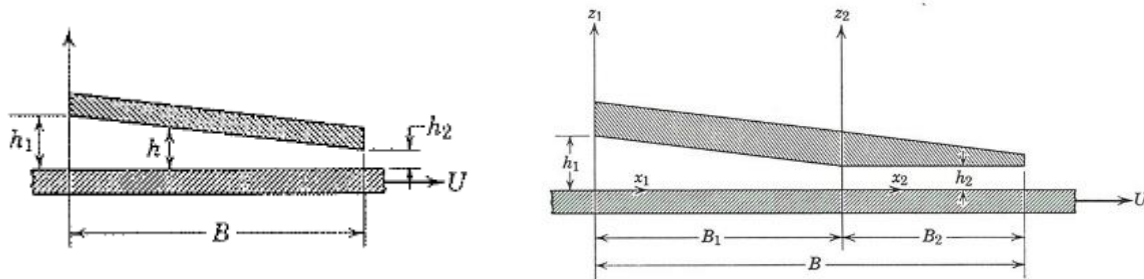


Figure 4-1 : Différentes géométries étudiées, blochet à gauche et double profil à droite [90].

### 4.2.2 Validation du code pour un plan incliné.

Les paramètres géométriques du blochet sont donnés dans le tableau 4-1 et la vitesse d'entraînement du fluide est calculée pour obtenir un certain nombre de compressibilité (cf. tableau 4-2).

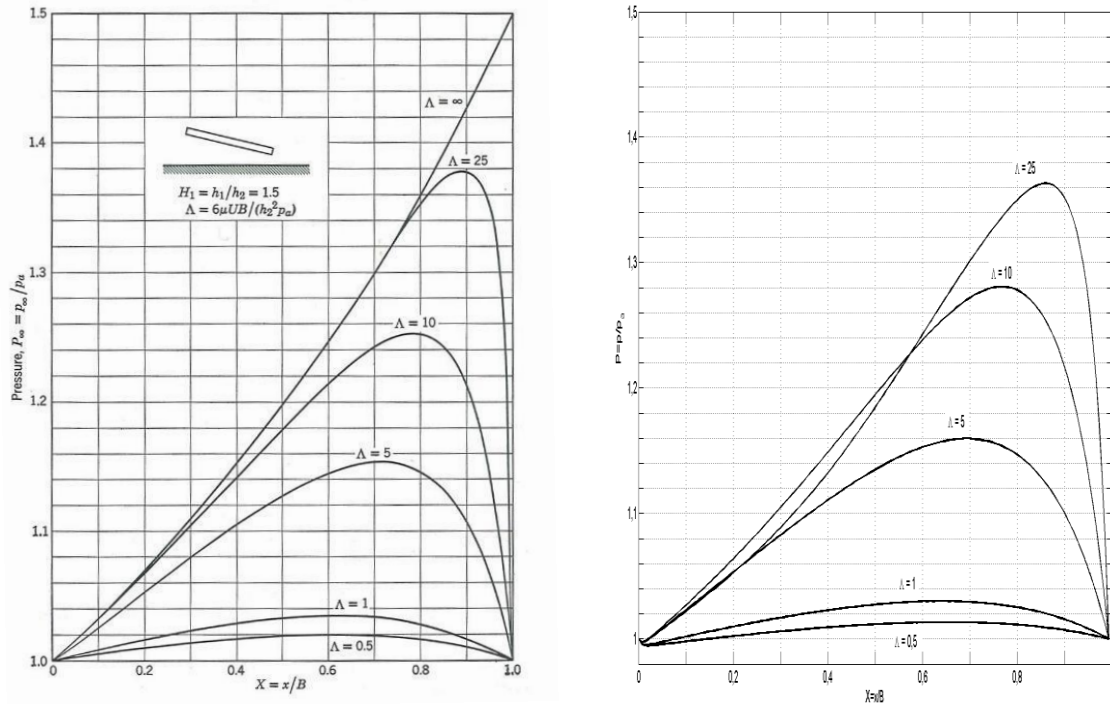
Longueur totale	$H_1/H_2$	Hauteur entrée	Hauteur sortie
50 mm	1.5	15 $\mu\text{m}$	10 $\mu\text{m}$

Tableau 4-1 : Géométrie du blochet utilisée pour valider le code CERMAC

Nombre de compressibilité	Vitesse associée (m/s)
0.5	1
1	2
5	10
10	20
25	50

Tableau 4-2 : Gamme de vitesse utilisée pour la validation du blochet.

Les résultats de la validation sont donnés dans la figure suivante et comparés à ceux obtenus par Gross.



**Figure 4-2:** Profils de pression obtenus pour un blochet, à gauche obtenus par Gross [90], à droite par CERMAC.

Les résultats obtenus par le code sont comparables à ceux de Gross. Il faut cependant remarquer deux différences : à l'entrée du patin il y a une légère dépression qui est due à l'initialisation de la méthode de tir, la seconde différence a lieu pour le nombre de compressibilité  $\Lambda = 10$ . Cette dernière provient de la grande sensibilité de la méthode de tir qui entraîne parfois une différence dans la pente de compression mais l'erreur reste acceptable ( $\approx 2\%$ ).

### 4.2.3 Validation du code pour un double profil.

Deux doubles profils vont être étudiés, ils se distinguent par leur différente rampe. Les paramètres géométriques sont donnés dans le tableau 4-3 et les vitesses correspondantes aux nombres de compressibilité sont données dans le tableau 4-4.

Longueur totale	$H_1/H_2$	Hauteur entrée	Hauteur sortie	Longueur rampe
50 mm	1.5	15 $\mu\text{m}$	10 $\mu\text{m}$	25 mm 33.3 mm

**Tableau 4-3 :** Géométries étudiées pour valider CERMAC avec un double profil.

Nombre de compressibilité	Vitesse associée
3.75	7.4 m/s
6.25	12.3 m/s
8.77	17.3 m/s
12.5	24.7 m/s

**Tableau 4-4 :** Gamme de vitesse étudiée pour valider CERMAC en double profil.

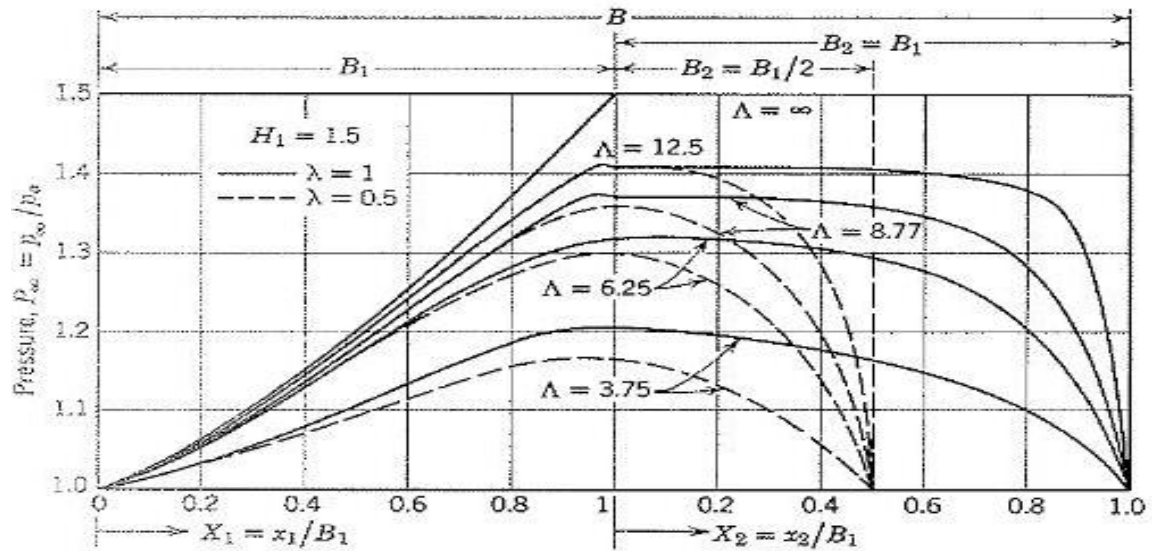


Figure 4-3 : Résultats d'un patin à double profil obtenu par Gross [90].

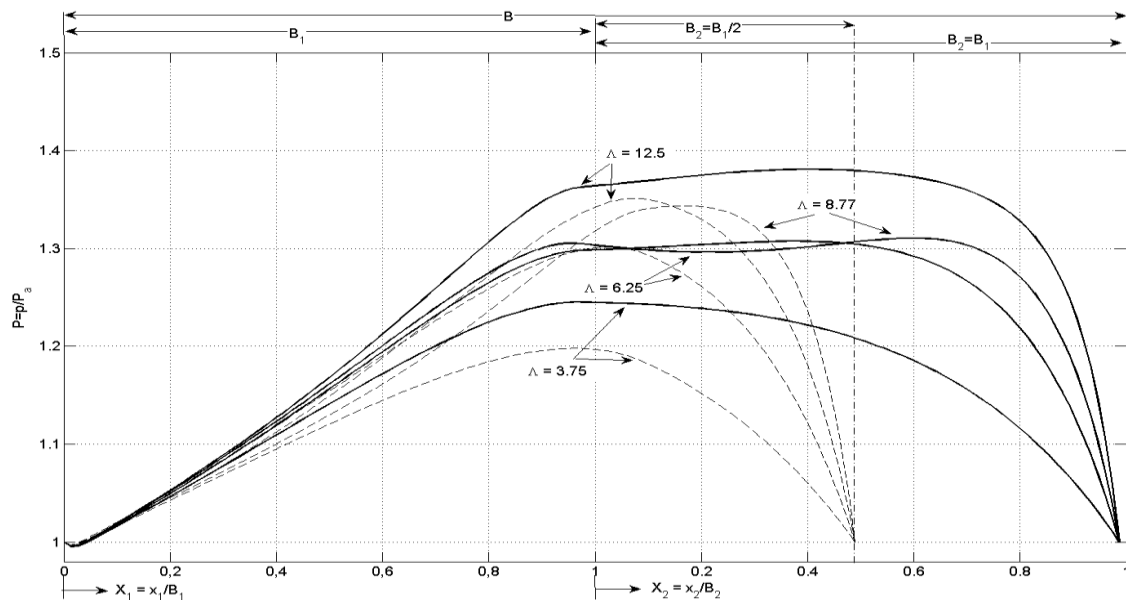


Figure 4-4 : Résultats numériques pour un patin à double profil

Les résultats du code numérique sont semblables aux résultats de Gross. Il faut noter quand même quelques erreurs dans l'amplitude de la pression (environ 5% pour le cas où  $\Lambda = 12.5$ ) et dans la forme du profil (pour  $\Lambda = 8.77$ ). Ces erreurs proviennent de la méthode de tir qui est plus sensible que dans le cas du blochet à cause de la discontinuité géométrique.

## 4.3. Démonstration des équations de Navier Stokes adaptées aux films minces

### 4.3.1 Adimensionnement du système

Les équations de la mécanique sont adimensionnées de la même façon que pour établir le système d'équations de Reynolds Modifiées. La pression en revanche n'est plus adimensionnée comme une pression capillaire, mais comme une pression dynamique. Les équations ne seront pas simplifiées afin de pouvoir traiter un très grand nombre de cas y compris pour des films épais. Les équations de la mécanique sont données par :

- Equation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (4.3-1)$$

- Equations de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (4.3-2)$$

- Equation de l'énergie :

$$\frac{\partial(E_t)}{\partial t} + \frac{\partial(u_i E_t)}{\partial x_i} = -\frac{\partial p u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial(u_j \tau_{ij} - Q_i)}{\partial x_j} \quad (4.3-3)$$

Avec  $\tau_{ij}$  le tenseur visqueux et  $E_t$  l'énergie totale définis par :

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \text{ et } E_t = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2) \quad (4.3-4)$$

Et la densité de flux de chaleur qui est donnée par :

$$Q_i = K \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (4.3-5)$$

Le système est adimensionné avec les variables suivantes :

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{y} = \frac{y}{H}, \bar{z} = \frac{z}{L}; \quad \bar{u} = \frac{u}{u_0}, \bar{v} = \frac{vL}{u_0 H}, \bar{w} = \frac{w}{u_0}; \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}; \quad (4.3-6)$$

$$\bar{t} = \frac{t u_0}{L}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho_0 u_0^2}, \quad \bar{T} = \frac{T}{T_0}$$

Les équations adimensionnelles sont :

- Conservation de la masse :

$$\left( \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u})}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{v})}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{w})}{\partial \bar{z}} \right) = 0 \quad (4.3-7)$$

- Conservation de la quantité de mouvement sur x :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial \bar{\rho}\bar{u}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u}^2)}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u}\bar{v})}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u}\bar{w})}{\partial \bar{z}} \right) \\ &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\bar{\mu}}{\varepsilon \mathfrak{R}_e} \left( 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_i} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( \frac{\bar{\mu}}{\varepsilon \mathfrak{R}_e} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \right) \\ &+ \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{\bar{\mu}}{\varepsilon \mathfrak{R}_e} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.3-8)$$

- Conservation de la quantité de mouvement sur y :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial \bar{\rho}\bar{v}\varepsilon^2}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u}\bar{v}\varepsilon^2)}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{v}^2\varepsilon^2)}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{v}\bar{w}\varepsilon^2)}{\partial \bar{z}} \right) \\ &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\bar{\mu}}{\varepsilon \mathfrak{R}_e} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( \frac{\bar{\mu}}{\varepsilon \mathfrak{R}_e} \left( 2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_i} \right) \right) \\ &+ \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{\bar{\mu}}{\varepsilon \mathfrak{R}_e} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.3-9)$$

- Conservation de la quantité de mouvement sur z :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial \bar{\rho}\bar{w}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u}\bar{w})}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{v}\bar{w})}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{w}^2)}{\partial \bar{z}} \right) \\ &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\bar{\mu}}{\varepsilon \mathfrak{R}_e} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( \frac{\bar{\mu}}{\varepsilon \mathfrak{R}_e} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right) \right) \\ &+ \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{\bar{\mu}}{\varepsilon \mathfrak{R}_e} \left( 2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_i} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.3-10)$$

- Conservation de l'énergie :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(E_t)}{\partial t} + \frac{\partial(u_i E_t)}{\partial x_i} + \frac{\partial p u_i}{\partial x_i} \\ &= \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \bar{u} \frac{\bar{\mu}}{\varepsilon \mathfrak{R}_e} \left( 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_i} \right) + \bar{v} \frac{\bar{\mu}}{\varepsilon \mathfrak{R}_e} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) + \bar{w} \frac{\bar{\mu}}{\varepsilon \mathfrak{R}_e} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right) \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( \bar{u} \frac{\bar{\mu}}{\varepsilon \mathfrak{R}_e} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) + \varepsilon^2 \bar{v} \frac{\bar{\mu}}{\varepsilon \mathfrak{R}_e} \left( 2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_i} \right) + \bar{w} \frac{\bar{\mu}}{\varepsilon \mathfrak{R}_e} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right) \right) \\ &+ \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \bar{u} \frac{\bar{\mu}}{\varepsilon \mathfrak{R}_e} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right) + \bar{v} \frac{\bar{\mu}}{\varepsilon \mathfrak{R}_e} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right) + \bar{w} \frac{\bar{\mu}}{\varepsilon \mathfrak{R}_e} \left( 2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_i} \right) \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \frac{-\varepsilon^2}{(\gamma - 1) M_0^2 \varepsilon \mathfrak{R}_e P_r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( \frac{-1}{(\gamma - 1) M_0^2 \varepsilon \mathfrak{R}_e P_r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{-\varepsilon^2}{(\gamma - 1) M_0^2 \varepsilon \mathfrak{R}_e P_r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} \right) \end{aligned} \quad (4.3-11)$$

Le système sous forme vectorielle s'écrit :

$$\underbrace{\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{t}}}_{\text{Contribution temporelle}} = \underbrace{-\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{z}}}_{\text{Termes Euler}} + \underbrace{\frac{\partial \bar{F}_v}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{G}_v}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{H}_v}{\partial \bar{z}}}_{\text{Termes visqueux}} \quad (4.3-12)$$

Avec :

$$\bar{f} = \begin{Bmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho}\bar{u} \\ \bar{\rho}\bar{v}\varepsilon^2 \\ \bar{\rho}\bar{w} \\ \bar{E}_t \end{Bmatrix}; \quad \bar{F}(\bar{f}) = \begin{Bmatrix} \bar{\rho}\bar{u} \\ \bar{\rho}\bar{u}^2 + \bar{p} \\ \bar{\rho}\bar{u}\bar{v}\varepsilon^2 \\ \bar{\rho}\bar{u}\bar{w} \\ (\bar{E}_t + \bar{p})\bar{u} \end{Bmatrix}; \quad \bar{G}(\bar{f}) = \begin{Bmatrix} \bar{\rho}\bar{v} \\ \bar{\rho}\bar{u}\bar{v} \\ \bar{\rho}\bar{v}^2\varepsilon^2 + \bar{p} \\ \bar{\rho}\bar{v}\bar{w} \\ (\bar{E}_t + \bar{p})\bar{v} \end{Bmatrix}; \quad \bar{H}(\bar{f}) = \begin{Bmatrix} \bar{\rho}\bar{w} \\ \bar{\rho}\bar{u}\bar{w} \\ \bar{\rho}\bar{v}\varepsilon^2\bar{w} \\ \bar{\rho}\bar{w}^2 + \bar{p} \\ (\bar{E}_t + \bar{p})\bar{w} \end{Bmatrix}; \quad (4.3-13)$$

$$\bar{F}_v(\bar{f}) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \varepsilon^2\bar{\sigma}_{11} \\ \varepsilon^2\bar{\sigma}_{12} \\ \varepsilon^2\bar{\sigma}_{13} \\ \varepsilon^2(\bar{\sigma}_{11}\bar{u} + \bar{\sigma}_{12}\bar{v} + \bar{\sigma}_{13}\bar{w} + \bar{Q}_1) \end{Bmatrix}; \quad \bar{G}_v(\bar{f}) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{\sigma}_{12} \\ \varepsilon^2\bar{\sigma}_{22} \\ \varepsilon^2\bar{\sigma}_{23} \\ \bar{\sigma}_{12}\bar{u} + \varepsilon^2\bar{\sigma}_{22}\bar{v} + \bar{\sigma}_{23}\bar{w} + \bar{Q}_2 \end{Bmatrix}; \quad (4.3-14)$$

$$\bar{H}_v(\bar{f}) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \varepsilon^2\bar{\sigma}_{13} \\ \varepsilon^2\bar{\sigma}_{23} \\ \varepsilon^2\bar{\sigma}_{33} \\ \varepsilon^2(\bar{\sigma}_{13}\bar{u} + \bar{\sigma}_{23}\bar{v} + \bar{\sigma}_{33}\bar{w} + \bar{Q}_3) \end{Bmatrix};$$

Avec

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11} &= \frac{\bar{\mu}}{\varepsilon\mathfrak{R}_e} \left( \frac{4}{3} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) \right) & \bar{\sigma}_{12} &= \frac{\bar{\mu}}{\varepsilon\mathfrak{R}_e} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \\ \bar{\sigma}_{22} &= \frac{\bar{\mu}}{\varepsilon\mathfrak{R}_e} \left( \frac{4}{3} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) \right) & \bar{\sigma}_{13} &= \frac{\bar{\mu}}{\varepsilon\mathfrak{R}_e} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right) \\ \bar{\sigma}_{33} &= \frac{\bar{\mu}}{\varepsilon\mathfrak{R}_e} \left( \frac{4}{3} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right) \right) & \bar{\sigma}_{23} &= \frac{\bar{\mu}}{\varepsilon\mathfrak{R}_e} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right) \end{aligned} \quad (4.3-15)$$

$$\bar{Q}_i = \frac{-1}{(\gamma - 1)M_0^2 \varepsilon \mathfrak{R}_e P_r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}_i} \quad (4.3-16)$$

$$\bar{E}_t = \frac{\bar{p}}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \bar{\rho} (\bar{u}^2 + \varepsilon^2 \bar{v}^2 + \bar{w}^2); \quad P_r = \frac{\mu_0 c p_0}{K_0}; \quad M_0^2 = \frac{u_0^2}{\gamma R T_0} \text{ et } \mathfrak{R}_e = \frac{\rho_0 u_0 H}{\mu_0} \quad (4.3-17)$$

L'équation des gaz parfait et la définition de la vitesse du son en adimensionnel sont données par les formules suivantes :

$$\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} = \frac{\bar{T}}{\gamma M_r^2}; \quad \bar{c}^2 = \frac{\gamma \bar{p}}{\bar{\rho}} \quad (4.3-18)$$

### 4.3.2 Calcul des valeurs propres.

Le calcul des valeurs propres et des vecteurs propres se fait à partir du système dimensionné et pourront être adimensionnés avec les nombres donnés dans la relation (4.3-6).

La méthode de calcul sera présentée pour  $F(f)$  uniquement car l'extension aux autres dimensions se fait aisément. Dans l'étude des gaz parfaits certaines formules sont à connaître et sont les suivantes [108]:

$$\begin{cases} E_t = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2 + w^2) \\ p = \rho RT = (\gamma - 1) \left( E_t - \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2 + w^2) \right) \\ c^2 = \frac{\gamma p}{\rho} = \gamma(\gamma - 1) \left( \frac{E_t}{\rho} - \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) \right) \\ h_e = \frac{E_t + p}{\rho} = \frac{c^2}{(\gamma - 1)} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) \end{cases} \quad (4.3-19)$$

Avec  $h_e$  qui représente l'enthalpie du système et qui permet de relier l'énergie totale du système à la pression, à la vitesse du son et à l'énergie cinétique.

#### 4.3.2.1 Calcul de la jacobienne

La jacobienne va permettre de calculer le polynôme caractéristique du vecteur de flux, puis d'en déduire les valeurs propres. Elle se calcule grâce à la formule suivante :

$$A_{ij} = \frac{\partial F_i(f)}{\partial f_j} \quad (4.3-20)$$

Pour le calcul de la jacobienne, il faut exprimer le vecteur  $F$  en fonction des variables de  $f$  qui est réécrit de la manière suivante :

$$f = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E_t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{Bmatrix} \quad (4.3-21)$$

Le vecteur  $F$  peut ainsi être réécrit avec cette nouvelle convention comme suit :

$$F = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho v \\ \rho w \\ (E_t + p)u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{x_2^2}{x_1} + (\gamma - 1)x_5 - \frac{1}{2}(\gamma - 1) \left( \frac{x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}{x_1} \right) \\ \frac{x_2 x_3}{x_1} \\ \frac{x_2 x_4}{x_1} \\ \gamma \frac{x_2 x_5}{x_1} - \frac{1}{2}(\gamma - 1) \left( \frac{x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}{x_1} \right) \frac{x_2}{x_1} \end{Bmatrix} \quad (4.3-22)$$

Après calcul, la jacobienne est calculée en dérivant par  $x_i$  chaque terme du vecteur  $F(f)$  lui-même exprimé avec les  $x_i$ . Ainsi la jacobienne est la suivante :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}(\gamma - 1) - u^2 & (3 - \gamma)u & -v(\gamma - 1) & -w(\gamma - 1) & (\gamma - 1) \\ -uv & v & u & 0 & 0 \\ -uw & w & 0 & u & 0 \\ u\left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}(\gamma - 1) - h_e\right) & h_e - (\gamma - 1)u^2 & -uv(\gamma - 1) & -uw(\gamma - 1) & \gamma u \end{pmatrix} \quad (4.3-23)$$

#### 4.3.2.2 Calcul des valeurs propres

Le calcul des valeurs propres est le suivant :  $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ . Les étapes de calcul sont les suivantes :

$$P(\lambda) = -(\gamma - 1) \det(M) + (\gamma u - \lambda) \det(N) \quad (4.3-24)$$

Avec :

$$M = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -uv & v & u - \lambda & 0 \\ -uw & w & 0 & u - \lambda \\ u\left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}(\gamma - 1) - h_e\right) & h_e - (\gamma - 1)u^2 & -uv(\gamma - 1) & -uw(\gamma - 1) \end{pmatrix} \quad (4.3-25)$$

Et

$$N = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}(\gamma - 1) - u^2 & (3 - \gamma)u - \lambda & -v(\gamma - 1) & -w(\gamma - 1) \\ -uv & v & u - \lambda & 0 \\ -uw & w & 0 & u - \lambda \end{pmatrix} \quad (4.3-26)$$

Ce qui donne ;

$$\begin{aligned} \det(M) &= (u - \lambda)^2 \left\{ \lambda((\gamma - 1)u^2 - h_e) + u \left( h_e + \frac{\gamma - 1}{2}(v^2 + w^2 - u^2) \right) \right\} \\ \det(N) &= (u - \lambda)^2 \left\{ \lambda^2 - \lambda(3 - \gamma)u + u^2 - (\gamma - 1) \frac{u^2 - v^2 - w^2}{2} \right\} \end{aligned} \quad (4.3-27)$$

Finalement il en découle :

$$P(\lambda) = (u - \lambda)^2 (Q(\lambda)) \quad (4.3-28)$$

Avec :

$$\begin{aligned} Q(\lambda) &= -\lambda^3 + 3u\lambda^2 + \lambda \left( -\frac{\gamma + 5}{2}u^2 - \frac{\gamma - 1}{2}(v^2 + w^2) + (\gamma - 1)h_e \right) \\ &\quad + u \left( \frac{\gamma + 1}{2}u^2 + \frac{\gamma - 1}{2}(v^2 + w^2) - (\gamma - 1)h_e \right) \end{aligned} \quad (4.3-29)$$



Le polynôme  $Q(\lambda)$  a une racine évidente  $u$ . Le terme  $(u - \lambda)$  peut être mis en facteur d'un autre polynôme de degré 2. Les coefficients de ce polynôme de degré 2 sont déterminés par identification et ses racines sont calculées à l'aide du déterminant. Le polynôme  $P(\lambda)$  peut donc s'écrire en fonction de ses racines comme suit :

$$P(\lambda) = (u - \lambda)^3(\lambda - u - c)(\lambda - u + c) \quad (4.3-30)$$

Les 5 valeurs propres du système sont les suivantes :

$$\lambda_1 = u - c; \lambda_2 = u; \lambda_3 = u; \lambda_4 = u; \lambda_5 = u + c \quad (4.3-31)$$

Ces valeurs deviennent en adimensionnel :

$$\bar{\lambda}_1 = \bar{u} - \bar{c}; \bar{\lambda}_2 = \bar{u}; \bar{\lambda}_3 = \bar{u}; \bar{\lambda}_4 = \bar{u}; \bar{\lambda}_5 = \bar{u} + \bar{c} \quad (4.3-32)$$

### 4.3.2.3 Valeurs propres et vecteurs propres pour G et H

La jacobienne de  $G$  et de  $H$  peuvent être obtenues à partir de la jacobienne  $A_1$  dans la relation (4.3-23). Dans le cas de la jacobienne de  $G$ , celle-ci peut être obtenue en inversant les deuxièmes et troisièmes lignes ainsi que les deuxièmes et troisièmes colonnes de  $A_1$  et remplacement de  $u$  par  $v$ . Chacun des échanges de colonnes et de lignes est une permutation. Le nombre de permutation étant pair, il n'y aura pas de changement de signe à faire pour le calcul du déterminant. Le polynôme caractéristique peut être déduit à partir de celui de  $A_1$  en changeant  $u$  par  $v$  et les racines qui en découlent sont les suivantes :

$$\lambda_1 = v - c; \lambda_2 = v; \lambda_3 = v; \lambda_4 = v; \lambda_5 = v + c \quad (4.3-33)$$

Celles-ci prennent une forme différente lorsqu'elles sont écrites en adimensionnel comme suit :

$$\bar{\lambda}_1 = \bar{v} - \frac{\bar{c}}{\varepsilon}; \bar{\lambda}_2 = \bar{v}; \bar{\lambda}_3 = \bar{v}; \bar{\lambda}_4 = \bar{v}; \bar{\lambda}_5 = \bar{v} + \frac{\bar{c}}{\varepsilon} \quad (4.3-34)$$

Dans le cas de la jacobienne de  $H$ , celle-ci est obtenue en inversant les deuxièmes et quatrièmes lignes ainsi que les deuxièmes et quatrièmes colonnes de  $A_1$  et remplacement de  $u$  par  $w$ . Le polynôme caractéristique peut être déduit à partir de celui de  $A_1$  en changeant  $u$  par  $w$  et les racines qui en découlent sont les suivantes :

$$\lambda_1 = w - c; \lambda_2 = w; \lambda_3 = w; \lambda_4 = w; \lambda_5 = w + c \quad (4.3-35)$$

Celles-ci s'écrivent sous forme adimensionnelle comme suit :

$$\bar{\lambda}_1 = \bar{w} - \bar{c}; \bar{\lambda}_2 = \bar{w}; \bar{\lambda}_3 = \bar{w}; \bar{\lambda}_4 = \bar{w}; \bar{\lambda}_5 = \bar{w} + \bar{c} \quad (4.3-36)$$

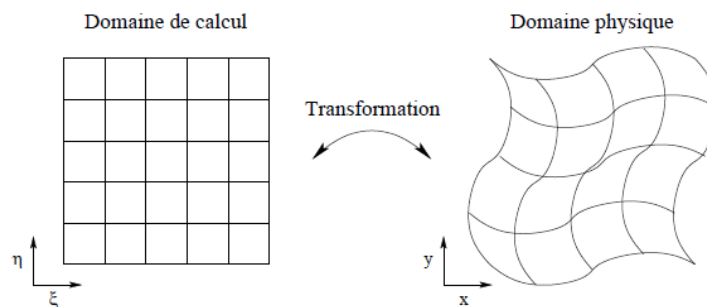
## 4.4. Prise en compte de la géométrie et méthode de raffinement de maillage

### 4.4.1 Introduction.

Le schéma à capture de choc WENO3, comme la plupart des schémas d'ordre élevé, s'utilise uniquement dans le cas d'un maillage régulier, ce qui n'est pas le cas dans la plupart des simulations numériques. Pour pouvoir utiliser ce schéma sur n'importe quel type de maillage il faut passer par une transformation afin de passer d'un maillage quelconque à un maillage régulier.

### 4.4.2 Changement de variable généralisé et nouveau système à résoudre.

Le domaine physique a un système de coordonnées noté  $(x, y, z)$  et le domaine numérique a un système de coordonnées noté  $(\xi, \eta, \zeta)$  et une transformation permet de passer de l'un à l'autre.



**Figure 4-5:** Transformation liant l'espace physique à l'espace de calcul [109].

Pour passer d'un espace à l'autre, il faut utiliser la matrice jacobienne définie comme suit :

$$[j] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \quad (4.4-1)$$

Pour faire le chemin inverse, il faut inverser la relation et donc la jacobienne :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad [j] = [J]^{-1} \quad (4.4-2)$$

Pour le système (4.3-13) exprimé dans le domaine physique, ce changement de variable vers le domaine numérique s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial(F + F_v)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial(F + F_v)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial(F + F_v)}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ + \frac{\partial(G + G_v)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial(G + G_v)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial(G + G_v)}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ + \frac{\partial(H + H_v)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial(H + H_v)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial(H + H_v)}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \vec{0} \end{aligned} \quad (4.4-3)$$

Par ailleurs chaque dérivée doit être soumise à ce changement de variable ; en particulier celles du tenseur des contraintes (4.3-15).

#### 4.4.3 Définition d'un maillage dans le domaine physique

Le maillage est défini à partir de la géométrie adimensionnée, c'est-à-dire du même ordre de grandeur en longueur et en hauteur, ce qui implique de déformer les angles de la géométrie réelle. La figure 4-6 représente un double profil sous forme adimensionnée.

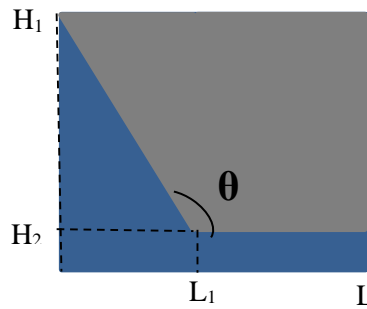


Figure 4-6 : Représentation du domaine adimensionnel d'un double profil.

Le maillage doit s'adapter à la contrainte que représente l'angle du patin. Si le maillage du domaine physique compte trop peu de mailles dans le sens de l'écoulement, celles situées dans le convergent seront très allongées et créeront de l'erreur numérique. Ainsi le maillage physique est défini en fonction de cet angle  $\theta$  afin que les mailles soient environ du même ordre de grandeur en largeur et en hauteur dans cette zone.

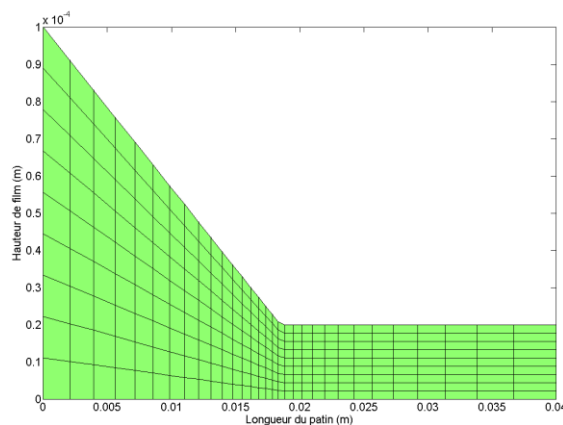


Figure 4-7 : Exemple de maillage raffiné pour un double profil utilisé dans CAMEAS.

Comme le montre la figure 4-7, le maillage est raffiné au niveau du changement d'inclinaison et il est détendu vers la sortie du patin. Pour définir le maillage, le calcul de la hauteur  $h(x)$  et de l'angle se fait à partir des hauteurs et des longueurs données en entrée (cf. figure 4-6).

$$\begin{cases} \theta = \tan^{-1} \left( \frac{H_1 - H_2}{L_1} \right) \\ h(x) = H_1 + \frac{H_2 - H_1}{L_1} x \end{cases} \quad (4.4-4)$$

La taille des mailles dans la hauteur est ensuite calculée à partir du nombre de points dans l'épaisseur souhaité.

$$\Delta y(x) = \frac{h(x)}{(N_2 - 1)} \quad (4.4-5)$$

Ensuite la taille des mailles dans le sens de l'écoulement est déduite de relation précédente comme suit :

$$\Delta x(x) = a. \Delta y(x). \cos(\theta) \quad (4.4-6)$$

Le coefficient  $a$  permet d'augmenter la taille des mailles pour en diminuer le nombre au besoin. La taille des mailles dans l'entrée et la sortie est définie à partir d'une suite géométrique dont on choisit la raison  $b$  de la manière suivante :

$$\Delta x(i) = b. \Delta x(i - 1) \quad (4.4-7)$$

## 4.5. Validation de l'outil numérique CAMEAS

### 4.5.1 Validation de la routine WENO

#### 4.5.1.1 Présentation

La validation de la capture de choc se fera par le biais de problèmes classiques de l'aérodynamique sur les équations d'Euler 2D suivantes.

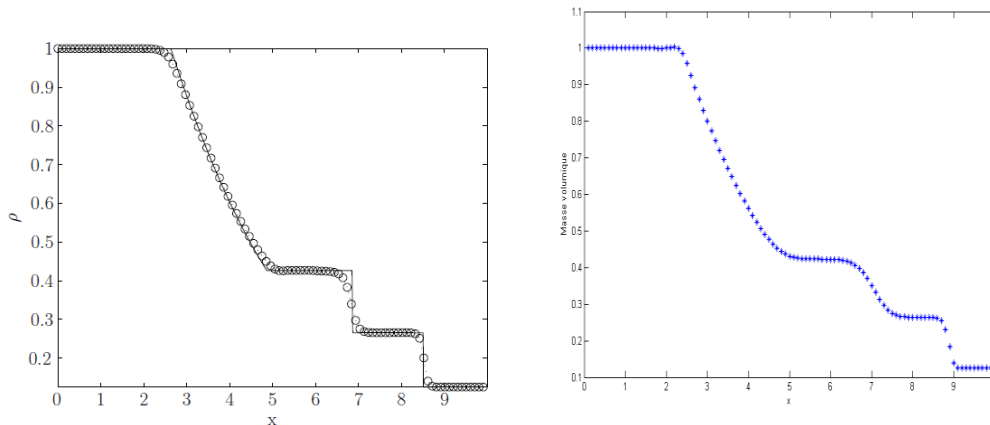
$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E_t \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (E_t + p)u \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (E_t + p)v \end{pmatrix} = 0 \quad (4.5-1)$$

#### 4.5.1.2 Résultats 1D

Deux problèmes de Riemann sont résolus ici : celui de Sod et celui de Lax. Ces derniers se définissent par une condition initiale contenant une discontinuité qui évolue vers différents fronts d'ondes. Le problème sera étudié sur un domaine de longueur 10, et sur un temps de 0,2s. La condition initiale de Sod est la suivante :

$$\begin{cases} \rho_L = 1 \\ u_L = 0 \\ p_L = 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \rho_D = 0.125 \\ u_D = 0 \\ p_D = 0.1 \end{cases} \quad (4.5-2)$$

Les résultats sont comparés à la solution analytique et aux résultats obtenus par Crespo [109].

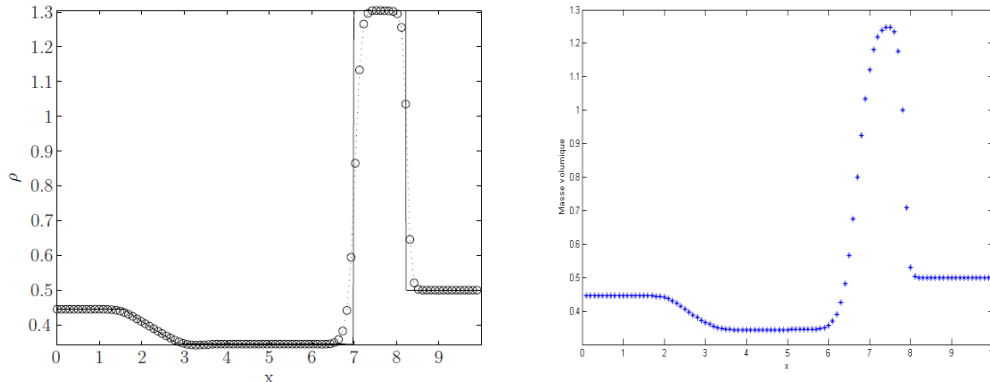


**Figure 4-8** : Solution du problème de Sod en masse volumique (résultats de Crespo (-o-) et solution analytique (—) à gauche, résultats de CAMEAS à droite).

Les résultats obtenus par CAMEAS correspondent aux résultats obtenus par Crespo avec plus de diffusion numérique mais très proches de la solution analytique. Pour la seconde validation, le problème de Lax est donné par la condition initiale suivante :

$$\begin{cases} \rho_L = 0.445 \\ u_L = 0.698 \\ p_L = 3.528 \end{cases} ; \begin{cases} \rho_D = 0.5 \\ u_D = 0 \\ p_D = 0.571 \end{cases} \quad (4.5-3)$$

Les résultats sont comparés à la solution analytique et à ceux obtenus par Crespo au temps 0.1s.

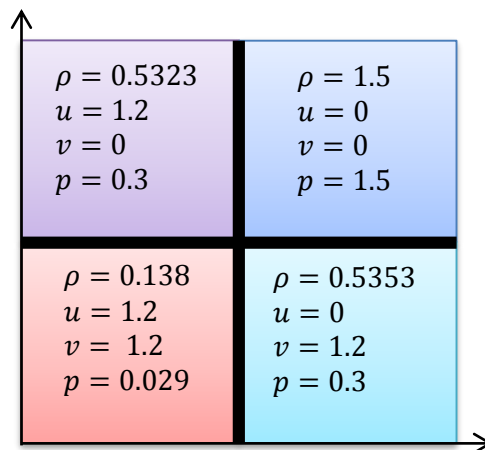


**Figure 4-9:** Solution du problème de Lax en masse volumique (résultats de Crespo (-o-) et solution analytique (—) à gauche, résultats de CAMEAS à droite).

Un phénomène de diffusion numérique lié à la méthode de séparation des flux diminue légèrement l'amplitude du pic et arrondi les discontinuités mais les résultats sont très proches de la solution analytique. La routine WENO programmée dans CAMEAS capture donc bien les chocs.

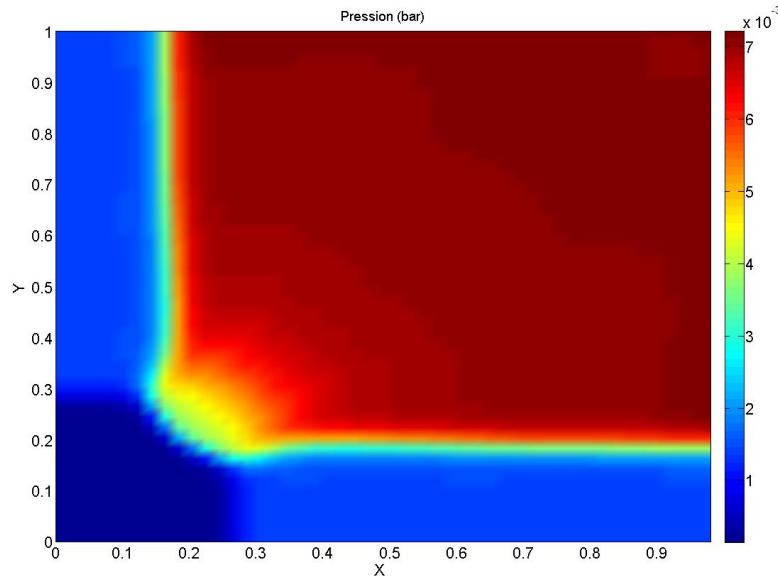
#### 4.5.1.3 Euler 2D

Pour valider la routine WENO dans la seconde dimension il existe deux méthodes : programmer les problèmes précédents dans l'autre direction, et résoudre un problème de Riemann 2D. La première méthode a été réalisée et donne les mêmes résultats que dans le paragraphe précédent. La seconde méthode est la résolution d'un problème contenant deux discontinuités qui sont les suivantes :



**Figure 4-10 :** Condition initiale du problème de Riemann 2D.

Les résultats en terme de pression sont donnés dans la figure suivante au temps  $t = 0.8s$ .



**Figure 4-11 :** Champs de pression du problème de Riemann 2D au temps  $t=0.8s$ .

Les chocs se sont déplacés du milieu du domaine vers l'origine du repère de façon symétrique. Il n'y a pas d'oscillations de la solution ni d'interférences au niveau de l'intersection des zones. Ces résultats sont corrects par rapport à ceux rencontrés dans la littérature (Hirsch [98]). La routine WENO est donc validée pour les deux directions.

#### 4.5.2 Validation en film mince

Pour valider la forme adimensionnelle des équations de Navier-Stokes et la routine visqueuse, la simulation d'écoulements subsoniques visqueux en film mince va être faite. La géométrie étudiée est la suivante :

Longueur totale	Longueur rampe	Hauteur entrée	Hauteur sortie	$\varepsilon$
40 mm	20 mm	30 $\mu\text{m}$	20 $\mu\text{m}$	$5.10^{-4}$

**Tableau 4-5 :** Géométrie utilisée pour la validation de CAMEAS en film mince.

Vitesse en m/s	Nombre compressibilité $\Lambda$
37	3.75
62	6.25
86	8.77
123	12.5

**Tableau 4-6 :** Gamme de vitesse étudiée pour la validation de CAMEAS en film mince.

Les résultats en profil de pression sont donnés dans la figure suivante et sont comparés aux résultats obtenus par Gross (1962). Ici une seule des deux géométries de Gross a été étudiée, il faut comparer les résultats de la Figure 4-13 aux lignes continues de la figure 4-12.

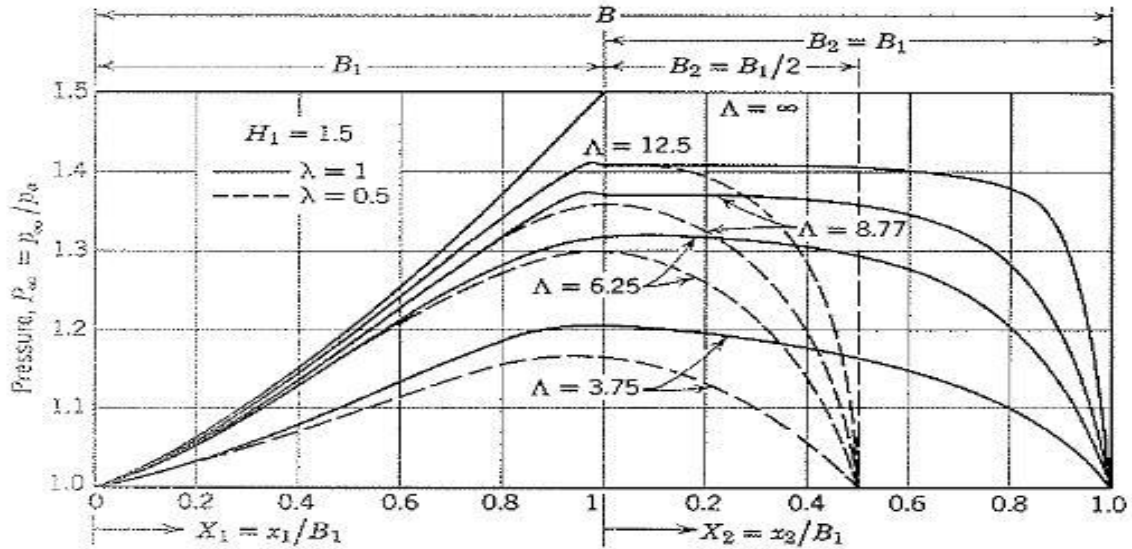


Figure 4-12 : Profils de pression d'un patin à double profil obtenu par Gross [90].

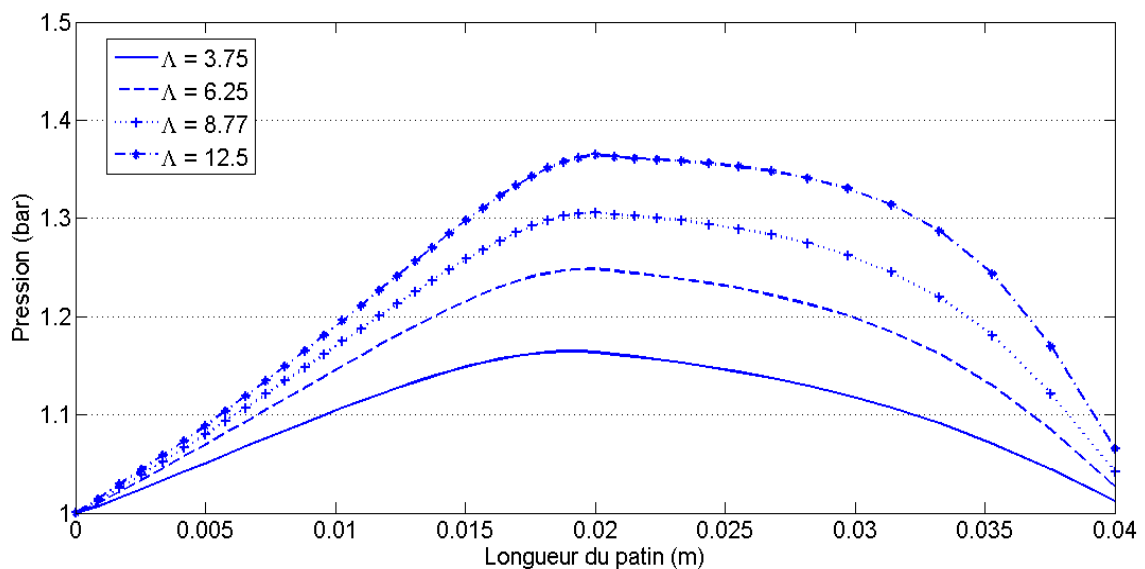


Figure 4-13 : Profils de pression d'un patin à double profil obtenu par CAMEAS.

Les résultats obtenus sous-estiment légèrement la pression (environ 5%) en particulier vers la sortie du patin. Une différence au niveau de la condition limite en sortie peut également être remarquée puisque la pression atmosphérique est imposée dans les points fantômes. Le code CAMEAS est quand même capable de calculer des écoulements en film mince et d'obtenir les bons ordres de grandeurs, ces résultats valident par la même occasion la routine visqueuse.



FOLIO ADMINISTRATIF

THESE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE  
LYON

NOM : DUPUY	DATE de SOUTENANCE : 10 décembre 2015
(avec précision du nom de jeune fille, le cas échéant)	
Prénoms : Florence	
TITRE : Etude tribologique d'une butée aérodynamique en régime supersonique	
NATURE : Doctorat	Numéro d'ordre : 2015ISAL0124
Ecole doctorale : MEGA (Mécanique, Energétique, Génie civil et Acoustique)	
Spécialité : Mécanique	
Code B.I.U. – Lyon : T 50/210/19 / et bis	CLASSE :
RESUME :	
<p>L'amélioration des turbomachines passe par l'augmentation de leurs vitesses de rotation et peut conduire leurs composants à se trouver en présence d'un régime d'écoulement supersonique, en particulier leurs systèmes de pivoterie à air. L'étude d'une butée aérodynamique en régime supersonique est traitée dans ce manuscrit et s'inscrit dans la continuité de la recherche sur les butées hautes vitesses mais qui n'a que très peu été abordée dans la littérature. Ce problème se trouve à la frontière entre deux domaines scientifiques : la lubrification et l'aérodynamique. L'enjeu ici est développer un modèle réaliste traduit par un code de calcul écrit en FORTRAN, capable de capturer les phénomènes liés au régime supersonique (choc, détente) et d'être adapté à la géométrie des films minces.</p> <p>Pour cela, deux modèles ont été développés et codés à l'aide de la méthode numérique des différences finies : les équations de Reynolds Modifiées et les équations de Navier-Stokes adaptées aux films minces. Ce premier modèle est une extension de l'équation de Reynolds généralisée, prenant en compte l'inertie et déjà utilisé dans des études de la lubrification. Le second modèle a été établi à partir des équations de Navier-Stokes et conserve leur forme. Ce système possède l'avantage de pouvoir utiliser les outils numériques adaptés à la capture de choc (WENO). La comparaison des deux modèles montre que les équations de Reynolds Modifiées ne sont pas suffisantes pour l'étude d'un écoulement film mince en régime supersonique.</p> <p>Les résultats des simulations menées montrent la présence d'une détente sur le changement d'inclinaison du double profil qui dépend de la vitesse, de la température et de l'angle de la géométrie. Cette détente, même dans des conditions sévères de fonctionnement (grandes vitesses ou fort convergent), n'a pas beaucoup d'influence sur le comportement global statique de la butée. Les résultats montrent également que contrairement à la théorie des écoulements supersoniques, aucun choc n'est observé en film mince supersonique. Une transition géométrique obtenue par homothétie, entre un écoulement contenant un choc et un autre n'en contenant pas, a été observée à une certaine valeur du rapport des longueurs d'adimensionnement pour une vitesse et une géométrie donnée. L'extrapolation de ces résultats pour un cas réaliste montre qu'un choc ne peut se produire qu'à partir de 5500 m/s pour une épaisseur de film de 40 <math>\mu\text{m}</math> avec <math>\varepsilon = 0.001</math>. Il est donc peu probable qu'un choc ne se produise dans une butée en conditions</p>	

supersoniques dans le cadre industriel.

MOTS CLES : lubrification, butée aérodynamique, compressible, choc, supersonique, WENO

Laboratoire(s) de recherches : LaMCoS (Laboratoire de Mécanique des Contacts et Structures)

Directeur de thèse : Professeur BOU-SAÏD Benyebka

Président du jury : M. SEEMANN Wolfgang Professeur Karlsruhe Institute of Technology

Composition du jury :

Rapporteur : M. TICHY John Professeur Rensselaer Polytechnic Institute

Rapporteur : M. BRUNETIERE Noël Chargé de Recherches Institut Pprime Poitiers

Examineur : M. HAJJAM Mohamed Professeur Institut Pprime Poitiers

Examineur : M. ESCRIVA Xavier Maître de Conférences LMFA Lyon

Examineur : M. GARCIA Mathieu Ingénieur Dr. Liebherr Aerospace Toulouse

Directeur de thèse : M. BOU-SAÏD Benyebka LaMCoS IINSA Lyon