

# THÈSE

## MODÉLISATION ET SIMULATION DES PROCÉDÉS DE MISE EN COMPRESSION DES SURFACES A TRÈS GRANDES VITESSES DE DÉFORMATION PAR MÉTHODE SEMI-ANALYTIQUE

Présentée devant

**l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon**

pour obtenir

**le GRADE DE DOCTEUR**

École doctorale :

**Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique**

Spécialité :

**MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL**

par

**Mandikizinoyou TARO**

Thèse soutenue le 30 Novembre 2015 devant la Commission d'examen

### Jury

MICHEL ARRIGONI	Maître de Conférences, ENSTA Bretagne (Examineur)
JAWAD BADREDDINE	Docteur, Ingénieur-SAFRAN (Invité)
THIBAUT CHAISE	Maître de Conférences, INSA Lyon (Co-Encadrant de thèse)
ALAIN COMBESURE	Professeur, INSA Lyon (Examineur)
THIBAUT DE RESSEGUIER	Professeur, ENSMA, Futuroscope (Examineur)
DANIEL NELIAS	Professeur, INSA Lyon (Directeur de thèse)
GILLES PERRIN	Expert-AREVA (Examineur)
PATRICE PEYRE	DR CNRS, ENSAM ParisTech (Rapporteur)
CLAUDE STOLZ	DR CNRS, Ecole Centrale de Nantes (Rapporteur)

LaMCoS - UMR CNRS 5259 - INSA de Lyon  
20, avenue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex (FRANCE)



**INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales – Quinquennal 2011-2015**

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
<b>CHIMIE</b>	<b>CHIMIE DE LYON</b> <a href="http://www.edchimie-lyon.fr">http://www.edchimie-lyon.fr</a> Sec : Renée EL MELHEM Bat Blaise Pascal 3 <sup>e</sup> etage 04 72 43 80 46 Insa : R. GOURDON <a href="mailto:secretariat@edchimie-lyon.fr">secretariat@edchimie-lyon.fr</a>	<b>M. Jean Marc LANCELIN</b> Université de Lyon – Collège Doctoral Bât ESCPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 13 95 <a href="mailto:directeur@edchimie-lyon.fr">directeur@edchimie-lyon.fr</a>
<b>E.E.A.</b>	<b>ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</b> <a href="http://edeea.ec-lyon.fr">http://edeea.ec-lyon.fr</a>  Sec : M.C. HAVGOUDOUKIAN <a href="mailto:Ecole-doctorale.eea@ec-lyon.fr">Ecole-doctorale.eea@ec-lyon.fr</a>	<b>M. Gérard SCORLETTI</b> Ecole Centrale de Lyon 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 60.97 Fax : 04 78 43 37 17 <a href="mailto:Gerard.scorletti@ec-lyon.fr">Gerard.scorletti@ec-lyon.fr</a>
<b>E2M2</b>	<b>EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION</b> <a href="http://e2m2.universite-lyon.fr">http://e2m2.universite-lyon.fr</a>  Sec : Bat Atrium- UCB Lyon 1 04.72.44.83.62 Insa : S. REVERCHON <a href="mailto:secretariat.e2m2@univ-lyon.fr">secretariat.e2m2@univ-lyon.fr</a>	<b>M. Fabrice CORDEY</b> Laboratoire de Géologie de Lyon Université Claude Bernard Lyon 1 Bât Géode – Bureau 225 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.72.44.83.74 <a href="mailto:Sylvie.reverchon-pescheux@insa-lyon.fr">Sylvie.reverchon-pescheux@insa-lyon.fr</a> <a href="mailto:fabrice.cordev@univ-lyon1.fr">fabrice.cordev@univ-lyon1.fr</a>
<b>EDISS</b>	<b>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES- SANTÉ</b> <a href="http://www.ediss-lyon.fr">http://www.ediss-lyon.fr</a> Sec : Bat Atrium – UCB Lyon 1 04 72 44 83 62 Insa : <a href="mailto:secretariat.ediss@univ-lyon1.fr">secretariat.ediss@univ-lyon1.fr</a>	<b>Mme Emmanuelle CANET-SOULAS</b> INSERM U1060, CarMeN lab, Univ. Lyon 1 Bâtiment IMBL 11 avenue Jean Capelle INSA de Lyon 696621 Villeurbanne Tél : 04.72.11.90.13 <a href="mailto:Emmanuelle.canet@univ-lyon1.fr">Emmanuelle.canet@univ-lyon1.fr</a>
<b>INFOMATHS</b>	<b>INFORMATIQUE ET MATHÉMATIQUES</b> <a href="http://infomaths.univ-lyon1.fr">http://infomaths.univ-lyon1.fr</a>  Sec : Renée EL MELHEM Bat Blaise Pascal 3 <sup>e</sup> etage <a href="mailto:infomaths@univ-lyon1.fr">infomaths@univ-lyon1.fr</a>	<b>Mme Sylvie CALABRETTO</b> LIRIS – INSA de Lyon Bat Blaise Pascal 7 avenue Jean Capelle 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 43. 80. 46 Fax 04 72 43 16 87 <a href="mailto:Sylvie.calabretto@insa-lyon.fr">Sylvie.calabretto@insa-lyon.fr</a>
<b>Matériaux</b>	<b>MATERIAUX DE LYON</b> <a href="http://ed34.universite-lyon.fr">http://ed34.universite-lyon.fr</a>  Sec : M. LABOUNE-DAHMANI PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Direction 1 <sup>er</sup> et. <a href="mailto:Ed.materiaux@insa-lyon.fr">Ed.materiaux@insa-lyon.fr</a>	<b>M. Jean-Yves BUFFIERE</b> INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Saint Exupéry 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 71.70 Fax 04 72 43 85 28 <a href="mailto:Ed.materiaux@insa-lyon.fr">Ed.materiaux@insa-lyon.fr</a>
<b>MEGA</b>	<b>MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE</b> <a href="http://mega.universite-lyon.fr">http://mega.universite-lyon.fr</a>  Sec : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Direction 1 <sup>er</sup> et. <a href="mailto:mega@insa-lyon.fr">mega@insa-lyon.fr</a>	<b>M. Philippe BOISSE</b> INSA de Lyon Laboratoire LAMCOS Bâtiment Jacquard 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72 .43.71.70 Fax : 04 72 43 72 37 <a href="mailto:Philippe.boisse@insa-lyon.fr">Philippe.boisse@insa-lyon.fr</a>
<b>ScSo</b>	<b>ScSo*</b> <a href="http://recherche.univ-lyon2.fr/scso/">http://recherche.univ-lyon2.fr/scso/</a>  Sec : Viviane POLSINELLI Brigitte DUBOIS Insa : J.Y. TOUSSAINT <a href="mailto:viviane.polsinelli@univ-lyon2.fr">viviane.polsinelli@univ-lyon2.fr</a>	<b>Mme Isabelle VON BUELTZINGLOEWEN</b> Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.77.23.86 Fax : 04.37.28.04.48 <a href="mailto:isavonb@dbmail.com">isavonb@dbmail.com</a>

\*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie



*Mais la plus grande douceur est d'occuper les hauts lieux fortifiés par la pensée des sages, ces régions sereines d'où s'aperçoit au loin le reste des hommes, qui errent ça et là en cherchant le chemin de la vie ...*

- Lucrèce, De rerum natura, livre II, v.7 sqq



# Résumé

La défaillance des pièces mécaniques est très souvent initiée par un défaut de surface et la qualité des couches superficielles devient donc un élément essentiel. Ainsi, la surface devient une zone très vulnérable qui intéresse tant les mécaniciens en conception que les spécialistes en matériaux pour l'amélioration des performances mécaniques. De nombreuses études réalisées ont montré que la génération de contraintes résiduelles compressives sur des pièces mécaniques via une déformation plastique hétérogène améliore la tenue en fatigue. De nos jours, il existe plusieurs procédés industriels permettant d'introduire des contraintes résiduelles dans les pièces mécaniques tels que le grenailage, le galetage, le choc laser, le martelage etc. Parmi toute cette gamme variée de procédés, le traitement par choc laser est intéressant à plusieurs titres. En effet, il permet de produire des pressions en surface du matériau de l'ordre de 1 à 6 GPa sur de courtes durées d'impulsion allant de 3 à 30 nanosecondes et ainsi, offrant la possibilité d'introduire des contraintes résiduelles de compression sur une certaine profondeur tout en conservant l'état initial de la pièce traitée. Ce type de traitement fait parti de la gamme des procédés à très grande vitesse de déformation, de l'ordre de  $10^6 \text{s}^{-1}$ . Cependant, le choc laser qui est récent aux yeux des autres procédés, reste très peu connu et la simulation devient nécessaire pour cerner au mieux les phénomènes physiques mis en jeu. Dans la littérature, il existe plusieurs outils numériques permettant de simuler les procédés par choc, notamment la méthode des éléments finis, les modèles SPH. Pour la simulation de multiples impacts ces méthodes deviennent très lourdes à mettre en place et parfois très coûteuse en temps de calcul : d'où un besoin de mettre en place des modèles ou des méthodes numériques simples pouvant décrire le procédé. La méthode semi-analytique appartient à une classe de méthode numérique qui, basée sur des solutions analytiques élémentaires offre d'énormes avantages, notamment la simplicité des modèles et la réduction des temps de calcul. Cette méthode a été étendue aux problèmes de contact et très récemment a été appliquée pour la simulation des procédés de grenailage conventionnel. Cependant, les hypothèses faites dans les modèles réduisent le champ d'application de cette méthode notamment l'absence du terme inertiel dans les formulations analytiques. Il devient nécessaire de développer des solutions analytiques prenant en compte les effets d'inertie pour la résolution des problèmes dynamiques. Cette thèse, a pour but le développement et l'extension de la méthode semi-analytique aux problèmes dynamiques. Elle se focalise sur les problèmes d'impact rapide de type choc par application d'un champ de pression en surface du matériau cible pour donner une meilleur compréhension des phénomènes physiques mis en jeu. Ainsi, les solutions analytiques élémentaires prenant en compte les effets d'inertie ont été développées et intégrées à la méthode semi-analytique. Un cas de simulation d'impact rapide sur matériau élastique a été dans un premier temps réalisé puis validé par un modèle éléments finis. En second temps, le modèle élastique a été enrichi pour tenir compte de la plasticité et/ou de la viscoplasticité lorsque le seuil de pression appliqué induit des déformations plastiques dans la cible. Une validation numérique du modèle par comparaison avec un modèle éléments finis a été proposée. Ensuite, le modèle viscoplastique a été appliqué pour la simulation du procédé de choc Laser. Les déformations plastiques et les contraintes résiduelles engendrées par le procédé ont été déterminées et analysées. Enfin, une étude paramétrique a été réalisée sur les paramètres du procédé afin de prédire les plus influents.

**MOTS CLÉS:** Modélisation, simulation, méthode semi-analytique, impact rapide, onde de choc, viscoplasticité, déformations plastiques, contraintes résiduelles, choc laser.



# Abstract

The failure of the mechanical parts is very often initiated by the surface defects and the quality of the surface layers becomes an essential point. Thus, surface becomes a very vulnerable area which interests the mechanical design engineers as well as the materials scientists for the improvement of the mechanical performances. Many studies were carried out and showed that the generation of compressive residual stresses on mechanical parts by using heterogeneous plastic strain allow to improve the crack propagation resistance. Nowadays, there exist several industrial processes that can be used to introduce compressive residual stresses into the mechanical parts such as shot-blasting, rolling, laser shock peening, hammering, etc. Among all this varied range of processes, the laser shock peening is interesting for several reasons. Indeed, it enables producing pressures on the surface of material up to 6 GPa over a short pulse time from 3 to 30 nanoseconds and thus, giving the opportunity to introduce compressive residual stresses for a certain depth while preserving the initial state of the treated part. Laser shock peening produces very high strain rates about  $10^6\text{s}^{-1}$ , which requires a precise determination of dynamic properties. However, this process is a new compared to other processes and remains far from known and the simulation becomes necessary to determine the best physical phenomena involved. In the literature, there exist several numerical methods making possible to simulate the shock processes, in particular the finite element method, Smoothed particle hydrodynamics (SPH) method. For the simulation of multiple impacts, these methods become very heavy to set up and sometimes very expensive in computation times : hence a need to set up simple models or numerical methods being able to describe the process. The semi-analytical method belongs to a class of numerical method which is based on elementary analytical solutions and offers a lot of advantages, in particular the simplicity of the models and the computation times saving. This method was extended to the contact problems and recently was applied for the simulation of ultrasonic shoot peening processes. However, the assumptions made in the models reduce the application of this method in particular the absence of the inertial term in the analytical formulations. It becomes necessary to develop analytical solutions taking into account the inertial effects for the simulation of the dynamic problems. Thus, the purpose of this thesis is the development and the extension of the semi-analytical method to the dynamic problems. It is focused on the problems of high-speed impact by the application of a field of pressure on the surface of target material to give the best physical phenomena involved. Thus, the elementary analytical solutions taking into account the inertial effects were developed and integrated into the semi-analytical method. In first time, the simulation of high-speed impact on elastic material case was realized and validated by comparing to a finite elements model. In the second time, the elastic model was enhanced in order to consider plasticity and/or viscoplasticity when the threshold of the applied pressure induces plastic strains in the target. A numerical validation of the model by comparison to a finite elements model was proposed. Then, the viscoplastic model was applied for the simulation of the Laser shock peening process. The plastic strains and the residual stresses generated by the process were determined and analyzed. Lastly, a parametric study was carried out on the process parameters in order to predict most influential.

**KEY WORDS:** Modelisation, simulation, semi-analytical method, high-speed impact, shock wave, viscoplasticity, plastic strain, residual stress, laser shock peening.



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>Table des figures</b>	<b>vii</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xvii</b>
<b>Nomenclature</b>	<b>2</b>
<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Étude Bibliographique</b>	<b>9</b>
1 Introduction . . . . .	11
2 Propagation des déformations élastiques en dynamique . . . . .	11
3 Les ondes dans les milieux homogènes . . . . .	13
3.1 Caractérisation des ondes élastiques dans un milieu homogène . . . . .	13
3.2 Ondes plastiques et ondes de choc . . . . .	15
3.2.1 Ondes plastiques . . . . .	15
3.2.2 Ondes de choc, définition et caractérisation . . . . .	17
3.2.3 Amortissement élasto-plastique des ondes de choc dans les cibles . . . . .	19
3.2.4 Techniques de génération des ondes de choc . . . . .	20
4 Modélisations et simulations numériques du comportement des matériaux sous choc . . . . .	21
4.1 Le choc laser qu'est ce que c'est ? . . . . .	21
4.2 Modèles analytiques de simulation de Choc laser . . . . .	22
4.3 Simulation numérique du choc laser . . . . .	25
5 Comportement des matériaux sous choc . . . . .	29
5.1 Lois de comportement viscoplastique . . . . .	29
5.2 Loi de Johnson-Cook et ses variantes . . . . .	30
6 Ondes de choc et domaines d'application . . . . .	33
7 Microstructure des matériaux soumis aux chocs . . . . .	35
8 Conclusions . . . . .	36
<b>2 Introduction à la méthode semi-analytique pour la simulation des procédés de mise en compression</b>	<b>39</b>
1 Introduction . . . . .	41
2 Introduction à la méthode semi-analytique . . . . .	41
2.1 Contact de Hertz . . . . .	42

2.1.1	hypothèses	42
2.1.2	Contact circulaire de Hertz	42
2.2	Méthode semi-analytique	44
2.2.1	Historique	44
2.2.2	Principes de la méthode semi-analytique	45
2.2.3	Résolution du problème de contact	46
3	Simulation du procédé de grenailage ultrasonore	48
3.1	Grenailage ultrasonore et paramètres du procédé	49
3.2	Zone élémentaire représentative ou zone de référence	50
3.3	Taux de recouvrement et distribution des impacts	51
3.4	Simulation d'impacts multiples et paramètres numériques	51
4	Prédiction de l'état de surface après grenailage ultrasonore	54
4.1	Définition des paramètres de rugosité	54
4.2	Méthodologie pour la prédiction de la rugosité	56
4.3	Validation expérimentale du modèle	60
4.4	Étude de l'influence des paramètres du procédé	66
4.4.1	Influence du nombre d'impacts simulés et du taux de recouvrement	67
4.4.2	Influence de l'écroutissage	69
4.4.3	Influence de la vitesse d'impact	72
5	Conclusions et motivations de la thèse	73
<b>3</b>	<b>Développement des fonctions de Green en dynamique et mis en place du modèle d'impact rapide</b>	<b>75</b>
1	Introduction	77
2	Formulation du problème et méthode de résolution	77
2.1	Les ondes de compression, de cisaillement et leur vitesse	77
2.2	Solutions en déplacement dans un massif semi-infini soumis à un effort ponctuel	80
2.3	Validation des solutions analytiques et analyse des résultats	89
3	Coefficients d'influence ou fonctions de Green dynamique	91
3.1	Simulation d'un patch de pression	91
3.2	Profil temporel des coefficients d'influence	93
3.3	Validation des coefficients d'influence	94
4	Modélisation du problème d'impact rapide	97
4.1	Définition générale	97
4.2	Résolution du problème d'impact rapide	97
4.3	Approche numérique du problème	99
4.4	Consistance numérique du schémas d'intégration	102
5	Conclusions	104
<b>4</b>	<b>Simulation d'un impact rapide par méthode semi-analytique sur un massif semi-infini élastique et isotrope</b>	<b>105</b>
1	Introduction	107
2	Simulation d'un impact rapide	107
2.1	Code et paramètres des simulations	107

2.1.1	Implémentation et méthode de calcul des contraintes élastiques	107
2.1.2	Paramètres numériques de simulation	109
2.2	Validation du modèle d'impact et analyse des résultats	110
2.3	Ondes de choc et réponse du matériau	113
2.4	Influence des paramètres matériaux	117
2.4.1	Influence des propriétés matériaux à vitesse caractéristique constante	117
2.4.2	Influence de la vitesse caractéristique	118
3	Étude paramétrique sur les paramètres liés au choc	120
3.1	Influence de la taille du spot	120
3.2	Définition de la zone potentiellement plastique	122
3.3	Influence de la forme du spot	123
3.4	Influences de la pression appliquée et de la durée de l'impulsion	124
3.4.1	Influence de la distribution temporelle de la pression à iso-énergie	126
3.4.2	Influence de la durée d'impulsion à iso-énergie	126
3.4.3	Influence de la durée d'impulsion à pression maximale constante	129
4	Conclusion	131
<b>5</b>	<b>Modélisation de l'expansion dynamique des inclusions dans un massif semi-infini : cas des inclusions sphériques</b>	<b>133</b>
1	Introduction	135
2	Expansion dynamique d'une inclusion dans un massif infini	135
3	Champ de contraintes dans un massif infini	138
3.1	Tenseur D'Eshelby	138
3.2	Expression du tenseur des contraintes	139
3.3	Résultats numériques et Physique liée à l'expansion de l'inclusion	143
3.3.1	Dilatation isotrope de l'inclusion : $\epsilon_{ij}^* = e^* \delta_{ij} H(t)$	143
3.3.2	Expansion de l'inclusion pour une déformation du type $\epsilon_{ij}^* \neq \delta_{ij} H(t)$	145
4	Simulation de l'expansion dynamique d'une inclusion sphérique dans un massif semi-infini	146
4.1	Cas d'une inclusion dans le massif	146
4.2	Implémentation numérique	149
4.3	Validation du modèle et analyse des résultats	150
4.3.1	Validation par le modèle analytique	150
4.3.2	Validation par le modèle éléments finis	151
4.3.3	Stabilisation de l'inclusion : régime statique	154
5	Simulation de l'expansion dynamique d'une multitude d'inclusions	156
5.1	En dynamique	156
5.2	En statique	157
6	Conclusions	160
<b>6</b>	<b>Modélisation d'un impact rapide élasto-viscoplastique et application pour la simulation d'un mono impact laser</b>	<b>161</b>
1	Introduction	163
2	Généralités	163

2.1	Définitions . . . . .	163
2.2	Critère de plasticité et surface de charge . . . . .	164
2.3	Déformation et écoulement plastique ou viscoplastique . . . . .	165
3	Modélisation d'un impact rapide élasto-plastique ou viscoplastique . . . . .	167
3.1	Problème plastique ou viscoplastique en dynamique . . . . .	167
3.2	Algorithme du retour radial . . . . .	168
3.3	Algorithme de simulation d'un impact rapide viscoplastique . . . . .	170
3.3.1	Zone potentiellement plastique . . . . .	170
3.3.2	Calcul des états mécaniques induits par impact rapide . . . . .	171
3.3.3	Calcul des contraintes résiduelles sous choc . . . . .	173
3.3.4	Critère d'arrêt des calculs . . . . .	175
3.3.5	Comportement viscoplastique sous choc . . . . .	176
4	Validation du modèle d'impact rapide . . . . .	177
4.1	Impact rapide élasto-plastique . . . . .	178
4.1.1	Paramètres numériques pour les modèles éléments finis et semi-analytique . . . . .	178
4.1.2	Résultats du modèle élasto-plastique et discussions . . . . .	180
4.2	Influence du maillage et du pas de temps . . . . .	183
4.3	Impact rapide viscoplastique . . . . .	186
4.3.1	Paramètres numériques pour les simulations . . . . .	186
4.3.2	Résultats du modèle viscoplastique et discussion . . . . .	187
5	Atténuation élasto-plastique des ondes de choc . . . . .	192
6	Étude paramétrique . . . . .	194
6.1	Influence de la taille du spot . . . . .	194
6.2	Influence de la pression maximale . . . . .	197
6.3	Influence de la limite élastique . . . . .	199
6.4	Influence de la durée de l'impulsion . . . . .	201
7	Génération d'un impact rapide par Laser . . . . .	204
7.1	Simulation de la pression induite par impact laser en régime confiné . . . . .	204
7.2	Influence des impédances caractéristiques sur la pression induite . . . . .	208
7.3	Simulation des effets mécaniques induit par un mono impact laser en régime confiné . . . . .	210
8	Conclusions . . . . .	214

**Conclusions et Perspectives** **217**

**A Coefficients d'influence en dynamique** **223**

1	Méthode de Transformation des intégrales [ALE 00, GRA 07] . . . . .	223
2	Les intégrales de type Lipschitz pour la simplification des $\phi_i^r$ et $\phi_i^z$ . . . . .	224
3	Signe de $(y\gamma \pm \rho_k z)$ par rapport à la distance radiale $r$ . . . . .	226
4	Expressions simplifiées des fonctions $\phi_i^r$ et $\phi_i^z$ . . . . .	227
5	Expression de vitesse des ondes de Rayleigh . . . . .	233

---

<b>B Fonctions intermédiaires pour la simulation de l'expansion dynamique d'une inclusion</b>	<b>235</b>
1 Expansion dynamique des inclusions sphériques dans un massif infini . . . . .	235
2 Contraintes engendrées par une inclusion sphérique en dynamique dans un massif infini . . . . .	237
3 Validation par élément finis du calcul des contraintes dans un massif infini . . . . .	242
4 Expansion dynamique d'une inclusion dans un massif semi-infini . . . . .	243
<b>C Coefficients d'influence pour le calcul des contraintes résiduelles et déplacements résiduels surfaciques</b>	<b>247</b>
1 Déplacement résiduel généré par un cuboïde de déformation plastique . . . . .	247
2 Contraintes résiduelles générées par un cuboïde de déformation plastique dans un massif infini . . . . .	248
3 Coefficients d'influence en statique pour le calcul des contraintes élastiques . . . . .	250
<b>Bibliographie</b>	<b>253</b>



# Table des figures

1.1	Schéma explicatif de formation des déformations élastiques en statique (modifiée de [MAR 94]) : (a) et (d) disposition initiale du réseau atomique (en 2D) dans le matériau ; (b) Application d'une force et déformation du réseau atomique ; (c) Application d'une force plus grande et déformation quasi identique du réseau atomique, (e) déformation dynamique du réseau atomique dans le matériau, (f) Transmission des perturbations d'atome en atome . . . . .	12
1.2	Mouvement relatif au passage de l'onde de compression : (a) compression des particules en avant du front d'onde ; (b) relâchement des particules en arrière du front d'onde. . . . .	14
1.3	Mouvement relatif des particules au passage de l'onde de cisaillement. . . . .	15
1.4	Impact d'un marteau sur un massif semi-infini [MAR 94] : formation des ondes de compression, de cisaillement et des ondes de Rayleigh. L'interaction des ondes de compression avec les ondes de cisaillement en surface forme des ondelettes qui compressent le front d'onde. . . . .	16
1.5	Illustration de la vitesse des ondes plastiques à travers la courbe contrainte-déformation. . . . .	16
1.6	Précurseur élastique se propageant à la vitesse $C_e$ précédé de l'onde plastique avec une vitesse $C_p < C_e$ [SOL 02] . . . . .	17
1.7	Représentation schématique d'un impact de plaque 1), 2) et de la phase de propagation des ondes de choc : 3), 4) . . . . .	18
1.8	Evolution du profil de chargement au cours de sa propagation dans le matériau cible [SOL 02] . . . . .	19
1.9	Amortissement élasto-plastique de l'onde de choc [SOL 02] . . . . .	20
1.10	Description de l'interaction Laser-matière [MIC 02] . . . . .	21
1.11	Évolution des déformations plastiques en fonction de la pression appliquée [BAL 91] . . . . .	25
1.12	Configurations géométriques des modèles éléments finis : (a) modèle axisymétrique 2D [SON 10], (b) modèle modèle symétrique 3D [HU 06] . . . . .	26
1.13	Schéma récapitulatif des étapes de simulation des effets mécaniques par la méthode des Éléments Finis [HU 06] implémentée dans le logiciel ANSYS . . . . .	27
1.14	Historique de l'évolution des différentes formes d'énergie du système au cours d'un choc laser [KAN 06] : (a) Travail total $W_t$ , énergie interne $W_i$ , énergie cinétique $W_k$ et énergie visqueuse $W_v$ , (b) énergie interne $W_i$ , énergie plastique $W_p$ , énergie artificielle $W_a$ et énergie de déformation $W_e$ . . . . .	28

1.15 Effets mécaniques induits par impacts laser : (a) profil des contraintes résiduelles issues de la simulation par éléments finis induites par choc laser sur acier inoxydable [PEY 07a], (b) profil des déformations plastiques issues de différentes tailles du spot laser sur un alliage d'aluminium [SON 10] . . . . .	28
1.16 Relation contrainte-déformation traduisant l'influence des différents paramètres de la loi de Johnson-Cook sur la limite élastique [LIA 99] du matériau lors d'une sollicitation dynamique : (a) influence de la vitesse de déformation à température ambiante constante ; (b) influence de la température à vitesse de déformation constante . . . . .	32
1.17 Applications des ondes de choc produites par laser : (a) Traitement des aubes [TEC 07] ; (b) grenailage laser avec revêtement pour la maintenance préventive [YUJ 06] . . . . .	34
1.18 Formage par choc laser de structure métallique : matriçage d'une calotte hémisphérique en alliage d'aluminium 700 [PEY 06] . . . . .	34
1.19 Observation de la microstructure de l'alliage de Magnésium AZ31B après traitement par choc laser : (a) avant le traitement par choc, (b) après un impact réalisé, (c) après deux impacts réalisés, (d) après 4 impacts réalisés . . . . .	36
2.1 Schéma illustrant le contact hertzien entre deux solides en révolution [CHA 11d] . . . . .	43
2.2 Algorithme général pour la résolution du problème de contact [CHA 11d] . . . . .	48
2.3 Schéma illustrant le principe de fonctionnement du procédé de grenailage ultrasonore . . . . .	49
2.4 Différentes configurations illustrant la surface élémentaire représentative . . . . .	50
2.5 Définition de la zone de référence selon le nombre d'impacts simulés avec $a^*$ le rayon d'impact de la bille . . . . .	50
2.6 Distribution des impacts suivant plusieurs taux de recouvrement pour les deux types de configuration : triangulaire et rectangulaire. Calcul du taux de recouvrement comme fonction du rayon d'impact $a^*$ et la distance $d$ entre les impacts. [CHA 11d] . . . . .	52
2.7 Définition de la zone de référence et processus de moyennage des contraintes résiduelles et des déformations plastiques [CHA 11d] . . . . .	53
2.8 Définition des paramètres du premier ordre . . . . .	55
2.9 Définition des paramètres du second ordre : (a) kurtosis et (b) skewness . . . . .	56
2.10 Algorithme permettant de calcul les paramètres de rugosité dans chaque direction . . . . .	58
2.11 Algorithme général pour la prédiction des paramètres de rugosité sur une pièce grenillée. . . . .	59
2.12 (a) Dispositif de mesure de rugosité : le profilomètre ; (b) Visualisation des effets de coupe et définition de borne de mesure . . . . .	62
2.13 Résultats expérimentaux et numériques pour une vitesse maximale de sonotrode $v = 4.9m/s$ . Comparaison des paramètres de rugosité par simulation de trois impacts de bille en WC à un taux de recouvrement $C=100\%$ . (a)-(b) Simulation faite pour la courbe minimale sur les paramètres du premier et du second ordre sur la plaque en Ta6V et (c)-(d) simulation faite pour la courbe moyenne sur les paramètres du premier et du second ordre sur la plaque en Ta6V . . . . .	64

2.14	Résultats expérimentaux et numériques pour une vitesse maximale de sonotrode $v = 4.9m/s$ . Comparaison des paramètres de rugosité par simulation de trois impacts de bille en WC à un taux de recouvrement $C=400\%$ sur la plaque en Ta6V. (a)-(b) Simulation faite pour la courbe minimale sur les paramètres du premier et du second ordre et (c)-(d) simulation faite pour la courbe moyenne sur les paramètres du premier et du second ordre . . . . .	65
2.15	Résultats expérimentaux et numériques pour une vitesse maximale de sonotrode $v = 6.4m/s$ à un taux de recouvrement $C=150\%$ . Comparaison des paramètres de rugosité par simulation de trois impacts : (a) bille en ceramique et (b) bille d'alliage à base nickel . . . . .	66
2.16	Paramètres du premier ordre en fonction du taux de recouvrement pour 3 et 6 impacts simulés avec la loi ISO, illustration de l'influence du taux de recouvrement $C$ et du choix de la zone de référence $A_R-I_{1,2,3}$ , $A_R-I_{4,5,6}$ : (a) rugosité moyenne arithmétique $R_a$ et (b) rugosité totale $R_t$ . . . . .	68
2.17	Paramètres du second ordre en fonction du taux de recouvrement pour 3 et 6 impacts simulés avec la loi ISO, illustration de l'influence du taux de recouvrement $C$ et du choix de la zone de référence $A_R-I_{1,2,3}$ , $A_R-I_{4,5,6}$ : (a) paramètre de Skewness $R_{sk}$ et (b) paramètre de Kurtosis $R_{ku}$ . . . . .	68
2.18	Illustration des lois d'érouissage : (a) loi parfaitement plastique (PP), (b) loi bilinéaire isotrope (ISO) et (c) loi mixte (MIX) . . . . .	70
2.19	Influence de l'érouissage du matériau et du taux de recouvrement sur les paramètres de rugosité du premier ordre : (a) rugosité moyenne arithmétique $R_a$ et (b) rugosité totale $R_t$ . . . . .	71
2.20	Influence de l'érouissage du matériau et du taux de recouvrement sur les paramètres de rugosité du deuxième ordre : (a) paramètres de Skewness $R_{sk}$ et (b) paramètre de Kurtosis $R_{ku}$ . . . . .	71
2.21	Influence de la vitesse d'impact des billes sur les paramètres du premier ordre : (a) rugosité moyenne arithmétique $R_a$ et (b) rugosité totale $R_t$ . . . . .	72
2.22	Influence de la vitesse d'impact des billes sur les paramètres du deuxième ordre : (a) paramètre de skewness $R_{sk}$ et (b) paramètre de kurtosis $R_{ku}$ . . . . .	73
3.1	Représentation de la fonction Heaviside $H(t)$ . . . . .	83
3.2	Illustration du contour utilisé dans l'espace complexe pour le calcul des intégrales de Laplace inverse . . . . .	85
3.3	Validation des solutions analytiques élémentaires par comparaison avec les solutions analytiques de Pekeris [PEK 55] en surface du massif : déplacement radial normalisé en fonction du temps normalisé . . . . .	90
3.4	Validation des solutions analytiques élémentaires par comparaison avec les solutions analytiques de Pekeris [PEK 55] en surface du massif : déplacement vertical normalisé en fonction du temps normalisé . . . . .	90
3.5	Principe de superposition pour la simulation d'un patch de pression : (a) patch de pression sur une surface élémentaire, (b) discrétisation du patch de pression en 16 briques élémentaires identiques, (c) projection dans le plan $z = 0$ , (d) superposition de 16 efforts (résultante de chaque brique de pression) sur la surface élémentaire . . . . .	92
3.6	Impulsion créneau de durée $\tau$ et d'amplitude $P$ constante égale à l'unité . . . . .	94

3.7	(a) Modèle éléments finis pour la validation des coefficients d'influence, (b) profil temporel de la pression appliquée . . . . .	94
3.8	Validation des coefficients d'influence par comparaison avec le modèle éléments finis, contrainte normale $\sigma_{zz}$ en fonction du temps : (a) au point de calcul $(x, y, z) = (0, 0, \Delta z/2)$ , (b) au point de calcul $(x, y, z) = (\Delta x, \Delta y, \Delta z/2)$ . . . . .	96
3.9	Validation des coefficients d'influence par comparaison avec le modèle éléments finis, contrainte normale $\sigma_{zz}$ en fonction de la profondeur : (a) à $t = 5 ns$ et (b) à $t = 8 ns$ . . . . .	96
3.10	Illustration de la définition d'un impact : (a) au sens de Ballard [BAL 91], (b) cas général étendu aux pressions non uniformes . . . . .	97
3.11	Illustration du principe de convolution dans l'espace temporel et discrétisation du champ de pression : (a) profil temporel initial de la pression ; (b) profil temporel initial discrétisé par des impulsions créneaux de durée $\tau$ , (c) discrétisation du champ de pression en éléments briques de base $S$ . . . . .	100
3.12	Cas de figures illustrant l'étude de la stabilité du schéma d'intégration : (a) la durée des impulsions créneaux $\tau$ est égale à l'incrément de temps $\Delta t$ , (b) la durée des impulsions créneaux $\tau$ est inférieure à l'incrément de temps $\Delta t$ , (c) la durée des impulsions créneaux est supérieure à l'incrément de temps $\Delta t$ . . . . .	103
3.13	Analyse de la stabilité du schéma d'intégration, influence de la durée des impulsions créneaux sur les coefficients d'influence : (a) stabilité du schéma d'intégration pour des impulsions créneaux de courtes durée d'impulsion ; (b) instabilité du schéma pour des impulsions créneaux de longue durée . . . . .	103
3.14	Analyse de la stabilité du schéma d'intégration : étude du choix de la durée des impulsions créneaux par rapport à l'incrément de temps . . . . .	104
4.1	Illustration des différentes zones lors du calcul des contraintes élastiques : zone d'onde $Z_o$ , zone de calcul $Z_c$ . . . . .	108
4.2	Algorithme général de simulation des contraintes élastiques générées par impact rapide . . . . .	109
4.3	(a) Modèle éléments finis pour la validation du modèle d'impact rapide, (b) forme temporelle de la pression appliquée . . . . .	112
4.4	Comparaison des contraintes de von Mises entre la simulation éléments finis et la simulation par méthode semi-analytique pour la validation du modèle d'impact rapide : (a) en surface dans la direction radiale, (b) en profondeur suivant la ligne issue du centre d'impact . . . . .	113
4.5	Effets d'inertie sur les contraintes de von Mises : (a) en surface dans la direction radiale, (b) en sous couche dans la direction radiale . . . . .	114
4.6	Amortissement et atténuation des ondes de choc élastiques dans le matériau cible : illustration dans la profondeur des contraintes élastiques (a) $\sigma_{33}$ et (b) $\sigma_{22}$ à différents temps . . . . .	114
4.7	Propagation de l'onde de choc dans le matériau (colonne de gauche) et réponse du matériau sous choc (colonne de droite) pour une pression $P(x, y, t)$ (colonne du centrale) . . . . .	116
4.8	Influence des paramètres matériaux à vitesse caractéristique constante sur les contraintes de von Mises (illustration au temps (a) $t/t_{pul} = 1/2$ , (b) $t/t_{pul} = 5/4$ ) . . . . .	117

4.9	Influence des paramètres matériaux à vitesse caractéristique constante sur la densité d'énergie de déformation élastique (illustration au temps $t/t_{pul} = 1/2$ ) . . . . .	118
4.10	Influence de la vitesse caractéristique sur les contraintes de von Mises en sous couche à une profondeur $z/a = 2/5$ : (a) à $t/t_{pul} = 1/4$ , (b) à $t/t_{pul} = 1/2$ et (c) à $t/t_{pul} = 5/4$ . . . . .	119
4.11	Influence de la vitesse caractéristique : évolution temporelle (a) de densité d'énergie de déformation élastique, (b) pression hydrostatique . . . . .	120
4.12	Étude de l'influence de la taille du spot : (a) profil temporel de la pression appliquée et (b) tailles de spots étudiées . . . . .	121
4.13	Influence de la taille du spot sur les contraintes de von Mises à différents temps. Les contraintes sont reproduites comme fonction de la profondeur au centre de l'impact : (a) à l'instant $t/t_o = 3/4$ et (b) à l'instant $t/t_o = 5/4$ . . . . .	122
4.14	Influence de la taille du spot sur les densités d'énergie de déformation élastique à différents temps. Les contraintes sont reproduites comme fonction de la profondeur au centre de l'impact : (a) à l'instant $t/t_o = 3/4$ et (b) à l'instant $t/t_o = 5/4$ . . . . .	122
4.15	Influence de la forme du spot issu d'un impact rapide. Illustration de la zone potentiellement plastique à la fin de la durée d'observation : (a), (c), (e) zone potentiellement plastique observée et (b), (d), (f) forme du spot appliqué. . . . .	125
4.16	Influence du profil temporel du chargement à puissance égale : (a) zone potentiellement plastique issue d'un chargement triangulaire, (b)-(c) zone potentiellement plastique issue d'un chargement créneau . . . . .	127
4.17	Influence du profil temporel de la pression appliquée, cas d'un profil triangulaire à densité de puissance égale : (a),(c),(e) zones potentiellement plastiques et (b),(d),(f) profils temporels correspondants . . . . .	128
4.18	Influence de la durée de l'impulsion : (a) profils temporels de la pression appliquée et (b),(c),(d) présentation de la zone potentiellement plastique prise à $t = 60 ns$ . . . . .	130
5.1	Validation des champs de déplacement par comparaison avec les résultats de Mikata pour une eigenstrain $\varepsilon_{ij}^* = \delta_{ij}H(t)$ : historique du déplacement (a) à l'extérieur de l'inclusion, (b) sur l'interface de l'inclusion et (c) l'intérieur de l'inclusion . . . . .	144
5.2	Validation des champs de déplacement par comparaison avec les résultats de Mikata $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}H(t) = e$ : historique du déplacement (a) à l'extérieur de l'inclusion, (b) sur l'interface de l'inclusion et (c) l'intérieur de l'inclusion . . . . .	146
5.3	Décomposition du problème d'une inclusion sphérique contenant une eigenstrain $\varepsilon^p$ dans un massif semi-infini, élastique et isotrope et de surface libre située dans le plan $z = 0$ en trois sous problèmes . . . . .	148
5.4	Massif de taille $a \times a \times a \times a$ contenant une inclusion sphérique de rayon $R = 7a/16$ . . . . .	151
5.5	Validation des contraintes dues à la présence d'une inclusion sphérique dans un massif semi-infini par comparaison avec le modèle analytique de Mindlin et al. [MIN 50] : (a) contraintes en surface prises suivant la direction x ; (b) contraintes à l'intérieur de l'inclusion et passant par son centre suivant la direction x et (c) contrainte dans la profondeur suivant la ligne issue de l'origine du repère en surface . . . . .	152
5.6	Modèle éléments finis réalisé en dynamique explicite : présence d'une inclusion sphérique dans un massif semi-infini . . . . .	153

5.7	Validation des contraintes transversales dues à la présence d'une inclusion sphérique dans un massif semi-infini par comparaison avec un modèle éléments finis en dynamique explicite : (a) avant l'arrivée des ondes en surface du massif ; (b)-(c) après le passage des ondes . . . . .	154
5.8	Validation des contraintes longitudinales dues à la présence d'une inclusion sphérique dans un massif semi-infini par comparaison avec un modèle éléments finis en dynamique explicite : (a) avant l'arrivée des ondes en surface du massif ; (b)-(c) après le passage des ondes . . . . .	155
5.9	Historique de la contrainte de von Mises pour une inclusion sphérique de rayon $r$ dont le centre se situe à une distance $2r$ de la surface . . . . .	156
5.10	Simulation de plusieurs inclusions en dynamique et comparaison avec une seule inclusion occupant le volume de l'ensemble des inclusions : (a) contraintes en profondeur et (b) contraintes dans la direction radiale $x$ suivant la ligne passant par le centre de la grande inclusion . . . . .	157
5.11	Illustration du problème de l'influence mutuelle entre les inclusions en dynamique : (a) inclusion mère, (b) maillage de l'inclusion, (c) approximation de l'inclusion mère par plusieurs inclusions sphériques, (d) illustration de l'interaction que peuvent avoir les inclusions entre elles au cours de leur expansion en dynamique . . . . .	158
5.12	Simulation d'une multitude d'inclusions en statique et comparaison avec une seule inclusion occupant le volume de l'ensemble des inclusions : (a) contraintes en surface et (b) contraintes dans la direction radiale $x$ suivant la ligne passant par le centre de la grande inclusion . . . . .	159
6.1	Algorithme général du modèle d'impact rapide viscoplastique. Le solveur (visco)plastique est illustré en rouge . . . . .	172
6.2	Principe de superposition : (a) problème initial, présence d'un cube de déformation plastique dans le massif semi-infini, (b) considération du même cube dans le massif infini, (c) considération du cube miroir dans le même massif infini et (c) contrainte normale appliquée en surface du massif semi-infini . . . . .	174
6.3	Illustration de l'énergie plastique dissipée au cours de la propagation des ondes de choc dans un acier : (a) cas d'un impact rapide avec une pression maximale de 1 GPa élasto-plastique avec la loi d'écrouissage Ramberg-Osgood, (b) cas d'un impact rapide élasto-viscoplastique d'une pression maximale de 4GPa avec une loi d'écrouissage du type Johnson-Cook . . . . .	175
6.4	Représentation de la loi de comportement à différentes vitesses de déformation $\dot{\epsilon}^p$ avec les valeurs de paramètres suivants : $A=870$ MPa, $B=400$ MPa, $n=0.4$ , $C=0.015$ et $\dot{\epsilon}_0^p = 10^{-2} \text{s}^{-1}$ . . . . .	177
6.5	Modèle éléments finis axisymétrique pour la validation de l'algorithme elasto-plastique/visco-plastique . . . . .	178
6.6	(a) Illustration de la distribution spatiale du champ de pression et (b) Illustration de la loi de comportement élasto-plastique du type Ramberg-Osgood donnée par l'expression 6.42 pour les paramètres matériaux donnés dans le tableau 6.1 . . . . .	179
6.7	Historique des déformations plastiques cumulées dans la profondeur du massif : (a) près de la surface du massif au point $(0,0,a^*/5)$ , (b) point plus en profondeur $(0,0,a^*)$ . . . . .	181

6.8	Historique des contraintes "résiduelles" et des déformations plastiques dans la zone d'impact (plan $z = 0$ ) après un impact rapide élasto-plastique de pression maximale $P=1\text{GPa}$ et diamètre de spot $d = 0.2\text{mm}$ et influence de l'onde de décharge : (a) déformation plastique $\epsilon_{33}^P$ , (b) déformation plastique cumulée $\epsilon^P$ , (c) contrainte de von Mises résiduelle, (d) contrainte hydrostatique résiduelle . . . . .	182
6.9	Influence du pas de temps sur les contraintes de von Mises résiduelles et sur les déformations plastiques pour une pression maximale $P = 1\text{GPa}$ et un diamètre de base du spot $R = 200\ \mu\text{m}$ pour le maillage $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 20\ \mu\text{m}$ : (a) déformations plastiques cumulées en profondeur, (b) contraintes de von Mises en profondeur, (c) déformations plastiques cumulées en surface ( $z=0$ ) et (d) contraintes de von Mises résiduelles en surface ( $z=0$ ) . . . . .	184
6.10	Influence du maillage sur les contraintes de von Mises résiduelles et sur les déformations plastiques pour une pression maximale $P = 1\text{GPa}$ et un diamètre du spot de base $d = 0.2\text{mm}$ avec discrétisation du profil temporel par des impulsions crêteaux de durée $\tau = \Delta t = 0.2\text{ns}$ : (a) déformations plastiques cumulées (b) contraintes de von Mises résiduelles . . . . .	185
6.11	Comparaison des déformations plastiques entre le modèle éléments finis et le modèle S.A. après un impact rapide sur un massif élastique-viscoplastique. Évolution au cours du temps des déformations plastiques $\epsilon_{33}^P$ et cumulées $\epsilon^P$ en différents point du massif : (a)-(c) près de la surface et (b)-(d) à plus grande profondeur au point $(0, 0, 15a^*/10)$ . . . . .	187
6.12	Comparaison des contraintes résiduelles entre le modèle éléments finis et le modèle S.A. après un impact élasto-viscoplastique : (a) contraintes de von Mises résiduelles en fonction de la profondeur, (b) contraintes résiduelles radiales $\sigma_{22}^r$ en fonction de la profondeur, (c) déformations plastiques $\epsilon_{33}^P$ en fonction de la profondeur. . . . .	188
6.13	Historique des contraintes "résiduelles" et des déformations plastiques dans la zone d'impact (plan $z = 0$ ) après un impact rapide viscoplastique de pression maximale $P=4\text{GPa}$ et diamètre de spot $d = 0.2\text{mm}$ et influence de l'onde de décharge : (a) déformation plastique $\epsilon_{33}^P$ , (b) déformation plastique cumulée $\epsilon^P$ , (c) contrainte de von Mises résiduelle, (d) contrainte hydrostatique résiduelle . . . . .	190
6.14	Distribution des contraintes résiduelles dans le massif (3D) après un impact rapide de pression maximale $P=4\text{GPa}$ et de diamètre du spot $d = 0.2\text{mm}$ : (a) contrainte de von Mises résiduelles normalisées par la limite élastique initiale, (b) déformations plastiques cumulées $\epsilon^P$ , (c) contraintes hydrostatiques résiduelles normalisées par la limite élastique initiale, (d) déformations plastiques $\epsilon_{33}^P$ . . . . .	191
6.15	Propagation des ondes plastiques dans le matériau cible ( $P=4\text{GPa}$ , $d=0.5\text{mm}$ ) . . . . .	192
6.16	Atténuation des ondes de choc dans le matériau cible ( $P=4\text{GPa}$ , $d=0.5\text{mm}$ ) et raidissement rapide de l'onde de choc dans le matériau avec détection du précurseur élastique : (a) contrainte totale normale en fonction de la profondeur à différents instants, (b) contrainte totale radiale en fonction de la profondeur à différents instants	193

6.17	Influence de la taille du spot sur les états résiduels pour une pression maximale $P=4\text{GPa}$ . Dans la profondeur : (a) déformations plastiques $\epsilon_{33}^p$ et (b) contraintes de von Mises résiduelles normalisées par la limite élastique initiale. Suivant la direction radiale dans le plan $z = 0$ (c) déformations plastiques $\epsilon_{33}^p$ , (d) contraintes de von Mises résiduelles normalisées par la limite élastique initiale . . . . .	195
6.18	Influence de la taille du spot sur les états résiduels pour une pression maximale $P=4\text{GPa}$ : (a) pression hydrostatique dans la profondeur normalisée par la limite élastique initiale, (b) pression hydrostatique dans le plan $z=0$ suivant la direction radiale issue du centre de l'impact . . . . .	196
6.19	Étude de l'influence de la pression maximale appliquée sur les états résiduels en surface dans le plan $z = 0$ suivant la direction radiale issue du centre de l'impact. Avec un spot de diamètre $d = 0.5\text{mm}$ . Contraintes hydrostatique résiduelles : (a) en fonction de la profondeur, (b) dans le plan $z = 0$ suivant la direction radiale issue du centre de l'impact . . . . .	197
6.20	Étude de l'influence de la pression maximale applique pour un spot de diamètre $d = 0.5\text{mm}$ sur les états résiduels. En surface du matériau cible suivant la direction radiale issue du centre de l'impact : (a) contraintes de von Mises résiduelles, (b) déformations plastiques $\epsilon_{33}^p$ . Dans la profondeur de la cible : (c) contraintes de von Mises résiduelles, (d) déformations plastiques $\epsilon_{33}^p$ . . . . .	198
6.21	Influence de la limite élastique sur les contraintes résiduelles et déformations plastiques pour une pression maximale $P=4\text{GPa}$ et de diamètre du spot $d = 0.5\text{mm}$ . En surface (plan $z = 0$ ) du matériau cible suivant la direction radiale issue du centre de l'impact : (a) déformations plastiques $\epsilon_{33}^p$ , (b) contraintes de von Mises résiduelles. En profondeur de la cible : (c) déformations plastiques $\epsilon_{33}^p$ , (d) contraintes de von Mises résiduelles . . . . .	200
6.22	Profil de pression défini pour l'étude de l'influence de la durée d'impulsion : (a) durée d'application du chargement et durée à mi-hauteur identiques, (b) durée d'application et durée à mi-hauteur différentes . . . . .	201
6.23	Influence de la durée d'application de la pression à chargement identique sur les états résiduels. Pour une pression maximale $P=4\text{GPa}$ atteinte à $t/t_{pul} = 0.05$ et de diamètre du spot $d = 0.5\text{mm}$ . En surface dans le plan $z = 0$ suivant la direction radiale : (a) déformations plastiques $\epsilon_{33}^p$ , (b) Contraintes de von Mises résiduelles. En profondeur du matériau cible : (c) déformations plastiques $\epsilon_{33}^p$ , (d) Contraintes de von Mises résiduelles . . . . .	202
6.24	Influence de la durée d'application de la pression à chargement et durée à mi-hauteur différentes sur les états résiduels. Pour une pression maximale $P=4\text{GPa}$ et de diamètre du spot $d = 0.5\text{mm}$ . En surface dans le plan $z = 0$ suivant la direction radiale : (a) déformations plastiques $\epsilon_{33}^p$ , (b) Contraintes de von Mises résiduelles. En profondeur du matériau cible : (c) déformations plastiques $\epsilon_{33}^p$ , (d) Contraintes de von Mises résiduelles . . . . .	203
6.25	Schémas illustrant le principe de génération des ondes de choc par traitement laser en régime confiné . . . . .	205
6.26	Géométrie de l'interaction confiné . . . . .	205

6.27	Validation du modèle de simulation du profil temporel de champ de pression induit par une irradiation laser en régime confiné : (a) profil de densité de puissance du laser imposé, (b) profondeur du plasma obtenue par simulation, (c) comparaison du profil temporel avec la solution de référence . . . . .	208
6.28	Influence du milieu de confinement ( $Z_i = \gamma_i \times 10^6 [\text{gcm}^{-2}\text{s}^{-1}]$ ) sur la pression induite par choc laser dans l'alliage d'aluminium ( $Z = 1.48 \times 10^6 [\text{gcm}^{-2}\text{s}^{-1}]$ ) et dans l'acier 12%Cr ( $Z = 3.6 \times 10^6 [\text{gcm}^{-2}\text{s}^{-1}]$ ) : (a)-(b) épaisseur du plasma obtenue pour différents milieux de confinement, (c)-(d) pression induite pour différents milieux de confinement . . . . .	209
6.29	Algorithme général pour la simulation du procédé de mise en compression par choc laser . . . . .	211
6.30	Simulation d'un mono impact laser en régime confiné sur l'acier martensitique 12%Cr : (a) densité de puissance délivrée par le laser, (b) pression induite par le procédé . . . . .	212
6.31	Simulation d'un mono impact laser en régime confiné sur l'acier martensitique 12%Cr. Illustration de la contrainte hydrostatique résiduelle en surface suivant la direction radiale . . . . .	213
6.32	Simulation d'un mono impact laser en régime confiné sur l'acier martensitique 12%Cr : (a) contraintes de von Mises résiduelles, (b) déformations plastiques $\epsilon_{33}^p$ , (c) contraintes hydrostatiques résiduelles en profondeur. . . . .	214
B.1	Validation des contraintes engendrées par la présence d'une inclusion sphérique qui se dilate soudainement dans un massif infini sous l'effet d'une déformation inélastique d'origine thermique $\epsilon_{ij} = \delta_{ij}H(t)$ . . . . .	242
B.2	Avant l'arrivée des ondes de compression en surface du massif semi-infini. . . . .	244
B.3	Après l'arrivée des ondes de compression en surface du massif semi-infini : réflexion des ondes en surface du massif et retour de ces dernières dans le massif. . . . .	245



# Liste des tableaux

1.1	Signification et rôle des différents paramètres constituant la loi de Johnson-Cook . . .	31
2.1	Définition des propriétés matériaux pour la mesure expérimentale [CHA 11g, CHA ].	60
2.2	Définition des propriétés matériaux des différentes billes [CHA 11g, CHA ]. . . . .	60
2.3	Rugosité initiale des différents matériaux avant grenailage . . . . .	61
2.4	Valeurs des paramètres de rugosité obtenues pour les séries A-1 et A-2 après gre- nailage : impact des billes en céramique et en alliage à base nickel fourni par AREVA NP . . . . .	62
2.5	Valeurs des paramètres de rugosité obtenues pour les séries B-1 et B-2 après gre- nailage : impact de billes en carbure de tungstène sur la plaque Ta6V fourni par TURBOMECA . . . . .	62
2.6	Simulation numérique des séries expérimentales A-1, A-2, B-1 et B-2 . . . . .	63
2.7	Définition des propriétés matériau pour l'étude paramétrique . . . . .	67
2.8	Paramètres numériques pour l'étude paramétrique : comportement du matériau dé- pendant de la déformation plastique cumulée $p$ , du module de Young $E$ , du module tangent $E_T$ , et de la limite élastique $\sigma_{y0}$ . $\underline{X}$ est la variable d'écoulement cinématique	67
3.1	Vitesses approximatives des différentes ondes dans le cas de la validation des so- lutions analytiques avec une masse volumique $\rho = 7800kgm^{-3}$ et un module de Young $E = 210GPa$ . . . . .	90
3.2	Détails du maillage de la simulation éléments finis et celle de la méthode semi- analytique pour la validation des coefficients d'influence . . . . .	95
4.1	Tableau récapitulatif des formes types de spot issues d'un impact laser de rayon $R$ .	110
4.2	Paramètres numériques pour la validation du modèle d'impact en élasticité : simu- lation par éléments finis et celle de la méthode semi-analytique . . . . .	111
4.3	Vitesses approximatives des différentes ondes élastique dans le cas de la validation des solutions analytiques avec une masse volumique $\rho = 7800Kgm^{-3}$ et un module de Young $E = 210GPa$ . . . . .	111
4.4	Comparaison des temps de calcul entre le modèle éléments finis et la méthode semi-analytique. Calculs effectués sur une machine de caractéristique 2.50GHz, 8Go de Ram et 4 cœurs . . . . .	112
4.5	Tableau récapitulatif des différentes densités étudiées et vitesses caractéristiques correspondantes . . . . .	118
6.1	Paramètres matériaux pour la simulation d'un impact rapide élasto-plastique . . . .	178

6.2	Profil de pression tabulé pour la simulation d'impact rapide élasto-plastique . . . . .	179
6.3	Paramètres numériques pour la validation du modèle élasto-plastique : simulation par éléments finis et celle de la méthode semi-analytique . . . . .	180
6.4	Comparaison des temps de calcul entre le modèle éléments finis et la méthode semi-analytique pour un impact rapide élastoplastique : durée d'impulsion $t=150\text{ns}$	185
6.5	Composition chimique de l'acier martensitique 12%Cr [PEY 07b] . . . . .	186
6.6	Paramètres numériques pour la validation du modèle élasto-viscoplastique : simulation par éléments finis et méthode semi-analytique . . . . .	186
6.7	Paramètres matériaux pour la simulation d'un impact rapide viscoplastique [PEY 07b]	186
6.8	Impédances caractéristiques de quelques matériaux cibles et milieux de confinement [SOL 02, GUJ 14] . . . . .	207
6.9	Pression maximale induite dans l'aluminium et dans l'acier pour différents milieux de confinement pour $\alpha = 0.2$ . . . . .	210



# Nomenclature

$V_c$	Vitesse caractéristique
$\rho$	Masse volumique du matériau
$E$	Module de Young
$\lambda, \mu$	Coefficients de Lamé
$\nu$	Coefficient de Poisson
$C_1$	Vitesse des ondes de compression
$C_2$	Vitesse des ondes de cisaillement
$C_3$	Vitesse des ondes de Rayleigh
$C_p$	Vitesse des ondes plastiques
$\sigma$	Limite élastique initiale du matériau
$\sigma_H$	Limite élastique d'Hugoniot
$E^*$	Module de Young équivalent
$R_1, R_2$	Rayons de courbure des corps en contact
$P_{hertz}$	Pression de Hertz
$P_{max}, P$	Pression maximale appliquée
$\sigma_H$	Limite élastique d'Hugoniot
$\underline{\underline{\sigma}}$	Tenseur des contraintes
$\underline{\underline{\epsilon}}^p$	Tenseur des déformations plastiques
$\underline{\underline{\sigma}}^{init}$	Tenseur des contraintes initiales
$\Delta x, \Delta y, \Delta z$	Discrétisation du massif
$u_z^e$	Déplacement normal engendré par la pression au point M(x,y)
$u_z^{tot}$	Déplacement total entre deux massifs en contact
$U^r$	Déplacement résiduel surfacique
$\mathcal{A}$	Amplitude du sonotrode
$\mathcal{F}$	Fréquence du sonotrode
$C$	Taux de recouvrement
$d$	Distance entre les centres des impacts
$a^*$	Rayon de l'impact (G.U) ou spot de l'impact rapide
$l$	Ligne moyenne
$R_a$	Rugosité arithmétique
$R_t$	Rugosité totale
$R_{ku}$	Paramètre de Kurtosis
$R_{sk}$	Paramètre de skewness
$R_q$	Ecart quadratique de rugosité
$R_{sm}$	Largeur moyenne des éléments d'un profil
$u_z^{res}$	Déplacement résiduel surface dans la direction normale à la surface
$\sigma_o$	Différence entre la contrainte de von Mises et la limite élastique du matériau

---

$t_{pul}$	Durée d'application de la pression
$\Sigma(t)$	Zone potentiellement plastique pour un calcul élastique
$\sigma_o$	Différence (normalisée par la limite élastique initiale) entre la contrainte de von Mises et la limite élastique initiale
$\Gamma_{ij}^p$	Contraintes engendrées par un effort ponctuel de type créneau
$\Gamma_{ij}$	Coefficients d'influence ou fonction de Green dynamique
$\Gamma_{\alpha}^u$	Coefficients d'influence ou fonction de Green dynamique
$D_{3ij}$	Coefficients d'influence pour le calcul des déplacements résiduels
$B_{ijkl}$	Coefficients d'influence pour le calcul des contraintes résiduelles
$H(t)$	Fonction de Heaviside
$\Delta t$	Incrément de temps
$\tau$	Durée d'impulsion des coefficients d'influence
$Z_1$	Impédance caractéristique du milieu de confinement
$\underline{\underline{\epsilon}}^p$	Tenseur des déformations plastiques
$\underline{\underline{\sigma}}^{res}$	Tenseur des contraintes résiduelles
$\dot{\epsilon}^p$	Vitesse de déformations
$Z_2$	Impédance caractéristique du matériau cible
$Z$	Impédance caractéristique équivalente
$L$	Épaisseur du plasma
$\alpha$	Rendement d'interaction



# Introduction

Dès les débuts de l'élaboration des métaux et alliages métalliques, sont pratiqués le moulage à partir de l'état liquide, le forgeage libre à chaud de pièces massives brutes de coulée ou réchauffées et le formage à froid de feuilles métalliques. Ainsi, l'homme connaissait depuis des siècles comment extraire la matière première pour la transformer en fonction des besoins à travers des processus d'élaboration qui consistent à mettre en jeu des moyens simples tels que des moules, un outil de frappe et un support. On peut dire que le forgeron et le fondeur sont deux métiers liés par l'histoire où l'homme est au cœur du travail sur le métal, le transformant en élément plus résistant et durable tels que les objets d'ornements, les armes de guerre et de défense, les éléments de construction, de transports terrestres, aériens et maritimes. Le savoir-faire des forgerons et des fondeurs contribue depuis plus de 7 000 ans à façonner notre histoire et notre quotidien. L'idée d'obtenir des matériaux de plus en plus performants et résistants a ainsi été une préoccupation majeure des artisans des matériaux métalliques depuis l'âge des temps, et du monde industriel depuis le début du 19<sup>e</sup> siècle. Ces deux professions ont vécu suite à la révolution industrielle du siècle dernier, une profonde mutation technologique et managériale qui les ont positionnées en acteurs forts et incontournables de l'industrie.

Sur le plan industriel, les matériaux métalliques ont connu une importante limitation dans leur utilisation au cours du siècle dernier. Des pièces métalliques soumises à des sollicitations cycliques se rompent alors qu'elles pouvaient résister aux valeurs critiques des chargements appliqués de manière statique ; il s'agissait de la rupture par fatigue. Pour remédier à ce problème, de nombreuses études réalisées ont montré que la génération de contraintes résiduelles compressives sur des pièces métalliques via une déformation plastique hétérogène améliore la tenue en fatigue et augmente ainsi la durée de vie des pièces. Ainsi, l'avancée des progrès techniques a suscité le besoin de développer des techniques de traitement de plus en plus efficaces dans le but d'augmenter les performances en fatigue des structures et/ou pièces métalliques. D'une part, les techniques mises en place pour remédier à ces problèmes sont des techniques connues de manières empiriques tels que le grenailage, le galetage, etc. D'autre part, ces techniques de traitements de surface, engendrent parfois des conséquences néfastes telles qu'une rugosité des surfaces trop élevée, l'apparition de grandes déformations plastiques se formant dans les pièces traitées. Dans ces procédés, les surfaces sont les parties les plus sollicitées et donc les plus vulnérables durant toutes les étapes de traitement dû aux effets de contact entre le matériau traité et l'outil de traitement mis en jeu. Ainsi, la surface devient une zone importante d'une pièce mécanique à laquelle les mécaniciens, concepteurs et les spécialistes en matériaux accordent une attention particulière. Par conséquent, le besoin de trouver des procédés de traitement modernes et plus efficaces est devenu une priorité pour les ingénieurs en aéronautique, en automobile, en énergie nucléaire (pour ne citer que ceux-la) qui en ont besoin pour garantir la sécurité des usagers.

Ceci étant, la connaissance et la maîtrise des contraintes résiduelles ainsi que des procédés qui

leurs sont associés sont très importantes et avantageuses avant toutes démarches expérimentales. De nos jours, il existe une multitude de procédés industriels permettant d'introduire des contraintes résiduelles dans les pièces mécaniques. Ces procédés peuvent être classés en deux catégories selon Ballard [BAL 91] : les procédés empiriques (le grenailage conventionnel, le galetage, le martelage, etc) et les procédés modernes (le grenailage ultrasonore, le choc laser, le laminage, l'usinage, la cavitation, etc). Parmi ces différents procédés, le traitement par production d'impact de type choc laser est intéressant à plusieurs titres. En effet, il permet de produire des pressions en surface du matériau de l'ordre de 1 à 6 GPa sur de courtes durées d'impulsion allant de 3 à 30 nanosecondes et ainsi, offrant la possibilité d'introduire des contraintes résiduelles de compression sur une certaine profondeur en répétant le processus. Ce procédé ne mettant pas en contact le matériau cible et l'outil de traitement mis en jeu permet également de conserver l'état initial de la pièce traitée. Cependant, le choc laser, qui est récent aux yeux des autres procédés reste d'une part assez peu connu malgré les nombreux travaux de recherches effectués sur ces dernières 50 années et d'autre part, le besoin accru et les exigences des utilisateurs (connaissant le procédé) rendent de plus en plus complexe et coûteux les expériences notamment lorsque les essais ont été mal réalisés. Il devient donc nécessaire de mettre au point des moyens économiques et rapides pour mieux anticiper les différents phénomènes mis en jeu et leurs conséquences sur la durée de vie des pièces mécaniques.

Ce contexte nous a conduit à nous positionner sur la modélisation et la simulation numérique de ce procédé. La modélisation et la simulation numérique permettent de mettre en avant une meilleure compréhension des situations accidentelles et ainsi réduire les coûts trop élevés liés à l'expérimentation pour la réalisation des prototypes. Aujourd'hui, il existe une multitude de méthodes numériques permettant de simuler non seulement les procédés de mise en forme mais aussi d'autres types de problèmes. Parmi cette gamme variée de méthodes numériques, la méthode des éléments finis demeure une méthode incontournable notamment dans le domaine mécanique. Toutefois, pour la simulation de multiples impacts, cette méthode devient très lourde à mettre en place et parfois coûteuse. D'où un besoin de minimiser au mieux possible les processus de simulations numériques par la mise en place de modèles numériques simples.

Les méthodes semi-analytiques appartiennent à une classe de méthodes numériques qui, basée sur des solutions analytiques élémentaires offre d'énormes avantages, notamment la simplicité des modèles et la réduction des temps de calcul. Cette méthode a été étendue aux problèmes de contact et très récemment a été appliquée à la simulation du procédé de grenailage conventionnel, de galetage et bien d'autres problèmes mécaniques. Cependant, à son stade de développement actuel, cette méthode n'a jamais été étendue aux problèmes dynamiques. Les formulations analytiques exploitées jusqu'ici ne tiennent pas compte des effets d'inertie. Ainsi, l'absence des termes inertiels dans les formulations analytiques constitue un handicap majeur de cette méthode et la limite aux problèmes statiques.

Cette thèse a pour objectif d'apporter des améliorations à la dite méthode en développant des outils mathématiques et numériques prenant en compte les effets d'inertie et dynamiques dans le calcul des contraintes dans un massif semi-infini. Cette partie est suivie par l'implémentation de cette méthode dans un "code maison" nommé ISAAC qui a été développé au LaMCoS en vue de la modélisation des procédés de mise en compression des surfaces à très grande vitesse de déformation. Les enjeux de cette thèse sont donc orientés autour des axes suivants :

- ✧ Compréhension et modélisation du processus de propagation des ondes de choc dans les matériaux.

- ✧ Compréhension et modélisation du comportement viscoplastique des matériaux sous choc.
- ✧ Prédiction des déformations plastiques et contraintes résiduelles induites par impact rapide dans le matériau cible.
- ✧ Validation des modèles mis en place par comparaison avec les résultats obtenus par simulation éléments finis.
- ✧ Application au traitement de surface de type choc laser.

Le travail présenté ici est structuré en plusieurs chapitres.

Le premier chapitre de ce manuscrit sera consacré à la revue de la littérature. Dans une première partie, il se focalisera sur la compréhension des phénomènes physiques liés au procédé d'impact de type choc dans un matériau. Dans la deuxième partie du même chapitre, nous présenterons les différents modèles existants dans la littérature pour la simulation des effets mécaniques induits par les impacts de type choc. Les lois de comportement viscoplastiques pour simuler le comportement des matériaux sous choc seront présentées dans la troisième partie. Enfin, les différentes techniques expérimentales ou industrielles utilisées pour la génération des ondes de choc seront également présentées.

Le deuxième chapitre nous permettra dans un premier temps de prendre connaissance de la méthode semi-analytique, des travaux de thèses déjà réalisés et en cours de réalisation au LaM-CoS par application de cette méthode. Dans un second temps, en se servant des travaux de thèses déjà réalisés sur la modélisation du procédé de grenailage ultrasonore par simulation d'impacts multiples, ce chapitre présentera une méthodologie pour la prédiction de la rugosité des surfaces grenillées. Une validation expérimentale de la méthodologie sera présentée puis une étude paramétrique sera conduite sur les paramètres liés au procédé pour prédire les plus influents.

Le troisième chapitre est consacré à la mise en place d'outils numériques pour la simulation des impacts rapides. Il sera donc question de la recherche et de la mise en place des fonctions de Green en dynamique et des coefficients d'influence prenant en compte les effets d'inertie dans les formulations, puis de leur implémentation dans le code ISAAC. Une validation numérique de ces fonctions sera également proposée.

La simulation d'un impact rapide sur un matériau élastique fera l'objet du quatrième chapitre. Dans ce chapitre, une validation numérique du modèle sera proposée dans une première partie. Dans la seconde partie, une analyse de la physique liée au processus de propagation des ondes de choc dans le matériau cible sera présentée en détail. Dans une troisième partie, une étude préliminaire sur l'influence de quelques paramètres liés au procédé d'impact rapide sera réalisée et discutée.

Le cinquième chapitre est consacré à l'étude des inclusions en dynamique. On s'intéressera à la réponse élasto-dynamique d'un massif infini sous l'effet d'une inclusion qui se dilate soudainement et à la physique liée à ce phénomène. Pour cette partie, un modèle analytique sera proposé pour modéliser la réponse du matériau. Dans une seconde partie, une simulation numérique sera proposée pour modéliser le même phénomène dans un massif semi-infini en présence d'une ou plusieurs inclusions, puis une validation numérique du modèle sera présentée.

Dans le sixième chapitre, un modèle viscoplastique sera présenté pour la simulation des impacts rapides sur des matériaux élasto-viscoplastiques, ainsi que le calcul des états résiduels (contraintes résiduelles, déformations plastiques) liés au processus. Une validation numérique de

ce modèle sera proposée suivie d'une analyse profonde des résultats. Un cas d'application sera enfin proposé pour la simulation du procédé de choc laser.

Ce manuscrit s'achèvera par des conclusions générales et des perspectives pour les travaux à venir.

# Chapitre 1

## Étude Bibliographique

*Dans ce premier chapitre, nous passons en revue la littérature sur la physique liée à la dynamique rapide en particulier lorsque le problème d'impact rapide pour la production des ondes de choc est considéré. Dans un premier temps, la physique liée à la formation des déformations en dynamique sera présentée, puis dans un second temps les différentes ondes généralement rencontrées seront présentées et caractérisées. Les différentes méthodes de simulation des procédés de mise en compression par application des ondes de choc seront également présentées.*

## Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Propagation des déformations élastiques en dynamique</b>	<b>11</b>
<b>3</b>	<b>Les ondes dans les milieux homogènes</b>	<b>13</b>
3.1	Caractérisation des ondes élastiques dans un milieu homogène	13
3.2	Ondes plastiques et ondes de choc	15
<b>4</b>	<b>Modélisations et simulations numériques du comportement des matériaux sous choc</b>	<b>21</b>
4.1	Le choc laser qu'est ce que c'est ?	21
4.2	Modèles analytiques de simulation de Choc laser	22
4.3	Simulation numérique du choc laser	25
<b>5</b>	<b>Comportement des matériaux sous choc</b>	<b>29</b>
5.1	Lois de comportement viscoplastique	29
5.2	Loi de Johnson-Cook et ses variantes	30
<b>6</b>	<b>Ondes de choc et domaines d'application</b>	<b>33</b>
<b>7</b>	<b>Microstructure des matériaux soumis aux chocs</b>	<b>35</b>
<b>8</b>	<b>Conclusions</b>	<b>36</b>

---

# 1 Introduction

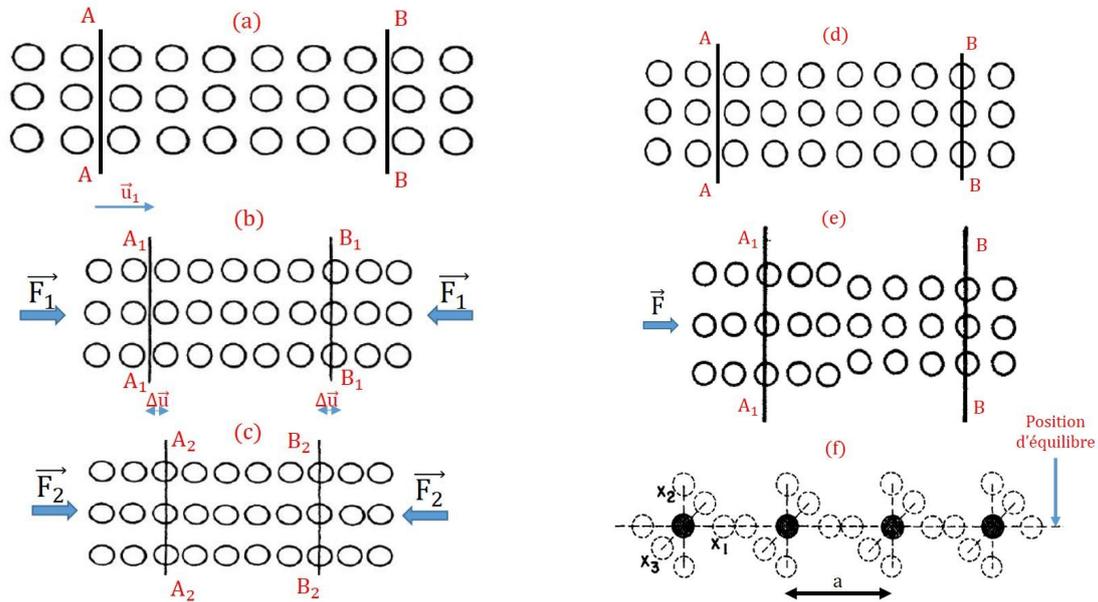
La théorie de propagation des ondes élastiques dans un solide a été développée par Stokes, Poisson, Rayleigh [RAY 96], Kelvin et bien d'autres auteurs, comme étant une extension de la théorie d'élasticité pour des problèmes de corps vibrants et aussi une contribution dans leurs travaux portant sur l'étude de la transmission de la lumière, qui est considérée comme les vibrations d'un éther élastique [KOL 63]. En dynamique des solides, on suppose que lorsqu'une force est appliquée en un point d'un solide, la contrainte résultante engendre un mouvement instantané des points autour de la zone d'application. Ainsi, on considère que cette force produit une accélération linéaire dans le reste du solide et une accélération angulaire dans un voisinage centré sur son centre de gravité. Selon la théorie de l'élasticité, un solide est en équilibre sous l'action d'une ou plusieurs force(s) lorsque les déformations engendrées ont atteint dans cet état leurs valeurs seuils (déformation statique). Cette formulation est (suffisamment) correcte pour des problèmes dans lesquels le temps qui sépare le début de l'application de la force et l'instant auquel l'équilibre effectif du solide est atteint est très court devant le temps d'observation. Mais lorsqu'on considère une force appliquée très brièvement (un temps d'application relativement plus court que le temps d'observation), ou une force qui varie très rapidement dans le temps, les effets résultants doivent être considérés comme une *onde de contrainte qui se propage dans le solide soumis à la sollicitation*.

Ce chapitre donne un aperçu des travaux existants dans la littérature portant sur la dynamique rapide et les ondes de choc dans le domaine de la mécanique. Ainsi, la première partie de ce chapitre est consacrée à la théorie de propagation des déformations en dynamique qui sont à l'origine des ondes dans un milieu perturbé. Dans la deuxième partie, il sera question des différentes ondes et de leurs caractéristiques. Une description détaillée de chacune des ondes généralement rencontrée dans les applications sera présentée. La troisième partie de ce chapitre recensera les différents modèles de simulation numérique des procédés de mise en forme (ou mise en compression) par onde de choc. Cette partie aura pour objectif de présenter les différentes hypothèses faites dans les différents modèles numériques.

## 2 Propagation des déformations élastiques en dynamique

Par définition, l'application d'une force externe est considérée comme un processus dynamique. Cependant, lorsque la vitesse de déformation induite par la force appliquée est très faible (donc négligeable) devant la vitesse du son dans le milieu [JOH 85], il est possible de considérer le processus de déformation comme étant une succession d'étapes durant lesquelles les variations de déformations restent négligeables. Par conséquent le matériau peut être considéré comme étant en équilibre statique ou en déformation statique. La figure 2 illustre un exemple de déformation d'un solide soumis à deux forces externes  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$ . Sur cette figure, on suppose que le solide idéalisé par le réseau atomique est en équilibre statique après l'application des forces  $\vec{F}_1$  (l'étape initiale (a) à l'étape (b)), à l'issue de cette première étape, l'on observe un déplacement  $\vec{U}_1$  des sections AA et BB. Si, sur le même matériau, on applique cette fois une deuxième force  $\vec{F}_2$  d'amplitude plus grande que la précédente (étape (a) à (c)), les sections AA et BB se déplaceront d'un vecteur  $\vec{U}_2$  et la variation de déplacement engendrée par les deux forces est définie par  $\Delta U = |\vec{U}_1 - \vec{U}_2|$ . Le matériau étant supposé être en déformation statique, la variation  $\Delta U$  observée sera quasiment

nulle, donc une distance quasi identique entre les sections  $A_1A_1$  et  $A_2A_2$  d'une part et ;  $B_1B_1$  et  $B_2B_2$  d'autre part ; bien que les forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  ne soient pas d'amplitudes égales.



**FIGURE 1.1:** Schéma explicatif de formation des déformations élastiques en statique (modifiée de [MAR 94]) : (a) et (d) disposition initiale du réseau atomique (en 2D) dans le matériau ; (b) Application d'une force et déformation du réseau atomique ; (c) Application d'une force plus grande et déformation quasi identique du réseau atomique, (e) déformation dynamique du réseau atomique dans le matériau, (f) Transmission des perturbations d'atome en atome

Les contraintes internes et les déformations ne sont pas cependant transmises de façon instantanée du point d'application à un autre et de ce dernier à un suivant dans le massif comme souligné précédemment. Les contraintes et les déformations sont transmises d'atome en atome à une vitesse spécifique. La figure 1.1(d-f) montre l'application d'une force  $\vec{F}$  à une vitesse  $\frac{\partial F}{\partial t}$  et telle que les contraintes et les déformations varient de section en section. A un instant  $t$  donné, la section  $BB$  ne voit pas les effets de la force appliquée tandis que, à la section  $AA$ , les effets de la force externe commencent par disparaître ou se font ressentir. Pour cerner au mieux la nuance soulignée dans ce paragraphe, il devient nécessaire de faire une analyse à l'échelle atomique.

A l'échelle atomique, on peut imaginer le massif constitué uniquement d'atome qui sont reliés entre eux par un système rhéologique ; ensuite imaginer l'onde comme une succession d'impacts entre les atomes adjacents. Chaque atome qui se voit attribuer une certaine accélération transmet automatiquement une énergie aux atomes voisins. La différence de masse atomique et les forces d'attraction et répulsive (qui sont assimilables aux forces d'attractions et répulsives dans un ressort en mouvement) entre les atomes définissent donc la direction dans laquelle l'impulsion de contrainte est portée d'un point à un autre [MAR 94]. On peut faire un simple calcul de la vitesse à laquelle se déplace l'impulsion élastique connaissant la distance qui sépare les atomes entre eux dans le massif. Cette vitesse est très proche de la vitesse réelle de l'onde portée par la vague de

l'ensemble des atomes en mouvement. Les atomes oscillent individuellement et de façon continue autour de leur position d'équilibre et la fréquence d'oscillation peut atteindre  $10^{13}$  oscillations par seconde [MAR 94]. La figure 1.1(f) montre une illustration du phénomène d'oscillation en dimension 3 (dans les directions  $x_1, x_2, x_3$ ), qui actuellement n'est pas indépendante car elles sont couplées aux ondes appelées onde phonon (issues des vibrations dans un solide cristallin [LER 12]). Si l'on perturbe l'atome à l'extrémité gauche, celui-ci transmettra donc l'effet de perturbation (ou l'effet d'impact) aux atomes voisins et ces derniers à leurs proches voisins, etc. . Pendant la transmission des effets, il y aura un temps de retard qui correspond approximativement à la durée de vibration ( $\simeq 10^{-13}$  s). Les atomes situés au milieu assurent la transmission de la force de poussée à l'atome situé à droite. Si on note par  $a$  la distance qui sépare l'atome excité et son voisin, alors la vitesse de transmission des effets de perturbation est donnée par  $V = \frac{a}{t}$ . Dans le cas du cuivre par exemple, cette distance correspond à  $a = 3 \times 10^{-10}$  m et la vitesse de transmission des perturbations correspond à  $V = 3 \times 10^3$  m/s. Cette vitesse est très proche de celle des ondes élastiques dans le cuivre qui vaut  $\simeq 3500$  m/s et la différence entre les deux vitesses résulte de l'échelle d'analyse car dans la réalité les particules portant le mouvement des ondes élastiques sont plus petites que les atomes.

### 3 Les ondes dans les milieux homogènes

Dans cette section, nous passerons en revue les différentes ondes couramment rencontrées dans l'ingénierie et leurs principales caractéristiques.

#### 3.1 Caractérisation des ondes élastiques dans un milieu homogène

Les ondes élastiques dans un matériau sont celles dont l'amplitude est inférieure à la limite élastique de ce dernier. Lorsque le matériau est soumis à une force, plusieurs ondes élastiques peuvent naître et se propager à travers ce dernier. La particularité ou la caractérisation de chacune de ces ondes dépend fortement du mouvement des particules du solide portant la propagation de l'onde elle-même et des conditions aux limites. Une particule peut être définie comme étant la plus petite portion du solide (qui est bien sûr différente d'un atome comme mentionné dans la section 2) qui peut se déplacer dans une direction différente de celle du mouvement général. Dans la littérature, il existe de nombreux ouvrages consacrés aux ondes élastiques dans un milieu homogène [KOL 63, KAR 75, MAR 94, DON 30, CHO 72].

Les différentes ondes les plus couramment rencontrées dans les applications sont celles citées ci-dessous :

- les ondes longitudinales
- les ondes de cisaillement
- les ondes de surface ou ondes de Rayleigh
- les ondes de Love (dont les déplacements sont comparables à ceux des ondes de cisaillement sans le mouvement vertical)

- les ondes de Stoneley (on les retrouve uniquement à l'interface de deux milieux)

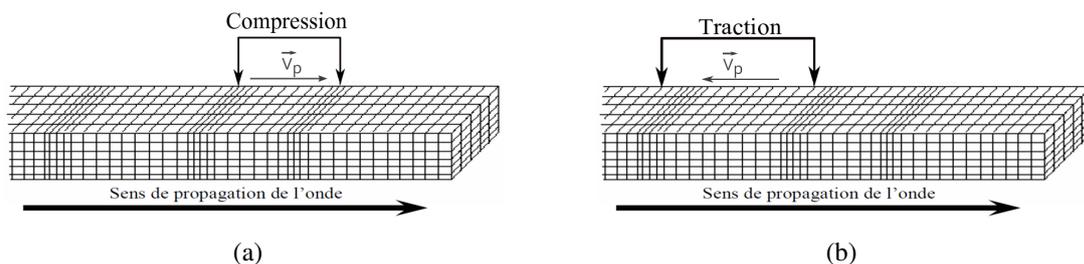
Ici, nous nous limiterons à la description des principales ondes généralement rencontrées dans le cas des massifs semi-infini.

a) **Les ondes longitudinales**

Elles sont encore connues sous le nom d'ondes primaires et plus généralement d'ondes de compression. Ces ondes ont la particularité de se propager dans les milieux infinis et semi-infinis. Elles sont les plus rapides et les premières qui apparaissent lorsque deux solides entre en collision ou lorsque qu'un corps (massif) est sollicité dynamiquement. Lors de leur passage, le déplacement des particules qui accompagnent son mouvement se fait par des dilatations en arrière du front d'onde et des compressions en avant du front d'onde comme illustrée sur la figure 1.2. Les particules ont dans ce cas un vecteur vitesse  $\vec{V}_p$  parallèle à la direction de propagation de l'onde. Le sens de ce vecteur par rapport à la direction de propagation de l'onde définit donc les zones en compression et les zones en traction lors du passage du front d'onde. La vitesse de ces ondes est proportionnelle à la grandeur définie par l'expression EQ. 1.1.

$$V_c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{1.1}$$

où  $E$  est le module de Young et  $\rho$  la densité du matériau soumis à l'onde.



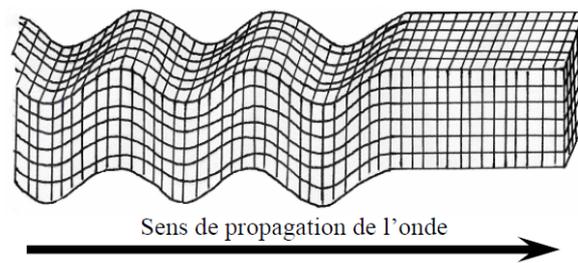
**FIGURE 1.2:** Mouvement relatif au passage de l'onde de compression : (a) compression des particules en avant du front d'onde ; (b) relâchement des particules en arrière du front d'onde.

b) **Les ondes de cisaillement ou ondes transversales**

De vitesse plus faible que celle des ondes de compression, les ondes de cisaillement se caractérisent par un mouvement des particules perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde. D'après [LAU 03] il n'y a pas de changement résultant de la densité et toutes les déformations longitudinales restent nulles lors du passage des ondes de cisaillement. Leurs particularités sont d'une part qu'elles ne se propagent pas dans les milieux liquides comme l'eau et d'autre part que leur mouvement induit des cisaillements dans le massif.

La vitesse des ondes de cisaillement est proportionnelle à la grandeur définie par l'équation 1.2

$$V = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \tag{1.2}$$



**FIGURE 1.3:** Mouvement relatif des particules au passage de l'onde de cisaillement.

ou  $G$  est le module de cisaillement du matériau soumis à l'onde.

### c) Les ondes de Rayleigh ou ondes de surface

Elles sont les dernières à apparaître dans le cas des massifs semi-infini. Leurs comportements sont analogues aux rides formées à la surface de l'eau dans un lac. Elles se propagent à une vitesse plus faible que les deux précédentes (voir CHAP. 3 et ANNEXE A). Elles ont une amplitude plus forte au cours de leur passage mais qui décroît rapidement avec la distance sur la surface qui les guide.

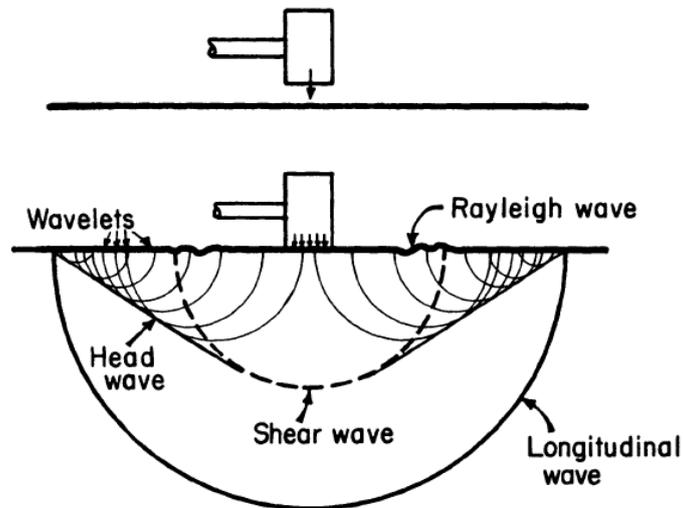
La figure 1.4 illustre la formation et la propagation des différentes ondes détectées dans un massif semi-infini lorsque la surface libre de ce dernier est impactée par un solide (un marteau par exemple). Sur cette figure est montré l'effet de la surface libre (ou les effets de bords) du massif qui engendre la formation d'ondelette lorsque les ondes de compression et de cisaillement interagissent entre elles en surface.

## 3.2 Ondes plastiques et ondes de choc

### 3.2.1 Ondes plastiques

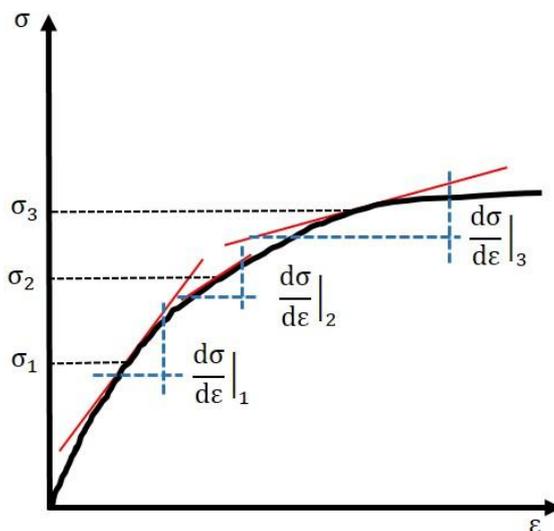
Lorsque la contrainte dans un matériau excède sa limite élastique, des déformations plastiques commencent à apparaître dans le dit matériau. Ceci peut être observé aussi bien en déformations quasi-statique qu'en déformations dynamique. En dynamique, si l'on applique une impulsion de pression par exemple, d'amplitude suffisamment grande pour générer des contraintes pouvant dépasser la limite élastique du matériau soumis à l'impulsion, cette impulsion se décomposera en une onde élastique dite généralement précurseur élastique (d'amplitude inférieure à la limite élastique) et une onde plastique se propageant à travers le matériau [BAL 91, MAR 94] (voir figure 1.6). Les ondes plastiques apparaissent dès que l'amplitude des ondes élastiques excède la limite élastique du matériau. La vitesse de propagation de ces ondes est proportionnelle à la racine carrée de la pente de la courbe traduisant la relation entre contraintes-déformations (cf FIG. 1.5). Elle est définie par l'expression ci dessous :

$$C_p = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}} \quad (1.3)$$



**FIGURE 1.4:** Impact d'un marteau sur un massif semi-infini [MAR 94] : formation des ondes de compression, de cisaillement et des ondes de Rayleigh. L'interaction des ondes de compression avec les ondes de cisaillement en surface forme des ondelettes qui compressent le front d'onde.

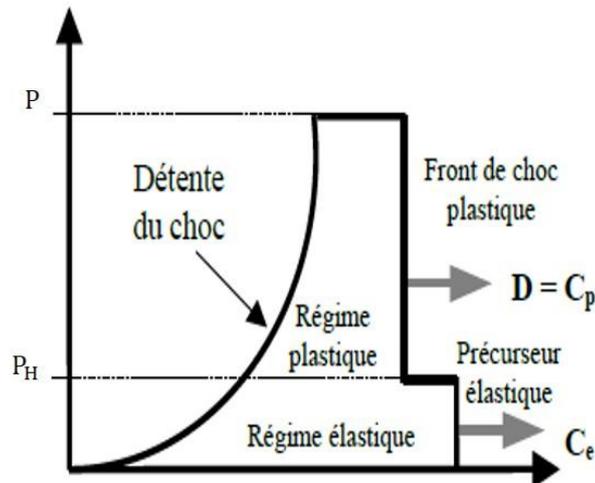
Dans le cas de contraintes uniaxiales, la pente  $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$  dans la zone plastique est inférieure à celle



**FIGURE 1.5:** Illustration de la vitesse des ondes plastiques à travers la courbe contrainte-déformation.

obtenue dans la zone élastique, ce qui traduit donc le fait que les ondes plastiques aient une vitesse de propagation plus faible que celle des ondes élastiques.

En déformation uniaxiale, la pente augmente avec la déformation plastique et le front de l'onde devient de plus en plus raide durant la propagation. Lorsque le raidissement atteint une valeur



**FIGURE 1.6:** Précurseur élastique se propageant à la vitesse  $C_e$  précédé de l'onde plastique avec une vitesse  $C_p < C_e$  [SOL 02]

critique, le front de l'onde plastique se transforme en un front de choc ; dès lors l'onde plastique se transforme en une onde de choc (la description d'une telle onde est donnée dans la section qui suit).

Sous un choc, le comportement des matériaux est fortement dépendant de la déformation et de sa vitesse. Pour un matériau plastique, le comportement peut être représenté par une loi puissance du type :

$$\sigma = \sigma_o + k\varepsilon^n \dot{\varepsilon}^m \quad (1.4)$$

ou

$$\sigma = \sigma_o + k\varepsilon^n \text{ pour } m = 0 \quad (1.5)$$

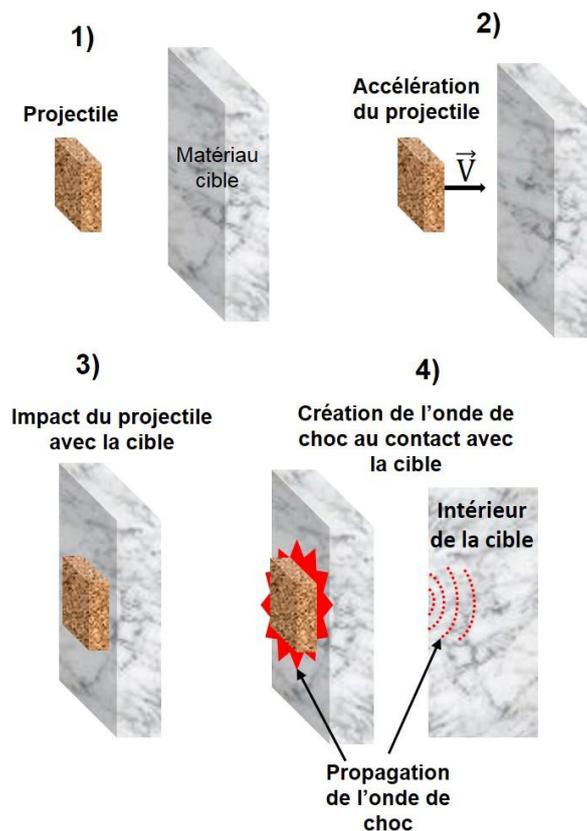
avec  $n$  un paramètre généralement pris inférieur à 1,  $k$  le paramètre d'écrouissage et  $m$  le paramètre traduisant la sensibilité à la vitesse de déformation. Ce dernier est toujours compris entre 0 et 1 pour les métaux.  $\sigma_o$  est la limite élastique statique (initiale) du matériau soumis sous choc.

### 3.2.2 Ondes de choc, définition et caractérisation

Une onde de choc est la propagation d'une discontinuité des grandeurs caractéristiques de l'état thermodynamique et mécanique d'un milieu [MIC 02, RIC 11]. Cette discontinuité est la conséquence d'effets non linéaires qui provoquent le raidissement des ondes sonores et peuvent engendrer des effets mécaniques intenses. Une onde de choc est aussi caractérisée par le fait que le temps de monter du front d'onde doit être court afin qu'elle puisse rester stable. Selon Richter [RIC 11], des ondes de choc ne peuvent être générées que dans un milieu où la vitesse des ondes croît avec la pression  $P$  appliquée ( $\frac{\partial^2 P}{\partial^2 U}$  reste positif pour  $P$  et  $U$  (vitesse particulière) croissants).

L'impact de deux plaques ou impact plan reste généralement l'exemple le plus illustratif pour caractériser une onde de choc. Ainsi, considérons l'impact plan sur plan de deux plaques dont le projectile est lancé à une vitesse  $\vec{V}$ . Les différentes étapes de cette technique de caractérisation des ondes de choc sont illustrées sur la figure 1.7. A l'interface du contact entre ces deux plaques, chacune subit une discontinuité de la vitesse et l'onde de choc qui se forme permet de dégager à travers des mesures expérimentales les trois caractéristiques suivantes [THO 97] :

- l'onde de choc présente une vitesse de propagation  $|\vec{U}|$  supersonique par rapport au milieu où elle se propage et subsonique par rapport à la vitesse du milieu situé derrière le front de l'onde de choc
- le matériau subissant la traversée de l'onde de choc est adiabatique car la transformation thermodynamique subie par le matériau est très courte pour ne laisser aucun échange de chaleur avec le milieu environnant.
- l'onde de choc induit une discontinuité de la vitesse matérielle  $\Delta U = \vec{U} - \vec{U}_o$  ( $\vec{U}_o$  vitesse matérielle initiale) qui engendre des discontinuités de la pression, de la température et de la densité de matière.



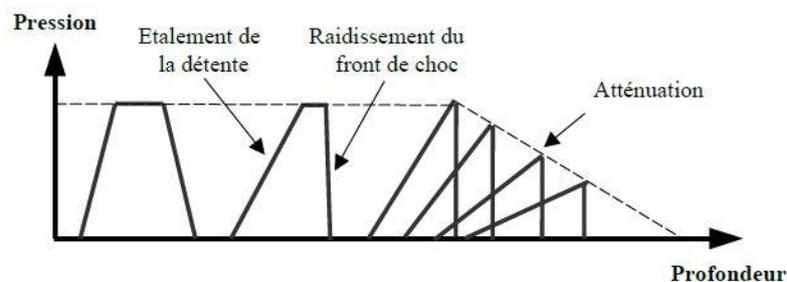
**FIGURE 1.7:** Représentation schématique d'un impact de plaque 1), 2) et de la phase de propagation des ondes de choc : 3), 4)

Ces trois caractéristiques permettent de dégager les hypothèses suivantes qui simplifient énormément la théorie des ondes de choc dans les simulations numériques [MAR 94] :

- un front choc est une surface discontinue et sans épaisseur apparente,
- le module de cisaillement du matériau a un effet négligeable,
- les forces volumiques (telles que les forces gravitationnelles) et les transferts de chaleur dans le front d'onde ne sont pas pris en compte dans le formalisme,
- il n'y a pas de transformation de phase,
- Dans certains cas, on peut considérer le problème de choc comme un problème hydrodynamique lorsque les contraintes de cisaillements du matériau soumis sous choc sont négligeables devant la pression hydrostatique.

### 3.2.3 Amortissement élasto-plastique des ondes de choc dans les cibles

Pour la plupart des matériaux soumis à un choc, l'onde de compression se raidit très rapidement au cours de la propagation car les pressions élevées se propagent plus rapidement que les basses pressions. En réalité, l'onde de détente s'étale au cours de sa propagation pour former un faisceau de détente et au bout d'un certain temps, le sommet de l'onde de détente finit par rattraper le sommet du front de choc. Cela se traduit par une atténuation de l'amplitude de l'onde de choc comme illustré sur la figure 1.8. De plus, l'onde de choc est quant à elle atténuée élasto-plastiquement lors



**FIGURE 1.8:** Evolution du profil de chargement au cours de sa propagation dans le matériau cible [SOL 02]

de sa propagation dans le matériau. La différence de célérité entre les ondes élastiques et les ondes plastiques est à l'origine de ce phénomène d'amortissement. Les ondes élastiques initiées par les hautes pressions se propagent plus rapidement que celles plastiques. Leurs vitesses s'amortissent dans les basses pressions et ainsi, pourront être rattrapées par les ondes plastique comme illustré sur la figure 1.9. Aujourd'hui, certains codes numériques permettent de calculer l'atténuation de l'onde de choc au cours de sa propagation dans les cibles solides. On peut citer par exemple le code numérique SHYLAC (Simulation Hydrodynamique LAGRANGIENNE des Chocs) développé par le Laboratoire de Combustion et de Détonique de Poitiers (ENSMA/LCD)

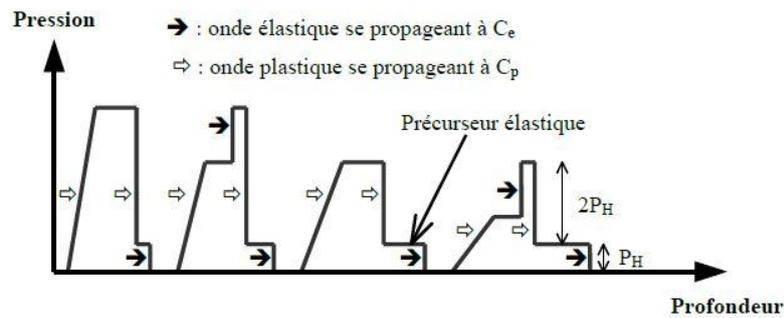


FIGURE 1.9: Amortissement élasto-plastique de l'onde de choc [SOL 02]

### 3.2.4 Techniques de génération des ondes de choc

Il existe aujourd'hui plusieurs moyens pour générer des ondes de choc dans un matériau afin qu'elles interagissent avec celui-ci (selon les équations d'état régissant le matériau). Les méthodes citées ci-dessous sont les plus couramment utilisées pour produire des ondes de choc dans un matériau :

- Usage d'explosifs en contact avec le matériau cible [MAR 94, ZEN 95, KRE 11, BAU 13] : les explosifs permettent de produire une détonation qui est constituée d'une onde de choc initiant la réaction chimique. Le plus souvent elles sont explosées à l'aide d'un générateur d'onde plane (lentille explosive). Ce type de procédé permet donc de créer des ondes de choc plane qui vont se propager dans le matériau cible.
- Impact d'une plaque ou d'un projectile sur le matériau cible [KOL 79, MAR 94, ROU 09, VE 10, COF 11] : la plaque ou le projectile est propulsé(e) à l'aide d'explosifs ou à l'aide de catapultes électromagnétiques (emploi de bobines supraconductrices qui fournissent une bonne efficacité énergétique permettant d'accélérer des charges à une très grande vitesse). Par cette technique, une onde de choc se crée lorsque le projectile vient impacter le matériau cible.
- Irradiation du matériau cible par des faisceaux lasers [SOL 02, PEY 07a, SON 10, CEL 10, NEI 15] : cette méthode consiste à créer un plasma instantané à très haute pression (typiquement 1 à 9 GPa) sur le matériau cible grâce à l'interaction de la cible avec un laser impulsif à forte densité de puissance. Le phénomène d'ablation qui en résulte crée le plasma dont la détente provoque les ondes de choc dans le matériau cible. Les détails sur cette technique seront présentés dans la section suivante.
- Irradiation de la cible par un faisceau d'ion (*intense heavy ion beams*) [HOF 05, VAR 07, TAH 08, TAH 11] : cette technique permet de libérer de fortes densités énergétiques. Par exemple, on montre par simulations qu'avec une intensité du faisceau avoisinant  $5.0 \cdot 10^{11}$  ion/faisceau, la pression libérée et qui produit l'onde de choc atteint 480 GPa et la température dans la zone sollicitée avoisine  $1.8 \cdot 10^4$  K.
- Les essais nucléaires sur le matériau cible [RAG 77] : les neutrons générés dans l'explosion nucléaire permettent de créer une réaction de fission ou de fusion qui à son tour provoque

un dégagement d'énergie sous forme de chaleur. Au cours de cette libération d'énergie, il se produit une onde de choc à haute pression dans le matériau cible.

## 4 Modélisations et simulations numériques du comportement des matériaux sous choc

Si les ondes de choc ont pu avoir une application et une place dans la communauté industrielle, c'est grâce à de nombreux travaux de recherche menés sur ces dernières 50 années. Sur cette dernière décennie, plusieurs auteurs se sont intéressés à la réponse mécanique d'un matériau sous choc et aussi au comportement des matériaux lorsqu'ils sont soumis à des chocs de type laser [BAL 91, CHA 02b, PEY 07a, SON 10, CEL 10, GUO 11b, AMA 09, GÉR 13]

Dans ce paragraphe et dans les sections à venir nous parlerons essentiellement de la modélisation et de la simulation numérique du procédé de traitement par choc laser (*laser shot peening*). Pour les autres procédés (explosifs, impact de plaque ou de projectiles ...), le lecteur peut consulter les ouvrages suivants : [MAR 94, TSU 02].

### 4.1 Le choc laser qu'est ce que c'est ?

Le choc laser est un procédé mécanique dans lequel un faisceau laser à très haute densité de puissance est généré pour impacter la surface du matériau et créer ainsi des ondes de choc. Ces ondes de choc déforment plastiquement le matériau pour ainsi créer des contraintes résiduelles de compression en profondeur. Les contraintes résiduelles générées sont maximales sur une couche mince proche de la surface et puis décroissent avec la profondeur de la pièce.

Initialement proposé par la société BATELLE aux États-Unis dans les années 1970-

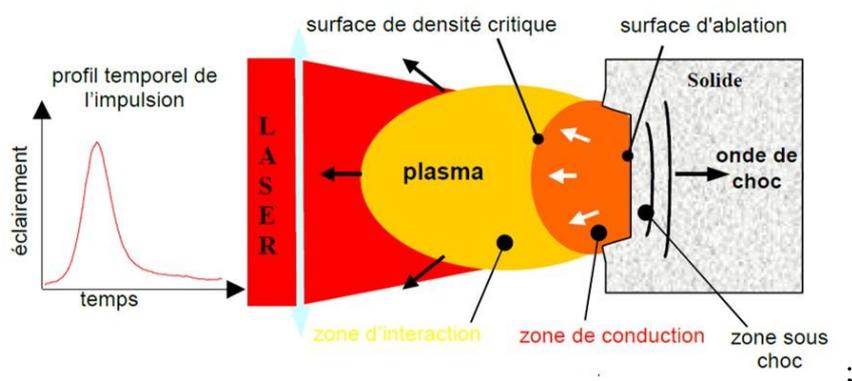


FIGURE 1.10: Description de l'interaction Laser-matière [MIC 02]

1980 [MEY 81], le choc laser à cette époque n'a pas connu un grand succès industrielle à cause du faible cadence de tirs et du mauvais rendement mécanique. En France, les chercheurs ont développé une série d'études avec des travaux de thèses financés par des industries automobiles, aéronautiques et mécaniques dans les années 1980. Ces recherches ont montré la possibilité d'introduire des contraintes résiduelles dans des matériaux comme l'aluminium, les alliages à

base nickel, les aciers, etc. Les améliorations obtenues dans le cas de la résistance en fatigue étaient très encourageant. Aujourd'hui de nombreux travaux de modélisation ont été menés et ont permis de comprendre les phénomènes physiques liés à la formation des déformations plastiques. Depuis quelques années, ce traitement a connu un essor considérable grâce à des développements récents réalisés dans des différents pays pour des équipements permettant de faire des traitements rapides. Aujourd'hui, un traitement avec une cadence industrielle est possible.

Le principe de traitement par laser consiste à couvrir la surface de la cible par une substance thermo-protecteur. Lorsque le faisceau laser est envoyé sur le matériau cible, l'énergie laser est absorbée dans une très faible épaisseur du matériau. Cette épaisseur se vaporise et s'ionise très rapidement. La vapeur partiellement ionisée forme donc un plasma sur la surface de la cible dont la détente provoque une pression qui s'applique à la surface du matériau. Cette contrainte superficielle se propage alors à l'intérieur de la cible sous forme d'une onde de choc. La couche thermo-protectrice permet d'éviter tout effet de la température engendré par le plasma [SOL 02, CHA 02a] et ainsi préserver une meilleure qualité de la surface. En l'absence de cette substance thermo-protecteur, l'énergie fournie par la pression pour créer l'onde de choc est très faible et donc inefficace [CHA 02a] pour certaines densités de puissance. La substance thermo-protectrice peut être soit de l'aluminium [ZHA 10a], du cuivre [CHE 05], du zinc [CHA 02a], une couche de peinture noire [RUS 99]. Hong et al [HON 98] ont montré expérimentalement que la couche thermo-protecteur à base de peinture noire permet une absorption efficace de l'énergie laser (quasiment 100% de l'énergie laser est absorbée) comparée à une couche d'aluminium (environ 80% de l'énergie laser absorbée). Bien que cette substance permet d'augmenter la pression induite, le choc laser est tout de même limité par le phénomène de claquage qui peut survenir dans le milieu de confinement et absorbé partiellement ou totalement l'impulsion laser incidente [SOL 02]. C'est donc un handicap qui limite quelquefois le procédé. Le principe du traitement par choc laser est schématisé sur la figure 6.25.

Il existe deux types de traitement de surfaces par choc laser à savoir le régime confiné et le régime direct. Le régime confiné consiste à couvrir la cible par une couche d'une substance transparente appelée *milieu de confinement* capable de laisser traverser les faisceaux laser. Ce milieu de confinement permet de conserver la forme de l'expansion du plasma et provoquer ainsi des ondes de choc intenses [GUJ 14]. Plus généralement le milieu de confinement est choisi comme étant de l'eau [CAS 09, GUO 11a, ZHO 12], du quartz [CLA 77, HON 98, THA 07]. Le choix du milieu de confinement dépend du matériau cible, de la densité et des vitesses acoustiques [GUJ 14] qui engendrent les effets dits *impédance acoustique*.

Contrairement au régime confiné, celui direct consiste à envoyer le faisceau laser directement sur la cible sans le milieu de confinement. Ce type de traitement n'est pas très efficace du fait des pertes d'énergie laser dans le milieu environnant.

## 4.2 Modèles analytiques de simulation de Choc laser

Dans la littérature il existe très peu ou presque pas des modèles analytiques décrivant les chocs par impacts rapides. Le premier modèle analytique établi sur les impacts rapides et qui a abouti à la simulation du procédé de choc laser est celui de Ballard [BAL 91]. Dans ce paragraphe, nous rappellerons très brièvement les différentes hypothèses émises et quelques formulations analytiques

qui y sont associées.

Dans son modèle de choc laser, pour illustrer les phénomènes mis en jeux et les effets mécaniques induits par impact laser sur un matériau élastique parfaitement plastique, Ballard adopte les hypothèses suivantes :

- les effets de bord sont négligeables,
- les déplacements matériels à l'intérieur de la cible se font perpendiculairement à la surface, par conséquent les déformations induites sont uniaxiales,
- les effets thermiques sont négligeables car les impulsions lasers appliquées sont de courtes durées,
- les ondes induites sont longitudinales et planes.

Ainsi les principaux tenseurs (contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$ , déformation totale  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  et déformation plastique  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$ ) mis en jeux prennent les formes suivantes :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_r & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^p = \begin{bmatrix} -\frac{\varepsilon^p}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\varepsilon^p}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^p \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Où  $\sigma_r$  est la contrainte radiale et  $\sigma_x$  la contrainte longitudinale obtenues à partir de la loi de Hooke :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda Tr(\underline{\underline{\varepsilon}}) + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}$$

### Critère de plastification sous choc et déformation plastique induite

En mécanique des solides, lorsqu'un matériau est soumis à un chargement suffisamment élevé, pouvant générer des contraintes dépassant sa limite élastique statique (initiale), ce dernier se déforme et garde en fin de chargement une déformation permanente dite *déformation plastique*. En dynamique, et plus précisément dans le cas du choc laser, cette limite est légèrement modifiée et prend le nom de *limite élastique d'Hugoniot*. Son expression est donnée par l'expression EQ. 1.7

$$\sigma_H = \left(1 + \frac{\lambda}{2\mu}\right) \sigma_y^{dyn} \quad (1.7)$$

où  $\sigma_y^{dyn}$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  sont respectivement la limite élastique dynamique et les coefficients de Lamé du matériau soumis au(x) choc(s). Toutefois cette limite peut être modifiée lorsque le matériau présente des contraintes résiduelles initiales  $\sigma_o^r$ . Dans ce cas, Dubouchet [DUB 93] a montré que limite élastique prend la forme définie par l'expression EQ. 1.8.

$$\sigma_H = \left(1 + \frac{\lambda}{2\mu}\right) (\sigma_y^{dyn} - \sigma_o^r) \quad (1.8)$$

Dans son modèle, Ballard a montré que l'évolution des déformations plastiques dépend de la pression appliquée et met en évidence trois domaines de pression comparée à la limite élastique comme le montre la figure 4.2. Son modèle permet aussi de déterminer la profondeur de la zone plastifiée à la fin du processus de propagation des ondes de choc. Les domaines délimités ont été définis pour le cas d'un matériau élastique et parfaitement plastique :

- pour une pression  $P$  appliquée telle que  $P \leq \sigma_H$ , le matériau sollicité reste dans le domaine élastique c'est-à-dire aucune déformation plastique n'apparaît dans le matériau,
- pour  $\sigma_H \leq P \leq 2\sigma_H$ , le matériau se déforme plastiquement et la déformation plastique croît linéairement en fonction de la pression. L'expression de la déformation plastique est donnée par l'équation EQ. 1.9

$$\varepsilon^p = -\frac{2\sigma_H}{3\lambda + 2\mu} \left[ \frac{P}{\sigma_H} - 1 \right] \quad (1.9)$$

- lorsque la pression appliquée dépasse deux fois la limite élastique d'Hugoniot ( $P \geq 2P_H$ ), les déformations plastiques se stabilisent et restent indépendante de la pression comme le montre l'expression EQ. 1.10. C'est donc cette déformation plastique que l'on retrouvera une fois que le régime statique est atteint.

$$\varepsilon^p = -\frac{2\sigma_H}{3\lambda + 2\mu} \quad (1.10)$$

Dans le cas d'une impulsion crête de durée  $\tau$ , la profondeur de la zone déformée plastiquement est définie par l'équation ci dessous :

$$L_{sat} = \frac{C_p C_e \tau}{C_e - C_p} E \left( \frac{P}{2\sigma_y^{dyn} (1 + \lambda/2\mu)} \right) \quad (1.11)$$

$$C_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu/3}{\rho}} \quad (1.12)$$

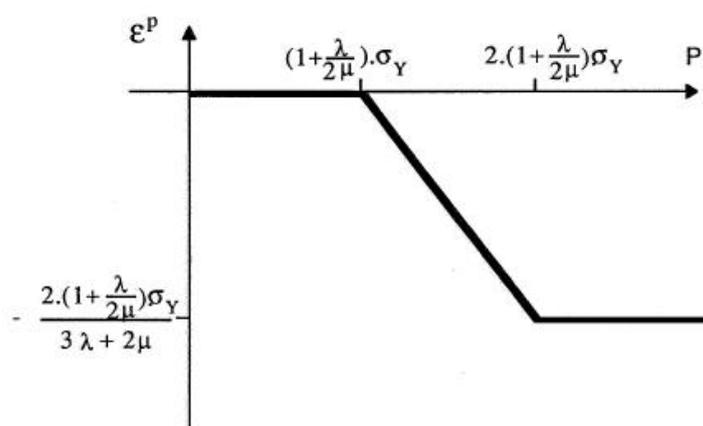
où  $C_e$ ,  $C_p$  sont respectivement les vitesses des ondes élastiques et plastiques.

En observant attentivement cette expression (EQ. 1.11), on peut se rendre compte que la profondeur affectée plastiquement décroît rapidement avec la limite élastique du matériau. Inversement la déformation plastique seuil définie par l'équation EQ. 1.10 croît avec la limite élastique (car la limite d'Hugoniot croît avec la limite élastique du matériau).

### Contraintes résiduelles induites par impact rapide

Le modèle analytique de Ballard est capable de prédire les contraintes résiduelles surfaciques induites par impact rapide. Pour déterminer le champ de contraintes résiduelles induit, l'auteur se base sur un modèle d'inclusion affleurant à la surface d'un massif semi infini et considère ensuite ce massif comme étant un massif semi-infini avec une déformation plastique homogène sur une épaisseur finie. Dans le cas d'un impact isolé, de forme carré, Ballard obtient une contrainte résiduelle surfacique approximativement homogène. En supposant que la profondeur de la zone affectée plastiquement est faible devant la longueur du carré, il montre que cette contrainte, lorsque la déformation plastique atteint sa valeur seuil (EQ. 1.10) se définit par :

$$\sigma_{surf} = -\sigma_y^{dyn} \left[ 1 - \frac{4\sqrt{2}(1+\nu)L}{\pi a} \right] \quad (1.13)$$



**FIGURE 1.11:** Évolution des déformations plastiques en fonction de la pression appliquée [BAL 91]

Avec  $L$  la profondeur affectée plastiquement et  $a$  la taille du spot carré.

Pour un impact laser circulaire de rayon  $r_o$ , la contrainte résiduelle superficielle est définie par :

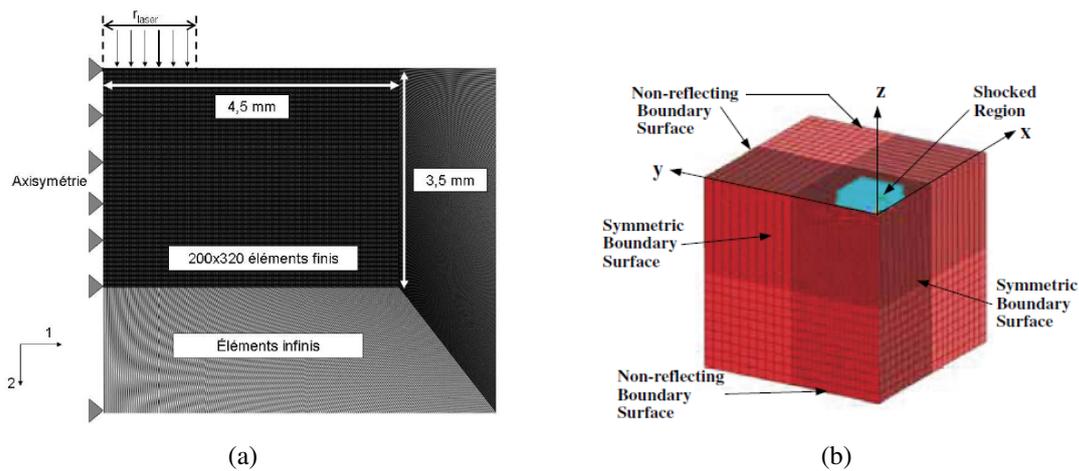
$$\sigma_{surf} = \mu \epsilon^p \left( \frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \left[ 1 - \frac{4(1+\nu)L}{\pi r_o} \right] \quad (1.14)$$

L'auteur a ensuite présenté les contraintes résiduelles issues d'impacts superposés et d'impacts juxtaposés. Par cette étude, il montre que la superposition d'impacts ne change pas à la valeur de la contrainte superficielle toutefois, cela permet d'augmenter la profondeur de la zone affectée plastiquement.

### 4.3 Simulation numérique du choc laser

La majorité des simulations numériques faites sur les procédés permettant de produire des ondes de choc, notamment les procédés de choc laser, sont des simulations de type éléments finis. Elles sont majoritairement réalisées sur des alliages d'aluminium [SON 10], de titane, de cuivre et aussi sur des métaux comme l'acier martensitique, l'acier inoxydable austénitique et martensitique [PEY 07a].

Les premiers modèles éléments finis pour la simulation du choc laser ont été essentiellement des modèles 2D axisymétrique. Dans cet ordre d'idée, Braisted et Robert [BRA 99] proposèrent pour la première fois un modèle axisymétrique avec le code de calcul Abaqus. Le développement des modèles 3D (symétrique) est récent et aujourd'hui on en compte une multitude ([HU 06, SON 10, GUO 11b], etc.). Dans les simulations éléments finis, l'hypothèse de massif semi infini est couramment exploitée et la géométrie se voit maillée par des éléments finis dans la zone d'intérêt et des éléments infinis en dehors de la zone d'intérêt comme illustré sur les figures 1.12. L'utilisation des éléments infinis permet d'éviter le retour des ondes dans le massif (réflexion des ondes de choc sur les bords du massif) qui sont souvent à l'origine de résultats perturbés ou des résultats inattendus.



**FIGURE 1.12:** Configurations géométriques des modèles éléments finis : (a) modèle axisymétrique 2D [SON 10], (b) modèle modèle symétrique 3D [HU 06]

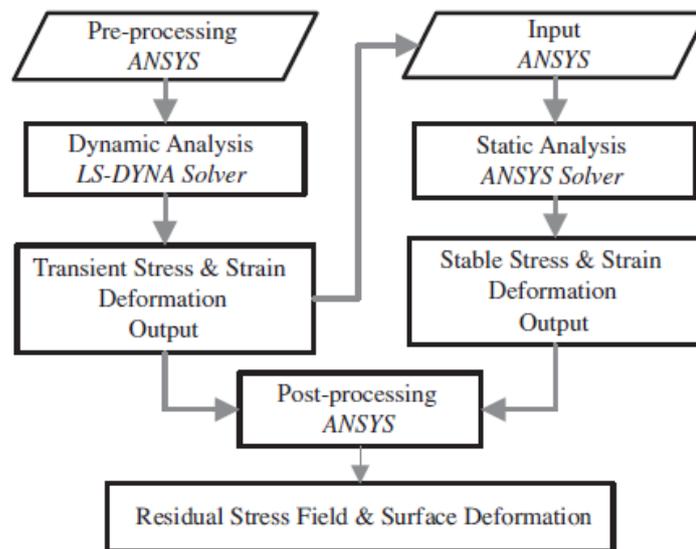
En ce qui concerne le calcul, deux grandes étapes sont mises en place pour simuler les effets mécaniques induit par le procédé [HU 06] :

- un premier calcul est réalisé en dynamique explicite, cette étape concerne donc le problème de propagation des ondes de chocs dans le matériau cible. Au cours de celle ci, la bonne connaissance du comportement du matériau prenant en compte la vitesse de déformation et/ou la température s'avère nécessaire.
- un deuxième calcul est réalisé lorsque le premier est arrêté (stabilisation atteinte). C'est au cours de celui-ci que sont calculés les états mécaniques induit par le procédé (contraintes résiduelles finales). Dans cette étape, les formulations sont standards et un calcul en statique est réalisé avec un comportement élasto-plastique.

La figure 1.13 récapitule les différentes étapes à suivre pour réaliser une simulation par éléments finis des états mécaniques du matériaux soumis sous choc.

IL faut noter que cette façon de calculer les contraintes résiduelles est moins coûteux en temps de calcul, cependant cela nécessite un processus de transfert de déformations plastiques qui est un peu complexe. Une autre façon de calculer les contraintes résiduelles serait de prendre le temps de calcul très long. Toutefois cette dernière est très coûteux en temps de calcul lorsque les incréments de temps sont très petits.

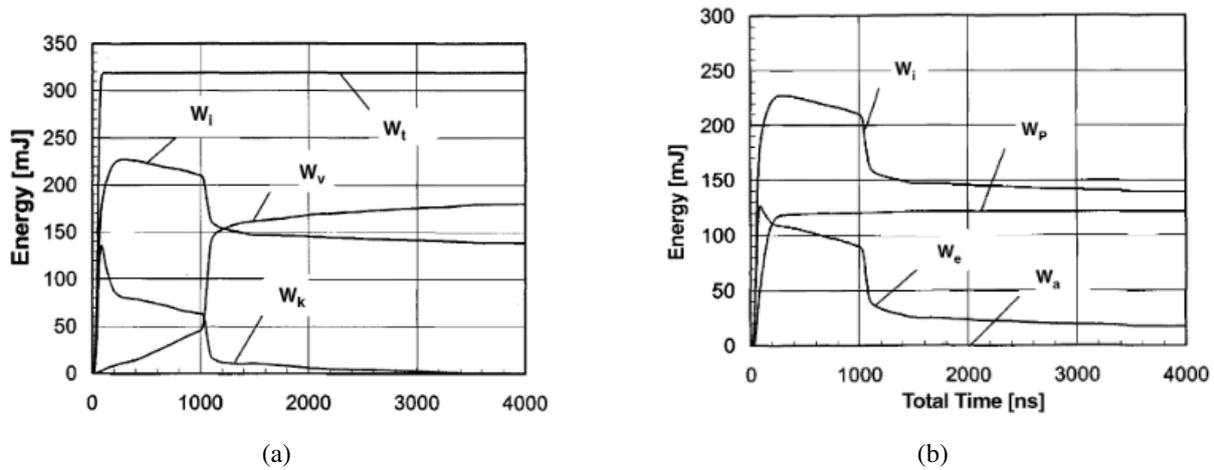
Le point crucial dans les simulations numériques est la détermination du temps à partir duquel on peut supposer être en régime quasi-statique. Pour répondre à cette question, certains auteurs se sont penchés sur l'étude des différentes formes d'énergie mises en jeu au cours d'un choc. Ainsi, dans leurs travaux sur la simulation d'impacts multiples par laser sur un acier, Kang et Lin [KAN 06] ont montré que l'énergie cinétique du massif et l'énergie interne sont de bons critères d'arrêt. En effet, au cours du choc, le travail total  $W_t$  dû aux efforts extérieurs (ici la pression appliquée en surface) est converti en énergie cinétique  $W_k$ , énergie interne  $W_i$  et en énergie visqueuse dissipative  $W_v$ . Au bout d'un certain temps, l'énergie cinétique du système décroît très rapidement pour disparaître, tandis que l'énergie interne décroît pour rester constante autour d'une



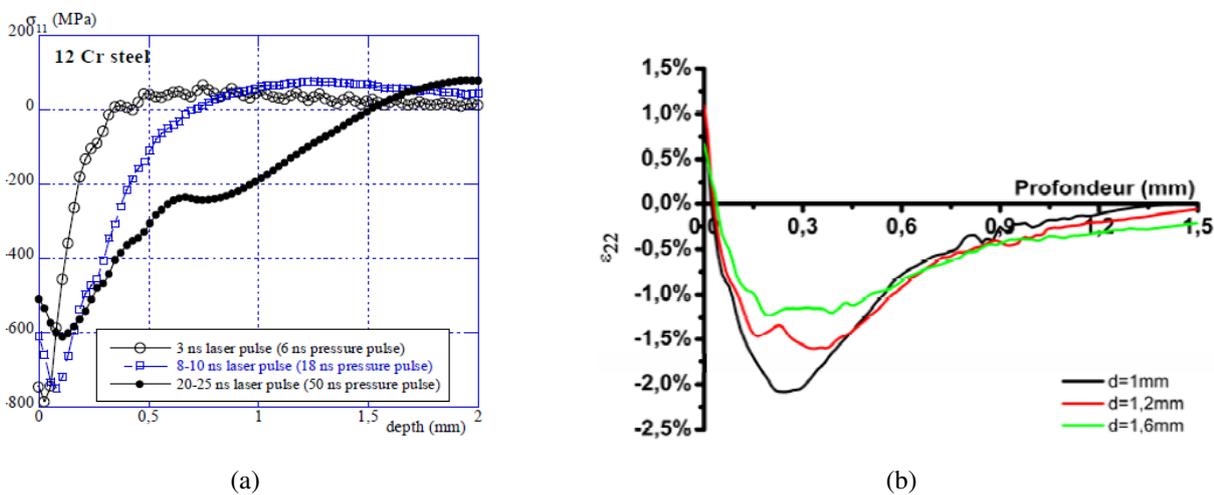
**FIGURE 1.13:** Schéma récapitulatif des étapes de simulation des effets mécaniques par la méthode des Éléments Finis [HU 06] implémentée dans le logiciel ANSYS

valeur non nulle. Pendant ce temps, l'énergie visqueuse s'accroît légèrement et fini par se stabiliser à une valeur non nulle comme le montre la figure 1.14(a). D'autre part, ces auteurs montrent que (cf FIG. 1.14(b)) l'énergie de déformation plastique dissipative  $W_p$  augmente pour se stabiliser au bout d'un certain temps. Cette stabilisation de l'énergie plastique implique simplement qu'aucune déformation plastique supplémentaire ne se forme dans le massif. Les calculs peuvent ainsi être interrompus lorsque l'énergie plastique se stabilise, donc lorsque l'énergie interne et l'énergie cinétique sont stables. Ce critère d'arrêt sera repris dans plusieurs études faites sur la simulation numérique par éléments finis du choc laser ([SON 10, WEI 14], etc.).

La figure 1.15 montre un exemple de profil des grandeurs mécaniques (contraintes résiduelles et déformations plastiques) obtenu lorsque le régime statique est atteint. Le choc laser génère donc des contraintes résiduelles de compression en surface et en sous couche qui sont maximales en sous couche et des contraintes de traction qui sont localisées plus dans la profondeur. Le matériau soumis au choc laser présente en fin du traitement une surface faiblement écrouie et un écrouissage maximal en sous couche.



**FIGURE 1.14:** Historique de l'évolution des différentes formes d'énergie du système au cours d'un choc laser [KAN 06] : (a) Travail total  $W_t$ , énergie interne  $W_i$ , énergie cinétique  $W_k$  et énergie visqueuse  $W_v$ , (b) énergie interne  $W_i$ , énergie plastique  $W_p$ , énergie artificielle  $W_a$  et énergie de déformation  $W_e$



**FIGURE 1.15:** Effets mécaniques induits par impacts laser : (a) profil des contraintes résiduelles issues de la simulation par éléments finis induites par choc laser sur acier inoxydable [PEY 07a], (b) profil des déformations plastiques issues de différentes tailles du spot laser sur un alliage d'aluminium [SON 10]

## 5 Comportement des matériaux sous choc

### 5.1 Lois de comportement viscoplastique

Dans ce paragraphe, nous décriront les différentes lois de comportement utilisées pour décrire le comportement des matériaux sous choc.

Dans la littérature, on trouve aujourd'hui une multitude de lois pour représenter le comportement d'un matériau sous choc. Lorsque le matériau est soumis à des sollicitations extrêmes (vitesse de déformation typiquement allant de  $10^1$  à  $10^7$ ), son comportement dynamique dépend fortement de la vitesse de déformation et les lois utilisées sont essentiellement des lois viscoplastiques. Lagrand et al. [LAN 99] se sont intéressés aux différentes lois viscoplastiques qu'on peut rencontrer dans la littérature. Dans leur analyse, ils ont regroupé ces lois viscoplastiques en trois grandes catégories qui sont :

- **Les lois viscoplastiques empiriques**

Ces lois sont essentiellement obtenues par une procédure expérimentale et leurs formulations sont plus ou moins complexes. Parmi ces lois, on peut citer la loi de Zerilli-Amstrong [J.F 87] donnée par EQ. 1.15, la loi de Prandtl [PEN 93] donnée par EQ. 1.16, la loi de Perzina [ROB 69, PER 86] donnée par EQ. 1.17.

$$\sigma(\bar{\epsilon}, \dot{\bar{\epsilon}}) = C_0 + C_2 \bar{\epsilon}^n \exp(-C_3 T + C_4 T \ln(\dot{\bar{\epsilon}})) \quad (1.15)$$

$$\sigma(\bar{\epsilon}, \dot{\bar{\epsilon}}) = \frac{1}{A} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{C}\right) \quad (1.16)$$

$$\sigma(\bar{\epsilon}, \dot{\bar{\epsilon}}) = K \bar{\epsilon}^m \dot{\bar{\epsilon}}^n \quad (1.17)$$

où  $C_0 \dots C_5$ ,  $K$ ,  $A$ ,  $n$  sont des paramètres matériaux,  $C$ ,  $m$  les paramètres décrivant la sensibilité à la vitesse de déformation,  $T$  la température,  $\dot{\bar{\epsilon}}$  la vitesse de déformation et  $\bar{\epsilon}$

- **Les lois viscoplastiques additives**

Pour ces types de lois, l'effet de la vitesse de déformation est rajouté à la fonction de charge par une nouvelle fonction  $F$  dépendante de la vitesse de déformation  $\dot{\bar{\epsilon}}$  et de la déformation plastique cumulée  $\bar{\epsilon}$ . La limite du matériau s'obtient en additionnant cette nouvelle fonction à la limite élastique quasi-statique  $K_{ref}(\bar{\epsilon})$ . Pour une telle loi, la fonction de charge peut prendre des valeurs positives (égale à la fonction  $F$ ) [JEU 08]. Ces lois prennent la forme générale suivante :

$$K_a(\bar{\epsilon}, \dot{\bar{\epsilon}}) = K_{ref}(\bar{\epsilon}) + F(\bar{\epsilon}, \dot{\bar{\epsilon}}) \quad (1.18)$$

Comme exemples d'une telle loi, on peut citer la loi de Sokolovskiy et al. [PEN 93] donnée par l'expression EQ. 1.19, la loi de Lindholm [LIN 64] donnée par l'expression EQ. 1.20.

$$F(\bar{\epsilon}, \dot{\bar{\epsilon}}) = A \log(1 + B \dot{\bar{\epsilon}}) \quad (1.19)$$

$$F(\bar{\epsilon}, \dot{\bar{\epsilon}}) = (A + B \bar{\epsilon}^n) \log(\dot{\bar{\epsilon}}) \quad (1.20)$$

où  $A$ ,  $B$  et  $n$  sont les paramètres

• **Les lois viscoplastiques multiplicatives**

Ici, la prise en compte de l'effet de la vitesse de déformation se traduit par la présence d'une fonction dépendante de la vitesse de déformation  $G(\bar{\epsilon}, \dot{\bar{\epsilon}})$  et qui multiplie la limite élastique quasi-statique du matériau  $K_{ref}(\bar{\epsilon})$ . Elles prennent la forme générale suivante :

$$K_a(\bar{\epsilon}, \dot{\bar{\epsilon}}) = K_{ref}(\bar{\epsilon}) G(\bar{\epsilon}, \dot{\bar{\epsilon}}) \tag{1.21}$$

Comme exemple d'une telle loi, on peut citer la loi de Johnson-Cook [GOR 83] donnée par l'expression EQ. 1.24, la loi de Jones [JON 93] donnée par l'expression EQ. 1.22, la loi de Cowper-Symonds [GRR 57] donnée par l'expression EQ. 1.23.

$$G(\bar{\epsilon}, \dot{\bar{\epsilon}}) = 1 + \left[ \frac{\epsilon_u - \epsilon_y}{D_y(\epsilon_u - \bar{\epsilon}) + D_u(\bar{\epsilon} - \epsilon_y)} \right]^{\frac{1}{m}} \tag{1.22}$$

$$G(\bar{\epsilon}, \dot{\bar{\epsilon}}) = 1 + \left( \frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{D} \right)^{\frac{1}{m}} \tag{1.23}$$

où  $D$  et  $m$  sont les paramètres constants choisis pour décrire la sensibilité à la vitesse de déformation,  $D_y, D_u, \epsilon_u, \epsilon_y$  sont également des paramètres matériaux.

**5.2 Loi de Johnson-Cook et ses variantes**

Dans ce paragraphe, nous allons décrire la loi de Johnson-Cook qui sera donc utilisée dans nos applications. La loi de Johnson-Cook [GOR 83] est aujourd'hui la plus utilisée pour simuler le comportement des matériaux sous choc. De part sa forme simple définie par l'équation 1.24, cette loi est constituée de trois termes principaux : un terme élasto-plastique prenant en compte l'écroutissement du matériau, un terme visqueux qui prend en compte la vitesse de déformation et enfin un terme thermique qui prend en compte l'effet thermique. La signification des différents paramètres constituant la loi de Johnson-Cook est consignée dans le tableau 1.1.

$$\sigma_{eq} = [A + B(\bar{\epsilon})^n] \left[ 1 + C \ln \left( \frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{\dot{\bar{\epsilon}}_o} \right) \right] \left[ 1 - \left( \frac{T - T_o}{T_f - T_o} \right)^m \right] \tag{1.24}$$

La vitesse de référence  $\dot{\bar{\epsilon}}_o$  dans la formulation permet de savoir en dessous de quel seuil le comportement visqueux peut être négligé. Lorsque la vitesse de déformation plastique équivalente  $\dot{\bar{\epsilon}}$  est inférieure à  $\dot{\bar{\epsilon}}_o^p$ , le terme visqueux est négligeable : cela suppose que le matériau a un comportement élasto-plastique. Ceci permet aussi d'éviter les cas où la limite élastique diminue alors qu'elle devait augmenter ; et aussi le cas extrême où l'on obtiendrait une limite élastique négative (pour des valeurs très faibles de la vitesse de déformation).

La température ambiante  $T_o$  permet quant à elle de savoir en dessous de quel température seuil on peut négliger les effets thermiques dans les simulations numériques. Lorsque la température  $T$  est inférieure à la température  $T_o$ , on peut négliger le terme thermique, ce qui permet d'éviter des erreurs numériques lorsque le coefficient de sensibilité  $m$  prend des valeurs en dessous de 1.

Si cette loi est aujourd'hui beaucoup utilisée, c'est parce qu'elle offre d'énormes avantages,

Dépendance de l'érouissage	$[A + B(\bar{\epsilon}^p)^n]$
	<p><math>A</math> : limite d'élasticité initiale  <math>B</math> : module d'érouissage  <math>\bar{\epsilon}^p</math> : déformation plastique  <math>n</math> : coefficient d'érouissage</p>
Dépendance de la vitesse	$\left[1 + C \ln\left(\frac{\dot{\epsilon}^p}{\dot{\epsilon}_o^p}\right)\right]$
	<p><math>C</math> : coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation  <math>\dot{\epsilon}_o^p</math> : vitesse de déformation de référence  <math>\dot{\epsilon}^p</math> : vitesse de déformation plastique au cours du processus</p>
Dépendance de la température	$\left[1 - \left(\frac{T - T_o}{T_f - T_o}\right)^m\right]$
	<p><math>T_o</math> : température ambiante  <math>T_f</math> : température de fusion  <math>T</math> : température au cours du processus  <math>m</math> : coefficient de sensibilité à la température</p>

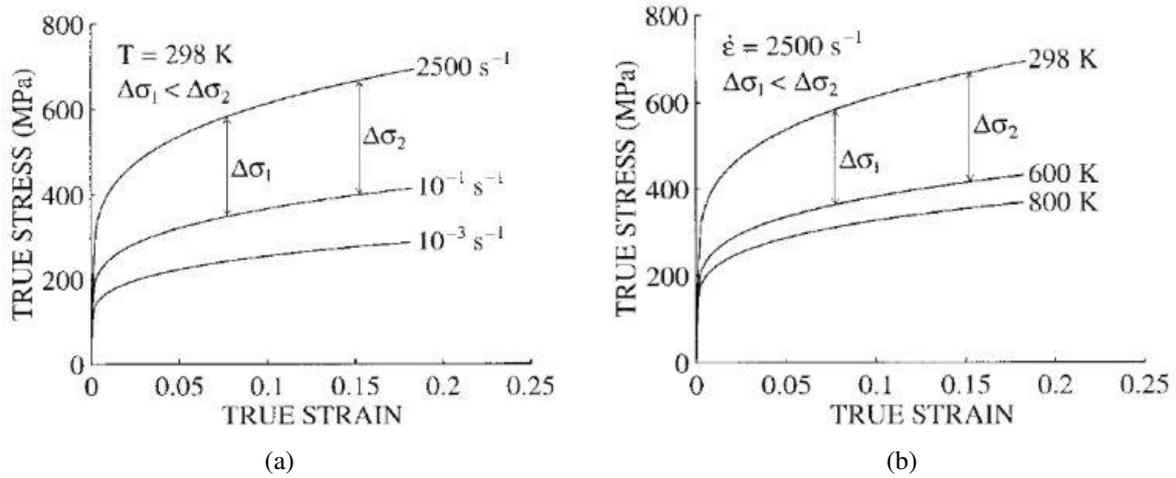
**TABLE 1.1:** Signification et rôle des différents paramètres constituant la loi de Johnson-Cook

à savoir une expérimentation moins coûteuse pour l'identification des différents paramètres d'une part et d'autre part, la grande quantité de données expérimentale disponible pour la plupart des matériaux couramment utilisés.

Nous tenons à souligner ici que cette loi présente toutefois des inconvénients. En effet, le choix du paramètre  $\dot{\epsilon}_o^p$  (vitesse de déformation de référence) est crucial dans les simulations. Des mesures expérimentales ont montré que cette vitesse influe fortement sur le paramètre  $C$  et par conséquent sur la limite élastique ; pour un même matériau, différentes valeurs du paramètre  $C$  sont obtenues pour différentes valeurs de la vitesse de référence  $\dot{\epsilon}_o^p$ . Dans la littérature,  $\dot{\epsilon}_o^p$  est généralement prise égale à  $1s^{-1}$  dans la majorité des simulations faites sur le comportement des matériaux sous choc.

### Extension de la loi de Johnson-Cook

La loi de Johnson-Cook peut s'avérer insuffisante lorsque la vitesse de déformation dépasse les  $10^3s^{-1}$ . Ceci s'explique par le fait que pour certains matériaux ductiles, la limite élastique croît rapidement avec la vitesse de déformation. Pour remédier à cette insuffisance de la loi de Johnson-



**FIGURE 1.16:** Relation contrainte-déformation traduisant l'influence des différents paramètres de la loi de Johnson-Cook sur la limite élastique [LIA 99] du matériau lors d'une sollicitation dynamique : (a) influence de la vitesse de déformation à température ambiante constante ; (b) influence de la température à vitesse de déformation constante

Cook, certains auteurs ont apporté des modifications.

Dans cet ordre d'idée, Rule et Jones [RUL 98] ont proposé une extension de la loi de Johnson-Cook pour des matériaux ductiles soumis à une vitesse de déformation supérieure à  $10^4 s^{-1}$ . Cette nouvelle extension est donnée par EQ. 1.25. Les paramètres de la nouvelle loi de Johnson-Cook modifiée ont été identifiés pour l'alliage d'aluminium 7075-T6, du cuivre OFHC, du fer forgé et enfin un acier à haute résistance [RUL 98].

$$\sigma_{eq} = f(\dot{\epsilon}) \left( A + B (\dot{\epsilon})^n \right) \left[ 1 - \left( \frac{T - T_o}{T_f - T_o} \right)^m \right] \quad (1.25)$$

avec  $f$ , une fonction définie par

$$f\left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_o}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \dot{\epsilon} \leq \dot{\epsilon}_o \\ 1 + C_3 \ln\left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_o}\right) + C_4 \left( \frac{1}{C_5 - \ln\left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_o}\right) + \ln(\dot{\epsilon}_o)} - \frac{1}{C_5} \right) & \text{si } \dot{\epsilon} \geq \dot{\epsilon}_o \end{cases} \quad (1.26)$$

$$\left[ 1 + C_3 \ln\left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_o}\right) + C_4 \left( \frac{1}{C_5 - \ln\left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_o}\right) + \ln(\dot{\epsilon}_o)} - \frac{1}{C_5} \right) \right] \leq C_6 \quad (1.27)$$

Les paramètres  $C_1, \dots, C_6$  sont les paramètres matériaux.

Ces deux auteurs ont montré que la présence du terme  $\left( \frac{1}{C_5 - \ln\left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_o}\right) + \ln(\dot{\epsilon}_o)} - \frac{1}{C_5} \right)$  dans la formulation permet d'obtenir un accroissement important de la limite élastique au delà de  $10^3 s^{-1}$  que l'on ne pouvait pas obtenir avec la loi de Johnson-Cook définie par EQ. 1.24.

Il faut noter que la condition définie par l'équation 1.27 permet juste d'imposer une vitesse de déformation maximale afin d'éviter une limite élastique infinie lorsque le terme  $[C_5 - \ln(\dot{\bar{\epsilon}}) + \ln(\dot{\bar{\epsilon}}_o)]$  tend vers zero.

Afin d'augmenter la sensibilité à la vitesse de déformation, Kang et al [JON 00] dans leur étude faite sur la simulation éléments finis du crash d'automobile ont quant à eux préféré rajouter un terme quadratique porté sur le logarithme de la vitesse de déformation. Ils montrent que ce terme permet d'obtenir une bonne variation de la limite élastique par rapport à la vitesse de déformation. La nouvelle loi de Johnson-Cook modifiée prend donc la forme suivante :

$$\sigma_{eq} = [A + B(\bar{\epsilon})^n] \left[ 1 - \left( \frac{T - T_o}{T_f - T_o} \right)^m \right] \left[ 1 + C_1 \ln \left( \frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{\dot{\bar{\epsilon}}_o} \right) + C_2 \left( \ln \left[ \frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{\dot{\bar{\epsilon}}_o} \right] \right)^2 \right] \quad (1.28)$$

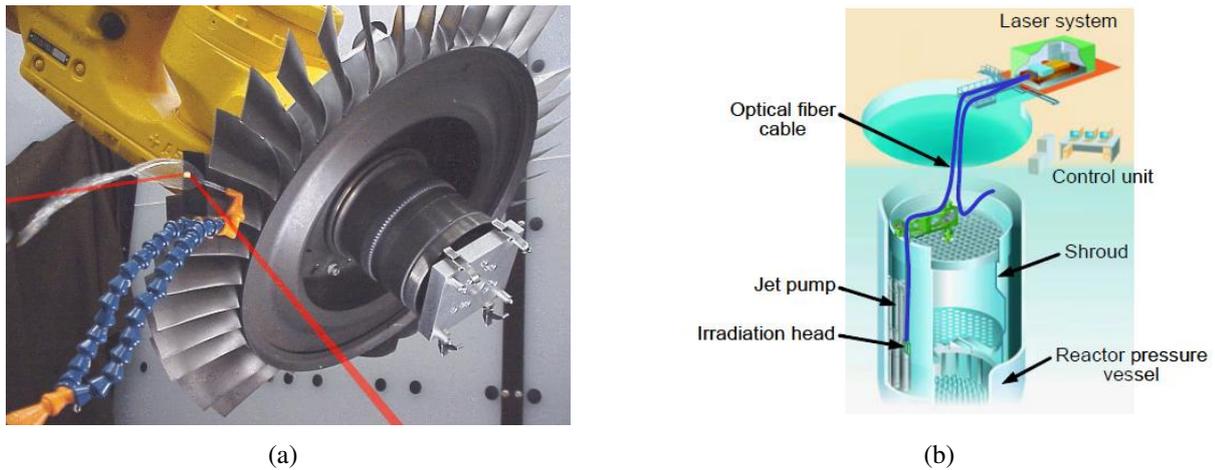
avec  $A, B, C_1, C_2$  des paramètres matériaux.

On rappelle ici qu'il existe encore d'autres variantes de Johnson-Cook. On peut citer entre autres le modèle de Holmquist et al [HOL 91] qui propose une loi de type puissance en vitesse de déformation ; le modèle de Khan et al [KHA 07] dans lequel est rajouté un terme visqueux comme un facteur de l'érouissage.

## 6 Ondes de choc et domaines d'application

De nos jours l'usage des ondes de choc dans nos activités quotidiennes prennent de l'ampleur. Les domaines les plus utilisateurs des onde de choc sont : le domaine aéronautique, le domaine nucléaire, la défense (les explosifs et les bombes), le domaine médical (onde de choc d'origine acoustique).

- Dans le domaine industriel, les ondes de choc sont principalement produites par usage du laser. L'application du traitement par laser dans les domaines industriels n'a pas été du tout facile car étant une technologie innovante (jeune). Les premiers brevets sur ce type de procédé ont été déposés pour la première fois par des industries aéronautiques pour le traitement des réacteurs, des aubes de turbines et des rotors d'avion [SEE 97a], [SEE 97b], des disques, des arbres de transmission [STE 01]. General Electric a appliqué le choc laser au traitement d'aubes fan en Titane d'avions militaires dans le cadre d'un programme de recherche à partir des années 1998. Depuis cette année jusqu'en 2001, General Electric seule possédait au moins 23 brevets US basés sur le choc laser [CHA 02b]. Bien avant 1998, la société Toshiba Corporation dans les année 1995 [SAN 97] a développé un système de renforcement par choc-laser des joints soudés des parois internes et externes en acier 304 des cuves de Réacteurs à Eau Pressurisée soumis à la corrosion sous contrainte.. Depuis 2002, MIC (Metal Improvement Company) a installé aux Etats-Unis la première usine de traitement par choc-laser, en collaboration avec LNL (San Francisco) principalement dédiée pour l'instant à des pièces aéronautiques à forte valeur ajoutée. Une seconde usine a été installée en Grande Bretagne en 2005 après que l'usage du choc laser a été étendu au traitement d'avion civil à partir de 2004.
- En dehors des deux grandes applications illustrées dans le premier point, aujourd'hui l'application des ondes de choc par production laser s'étend sur plusieurs domaines



**FIGURE 1.17:** Applications des ondes de choc produites par laser : (a) Traitement des aubes[TEC 07] ; (b) grenailage laser avec revêtement pour la maintenance préventive[YUJ 06]

de la mécanique. C'est le cas du formage par laser des structures aéronautiques en alliages d'aluminium et de titane pour la mise en forme des pièces mécaniques sur une profondeur pouvant atteindre 20mm [PEY 06]. Le traitement par choc-laser permet également de générer des convexités (voir l'image FIG. 6) qui peuvent être locales ou globales suivant la configuration de formage choisie : configuration de matriçage (sur un support de géométrie donnée) et la configuration de formage classique(avec bridage latéral).



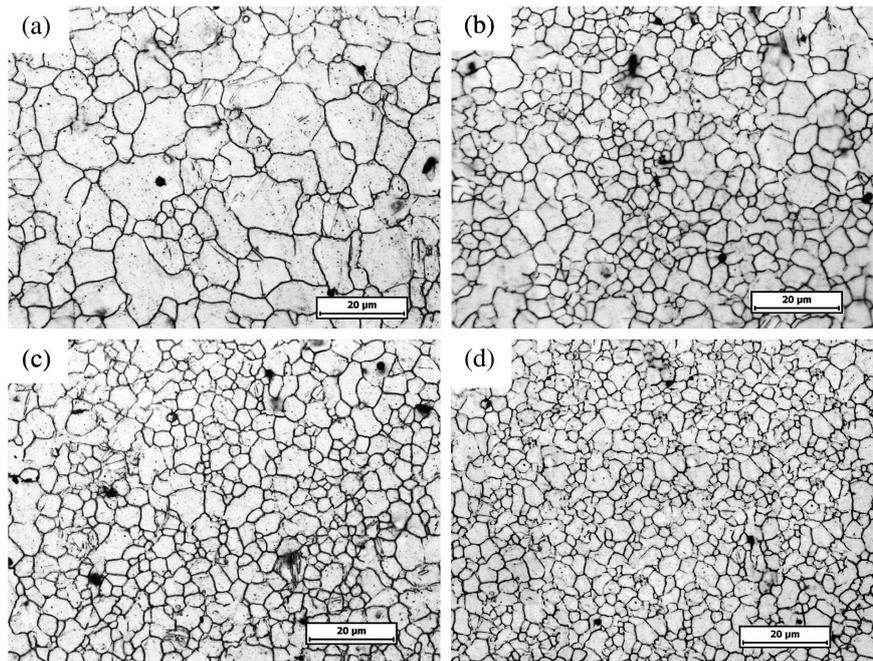
**FIGURE 1.18:** Formage par choc laser de structure métallique : matriçage d'une calotte hémisphérique en alliage d'aluminium 700 [PEY 06]

Les application du choc laser s'étendent aujourd'hui aux problèmes, Yakimets et al. [IRY 04] ont montré expérimentalement que le traitement d'un acier de roulement 100Cr6 par laser permet également d'améliorer la résistance à l'usure dans les conditions de non lubrification et avec des pressions en dessous de de 100MPa. Toutefois, les pressions appliquées au delà de 100MPa engendrent des plastifications répétées qui accentuent le mécanisme d'usure.

## 7 Microstructure des matériaux soumis aux chocs

Cet paragraphe donne un aperçu de la microstructure des matériaux soumis aux chocs en particulier aux chocs de type laser.

Les matériaux soumis aux chocs laser subissent une grande vitesse de déformation (jusqu'à  $10^6 s^{-1}$ ). Le changement de la microstructure se traduit par un raffinement des grains et aussi l'amélioration des propriétés matériaux telle que l'érouissage [LI 13] qui se traduit par une grande résistance à la fatigue [RUS 99], la résistance à l'usure [LUO 14], etc . Ainsi, Zhang et al. [ZHA 10b] ont montré que les caractéristiques microstructurales obtenue sont très dépendantes des paramètres du procédé. Ils mettent en évidence l'influence du nombre de chocs sur la microstructure de l'alliage de Magnésium AZ31B [ZHA 10a] comme le montre la figure FIG. 1.19. Sur cette figure, on peut observer que plus on augmente les impacts plus le matériau se déforme plastiquement raffinant ainsi les grains. Ce type de raffinement dans la microstructure présente des améliorations importantes dans la limitation de propagation des fissures et la prévention de la corrosion sous contrainte [ZHA 10a, GUJ 14]. Très dépendant des conditions de traitement, la variation des éléments microstructuraux peut être observée, et les effets engendrés peuvent être parfois positifs comme négatifs. Pour l'instant, à notre connaissance, aucune étude n'a montré des effets très destructeurs, toutefois des défauts ont été observés tels que les micro-fissures [YIL 04] ou des cratères [ROZ 10]. Certains auteurs, Hallouin et al. [M. 91, HAL 88], Peyre et al. [PEY 07c] ont montré également qu'à température ambiante, les aciers austénitiques sont dans un état cristallin de phase  $\gamma$  (cubique face centrées) et sous l'effet d'un choc, un pourcentage de matière (variable selon l'amplitude et le temps de maintien du choc) se retrouve à près choc en phase  $\epsilon$  ou en martensite  $\alpha$ . On observe alors dans les échantillons une microstructure résiduelle caractéristique qui comprend un mélange de macles, de défauts d'empilement, de lamelles de phase  $\epsilon$ , et à l'intersection des bandes de déformation, des embryons de martensites  $\alpha'$ .



**FIGURE 1.19:** Observation de la microstructure de l'alliage de Magnésium AZ31B après traitement par choc laser : (a) avant le traitement par choc, (b) après un impact réalisé, (c) après deux impacts réalisés, (d) après 4 impacts réalisés

## 8 Conclusions

Dans ce chapitre introductif, nous avons passé en revue le processus de formation des ondes dans un milieu homogène et nous avons ainsi décrit la particularité des ondes généralement rencontrées dans les applications industrielles. Les ondes plastiques et les ondes de choc ont été également présentées ainsi que la différence qui existe entre ces deux types d'ondes qui sont toutes issues de l'apparition des déformations plastiques dans le matériau. Nous avons également présenté le phénomène d'atténuation et d'amortissement des ondes de choc dans le matériau cible vus comme étant des facteurs importants pour que le matériau retrouve son équilibre statique.

Les différentes techniques et méthodes mises en place pour simuler les états mécaniques finaux des matériaux sous choc n'en sont pas du reste. Nous avons ainsi présenté un rappel sur le modèle analytique et les modèles éléments finis existant dans la littérature et aussi les différentes hypothèses essentielles faites lors des simulations, sans oublier aussi les différentes lois généralement utilisées pour décrire le comportement des matériaux sous sollicitation dynamique.

Ce bref aperçu nous a permis de prendre connaissance des travaux existants et/ou pas dans la littérature et aussi de bien comprendre certains phénomènes physiques mis en jeu dans les processus dynamiques. Bien que le cas de simulation de multiples impacts n'ait pas été largement évoqué dans ce chapitre, la méthode des éléments finis est aujourd'hui la plus utilisée dans les simulations numériques des problèmes mécaniques comme celle de multiples impacts en dynamique, toutefois, les techniques mises en place sont de plus en plus complexes et très coûteuses en temps de calcul. Quant aux modèles analytiques, ils sont limités par la complexité des équations à résoudre en dynamique en particulier lorsque l'on passe en dimension trois. Toutes ces limitations ne per-

mettent donc pas de cerner au mieux tous les phénomènes physiques et mécaniques mis en jeux dans les simulations.

Il devient donc nécessaire de mettre en place des modèles simples et moins coûteux. Les méthodes de calcul semi-analytique permettent une simulation rapide des problèmes de contact entre deux corps et offrent une réduction conséquente des temps de calcul. Des travaux récents effectués au LaMCoS ont permis une modélisation efficace des procédés de mise en compression des surfaces par impact ou encore par application d'une charge roulante en appliquant cette méthode. La méthode, à son stade de développement actuel permet de traiter que des impacts à faible vitesse déformation (un formalisme quasi-statique) sur des matériaux élasto-plastiques sans tenir compte les effets d'inertie et dynamiques. Cette thèse a pour objet d'apporter des améliorations à la dite méthode pour la résolution des problèmes en dynamique rapide.



## Chapitre 2

# Introduction à la méthode semi-analytique pour la simulation des procédés de mise en compression

*Dans ce second chapitre, nous repassons en revue la méthode semi-analytique en particulier les principales hypothèses et formulations, ainsi que son historique de développement au LaMCoS. Ensuite le modèle semi-analytique permettant de simuler les impacts multiples sera rappelé pour simuler le procédé de grenailage ultrasonore en vue de déterminer la rugosité des surfaces après traitement. Une méthodologie permettant de prédire la rugosité d'une surface grenillée sera présentée et validée expérimentalement. Enfin, une étude paramétrique sera présentée pour analyser l'influence des différents paramètres du procédé.*

## Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>41</b>
<b>2</b>	<b>Introduction à la méthode semi-analytique</b>	<b>41</b>
2.1	Contact de Hertz	42
2.2	Méthode semi-analytique	44
<b>3</b>	<b>Simulation du procédé de grenailage ultrasonore</b>	<b>48</b>
3.1	Grenailage ultrasonore et paramètres du procédé	49
3.2	Zone élémentaire représentative ou zone de référence	50
3.3	Taux de recouvrement et distribution des impacts	51
3.4	Simulation d'impacts multiples et paramètres numériques	51
<b>4</b>	<b>Prédiction de l'état de surface après grenailage ultrasonore</b>	<b>54</b>
4.1	Définition des paramètres de rugosité	54
4.2	Méthodologie pour la prédiction de la rugosité	56
4.3	Validation expérimentale du modèle	60
4.4	Étude de l'influence des paramètres du procédé	66
<b>5</b>	<b>Conclusions et motivations de la thèse</b>	<b>73</b>

---

# 1 Introduction

Les défauts des surfaces jouent un rôle important dans l'aptitude d'une pièce mécanique à remplir une fonctionnalité bien définie. Ainsi, la connaissance de la topologie des surfaces traitées est nécessaire pour comprendre les performances fonctionnelles de ces dernières et les conséquences des procédés de traitement. Parmi les défauts de surface qu'on peut recenser dans les procédés d'ingénierie, la rugosité des surfaces qui caractérise les défauts micro-géométriques de celle-ci attire plus l'attention des ingénieurs et les spécialistes en matériau. En effet, toute surface présente une forme de texture qui se caractérise par des pics et des vallées ; ces pics et vallées varient en hauteur et en espacement avec des propriétés inhérentes à la façon dont les surfaces ont été produites ou utilisées [ALK 07].

Le grenailage, le choc laser, le martelage, le galetage, etc. sont des procédés couramment utilisés en ingénierie pour la mise en forme des structures métalliques, l'augmentation de la durée de vie des pièces mécaniques et la résistance à la corrosion, etc. La résistance à la fatigue des composants métalliques est faite par introduction de contraintes résiduelles de compression en surface et sur une couche mince des pièces métalliques. Lorsque les surfaces sont traitées par l'un ou l'autre des procédés, il apparaît dans la zone traitée des déformations permanentes sous l'action des déformations plastiques qui se forment et dont leur amplitude décroît avec la profondeur, modifiant ainsi la texture de la surface. Généralement, après traitement des pièces mécaniques par ces procédés, la modification de la texture engendre une surface rugueuse dans la zone traitée. La mesure de la rugosité et par conséquent la qualité de la surface, devient dès lors un enjeu majeur dans l'industrie. Ainsi, le développement des techniques de mesure de la rugosité devient nécessaire pour quantifier le degré des défauts après traitement. Sur le plan expérimental, on dispose de profilomètres à contact et plus récemment de profilomètres optiques à balayage, optiques matriciels (pour des mesures en 3D). Cependant, bien qu'il existe une grande variété de méthodes et de techniques permettant de simuler les procédés de mise en forme, toutes ne proposent pas des techniques permettant de prédire la rugosité que l'on peut avoir à partir des résultats de simulation.

La méthode semi-analytique que nous présenterons ici, a été à l'origine développée pour la résolution des problèmes de contact. Cette méthode a été étendue pour la simulation des impacts multiples à faible vitesse de déformation pour prédire les contraintes résiduelles et déformations plastiques générées par le procédé de grenailage ultrasonore. Ce chapitre se situe dans la continuité des travaux entrepris sur la modélisation du grenailage ultrasonore. Ici, nous retracerons très brièvement l'histoire de la méthode semi-analytique développée au LaMCoS et qui aujourd'hui se concrétise par le développement d'un code maison nommé ISAAC. Dans la première partie, nous présenterons le principe de la méthode et les différentes hypothèses faites. Dans une seconde partie, nous présenterons le modèle de grenailage ultrasonore dont le cœur repose sur la simulation d'impacts multiples. Dans la dernière partie, nous présenterons une méthodologie permettant de prédire l'une des conséquences liées au trainement des pièces par le procédé de grenailage à savoir la rugosité.

## 2 Introduction à la méthode semi-analytique

Dans cette section, nous présentons les principales hypothèses de bases de la méthode semi-analytique. Ces hypothèses sont issues de la théorie de Hertz pour sur le contact entre deux corps

de géométries parfaites. Par conséquent, nous rappellerons les hypothèses de la théorie de Hertz et leur applications dans le cas du problème de Contact circulaire.

### 2.1 Contact de Hertz

#### 2.1.1 hypothèses

Le contact de Hertz demeure aujourd'hui le cas le plus simple pour élucider les principales hypothèses émises dans la résolution des problèmes de contact. Il décrit donc le contact entre deux corps élastiques de géométries sphériques ou elliptiques. Les deux corps sont supposés être soumis à un déplacement ou un chargement statique. Ainsi, les hypothèses de la théorie de Hertz sont résumées comme suit :

- la zone de contact a une forme elliptique,
- le problème de contact se fait sans frottement, il s'agit de contact purement normal,
- les corps élastiques doivent être des massifs semi-infinis ;  
pour cette dernière hypothèse, deux critères permettent de définir un *massif semi-infini* :
  - la zone de contact est très petite devant la taille de la géométrie. Dans ces conditions, les contraintes se localisent dans la zone de contact et l'on suppose négligeables tous les effets de bord.
  - les rayons de courbure des corps en contact sont larges devant les dimensions de la zone de contact. Il en résulte donc que les angles formés par les surfaces en contact demeurent très faibles. Dans ce cas, la zone de contact peut être assimilée à un plan et les niveaux de contraintes demeurent compatibles avec la théorie de l'élasticité linéaire.

Il faut aussi souligner que la théorie de Hertz est très restrictive et ne peut s'appliquer qu'aux massifs semi-infinis dont le comportement est purement élastique.

#### 2.1.2 Contact circulaire de Hertz

Considérons ici un problème de contact entre deux solides élastiques notés 1 et 2, et possédant un axe de révolution (voir figure 2.1). Les propriétés matériaux du solide  $i = 1, 2$  sont données par son module de Young  $E_i$  et son coefficient de Poisson  $\nu_i$ . Chaque solide est défini par son rayon de courbure  $R_1$  pour le solide 1 et  $R_2$  pour le solide 2. Les solutions analytiques du problème de contact ont été décrites en détail par Johnson [JOH 85]. Ici seul quelques équations seront rappelées. Ainsi, on définit le module de Young équivalent  $E^*$  de deux surfaces en contact par l'expression EQ. 2.1 et le rayon de courbure équivalent  $R$  par l'expression EQ. 2.2.

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (2.2)$$

En considérant une force  $F$  appliquée à l'un des solides en contact et en supposant que le problème est celui du contact de Hertz, on peut déterminer les autres paramètres du contact à savoir le rayon de contact  $a$ , la pression maximale  $P_{hertz}$  de Hertz et le déplacement vertical  $\delta_z$  des solides en contact.

$$a = \left( \frac{3FR}{4E^*} \right)^{1/3} \quad (2.3)$$

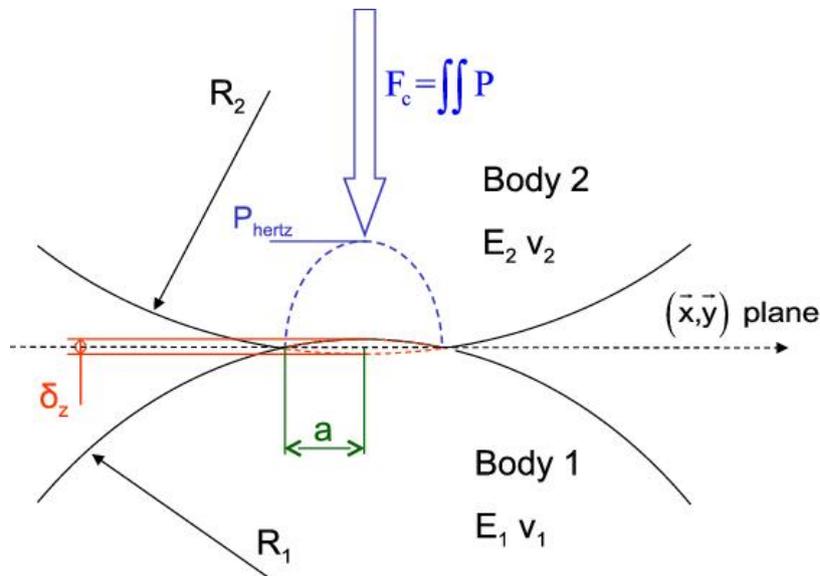
$$P_{hertz} = \frac{3F}{2\pi a^2} = \left( \frac{6FE^{*2}}{\pi^3 R^2} \right)^{1/3} \quad (2.4)$$

$$\delta_z = \frac{a^2}{R} = \left( \frac{9F^2}{16RE^{*2}} \right)^{1/3} \quad (2.5)$$

Ayant défini ces trois paramètres, le profil de pression dans la zone de contact est donné par un paraboloïde qui dépend de la distance radiale  $r$  depuis le centre de la zone de contact et du rayon de la zone de contact. Elle est définie par l'expression EQ. 2.6.

$$P_{|r \leq a} = P_{hertz} \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.6)$$

Les développements analytiques du contact de Hertz ne se limitent pas seulement qu'aux



**FIGURE 2.1:** Schéma illustrant le contact hertzien entre deux solides en révolution [CHA 11d]

contacts circulaires, on peut citer comme exemple le contact elliptique entre deux corps de

formes elliptiques. Ce problème ne sera pas présenté ici, le lecteur peut se reporter aux ouvrages [JOH 85, ANT 05] pour plus de précision.

Pour des problèmes de contact non Hertiens, il existe une littérature abondante sur la résolution analytique du contact ; pour citer comme exemple [WES 39, GAL 61, MEI 68, JOH 85], toutefois les développements analytiques se limitent dans la majorité des cas à des géométries de formes simples ou des formulations analytiques en 2D.

Le développement de nouvelles méthodes de résolution des problèmes de contact applicable aux géométries de formes complexes aussi bien pour un contact hertzien comme non hertzien devient nécessaire. Pour répondre à cet besoin, une nouvelle une classe de méthode intermédiaire entre l'analytique et le numérique dite **méthode semi-analytique (S.A.M)** a été développée pour la résolution des problèmes de contact.

## 2.2 Méthode semi-analytique

### 2.2.1 Historique

La méthode semi-analytique définie de façon générale est une méthode dérivant de celle des éléments de frontières et qui nécessite le maillage uniquement dans la zone de calcul. Les premiers modèles de cette méthode ont été proposés par Bentall et al. [BEN 67], Paul et al. [PAU 81] pour la résolution du problème de contact sous un chargement statique.

Si aujourd'hui la méthode semi-analytique est reconnue dans la communauté scientifique c'est grâce d'une part à sa capacité à résoudre les problèmes de contact plus complexes et d'autre part, sa capacité à réduire considérablement les temps de calcul. Dans cette section, l'historique de la méthode semi-analytique se limitera essentiellement à son développement au LaMCoS.

La méthode semi-analytique à l'origine a été introduite au LaMCoS par Jacq [JAC 01] pour la résolution des problèmes de contact avec frottement sur un massif élasto-plastique. En se basant sur les travaux de Chiu [CHI 77, CHI 78], Jacq implémente dans l'algorithme de résolution du contact les solutions analytiques élémentaires permettant de calculer les contraintes résiduelles engendrées par la présence des déformations plastiques dans un massif. L'objectif étant d'introduire les effets de déformations plastiques dans le solveur de contact. A partir de cet modèle, Boucly [BOU 07] introduisit les effets thermiques dans le calcul élasto-plastique pour la résolution du problème de contact roulant et le problème de glissement entre deux corps. En parallèle, il enrichit le solveur plastique en implémentant l'algorithme de retour radial ("return mapping" en anglais) proposé par Simo et al. [SIM 85].

La méthode semi-analytique a été étendue aux problèmes tangentiels par Gallego [GAL 07b] qui proposa un modèle élastique pour simuler le contact sous condition de stick-slip. Le modèle fut dans un premier temps adapté pour simuler le phénomène de l'usure en fretting [GAL 06] et dans un second temps aux problèmes de glissements partiels [GAL 07a]. Ensuite, le modèle a été étendu pour simuler les 3 modes de fretting et un couplage avec un modèle éléments finis de contact a été réalisé pour simuler l'endommagement par usure en fretting observé dans les aubes de soufflante des turboréacteurs [GAL 10a, GAL 10b].

La prise en compte de la plasticité dans les problèmes tangentiels a été l'œuvre de Fulleringer [FUL 10]. Il proposa ensuite un modèle permettant de tenir compte de la présence des hétérogénéités de formes sphériques dans l'un des massifs en contact et l'appliqua en suite aux matériaux revêtus élasto-plastiques sous sollicitation de fretting-wear [FUL 11]. L'application de

la méthode semi-analytique pour la résolution du contact entre des corps rugueux a été initiée par Antaluca [ANT 05]. Il implémenta des solutions analytiques pour un chargement tangentiel appliqué sur des surfaces dentées en vue de la résolution du problème de glissement total. Cette méthode fut appliquée par Nélias et al. [NÉL 07] pour étudier le problème d'une charge roulante avec comportement élasto-plastique pour des applications orienté vers les roulements à rouleaux cylindriques. Le problème du roulement et de glissement en présence d'aspérités en surface du massif fut étudié par Boucly et al. [BOU 07].

Si la résolution du problème de contact appliquée aux problèmes de roulement, de fretting, d'usure ont eu un succès, le problème d'impact par bille n'en est pas du reste. En effet, les travaux de thèse de Chaise [CHA 11d] ont étendu la méthode semi-analytique aux problèmes d'impact pour la simulation des procédés de mise en compression des surfaces. En parallèle, il implémenta la technique 3D-FFT proposée par Zhou et al. [ZHO 09]. Cette technique permet de calculer les contraintes résiduelles engendrées dans un massif par la présence de déformations plastiques en remplacement de la technique 2D-FFT proposée par Jacq [JAC 01]. Ainsi, il proposa un modèle pour la simulation du procédé de galetage à charge roulante [CHA 11a] et du procédé de greinillage ultrasonore [CHA 11f, CHA 11c, CHA 12].

La méthode semi-analytique a été également étendue aux problème de contact entre les corps anisotropes avec les travaux de thèse de Bagault [BAG 13]. Bagault a proposé les formulations analytiques en déplacements et en contraintes traduisant l'effet de l'anisotropie de l'un des deux corps en contact sur la pression de Hertz et la surface de contact. Cette formulation a permis de rajouter un revêtement uniforme en surface des massifs.

Les travaux de thèse de Julien [JUL 13] ont élargi davantage le champ d'application de la méthode aux problèmes d'inclusions, en vue de la résolution du problème de contact entre matériaux composites issus des aubes de turboréacteurs avec pour objectif de prédire l'endommagement engendré sur ces matériaux dans la zone de contact soumise à du fretting.

## 2.2.2 Principes de la méthode semi-analytique

La méthode semi-analytique est basée sur le principe de superposition des solutions analytiques élémentaires. L'application du principe de superposition permet de calculer les contraintes et les déplacements dans un massif semi-infini sous l'action d'une contrainte normale ou tangentielle appliquée sur une portion  $\mathcal{S}$  de sa surface libre. Les solutions analytiques élémentaires ainsi utilisées sont appelées des *fonctions de Green* ou des *coefficients d'influence*. Pour un problème normal, ici une pression  $P$  appliquée sur la surface du massif semi-infini, les fonctions de Green sont données par les solutions ( $D^P$ ) de Boussinesq [BOU 85] et le déplacement normal en tout point de la surface du massif s'exprime comme un produit de convolution entre la pression  $P$  et les fonctions  $D^P$ . cette convolution est donnée par l'expression EQ. 2.7.

$$u_z^e(x,y) = \iint_{\mathcal{S}} D^P(x-x',y-y')P(x',y')dx'dy' \quad (2.7)$$

Le problème EQ. 2.7 peut être approximé numérique et la résolution numérique considérée consiste dans un premier temps à discrétiser la surface par une grille de points de taille  $N = N_x \times N_y$  espacée l'un de l'autre de  $\Delta x$  (dans la direction  $x$ ) et  $\Delta y$  (dans la direction  $y$ ). Chaque point  $(i, j)$  de la grille représente une zone rectangulaire  $\Delta x \times \Delta y$  dite *surface élémentaire* sur laquelle est appliquée une pression uniforme équivalente à celle donnée par  $P(i, j)$  calculée au nœud  $(i, j)$ .

Ainsi, les contraintes et les déplacements s'expriment par une double sommation comme le montre l'expression EQ. 2.8, cette équation illustre seulement les déplacements normaux engendrés par la pression  $P$  sous la forme d'un produit de convolution discret.

$$u_z^e(i, j) = \sum_{k=1}^{N_x} \sum_{l=1}^{N_y} K^p(i-k, j-l) P(k, l) \quad (2.8)$$

où la matrice  $K^p$  représente les coefficients d'influence dépendant des propriétés matériaux du massif subissant la pression.

L'implémentation numérique de ce produit de convolution est très couteux en temps de calcul. En effet, si la taille de la zone calcul est  $N$ , alors le nombre d'opération nécessaire pour déterminer la double sommation est  $O(N^2)$ . Pour réduire les temps de calcul, on peut utiliser les techniques d'accélération. Ainsi, la méthode transformation de Fourier rapide (FFT) peut être appliquée pour réduire le temps de calcul en transformant le double produit EQ. 2.8 en un seul produit scalaire dans l'espace fréquentiel, l'application de la transformation de Fourier inverse permet ensuite de déterminer la grandeur calculée dans l'espace réel. L'application de la FFT permet de réduire les temps de calcul de  $O(N^2)$  opérations en  $O(N \log(N))$  opérations. Initialement, l'application de la FFT nécessitait l'extension de la zone de calcul de 5 à 8 fois. Pour réduire le cout lié à cette extension, Liu et al. [LIU 00] ont proposé la technique DC-FFT (Discrete convolution and Fast Fourier Transformation) qui permet de réduire considérablement l'extension du domaine de calcul pour passer de 8 à 2 fois dans toutes les directions. L'application des techniques de zero-padding [PRE 92] et de wrap-around permet ensuite de réduire les erreurs numériques liées à l'application de la FFT.

La technique de Zero-padding consiste en effet à étendre la taille de la source et des coefficients d'influence ( $0$  à  $N-1$ ) de 2 fois ( $N$  à  $2N+1$ ) à l'aide des zéros. Avec la technique de Wrap-around, le coefficient d'indice  $N$  est mis à zéros et les coefficients de  $N+1$  à  $2N+1$  sont obtenus à partir des coefficients d'indice  $1$  à  $N-1$  avec un signe négatif ajouté éventuellement pour tenir compte de la parité des coefficients suivant les directions principales.

### 2.2.3 Résolution du problème de contact

Dans cet paragraphe, on se limite au problème de contact sans frottement entre deux massifs et seules les grandes étapes du problème de contact seront rappelées.

Considérons un problème de contact entre deux massifs élastiques, piloté en effort normal  $F_c$  connu. Soit  $\Omega$  le domaine d'étude qui est beaucoup plus grand que la zone de contact  $\mathcal{A}_c$  entre les deux massifs, qui demeure encore inconnue. Le problème résolu est un système d'équations et d'inéquations qui se résume comme suit :

$$u_z^{tot}(i, j) = h(i, j) + \delta_z, \quad (i, j) \in \mathcal{A}_c \quad (2.9)$$

$$p(i, j) > 0, \quad (i, j) \in \mathcal{A}_c \quad (2.10)$$

$$u_z^{tot}(i, j) \geq h(i, j) + \alpha, \quad (i, j) \ni \mathcal{A}_c \quad (2.11)$$

$$p(i, j) = 0, \quad (i, j) \ni \mathcal{A}_c \quad (2.12)$$

$$F_c = \Delta x \Delta y \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}_c} p(i, j) \quad (2.13)$$

où  $u_z^{tot}$  est la composante normale du déplacement total des deux corps au point d'indice  $(i, j)$  de la zone de contact,  $p(i, j)$  est la pression générée par le contact au point  $(i, j)$ ,  $\Delta x$  et  $\Delta y$  sont respectivement la distance dans la direction  $x$  et  $y$  entre les grilles de points. Ce système d'équations et d'inéquations est également résolu dans le cas d'un contact élastique-plastique, la seule différence qui s'ajoute est la mise à jour de la géométrie due à l'apparition des déplacements surfaciques permanentes. Dans le cas d'un contact élasto-plastique, lorsque de grands déplacements apparaissent, le profil de pression dans la zone de contact est légèrement influencé par les déformations plastiques et la prise en compte des cisaillements permet de remédier à ce problème.

Les formulations du problème élastique-plastique sont obtenues par application du théorème de réciprocité de Maxwell Betti et ont été introduite pour la première fois par Jacq et al. [JAC 02a]. Ces formulations ont été étendues au contact thermo-élastique-plastique par Boucly et al. [BOU 07]. L'application du théorème de Betti permet de calculer les déplacements et les contraintes donnés en tout point  $A$  par les expressions EQ. 2.15 et EQ. 2.14 respectivement. Les contraintes et les déplacements sont exprimés comme une sommation des contributions des champs élastiques, des états résiduels et des déformations thermiques.

$$\underline{\underline{\sigma}}^{tot}(A) = \underline{\underline{\sigma}}^e(A) + \underline{\underline{\sigma}}^{res}(A) + \underline{\underline{\sigma}}^{init}(A) \quad (2.14)$$

$$u_z^{tot} = u_z^e + u_z^{res} \quad (2.15)$$

où  $\underline{\underline{\sigma}}^e$ ,  $\underline{\underline{\sigma}}^{res}$ ,  $\underline{\underline{\sigma}}^{init}$  sont respectivement la contrainte due au champs de pression appliqué dans le contact, la contrainte résiduelle due aux déformations plastiques dans le massif et les contraintes initiales dans le dit massif.  $u_z^{res}$  représente le déplacement normal résiduel dû à l'apparition des déformations plastiques dans le massif et donné par l'expression EQ. 2.16;  $u_z^e$  le déplacement normal dû au champ de pression dans le contact, calculé suivant l'expression EQ. 2.8.

$$u_z^{res}(A) = 2\mu \sum_{n=1}^N \varepsilon_{ij}^p(C_n) \int_{\Omega_p} \varepsilon_{3ij}^*(A, M) d\Omega = \sum_{n=1}^N \varepsilon_{ij}^p D_{3ij}(A, C_n) \quad (2.16)$$

avec  $N$  le nombre de cuboïdes de déformations plastiques discrétisant le volume de déformations plastiques dans le massif,  $D_{3ij}$  sont des fonctions dépendantes du coefficient de poisson et sont exprimées en ANNEXE C

A chaque itération sur la convergence du problème de contact, la pression de contact est définie et les expressions EQ. 2.9 à 2.13 sont résolues par la méthode du gradient conjugué (CGM) [POL 99] pour déterminer la zone de contact.

L'algorithme générale pour la résolution des problèmes de contact par la méthode semi-analytique est reporté sur la figure 2.2. Dans la suite de ce chapitre nous nous intéresserons au problème d'impact de billes sur un massif semi-infini. Seul le problème normal sera résolu pour

## 2. Introduction à la méthode semi-analytique pour la simulation des procédés de mise en compression

la simulation du problème d'impact de billes mis en jeux lors du trainement de surface des pièces mécaniques par grenailage ultrasonore.

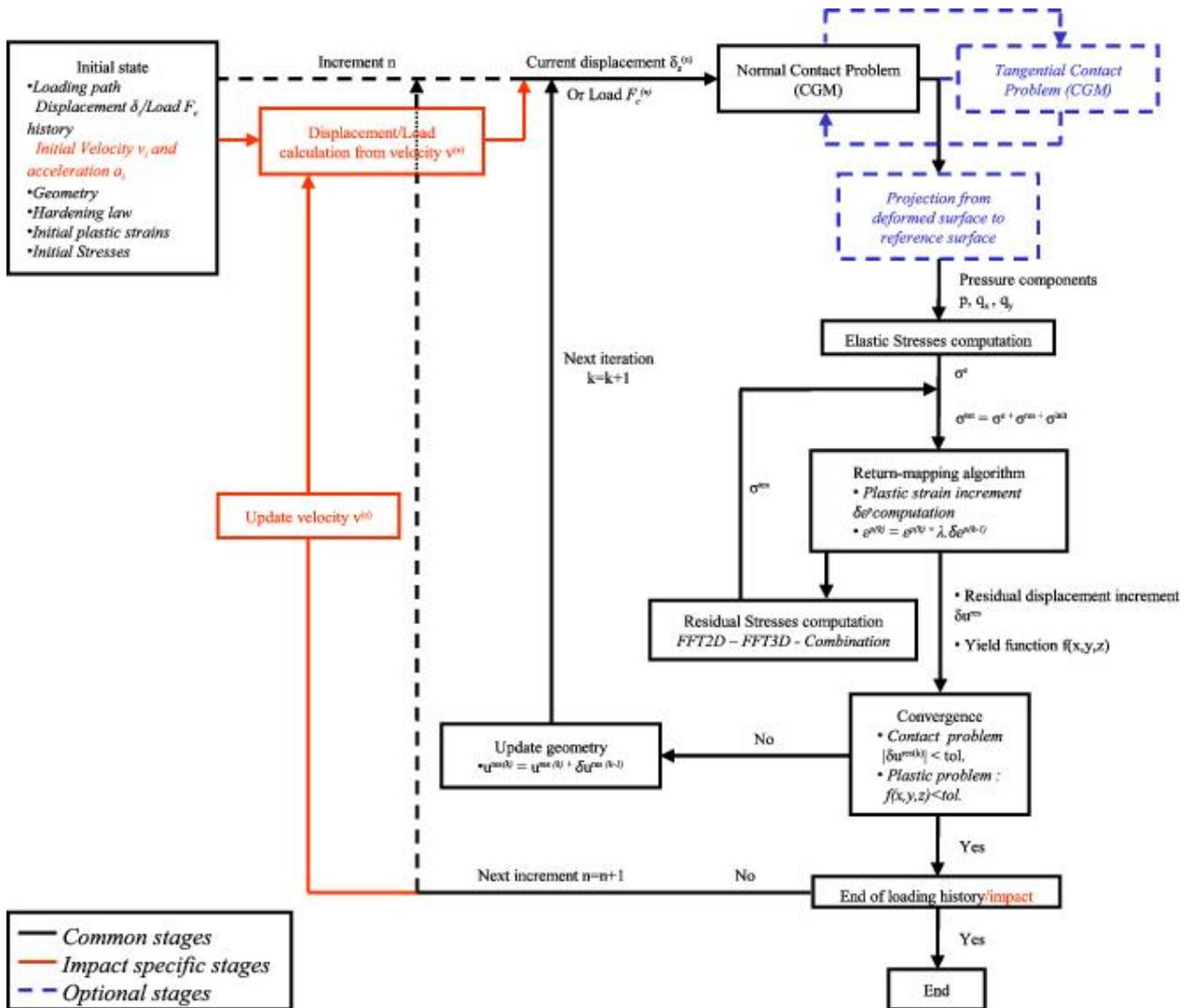


FIGURE 2.2: Algorithme général pour la résolution du problème de contact [CHA 11d]

## 3 Simulation du procédé de grenailage ultrasonore

La génération des contraintes résiduelles de compression permet d'augmenter la résistance des pièces mécaniques et ainsi augmenter leur durée de vie. Le grenailage ultrasonore est un procédé de traitement industriel qui permet de générer les contraintes résiduelles de compression dans les pièces mécaniques. Les simulations numériques de tel procédé permet d'appréhender et d'anticiper certains phénomènes accidentels qui peuvent survenir au cours du traitement. Aujourd'hui, la S.A.M a été étendue pour les problèmes d'impact et a ainsi permis de modéliser le procédé de gre-

naillage ultrasonore. Dans cette section, nous décrivons le modèle mis en place. Seul les grandes étapes de la modélisation du procédé seront rappelées. Pour plus de précision, le lecteur peut se référer au travaux de thèse de Chaise [CHA 11d].

### 3.1 Grenailage ultrasonore et paramètres du procédé

Le procédé de grenailage ultrasonore ou billage ultrasonore est un procédé mécanique de traitement superficiel des pièces mécaniques. Le traitement consiste à impacter une des surfaces de la pièce cible par un ensemble de **billes** généralement de tailles identiques et pendant un temps donné. Le dispositif expérimental comprend (voir figure 2.3) un générateur délivrant un champ électrique sinusoïdale dont la **fréquence** peut varier entre 20 KHz et 70 KHz. L'énergie électrique générée par le générateur est transformée en vibration ultrasonore par un convertisseur et dont les amplitudes du signal sont contrôlées par un booster. L'énergie vibratoire du signal est transformée à son tour en énergie cinétique par un sonotrode qui correspond à un ensemble piézo-électrique dont l'amplitude de vibration est plus élevée, ce qui permet de communiquer une cinétique d'impact aux billes enfermées dans une chambre étanche. La hauteur de la chambre est réglée pour ajuster la distance entre la sonotrode et la surface de la pièce à traitée en fonction de la **vitesse d'impact** des billes souhaitée. La vitesse initiale maximale ( $V_o$ ) des billes est donnée par :

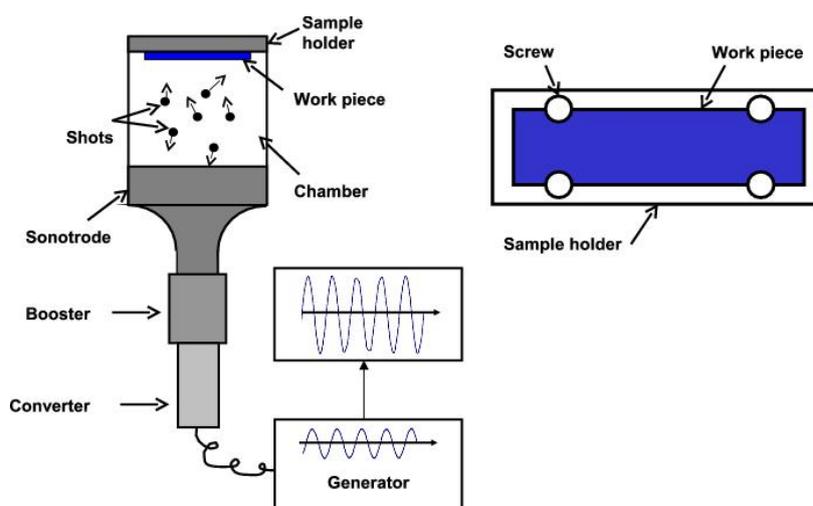


FIGURE 2.3: Schéma illustrant le principe de fonctionnement du procédé de grenailage ultrasonore

$$V_o = 2\pi A \mathcal{F} \quad (2.17)$$

avec  $A$  l'amplitude du sonotrode et  $\mathcal{F}$  sa fréquence.

Dans la simulation numérique, on s'intéressera uniquement aux effets induit par le procédés quitte à simuler le problème d'impact des billes en supposant connues les vitesses d'impact de celles ci ou les calculer si l'amplitude et la fréquence sont connues.

### 3.2 Zone élémentaire représentative ou zone de référence

On suppose qu'après traitement des surfaces, les contraintes et les déformations ont des caractéristiques spécifiques. Les déformations plastiques dans une pièce grenillée sont supposées être uniformes et isotropes dans chaque plan parallèle à celui de la surface. Une zone locale peut ainsi être définie pour représenter toute la surface traitée, ce qui permet de minimiser le nombre d'impacts à simuler. Ainsi, en supposant de plus, que les impacts ont eu lieu successivement, puis normaux à la surface ; et que ces derniers occupent une position régulière, on peut définir deux configurations permettant de définir la surface représentative de celle traitée : une configuration triangulaire et rectangulaire comme illustré sur la figure 2.4. La configuration triangulaire consiste à supposer que les centres de trois impacts successifs forme un triangle parfaitement équilatéral tandis que celle rectangulaire consiste à supposer que les centres des quatre impacts successifs forment un carré parfait. Ainsi, on définit la zone de référence ou la zone représentative comme étant le triangle issu de la configuration triangulaire ou le carré issu de la configuration rectangulaire.

La configuration rectangulaire ayant un impact de plus à simuler que la triangulaire, elle est plus couteuse en temps de calcul, par conséquent nous choisirons la configuration triangulaire par la suite pour les simulations.

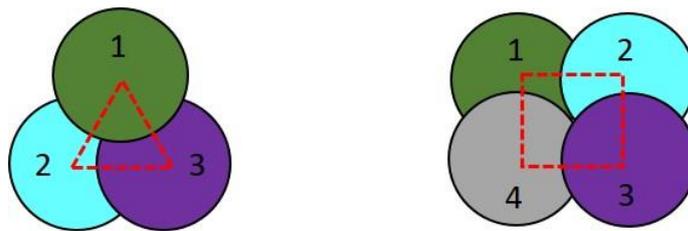


FIGURE 2.4: Différentes configurations illustrant la surface élémentaire représentative

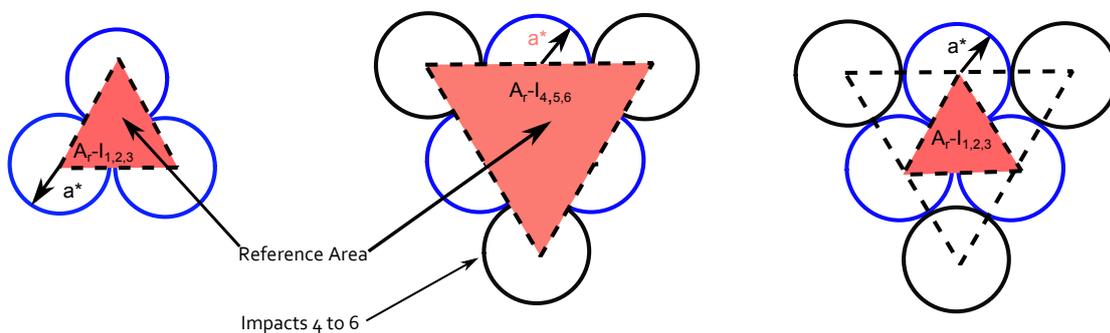


FIGURE 2.5: Définition de la zone de référence selon le nombre d'impacts simulés avec  $a^*$  le rayon d'impact de la bille

### 3.3 Taux de recouvrement et distribution des impacts

Le taux de recouvrement dans les procédés de traitement de surface tel que le grenailage de précontrainte ou ultrasonore est un élément indispensable pour définir le niveau de traitement souhaité. Expérimentalement, un taux de recouvrement égal à 100% est supposé être atteint lorsque toute la surface à traiter est complètement impactée. Ainsi, pour obtenir expérimentalement un taux de recouvrement de 200%, on double le temps de traitement nécessaire pour avoir un recouvrement de 100%. Le recouvrement de 100% est choisi par simple visualisation de la surface traitée, ce qui rend très complexe l'exploitation d'une telle définition dans les simulations numériques. Sur le plan numérique, plusieurs définitions du taux de recouvrement existent dans la littérature [KIR 93, KAR 02] et sont exprimées en fonction des paramètres du procédé et du temps de traitement. La définition du taux de recouvrement utilisée ici sera le rapport entre la surface impactée et la surface à traiter. La surface à traiter correspond à la zone de référence et celle impactée correspond à la zone couverte par les empreintes des impacts dans la zone de référence. Cette définition conduit à l'expression donnée par EQ. 2.18 qui permet le calcul du taux de recouvrement.

$$C = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \left( \frac{a^*}{d} \right)^2 \quad (2.18)$$

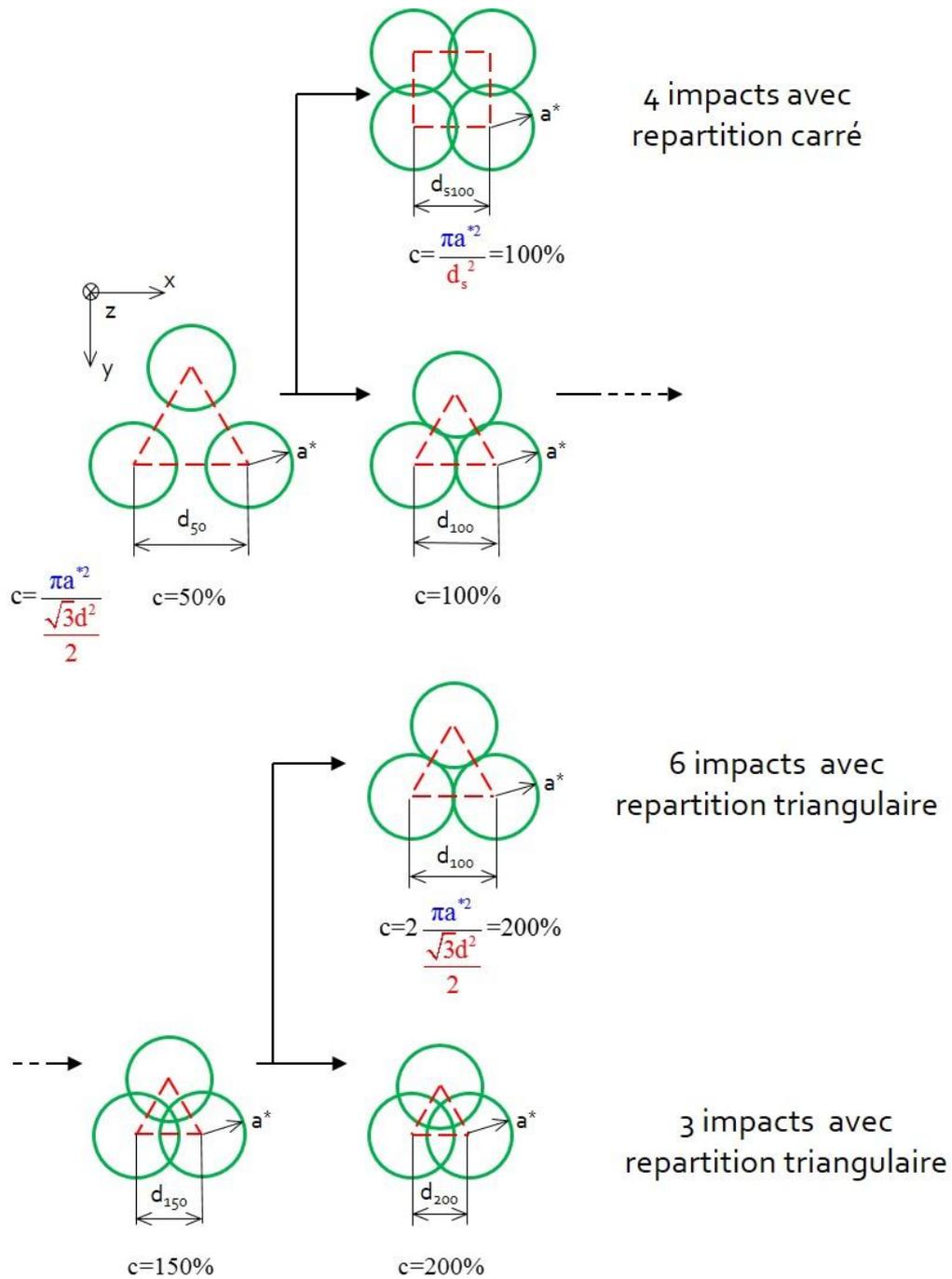
avec  $a^*$  le rayon d'impact ou le rayon de l'empreinte et  $d$  la distance entre les centres des impacts. Cette distance reste constante entre les impacts.

Par cette définition du taux de recouvrement il est possible de connaître la disposition des impacts suivant le taux de recouvrement choisi. La figure 2.6 illustre la distribution des impacts suivant différentes valeurs du taux de recouvrement. Cette représentation du taux de recouvrement permet d'atteindre au maximum un recouvrement de  $\simeq 360\%$  qui correspond au cas où les bords des empreintes de chacun des trois impacts passent par les centres des deux autres.

### 3.4 Simulation d'impacts multiples et paramètres numériques

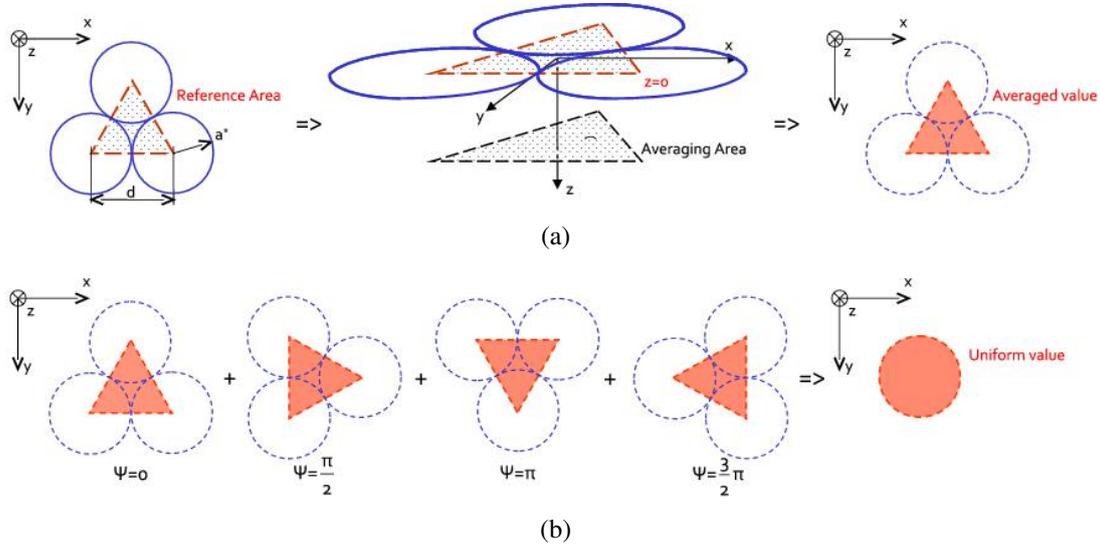
Au cours de la simulation, il est supposé que les contraintes résiduelles et les déformations plastiques générées sont uniformes et isotropes dans chaque plan parallèle à la surface du massif. Par conséquent, les tenseurs qui leurs sont associés doivent être diagonaux. Ce qui signifie tout simplement que toutes les composantes de cisaillements doivent être nulles dans le repère absolu.

Pour une simulation d'impacts multiples isotropes, on suppose que les contraintes résiduelles et les déformations plastiques en tout point de la surface sont constantes et indépendantes du système de coordonnées [ROU 97]. Dans la simulation des impacts multiples par S.A.M, le choix du repère absolu à une influence sur la forme des tenseurs des contraintes résiduelles et des déformations plastiques. En effet, au cours de la simulation, les termes non diagonaux ne sont pas totalement nuls du fait des impacts multiples, cependant leurs amplitudes sont nettement plus faibles que les termes diagonaux. Pour les impacts multiples qui se produisent simultanément avec une symétrie de distribution, ces termes sont complètement nuls. Par conséquent, pour négliger les termes non nuls issus de la simulation semi-analytique, on suppose que pour une zone élémentaire de forme triangulaire, quatre impacts sont simulés dont un impact de référence et les trois autres sont obtenus par rotation d'angle  $\pi/2$ ,  $\pi$  et  $3\pi/2$  du tenseur des contraintes respectivement. Le résultat final représentatif du procédé de grenailage est obtenu en moyennant les résultats issus des quatre simulations. Les résultats moyennés sont obtenus suivant l'expression EQ. 2.19.



**FIGURE 2.6:** Distribution des impacts suivant plusieurs taux de recouvrement pour les deux types de configuration : triangulaire et rectangulaire. Calcul du taux de recouvrement comme fonction du rayon d'impact  $a^*$  et la distance  $d$  entre les impacts. [CHA 11d]

La figure 2.12 illustre le processus de moyennage des déformations plastiques et des contraintes résiduelles dans la zone de référence.



**FIGURE 2.7:** Définition de la zone de référence et processus de moyennage des contraintes résiduelles et des déformations plastiques [CHA 11d]

$$\bar{\underline{\underline{C}}}_{\psi} = \bar{\underline{\underline{C}}} + \bar{\underline{\underline{C}}}_{+\pi/2} + \bar{\underline{\underline{C}}}_{+\pi} + \bar{\underline{\underline{C}}}_{+3\pi/2} \mid \underline{\underline{C}} = \left( \underline{\underline{\epsilon}}^p, \underline{\underline{\sigma}}^{res} \right) \quad (2.19)$$

Ce qui donne des tenseurs de contraintes résiduelles et de déformations plastiques finales diagonales :

$$\bar{\underline{\underline{C}}}_{\psi} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{C}_{xx} + \bar{C}_{yy}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\bar{C}_{xx} + \bar{C}_{yy}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C}_{zz} \end{bmatrix} \mid \underline{\underline{C}} = \left( \underline{\underline{\epsilon}}^p, \underline{\underline{\sigma}}^{res} \right) \quad (2.20)$$

Pour chacune des simulations effectuées, la simulation d'un premier impact permet d'obtenir le rayon de contact maximal  $a^*$ . L'écart  $d$  entre deux impacts successifs est déterminé à partir du taux de recouvrement  $C$  (Eq. 2.18) et du rayon de contact  $a^*$  pour chaque gamme de simulations. La taille des éléments (maillage) est identique dans les deux directions de surface ( $\Delta x = \Delta y$ ) et deux fois moindre dans la profondeur ( $\Delta x = 2\Delta z$ ). Dans la suite de ce chapitre, les paramètres numériques tels que la vitesse d'impact, le taux de recouvrement ... pour la simulation seront choisis pour être représentatifs du procédé de grenailage ultrasonore. La loi d'écroutissage du matériau impacté sera précisée au cours des simulations suivant le matériau choisi.

## 4 Prédiction de l'état de surface après grenailage ultrasonore

### 4.1 Définition des paramètres de rugosité

Dans ce paragraphe, nous présentons les paramètres de rugosité que nous utiliserons pour définir la qualité des surfaces grenillées. Expérimentalement, il existe des techniques de mesure par profilomètre [YIM 90, WAG 99, LUD 05, SOA 11] et très récemment le développement des techniques de mesure en dimension 3 [NEM 09, SOA 13] ont fait leur apparition. La première technique consiste à faire une mesure suivant une direction à l'aide d'un palpeur munit d'un stylet. La deuxième technique consiste à faire des mesures en scannant la surface totale ou une surface partielle de la zone traitée grâce à un balayage optique de cette dernière. Soady et al. [SOA 13] ont montré qu'il n'existe pas de différences nettes entre une mesure par profilomètre et une mesure à balayage optique (mesure 3D), cependant la comparaison des deux méthodes montre que seul la rugosité totale est plus importante pour un mesure 3D par rapport à celle obtenue par profilomètre. Ceci s'explique par la forte probabilité d'obtenir des pics très élevés ou des vallées très profondes par une mesure 3D. Sur ces observations, les paramètres de rugosité donnée par profilomètre seront proposés ici pour la prédiction de la rugosité. L'implémentation de ces paramètres est basée sur leurs définitions conformément à la norme ISO 4287. On peut les regrouper en deux catégories : les paramètres du premier ordre et les paramètres du second ordre.

### Les paramètres du premier ordre

#### 1. Ligne moyenne du profil

Elle définit la ligne de référence par rapport à laquelle les paramètres de rugosité sont évalués [GAD 02, LEA 02]. Elle est donnée par l'équation 2.21.

$$\int_0^l y(x)dx = 0 \implies y(x) = y_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (2.21)$$

#### 2. Longueur de base du profil $l$

Elle représente une partie de la longueur totale explorée. Dans le cas de mesure de rugosité, elle est prise égale à la longueur d'onde de coupe du profil  $\lambda_c$  (*cut off* en anglais).

#### 3. Largeur moyenne des éléments $R_{sm}$

Elle représente la moyenne arithmétique des largeurs des éléments du profil mesuré. Un élément de profil se définit comme le profil obtenu entre un pic et une vallée adjacents. Les pics et vallées sont ceux obtenus par rapport à la ligne moyenne et le paramètre  $R_{sm}$  est donné par :

$$R_{sm} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i \quad (2.22)$$

avec  $S_i$  la longueur des éléments de profil et  $n$  le nombre d'éléments de profil sur la longueur de base (cf FIG. 2.5).

#### 4. Rugosité moyenne arithmétique $R_a$

C'est la moyenne arithmétique de toutes les ordonnées  $y(x)$  en valeur absolue du profil à

l'intérieur de la longueur de base  $l$ . Elle se définit par :

$$R_a = \frac{1}{l} \int_0^l |y(x)| dx \simeq \frac{1}{n} \sum_0^n |y_i| \quad (2.23)$$

### 5. Rugosité totale $R_t$

Elle représente l'écart entre le plus grand pic et la plus profonde vallée du profil sur la longueur de base. Elle est définie par :

$$R_t = R_p + R_v \quad (2.24)$$

avec  $R_p = \max \{y(x), x \in l\} \simeq \max \{y_i, i \leq n\}$  et  $R_v = \min \{y(x), x \in l\} \simeq \min \{y_i, i \leq n\}$

La définition des paramètres du premier ordre est illustrée sur la figure 2.8.

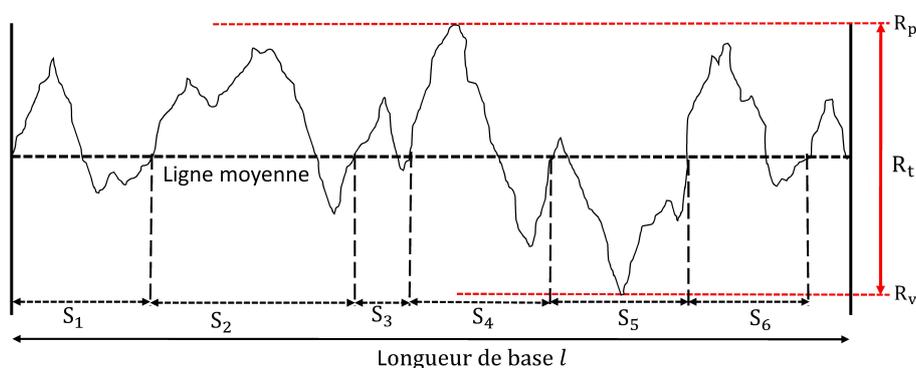


FIGURE 2.8: Définition des paramètres du premier ordre

## Les paramètres du second ordre

### 1. Écart quadratique de rugosité $R_q$

Il traduit la moyenne quadratique de toutes les ordonnées du profil à l'intérieur de la longueur de base [GAD 02]. Il est défini par :

$$R_q = \sqrt{\frac{1}{l} \int_0^l y^2(x) dx} \simeq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2} \quad (2.25)$$

### 2. Paramètre de skewness $R_{sk}$

Ce paramètre traduit l'asymétrie de la courbe de distribution des amplitudes à l'intérieur de la longueur de base [GAD 02]. La portance de la surface mesurée est d'autant plus grande que son skewness est négatif. Le paramètre de Skewness le long d'un profil est déterminé par :

$$R_{sk} = \frac{1}{R_q^3} \frac{1}{l} \int_0^l y^3(x) dx \simeq \frac{1}{n R_q^3} \sum_{i=1}^n y_i^3 \quad (2.26)$$

## 2. Introduction à la méthode semi-analytique pour la simulation des procédés de mise en compression

Pour une distribution gaussienne ou une distribution normale, la valeur de skewness correspond à  $R_{sk} = 0$ .

### 3. Paramètre de Kurtosis $R_{ku}$

Ce paramètre mesure l'aplatissement de la courbe de distribution des amplitudes à l'intérieur de la longueur de base [GAD 02]. Il se définit par :

$$R_{ku} = \frac{1}{R_q^4} \frac{1}{l} \int_0^l y^4(x) dx \simeq \frac{1}{n R_q^4} \sum_{i=1}^n y_i^4 \quad (2.27)$$

Pour une distribution gaussienne ou une distribution normale, la valeur de Kurtosis correspond à  $R_{ku} = 3$ .

L'implémentation des paramètres du premier ordre seuls ne suffit pas pour donner une meilleure définition de la qualité des surfaces traitées par grenailage ou d'autres procédés de traitement de surface. Ainsi, l'implémentation des paramètres du second ordre ( $R_{sk}$  et  $R_{ku}$ ) permet de donner une meilleure définition de la topologie d'une surface grenillée. En effet, lorsque  $R_{ku} < 3$ , le profil mesuré présente très peu de pics et de vallées comme illustré sur la figure 2.9(a). Inversement, lorsque  $R_{ku} > 3$ , le profil mesuré présente d'importants pics et vallées [GAD 02]. Le cas  $R_{ku} = 3$  indique que le profil mesuré présente une distribution normale de pics et de vallées. La signification du paramètre de skewness est donnée sur la base de la valeur de référence  $R_{sk} = 0$ . Cette valeur de référence indique simplement que le profil mesuré est symétrique par rapport à la ligne moyenne. Lorsque  $R_{sk} < 0$ , le profil mesuré présente des pics relativement larges et des vallées profondes et pointues ; inversement, lorsque  $R_{sk} > 0$ , le profil présente dans ce cas des vallées relativement larges et des pics très pointus comme illustré sur la figure 2.9(b). Il faut noter que dans les mesures,

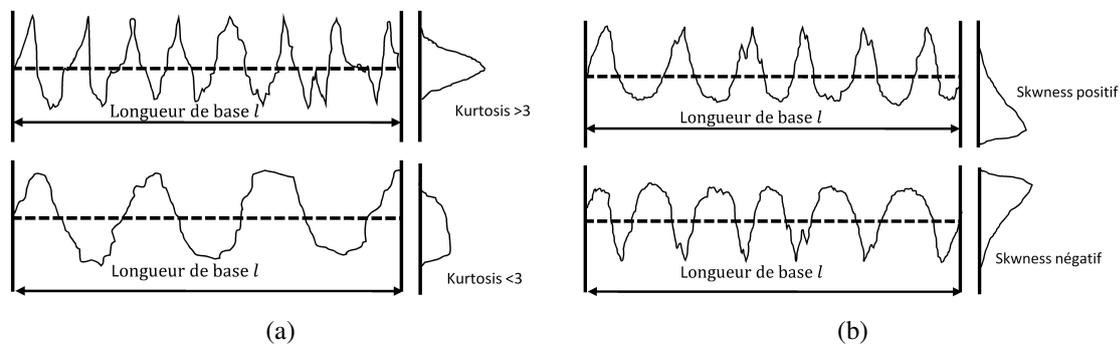


FIGURE 2.9: Définition des paramètres du second ordre : (a) kurtosis et (b) skewness

ces deux paramètres ( $R_{ku}$ ,  $R_{sk}$ ) sont très influencés par des pics et vallées isolés.

## 4.2 Méthodologie pour la prédiction de la rugosité

Par la méthode semi-analytique, nous simulons trois ou six impacts les uns à la suite des autres et suivant un taux de recouvrement prédéfini. Nous négligeons tout effet de collision entre les billes impactant la surface, et supposons que les impacts sont normaux (frottement négligeable) comme indiqué dans la section 3. A l'issue de la simulation, les déformations permanentes en surface et

dans le massif induisent un déplacement résiduel surfacique sur la surface de la pièce impactée. On définit un repère absolu dont l'origine coïncide avec le centre du dernier impact simulé. Le déplacement résiduel  $u^r(x, y, 0)$  (avec  $x, y$  les coordonnées des points de la zone de référence dans le repère absolu) est récupéré uniquement dans la zone de référence délimitée par le triangle que forment les centres des trois derniers impacts ou des trois impacts si l'on simule uniquement trois impacts. C'est ce que nous appellerons dans la suite *motif de reproduction*. Le motif de reproduction ayant une forme géométrique parfaite (surface triangulaire), on peut le reproduire sur une surface suffisamment large pouvant permettre de mesurer les paramètres de rugosité. Pour arriver à cette fin, on se sert des transformations géométriques simples tels que la rotation et la translation. Cette transformation fait passer le maillage initialement régulier à un nuage de points non régulier sur la zone de reproduction. Par conséquent, une interpolation de données est faite pour obtenir des déplacements résiduels sur un maillage régulier (coïncidant avec le maillage initial) contenu dans la zone élargie. Cette technique permet de générer une surface grenillée comme illustrée sur la figure 2.11. Dans le cas où six impacts sont simulés, il existe deux possibilités pour récupérer le motif de reproduction (voir FIG. 2.5) :

- le motif peut être obtenu sur la base du triangle formé par les centres des trois premiers impacts ( $A_R-I_{1,2,3}$ )
- le motif peut être obtenu sur la base du triangle formé par les centres des trois derniers impacts ( $A_R-I_{4,5,6}$ )

Nous montrerons plus loin que ce choix n'influence pas sur les paramètres de rugosité simulés.

La surface grénillée étant ainsi simulée, il est possible de déterminer tous les paramètres de rugosité définis dans la section 4.1. La distribution des impacts de billes étant basée sur une approche déterministe, le choix d'une seule direction pour la mesure de la rugosité peut induire des erreurs dans le post-traitement des données ainsi que leur interprétation. Pour minimiser au mieux cette erreur, nous proposons ici une technique efficace permettant de mesurer la rugosité d'une surface grenillée après simulation.

Les impacts multiples étant reproduits, tout profil observé ou relevé dans une direction présente une périodicité, par conséquent, la détermination des paramètres de rugosité passe par la détermination de la largeur moyenne des éléments  $R_{sm}$ . Suivant les valeurs de  $R_{sm}$  obtenues dans une direction de mesure, la longueur de base du profil  $l = \lambda_c$  et la longueur de palpement  $L$  sont d'abord déterminées suivant les valeurs indiquées dans le tableau reporté sur la figure 2.10. Sur la longueur de palpement et la longueur de base convenablement déterminées (suivant le tableau reporté sur la figure 2.10), les paramètres de rugosité sont évalués. Conformément à la norme ISO 4288, la longueur de palpement fait cinq fois la longueur de base du profil relevé (le cut-off). L'algorithme de détermination des paramètres de rugosité suivant un profil est illustré sur la figure 2.10. Ainsi sont déterminés les paramètres de rugosité pour un profil donné.

La mesure de la rugosité dans une seule direction va dépendre fortement du nombre de creux d'impacts et des pics issus des bords de bourrelet observés sur le profil relevé. En effet, pour des taux de recouvrement très faible, on peut avoir des directions de profils suivants lesquels on peut n'avoir que peu d'impacts. Dans ces conditions, les paramètres mesurés sont erronés. Pour pallier à ce problème, il faut préalablement déterminer des valeurs de rugosités indépendantes de la direction de mesure mais dépendantes du taux de recouvrement et qui au final seront représentatifs. Ainsi, la technique mise en place consiste à choisir plusieurs profils de directions différentes

## 2. Introduction à la méthode semi-analytique pour la simulation des procédés de mise en compression

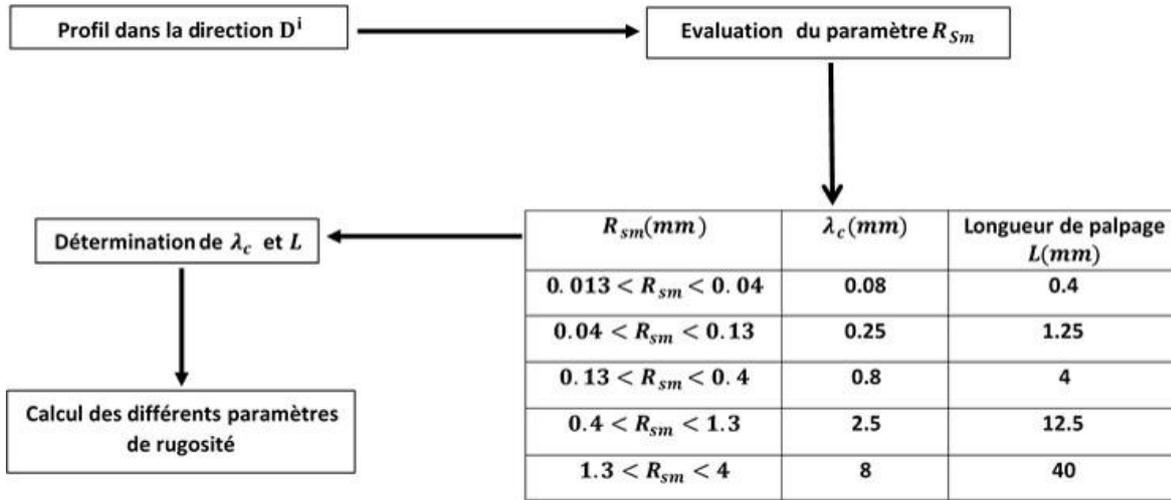


FIGURE 2.10: Algorithme permettant de calcul les paramètres de rugosité dans chaque direction

$D^i_{i=1,\dots,N}$  suivant lesquels les paramètres de rugosité seront déterminés. Par simplicité, nous choisissons ici des segments issues du point de référence qui coïncide avec le centre du premier impact réalisé. Dans chaque direction  $D^i$  définie, les déplacements résiduels  $u^{res}(x_j)$  sont prélevés en tout point de coordonnées  $x_j$  situés sur  $D^i$ . La ligne moyenne est construite et soustraite pour avoir le profil  $y_j(x_j)$  de la direction  $D^i$ . Chaque paramètre dans la direction  $D^i$  est calculé sur la base des définitions données plus haut.

La valeur représentative et indépendante des directions choisies pour chaque paramètre est obtenue en faisant la moyenne arithmétique de ces derniers sur l'ensemble des profils choisis, comme défini par l'expression EQ. 2.28 où  $N$  désigne le nombre de lignes choisies. Le processus est itéré jusqu'à ce que la stabilisation soit obtenue. Dans toutes nos simulations, cette stabilisation est obtenue sur une quinzaine de directions définies.

$$R_p = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N R_p^i = R_p^N \quad \text{avec } p \in \{a, t, q, ku, sk\} \quad (2.28)$$

L'algorithme général de la méthode mise en place est présenté sur la figure FIG. 2.11.

Le critère de stabilisation choisi ici est celui de l'écart type. Il s'agit de trouver un nombre minimal  $N_o < N$  de lignes tel que si pour tout  $j \geq N_o$ ,  $R_p^j \in [R_p - \sigma_j^t, R_p + \sigma_j^t]$ . Si aucun entier  $N_o$  n'est trouvé, l'on augmente le nombre de ligne  $N$

$$\sigma_j^t = \sqrt{\frac{1}{j} \sum_{i=1}^j (R_p^i - \bar{R}_p)^2} \quad j \in \{1, \dots, N\} \quad (2.29)$$

$$\bar{R}_p = \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j R_p^i \quad (2.30)$$

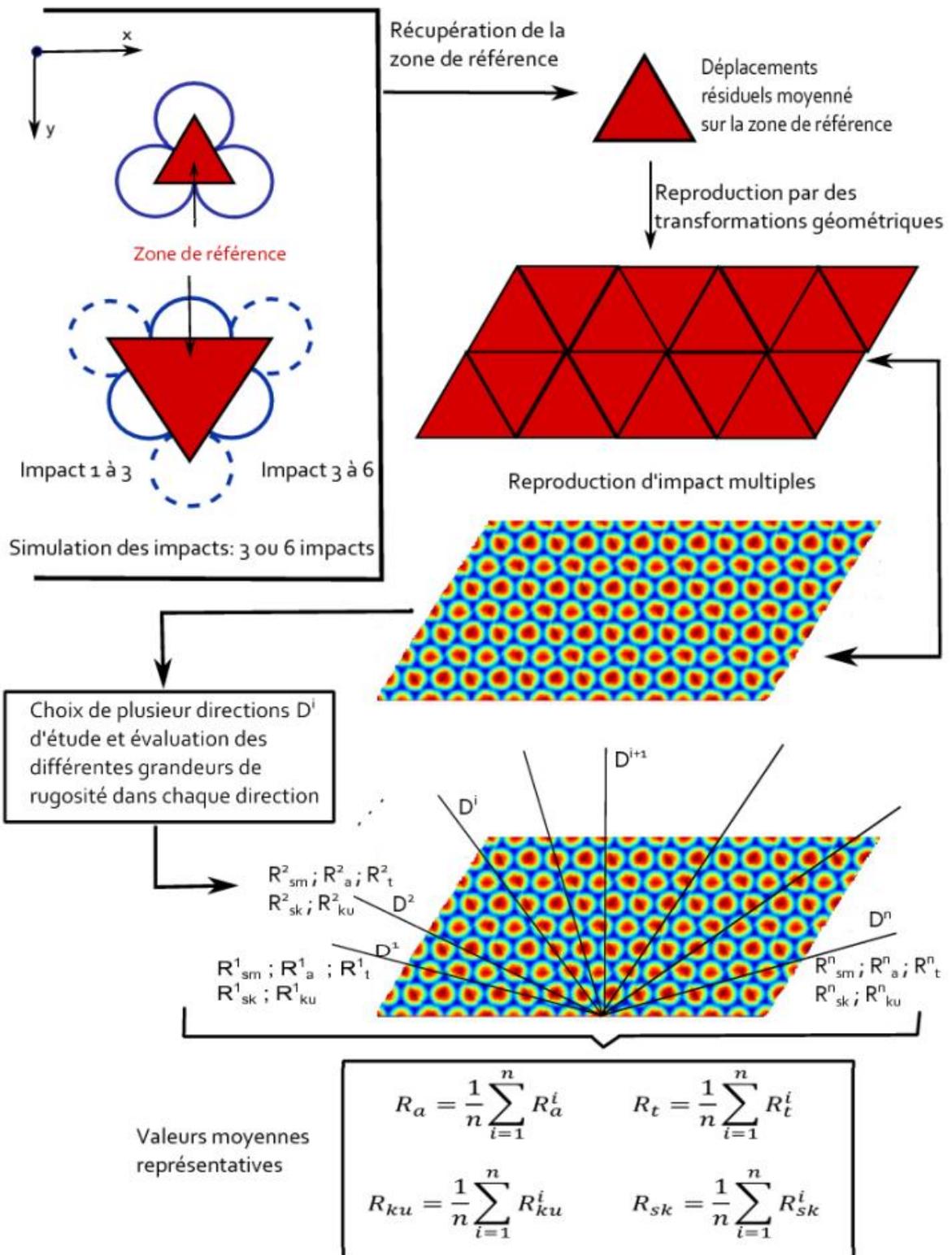


FIGURE 2.11: Algorithme général pour la prédiction des paramètres de rugosité sur une pièce grenillée.

### 4.3 Validation expérimentale du modèle

La validation de cette technique est présentée dans ce paragraphe. Des séries expérimentales de grenailage ultrasonore ont été réalisées sur deux matériaux différents et des mesures de la rugosité des surfaces grenillées ont été réalisées. Le graillage des plaque a été réalisé par TURBOMECA et AREVA-NP.

#### Données expérimentales

La première série de mesures a été faite sur une plaque d’alliage à base nickel 600 dont les propriétés sont reportées dans le tableau 2.1. La plaque a été grenillée avec deux types de billes différents (les billes en céramique (ZrO<sub>2</sub>) et en alliage base nickel 718) dont les propriétés matériaux sont reportées dans le tableau 2.2.

La deuxième série de mesures a été faite sur un alliage de Titane Ta6V dont les propriétés matériaux sont reportées dans le tableau TAB. 2.1. La plaque a été grenillée par des billes en carbure de tungstène. Les propriétés matériaux de ces billes sont reportées dans le tableau TAB. 2.2.

Séries	Matériaux	$E$ [GPa]	$\nu$	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\sigma_{y0}$ [MPa]	$k$ [MPa]	$n$	
A-1, A-2	Alliage de Nickel 600	218	0.3	8250	274	1450	0.8	
B-1, B-2	Ta6V	courbe minimum	120	0.34	4400	800	555	0.27
		courbe moyenne	120	0.34	4400	679	533	0.27

TABLE 2.1: Définition des propriétés matériaux pour la mesure expérimentale [CHA 11g, CHA ].

Séries	Billes	$E$ [GPa]	$\nu$	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$d$ [mm]
A-1	Alliage Nickel 718	204.63	0.288	8256.5	4
A-2	Ceramic(ZrO <sub>2</sub> )	210	0.3	6000	3.3
B-1, B-2	Carbure de Tungstène(WC)	705.43	0.234	15800	0.9

TABLE 2.2: Définition des propriétés matériaux des différentes billes [CHA 11g, CHA ].

#### Conditions de traitement

Pour la première série expérimentale, la plaque a été grenillée pendant environ 4 min, ce qui correspond à un taux de recouvrement de 150%. Dans l’enceinte, 36 billes identiques en alliage base nickel 718 sont utilisées pour la première sous série, que nous nommerons A-1 par la suite, et 56 billes identiques en céramique pour la deuxième sous-série de grenailage nommer A-2.

Dans la seconde série expérimentale, la plaque en Ta6V a été traitée avec deux taux de recouvrements différents 100% (série B-1) et 400% (série B-2).

Pour chacune des séries, la chambre piézoélectrique vibre à une fréquence de  $\mathcal{F} = 20$  KHz. L’amplitude  $\mathcal{A}$  de déplacement de la sonotrode est égale à  $72\mu\text{m}$  pour les séries A-1, A-2 et  $55\mu\text{m}$  pour les séries B-1, B-2. Dans ces conditions de traitement, la vitesse moyenne de vibration de la

sonotrode est donnée par l'expression EQ. 2.31.

$$V_{RMS} = \sqrt{2} (\pi \mathcal{A} \mathcal{F}) \quad (2.31)$$

Ce qui donne une vitesse moyenne d'impact (vitesse initiale) des billes égale à  $6.4 \text{ ms}^{-1}$  pour les séries A-1, A-2 et  $4.9 \text{ ms}^{-1}$  pour les séries B-1, B-2.

### État initial des pièces

Pour des raisons de comparaison avec les résultats numériques, la connaissance de la rugosité initiale des pièces est nécessaire. Ainsi, avant tout trainement, la rugosité initiale mesurée pour les deux séries est reportée dans le tableau 2.3. Cependant dans les simulations numériques, la rugosité initiale des pièces ne sera pas prise en compte dû au fait que dans la simulation S.A, on suppose que la surface de libre de la géométrie est parfaitement plane. Nous montrerons dans la suite que cette hypothèse suffisante pour s'approcher des cas expérimentaux.

Séries	Matériaux	$R_a [\mu\text{m}]$	$R_t [\mu\text{m}]$	$R_z [\mu\text{m}]$
A-1, A-2	Alliage de Nickel 600	2.09	10.1	9.35
B-1, B-2	Ta6V	0.519	3.553	3.134

TABLE 2.3: Rugosité initiale des différents matériaux avant grenailage

### Mesure de la rugosité

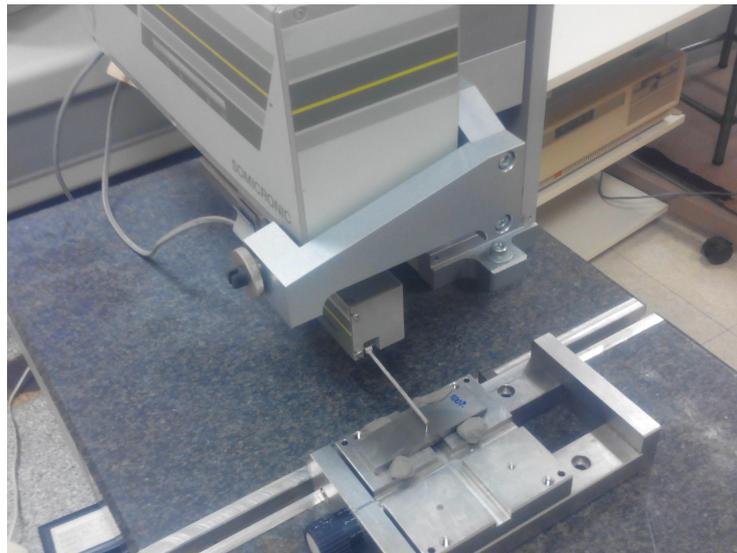
Pour toutes les pièces grenillées, les paramètres de rugosités ont été mesurés à l'aide d'un profilomètre (voir FIG. 2.12(a)). La mesure est faite en choisissant un filtre gaussien avec une longueur de base  $\lambda_c = 0.8 \text{ mm}$  (cut off). La vitesse de palpation du stylet est fixée à  $0.3 \text{ ms}^{-1}$  sur une longueur de palpation égale à  $4.8 \text{ mm}$ . Pour les séries B-1, B-2 les paramètres du premier et du second ordre ont été mesurés dans ces conditions. Pour les séries A-1, A-2, les paramètres de rugosité ont été fournis par le groupe AREVA NP, et les seules données disponibles qui nous ont été transmises sont les valeurs des paramètres du premier ordre.

La plaque en Ta6V a été usinée après avoir été grenillée, par conséquent une zone de la surface grenillée a été affectée par les effets de coupe (voir FIG. 2.12(b)), ce qui induit donc une inhomogénéité sur l'ensemble de la surface grenillée. Au cours de la mesure, une marge de sécurité a été définie afin d'éviter de faire des erreurs dans les résultats expérimentaux.

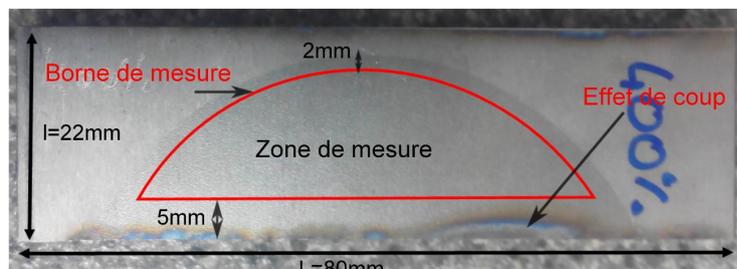
Une première mesure des paramètres de rugosité des séries B-1 et B-2 suivant plusieurs directions a été faite d'abord et à l'issue de cette mesure, nous avons constaté une variation des valeurs des paramètres dans toutes les directions. Ainsi, nous avons choisi de faire une mesure sur une quinzaine de directions et faire une moyenne représentative. Par conséquent, les valeurs expérimentales adoptées sont celles moyennées sur l'ensemble des profils de mesures relevées comme indiqué dans la section 4.2. Les résultats expérimentaux sont reportés dans les tableaux 2.4 et 2.5.

### Paramètres numériques pour la simulation

## 2. Introduction à la méthode semi-analytique pour la simulation des procédés de mise en compression



(a)



(b)

**FIGURE 2.12:** (a) Dispositif de mesure de rugosité : le profilomètre ; (b) Visualisation des effets de coupe et définition de borne de mesure

Séries	$R_a [\mu m]$	$R_t [\mu m]$	$R_z [\mu m]$	C[%]
A-1	5.2	41.5	25.5	150
A-2	4.8	33.9	23	150

**TABLE 2.4:** Valeurs des paramètres de rugosité obtenues pour les séries A-1 et A-2 après grenailage : impact des billes en céramique et en alliage à base nickel fourni par AREVA NP

Séries	$R_a [\mu m]$	$R_t [\mu m]$	$R_z [\mu m]$	$Rq$	$R_{sk}$	$R_{ku}$	C[%]
B-1	0.9	6.301	4.794	1.09	0.00537	2.56	100
B-2	0.997	6.4796	5.238	1.22	0.099	2.53	400

**TABLE 2.5:** Valeurs des paramètres de rugosité obtenues pour les séries B-1 et B-2 après grenailage : impact de billes en carbure de tungstène sur la plaque Ta6V fourni par TURBOMECA

Pour la simulation numérique, il est supposé que les billes sont élastiques vu que leurs limites élastique sont supérieures à celle des plaques grenillées et que les plaques ont un comportement élastoplastique à écrouissage isotrope. Le comportement des plaques peut être décrit par une loi du type Ramberg-Osgood donnée par l'expression EQ. 2.32.

$$\sigma_y = \sigma_{y0} + k\varepsilon^n \quad (2.32)$$

avec  $\sigma_{y0}$ ,  $k$ ,  $n$  les paramètres matériaux définis dans le tableau 2.1 et  $\varepsilon$  la déformation plastique cumulée.

Cependant pour la plaque en Ta6V, nous n'avons pas la connaissance exacte des paramètres matériaux, ainsi, vu la diversité des valeurs de paramètres rencontrées dans la littérature sur ce matériau, nous avons choisi de représenter le comportement du matériau par deux lois correspondantes à la moyenne et au minimum des paramètres matériaux. Le reste des paramètres (tailles des billes, vitesse d'impact, taux de recouvrement) sont pris identiques à ceux de l'expérimentation pour chaque série. Les simulations sont faites uniquement pour trois impacts de billes élastiques sur un massif plat élastique-plastique. Il sera montré dans les sections suivantes que 3 impacts de billes simulées suffisent.

La simulation du taux de recouvrement C=400% est impossible avec trois impacts seulement. En effet, ce taux de recouvrement est trop élevé pour pouvoir simuler directement trois impacts différents. On simule un taux de recouvrement de 200%, puis une deuxième simulation de 200% dans la même zone ; ce qui nous donne un taux de recouvrement de 400%. Cette technique s'approche donc de celle de l'expérimentale pour laquelle le taux de recouvrement 400% est obtenue en doublant le temps de traitement nécessaire pour faire 200% de recouvrement. Pour la prédiction numérique des paramètres de rugosité, les jeux de paramètres définis sont reportés dans le tableau 2.6. Dans ce tableau, le paramètre  $d$  désigne la distance entre deux impacts obtenus sur la base de la définition du taux de recouvrement et le nombre de directions d'étude fixé est égal à N=24.

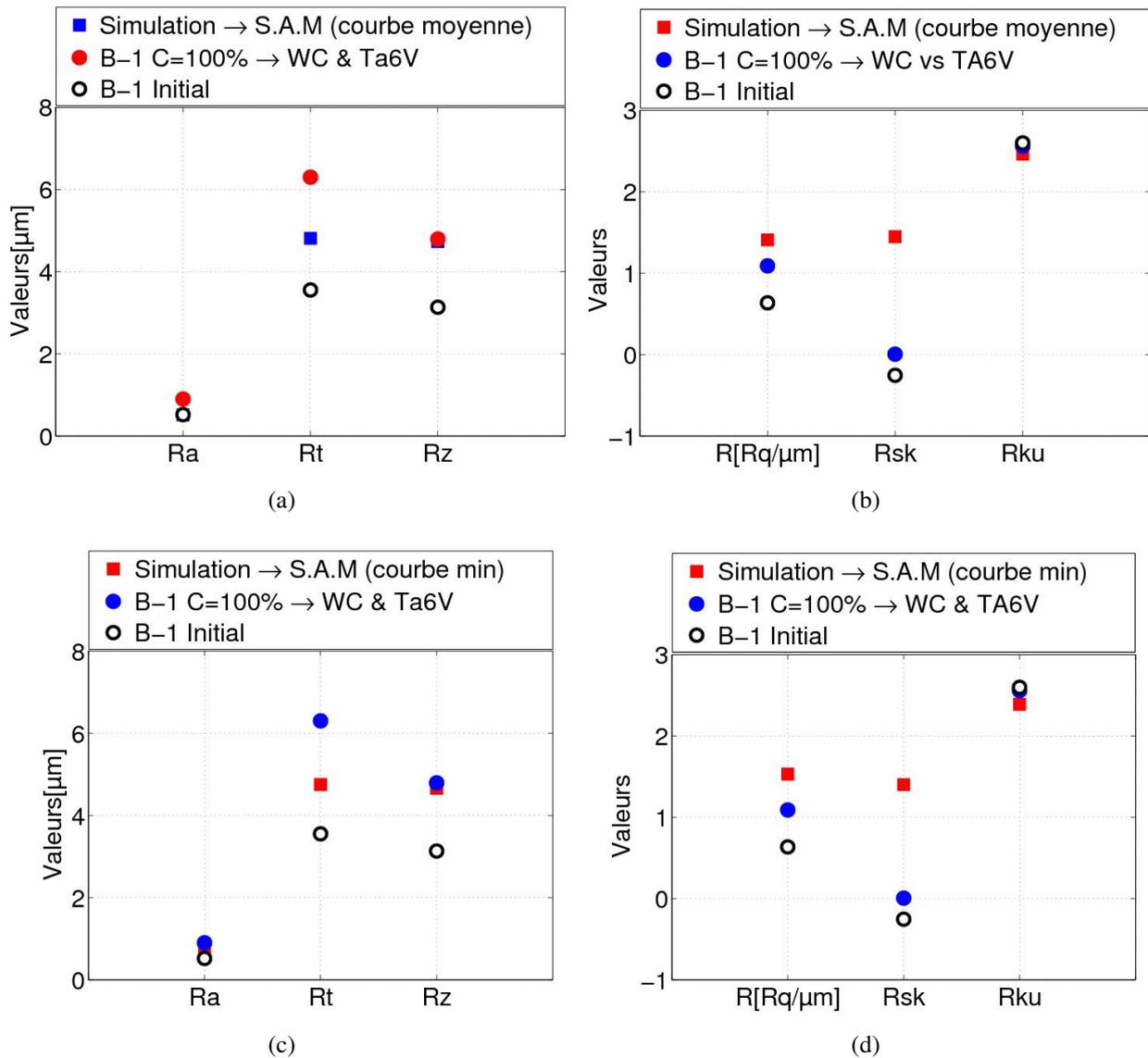
	C[%]	d[ $\mu$ m]	
A-1 (Nickel 718 & Nickel 600)	150	544	
A-2 (Céramique & Nickel 600)	150	466.5	
B-1 (WC & Ta6V)	100	courbe minimale	114.3
		courbe moyenne	133.35
B-2 (WC & Ta6V)	400	courbe minimale	80.8
		courbe moyenne	94.2

**TABLE 2.6:** Simulation numérique des séries expérimentales A-1, A-2, B-1 et B-2

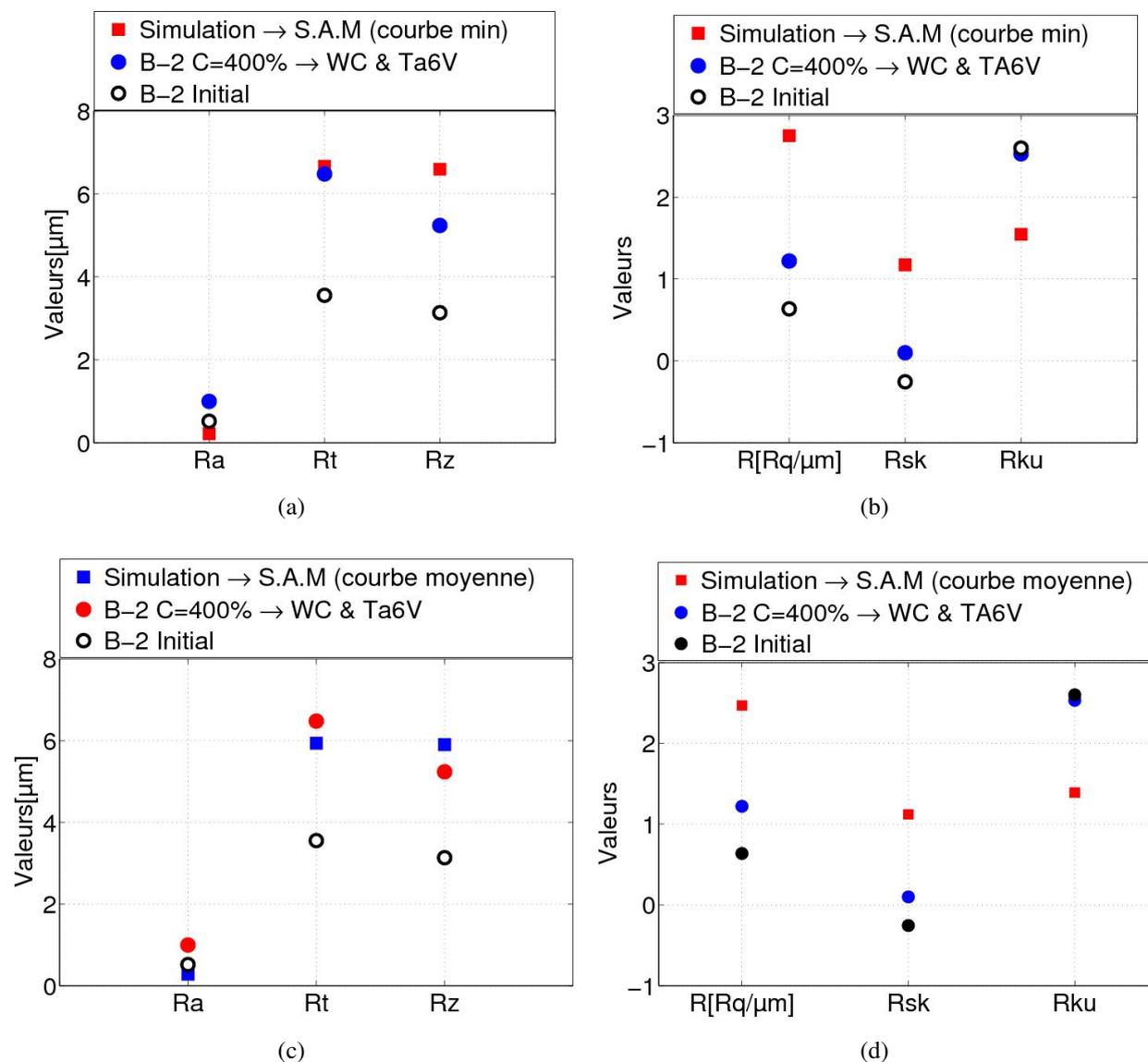
## Résultats de comparaison

Les résultats de la comparaisons sont illustrés sur les figures 2.13 à 2.15. Sur ces figures, on observe une bonne corrélation entre les résultats expérimentaux et numériques. On peut aussi remarquer sur les figures 2.13 à 2.14 que les écarts de loi de comportement ont un effet négligeable sur les résultats. Les légères disparités observées entre les résultats expérimentaux et numérique peuvent s'expliquer notamment par trois points :

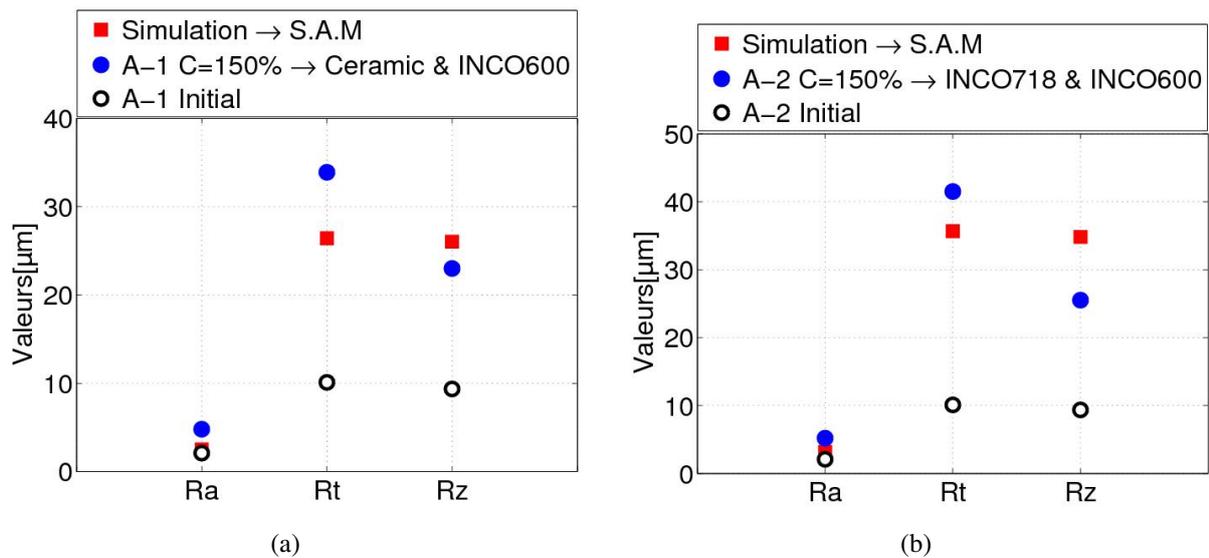
## 2. Introduction à la méthode semi-analytique pour la simulation des procédés de mise en compression



**FIGURE 2.13:** Résultats expérimentaux et numériques pour une vitesse maximale de sonotrode  $v = 4.9\text{m/s}$ . Comparaison des paramètres de rugosité par simulation de trois impacts de bille en WC à un taux de recouvrement  $C=100\%$ . (a)-(b) Simulation faite pour la courbe minimale sur les paramètres du premier et du second ordre sur la plaque en Ta6V et (c)-(d) simulation faite pour la courbe moyenne sur les paramètres du premier et du second ordre sur la plaque en Ta6V



**FIGURE 2.14:** Résultats expérimentaux et numériques pour une vitesse maximale de sonotrode  $v = 4.9m/s$ . Comparaison des paramètres de rugosité par simulation de trois impacts de bille en WC à un taux de recouvrement  $C=400\%$  sur la plaque en Ta6V. (a)-(b) Simulation faite pour la courbe minimale sur les paramètres du premier et du second ordre et (c)-(d) simulation faite pour la courbe moyenne sur les paramètres du premier et du second ordre



**FIGURE 2.15:** Résultats expérimentaux et numériques pour une vitesse maximale de sonotrode  $v = 6.4m/s$  à un taux de recouvrement  $C=150\%$ . Comparaison des paramètres de rugosité par simulation de trois impacts : (a) bille en ceramique et (b) bille d'alliage à base nickel

- la rugosité initiale des pièces grenailée n'a pas été prise en compte dans les simulations par soucis de simplicité
- le choix des paramètres matériau : les paramètres utilisés pour la simulation sont issus de la littérature. Une mesure plus fine des propriétés matériaux pourrait permettre d'apprécier les résultats
- la simulation des impacts multiples est faite de façon déterministe en négligeant le fait qu'une zone de la surface impactée peut être issue de plusieurs impacts de billes, ce qui en est le cas dans la réalité et que les vitesses d'impact des billes ne sont toujours pas égales à la vitesse maximale de la sonotrode (les collisions entre les bille entraînent un changement de la vitesse d'impact et de trajectoire de la bille) comme supposé dans nos simulations.

Toutefois, on peut souligner qu'une bonne description des paramètres du premier et du second ordre est obtenue avec pour seules données d'entrée les paramètres du procédé, ceci montre que ce modèle simple permet d'estimer facilement la rugosité des pièces au 1<sup>er</sup> ordre et que plusieurs améliorations possibles auraient supposées qu'il puisse être meilleur.

#### 4.4 Étude de l'influence des paramètres du procédé

Dans cette section, nous présentons une étude paramétrique de l'influence des paramètres du procédé de grenailage sur la rugosité. Les paramètres numériques garder constants dans toutes les simulations sont reportés sur TAB. 2.7. Il est supposé que les billes de rayon  $R = 2.5$  mm sont rigides et de densité  $\rho = 7800$   $kgm^{-3}$ . Les paramètres matériaux des différentes lois de comportement qui seront étudiées sont reportés dans le tableau 2.8. Trois lois de comportement seront

utilisées au cours de cette étude : la loi à écrouissage isotrope (ISO), la loi parfaitement plastique (PP), la loi cinématique (KIN) et la loi mixte (MIX) obtenue par combinaison de la loi isotrope et de la loi cinématique.

Dans la suite, le choix des valeurs de paramètres non fixés sera fait dans la gamme des valeurs croisé dans la littérature : il s'agit du taux de recouvrement, de la vitesse d'impact.

Matériaux	$E$ [GPa]	$\nu$	$\rho$ [ $kg/m^3$ ]	$\sigma_{y0}$ [MPa]
Acier	210	0.3	7800	400

**TABLE 2.7:** Définition des propriétés matériau pour l'étude paramétrique

	PP	ISO	KIN
Expression	$\sigma_y = \sigma_{y0}$	$\sigma_y = \sigma_{y0} + \frac{E_T}{1-E_T/E} p$	$d\underline{X} = \frac{2}{3} C_o d\underline{\epsilon}^p$
Données	$\sigma_{y0}=400$ MPa	$E_T=20$ GPa, $\sigma_{y0}=400$ MPa	$C_o = 22.22$ GPa

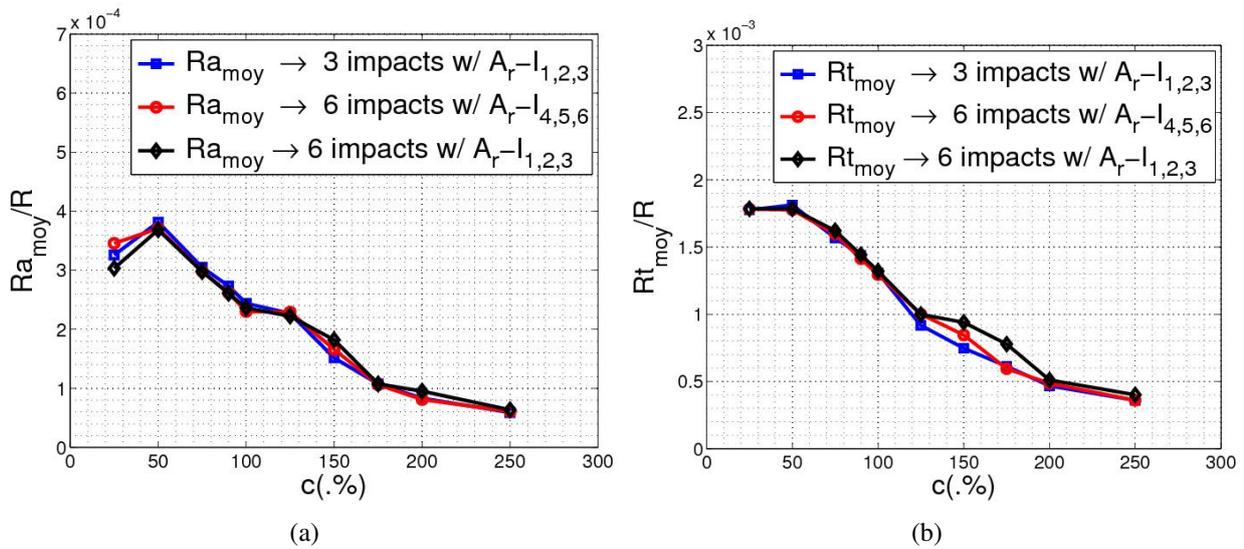
**TABLE 2.8:** Paramètres numériques pour l'étude paramétrique : comportement du matériau dépendant de la déformation plastique cumulée  $p$ , du module de Young  $E$ , du module tangent  $E_T$ , et de la limite élastique  $\sigma_{y0}$ .  $\underline{X}$  est la variable d'écrouissage cinématique

#### 4.4.1 Influence du nombre d'impacts simulés et du taux de recouvrement

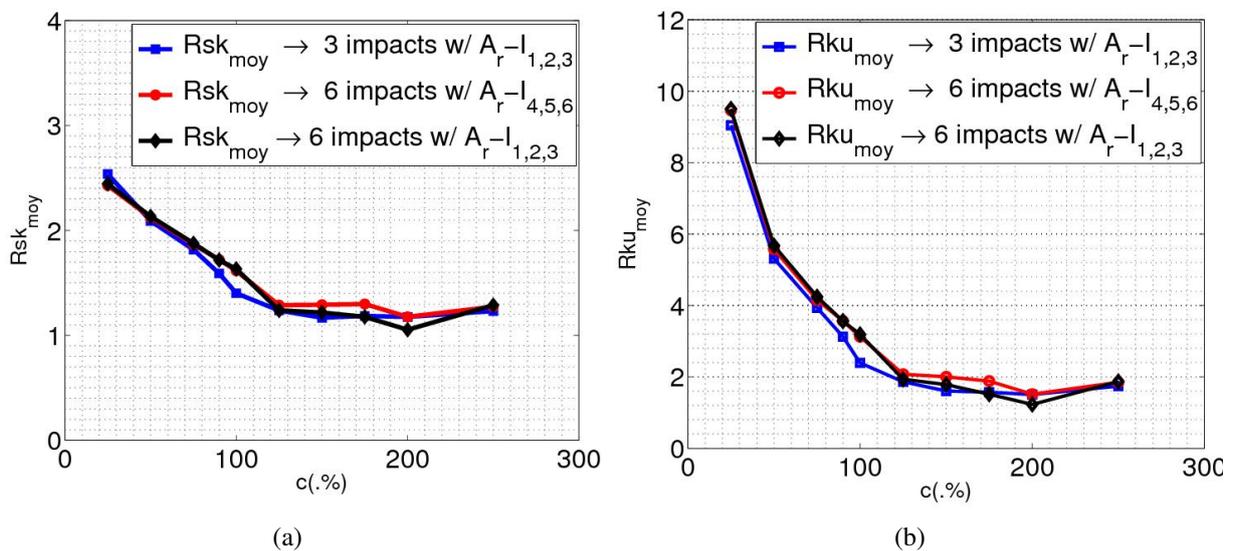
Dans un premier temps, nous nous intéressons à l'influence du choix de la zone de référence lorsque six impacts sont simulés puis dans un deuxième temps à l'influence du taux de recouvrement sur les paramètres de rugosité. Dans la section 4.2, nous avons présenté deux façons de choisir le motif de reproduction lorsque nous représentons la surface grenailée à partir de six impacts simulés. Afin d'étudier l'influence du choix de la zone de référence, nous avons comparé à des taux de recouvrement différents les résultats de trois impacts simulés avec le motif reproductible  $A_R-I_{1,2,3}$  aux résultats de six impacts simulés avec les motifs reproductibles  $A_R-I_{1,2,3}$  et  $A_R-I_{4,5,6}$ . Les résultats de ces études sont reportés sur les figures 2.16 pour les paramètres du premier ordre et 2.17 pour les paramètres du second ordre, Chacun des résultats étant normalisé par le rayon de la bille. Les résultats sont obtenus en considérant la loi de comportement isotrope (ISO) et une vitesse d'impact des billes  $V_i$  égale à  $2.5 \text{ ms}^{-1}$ .

Ces résultats montrent une très bonne corrélation entre les courbes issues de 3 impacts simulés avec le motif  $A_R-I_{1,2,3}$  et celles issues de 6 impacts avec les différents motifs  $A_R-I_{1,2,3}$ ,  $A_R-I_{4,5,6}$ . Par conséquent, on déduit que le choix de la zone de référence a une influence faible sur les paramètres de rugosité. Cette influence négligeable traduit aussi le fait que les impacts adjacents  $I_4$ ,  $I_5$ ,  $I_6$  (dans le cas de 6 impacts simulés) ont une influence faible sur le motif formé par les 3 premiers impacts  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ . Ce résultat était prévisible car il avait été montré dans les travaux de thèse de Chaise [CHA 11e] que les impacts adjacents avaient une influence négligeable sur les déformations plastiques et sur les contraintes résiduelles obtenues dans la zone de référence issue des trois premiers impacts. Toutefois, les écarts observés à certains taux de recouvrement s'explique par le

## 2. Introduction à la méthode semi-analytique pour la simulation des procédés de mise en compression



**FIGURE 2.16:** Paramètres du premier ordre en fonction du taux de recouvrement pour 3 et 6 impacts simulés avec la loi ISO, illustration de l'influence du taux de recouvrement  $C$  et du choix de la zone de référence  $A_r-I_{1,2,3}$ ,  $A_r-I_{4,5,6}$  : (a) rugosité moyenne arithmétique  $R_a$  et (b) rugosité totale  $R_t$



**FIGURE 2.17:** Paramètres du second ordre en fonction du taux de recouvrement pour 3 et 6 impacts simulés avec la loi ISO, illustration de l'influence du taux de recouvrement  $C$  et du choix de la zone de référence  $A_r-I_{1,2,3}$ ,  $A_r-I_{4,5,6}$  : (a) paramètre de Skewness  $R_{Sk}$  et (b) paramètre de Kurtosis  $R_{Ku}$

fait que pour chaque taux de recouvrement, la ligne moyenne calculée diffère d'une direction de mesure à une autre et par conséquent d'un taux de recouvrement à un autre.

Ces résultats montrent également l'influence du taux de recouvrement sur la rugosité des surfaces grenillées. En effet, on constate que plus le taux de recouvrement est important, plus la rugosité est faible, ceci se traduit par la décroissance rapide des valeurs des paramètres de rugosité lorsque le recouvrement augmente. Les pics les plus élevés et les vallées disparaissent très rapidement. Cela s'explique par le fait que à des recouvrements très importants, les impacts de billes sont superposés les uns sur les autres écrasant ainsi les pics.

Sur les figures 2.17, on constate que, pour des taux de recouvrement supérieur à 125% les paramètres du second ordre tendent à se stabiliser indiquant donc une stabilisation de la distribution des amplitudes le long des profils. A partir de ce recouvrement, on peut dire que le taux de recouvrement présente une influence négligeable sur la distribution des amplitudes. D'autre part, pour des taux de recouvrement faibles (typiquement en dessous de 50%), la distance entre les impacts devient grande et l'influence mutuelle entre les impacts devient négligeable, ce qui se traduit par le fait que la rugosité totale reste constante (voir la figure FIG. 2.16(b)) et égale au déplacement résiduel maximal engendré par un seul impact. Cet résultat explique donc la raison pour laquelle en grenaille, les taux de recouvrement très faibles ne sont jamais appliqués.

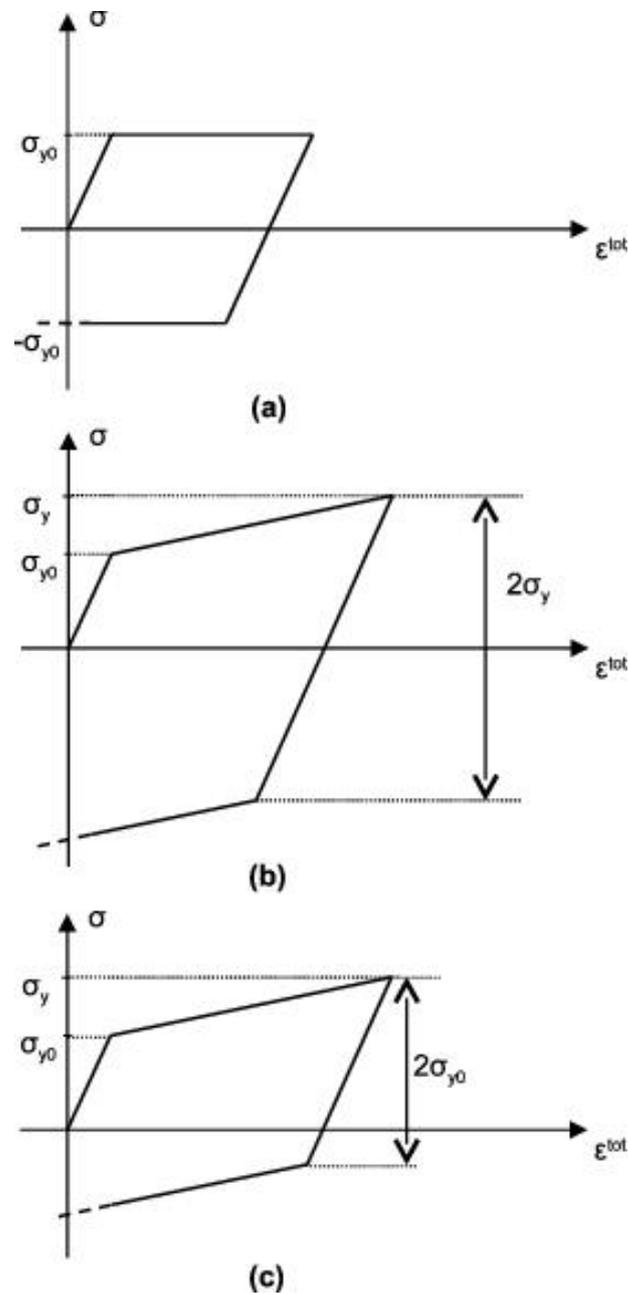
Ayant montré que les impacts adjacents ont une influence faible, dans la suite de l'étude paramétrique, nous considérerons que les motifs reproductibles issus des simulations de trois impacts seulement.

#### 4.4.2 Influence de l'écroissage

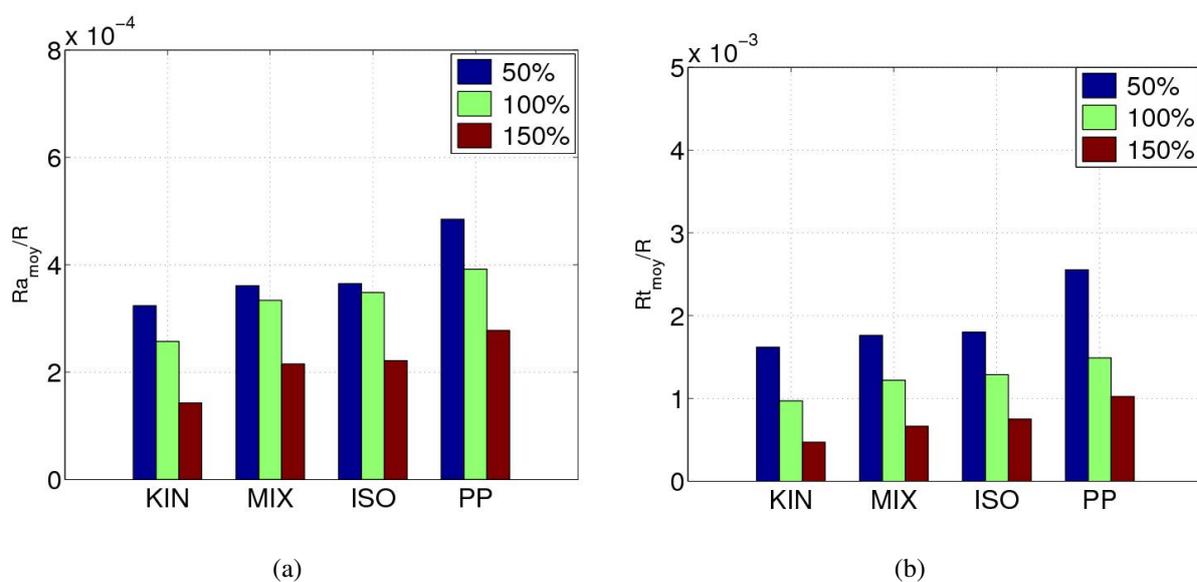
Dans ce paragraphe, on s'intéresse à l'influence que peut avoir le comportement du matériau sur la rugosité que présente une surface grenillée. La figure 2.19 illustre les différentes lois de comportement étudiées. Les simulations sont faites pour trois taux de recouvrement différents  $C=50%$ ,  $C=100%$  et  $C=150%$  et avec la vitesse d'impact des billes à  $V_i = 2.5 \text{ ms}^{-1}$  dans les trois cas. Les résultats de cette étude sont illustrés les figures 2.19 pour les paramètres du premier ordre et 2.20 pour les paramètres d'ordre supérieur.

Pour chacune des lois considérées, la rugosité de la surface grenillée diminue avec le taux de recouvrement comme souligné précédemment. Toutefois, les recouvrements faibles génèrent de grands pics et de profondes vallées qui sont plus accentués lorsqu'on suppose que le matériau obéit à la loi parfaitement plastique (loi PP) d'une part et d'autre part, la rugosité du matériau devient faible lorsqu'il obéit à un comportement cinématique (KIN) en comparaison avec les autres lois (voir figure 2.19). Cependant, en considérant les lois isotrope (ISO) et mixte (MIX), on peut observer que les deux lois présentent des effets quasiment-identiques et ceci indépendamment du taux de recouvrement.

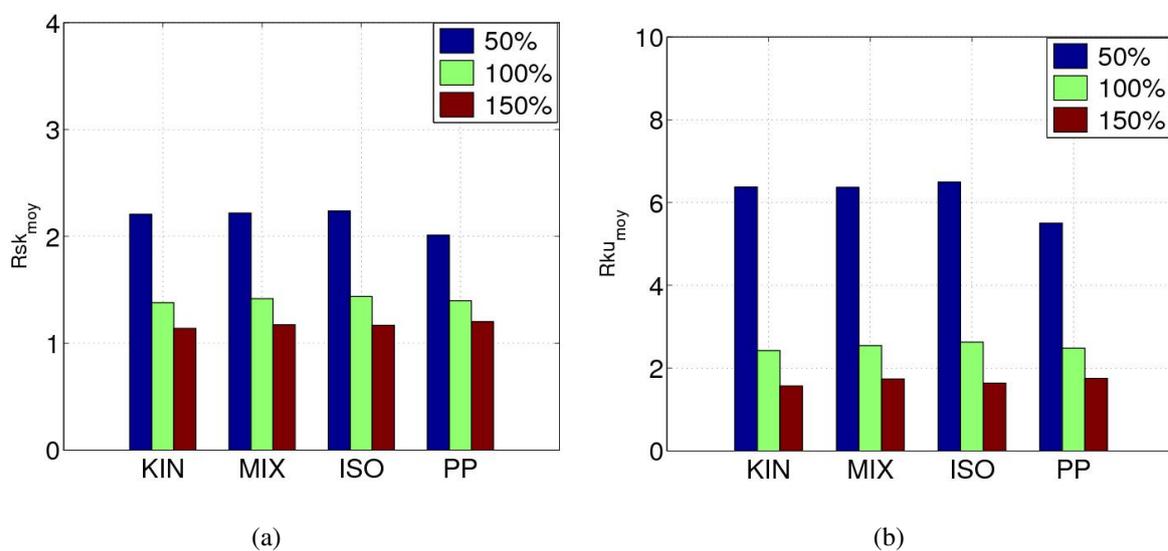
Si la rugosité varie d'une loi à l'autre, il n'en est pas de même pour la distribution des amplitudes. Les résultats des paramètres du second ordre illustrés sur la figure 2.20 montrent que les lois ISO, KIN, MIX et PP ont une distribution d'amplitude quasi-similaire pour des taux de recouvrement élevés. Ce point est une conséquence des résultats déjà discutés sur l'influence du taux de recouvrement sur les paramètres du second ordre, selon lesquels nous avons observé que les paramètres de kurtosis et de skewness tendent à se stabiliser pour des recouvrements importants. On peut donc déduire que la stabilisation des paramètres du second ordre est indépendante du comportement du matériau pour les recouvrements importants. Dans tous les cas, le paramètre de



**FIGURE 2.18:** Illustration des lois d'érouissage : (a) loi parfaitement plastique (PP), (b) loi bilinéaire isotrope (ISO) et (c) loi mixte (MIX)



**FIGURE 2.19:** Influence de l'écroissage du matériau et du taux de recouvrement sur les paramètres de rugosité du premier ordre : (a) rugosité moyenne arithmétique  $R_a$  et (b) rugosité totale  $R_t$ .



**FIGURE 2.20:** Influence de l'écroissage du matériau et du taux de recouvrement sur les paramètres de rugosité du deuxième ordre : (a) paramètres de Skewness  $R_{sk}$  et (b) paramètre de Kurtosis  $R_{ku}$ .

kurtosis moyenné étant inférieur à la valeur de référence  $R_{ku} = 3$  pour  $C \geq 100\%$ , les profils de mesure relevés présentent en moyenne très peu de pics et de vallées et les sommets sont relativement aplatis du à l'effet de superposition des impacts.

#### 4.4.3 Influence de la vitesse d'impact

Afin d'étudier l'influence de la vitesse d'impact sur les paramètres de rugosité, des simulations pour la loi isotrope (ISO) avec des vitesses d'impact variant de  $1.5 \text{ ms}^{-1}$  à  $8 \text{ ms}^{-1}$  ont réalisées. Cette gamme de vitesses correspond aux vitesses qu'on peut rencontrer lors du grenailage ultrasonore et à des taux de recouvrements différents. Les résultats de cette étude sont reportés sur les figures 2.21 et 2.22. Sur ces figures, les paramètres sont toujours normalisés par le rayon des billes.

Sur la figure FIG. 2.21, on peut remarquer que les paramètres de rugosité augmentent avec la

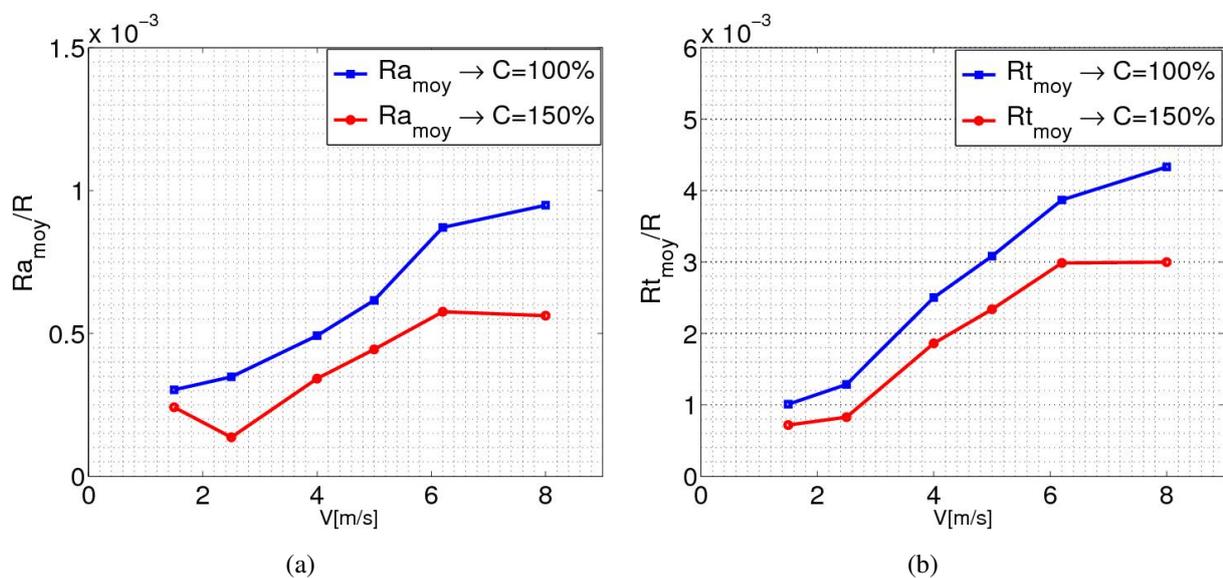
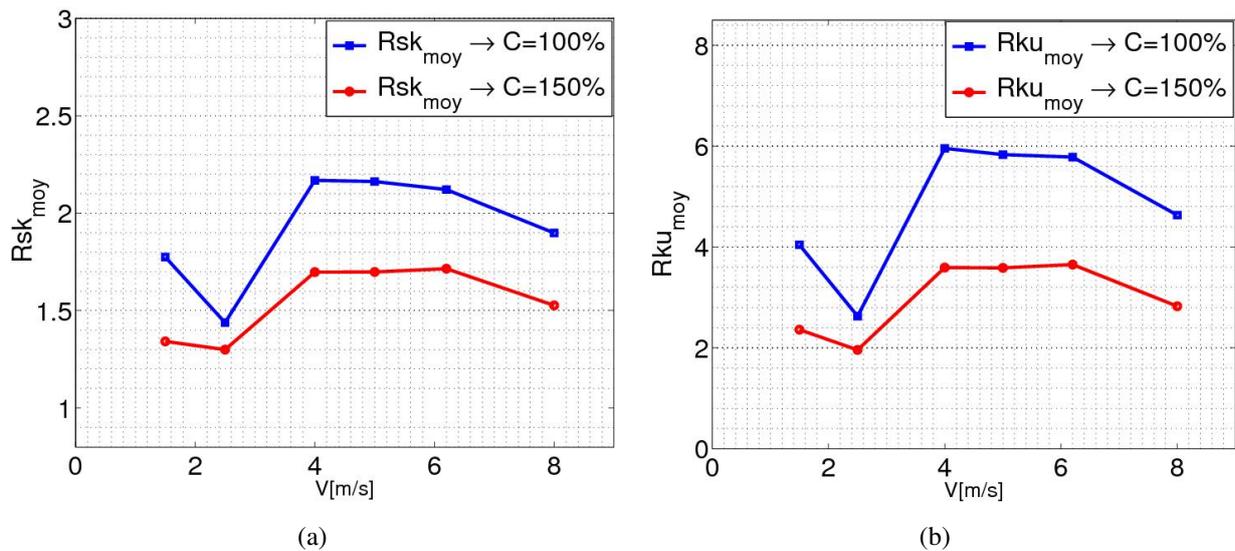


FIGURE 2.21: Influence de la vitesse d'impact des billes sur les paramètres du premier ordre : (a) rugosité moyenne arithmétique  $R_a$  et (b) rugosité totale  $R_t$

vitesse d'impact. En effet, plus la vitesse d'impact est importante, plus les déformations plastiques engendrées dans le matériau cibles sont importantes. par conséquent, de grands déplacements résiduels surfaciques sont observés dans la zone impactée. Toujours sur cette figure, les rugosité  $R_t$  et  $R_a$  présentent un comportement de saturation pour une vitesse d'impact supérieure à  $6 \text{ ms}^{-1}$  et pour un taux de recouvrement élevé. A  $C=150\%$ , tous les impacts se superposent les uns sur les autres et dans ces situations, les pics les plus élevés sont très vulnérables aux grandes vitesses d'impact, par conséquent ils s'écrasent très rapidement.

L'analyse des paramètres du second ordre (voir figure 2.22) montre que les profils présentent des vallées relativement larges et des pics très pointus ( $R_{sk} \geq 0$ ). Toutefois le paramètre de kurtosis décroît rapidement pour les recouvrements présentés et tend vers une valeur inférieure à 3 pour le plus grand recouvrement (150%) lorsque la vitesse d'impact est élevée. Comme expliqué dans la section 4.1, le profil de rugosité présente très peu de pics et de vallées lorsqu'on a  $R_{ku} < 3$ .



**FIGURE 2.22:** Influence de la vitesse d'impact des billes sur les paramètres du deuxième ordre : (a) paramètre de skewness  $R_{sk}$  et (b) paramètre de kurtosis  $R_{ku}$

## 5 Conclusions et motivations de la thèse

Dans ce chapitre, nous avons présenté une méthodologie pour prédire l'état de surface des pièces grenillées. La robustesse et l'efficacité de la méthodologie ont été montrées par une bonne comparaison avec des mesures expérimentales quand bien même les paramètres d'entrée ne sont connus que de manière imprécise. Dès lors, une étude paramétrique a été menée afin de pouvoir identifier les paramètres procédés les plus influents sur l'état de surface. Ainsi en s'appuyant sur les paramètres de rugosité du second ordre, nous avons pu étudier la topologie des surfaces grenillées, une topologie que les paramètres du premier ordre seul n'auraient pas pu révéler.

A l'issue de cette étude, les points suivants ont été montrés :

- ☞ L'implémentation des paramètres d'ordre élevé (kurtosis et skewness) ont permis de donner une bonne description des surfaces grenillées. Les paramètres du premier ordre seuls sont insuffisants pour décrire une surface grenillée.
- ☞ Le choix de la zone de référence a un effet négligeable sur la rugosité. La faible influence des impacts adjacents a été observée, ce qui réduit le nombre d'impacts à simuler à 3.
- ☞ L'influence forte des paramètres du procédé. La vitesse d'impact et le taux de recouvrement ont une forte influence sur la rugosité des surfaces grenillées. Leurs effets sur la rugosité sont inverses l'un de l'autre : l'augmentation du taux de recouvrement baisse la rugosité tandis que l'augmentation de la vitesse augmente la rugosité.
- ☞ Influence de la loi d'érouissage.

## 2. Introduction à la méthode semi-analytique pour la simulation des procédés de mise en compression

---

L'écrouissage du matériau traité à une forte influence sur la rugosité. Il a été montré qu'un matériau parfaitement plastique après grenailage présente une surface traitée plus rugueuse que les autres matériaux de comportements différents.

L'état de surface des pièces mécaniques est l'une des caractéristiques particulières des procédés de mise en compression. L'objectif commun de tous ces procédés de traitement de surface mécaniques est d'améliorer les performances des matériaux par introduction des contraintes résiduelles de compression. Cependant chaque procédé présente ses avantages et ses inconvénients d'une application à une autre. Le grenailage, tout comme le martelage sont souvent limités dans les applications d'une part par une fréquente détérioration de l'état de surface rencontrée sous certaines conditions de traitements ; ce qui joue un rôle néfaste sur la tenue en fatigue et d'autre part, la couche comprimée est faible avec d'importante déformation plastique, ce qui peut donc entraîner des dommages à la microstructure du matériau et accélérer la relaxation des contraintes résiduelles [CHA 02b]. En revanche, les traitements par impact rapide comme le choc laser (Laser peening) peuvent engendrer une amélioration ou une conservation de l'état de surface si des conditions optimales de traitement sont appliquées. Ces procédés introduisent aussi les contraintes résiduelles de compression.

Aujourd'hui, la méthode semi-analytique est capable de simuler les procédés de grenailage de précontrainte, le galetage avec charge roulante et prédire l'état de surface après traitement. Cependant, les simulations sont faites en quasi-statique car les solutions analytiques élémentaires permettant de calculer les coefficients d'influence ne tiennent pas compte des effets d'inertie. L'absence de ces effets ne permettent donc pas d'étendre les simulations aux autres procédés de mise en compression comme le choc laser, le jet d'eau, etc ; d'où le besoins d'étendre la méthode en intégrant ces effets dans les formulations analytiques. Tel est donc l'objectif de la suite de ce manuscrit.

## Chapitre 3

# Développement des fonctions de Green en dynamique et mise en place du modèle d'impact rapide

*Dans ce chapitre, les fonctions de Green en dynamique ou les coefficients d'influence pour la résolution des problèmes dynamiques par la méthode semi-analytique sont introduits. Le développement des solutions analytiques élémentaires sera tout d'abord présenté en détail. Dans un second temps, ces solutions seront comparées aux solutions particulières présentées dans la littérature. Enfin, en se servant des solutions analytiques développées, les coefficients d'influence seront calculés et validés par un modèle éléments finis.*

## Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>77</b>
<b>2</b>	<b>Formulation du problème et méthode de résolution</b>	<b>77</b>
2.1	Les ondes de compression, de cisaillement et leur vitesse	77
2.2	Solutions en déplacement dans un massif semi-infini soumis à un effort ponctuel	80
2.3	Validation des solutions analytiques et analyse des résultats	89
<b>3</b>	<b>Coefficients d'influence ou fonctions de Green dynamique</b>	<b>91</b>
3.1	Simulation d'un patch de pression	91
3.2	Profil temporel des coefficients d'influence	93
3.3	Validation des coefficients d'influence	94
<b>4</b>	<b>Modélisation du problème d'impact rapide</b>	<b>97</b>
4.1	Définition générale	97
4.2	Résolution du problème d'impact rapide	97
4.3	Approche numérique du problème	99
4.4	Consistance numérique du schémas d'intégration	102
<b>5</b>	<b>Conclusions</b>	<b>104</b>

---

# 1 Introduction

La réponse dynamique d'un matériau à une impulsion de pression sur sa surface libre est nécessaire à la compréhension des nombreux phénomènes tels que les surfaces endommagées générées dans les matériaux fragiles. La découverte des ondes et leurs applications depuis la moitié du 19<sup>ème</sup> siècle révolutionne le monde scientifique. Dès lors, la réponse dynamique d'un matériau sous l'action d'une pression ou d'une force dépendante du temps a attiré l'attention et l'intérêt de plusieurs domaines scientifiques (sismologie, dynamique rapide, nucléaire, ...). Depuis, plusieurs auteurs se sont intéressés à l'étude de la propagation et aux mouvements des ondes dans différents matériaux. Des approches expérimentales et analytiques ont été proposées pour expliquer le comportement des ondes et leur interaction avec les matériaux. Les premières solutions analytiques sur la propagation des ondes ont été proposées par Lamb [LAM 04] pour un massif semi-infini, élastique et isotrope dont la surface libre est soumise à une impulsion verticale et périodique. Aujourd'hui, on compte une multitude de solutions analytiques et numériques investiguées sur la réponse des matériaux à différentes formes de sollicitations [CHA 60, GEO 99, KHO 08, KHO 11, KHO 13].

La méthode semi-analytique présentée dans le chapitre précédent, bien que ayant permis de simuler des impacts, n'est pas encore apte à affronter ce nouveau domaine où les effets d'inerties sont prépondérants. Ces facteurs principaux ont été négligés dans les travaux antérieurs comme souligné dans le chapitre précédent. Il devient nécessaire de les intégrer à la méthode semi-analytique. Pour ce faire, les solutions analytiques élémentaires tenant compte des effets d'inertie doivent être implémentées.

Ce chapitre se situe dans le cadre de la mise en place d'outils nécessaires pour renforcer la méthode semi-analytique. Dans un premier temps, nous présenterons le développement des solutions analytiques élémentaires mises en place. Ces solutions sont obtenues par application d'un effort ponctuel sur la surface d'un massif semi-infini. Ceci permet de mettre en place les coefficients d'influence connus sous le nom de fonction de Green, c'est l'objectif de la seconde partie. La troisième partie de ce chapitre est consacrée à la formulation du problème d'impact rapide à travers les principales hypothèses et l'approche numérique développée.

## 2 Formulation du problème et méthode de résolution

### 2.1 Les ondes de compression, de cisaillement et leur vitesse

Dans ce paragraphe, brève synthèse de la théorie des ondes dans un massif infini pour la détermination des vitesses des ondes de compression et de cisaillement.

Considérons un massif infini muni d'un repère  $(x_1, x_2, x_3)$ , de coefficients de Lamé  $\lambda, \mu$  et de masse volumique  $\rho$ . On suppose que le massif est en mouvement sous l'action d'une force volumique  $\underline{F}$ . Le mouvement du massif est régi par l'équation de conservation de quantité de mouvement au cours du temps donnée par l'expression EQ. 3.1.

$$\operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{F} = \rho \frac{\partial^2 \underline{U}}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

La résolution des équations de base de l'élasticité linéaire montre que dans un massif infini, deux types d'ondes se propagent dans le milieu et chacune est caractérisée par une vitesse spécifique. Il

### 3. Développement des fonctions de Green en dynamique et mis en place du modèle d'impact rapide

s'agit des ondes de dilatation liées au changement de volume dans le massif et des ondes rotationnelles liées au mouvement de rotation.

En supposant les déplacements  $u_1, u_2$  et  $u_3$  (composantes du champs de déplacement  $\underline{U}$ ) infinitésimales, le problème EQ. 3.1 devient linéaire et le mouvement de ces ondes est gouverné par les équations de Navier ou équation de conservation de quantité de mouvement données par l'expression EQ. 3.2.

$$(\lambda + \mu) u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (3.2)$$

La forme vectorielle équivalente s'écrit à l'aide des opérateurs différentiels comme suit :

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \underline{U} + \mu \nabla^2 \underline{U} + \underline{F} = \rho \ddot{\underline{U}} \quad (3.3)$$

où  $\underline{F} = [f_1, f_2, f_3]^t$  désigne les forces de volume et  $\rho$  désigne la masse volumique du massif, l'opérateur  $\nabla$  désigne le gradient et  $\nabla \cdot$  l'opérateur de divergence,  $\underline{U} = [u_1, u_2, u_3]^t$ .

La dilatation et le vecteur rotation liés au mouvement des particules dans le massif sont définis par les expressions EQ. 3.4, 3.5 (exprimées en coordonnées cartésiennes) où  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  est le tenseur des déformations.

$$\Delta = \nabla \cdot \underline{U} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = Tr(\underline{\underline{\varepsilon}}) \quad (3.4)$$

$$\omega = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}) = \frac{1}{2} \nabla \times \underline{U} \quad (3.5)$$

En s'appuyant sur la définition des opérateurs différentielles, on montre que :

$$\nabla^2 \underline{U} = \nabla \nabla \cdot \underline{U} - \nabla \times \nabla \times \underline{U} \quad (3.6)$$

Ainsi, en substituant les expressions EQ. 3.6, 3.5 dans celles de Navier-Stokes et en tenant compte de l'expression EQ. 3.6, on obtient un problème équivalent donné par l'expression EQ. 3.7. Le nouveau problème s'écrit en fonction du terme de dilatation et du vecteur rotation. Cette nouvelle forme d'équation reste indépendante du repère d'étude choisi.

$$(\lambda + 2\mu) \nabla \Delta - 2\mu \nabla \times \omega + \rho \underline{F} = \rho \ddot{\underline{U}} \quad (3.7)$$

Par application théorème de Helmholtz [GUI 07], on montre que le champ de déplacement solution du problème décrit par l'expression EQ. 3.7 peut s'exprimer en terme d'un champ scalaire  $H$  et d'un potentiel vectoriel  $\Phi$  comme illustrée par l'expression EQ. 3.8. La condition  $\nabla \cdot H = 0$  est une condition nécessaire qui assure l'existence et l'unicité de la solution du problème. De même, il existe un potentiel scalaire  $\mathcal{F}$  et un potentiel vectoriel  $\mathcal{B}$  tel que les forces volumiques se mettent sous la forme définie par EQ. 3.9.

$$\underline{U} = \nabla \Phi + \nabla \times H \quad (3.8)$$

$$\underline{F} = \nabla \mathcal{F} + \nabla \times \mathcal{B} \quad (3.9)$$

$$\nabla \cdot H = 0 \quad (3.10)$$

$$\nabla \cdot \mathcal{B} = 0 \quad (3.11)$$

Vu que  $\nabla \cdot \nabla \simeq \nabla^2$ ,  $\nabla \cdot (\nabla^2 U) = \nabla^2 (\nabla \cdot U)$  et  $\nabla \cdot U = \Delta$ ; en substituant les expressions EQ. 3.8-3.11 dans l'expression EQ. 3.7 et sachant que les fonctions  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{B}$  sont indépendantes l'une de l'autre d'une part et d'autre part, que les fonctions  $\Phi$ ,  $H$  le sont également, on montre que le problème EQ. 3.7 est équivalent au systèmes d'équations suivant [KAR 75] :

$$\begin{cases} (\mu + \lambda) \nabla^2 \Phi + \rho \mathbf{F} = \rho \ddot{\Phi} \\ \mu \nabla^2 H + \rho \mathcal{B} = \rho \ddot{H} \end{cases} \quad (3.12)$$

Pour déterminer la vitesse des ondes de dilatation et celle des ondes de rotation, nous allons nous placer dans le cas le plus simple. On montre que la vitesse des ondes ne dépendent que des propriétés matériaux. Considérons l'équation d'équilibre exprimée en terme de déplacement et supposons nulles les forces de volume soit  $\underline{F} = 0$  :

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \underline{U} + \mu \nabla^2 \underline{U} = \rho \ddot{\underline{U}} \quad (3.13)$$

Dans ces conditions, le problème équivalent à celui défini par l'expression EQ. 3.12 se met sous la forme quasi similaire et donné par le système d'équation EQ. 3.14 dans laquelle chacune des équations est indépendante l'une de l'autre. D'après EQ. 3.14, on peut dire que les mouvements de rotation et de dilatation dans le massif sont indépendant l'un de l'autre, donc que le mouvement des particules peut être découplé.

$$\begin{cases} (\mu + \lambda) \nabla^2 \Phi = \rho \ddot{\Phi} \\ \mu \nabla^2 H = \rho \ddot{H} \end{cases} \quad (3.14)$$

Dans un premier temps, on suppose que le mouvement est gouverné par le changement de volume (mouvement de rotation négligeable), le problème défini par l'expression EQ. 3.14 se réduit au problème de dilatation donné par l'expression EQ. 3.15

$$(\lambda + \mu) \nabla^2 \Delta = \rho \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} \quad (3.15)$$

Cette expression est celle de l'équation de propagation des ondes dont la vitesse est  $C_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  et qui s'écrit sous la forme :

$$\nabla^2 \Delta = \frac{1}{C_1^2} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} \quad (3.16)$$

Ceci justifie donc que la distribution des dilatations ou le changement de volume dans le milieu se propage à la vitesse  $C_1$ . Les ondes portant le mouvement de dilatation sont appelées des ondes de compression ou encore ondes primaires. Par conséquent, ces ondes se propagent dans un milieu homogène et isotrope avec une vitesse  $C_1$ .

En second temps, si on suppose que le mouvement des particules dans le massif est gouvernée par un mouvement de rotation (mouvement de dilatation négligeable), dans ce cas, étant donnée que  $\nabla \times H = 0$ , le problème se résume à l'équation ci dessous :

$$\mu \nabla^2 \omega = \rho \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \quad (3.17)$$

$$(3.18)$$

### 3. Développement des fonctions de Green en dynamique et mis en place du modèle d'impact rapide

Cette dernière équation est équivalente à l'équation de propagation des ondes dont la vitesse de propagation est  $C_2 = \sqrt{\mu/\rho}$  ; soit :

$$\nabla^2 \omega = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \quad (3.19)$$

Ainsi, l'interprétation physique de cette dernière équation est que les ondes de rotation se propage à la vitesse  $C_2$  dans le milieu. Le mouvement de propagation des ondes de rotation est porté par les ondes de cisaillement, ce qui justifie donc la vitesse des ondes de cisaillement

## 2.2 Solutions en déplacement dans un massif semi-infini soumis à un effort ponctuel

Considérons un massif semi-infini de surface libre dans le plan  $z = 0$ , élastique, isotrope et homogène, et soumis à un effort ponctuel dépendant du temps. Dès lors, une onde de contrainte et de déformation apparaissent dans le massif, se propagent du point d'application vers le reste du massif. Le mouvement cette onde de contraintes et de déformation est défini par la propagation des ondes de compression, de cisaillement et des ondes de surface. Ces ondes se propagent avec les vitesses  $C_1, C_2$  et  $C_3$  respectivement, qui dépendent des propriétés matériaux. Les vitesses des ondes de compression et de cisaillement sont présentées dans le paragraphe précédent, celle des ondes de Rayleigh ou ondes de surface sera discutée dans les sections suivantes.

Le système étant sous sollicitation externe et le processus étant dynamique, la formulation mathématique de ce type de problème (propagation des ondes) se traduit par l'équation d'équilibre dynamique ou les équations de Navier-Stokes. Le massif étant soumis à un effort ponctuel, le problème résultant est un problème axi-symétrique que l'on peut facilement exprimer en coordonnées cylindriques. Ainsi, l'équation d'équilibre EQ. 3.2 se résume à un système d'équations linéaires, qui, exprimé en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  prends la forme définie par l'équation EQ. 3.20 après simplifications.

$$\begin{cases} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{2\eta}{r} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial \gamma} \end{cases} \quad (3.20)$$

avec

$$\sigma_{zz} = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial r} \quad (3.21)$$

$$\eta = \frac{1}{2} (\sigma_r - \sigma_\theta) = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) \quad (3.22)$$

$$\chi = \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_\theta) = (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) + \lambda \frac{\partial w}{\partial r} \quad (3.23)$$

$$\sigma_{rz} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (3.24)$$

où  $u$ ,  $w$  sont respectivement le déplacement radial ( $r$ ) et vertical ( $z$ ),  $\gamma = C_1 t$  est un changement de variable et qui représente donc la distance parcourue par les ondes de compression à l'instant  $t$  et  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{zr}$ ,  $\sigma_{z\theta}$  sont les composantes du tenseur des contraintes en coordonnées cylindriques.

En réécrivant l'équation d'équilibre EQ. 3.20 avec le champ de déplacement uniquement, on obtient un système d'équations linéaires en déplacement toujours exprimé en coordonnée cylindrique :

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial r} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{cases} \quad (3.25)$$

où  $t$  désigne la variable temps.

Ce système d'équation ne peut être résolu qu'avec des conditions aux limites et initiales adéquates. Ici et dans le reste de ce chapitre, nous considérerons toujours les conditions aux limites et initiales suivantes :

$$\text{Conditions aux limites : } \begin{cases} \sigma_{zz}|_{z=0} = -Q(r)f(t) \\ \sigma_{zr}|_{z=0} = \sigma_{z\theta}|_{z=0} = 0 \\ w|_{z \rightarrow \infty} = u|_{z \rightarrow \infty} = 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

$$\text{Conditions initiales : } \begin{cases} u|_{t \leq 0} = w|_{t \leq 0} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t}|_{t \leq 0} = \frac{\partial u}{\partial t}|_{t \leq 0} = 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

où  $Q(r)$  est l'amplitude de la force appliquée (dépendante de la composante radiale),  $f(t)$  la forme temporelle de la force.

Dans la littérature, plusieurs méthodes sont proposées pour résoudre ce problème telles que la résolution par différence finie, la méthode des éléments de frontières (BEM) [RIZ 94], la transformation de Hankel [EAS 66], [PEK 55], etc. La résolution analytique de ce problème a été une grande question à laquelle certains auteurs se sont particulièrement intéressés tels que Eason [EAS 66], Pekeris [PEK 55], etc. La complexité des équations à résoudre limite généralement les développements analytiques aux cas particuliers tel que le cas des matériaux parfaitement élastique avec pour coefficient de Poisson  $\nu = 0.25$  [PEK 55, KOL 63].

La forme générale de la solution en déplacement et en contrainte du problème définit par les expressions EQ. 3.25, 3.26, 3.27 a été proposée par Eason [EAS 66] pour les matériaux dont le coefficient de Poisson peut varier entre 0 et 0.5. Ces solutions ont été obtenues en appliquant la méthode de transformation d'intégrale dite méthode de Laplace-Hankel (voir ANNEXE A) aux

### 3. Développement des fonctions de Green en dynamique et mis en place du modèle d'impact rapide

expressions EQ. 3.28, 3.29 et 3.30 :

$$[\bar{w}, \bar{\chi}, \bar{\sigma}_z] = \int_0^\infty \int_0^\infty [w, \chi, \sigma_z] J_0(\xi r) e^{-s\gamma} dr d\gamma \quad (3.28)$$

$$[\bar{u}, \bar{\sigma}_{rz}] = \int_0^\infty \int_0^\infty [w, \sigma_{rz}] J_1(\xi r) e^{-s\gamma} dr d\gamma \quad (3.29)$$

$$\bar{\eta} = \int_0^\infty \int_0^\infty \eta J_2(\xi r) e^{-s\gamma} dr d\gamma \quad (3.30)$$

où  $s$  désigne la variable de Laplace.

En substituant les expressions EQ. 3.28-3.30 dans les équations d'équilibre (après avoir appliqué la transformation aux expressions EQ. 3.25-3.27), on montre que le champ de déplacements exprimés dans l'espace de Laplace pour un massif semi-infini ( $z \geq 0$ ) peut s'exprimer sous la forme :

$$\bar{u} = Ae^{-n_1 z} + Be^{-n_2 z} \quad (3.31)$$

$$\bar{w} = Ce^{-n_1 z} + De^{-n_2 z} \quad (3.32)$$

où les coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont déterminés grâce aux conditions aux limites et initiales.

L'application de la transformation inverse de Laplace aux expressions EQ. 3.31, 3.32 conduit aux expressions du champ de déplacements proposé par Eason [EAS 66], défini par les expressions EQ. 3.33 et 3.34 ci dessous :

$$u(r, z, \gamma) = \frac{1}{4\pi i \mu} \int_0^\infty \zeta J_1(\zeta r) d\zeta \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \bar{P} \left[ \frac{(\zeta^2 + \beta^2 s^2 / 2) e^{-n_1 z} - n_1 n_2 e^{-n_2 z}}{(\zeta^2 + \beta^2 s^2 / 2) - \zeta^2 n_1 n_2} \right] e^{s\gamma} ds \quad (3.33)$$

$$w(r, z, \gamma) = \frac{1}{4\pi i \mu} \int_0^\infty \zeta J_0(\zeta r) d\zeta \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \bar{P} \left[ \frac{(\zeta^2 + \beta^2 s^2 / 2) e^{-n_1 z} - \zeta^2 e^{-n_2 z}}{(\zeta^2 + \beta^2 s^2 / 2) - \zeta^2 n_1 n_2} \right] n_1 e^{s\gamma} ds \quad (3.34)$$

$$\bar{P} = \int_0^\infty \int_0^\infty r \sigma_{zz}(r, \gamma) J_0(\zeta r) e^{-s\gamma} d\zeta \quad (3.35)$$

avec  $\beta = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}}$ ,  $\gamma = C_1 t$ ,  $n_1 = \sqrt{\zeta^2 + s^2}$ ,  $n_2 = \sqrt{\zeta^2 + \beta^2 s^2}$ ,  $J_1$  et  $J_2$  sont les fonctions de Bessel de première espèce,  $\delta$  est une variable de la transformation inverse de Laplace qui tend vers 0.

Par souci de simplicité et dans l'idée de mettre en place des coefficients d'influence (fonctions de green) sous une forme la plus simple possible, nous allons supposer ici que la force appliquée est une force de type Heaviside i.e une force d'amplitude  $Q(r) = Q$  constante au cours du temps et appliquée en un point. La figure 3.1 illustre la forme temporelle de la force (donc ici  $f(t) = H(t)$  dans l'expression EQ. 3.26). Avec cette hypothèse, les expressions EQ. 3.25, 3.26

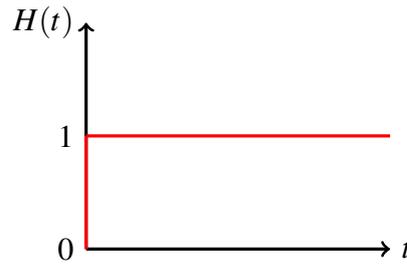


FIGURE 3.1: Représentation de la fonction Heaviside  $H(t)$

, 3.27 prennent la forme ci dessous :

$$\frac{4\pi\mu u}{Q} = \frac{1}{2i\pi} \int_0^\infty \zeta^2 J_1(\zeta r) d\zeta \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{[(\zeta^2 + \beta^2 s^2/2) e^{-n_1 z} - n_1 n_2 e^{-n_2 z}]}{s[(\zeta^2 + \beta^2 s^2/2) - \zeta^2 n_1 n_2]} e^{s\gamma} ds \quad (3.36)$$

$$\frac{4\pi\mu w}{Q} = \frac{1}{2i\pi} \int_0^\infty \zeta J_0(\zeta r) d\zeta \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{[(\zeta^2 + \beta^2 s^2/2) e^{-n_1 z} - \zeta^2 e^{-n_2 z}]}{s[(\zeta^2 + \beta^2 s^2/2) - \zeta^2 n_1 n_2]} n_1 e^{s\gamma} ds \quad (3.37)$$

$$\bar{P} = \frac{Q}{2\pi s} \quad (3.38)$$

L'implémentation numérique de ces equations s'avère complexe et couteuse à cause des bornes des intégrales complexes. Dans ce qui suit, nous présenterons une méthode qui s'appuie sur le théorème des résidus et qui permet de simplifier ces expressions.

**Définition 1 :** On entend par pôle d'une fonction rationnelle, tout point de l'espace en lequel le dénominateur de cette fonction prend la valeur nulle.

**Définition 2 :** Résidu d'une fonction

Soit  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction analytique au point  $z_0$ , et  $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} / 0 < |z - z_0| < r\}$  (disque troué). On appelle résidu de  $f$  au point  $z_0$ , le coefficient  $a_{-1}$  du développement de Laurent de  $f$  au voisinage de  $z_0$ . Ce nombre est noté  $\mathcal{R}(f, z_0)$

Le développement de Laurent de  $f$  est donnée par la série

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \dots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots$$

**Théorème 1** Théorème des résidus

Soit  $\Omega$  un ouvert simplement connexe, et  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \Omega$ .

Soit  $\Omega' = \Omega - \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  et  $f$  une fonction analytique tel que  $f : \Omega' \rightarrow \mathbb{C}$ .

### 3. Développement des fonctions de Green en dynamique et mis en place du modèle d'impact rapide

Soit  $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega'$ , un lacet quelconque dans  $\Omega'$   
alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_{k=1}^n \mathcal{R}(f, a_k) \cdot I(a_k, \gamma)$$

où  $I(a_k, \gamma)$  est l'indice du lacet  $\gamma$  par rapport à  $a_k$ .

#### Définition 3 : Calcul pratique des Résidus

Soient  $\mathcal{U}$  un ouvert et  $f$  et  $g$  deux fonctions analytique (méromorphes) sur  $\mathcal{U}$  sauf en un nombre fini de point, et soit  $z_0 \in \mathcal{U}$ .

(1) si  $z_0$  est un pôle simple de  $f$  alors  $\mathcal{R}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$

(2) si  $z_0$  est un pôle d'ordre  $k$  de  $f$  alors  $\mathcal{R}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \left( \frac{(z - z_0)^k}{(k-1)!} f(z) \right)$

(3) si  $z_0$  est un pôle simple de  $\frac{f}{g}$  alors  $\mathcal{R}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$

Nous allons donc appliquer cette méthode uniquement sur les intégrales de bornes complexes qui sont issues de la transformation inverse de Laplace. Pour ce faire, désignons par  $I$  l'intégrale définie par :

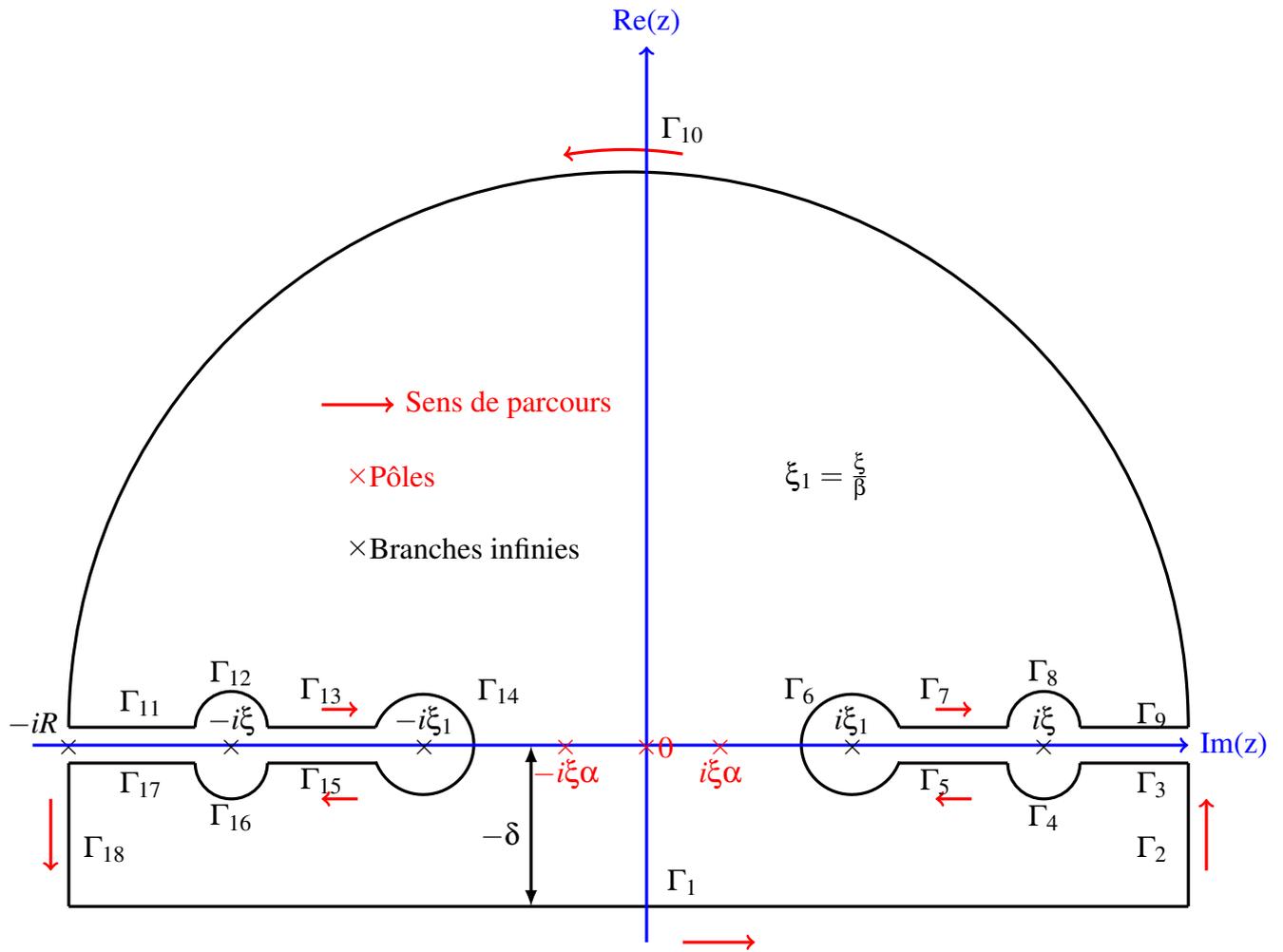
$$I = \int_{\Gamma} G(s) ds \quad (3.39)$$

où  $G(s)$  désigne les fonctions définies sous l'intégrale complexe dans les expressions EQ. 3.36 et EQ. 3.37 et  $\Gamma$  le lacet dit *contour de Bromwich* illustré sur la figure 3.2. Le lacet est décomposable en plusieurs sous chemin  $\Gamma_{i=1, \dots, 18}$ , ce qui permet de contourner les branches infinies et les pôles lors de l'intégration.

L'application du théorème des résidus (ou théorème de Cauchy) et la linéarité de la forme intégrale permettent d'écrire :

$$I = \int_{\Gamma} G(s) ds = \sum_{i=1}^{18} \int_{\Gamma_i} G(s) ds = 2i\pi \sum_{k=1}^n \mathcal{R}(G, s_k) \quad (3.40)$$

où les  $s_k$  sont les pôles de la fonction  $G(s)$  i.e les zero du dénominateur de cette fonction,  $\mathcal{R}(\cdot, \cdot)$  l'application résidu et  $n$  le nombre de pôles de la fonction  $G$ . Les auteurs Eason [EAS 66], Pekeris [PEK 55], Kolsky [KOL 63] ont montré que les fonctions  $G$  sous les intégrales complexe possède chacune dans le plan complexe deux pôles imaginaires simples en  $s_1 = i\zeta\alpha$  et  $s_2 = -i\zeta\alpha$ , avec  $\alpha$  un réel positif tel que  $\alpha \leq \beta^{-1} \leq 1$ ; puis un pôle réel double en  $s_3 = 0$  et aussi des branches infinies en  $s = \pm i\zeta$  et  $s = \pm i\zeta/\beta$ .



**FIGURE 3.2:** Illustration du contour utilisé dans l'espace complexe pour le calcul des intégrales de Laplace inverse

### Expression des pôles et la vitesse des ondes de Rayleigh

La détermination de  $\alpha$  se traduit en substituant  $s_1$  ou  $s_2$  dans l'expression EQ. 3.41 dite équation des ondes de Rayleigh.

$$\left(\zeta^2 + \frac{1}{2}\beta^2 s^2\right)^2 - \zeta^2 (\zeta^2 + s^2)^{1/2} (\zeta^2 + \beta^2 s^2)^{1/2} = 0 \quad (3.41)$$

Pour  $s = s_1$  ou  $s = s_2$ , on obtient après simplification et élimination de la variable  $\zeta$  :

$$\left(1 - \frac{1}{2}\beta^2 \alpha^2\right)^2 - (1 - \alpha^2)^{1/2} (1 - \beta^2 \alpha^2)^{1/2} = 0 \quad (3.42)$$

### 3. Développement des fonctions de Green en dynamique et mis en place du modèle d'impact rapide

En remplaçant  $\beta = C_1/C_2$  dans l'expression EQ. 3.42 et en simplifiant, on parvient à une équation de forme identique à celle donnant la vitesse des ondes de Rayleigh :

$$\left(2 - \frac{C_3^2}{C_2^2}\right)^2 - 4 \left(1 - \frac{C_3^2}{C_2^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{C_3^2}{C_1^2}\right)^{1/2} = 0 \quad (3.43)$$

Par identification des expression EQ. 3.42, 3.43, on déduit  $\alpha$  qui s'écrit comme suit :

$$\alpha = \frac{C_3}{C_2} \quad (3.44)$$

L'expression exacte de la vitesse des ondes de Rayleigh  $C_3$  a été proposée par Rahman [RAH 95] et s'exprime sous la forme :

$$C_3 = C_2 \sqrt{m_1(\nu)} \quad (3.45)$$

avec  $m_1(\nu)$  une fonction dépendante du coefficient de Poisson et explicité en ANNEXE A.

#### Expressions des résidus aux différents pôles

Le calcul des résidus aux différents pôles s'obtient par le développement des équations ci dessous :

$$\mathcal{R}(G, 0) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial s} \left[ s^{(2-1)} G(s) \right] \quad (3.46)$$

$$\mathcal{R}(G, s_i) = \frac{g(s_i)}{\frac{\partial}{\partial s} f(s_i)}, \text{ avec } i = 1, 2 \quad (3.47)$$

où  $f$  et  $g$  sont respectivement le dénominateur et le numérateur de la fonction  $G$ .

Pour  $G$  donné par l'équation 3.36

$$\mathcal{R}(G, 0) = -\frac{e^{-\zeta z} [1 - \zeta z (\beta^2 - 1)]}{\zeta^2 (\beta^2 - 1)} \quad (3.48)$$

$$\mathcal{R}(G, s_1) = -\frac{\cos(\alpha \zeta \gamma)}{\zeta^2 \alpha^2 \Xi} \left[ \left(1 - \frac{\beta^2 \alpha^2}{2}\right) e^{-\hbar_1 \zeta z} - \hbar_1 \hbar_2 e^{-\hbar_2 \zeta z} \right] \quad (3.49)$$

$$\mathcal{R}(G, s_2) = -\frac{\cos(\alpha \zeta \gamma)}{\zeta^2 \alpha^2 \Xi} \left[ \left(1 - \frac{\beta^2 \alpha^2}{2}\right) e^{-\hbar_1 \zeta z} - \hbar_1 \hbar_2 e^{-\hbar_2 \zeta z} \right] \quad (3.50)$$

Pour  $G$  donné par l'équation 3.37

$$\mathcal{R}(G, 0) = \frac{e^{-\zeta z} [\beta^2 + \zeta z (\beta^2 - 1)]}{\zeta (\beta^2 - 1)} \quad (3.51)$$

$$\mathcal{R}(G, s_1) = -\frac{\hbar_1 \cos(\alpha \zeta \gamma)}{\zeta \alpha^2 \Xi} \left[ \left(1 - \frac{\beta^2 \alpha^2}{2}\right) e^{-\hbar_1 \zeta z} - e^{-\hbar_2 \zeta z} \right] \quad (3.52)$$

$$\mathcal{R}(G, s_2) = -\frac{\hbar_1 \cos(\alpha \zeta \gamma)}{\zeta \alpha^2 \Xi} \left[ \left(1 - \frac{\beta^2 \alpha^2}{2}\right) e^{-\hbar_1 \zeta z} - e^{-\hbar_2 \zeta z} \right] \quad (3.53)$$

où les variables  $\Xi, \hbar_1, \hbar_2$  sont définies en ANNEXE A

### Simplification de l'intégrale $I$ et forme finale du champ de déplacements

Dans le développement qui suit, il faut noter que les positions relatives des pôles et des branches infinies ne changent pas quelque soit le coefficient de Poisson  $\nu$ . On montre facilement que les intégrales définies sur les petits d'arc de cercles tendent vers 0 quand leur rayon tend vers 0 et de même pour celle sur le grand arc quand son rayon  $R$  tend vers  $\infty$ , de même la somme des intégrales sur  $\Gamma_2, \dots, \Gamma_{18}$  s'annulent deux à deux en raison de leur sens de parcours opposés [KOL 63]. Donc le calcul de l'intégrale  $I$  sur  $\Gamma$  se résume en  $I$  sur  $\Gamma_1$ . En remarquant que  $I$  sur  $\Gamma_1$  peut se décomposer en somme de  $I$  sur  $\Gamma_7, \Gamma_9, \Gamma_{11}, \Gamma_{13}, \Gamma_{11}, ] - i\xi_1 - i\xi_1 [ \setminus \{-i\xi\alpha, 0, i\xi\alpha\}$ , l'égalité définie par l'expression EQ. 3.40 se simplifie en

$$\begin{aligned}
 2i\pi \sum_{k=1}^3 \mathcal{R}(G, s_k) = & \int_{\delta-iR}^{\delta+iR} G(s)ds - \int_{\delta+iR}^{\delta+i\xi} G(s)ds - \int_{\delta+i\xi}^{\delta+i\xi/\beta} G(s)ds + \\
 & \int_{-\delta+i\xi}^{-\delta+iR} G(s)ds + \int_{-\delta+iR}^{-\delta+i\xi} G(s)ds + \int_{-\delta+iR}^{-\delta-i\xi} G(s)ds + \\
 & \int_{-\delta-i\xi}^{-\delta-i\xi/\beta} G(s)ds - \int_{-\delta-i\xi/\beta}^{-\delta-i\xi} G(s)ds - \int_{\delta-i\xi}^{\delta-iR} G(s)ds
 \end{aligned} \quad (3.54)$$

Par le changement de variable  $s = \pm(\delta \pm i\eta)$  et en faisant tendre  $R$  vers  $\infty$ , l'expression EQ. 3.54 se simplifie après regroupement des termes en :

$$\begin{aligned}
 \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} G(s)ds = & 2i \int_{\zeta}^{\infty} \operatorname{Re}[G(\delta + i\eta)] d\eta + 2i \int_{\zeta}^{\infty} \operatorname{Re}[G(\delta - i\eta)] d\eta + \\
 & 2i \int_{\zeta/\beta}^{\zeta} \operatorname{Re}[G(\delta + i\eta)] d\eta + 2i \int_{\zeta/\beta}^{\zeta} \operatorname{Re}[G(\delta - i\eta)] d\eta + \\
 & 2i\pi \sum_{k=1}^3 \mathcal{R}(G, s_k)
 \end{aligned} \quad (3.55)$$

Soit lorsque  $\delta \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} G(s)ds = & 2i \int_{\zeta}^{\infty} \operatorname{Re}[G(i\eta)] d\eta + 2i \int_{\zeta}^{\infty} \operatorname{Re}[G(-i\eta)] d\eta + \\
 & 2i \int_{\zeta/\beta}^{\zeta} \operatorname{Re}[G(i\eta)] d\eta + 2i \int_{\zeta/\beta}^{\zeta} \operatorname{Re}[G(-i\eta)] d\eta + \\
 & 2i\pi \sum_{k=1}^3 \mathcal{R}(G, s_k)
 \end{aligned} \quad (3.56)$$

où  $\operatorname{Re}$  désigne la fonction partie réelle.

Après calcul des expressions  $G(\pm i\eta)$ , les simplifications faites en tenant compte de la position de  $\eta$  par rapport aux bornes des intégrales et en introduisant les variables  $\psi_1, \psi_2, \nu_1$  définies en ANNEXE A, les expressions des déplacements sous forme simplifiées sont données par :

### 3. Développement des fonctions de Green en dynamique et mis en place du modèle d'impact rapide

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi^2\mu w}{Q} &= \frac{\pi}{\beta^2 - 1} \int_0^\infty e^{-\zeta z} [\beta^2 + \zeta z(\beta^2 - 1)] J_0(\zeta r) d\zeta - \\
&\frac{2\pi\hbar_1}{\alpha^2 \Xi} \int_0^\infty J_0(\zeta r) \cos(\alpha\zeta\gamma) \left[ \left(1 - \frac{\beta^2\alpha^2}{2}\right) e^{-\hbar_1\zeta z} - e^{-\hbar_2\zeta z} \right] d\zeta + \\
&\int_1^\infty \frac{\rho_1}{y\psi_1} \left(1 - \frac{1}{2}\beta^2 y^2\right) dy \int_0^\infty J_0(\zeta r) (\cos[\zeta(y\gamma + \rho_1 z)] + \cos[\zeta(y\gamma - \rho_1 z)]) d\zeta - \\
&\int_1^\infty \frac{\rho_1}{y\psi_1} dy \int_0^\infty J_0(\zeta r) (\cos[\zeta(y\gamma + \rho_2 z)] + \cos[\zeta(y\gamma - \rho_2 z)]) d\zeta + \\
&\int_{1/\beta}^1 \frac{2v_1^2\rho_2}{y\psi_2} \left(1 - \frac{1}{2}\beta^2 y^2\right) dy \int_0^\infty J_0(\zeta r) e^{-v_1\zeta z} \cos(\zeta y\gamma) d\zeta - \\
&\int_{1/\beta}^1 \frac{v_1}{y\psi_2} \left(1 - \frac{1}{2}\beta^2 y^2\right)^2 dy \int_0^\infty J_0(\zeta r) (\sin[\zeta(y\gamma + \rho_2 z)] - \sin[\zeta(y\gamma - \rho_2 z)]) d\zeta - \\
&\int_{1/\beta}^1 \frac{v_1^2\rho_2}{y\psi_2} dy \int_0^\infty J_0(\zeta r) (\cos[\zeta(y\gamma + \rho_2 z)] + \cos[\zeta(y\gamma - \rho_2 z)]) d\zeta
\end{aligned} \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi^2\mu u}{Q} &= -\frac{\pi}{\beta^2 - 1} \int_0^\infty e^{-\zeta z} [1 - \zeta z(\beta^2 - 1)] J_1(\zeta r) d\zeta - \\
&\frac{2\pi}{\alpha^2 \Xi} \int_0^\infty J_1(\zeta r) \cos(\alpha\zeta\gamma) \left[ \left(1 - \frac{\beta^2\alpha^2}{2}\right) e^{-\hbar_1\zeta z} - \hbar_1\hbar_2 e^{-\hbar_2\zeta z} \right] d\zeta - \\
&\int_1^\infty \frac{1}{y\psi_1} \left(1 - \frac{1}{2}\beta^2 y^2\right) dy \int_0^\infty J_1(\zeta r) (\sin[\zeta(y\gamma + \rho_1 z)] - \sin[\zeta(y\gamma - \rho_1 z)]) d\zeta + \\
&\int_1^\infty \frac{\rho_1\rho_2}{y\psi_1} dy \int_0^\infty J_1(\zeta r) (\sin[\zeta(y\gamma + \rho_2 z)] - \sin[\zeta(y\gamma - \rho_2 z)]) d\zeta + \\
&\int_{1/\beta}^1 \frac{2v_1\rho_2}{y\psi_2} \left(1 - \frac{1}{2}\beta^2 y^2\right) dy \int_0^\infty J_1(\zeta r) e^{-v_1\zeta z} \cos(\zeta y\gamma) d\zeta - \\
&\int_{1/\beta}^1 \frac{v_1\rho_2}{y\psi_2} \left(1 - \frac{1}{2}\beta^2 y^2\right)^2 dy \int_0^\infty J_1(\zeta r) (\cos[\zeta(y\gamma + \rho_2 z)] + \cos[\zeta(y\gamma - \rho_2 z)]) d\zeta - \\
&\int_{1/\beta}^1 \frac{v_1^2\rho_2^2}{y\psi_2} dy \int_0^\infty J_1(\zeta r) (\sin[\zeta(y\gamma + \rho_2 z)] + \sin[\zeta(y\gamma - \rho_2 z)]) d\zeta
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Dans les expressions ci-dessus, les intégrales contenant les fonctions de Bessel peuvent être simplifiées suivant les formules proposées dans [WAT 66, GRA 07]. Toutefois les intégrales du type (3.59) simplifiées sont des fonctions par morceaux par rapport à  $(y\gamma \pm \rho_k z)$  comme discuté dans [EAS 66] et reporté en ANNEXE A, section 3.

$$\int_0^\infty J_{0,1}(\zeta r) \left\{ \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} \right\} [\zeta(y\gamma \pm \rho_{1,2} z)] d\zeta \tag{3.59}$$

En notant par  $\Phi_1^r \cdots \Phi_{11}^r$  et  $\Phi_1^z \cdots \Phi_{11}^z$  (définies en ANNEXE A) les formes simplifiées, les solutions en déplacements (implémentables) sont définies par les expressions EQ. 3.61, 3.62.

$$\frac{4\pi^2\mu U_r}{Q} = -\frac{\pi}{\beta^2-1}\Phi_1^r(r,z) - \frac{2\pi}{\alpha^2 G}\Phi_2^r(r,z,\tau) - \Phi_3^r(r,z,\tau) - \Phi_4^r(r,z,\tau) + \Phi_5^r(r,z,\tau) + \Phi_6^r(r,z,\tau) + 2\Phi_7^r(r,z,\tau) - \Phi_8^r(r,z,\tau) - \Phi_9^r(r,z,\tau) - \Phi_{10}^r(r,z,\tau) + \Phi_{11}^r(r,z,\tau) \quad (3.60)$$

$$\frac{4\pi^2\mu U_z}{Q} = \frac{\pi}{\beta^2-1}\Phi_1^z(r,z) - \frac{2\pi\hbar_1}{\alpha^2 G}\Phi_2^z(r,z,\tau) + \Phi_3^z(r,z,\tau) + \Phi_4^z(r,z,\tau) - \Phi_5^z(r,z,\tau) - \Phi_6^z(r,z,\tau) + 2\Phi_7^z(r,z,\tau) + \Phi_8^z(r,z,\tau) - \Phi_9^z(r,z,\tau) - \Phi_{10}^z(r,z,\tau) - \Phi_{11}^z(r,z,\tau) \quad (3.61)$$

$$\frac{4\pi^2\mu U_\theta}{Q} = 0 \quad (3.62)$$

### 2.3 Validation des solutions analytiques et analyse des résultats

Les solutions définies par les expressions EQ. 3.61, 3.62 sont comparées avec les solutions de Pekeris [PEK 55]. Ce dernier a proposé les solutions en déplacements pour une force d'amplitude unité appliquée sur un matériau purement élastique avec pour seule donnée matériau le coefficient de Poisson  $\nu = 0.25$ .

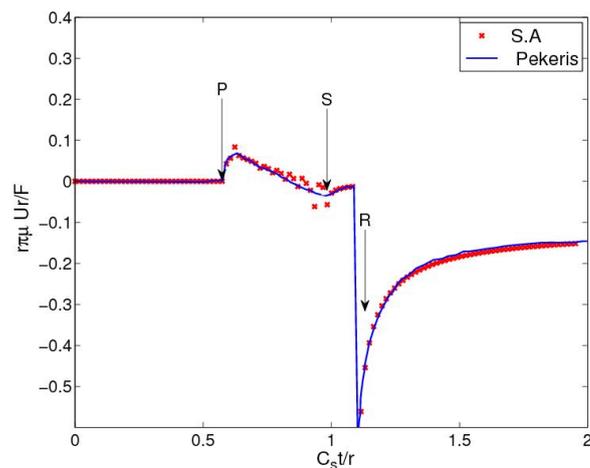
Les résultats normalisés en abscisse par  $C_s/r$  et en ordonnée par  $r\mu\pi/F$  sont illustrés sur les figures 3.3, 3.4. Les déplacements sont obtenus au voisinage du point d'application et il est important de souligner que les déplacements présentent une singularité numérique au point d'application dû à la présence des termes factoriel  $\frac{1}{r}$  dans les expressions des déplacements.

Sur ces figures est également marqué le passage des différentes ondes élastiques qui se propagent dans le matériau : l'onde de compression symbolisée par P, l'onde de cisaillement symbolisée par S et enfin l'onde de Rayleigh ou onde de surface symbolisée par R. Les vitesses de propagation de chacune d'elle sont reportées dans le tableau 4.3 pour les propriétés matériaux choisies à savoir le module de Young  $E = 210 \text{ GPa}$ , la masse volumique  $\rho = 7800 \text{ kgm}^{-3}$  et coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ .

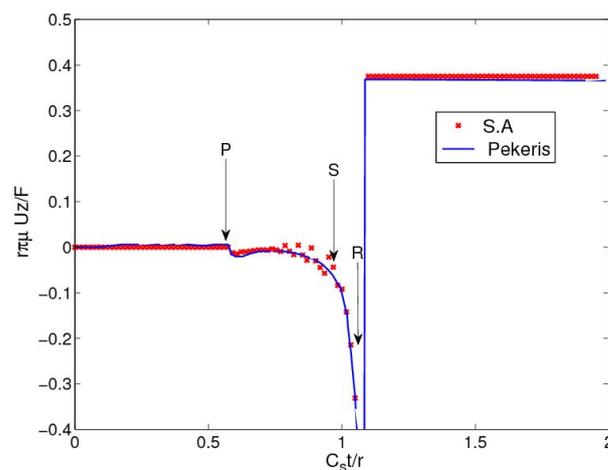
Sur ces figures, on observe un déplacement nul sur une durée  $\Delta \simeq 0.6r/C_2$  qui correspond la durée que met l'onde P pour arriver en un point situé à la distance  $r$  du point d'application de la force ; ce qui sous entend donc que le matériau subissant l'action de la force ne commence à se déformer qu'au passage des ondes P. Elle est suivie par l'onde S qui se caractérise par un sens de sollicitation opposé à celui de l'onde P. Au passage des ondes de Rayleigh (dernière onde qui apparaît dans un massif semi-infini), on observe une forte augmentation du champ de déplacement qui se caractérise par une discontinuité numérique. En effet, au passage de l'onde R, l'égalité définie par EQ. 3.41 est vérifiée et les expressions données par EQ. 3.36, 3.37 tendent vers l'infini.

L'analyse de ces figures montre une très bonne corrélation entre les deux solutions de Pekeris et celle implémentées dans ISAAC, toutefois, les oscillations autour de la solution de référence (Pekeris) entre les ondes P et S sont les effets de Gibbs [GEO 99] issus du comportement oscillatoire des fonctions de Bessel.

### 3. Développement des fonctions de Green en dynamique et mise en place du modèle d'impact rapide



**FIGURE 3.3:** Validation des solutions analytiques élémentaires par comparaison avec les solutions analytiques de Pekeris [PEK 55] en surface du massif : déplacement radial normalisé en fonction du temps normalisé



**FIGURE 3.4:** Validation des solutions analytiques élémentaires par comparaison avec les solutions analytiques de Pekeris [PEK 55] en surface du massif : déplacement vertical normalisé en fonction du temps normalisé

Ondes	Compression	Cisaillement	Rayleigh
Vitesse [ $ms^{-1}$ ]	5683.98	3281.65	3017.12

**TABLE 3.1:** Vitesses approximatives des différentes ondes dans le cas de la validation des solutions analytiques avec une masse volumique  $\rho = 7800kgm^{-3}$  et un module de Young  $E = 210GPa$

### 3 Coefficients d'influence ou fonctions de Green dynamique

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté et défini la méthode semi-analytique comme étant une classe de méthode utilisant des solutions analytiques élémentaires. Ces solutions analytiques sont appelées coefficients d'influence. Elles sont présentées comme la solutions du problème d'un patch de pression appliqué sur la surface libre du massif. Dans cette section, nous proposons une approche numérique de ces types de solutions en dynamique en utilisant donc les solutions précédemment validées.

#### 3.1 Simulation d'un patch de pression

Les coefficients d'influence pour un patch de pression  $P(x,y,t)$  d'amplitude unité (pression uniformément répartie) appliqué sur une surface élémentaire de taille  $\Delta x \times \Delta y$  ont été mis en place en se servant des solutions élémentaires précédemment validées. Nous supposons que le patch de pression se met sous la forme :

$$P(x,y,t) = Q(x,y)S(t) \quad (3.63)$$

où  $Q(x,y)$  est une fonction dépendante des variables d'espace uniquement et qui est égale à l'amplitude du patch de pression sur la surface élémentaire ; prend la valeur nulle partout ailleurs ;  $S(t)$  est une fonction dépendante du temps uniquement et qui définit le profil temporel de la pression appliquée, le choix de cette fonction sera présenté dans les paragraphes suivants.

La surface élémentaire est subdivisée en  $n$  sous domaines sur lesquels la pression est discrétisée en  $n$  briques élémentaires identiques comme illustré sur la figure 3.5. Sur chaque sous domaine, la brique de pression est représentée par une force ponctuelle d'amplitude  $F_i$  équivalente (force résultante) appliquée au centre du sous domaine qui lui est attribué. La condition d'équivalence impose que la résultante des  $n$  forces appliquées soit égale à la résultante équivalente au patch de pression appliqué sur la surface élémentaire  $\Delta x \times \Delta y$ . Ce qui se traduit par l'expression EQ. 3.64.

$$\sum_{i=1}^n F_i = 1 \cdot \Delta x \times \Delta y \quad (3.64)$$

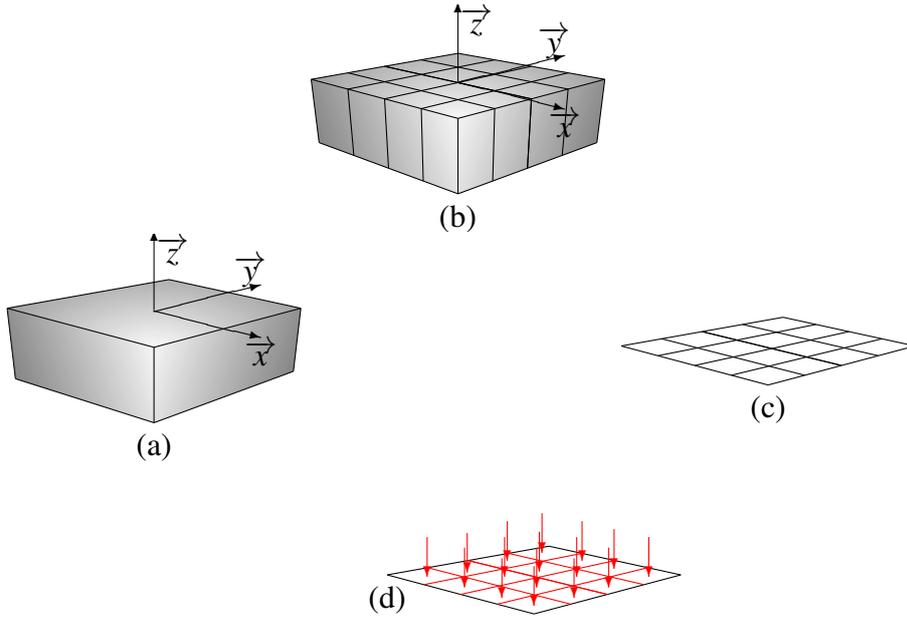
Étant donnée que la pression est uniforme sur toute la surface élémentaire et que tous les sous domaines sont de même taille, les forces appliquées au centre de chaque sous domaine doivent être de même amplitude. Ainsi, de l'expression EQ. 3.64, on déduit que chaque force appliquée est d'amplitude  $F_i = \Delta x \times \Delta y / n$ .

Le champ de déplacements engendré par chacune de ces forces étant défini par les expressions EQ. 3.61, 3.62, le tenseur des contraintes ( $\underline{\underline{G}}^c$ ) résultant de chaque force  $F_i$  est obtenu par le biais de la loi de Hooke et défini par les expressions EQ. 3.65, 3.66 ci dessous :

$$\Gamma_{ij}^p = \lambda Tr(\epsilon_{ij})\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij} \quad (3.65)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{avec } i, j \in \{x, y, z\} \quad (3.66)$$

### 3. Développement des fonctions de Green en dynamique et mise en place du modèle d'impact rapide



**FIGURE 3.5:** Principe de superposition pour la simulation d'un patch de pression : (a) patch de pression sur une surface élémentaire, (b) discrétisation du patch de pression en 16 briques élémentaires identiques, (c) projection dans le plan  $z = 0$ , (d) superposition de 16 efforts (résultante de chaque brique de pression) sur la surface élémentaire

où  $Tr(\cdot)$  est la fonction trace,  $\delta_{ij}$  le symbole de Kronecker et  $U_x, U_y, U_z$  sont les composantes du champ de déplacements exprimées en coordonnées cartésiennes comme suit.

$$U_z(x, y, z) = w(r, z) \quad (3.67)$$

$$U_y(x, y, z) = u(r, z) \cos \theta = xu(r, z)/r \quad (3.68)$$

$$U_x(x, y, z) = u(r, z) \sin \theta = yu(r, z)/r \quad (3.69)$$

Le calcul des dérivées partielles de façon formelle étant très complexe (car les fonctions  $\Phi_1^r \cdots \Phi_{11}^r$  et  $\Phi_1^z \cdots \Phi_{11}^z$  sont des fonctions définies par morceaux et de formes complexes), nous avons choisi d'utiliser la méthode des différences finies centrées définie par l'expression EQ. 3.70 pour l'approximation des opérateurs différentiels à l'intérieur du domaine et des différences finies avant et arrière sur les bords de la géométrie. Cette dernière approximation aux bords de la géométrie n'exclut pas l'hypothèse de massif semi-infini adoptée dans nos formulations.

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \frac{U_i(x_j + \Delta x_j) - U_i(x_j - \Delta x_j)}{\Delta x_j} \quad (3.70)$$

où  $\Delta x_j$  est la distance entre les noeuds  $x_{j+1}$  et  $x_j$  dans la direction  $i$ .

Ainsi, la modélisation d'un patch de pression est obtenue en superposant les contraintes et/ou les déplacements des  $n$  forces appliquées comme illustré sur la figure 3.5. La singularité numérique du champ de déplacement aux points d'application de la force oblige à choisir le nombre de subdivision de la surface élémentaire  $n$  un entier pair, ce qui permet de contourner cette singularité lors de la superposition des effets de chacune des forces appliquées. Dans le cas d'une surface élémentaire parfaitement carrée (ce qui sera le cas dans tous nos travaux avec  $n = 16$ ), le principe

de superposition se traduit par l'expression EQ. 3.71.

$$\Gamma_{ij}(x, y, z, t) = \sum_{p=1}^4 \sum_{q=1}^4 \Gamma_{ij}^p \left( x - \frac{(-1)^s}{8} \Delta x, y - \frac{(-1)^v}{8} \Delta y, z, t \right) \quad (3.71)$$

où  $\Gamma_{ij}$  sont les composantes du tenseur des contraintes engendré par le patch de pression : c'est donc les **coefficients d'influence**.

$s = E \left( \frac{p+1}{2} \right)$ ,  $v = E \left( \frac{q+1}{2} \right)$  et  $E$  désigne la fonction partie entière.

A présent, reste à déterminer la forme temporelle  $S(t)$  des coefficients d'influence.

### 3.2 Profil temporel des coefficients d'influence

Considérons une fonction  $f$  de  $\mathcal{L}^1$  (l'espace des fonctions intégrables sur  $\mathbb{R}$ ) au moins, pouvant représenter le profil temporel d'une distribution de pression appliquée sur un massif. On souhaite donc trouver à tout instant  $t$  les valeurs de pression  $f(t)$  appliquée.

D'après la théorie des distributions, à tout instant  $t$ ,  $f(t)$  vérifie :

$$f * \delta(t) = f(t) \quad (3.72)$$

où  $f * \delta$  désigne le produit de convolution entre la  $f$  et  $\delta$  représentant la fonction de Dirac.

Considérons donc la fonction  $h(t)$  représentant une moyenne de  $f(u)$  pondéré au voisinage de chaque instant  $t$  par une fonction  $g(t-u)$ . Il s'ensuit que, si la fonction  $g(t)$  est suffisamment régulière, alors la fonction  $h(t)$  représente des fluctuations moins rapide que la fonction  $f(t)$ , par conséquent  $h$  s'obtient par convolution de  $f$  par  $g$ . Le choix de la fonction  $g$  doit permettre de vérifier l'expression EQ. 3.72 lors que  $u$  tend vers 0. En traitement de signal, on montre que la fonction  $h$  appartient à  $\mathcal{L}^1$  et est donnée par :

$$h(t) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \square \left( \frac{t-u}{a} \right) du = \frac{1}{a} \int_{t-a/2}^{t+a/2} f(u) du \quad (3.73)$$

où  $\square$  désigne la fonction porte ou fonction rectangulaire et  $g$  données par :

$$g(u) = \frac{1}{a} \square \left( \frac{u}{a} \right) \quad (3.74)$$

$$\square(x) = H \left( t + \frac{1}{2} \right) - H \left( t - \frac{1}{2} \right) \quad (3.75)$$

La fonction  $h(t)$  représente alors simplement la valeur moyenne de la pression  $f(t)$  entre  $t - a/2$  et  $t + a/2$  c'est à dire la moyenne sur une durée  $a$  centré sur  $t$ .

Pour  $a$  suffisamment petit c'est à dire  $a \rightarrow 0$ , la fonction porte  $\square$  tend vers la fonction de Dirac et l'expression EQ. 3.73 conduit à :

$$f(t) * \delta(t) = f(t) \quad (3.76)$$

Ainsi, dès équations EQ. 3.73, 3.76, un choix convenable de la fonction  $S(t)$  serait de prendre une fonction rectangulaire (fonction porte) de longueur  $\tau$  comme illustré sur la figure 3.6. Ainsi,

### 3. Développement des fonctions de Green en dynamique et mise en place du modèle d'impact rapide

la forme temporelle des coefficients d'influence s'obtient par différence de deux impulsions Heaviside et est donnée par l'expression EQ. 3.77.

$$S(t) = 1. [H(t) - H(t - \tau)] \quad (3.77)$$

Les coefficients d'influence ainsi mis en place dépendent des propriétés matériaux (le module de

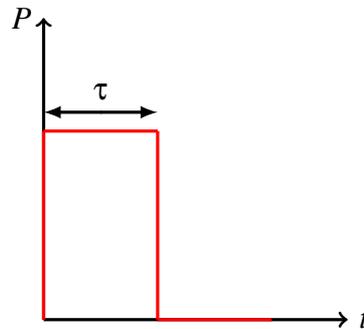


FIGURE 3.6: Impulsion créneau de durée  $\tau$  et d'amplitude  $P$  constante égale à l'unité

Young, le coefficient de Poisson et la masse volumique), de la taille des mailles  $\Delta x \times \Delta y$  et de la durée de l'impulsion créneau  $\tau$ .

### 3.3 Validation des coefficients d'influence

La validation des coefficients d'influence proposés est présentée dans ce paragraphe. Un modèle élément finis est réalisé avec le logiciel commercial Abaqus (version 6.11). Un schéma d'intégration de type explicite a été utilisé pour le calcul.

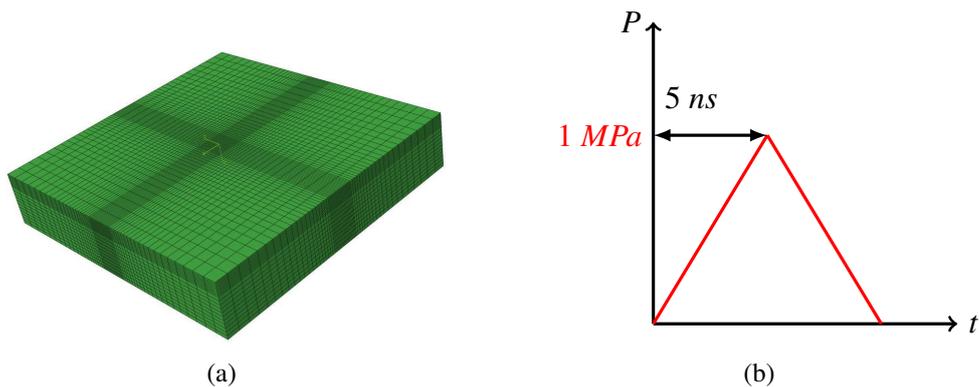


FIGURE 3.7: (a) Modèle éléments finis pour la validation des coefficients d'influence, (b) profil temporel de la pression appliquée

Une plaque rectangulaire, élastique et isotrope de dimension  $1 \times 1 \times 0.2 \text{ mm}^3$  est considérée. Les propriétés matériaux sont prises égales à celles d'un acier :  $E = 210 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$  et

$$\rho = 7800 \text{ kgm}^{-3}.$$

La géométrie est maillée avec des éléments cubiques, quadratiques à intégration réduite : un maillage fin est mis en place dans la zone d'intérêt (la taille de ces éléments est reportée dans le tableau 3.2) et un maillage grossier en dehors de cette zone (voir FIG.3.7(a)). Le problème résolu par éléments finis est celui d'un champ de pression uniforme appliquée sur la surface d'un élément situé au centre de la zone d'intérêt. Le repère absolu a été choisi de tel sorte que son origine coïncide avec le centre de la surface supérieure de l'élément. On suppose que la pression appliquée évolue dans le temps sous forme triangulaire comme illustrée sur la figure 3.7(b). La pression maximale appliquée est de 1 MPa, elle est atteinte au temps  $t = 5 \text{ ns}$ .

Pour simuler le même problème par la méthode semi-analytique, le maillage est choisi uniforme sur toute la géométrie avec un point représentatif de calcul au centre de chaque élément. Ici, la taille des mailles est prise identique à celle du modèle éléments finis (dans la zone d'intérêt). Le point représentatif de calcul dans le modèle semi-analytique est équivalent au point de Gauss dans le modèle éléments finis (dans la zone d'intérêt). Le profil triangulaire est discrétisée par des impulsions créneaux de durée  $\tau = 0.1 \text{ ns}$  prise identique au pas temps  $\Delta t$ . Les résultats de la com-

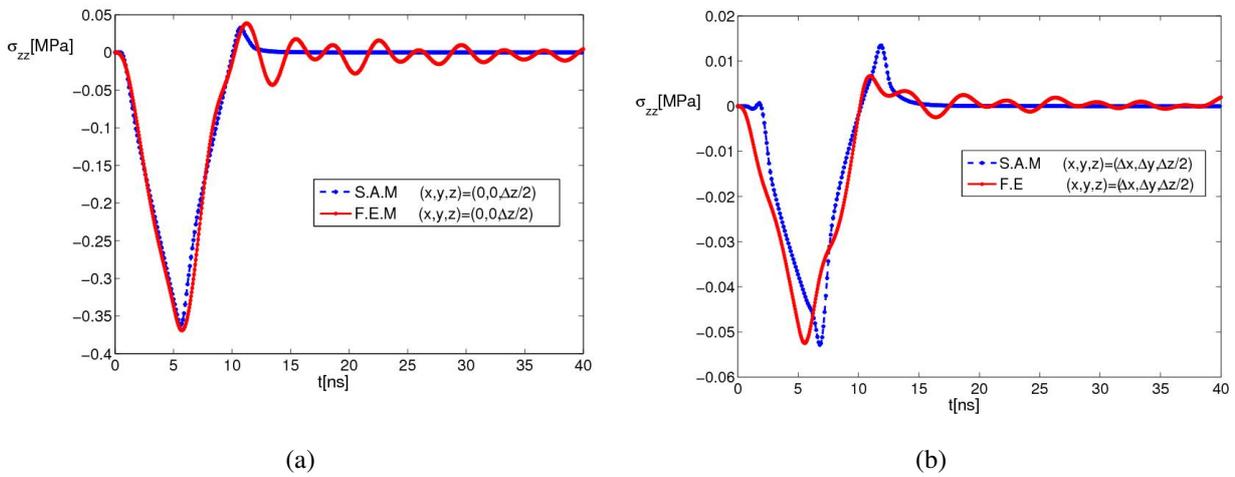
	Code éléments finis (Abaqus)		Méthode semi-analytique
Taille des éléments	Maillage fin	Maillage grossier	$\Delta x = \Delta y = 3.33\mu\text{m}$ , $\Delta z = 4.125\mu\text{m}$
	$\Delta x = \Delta y = 3.33\mu\text{m}$ , $\Delta z = 4.125\mu\text{m}$	non constante	
Type d'éléments	C3D8R		cubique avec un point de calcul au centre

**TABLE 3.2:** Détails du maillage de la simulation éléments finis et celle de la méthode semi-analytique pour la validation des coefficients d'influence

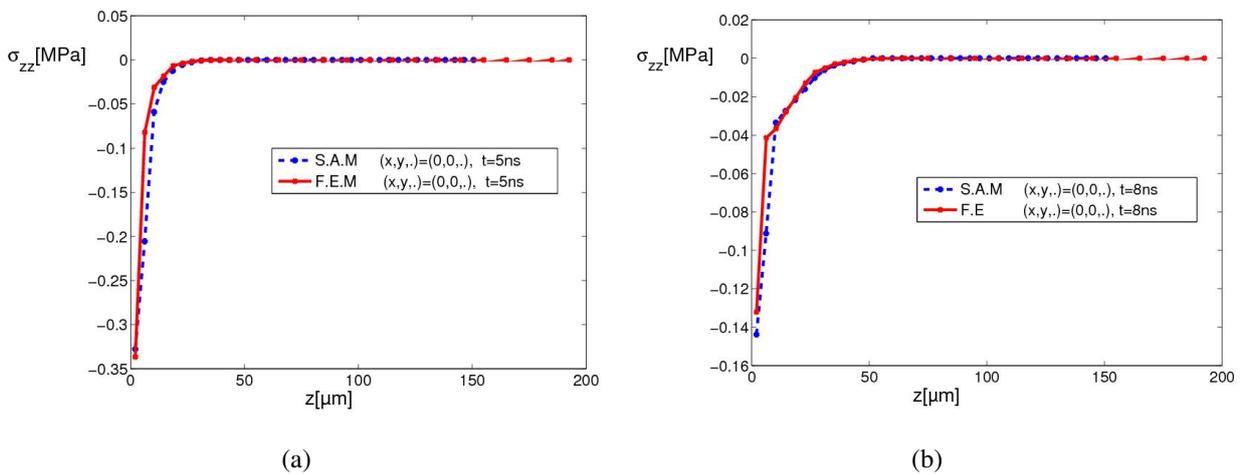
paraison sont présentés sur les figures 3.9, 3.8 uniquement pour la contrainte normale  $\sigma_{zz}$ . Sur les figures 3.9(a), 3.9(b), la contrainte est représentée en fonction de la profondeur de la géométrie (suivant la ligne issue du centre de la surface élémentaire ou surface subissant la pression) aux temps  $t = 5 \text{ ns}$  et  $t = 8 \text{ ns}$  respectivement. La figure 3.8 montre la comparaison de l'évolution au cours du temps de la contrainte normale  $\sigma_{zz}$  entre les deux modèles. La contrainte est prise au point de calcul représentant l'élément sur lequel la pression est appliqué (au point de Gauss pour le modèle élément finis).

Ces figures montrent une très bonne corrélation entre les résultats du modèle éléments finis et ceux de la méthode semi-analytique. Toutefois un comportement oscillatoire de la solution du modèle éléments finis est observé sur la figure 3.8 au cours de la relaxation. Ceci est dû aux erreurs numériques liées au schéma d'intégration de type explicite.

### 3. Développement des fonctions de Green en dynamique et mise en place du modèle d'impact rapide



**FIGURE 3.8:** Validation des coefficients d'influence par comparaison avec le modèle éléments finis, contrainte normale  $\sigma_{zz}$  en fonction du temps : (a) au point de calcul  $(x,y,z) = (0,0,\Delta z/2)$ , (b) au point de calcul  $(x,y,z) = (\Delta x,\Delta y,\Delta z/2)$

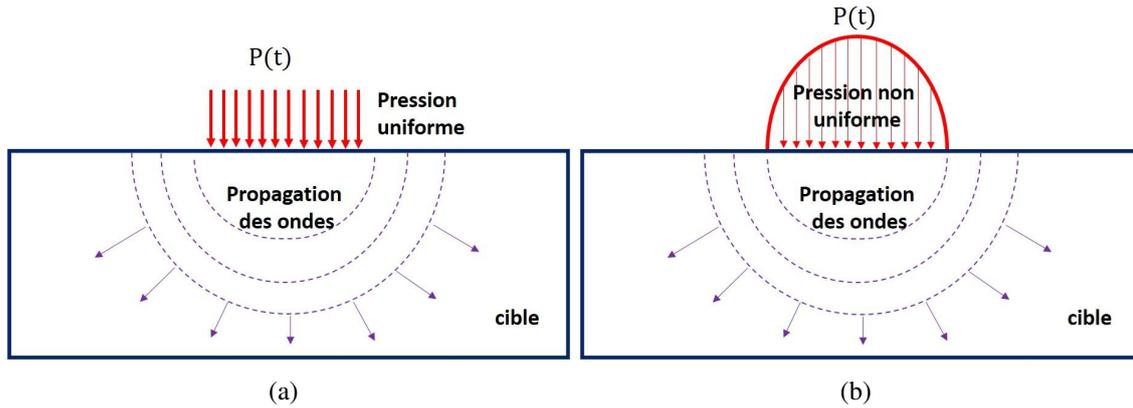


**FIGURE 3.9:** Validation des coefficients d'influence par comparaison avec le modèle éléments finis, contrainte normale  $\sigma_{zz}$  en fonction de la profondeur : (a) à  $t = 5$  ns et (b) à  $t = 8$  ns

## 4 Modélisation du problème d'impact rapide

### 4.1 Définition générale

Ici on s'intéresse à la réponse dynamique d'un massif semi infini à une sollicitation de type impact. On appelle impact l'application d'une *loi temporelle de pression* spatialement uniforme sur une partie quelconque de la surface de la cible [BAL 91].



**FIGURE 3.10:** Illustration de la définition d'un impact : (a) au sens de Ballard [BAL 91], (b) cas général étendu aux pressions non uniformes

Dans ce manuscrit, nous allons étendre cette définition au cas des distributions non uniformes sur la surface de la cible. Les pressions considérées pour un impact ne seront pas nécessairement uniformes dans la zone impactée. Plus particulièrement, nous nous limiterons aux impacts dont la forme du spot dans le plan de la surface du massif est ronde.

### 4.2 Résolution du problème d'impact rapide

Dans cette section le modèle de choc sur un massif semi infini est présenté en détail. Il s'agit ici de déterminer les champs de déplacements et de contraintes dans un massif semi-infini soumis à un champ de pression sur la surface libre.

La résolution des problèmes de contact est un sujet majeur dans l'histoire de la méthode semi-analytique comme souligné dans le chapitre CHAP. 2. Les premières formulations et hypothèses du contact ont été les travaux de Hertz. Lorsque deux corps élastiques sont en contact et qu'on suppose que le contact se fait sans frottement, une pression normale  $p(x, y)$  est donc transmise entre les deux corps. Ainsi, la détermination des contraintes et déplacements due à la distribution d'un champ de pression sur la surface d'un massif semi-infini élastique a été l'œuvre de Boussinesq et Cerruti. Pour un matériau élastique et homogène, le déplacement normal  $U_3$  dû à la distribution de la pression  $p(x'_1, x'_2)$  peut être formulé à partir de solutions de Boussinesq [JOH 85].

$$U_3(x_1, x_2) = \frac{1 - \nu}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x'_1, x'_2)}{\sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2}} dx'_1 dx'_2 \quad (3.78)$$

### 3. Développement des fonctions de Green en dynamique et mis en place du modèle d'impact rapide

Dans ce qui suit, on se propose d'étendre cette analogie de formulation aux problèmes dynamiques notamment aux problèmes de choc sur un matériau élastique et homogène soumis à un impact rapide.

Dans Considérons donc un problème d'impact rapide sans frottement conformément à la définition de la section 4.1. Par conséquent, dans la zone d'impact, la distribution de cette pression dépend de cette zone, de l'amplitude d'impact considérée et aussi de la durée d'application de cette dernière.

Ainsi, pour simuler un impact rapide, nous supposons que le massif subit sur sa surface libre un champ de pression  $P(x, y, t)$  connue pouvant être d'une forme quelconque (spatialement et temporellement). En suivant le principe ayant permis l'obtention de l'expression donnée par l'expression EQ. 3.78, la solution d'un problème de choc peut être obtenue en en deux étape :

- en subdivisant l'historique de la pression d'impact dans l'espace temporel en des incréments infinitésimaux d'une part
- et d'autre part en superposant la contribution de la pression calculée sur tous les incréments de temps, ceci se traduit par l'usage de la forme intégrale  $\int_0^t \dots d\xi$ .

Donc, à tout instant  $t$  donné, la contribution de la pression d'impact sur les contraintes et les déplacements dans le massif est définie sous forme continue donnée par les expressions EQ. 3.79, 3.80.

$$\sigma_{ij}(x, y, z, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(x', y', \zeta) \Gamma_{ij}^p(x' - x, y' - y, z, t - \zeta) dx' dy' d\zeta \quad (3.79)$$

$$U_i(x, y, z, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(x', y', \zeta) G_i^u(x' - x, y' - y, z, t - \zeta) dx' dy' d\zeta \quad (3.80)$$

où  $\Gamma_{ij}^p$  sont les composantes du tenseur des contraintes engendrées par un effort ponctuel et  $G_i^u$  le déplacement dans la direction  $i$  engendré par cette même force.

Par souci de simplicité, nous supposerons que la pression  $P(x, y, t)$  se met toujours sous la forme d'une fonction à variables séparées i.e :

$$P(x, y, t) = g(x, y)f(t) \quad (3.81)$$

ou  $g(x, y)$  définit la forme spatiale de la pression et  $f(t)$  sa forme temporelle.

Ainsi, les expressions EQ. 3.79, 3.80 traduisant le problème d'impact rapide prennent, dans ce cas, les formes définies par les expressions EQ. 3.82, 3.83.

$$\sigma_{ij}(x, y, z, t) = \int_0^t f(\zeta) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x', y') \Gamma_{ij}^p(x' - x, y' - y, z, t - \zeta) dx' dy' d\zeta \quad (3.82)$$

$$U_i(x, y, z, t) = \int_0^t f(\zeta) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x', y',) G_i^u(x' - x, y' - y, z, t - \zeta) dx' dy' d\zeta \quad (3.83)$$

Ces equations montrent donc que la solution du problème d'impact rapide s'obtient par un produit de convolution dans l'espace et dans le temps.

### 4.3 Approche numérique du problème

Dans cette section, une approche numérique est proposée pour résoudre le problème d'impact rapide sur un massif semi-infini élastique et isotrope.

Pour pouvoir effectuer une résolution numérique du problème présenté par les expressions EQ. 3.82 et 3.83, une discrétisation est nécessaire. Dans un premier temps, la géométrie est discrétisée par des éléments de taille  $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$ . Dans un second temps, l'espace temporel est discrétisé par des incréments de longueur  $\Delta t$ , la forme spatiale de la pression dans la zone impactée est quant à elle discrétisée par des éléments briques de base  $S = \Delta x \times \Delta y$  et de hauteur correspondante à l'amplitude de la pression appliquée au centre de  $S$ , on suppose que cette amplitude est constante et uniforme sur  $S$  comme illustrée sur la figure 3.11(c). La forme temporelle de la pression  $f(t)$  est quant à elle discrétisée par des impulsions créneaux de durée  $\tau$  comme illustré sur la figure 3.11(b).

Considérons une géométrie discrétisée par une grille  $n_x \times n_y$  points dans chaque plan  $z_k$  parallèle à sa surface et à un instant  $t$  donné, la forme temporelle de la pression discrétisée par  $n_t$  impulsions créneaux. Nous supposons que sur chaque durée de longueur  $\tau$ , l'amplitude de la pression est une constante qui ne dépend que des variables d'espace. Sur chaque surface élémentaire  $\Delta x \times \Delta y$ , notons par  $p(x_l, y_m)f(t_q)$  la pression appliquée à l'instant  $t_q\Delta t$ ; désignons respectivement par  $\sigma_{\alpha\beta}(x_i, y_j, z_k, t_p)$  et  $U_\alpha(x_i, y_j, z_k, t_p)$  les composantes  $\alpha, \beta \in \{x, y, z\}$  du tenseur des contraintes et du vecteur déplacement dans la direction  $\alpha$ , observés au point  $(x_i, y_j, z_k)$  à l'instant  $t_p$ . Les contraintes et les déplacements sont obtenus par superposition des contributions de chaque impulsion de pression. Ainsi, à un temps  $t_p\Delta t$ , les contraintes et les déplacements en un point  $M(x_i, y_j, z_k, t_p)$  générés par impact rapide s'approximent sous forme discrétisée défini par les expressions EQ. 3.88 et 3.89 lorsque la longueur de discrétisation  $\tau$  est choisi égale au pas temps  $\Delta t$ .

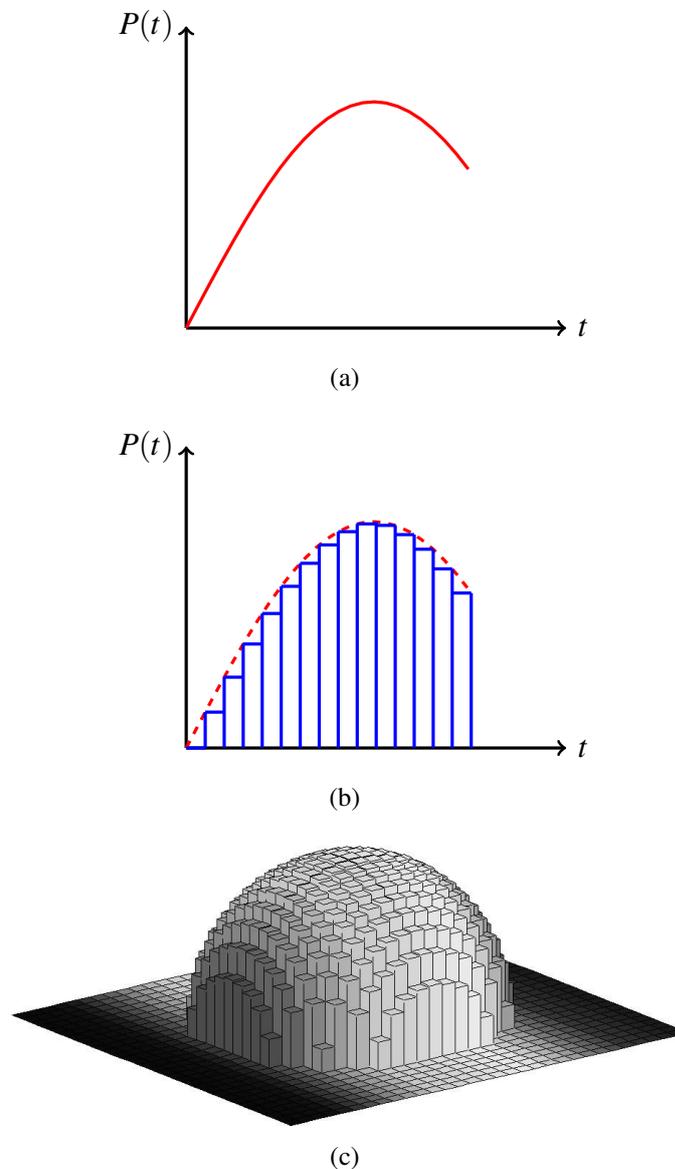
$$\sigma_{\alpha\beta}(x, y, z, t) = \sum_{q=1}^{n_q} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x', y') f(q\Delta t) \Gamma_{\alpha\beta}^p(x' - x, y' - y, z, t - q\Delta t) dx' dy' \quad (3.84)$$

$$U_\alpha(x, y, z, t) = \sum_{q=1}^{n_q} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x', y') f(q\Delta t) G_\alpha^u(x' - x, y' - y, z, t - q\Delta t) dx' dy' \quad (3.85)$$

Les intégrales infinies peuvent être simplifiées pour se limiter uniquement sur la zone  $\Omega_p$  d'application de la pression, ce qui donne :

$$\sigma_{\alpha\beta}(x, y, z, t) = \sum_{q=1}^{n_q} \iint_{\Omega_p} g(x', y') f(q\Delta t) \Gamma_{\alpha\beta}^p(x' - x, y' - y, z, t - q\Delta t) dx' dy' \quad (3.86)$$

$$U_\alpha(x, y, z, t) = \sum_{q=1}^{n_q} \iint_{\Omega_p} g(x', y') f(q\Delta t) G_\alpha^u(x' - x, y' - y, z, t - q\Delta t) dx' dy' \quad (3.87)$$



**FIGURE 3.11:** Illustration du principe de convolution dans l'espace temporel et discrétisation du champ de pression : (a) profil temporel initial de la pression ; (b) profil temporel initial discrétisé par des impulsions créneaux de durée  $\tau$ , (c) discrétisation du champ de pression en éléments briques de base  $S$ .

Ces dernières expressions sont approximées en tout point  $M(x, y, z)$  du massif à l'aide des coefficients d'influence précédemment mis en place :

$$\sigma_{\alpha\beta}(x_i, y_j, z_k, t_p) = \sum_{q=1}^{n_t} \sum_{l=1}^{n_x} \sum_{m=1}^{n_y} P(x_l, y_m) f(q) \Gamma_{\alpha\beta}^s(x_i - x_l, y_j - y_m, z_k, n_t - q) \quad (3.88)$$

$$U_{\alpha}(x_i, y_j, z_k, t_p) = \sum_{q=1}^{n_t} \sum_{l=1}^{n_x} \sum_{m=1}^{n_y} P(x_l, y_m) f(q) \Gamma_{\alpha}^d(x_i - x_l, y_j - y_m, z_k, n_t - q) \quad (3.89)$$

où les fonctions  $\Gamma_{\alpha\beta}^s(\cdot)$  et  $\Gamma_{\alpha}^d(\cdot)$  sont définies par :

$$\begin{aligned} \Gamma_{kl}^s(x_{\alpha} - x', y_{\beta} - y', z_{\gamma}, t) &= \int_{x' - \Delta x/2}^{x' + \Delta x/2} \int_{y' - \Delta y/2}^{y' + \Delta y/2} \Gamma_{ij}^p(x_{\alpha} - x', y_{\beta} - y', z_{\gamma}, t) dx' dy' \\ &\simeq \Gamma_{kl}(x_{\alpha} - x', y_{\beta} - y', z_{\gamma}, t) \end{aligned} \quad (3.90)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha}^d(x_{\alpha} - x', y_{\beta} - y', z_{\gamma}, t) &= \int_{x' - \Delta x/2}^{x' + \Delta x/2} \int_{y' - \Delta y/2}^{y' + \Delta y/2} G_{\alpha}^u(x_{\alpha} - x', y_{\beta} - y', z_{\gamma}, t) dx' dy' \\ &\simeq \Gamma_{\alpha}^u(x_{\alpha} - x', y_{\beta} - y', z_{\gamma}, t) \end{aligned} \quad (3.91)$$

avec  $\Gamma_{\alpha\beta}^c$  et  $\Gamma_{\alpha}^u$  les coefficients d'influence ou fonction de Green en dynamique pour les contraintes et les déplacements (dans la direction  $\alpha$ ) respectivement définis dans la section 3.1.

Lorsque  $\tau \neq \Delta t$ , les équations ci dessus doivent être légèrement modifiées. Dans ce cas, les EQ. 3.88 et 3.89 deviennent :

$$\sigma_{\alpha\beta}(x_i, y_j, z_k, t_p) = \sum_{q=1}^{\gamma} \sum_{l=1}^{n_x} \sum_{m=1}^{n_y} P(x_l, y_m) f(q) \Gamma_{\alpha\beta}(x_i - x_l, y_j - y_m, z_k, h) \quad (3.92)$$

$$U_{\alpha}(x_i, y_j, z_k, t_p) = \sum_{q=1}^{\gamma} \sum_{l=1}^{n_x} \sum_{m=1}^{n_y} P(x_l, y_m) f(q) \Gamma_{\alpha}^u(x_i - x_l, y_j - y_m, z_k, h) \quad (3.93)$$

$$h = E \left( \frac{t_p - q\tau}{\Delta t} \right), \quad \gamma = E \left( \frac{t_p}{\tau} \right)$$

Les expressions EQ. 3.92, 3.93 sont les formulations générales du problème d'impact rapide qui conduisent directement aux équations 3.88, 3.89 lorsque la longueur  $\tau$  des impulsions créneaux est égale au pas temps  $\Delta t$ .

L'implémentation numérique directe des expressions EQ. 3.88, 3.93 est très couteuse en temps de calcul du fait de la présence du produit de convolution. Pour remédier à ce problème, plusieurs techniques existent. Parmi ces techniques, la technique de FFT a montré son efficacité et sa robustesse à réduire considérablement le temps de calcul. Cette technique sera donc exploitée pour réduire le temps de calcul lié au produit de convolution spatiale sous sa forme discrétisée.

La validation des coefficients d'influence mis en place dans ce chapitre a été faite en

### 3. Développement des fonctions de Green en dynamique et mis en place du modèle d'impact rapide

---

utilisant le modèle numérique présenté ici. En effet, pour valider les coefficients d'influence nous avons défini la pression sur un et un seul élément dont la surface élémentaire est centré à l'origine du repère. La forme temporelle du champ de pression présentée sur la figure 3.7(b) est discrétisée par des impulsions créneaux de durée d'impulsion  $\tau = 0.1 \text{ ns}$ . Dans un second temps, nous intéresserons à la validation du cas d'une distribution de pression sur une zone large. Ce point fera donc l'objet du chapitre suivant.

## 4.4 Consistance numérique du schémas d'intégration

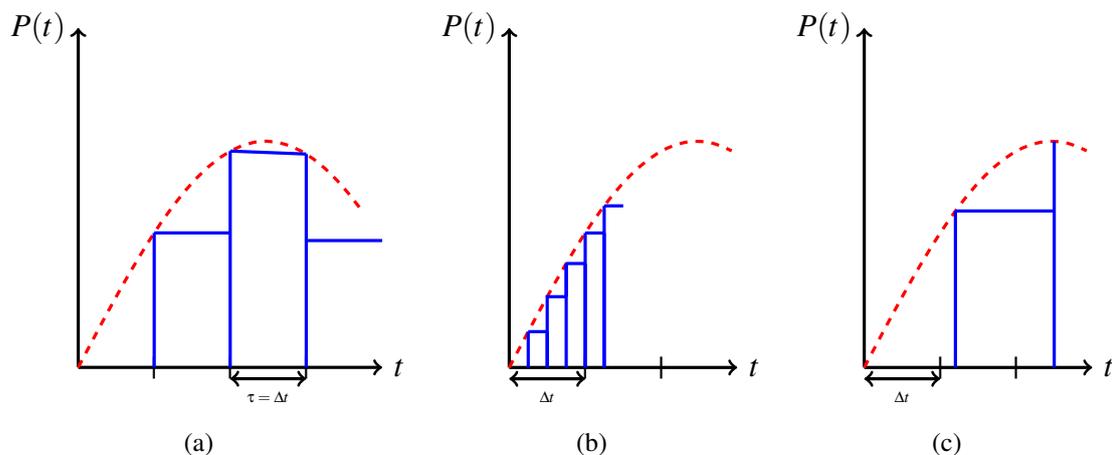
Pour étudier la consistance du schéma d'intégration mis en place, les influences de la durée des impulsions créneaux  $\tau$  et de l'incrément de temps  $\Delta t$  sont à analyser. Dans une seconde partie, le choix de la durée des impulsions créneaux par rapport à l'incrément de temps sera analysé.

Dans cette section, on considère toujours un champ de pression appliqué sur un unique élément comme décrit dans la section 3.3. La forme temporelle de la pression est identique à celle proposée pour valider les coefficients d'influence.

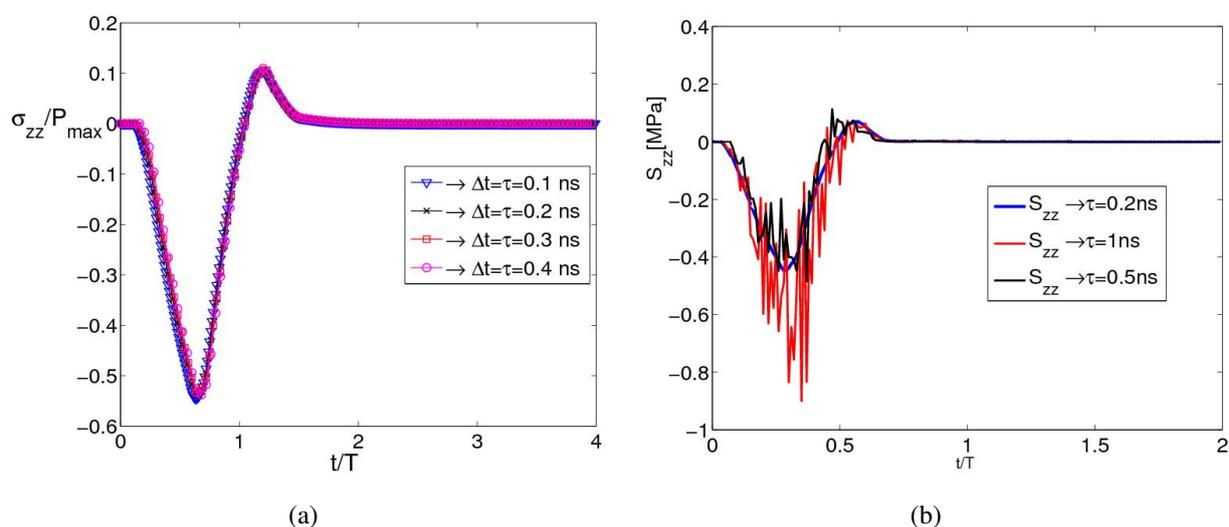
La figure 3.13(a) montre les résultats de l'étude de la stabilité des résultats lorsque la durée des impulsions créneaux est choisi égale à l'incrément de temps. Une bonne stabilité du schéma d'intégration est observée pour des impulsions créneaux de durée  $t_{puls}/\tau \geq 25$  avec  $t_{pul}$  la durée de l'impulsion. D'autre part, les impulsions créneaux de longues durées rendent le schéma numérique instable (dans cette étude  $t_{pul}/\tau \leq 20$ ) comme le montre la figure 3.13(b).

A présent, on s'intéresse au choix de la durée des impulsions créneaux  $\tau$  par rapport l'incrément de temps  $\Delta t$ . Lorsque  $\tau$  est différent de  $\Delta t$ , trois cas de figures sont à analyser à savoir le cas où  $\tau = \Delta t$  (voir figure 3.12(a)), le cas  $\tau < \Delta t$  (voir figure 3.12(b)) et le cas  $\tau > \Delta t$  (voir FIG. 3.12(c)).

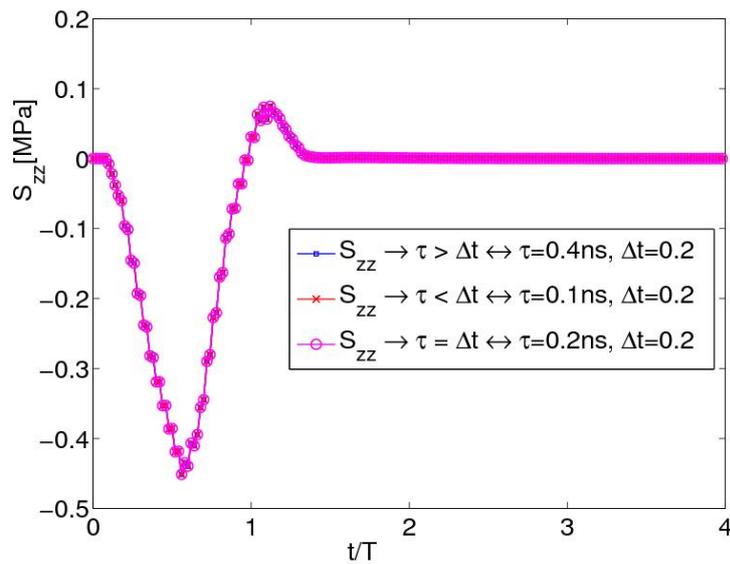
Les résultats de cette étude sont reportés sur la figure 4.4 pour l'incrément de temps  $t_{pul}/\Delta t = 50$ . Ce résultat montre que pour le choix d'une durée des impulsions créneaux relativement plus longues ou plus courtes que l'incrément de temps n'affecte pas les résultats. Toutefois, les instabilités observées sur la figure 3.13(b) sont dues à une mauvaise approximation de la convolution dans le temps, conséquence des impulsions créneaux de durées trop longues. En effet, le schéma d'intégration dans le temps est d'une part quasiment similaire à la méthode des rectangles pour l'approximation des intégrale (donc plus  $\tau$  est petit, plus les effets induits par le profil temporel sont bien approximés) et d'autre part, d'après la section 3.2, plus  $\tau$  est petit, plus le profil de pression est bien approximé.



**FIGURE 3.12:** Cas de figures illustrant l'étude de la stabilité du schéma d'intégration : (a) la durée des impulsions crêteaux  $\tau$  est égale à l'incrément de temps  $\Delta t$ , (b) la durée des impulsions crêteaux  $\tau$  est inférieure à l'incrément de temps  $\Delta t$ , (c) la durée des impulsions crêteaux est supérieure à l'incrément de temps  $\Delta t$



**FIGURE 3.13:** Analyse de la stabilité du schéma d'intégration, influence de la durée des impulsions crêteaux sur les coefficients d'influence : (a) stabilité du schéma d'intégration pour des impulsions crêteaux de courtes durée d'impulsion ; (b) instabilité du schéma pour des impulsions crêteaux de longue durée



**FIGURE 3.14:** Analyse de la stabilité du schéma d'intégration : étude du choix de la durée des impulsions crêteaux par rapport à l'incrément de temps

## 5 Conclusions

Dans ce chapitre, il a été essentiellement question de mise en place d'outils mathématiques et numériques permettant de déterminer les déplacements et les contraintes dynamiques engendrés par une pression connue. Les solutions analytiques élémentaires ont été présentées et leur implémentation a été validée. Ceci a permis d'identifier les coefficients d'influence (l'outil de base de la méthode semi-analytique) en dynamique prenant en compte les effets d'inertie.

Les coefficients d'influence ainsi mis en place sont définis comme étant les solutions d'un patch de pression uniforme, d'amplitude unité et de durée d'impulsion  $\tau$ . Ces coefficients d'influence dépendent des paramètres suivants :

- le maillage : il s'agit de taille  $\Delta x \times \Delta y$  de la surface élémentaire du maillage dans chaque plan parallèle à celui de la surface.
- propriétés matériaux : le module de Young, le coefficient de Poisson, la masse volumique.
- la durée des impulsions crêteaux  $\tau$  discrétisant le profil temporel de la pression et l'incrément de temps  $\Delta t$ . Le choix du pas temps  $\Delta t$  et la durée des impulsions crêteaux  $\tau$

L'utilisation des coefficients d'influence pour la simulation d'un impact rapide sera présenté dans le chapitre suivant. Dans le dit chapitre, une simulation d'un impact rapide sur un massif semi-infini et élastique sera présentée en détails.

## Chapitre 4

# Simulation d'un impact rapide par méthode semi-analytique sur un massif semi-infini élastique et isotrope

*Dans ce quatrième chapitre, on s'intéresse à la réponse d'un matériau élastique soumis à un impact rapide. Ainsi, une simulation d'un impact rapide par méthode semi-analytique sur un matériau élastique est proposée et le modèle est validé par comparaison avec un modèle éléments finis. Pour une bonne compréhension physique du problème d'impact rapide, le phénomène de propagation des ondes a été étudié ainsi que le comportement d'atténuation des ondes dans le matériau cible. Enfin, une étude paramétrique a été réalisée sur quelques paramètres pour prédire au premier ordre les paramètres les plus influents dans les procédés faisant intervenir les impacts rapides.*

## Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>107</b>
<b>2</b>	<b>Simulation d'un impact rapide</b>	<b>107</b>
2.1	Code et paramètres des simulations	107
2.2	Validation du modèle d'impact et analyse des résultats	110
2.3	Ondes de choc et réponse du matériau	113
2.4	Influence des paramètres matériaux	117
<b>3</b>	<b>Étude paramétrique sur les paramètres liés au choc</b>	<b>120</b>
3.1	Influence de la taille du spot	120
3.2	Définition de la zone potentiellement plastique	122
3.3	Influence de la forme du spot	123
3.4	Influences de la pression appliquée et de la durée de l'impulsion	124
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>131</b>

---

# 1 Introduction

Une multitude de phénomènes mécaniques peuvent être observées dans les matériaux ou structures sous un chargement dynamique. Les problèmes d'impact plan, d'impact normal et parallèle sont des situations majoritairement rencontrées dans la littérature qui illustrent le problème de propagation des ondes. La simulation de l'un ou l'autre des problèmes permettent d'appréhender les mécanismes mis en jeu au cours de ces procédés.

Dans ce chapitre, on se focalisera sur la simulation d'un impact rapide sur un massif semi-infini élastique et isotrope. Il sera question de comprendre les phénomènes relatifs aux impacts rapides notamment la physique des ondes et la réponse des matériaux soumis aux impacts rapides. Le chapitre précédent a permis de mettre en place les outils nécessaires à la simulation d'un impact rapide sur un matériau élastique par la méthode semi-analytique. On se limitera ici au cas d'impacts sur matériaux purement élastiques.

## 2 Simulation d'un impact rapide

### 2.1 Code et paramètres des simulations

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté le modèle semi-analytique permettant de réaliser un impact rapide par application d'un champ de pression en surface du matériau. La validation de ce modèle s'est réduite essentiellement à celle des coefficients d'influence et à l'étude numérique sur la consistance du schéma d'intégration. Dans cette partie, une simulation d'un impact rapide sur un massif semi-infini et élastique est proposée. Comme souligné dans le chapitre précédent, la résolution du problème de contact ne fait pas l'objet de ce travail, par conséquent le champ de pression appliqué à la surface libre du massif est supposé connu. La pression ainsi appliquée s'étend sur une zone plus large que celle des coefficients d'influence et elle peut être de forme quelconque. Par soucis de simplicité, nous rappelons que nous nous limiterons ici, à des distributions spatiales.

#### 2.1.1 Implémentation et méthode de calcul des contraintes élastiques

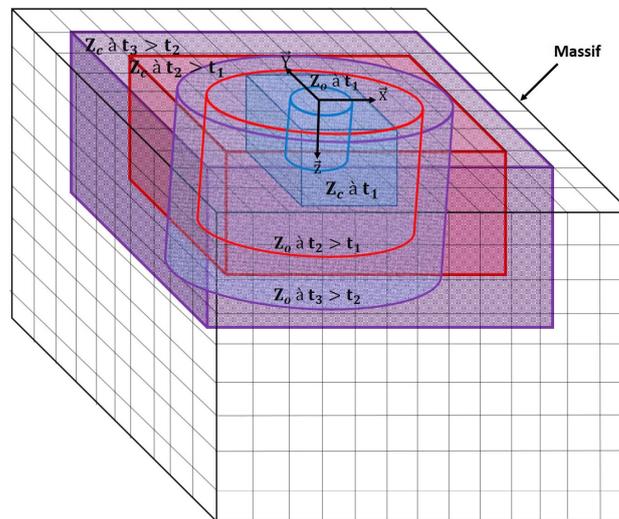
Le massif est discrétisé en éléments briques de taille  $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$ . Dans la zone d'impact, la pression générée par l'impact est quant à elle discrétisée par des briques de pression uniforme et de base  $\Delta x \times \Delta y$ . L'historique du chargement est discrétisé par des impulsions créneaux de durée  $\tau$ . A tout instant  $t = k\Delta t$ , les contraintes élastiques sont obtenues par superposition de toutes les solutions élémentaires définies sur chaque élément. Le calcul des contraintes élastiques se résume en deux temps :

- Dans un premier temps, les coefficients d'influence sont calculés et une première convolution est faite par application de la FFT (gain de temps de calcul) pour déterminer les contraintes élastiques dues à une impulsion créneau de durée  $\tau$  et de distribution spatiale donnée par celle du champ de pression appliquée. Au cours de cette étape, la géométrie est subdivisée en trois zones :
  - **Zone d'onde**  $Z_o$  : c'est la zone qui définit le champ d'action des ondes de compression. Elle est définie sur la base de la vitesse des ondes de compression et donc de

#### 4. Simulation d'un impact rapide par méthode semi-analytique sur un massif semi-infini élastique et isotrope

la distance qu'aurait parcouru ces ondes sur une durée  $t$  correspondant à l'instant de calcul des contraintes élastiques. Elle représente normalement la zone dans laquelle les contraintes calculées dans le massif ne sont pas nulles. Sur la figure 4.1, elle est illustrée par des zones cylindriques (propagation concentrique du front de l'onde)

- **Zone de calcul  $Z_c$**  : cette zone définit le domaine sur lequel les contraintes élastiques sont calculées. Elle est obtenue par un agrandissement léger de la zone d'onde  $Z_o$ . En temps normal, les calculs pouvaient être effectués sur la zone d'onde, mais en les effectuant sur la zone  $Z_c$ , on évite donc les erreurs numériques et ainsi mieux gérer les effets de bord du front d'onde. Sur la figure 4.1, les zones  $Z_c$  sont illustrées par des pavés contenant chacun la zone  $Z_o$  lui correspondant
- **Zone néant  $Z_n$**  : c'est le domaine restant de la géométrie, sur lequel aucun calcul n'est effectué. Cette zone se réduit au fil du temps jusqu'à la zone de calcul soit identique à la géométrie entière lorsque la première onde de compression aurait parcouru tout point du maillage défini.



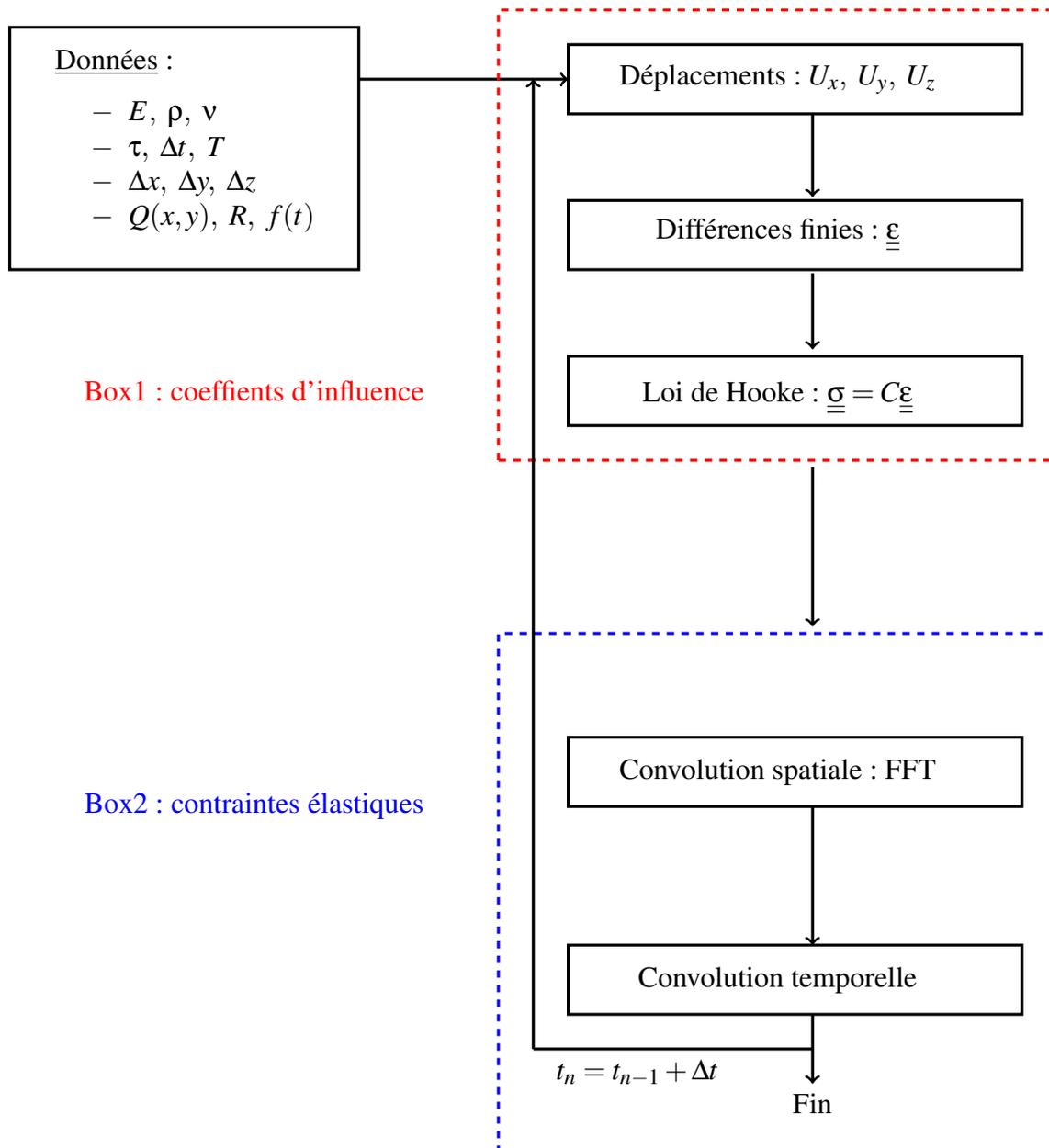
**FIGURE 4.1:** Illustration des différentes zones lors du calcul des contraintes élastiques : zone d'onde  $Z_o$ , zone de calcul  $Z_c$

Cette technique de subdivision de la géométrie en plusieurs zones offre d'énormes avantages notamment la réduction considérable du coût de calcul des contraintes élastiques et de celui des coefficients d'influence.

Cette première convolution permet de superposer la contribution de la chaque éléments brique de pression en tout point du massif sur une durée de longueur  $\tau$ .

- Une dernière convolution dans l'espace temporelle est faite. Cette opération permet de superposer la contribution de toutes les impulsions créneaux. Cette étape est effectuée en prenant en compte toute l'historique de chargement jusqu'à l'instant en cours sans toutefois oublier la variation de la taille de la zone de calcul.

L'algorithme général de la simulation numérique est présenté sur la figure 4.2



**FIGURE 4.2:** Algorithme général de simulation des contraintes élastiques générées par impact rapide

### 2.1.2 Paramètres numériques de simulation

Dans tout le chapitre, nous supposons que la pression peut se mettre sous la forme d'une fonction à variables séparées donnée par l'équation EQ. 4.1.

$$P(x,y,t) = Q(x,y)f(t) \quad (4.1)$$

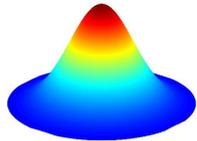
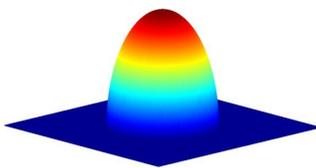
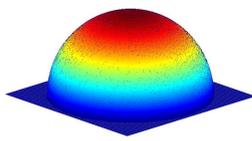
où  $Q(x,y)$  définit la distribution spatiale de la pression (forme du spot ou du cratère) et  $f(t)$  sa forme temporelle.

Le choix ou la définition de la forme du spot  $Q(x,y)$  reste le point le plus crucial dans les

#### 4. Simulation d'un impact rapide par méthode semi-analytique sur un massif semi-infini élastique et isotrope

simulations numériques de choc car il n'est pas du tout évident de définir une telle fonction avec exactitude à cause du phénomène générant la pression. Dans la littérature, très peu d'études existent sur la forme de la distribution spatiale du champ de pression à l'issue d'un choc notamment un choc de type laser.

Néanmoins, des travaux récents réalisés sur la simulation des contraintes résiduelles induites par choc laser dans les alliages d'aluminium [SON 10] ont permis de définir quelques formes types de distributions spatiales du champ de pression lorsqu'il s'agit de laser à spot circulaire. Les formes de spots testées sont reportées dans le tableau TAB. 4.1, où  $P_o$  désigne une constante définissant l'amplitude maximale de la distribution obtenue au centre de l'impact.

	Gaussienne	Quasi-parabolique	Quasi-sphérique
$Q(x,y)$	$P_o e^{-\frac{x^2+y^2}{3R^2}}$	$P_o \sqrt{1 - \frac{x^2+y^2}{R^2}}$	$P_o \sqrt{1 - \frac{x^2+y^2}{2R^2}}$
formes			

**TABLE 4.1:** Tableau récapitulatif des formes types de spot issues d'un impact laser de rayon  $R$

Dans toutes les simulations réalisées, le choix de la distribution spatiale de pression est basé sur les formes de spot récapitulés dans le tableau ci-dessus.

## 2.2 Validation du modèle d'impact et analyse des résultats

Un modèle éléments finis a été réalisé en dynamique explicite avec le logiciel commercial Abaqus version 6.11 pour valider le modèle d'impact. Le problème résolu par la méthode des éléments finis est le suivant : une distribution de pression de forme gaussienne de rayon de base  $R = 50\mu\text{m}$  est imposée en surface libre d'une pièce de forme parallélépipédique vérifiant l'hypothèse de massif semi-infini, ce qui revient à choisir la taille de la géométrie suffisamment grande devant celle de la zone d'impact. La pièce construite fait  $1\text{mm} \times 1\text{mm} \times 0.5\text{mm}$ . La symétrie du chargement imposé et celle de la géométrie permettant de réduire le modèle à un quart de la pièce avec des conditions aux limites symétriques (BC) imposées sur les plans  $X=0$  et  $Y=0$ . La pièce est maillée avec des éléments quadratique à intégration réduite (C3D8R). Un maillage fin est réalisé dans la zone d'intérêt et un maillage grossier autour. La forme temporelle de la pression est illustrée sur la figure FIG. 4.3(b) avec une pression maximale de  $5\text{MPa}$  atteinte à l'instant  $t = 10\text{ns}$  et une durée d'impulsion totale égale à  $20\text{ns}$ . Le récapitulatif des paramètres de simulation et les propriétés matériaux sont reportés dans le tableau 4.2.

Le même problème est résolu avec la méthode semi-analytique en discrétisant la forme temporelle de la pression par des impulsions créneaux de durée  $\tau = 0.2\text{ns}$  choisie égale à l'incrément de temps  $\Delta t$ . Contrairement à la méthode des éléments finis, la méthode semi-analytique exige un maillage uniforme sur toute la géométrie (c'est l'un des inconvénients résultant de l'application de

la FFT). Ici le maillage pour le modèle S.A. est choisi plus fin que celui du modèle éléments finis de la zone d'intérêt. Les paramètres numériques, les propriétés matériaux et la taille des mailles sont reportés dans le tableau 4.2.

Les résultats de la comparaison à différents temps sont illustrés sur la figure 4.4 en terme de contrainte équivalente de von Mises. Ces résultats sont normalisés par la pression maximale en ordonnée et le rayon  $R = a^*$  en abscisse. Sur la figure FIG. 4.4(a), la contrainte de von Mises est tracée suivant la direction radiale issue du centre de l'impact dans le plans  $z = 0$ . La figure 4.4(b) illustre la même contrainte en fonction de la profondeur de la géométrie suivant la direction issue du centre de l'impact. Les écarts observés sur la figure 4.4(a) sont dus à écart existant entre les points de calcul dans le plan  $z = 0$  : points de Gauss situés au centre des mailles pour le méthode des éléments finis et point de calcul dans le plan  $z = 0$  pour la méthode semi-analytique comme indiqué dans le tableau 4.2. Ainsi, ces écarts traduisent donc l'effet de retard sur la propagation des ondes élastiques qui résulte de la distance séparant les points de calcul en surface et les points de Gauss. Néanmoins, une très bonne corrélation est observée entre ces deux résultats. Ceci montre donc l'efficacité de l'algorithme mis en place.

Taille des éléments	Code éléments finis (Abaqus)		Méthode semi-analytique
	Maillage fin	Maillage grossier	
	$\Delta x = \Delta y = 5\mu m,$ $\Delta z = 4.125\mu m$	non constante	$\Delta z = \Delta x = \Delta y = 3\mu m$
Type d'éléments	C3D8R		cubique avec un point de calcul en surface
Pression	distribution gaussienne de rayon $R = 50\mu m$		distribution gaussienne de rayon $R = 50\mu m$
Matériaux	module de Young $E = 210 GPa$ Coefficient de Poisson $\nu = 0.3$ Densité $\rho = 7800 Kg m^{-3}$		

**TABLE 4.2:** Paramètres numériques pour la validation du modèle d'impact en élasticité : simulation par éléments finis et celle de la méthode semi-analytique

Comme évoqué dans le chapitre 2, l'un des avantages de la méthode semi-analytique

Ondes	Onde de compression	Onde de cisaillement	Onde de Rayleigh
Vitesse $V [ms^{-1}]$	6020.18	3217.92	2985.24

**TABLE 4.3:** Vitesses approximatives des différentes ondes élastique dans le cas de la validation des solutions analytiques avec une masse volumique  $\rho = 7800 Kg m^{-3}$  et un module de Young  $E = 210 GPa$

est le gain de temps de calcul comparé à la méthode des éléments finis. Dans cette étude, nous

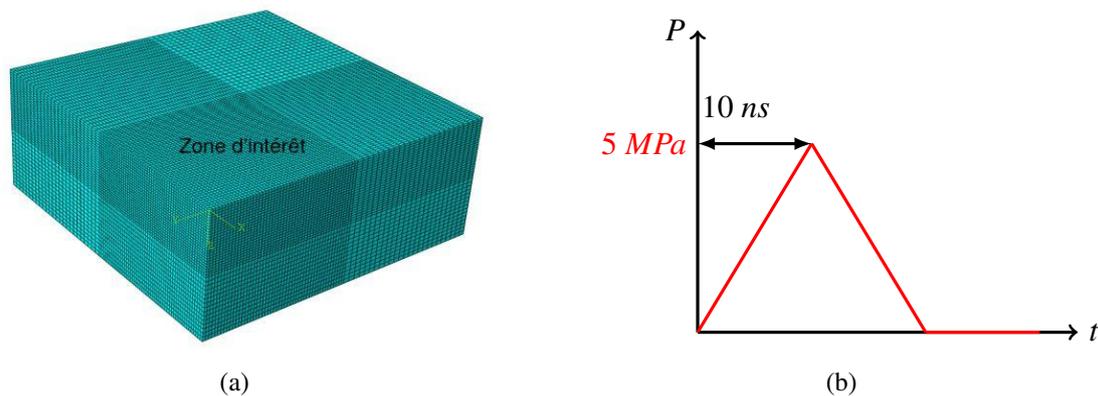
#### 4. Simulation d'un impact rapide par méthode semi-analytique sur un massif semi-infini élastique et isotrope

avons réalisé une comparaison des temps de calcul entre les deux modèles. Les résultats de cette étude sont reporté dans le tableau TAB. 4.4 en terme de temps de calcul CPU. Pour la méthode semi-analytique, le profil de pression est discrétisé par des impulsions créneaux de durée  $\tau = \Delta t = 0.2 \text{ ns}$ .

Modèle	$t_{pul}/t_{observation}$	Nombre d'éléments	Temps CPU
SAM	20 ns /40 ns	557685	2600
E.F	20 ns /40 ns	225000	5147.1

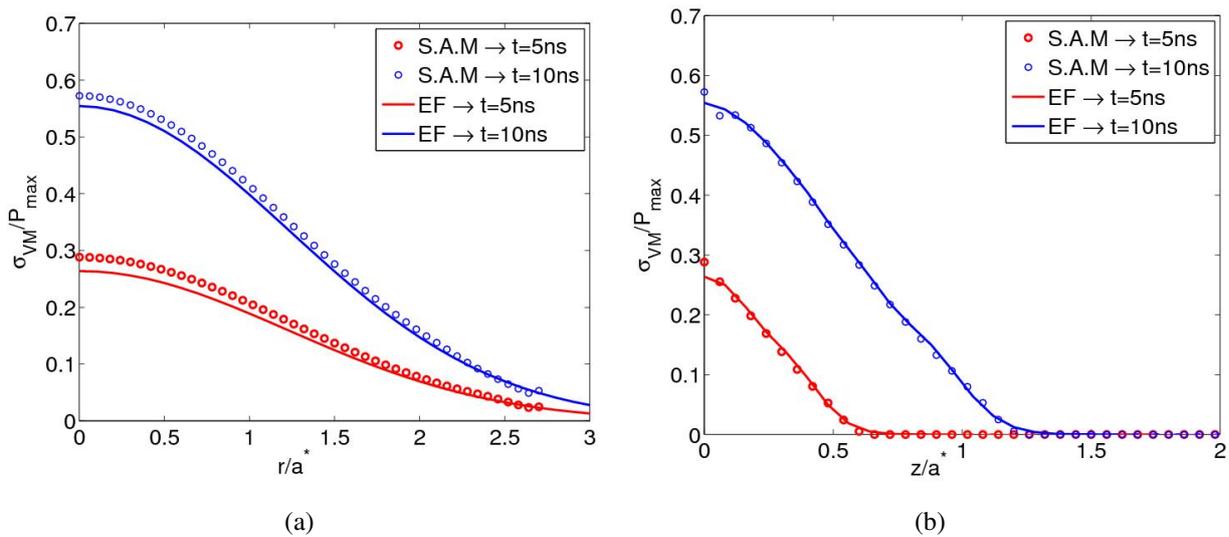
**TABLE 4.4:** Comparaison des temps de calcul entre le modèle éléments finis et la méthode semi-analytique. Calculs effectués sur une machine de caractéristique 2.50GHz, 8Go de Ram et 4 cœurs

L'introduction des termes d'inertie dans les formulations semi-analytiques différencie un



**FIGURE 4.3:** (a) Modèle éléments finis pour la validation du modèle d'impact rapide, (b) forme temporelle de la pression appliquée

problème statique d'un problème dynamique. Ainsi, Cette étude nous permet de constater la forte influence des effets d'inertie sur la contrainte équivalente de von Mises. En effet, sur la figure 4.5 est représentée la contrainte équivalente de von Mises suivant la direction radiale issue du centre de l'impact ( $r \geq 0$ ). Les résultats sont reportés à des temps différents : en surface du massif  $z = 0$  (voir FIG. 4.4(a)) et en sous couche  $z/a^* = 2/5$  (voir FIG. 4.4(b)). On observe une augmentation de la contrainte de von Mises sur toute la durée du chargement ; ceci en surface comme en sous couche. La contrainte continue d'augmenter durant la phase de décharge sur une courte durée avant de décroître. Au cours de la relaxation i.e lorsque la pression disparaît complètement de la surface, on observe toujours une contrainte non nulle qui mettra un certain temps pour s'annuler. Ceci dit, le matériau étant supposé être élastique, met du temps pour retrouver sa forme initiale après un impact rapide élastique. D'une part, pendant toute la durée de chargement et de déchargement, les contraintes maximales dans chaque plan parallèle à la surface sont obtenues



**FIGURE 4.4:** Comparaison des contraintes de von Mises entre la simulation éléments finis et la simulation par méthode semi-analytique pour la validation du modèle d'impact rapide : (a) en surface dans la direction radiale, (b) en profondeur suivant la ligne issue du centre d'impact

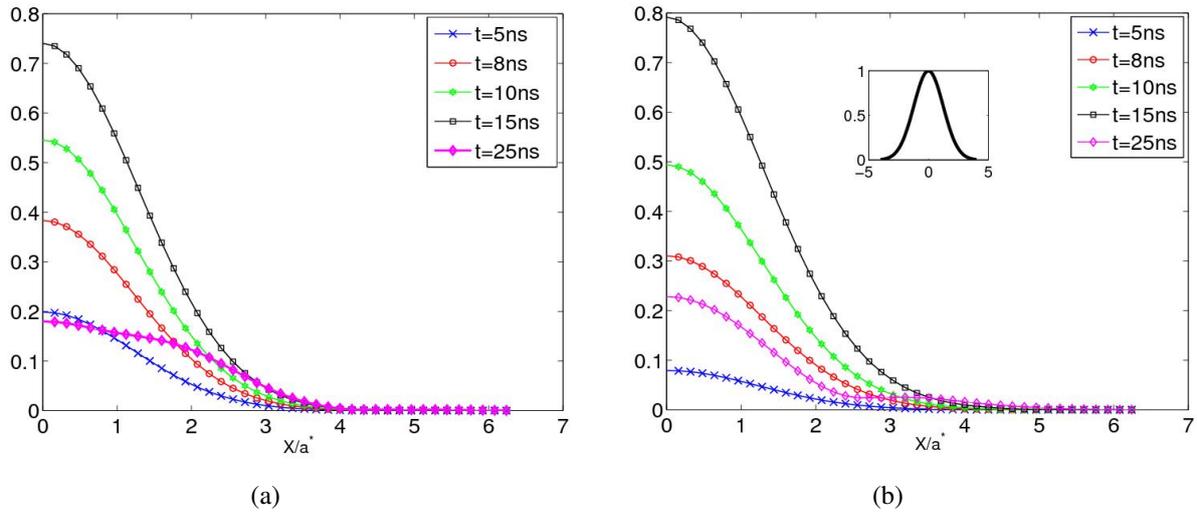
au centre de zone d'impact  $(0,0,x)$  et d'autre part, celle maximale sur toute la géométrie sont obtenues en sous couche. Comparée à une analyse quasi-statique, si on applique les mêmes conditions de chargement (spot et évolution temporelle de la pression appliquée) sur le même matériau (toujours élastique) mais cette fois avec un formalisme quasi-statique, la contrainte équivalente de von Mises évoluera de façon proportionnelle par rapport à la pression appliquée autrement dit les courbes présentées aux instants  $t = 5 ns$  et  $t = 15 ns$  auraient été quasiment identiques. Cette différence observée montre l'importance du terme inertiel  $\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \rho \ddot{U}$  (donc les effets d'inertie) dans les formalismes dynamiques et qui n'apparaît pas dans le cas statique ou quasi-statique.

### 2.3 Ondes de choc et réponse du matériau

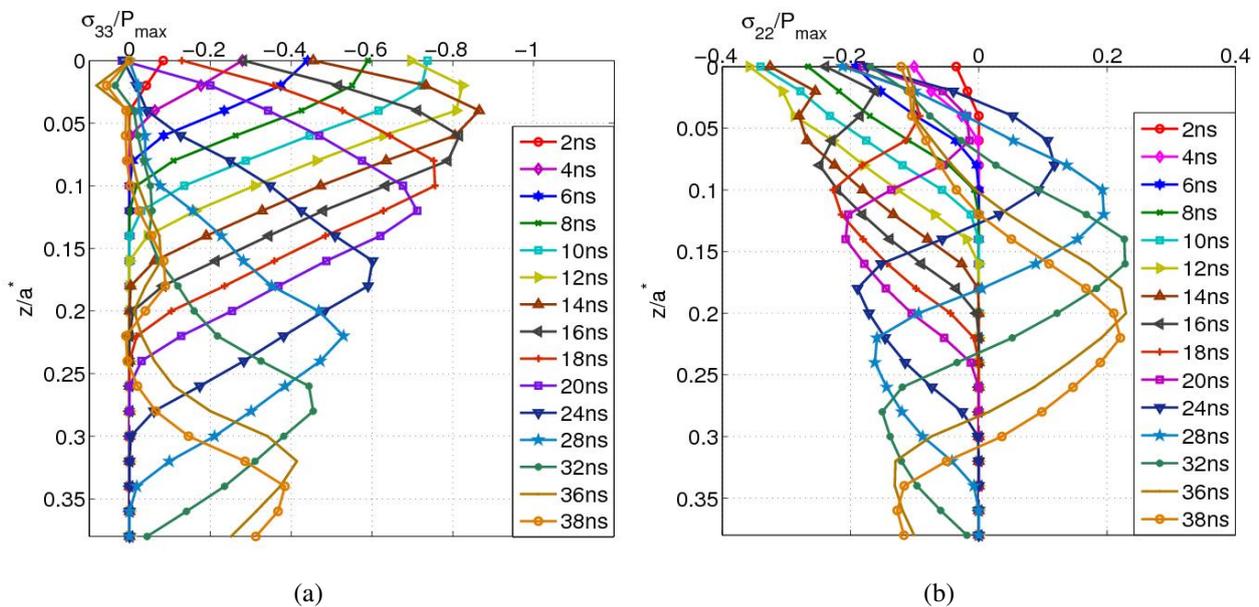
Pour mieux comprendre la physique expliquée dans ce paragraphe, nous commençons par cette idée intéressante de Ballard [BAL 91]. L'idée est la suivante : jeter un boulet de canon dans une mare. Lorsque le boulet s'enfonce dans l'eau, il se crée une perturbation autour de lui qui va engendrer un faisceau d'ondes concentriques qui va se propager en s'amortissant (avec la distance) à la surface de l'eau en partant du point où est tombé le boulet. Mais, il ne faut pas oublier qu'après le passage du boulet, l'eau va se refermer à l'aide d'onde concentrique qui va se focaliser au centre. Au centre, on a alors une singularité qui se traduit par une émission verticale d'une goutte d'eau. Nous allons voir que dans le cas d'un impact rapide, il existe un phénomène analogue.

Dans les problèmes de dynamique rapide, la propagation des ondes dans le matériau cible demeure le phénomène le plus complexe à cerner ainsi que la réponse du matériau lors de la

#### 4. Simulation d'un impact rapide par méthode semi-analytique sur un massif semi-infini élastique et isotrope



**FIGURE 4.5:** Effets d'inertie sur les contraintes de von Mises : (a) en surface dans la direction radiale, (b) en sous couche dans la direction radiale



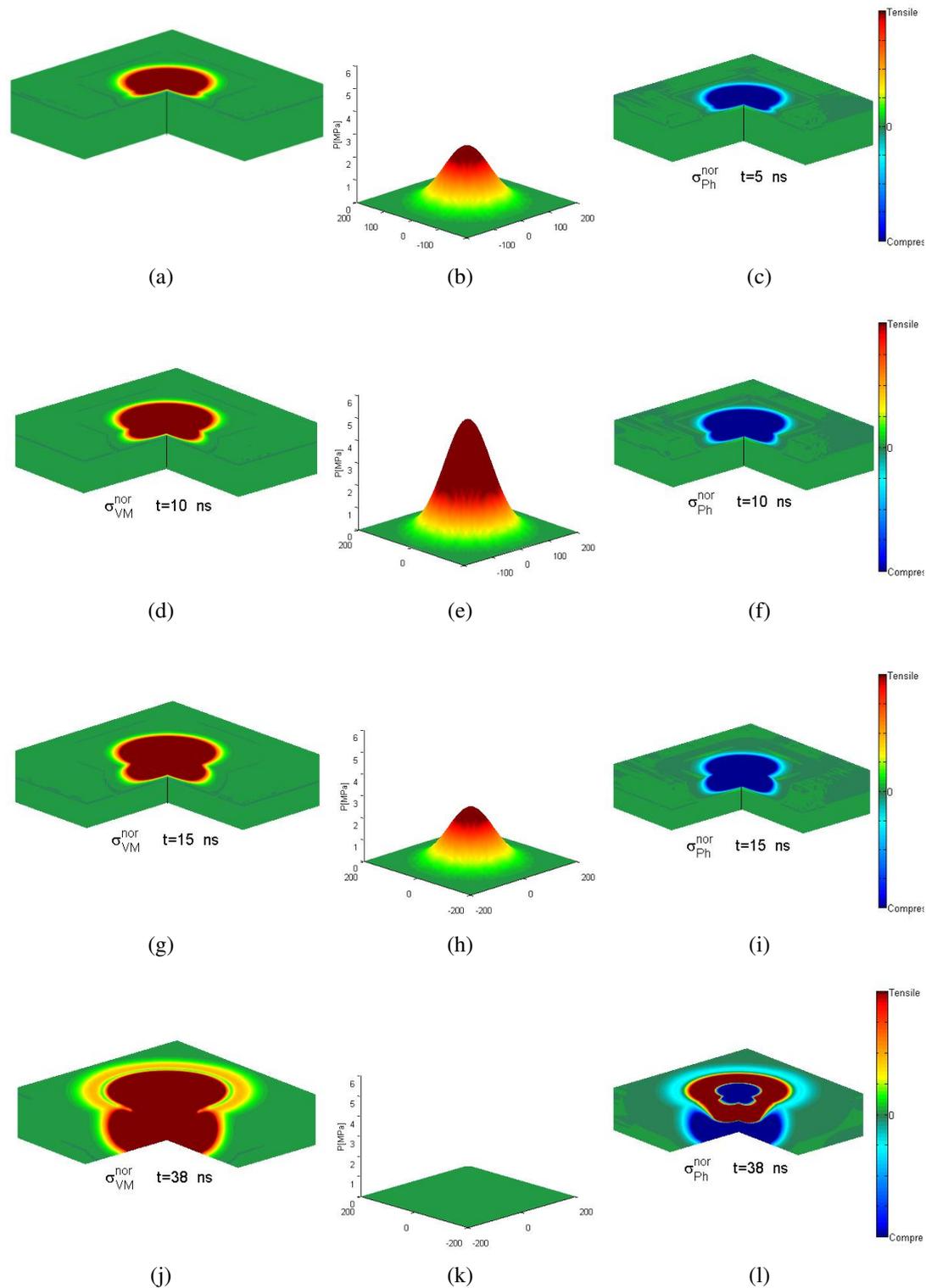
**FIGURE 4.6:** Amortissement et atténuation des ondes de choc élastiques dans le matériau cible : illustration dans la profondeur des contraintes élastiques (a)  $\sigma_{33}$  et (b)  $\sigma_{22}$  à différents temps

propagation de l'onde de choc. Les simulations numériques permettent donc de cerner au mieux cette physique sous tous ses aspects sans passer forcément par l'expérimentation qui parfois est très coûteuse. Sur la figure 4.7, une reproduction des 3/4 d'une plaque rectangulaire en acier est présentée pour illustrer la propagation de l'onde de choc dans le matériau et son comportement. Sur ces figures, présentées à des temps différents, la propagation de l'onde dans le matériau cible est illustrée par la distribution de la contrainte équivalente de von Mises (normalisée) dans le matériau et son comportement par la Pression hydrostatique (normalisée). Nous restons toujours dans les mêmes hypothèses faites dans les sections précédentes c'est-à-dire une distribution gaussienne de rayon  $R = 50 \mu\text{m}$  et une impulsion triangulaire de durée 20 ns (voir figure 4.3(b)).

Lorsque le matériau est soumis à un impact rapide sur sa surface libre, il se crée un front d'onde concentrique qui progresse dans chaque plan parallèle à sa surface. Le déplacement du front de l'onde se fait de façon étroite en profondeur et reste très peu étalé en surface comme en profondeur lors du chargement et du déchargement, ensuite le front d'onde s'étale très rapidement en surface comme à l'intérieur de la cible lorsque la pression appliquée disparaît complètement. Ceci s'explique par le fait que au cours du choc, les composante normales de compression  $\sigma_{33}$  du tenseur de contrainte ont une amplitude plus élevées que les contraintes radiales  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$ , ce qui empêche donc l'étalement du front d'onde et induit donc une propagation étroite en profondeur. L'amplitude des contraintes de compression  $\sigma_{33}$  s'atténue avec le temps, donc avec la pression ; et les contraintes  $\sigma_{11}$  ,  $\sigma_{22}$  deviennent particulièrement plus importantes en amplitude que  $\sigma_{33}$ , ce qui explique donc l'étalement du font d'onde lorsque la pression disparaît complètement : *on parle ainsi de détente latérale de l'onde de choc*. Sur les figures 4.6, le phénomène d'atténuation et d'amortissement avec la profondeur des ondes de choc (élastique) dans la cible est illustré par les contraintes  $\sigma_{33}$  et  $\sigma_{22}$  normalisées par la pression maximale appliquée. Sur ces figures on peut bien observé qu'au cours de la détente latérale des ondes ondes, les contraintes  $\sigma_{11}$  ,  $\sigma_{22}$  sont d'amplitudes plus grandes que celle de  $\sigma_{33}$ . Braisted et Brockman [BRA 99], Kan et Lin [KAN 06], dans leur travaux sur la simulation d'impacts laser ont montré que les contraintes radiales deviennent particulièrement plus importantes que la contrainte normale de compression car ce sont ces contraintes radiales qui deviennent des contraintes résiduelles de compression lorsque l'onde de choc disparaît completement ; pendant ce temps, les contraintes normales diminuent dès que la première onde de choc de compression traverse le matériau.

Dans les chapitres précédents, nous avons tenu à souligner la particularité de l'onde de compression qui initie la réponse du matériau i.e le matériau ne commence à se déformer qu'au passage de cette onde. Une fois que ces ondes apparaissent dans la cible, l'onde de choc qui se propage laisse sur son passage le matériau en compression au cours du chargement et du déchargement avec une zone faiblement comprimée en avant du front d'onde. Une fois que la pression disparaît de la surface, les zones dans lesquelles les contraintes normales s'atténuent rapidement entrent en traction (car le matériau purement élastique tend à retrouver sa forme initiale) et ces zones commencent depuis les bords du cratère issu de l'impact vers le centre de l'impact ou les effets d'inertie demeurent importants à cause de la forte amplitude du chargement appliqué. Ceci explique le fait qu'il y ait une petite zone en compression autour du centre d'impact.

#### 4. Simulation d'un impact rapide par méthode semi-analytique sur un massif semi-infini élastique et isotrope



**FIGURE 4.7:** Propagation de l'onde de choc dans le matériau (colonne de gauche) et réponse du matériau sous choc (colonne de droite) pour une pression  $P(x, y, t)$  (colonne du centrale)

## 2.4 Influence des paramètres matériaux

Si les ondes de choc peuvent être produites dans les matériaux pour interagir avec ces derniers, on peut se poser la question sur les réponses de matériaux soumis à un impact rapide. La réponse à cette question est étudiée dans ce paragraphe.

Les vitesses  $C_1$ ,  $C_2$  des ondes de compression et de cisaillement explicitées dans le chapitre CHAP. 3 dépendent des propriétés matériau et on peut facilement les exprimer sous la forme :

$$C_i = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \psi_i(\nu) \quad (4.2)$$

où  $\psi_i(\nu)$  est une fonction dépendant uniquement du coefficient de Poisson.

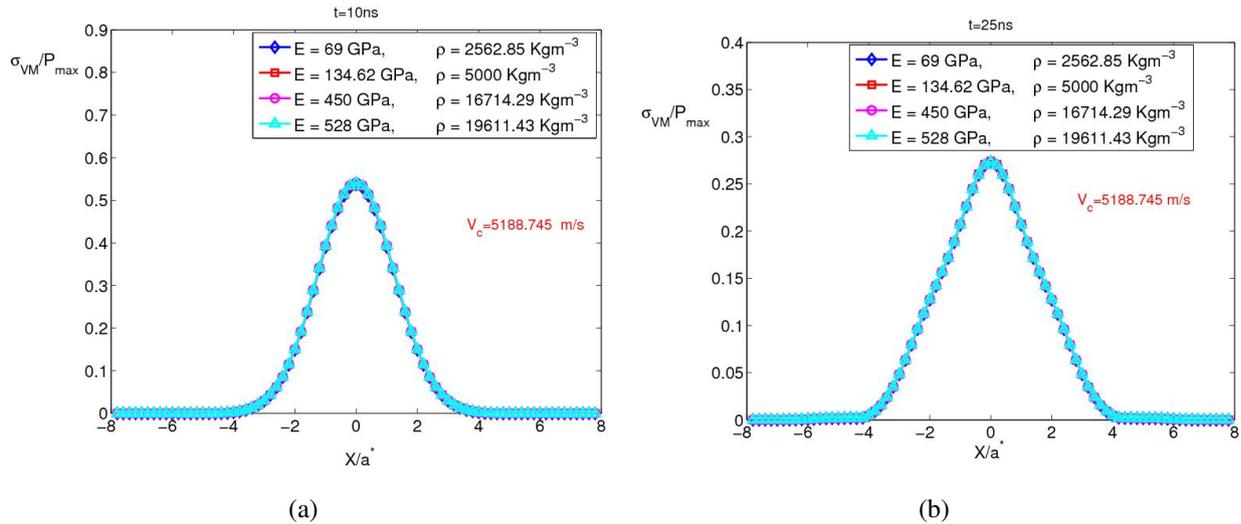
On définit ainsi la vitesse caractéristique du matériau soumis sous choc par la grandeur  $V_c$  comme étant une grandeur permettant de mesurer la réponse du matériau sous sollicitation dynamique.

$$V_c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (4.3)$$

### 2.4.1 Influence des propriétés matériaux à vitesse caractéristique constante.

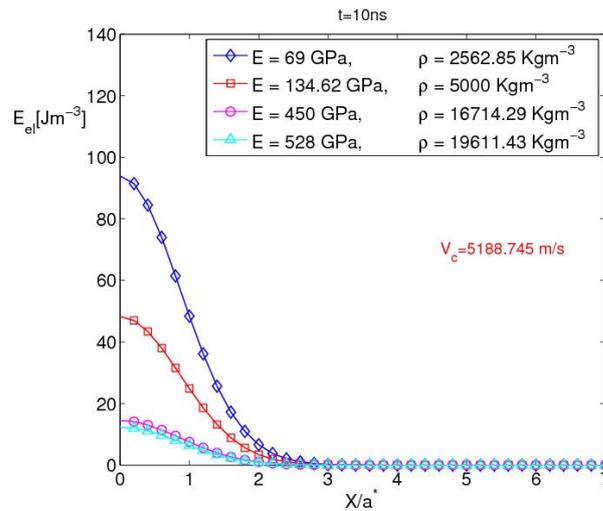
L'étude de l'influence des paramètres matériau (module de Young, masse volumique) sur la contrainte de von Mises (normalisée par la pression maximale) dans le plan  $z = 0$ , et suivant la direction radiale  $y = 0$  est illustrée sur les figures 4.8 et 4.9. Rappelons ici que l'étude de l'influence du coefficient de Poisson n'est pas réalisée étant donné que la plupart des matériaux métalliques ont un coefficient de Poisson avoisinant  $\nu = 0.3$  (coefficient utilisé dans toutes les simulations).

Les résultats obtenus pour une vitesse caractéristique  $V_c \simeq 5188.7 \text{ ms}^{-1}$  (correspondant au cas de



**FIGURE 4.8:** Influence des paramètres matériaux à vitesse caractéristique constante sur les contraintes de von Mises (illustration au temps (a)  $t/t_{pul} = 1/2$ , (b)  $t/t_{pul} = 5/4$ )

#### 4. Simulation d'un impact rapide par méthode semi-analytique sur un massif semi-infini élastique et isotrope



**FIGURE 4.9:** Influence des paramètres matériaux à vitesse caractéristique constante sur la densité d'énergie de déformation élastique (illustration au temps  $t/t_{pul} = 1/2$ )

l'acier reporté dans le tableau 4.2) sont présentés à des temps différents :  $t = 10 \text{ ns}$  (FIG. 4.8(a)) qui correspond au pic de pression et  $t = 25 \text{ ns}$  (FIG. 4.8(b)) qui correspond à la phase de relaxation. A travers ces résultats, nous constatons une influence négligeable des paramètres matériaux qui se traduit par des contraintes de von Mises identique pour tous les paramètres. A vitesse caractéristique constante et pour un même coefficient de Poisson, la réponse des matériaux dans les mêmes conditions de sollicitation est identique en terme de contrainte équivalente. Cependant, la densité d'énergie élastique fournie pour déformer le matériau n'est pas identique et varie comme montré sur la figure 4.9. Plus le matériau est léger et moins dense, plus la densité d'énergie de déformation fournie est très importante.

#### 2.4.2 Influence de la vitesse caractéristique

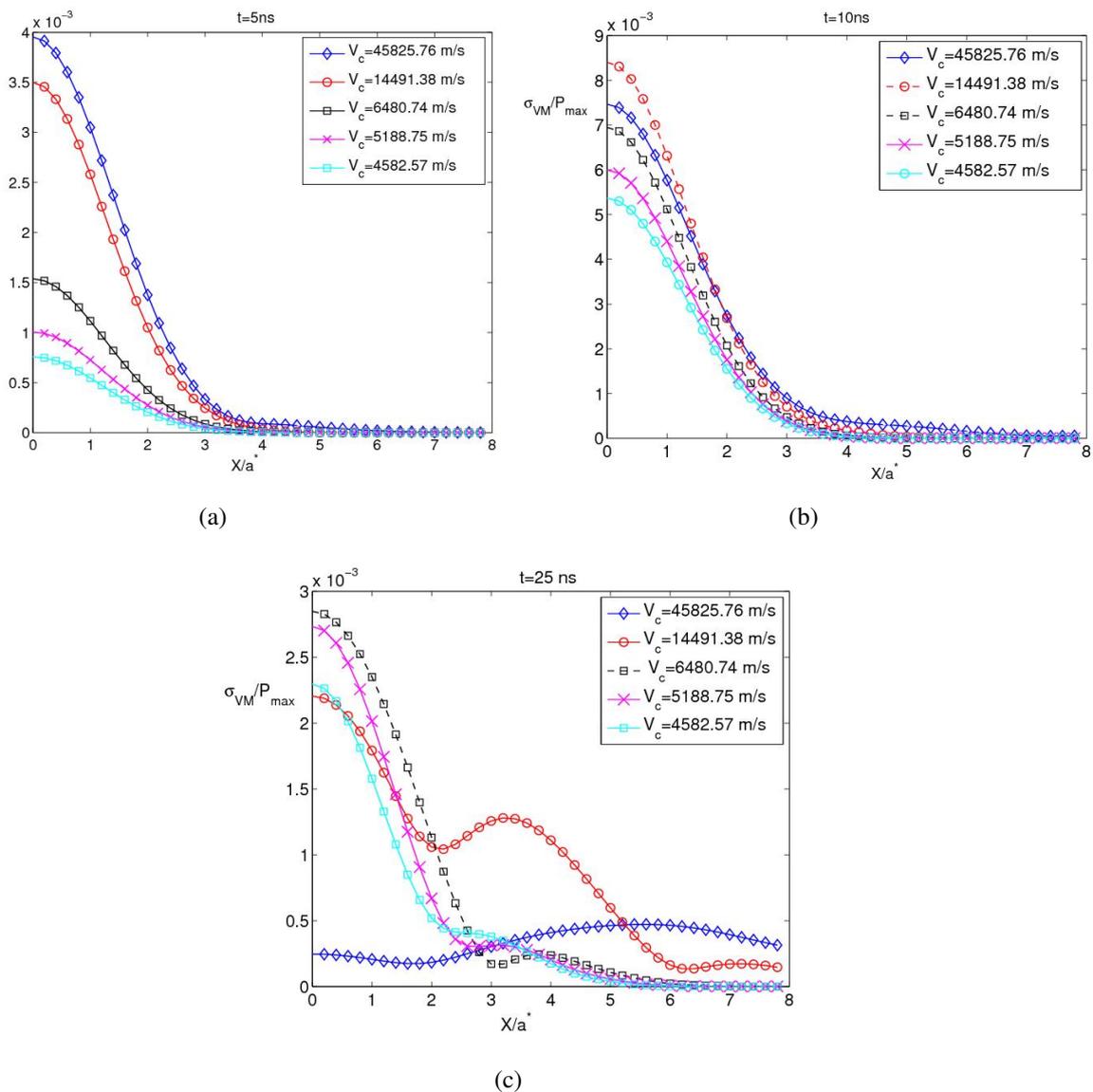
Pour cerner d'avantage l'influence des paramètres matériaux dans les procédés de choc ou d'impact rapide, il est aussi intéressant d'étudier l'influence de la vitesse caractéristique.

Le module de Young et la masse volumique étant proportionnels au carré de la vitesse caractéristique (constante fixée), on peut donc fixer l'un des paramètres pour faire varier la vitesse caractéristique en faisant varier l'autre paramètre. Dans cette étude nous avons choisi de fixer le module de Young pris égal à celui de l'acier ( $E = 210 \text{ GPa}$ ) et les différentes vitesses caractéristiques étudiées correspondent chacune à une masse volumique (voir TAB. 4.5).

La figure 4.10 montre les contraintes de von Mises pour différentes valeurs de la vitesse ca-

Masse volumique $\rho [Kg m^{-3}]$	100	1000	5000	7800	10000
Vitesse $V_c [ms^{-1}]$	45825.76	14491.38	6480.74	5188.75	4582.57

**TABLE 4.5:** Tableau récapitulatif des différentes densités étudiées et vitesses caractéristiques correspondantes

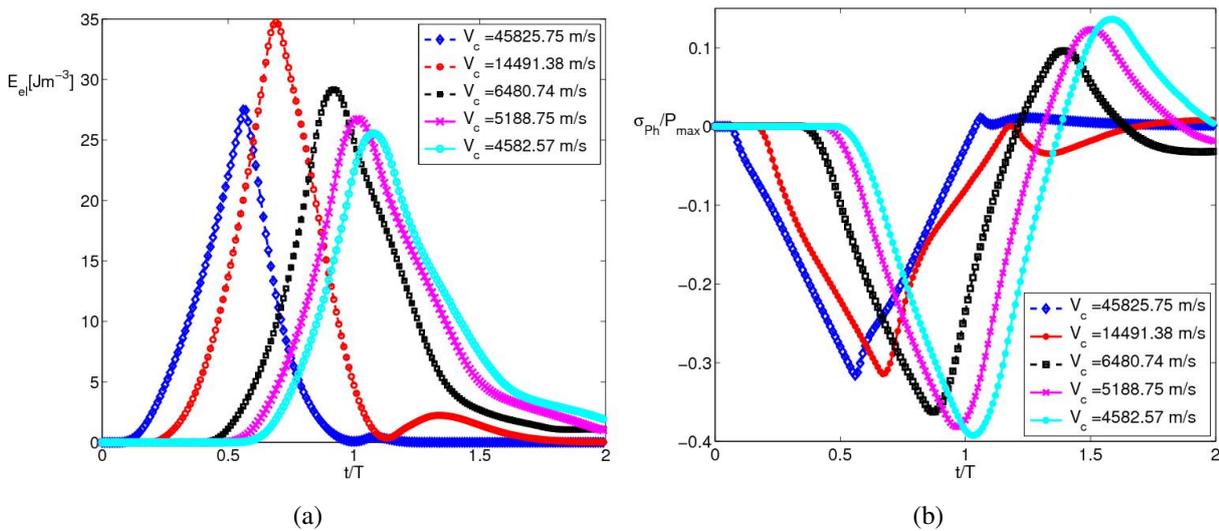


**FIGURE 4.10:** Influence de la vitesse caractéristique sur les contraintes de von Mises en sous couche à une profondeur  $z/a = 2/5$  : (a) à  $t/t_{pul} = 1/4$ , (b) à  $t/t_{pul} = 1/2$  et (c) à  $t/t_{pul} = 5/4$

ractéristique. Les contraintes de von Mises sont tracées dans le plan  $z/a = 2/5$  suivant la direction radiale  $x \geq 0$  et normalisée par la pression maximale. La figure FIG. 4.11 montre l'historique de la contrainte hydrostatique équivalente ou pression hydrostatique (normalisée) et la densité de l'énergie de déformation dans le plan  $z/a = 2/5$ , l'historique est observée au point  $(0, 0, z)$ .

Sur la figure 4.10(a), on peut observer l'influence forte de la vitesse caractéristique sur les contraintes de von Mises, autrement dit, lors du chargement, plus la vitesse caractéristique est élevée, plus grandes sont les contraintes de von Mises en surface comme en sous couche. Ceci est logique puisque la vitesse caractéristique diminue avec la densité et plus le matériau est dense plus l'énergie de déformation fournie est faible (voir la section précédente). La réponse du matériau

## 4. Simulation d'un impact rapide par méthode semi-analytique sur un massif semi-infini élastique et isotrope



**FIGURE 4.11:** Influence de la vitesse caractéristique : évolution temporelle (a) de densité d'énergie de déformation élastique, (b) pression hydrostatique

devient de plus en plus complexe à analyser lors de la charge et de la relaxation comme le montrent les figures 4.10(b) et 4.10(c). Toutefois, sur la figure 4.11(a), on observe que plus la vitesse caractéristique est faible, plus le matériau mettra du temps à se déformer. Néanmoins, le matériau présente de grandes contraintes de compression (voir FIG. 4.11(b)) lorsque la vitesse caractéristique qui lui est associée est moins importante.

## 3 Étude paramétrique sur les paramètres liés au choc

Dans ce paragraphe, l'étude de certains paramètres potentiellement influents des procédés d'impact rapide ou procédé utilisant des chocs est faite et analysée. Nous nous intéresserons plus particulièrement à la taille du spot de pression, l'influence de la forme de la distribution spatiale et enfin, une étude sera conduite sur l'influence de la pression maximale et la forme temporelle de la pression.

### 3.1 Influence de la taille du spot

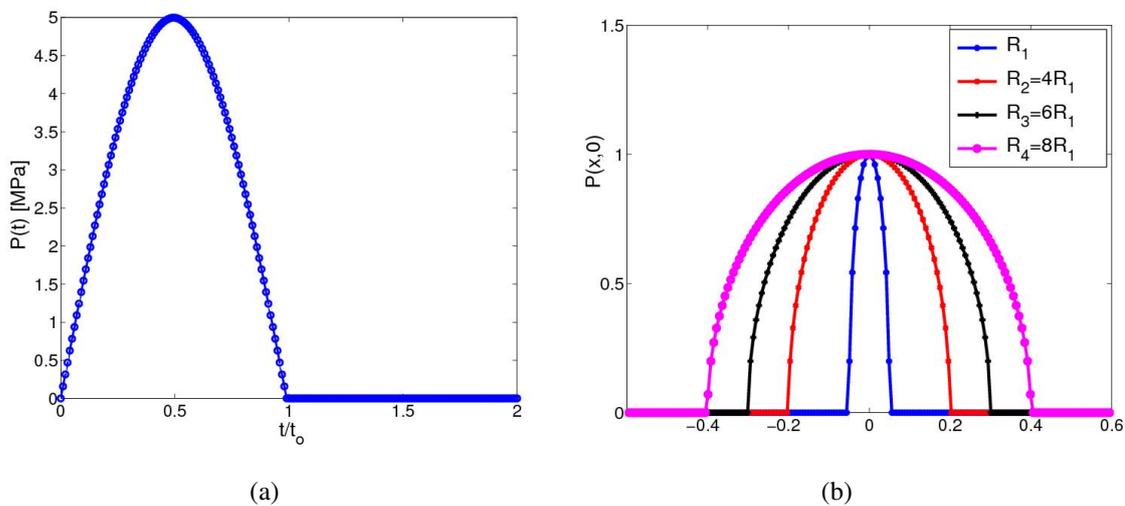
Dans la littérature, l'influence de la taille du spot sur les grandeurs mécaniques dans le domaine du choc laser demeure un point critique. En effet, Rankin et al. [RAN 03] ont montré expérimentalement que dans les procédés de choc laser, la taille du spot a un effet négligeable sur le profil des contraintes en profondeur, inversement Ocana et al. [OCA 04] ont montré que les contraintes résiduelles induites par le procédé de choc laser dépendent fortement de la taille du spot laser. D'autre part, Ballard [BAL 91], Song [SON 10] ont montré que les contraintes résiduelles issues du choc laser (calcul élasto-plastique) saturent à la surface du matériau impacté à partir d'une taille de spot.

Nous présentons l'étude de l'influence de la taille du spot sur les contraintes de von Mises

au cours d'un impact rapide sur un matériau élastique. L'étude est réalisée pour une distribution temporelle de forme sinusoïdale et une distribution spatiale de forme quasi-sphérique comme définie par l'expression EQ. 4.4 et schématisée sur la figure 4.14. La durée de l'impulsion  $t_o$  est de 20 ns avec une pression maximale de 5 MPa atteinte au temps  $t = 10$  ns.

$$\begin{cases} P(x,y) &= f(t)\sqrt{1 - \frac{x^2+y^2}{a^*}} \\ f(t) &= 5 \sin\left(\frac{\pi t}{t_o}\right) H(t_o - t) \end{cases} \quad (4.4)$$

Les résultats pour différentes tailles de spot sont reportés sur les figures 4.13, 4.14

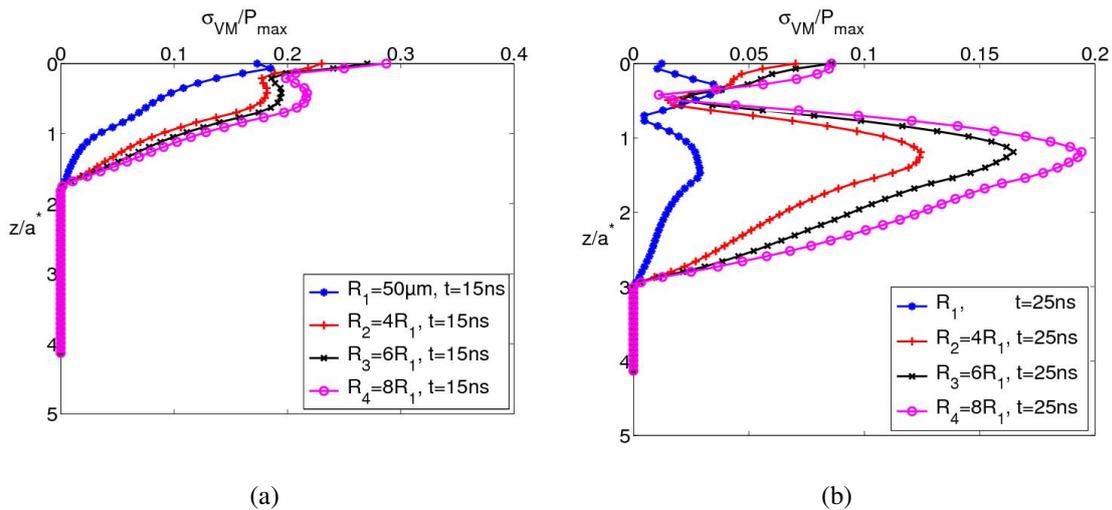


**FIGURE 4.12:** Étude de l'influence de la taille du spot : (a) profil temporel de la pression appliquée et (b) tailles de spots étudiées

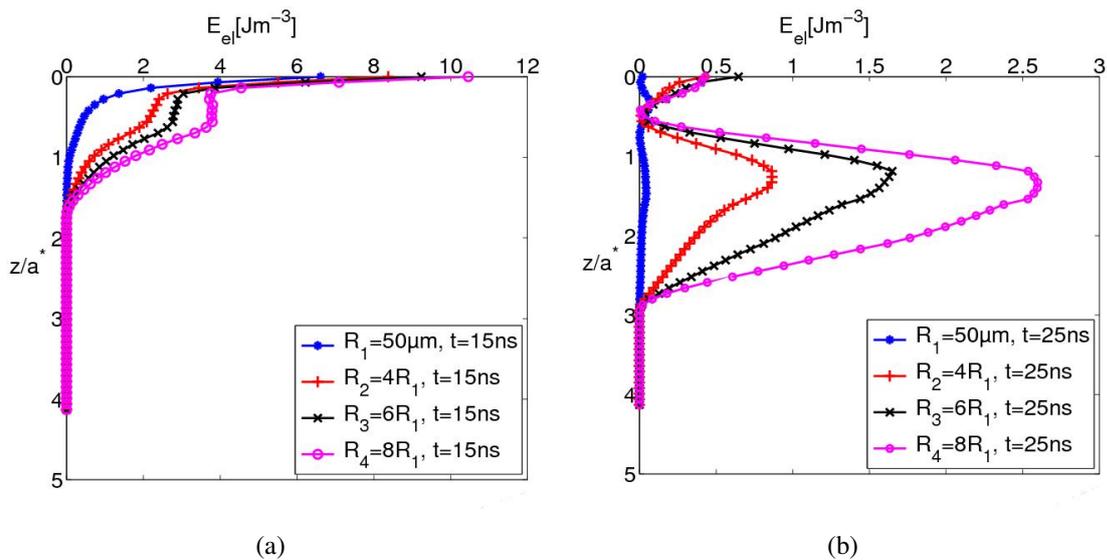
pour différents temps d'observation :  $t/t_o = 3/4$  voir FIG. 4.13(a), 4.14(a) et  $t/t_o = 5/4$  voir FIG. 4.13(b), 4.14(b).

Les contraintes sont visualisées en profondeur suivant la ligne issue du centre de l'impact ( $x = y = 0$ ) qui est normalisée par le rayon du plus petit spot  $R_1$ . Les contraintes de von Mises sont normalisées par la pression maximale. Sur ces figures, on observe l'influence non négligeable de la taille du spot sur les contraintes de von Mises en profondeur. La taille du spot augmente les contraintes maximale de von Mises en profondeur sans toutefois changer la profondeur de la zone déformée. Ceci paraît normal étant donné que les zones déformées dépendent uniquement du trajet des ondes de compression et non pas la taille du spot car la vitesse des ondes ne dépend que du matériau. Par contre, les contraintes maximales sont dépendent de l'énergie fournie pour déformer le matériau. Plus la zone impactée est grande, plus l'énergie fournie pour déformer le matériau est importante, par conséquent plus grandes sont les contraintes de von Mises. D'après la section 2.3 sur la propagation et l'atténuation des ondes élastiques, on peut conclure aussi que l'amplitude des ondes de choc élastiques s'atténue très rapidement pour les spot de petites tailles.

#### 4. Simulation d'un impact rapide par méthode semi-analytique sur un massif semi-infini élastique et isotrope



**FIGURE 4.13:** Influence de la taille du spot sur les contraintes de von Mises à différents temps. Les contraintes sont reproduites comme fonction de la profondeur au centre de l'impact : (a) à l'instant  $t/t_o = 3/4$  et (b) à l'instant  $t/t_o = 5/4$



**FIGURE 4.14:** Influence de la taille du spot sur les densités d'énergie de déformation élastique à différents temps. Les contraintes sont reproduites comme fonction de la profondeur au centre de l'impact : (a) à l'instant  $t/t_o = 3/4$  et (b) à l'instant  $t/t_o = 5/4$

### 3.2 Définition de la zone potentiellement plastique

Afin de poursuivre notre étude sur l'influence des paramètres liés à un impact rapide, nous introduisons ici la notion de *zone potentiellement plastique*.

Lorsque qu'un matériau est soumis à un impact rapide pouvant générer des contraintes dépas-

sant la limite élastique de ce dernier, il se forme des déformations plastiques dans le matériau. Nous définissons ainsi la zone potentiellement plastique comme étant la zone dans laquelle la contrainte équivalente de von Mises excède la limite élastique statique du matériau soumis sous choc à un instant quelconque du chargement. Elle est définie à un instant  $t$  par l'ensemble  $\Sigma(t)$  donné par l'équation EQ. 4.5.

$$\Sigma(t) = \left\{ (x, y, z) / \sigma_o(x, y, z, t) = \max \left[ \frac{\langle \sigma_{VM}(x, y, z, \tau) - \sigma_y \rangle}{\sigma_y}, \tau = 0 \dots t \right] \right\} \quad (4.5)$$

où  $\sigma_{VM}$  est la contrainte équivalente de von Mises,  $\sigma_y$  la limite statique du matériau impacté,  $\langle \cdot \rangle$  désigne les crochets de MacAuley définis par :  $\langle x \rangle = \frac{x + |x|}{2}$  et  $\sigma_o(x, y, z, t) \neq 0$  une grandeur sans unité pouvant donner une idée sur l'amplitude des déformations plastiques, plus elle est grande apparaitrons de grandes déformations plastiques au point concerné. En tout point du massif, ou elle n'est pas nulle, elle représente alors l'écart (normalisé par la limite élastique) entre la contrainte de von Mises maximale (durant la propagation des ondes de choc) et la limite élastique du matériau,

La zone potentiellement plastique ne donne pas une idée complète de la zone plastifiée car elle ne prends pas en compte les contraintes résiduelles et ou la loi de comportement du matériau. Son interprétation physique et mécanique consiste à donner une description eulérienne de l'évolution temporelle de la zone susceptible de contenir des déformations plastiques. Bien entendu, dans le cas des procédés réels prenant en compte les contraintes résiduelles, la zone potentiellement plastique pourra être plus réduite que la zone de déformation plastique.

Cette définition de la zone potentiellement plastique sera donc utilisée dans le reste de ce chapitre pour l'étude de l'influence de la distribution spatiale (forme du spot) et le profil temporel de la pression appliquée.

### 3.3 Influence de la forme du spot

Si la taille du spot ou du cratère de l'impact influe fortement sur les grandeurs mécaniques, il devient aussi intéressant d'étudier l'influence de la forme du spot. A notre connaissance, dans la littérature, aucune étude n'a été faite sur ce point. Telle est donc la question à laquelle nous répondrons dans ce paragraphe.

Trois types de distributions spatiales ont été choisies pour l'étude : une distribution gaussienne, une distribution cylindrique et une distribution parabolique. L'évolution temporelle de la pression demeure forme triangulaire de durée d'impulsion 20 ns et d'amplitude maximale 5 GPa atteinte à  $t = 10$  ns. La durée d'observation de l'évolution de la zone potentiellement plastique est limitée à  $t = 40$  ns. Le matériau impacté est toujours un acier avec pour limite élastique  $\sigma_y = 400$  MPa.

Le rayon de chaque distribution est choisi de telle sorte que toutes les distributions soient identiques de volume donc de densités d'énergie près et donnée par les équations EQ. 4.6-4.8.

$$V_{cyl} = \pi R^2 h \quad (4.6)$$

$$V_{gau} = \iint_{\Omega} h e^{-\frac{x^2+y^2}{3R^2}} dx dy \quad (4.7)$$

$$V_{par} = \iint_{\Omega} h \sqrt{1 - \frac{x^2+y^2}{R^2}} dx dy = \frac{\pi}{2} R^2 h \quad (4.8)$$

#### 4. Simulation d'un impact rapide par méthode semi-analytique sur un massif semi-infini élastique et isotrope

---

où  $h$  est la hauteur de chaque distribution égale à 1 dans notre cas et  $\Omega$  la surface du cratère issue de l'impact associée à la distribution.

Les résultats de l'étude en fin de durée d'observation c'est-à-dire après le passage de le passage de l'onde de choc sur la zone d'intérêt sont reportés sur la figure 4.15. Sur chacune des figures 4.15(a), 4.15(c), 4.15(e), les zones bleues correspondent donc aux zones où la contrainte équivalente de von Mises est en dessous de la limite élastique. Le reste étant la zone potentiellement plastique qui est illustré par l'écart entre la contrainte de von Mises maximale (durant toute la propagation des ondes de choc) et la limite élastique  $\sigma_y$ . L'écart illustré est normalisé par  $\sigma_y$ . Les axes sont normalisés par le rayon de la distribution gaussienne.

Pour la distribution cylindrique (voir FIG. 4.15(a)), on observe une zone potentiellement plastique pouvant s'élargir en profondeur sur une circonférence de rayon  $3 a^*$  avec une zone très sollicitée ( $\sigma_{VM} \gg \sigma_y$ ) couvrant une profondeur d'environ  $1.5 a^*$  depuis la surface et une circonférence pouvant faire le rayon de la distribution. De façon générale, on obtient une zone  $\Sigma(t)$  dont l'enveloppe à une forme quasi-cylindrique. Toutefois, le maximum de  $\sigma_o$  vaut  $\sigma_o \approx 11.2$  atteint à  $t \approx 29 ns$  donc  $9 ns$  après que la pression ai disparu complètement en surface du massif.

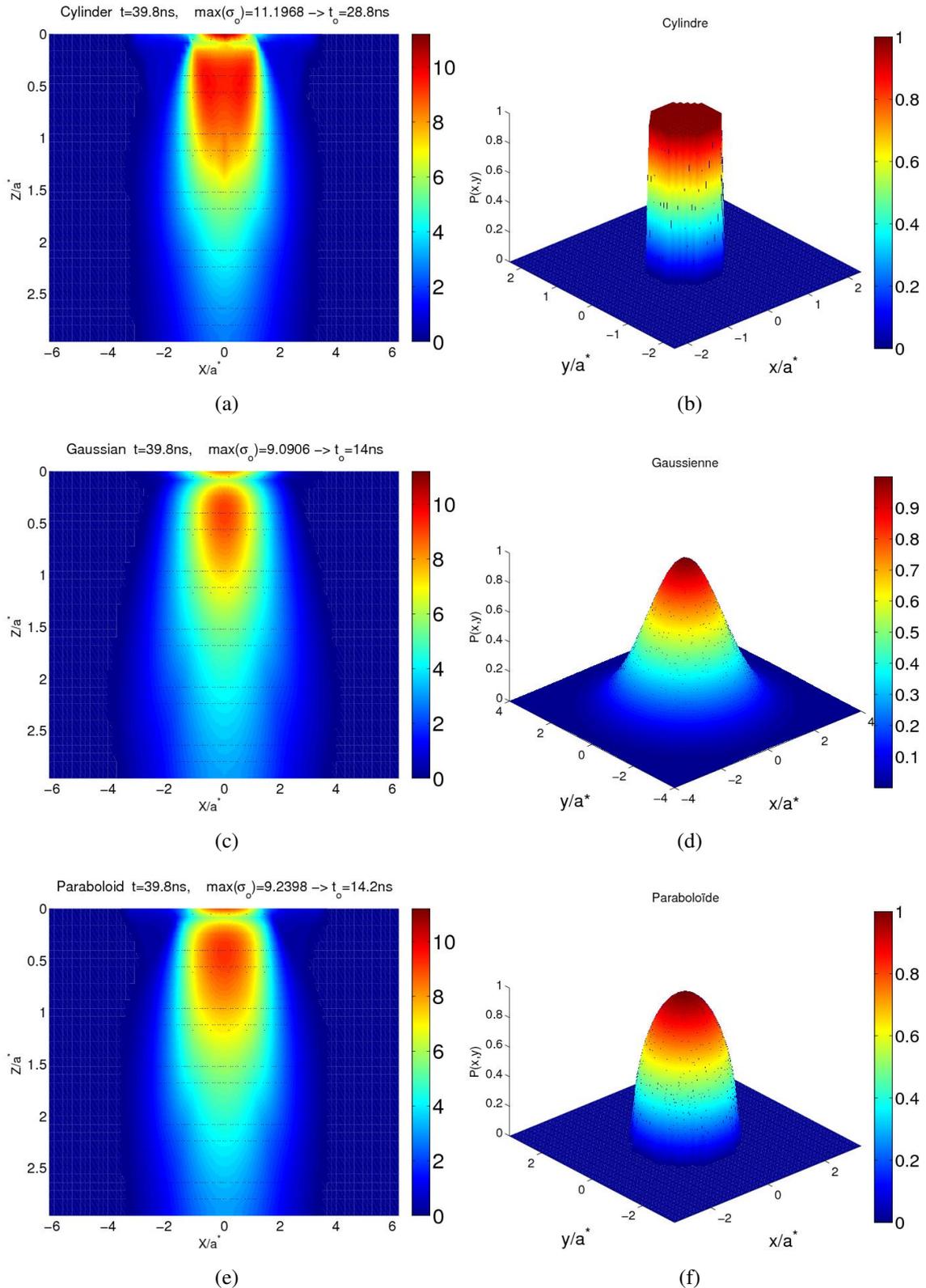
Pour une distribution gaussienne (voir FIG. 4.15(c)), on obtient une zone potentiellement plastique plus étalée en profondeur et de rayon  $4 a^*$ . Sa circonférence diminue au fur et à mesure qu'on s'approche de la surface. La zone très sollicitée est obtenue plus en profondeur comparée au cas d'une distribution cylindrique et sur une couche mince localisée près de la surface. Cette zone est très réduite devant celle issue de la distribution cylindrique. L'écart  $\sigma_o$  entre la contrainte de von Mises maximale (durant toute la propagation de l'onde de choc) et  $\sigma_y$  (normalisée par  $\sigma_y$ ) vaut  $\sigma_o \approx 9.1$  atteint à  $t \approx 14 ns$  donc durant les 4 premières nanoseconde lorsqu'on commence par décharger. Cette distribution induit de plus faibles déformations plastiques que à la distribution précédente.

Pour une distribution quasi-parabolique (voir FIG. 4.15(e)), on obtient une zone potentiellement plastique quasi-similaire à celle de la distribution cylindrique à la seule différence que la zone de grandes sollicitations est légèrement plus réduite que celle de la distribution cylindrique et nettement plus grande que celle de la distribution gaussienne. Toute fois la valeur maximale de  $\sigma_o$  est égale à  $\sigma_o \approx 9.2$  atteinte à  $t \approx 14.2 ns$  donc quasi-égale à celle de la distribution gaussienne.

En conclusion, une distribution spatiale de forme abrupte génère de plus grandes sollicitations sur des zones plus larges, ceci se justifie par le fait qu'une telle distribution permet de concentrer une grande partie de l'énergie de déformation dans la zone impactée et limite la détente latérale des ondes élastiques. L'énergie de déformation fournie dans la zone d'impact se diffuse donc dans le matériau de façon étroite. Par contre, une distribution gaussienne favorise une grande détente latérale des ondes élastique en profondeur. Ceci qui explique la grande forme latérale de  $\Sigma(t)$  obtenue en profondeur. Le redressement du sommet de la gaussienne favorise une localisation des grandes sollicitation dans la profondeur. Toutes ces observations se retrouvent sur la distribution quasi-parabolique dont la forme est l'intermédiaire d'une distribution gaussienne et d'une distribution cylindrique.

### 3.4 Influences de la pression appliquée et de la durée de l'impulsion

Ce paragraphe présente l'étude de l'influence de la forme temporelle de la pression appliquée, de la pression maximale appliquée et aussi de la durée d'impulsion.



**FIGURE 4.15:** Influence de la forme du spot issu d'un impact rapide. Illustration de la zone potentiellement plastique à la fin de la durée d'observation : (a), (c), (e) zone potentiellement plastique observée et (b), (d), (f) forme du spot appliqué.

## 4. Simulation d'un impact rapide par méthode semi-analytique sur un massif semi-infini élastique et isotrope

---

Dans une première partie, trois profils temporels différents de formes sont étudiés. Dans une seconde partie trois profils identiques de formes sont étudiés et en troisième partie, l'étude l'influence de la durée de l'impulsion est présentée. Dans tous les cas sauf la troisième partie d'étude, la durée de l'impulsion  $t_o$  de chaque profil est choisie de telle sorte que leurs énergies  $\int_0^{t_o} P(t)dt$  soient quasiment identiques.

Dans tout ce paragraphe, on considère une distribution gaussienne de rayon  $R = 50 \mu m$ , et le matériau impacté étant toujours un acier de limite élastique  $\sigma_y = 400 MPa$ .

### 3.4.1 Influence de la distribution temporelle de la pression à iso-énergie

Dans cette première partie, trois profils sont étudiés :

- un premier profil triangulaire de durée d'impulsion égale à  $20 ns$  et une pression maximale de  $5 GPa$  atteinte au temps  $t = 10 ns$  (voir figure FIG. 4.16(b)),
- un deuxième profil rectangulaire de durée d'impulsion égale à  $20 ns$  et une pression maximale de  $2.5 GPa$  constante au cours de l'impulsion (voir FIG. 4.16(d)),
- un troisième profil rectangulaire de durée d'impulsion égale à  $10 ns$  et une pression maximale de  $5 GPa$  constante au cours de l'impulsion (voir figure FIG. 4.16(f)),

La durée d'observation est limitée à  $t = 40 ns$  et la zone potentiellement plastique est obtenue en fin de la durée d'observation pour l'analyse.

Pour la première distribution, on observe une zone potentiellement plastique de forme quasi similaire à celle obtenue dans le paragraphe précédent et la zone de grandes sollicitations localisée en profondeur. Le maximum de  $\sigma_o$  est égal à  $\sigma_o \approx 8.69$  atteint à  $t \approx 14.4 ns$  donc après  $4.4 ns$  lorsqu'on commence à décharger en pression.

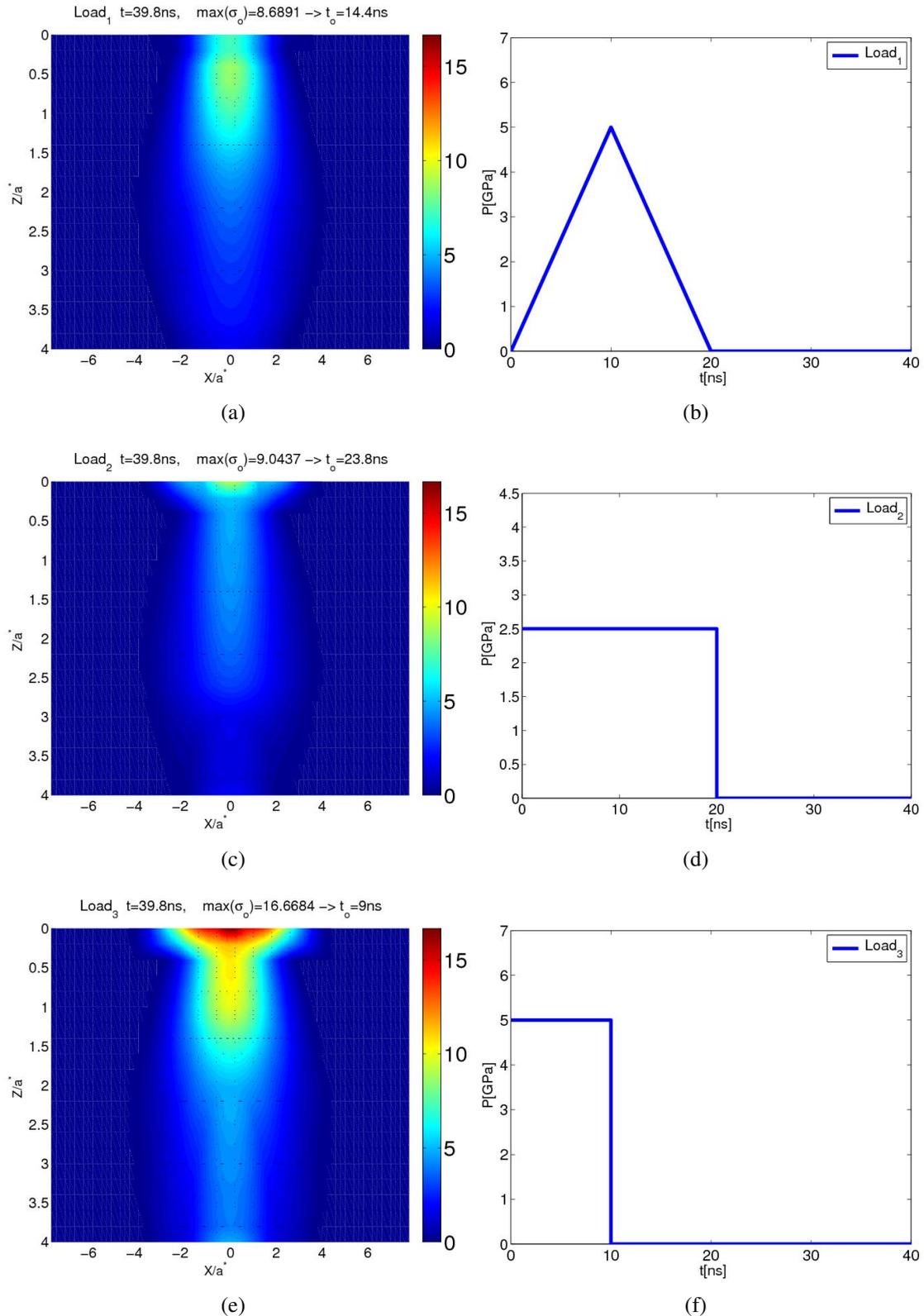
Pour le deuxième profil, on observe une zone potentiellement plastique quasiment similaire à celle de la première distribution. Mais la zone de grandes sollicitations est très réduite sur une épaisseur mince localisée près de la surface. Pour ce profil, la valeur maximale de  $\sigma_o$  vaut  $\sigma_o \approx 9$  et elle est atteinte à  $t \approx 24 ns$  donc  $4 ns$  après la décharge.

Avec le troisième profil, on obtient une grande zone de grandes sollicitations qui est plus importante que les deux précédentes. Toutefois la valeur maximale de  $\sigma_o$  obtenue vaut  $\sigma_o \approx 17$  et est atteinte à  $t \approx 9 ns$  donc juste avant la fin de l'impulsion du champ de pression.

Afin de cerner au mieux l'influence de la forme temporelle du champ de pression appliquée, une deuxième étude est réalisée.

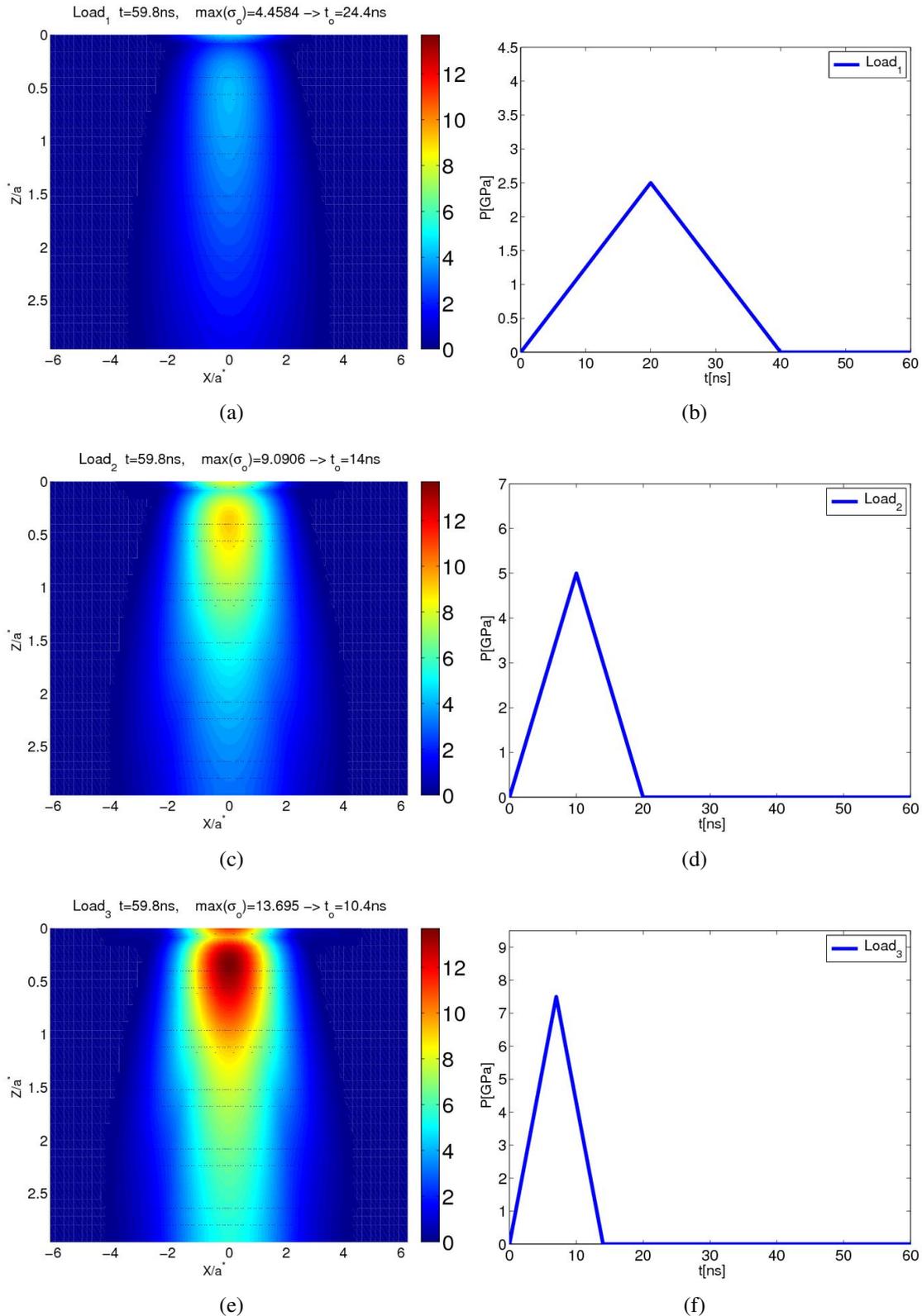
### 3.4.2 Influence de la durée d'impulsion à iso-énergie

Trois profils tous de forme triangulaire sont analysés dans cette seconde partie de durée d'impulsion respective  $20ns$  (voir FIG. 4.17(b)),  $10ns$  (voir FIG. 4.17(d)) et  $7ns$  (voir figure FIG. 4.17(f)). Les pressions maximales sont respectivement  $2.5 GPa$ ,  $5 GPa$  et  $7 GPa$ . Les résultats de cette étude sont reportés sur les figures FIG. 4.17(a), 4.17(c), 4.17(e). Les formes de ces zones sont identiques du fait d'une même distribution spatiale. Les deux derniers profils étant de courte durée d'impulsion et d'amplitude maximale plus grande, à  $t = 60 ns$  on observe déjà la



**FIGURE 4.16:** Influence du profil temporel du chargement à puissance égale : (a) zone potentiellement plastique issue d'un chargement triangulaire, (b)-(c) zone potentiellement plastique issue d'un chargement créneau

#### 4. Simulation d'un impact rapide par méthode semi-analytique sur un massif semi-infini élastique et isotrope



**FIGURE 4.17:** Influence du profil temporel de la pression appliquée, cas d'un profil triangulaire à densité de puissance égale : (a),(c),(e) zones potentiellement plastiques et (b),(d),(f) profils temporels correspondants

détente latérale des ondes qui agrandit de fait la zone potentiellement plastique. Par contre, avec le profil nommé  $Load_1$ , la durée de l'impulsion étant relativement longue, la détente latérale des ondes se produit très peu à cause du faible amplitude de l'onde choc.

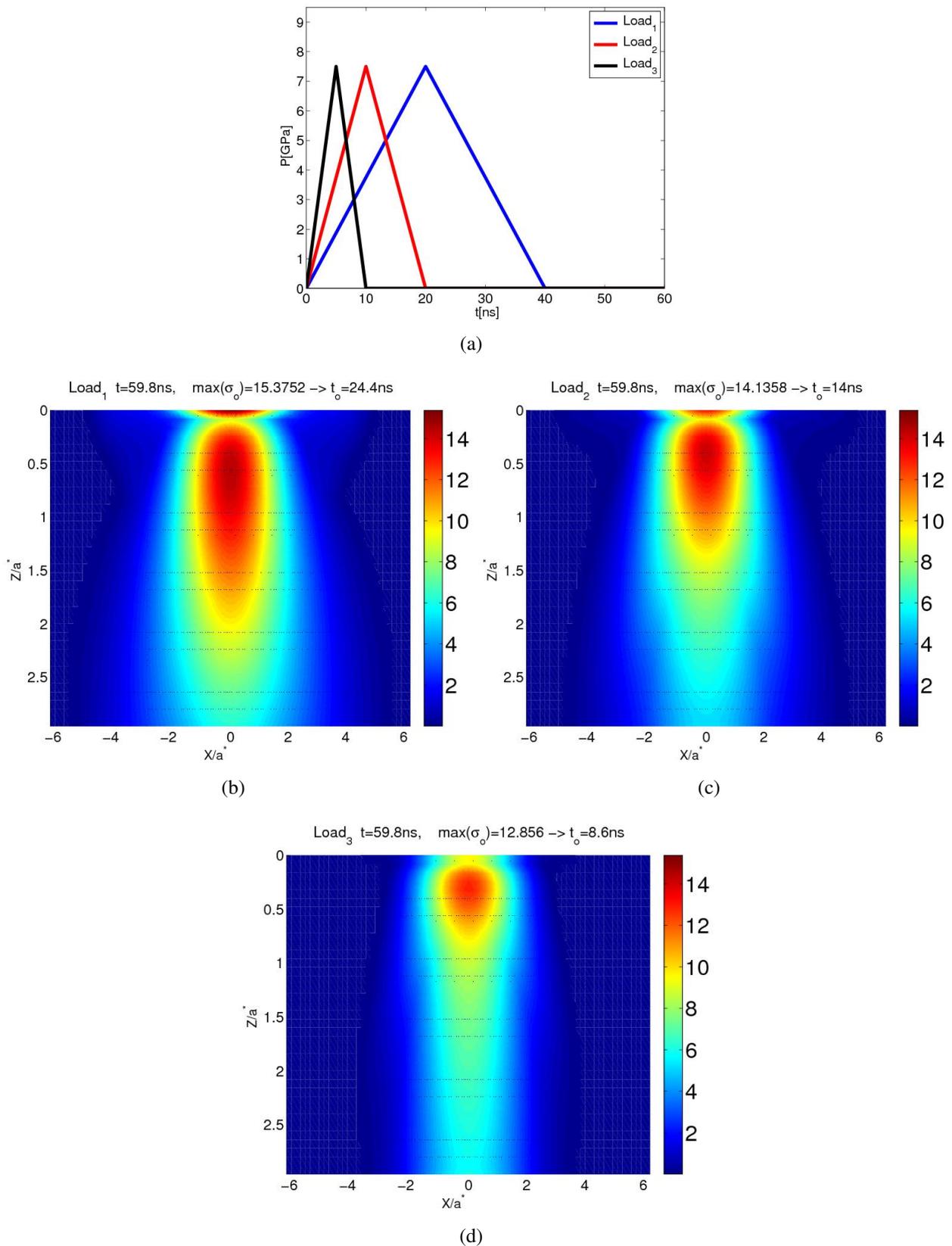
Ces deux études ont montré l'influence forte du choix des profils temporel. A l'issue de ces études, nous remettons en cause l'influence de la vitesse de chargement c'est à dire la pente  $\frac{\partial P}{\partial t}$  lorsque  $P$  est croissante. A densité de puissance égale, les impulsions de grandes vitesses de chargement génèrent de grandes déformations plastiques et une importante zone potentiellement plastifiable. Par conséquent, la pression maximale influe aussi sur la zone potentiellement plastique.

### 3.4.3 Influence de la durée d'impulsion à pression maximale constante

Dans cette partie, nous étudions l'influence de la durée d'impulsion à pression maximale constante. Ainsi, trois profils triangulaires sont considérés de pression maximale identiques et égale à  $7 \text{ GPa}$ . La première impulsion considérée est de durée  $40 \text{ ns}$ , la seconde de durée d'impulsion égale à  $20 \text{ ns}$  et la troisième de durée d'impulsion égale à  $10 \text{ ns}$ . Les résultats de cette étude sont illustrés sur les figures 4.18. Dans ces conditions de traitement, la plus grande zone potentiellement plastique est celle donnée par le profil le plus (plus longue durée d'impulsion). Ce qui est logique, car les amplitudes des ondes de choc s'atténuent très rapidement avec les impulsions de courtes durées pendant que celles de longues durées d'impulsion demeurent encore énergétiques. Dans le cas des impulsions de  $40 \text{ ns}$  et  $20 \text{ ns}$ , les zones de grandes sollicitations se localisent en sous couche sur une profondeur pouvant atteindre  $\approx 2a^*$  pour  $40 \text{ ns}$  et  $\approx 1.5a^*$  pour  $20 \text{ ns}$ . Toutefois l'écart maximale  $\sigma_o$  varie très peu pour les trois profils :  $\approx 15.57$  pour  $40 \text{ ns}$ ,  $\approx 14$  pour  $20 \text{ ns}$  et  $\approx 13$  pour  $10 \text{ ns}$ .

La différence résultant de ces trois profils réside dans la densité d'énergie fournie par chacun de ces trois profils  $\int_0^{t_o} P(t) dt$  où  $t_o$  est la durée de l'impulsion. A pression maximale constante, plus la densité de puissance est élevée, plus l'énergie fournie pour déformer le matériau est importante et par conséquent de grande zone potentiellement plastique sont observées.

#### 4. Simulation d'un impact rapide par méthode semi-analytique sur un massif semi-infini élastique et isotrope



**FIGURE 4.18:** Influence de la durée de l'impulsion : (a) profils temporels de la pression appliquée et (b),(c),(d) présentation de la zone potentiellement plastique prise à  $t = 60 \text{ ns}$

## 4 Conclusion

Dans ce chapitre, un modèle d'impact rapide semi-analytique sur un massif semi-infini, élastique et isotrope a été réalisé. Le modèle a été validé à d d'une bu fait bonne corrélation entre les résultats du dit modèle et le modèle éléments finis (Abaqus) réalisé. Ensuite, la simulation d'un impact rapide sur un massif semi-infini élastique ayant les mêmes propriétés matériau que l'acier a permis d'étudier la physique de la propagation des ondes au cours d'un choc, ainsi que la réponse et le comportement du matériau soumis à l'impact. Enfin, une étude paramétrique a été réalisée pour identifier au 1<sup>er</sup> ordre les paramètres influents dans le procédés de choc.

Dans ce chapitre, les points suivants ont été analysés :

☞ propagation des ondes dans le matériau :

- une détente latérale des ondes se produit après application de la pression à la surface,
- lors du chargement et du déchargement, la zone impacté reste toujours en compression et aucune zone de traction n'a été observée dans la zone d'impact,
- au cours de la relaxation, tandis que l'onde de choc se propage dans le matériau créant des zones de compression dans le front d'onde, des zones de traction apparaissent derrière le front d'onde. En surface, dans la zone impactée, des zones de traction apparaissent depuis le bord de la zone déformée pour converger vers le centre. Toutefois une zone autour du centre d'impact reste assez durablement en compression témoignant ainsi de l'importance des effets d'inertie.
- les contraintes maximales sont toujours obtenues au droit de l'impact et quelque fois plus amplifiées dans la profondeur. Le temps auquel ces contraintes maximales sont atteintes se situe au cours de la décharge.

☞ Influence de la vitesse caractéristique

- à vitesse caractéristique constante, les propriétés matériaux (module de Young, masse volumique, coefficient de Poisson) ont une influence négligeable sur le niveau de contraintes, toutefois leurs influence sur l'énergie de déformation est très importante,
- la vitesse caractéristique influe énormément sur les contraintes et par conséquent sur la densité d'énergie de déformation élastique (d'après le premier point). Les contraintes en profondeur croissent avec la vitesse caractéristique lors du chargement, mais le processus reste complexe dans le sens inverse.

☞ Influence de la taille du spot de l'impact

- la taille du spot influe très peu sur les niveaux de contraintes au cours du chargement  $\left(\frac{\partial P}{\partial t} \geq 0\right)$ , cependant influent sur la répartition des contraintes dans le massif.
- l'influence de la taille du spot devient non négligeable au cours de la décharge  $\left(\frac{\partial P}{\partial t} \leq 0\right)$ . La taille du spot influe sur la valeur maximale des contraintes en profondeur sans toutefois changer la profondeur à laquelle ce maximum est atteint et la profondeur de la zone déformée.

#### 4. Simulation d'un impact rapide par méthode semi-analytique sur un massif semi-infini élastique et isotrope

---

##### ➤ influence de la pression appliquée

- l'influence de la distribution spatiale du spot, à pression maximale et durée d'impulsion identiques, peut être négligé au premier ordre. Cela change très peu la zone potentiellement plastique
- l'influence de la distribution temporelle quant à elle n'est pas du tout négligeable. A densité de puissance égale, un profil de grande vitesse de chargement à pression maximale élevée est susceptible de générer de grandes déformations plastiques. A pression maximale identique (densité de puissance différentes), les profils de longue durée d'impulsion sont susceptibles de générer de grandes zones de déformation plastique.

## Chapitre 5

# Modélisation de l'expansion dynamique des inclusions dans un massif semi-infini : cas des inclusions sphériques

*Ce chapitre se place dans le cadre des développements de solutions analytiques élémentaires pour le calcul des contraintes résiduelles en dynamique engendrées par la présence d'un volume de déformations inélastique dans un massif semi-infini d'amplitude variable au cours du temps. Le volume de déformations inélastique est considéré comme une inclusion dans le massif. L'objectif de ce chapitre consiste à comprendre le comportement des inclusions dans un massif infini et semi-infini. Ainsi, dans un premier temps, la réponse élastodynamique d'un massif infini en présence d'une inclusion sphérique munit d'une déformation inélastique d'amplitude constant au cours du temps sera présentée. Dans un second temps, un modèle semi-analytique sera proposée pour simuler la réponse élastodynamique d'un massif semi-infini en contenant une inclusion d'amplitude constant au cours du temps. Un modèle éléments finis est proposé pour valider le modèles semi-infini, puis un cas de simulation de plusieurs inclusions sphériques est étudiée et analysé en comparaisons avec les résultats d'une seule inclusions.*

## Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>135</b>
<b>2</b>	<b>Expansion dynamique d'une inclusion dans un massif infini</b>	<b>135</b>
<b>3</b>	<b>Champ de contraintes dans un massif infini</b>	<b>138</b>
3.1	Tenseur D'Eshelby	138
3.2	Expression du tenseur des contraintes	139
3.3	Résultats numériques et Physique liée à l'expansion de l'inclusion	143
<b>4</b>	<b>Simulation de l'expansion dynamique d'une inclusion sphérique dans un massif semi-infini</b>	<b>146</b>
4.1	Cas d'une inclusion dans le massif	146
4.2	Implémentation numérique	149
4.3	Validation du modèle et analyse des résultats	150
<b>5</b>	<b>Simulation de l'expansion dynamique d'une multitude d'inclusions</b>	<b>156</b>
5.1	En dynamique	156
5.2	En statique	157
<b>6</b>	<b>Conclusions</b>	<b>160</b>

---

# 1 Introduction

L'un des points forts de la méthode semi-analytique est le calcul des contraintes résiduelles engendrées par la présence des déformations plastiques comme reporté sur l'algorithme général illustre sur la figure 2.2. Les contraintes résiduelles dans le massif sont déterminées de manière similaire aux calculs des contraintes élastiques. Ainsi, le point commun entre ces deux méthodes (calcul des contraintes résiduelles et élastiques) repose essentiellement sur l'implémentation des coefficients d'influence ou des fonctions de Green. Néanmoins, elles se différencient par la nature de la source qui engendre les contraintes calculées. En effet, les contraintes résiduelles ici sont générées par les déformations plastiques (source en dimension 3) tandis que les contraintes élastiques sont engendrées par la pression appliquée (source en dimension 2). Par la méthode semi-analytique, le calcul des contraintes résiduelles est basé sur le modèle d'inclusion cubique équivalent au sens d'Eshelby proposé par Chiu [CHI 77] et Jacq [JAC 02b]. Ainsi, les coefficients d'influence permettant de calculer les contraintes résiduelles ont été développés sous forme intégrale par Chiu. Les développements analytiques sont obtenues en considérant le problème d'inclusion dans le formalisme statique c'est-à-dire en négligeant les effets d'inertie et dynamique dans les formulations analytiques.

Dans les chapitres 3, 4 nous avons mis en place le modèle semi-analytique en dynamique pour le calcul des contraintes élastiques engendrées dans un massif semi-infini par une pression appliquée sur sa surface. A présent, l'enrichissement du modèle nécessite le couplage de ce dernier à un solveur plastique. Cependant, bien que le solveur plastique existe déjà dans le code ISAAC (FIG. 2.2), l'absence des effets d'inertie dans le calcul des coefficients d'influence et la propagation des ondes notamment les ondes plastiques mises en jeu dans les procédés d'impacts rapides ou les procédés du type choc laser nous laisse perplexe sur l'utilisation des solutions de Chiu. Ainsi pour répondre à nos attentes et lever le doute sur ce choix, il devient primordial de mettre en place un modèle de calcul des contraintes résiduelles pouvant tenir compte des effets d'inertie et donc de la propagation des ondes dans le massif.

Dans ce chapitre, la réponse élastodynamique d'un massif semi-infini qui se transforme soudainement sous l'action d'une déformation inélastique est étudiée. Cette déformation peut provenir par exemple d'une transformation de phase, d'une déformation plastique ou même d'une déformation thermique sans pour autant préciser l'origine de la source de déformation. Ici, nous nous limiterons aux cas des inclusions sphériques car les solutions analytiques pour une inclusion cubique en dynamique étant trop complexe à développer. Dans un premier temps, nous présenterons le calcul de champ de contraintes dans un massif infini et dans un second temps, nous nous intéresserons à la simulation de la réponse dynamique d'un massif semi-infini en présence d'une ou plusieurs inclusions sphériques.

## 2 Expansion dynamique d'une inclusion dans un massif infini

En se basant sur les travaux de Eshelby [ESH 61], Willis [WIL 65], et Mikata [MIK 92], nous décrirons brièvement les formulations sur l'expansion dynamique d'une inclusion dans un massif infini élastique et isotrope, puis l'expression des champs de déplacements exprimée avec les fonctions de Green.

Considérons un massif élastique  $\Omega$ , de bords  $\partial\Omega$ , de masse volumique  $\rho$ , de module de Young

## 5. Modélisation de l'expansion dynamique des inclusions dans un massif semi-infini : cas des inclusions sphériques

$E$  et de coefficient de Poisson  $\nu$ . On suppose que le massif contient une inclusion définie par une déformation inélastique (eigenstrain)  $\underline{\underline{\epsilon}}^*(x, t) = \epsilon_{ij}^*(x, t)$ . À tout instant  $t$ , on définit par  $V(t)$  le volume occupé par l'inclusion et par  $\partial V(t)$  sa frontière ou son interface extérieure. Si on désigne par  $u_i(x, t)$  le déplacement dans la direction  $i$  en tout point  $x$  du massif, le tenseur de déformation totale définit est donné par l'expression EQ. 5.1. Les contraintes compatibles  $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{kl}$  associées aux déformations élastiques sont alors définies par l'expression EQ. 5.2 et vérifient l'équation d'équilibre dynamique du système EQ. 5.3 dans laquelle on suppose négligeables les forces de volume.

$$\epsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) \quad (5.1)$$

$$\sigma_{kl} = C_{klmn} (\epsilon_{mn} - \epsilon_{mn}^*) \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} = \rho \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} \quad (5.3)$$

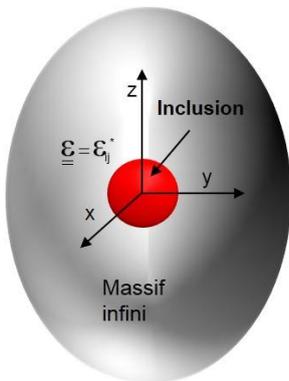
$$C_{klmn} = \lambda \delta_{kl} \delta_{mn} + \mu (\delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{kn} \delta_{lm}) \quad (5.4)$$

où  $C_{klmn}$  est le tenseur d'élasticité linéaire et  $i, j, k, l, m, n = 1, 2, 3$ .

En introduisant le nouveau tenseur  $\tau_{kl} = C_{klmn} \epsilon_{mn}$ , l'expression EQ. 5.2 s'écrit simplement :

$$\sigma_{kl} = \tau_{kl} - C_{klmn} \epsilon_{mn}^* \quad (5.5)$$

En substituant cette dernière expression EQ. 5.5 dans l'équation d'équilibre dynamique du système, on retrouve le problème de l'expansion dynamique d'une inclusion dans le domaine  $\Omega$  proposé par Willis [WIL 65].



$$\frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_k} - \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = \frac{\partial \epsilon_{lm}^*}{\partial x_k} C_{jklm} \quad \text{dans } \Omega \quad (5.6)$$

$$\tau_{jk} n_k = C_{jklm} \epsilon_{lm}^* n_k \quad \text{sur } \partial \Omega \quad (5.7)$$

soit

$$C_{klmn} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_m \partial x_n} - \rho \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = C_{klmn} \frac{\partial \epsilon_{lm}^*}{\partial x_n} \quad \text{dans } \Omega \quad (5.8)$$

$$C_{klmn} \frac{\partial u_m}{\partial x_n} n_l = C_{klmn} \epsilon_{mn}^* n_l \quad \text{sur } \partial \Omega \quad (5.9)$$

## Interprétation physique du problème

Des expressions EQ. 5.8 et 5.9, l'interprétation physique du problème prend la forme suivante : le déplacement total produit par la présence d'une déformation inélastique  $\epsilon_{ij}^*$  dans le domaine  $\Omega$  est égal au déplacement total que produirait une force volumique de composante  $f_k = -C_{klmn} \frac{\partial \epsilon_{lm}^*}{\partial x_n}$  dans le même domaine et les forces de traction en surface  $F_k = C_{klmn} \epsilon_{mn}^* n_l$ . Cependant les contraintes engendrées dans le massif ne sont pas celles définies par le tenseur  $\tau_{ij}$  mais plutôt par  $\sigma_{ij} = \tau_{ij} - C_{ijkl} \epsilon_{kl}^*$ .

La solution du problème défini par les expressions EQ. 5.8, 5.9 a été proposée par Willis [WIL 65] et s'exprime à l'aide de la fonction de Green dynamique  $G_{ij}$ .

$$u_i(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{\partial\Omega} G_{ij}(x - x', t - \tau) C_{jklm} \epsilon_{lm}^*(x', \tau) n_k(x') ds - \quad (5.10)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{\Omega} G_{ij}(x - x', t - \tau) C_{jklm} \epsilon_{lm,k}^*(x', \tau) d\Omega$$

La fonction de Green dynamique  $G_{ij}(x - x', t - \tau)$  peut être vue physiquement comme la solution en déplacement dans la direction  $x'_j$  produite au point  $(x', \tau)$  par une force concentrique (impulsion de Dirac dans la suite) appliquée au point  $(x, t)$  du massif.

Par application du théorème de Gauss, l'expression EQ. 5.10 se réduit à EQ. 5.11.

$$u_i(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{\Omega} C_{jklm} \epsilon_{lm}^*(x', \tau) G_{ij,k}(x - x', t - \tau) d\Omega \quad (5.11)$$

L'eigenstrain étant non nulle dans l'inclusion et nulle partout ailleurs, et en supposant de plus qu'il ne dépend pas de la variable  $x$ , par application du théorème de Gauss à nouveau, on montre que la solution en déplacement due à l'expansion d'une inclusion dans un massif infini s'exprime sous la forme donnée par l'expression EQ. 5.12

$$u_i(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{\partial V(t)} G_{ij}(x - x', t - \tau) C_{jklm} \epsilon_{lm}^*(x', \tau) n_k(x') ds \quad (5.12)$$

où la fonction de Green dynamique est donnée par l'expression EQ. 5.13 (obtenue par application d'une force volumique de type Dirac  $g_j = \delta_{ij} \delta(x' - x) \delta(\tau - t)$ ).

$$G_{ij}(\bar{r}, t) = \frac{1}{4\pi\rho} \frac{t}{r^2} \left[ \frac{3r_k r_m}{r^3} - \frac{\delta_{km}}{r} \right] H\left(t - \frac{r}{C_1}\right) H\left(\frac{r}{C_2} - t\right) + \quad (5.13)$$

$$\frac{r_k r_m}{4\pi\rho r^3} \left[ \frac{\delta\left(t - \frac{r}{C_1}\right)}{C_1^2} - \frac{\delta\left(t - \frac{r}{C_2}\right)}{C_2^2} \right] +$$

$$\frac{1}{4\pi\rho} \frac{\delta_{lm} \delta\left(t - \frac{r}{C_2}\right)}{C_2^2}$$

## 5. Modélisation de l'expansion dynamique des inclusions dans un massif semi-infini : cas des inclusions sphériques

avec  $r = \|\bar{r}\|$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  les composantes de  $\bar{r}$ ,  $t$  la variable temporelle,  $C_1$  et  $C_2$  les vitesses des ondes de compression et de cisaillement respectivement définies dans le chapitre 3.

La réponse dynamique d'un massif infini suite à l'expansion isotrope d'une inclusion sphérique de rayon  $a$  en dynamique transitoire, donnée par la déformation inélastique  $\varepsilon_{ij}^*(x, t) = \delta_{ij}H(t)$  dans l'inclusion et 0 partout ailleurs, a donc été présentée par Willis. Plus tard, Mikata [MIK 92] proposa une solution plus générale du champ de déplacement produit par la présence d'une inclusion sphérique dont l'évolution temporelle de l'eigenstrain est d'une forme quelconque dans le massif infini. Il suppose que la forme de l'eigenstrain peut s'exprimer sous la forme d'une fonction à variables séparées, définie par l'expression EQ. 5.14.

$$\varepsilon_{ij}(x, t) = \begin{cases} \varepsilon_{ij}^* f(t) & \text{si } \|x\| \leq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.14)$$

avec  $\varepsilon_{ij}^*$  une déformation inélastique constante et uniforme dans la sphère.

En posant  $v = t - \tau$ , le champ de déplacement défini par l'expression EQ. 5.12 s'exprime comme suit :

$$u_i(x, t) = C_{mnkl} \varepsilon_{kl}^* \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) E_{imn}(x, v) dv \quad (5.15)$$

Les expressions des fonctions  $E_{imn}$  étant longues et de formes très complexes, nous nous abstenons donc de les reproduire dans ce manuscrit. Pour plus d'information, le lecteur peut se référer aux travaux de Mikata [MIK 92].

Dans le cas d'une inclusion sphérique qui **s'expand soudainement**, la fonction  $f(t) = H(t)$  avec  $H$  la fonction de Heaviside (cf FIG. 3.1) et les déplacements définis par l'expression EQ. 5.16 s'écrivent tout simplement comme suit :

$$u_i(x, t) = C_{mnkl} \varepsilon_{kl}^* J_{imn}(x, t) \quad (5.16)$$

où les fonctions  $J_{imn}(x, t)$  sont définies en ANNEXE B.

Dans la suite de ce chapitre, nous proposons le calcul des contraintes dans un massif infini dues à l'expansion dynamique d'une inclusion sphérique transitoire. Enfin, une simulation de ce type d'expansion sera proposée dans le cas d'un massif semi-infini.

## 3 Champ de contraintes dans un massif infini

### 3.1 Tenseur D'Eshelby

L'expression EQ. 5.16 donne le champ de déplacements dû à la présence d'une inclusion sphérique dans un massif infini. Ici le cas de l'inclusion qui se dilate soudainement est considéré et que sa déformation inélastique ou son eigenstrain reste d'amplitude constante au cours du temps.

L'inclusion en se dilatant dans le massif génère donc des ondes qui se propagent aussi bien à l'intérieur de l'inclusion qu'à l'extérieur de celle-ci. L'onde de compression, en se propageant, crée des déformations en tout point ayant vu son passage. Ainsi, le tenseur des déformations associé au passage des ondes en un point du massif peut se mettre sous la forme :

$$\varepsilon_{ij}(x, t) = T_{ijkl} \varepsilon_{kl}^* \quad (5.17)$$

avec

$$T_{ijkl} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial J_{imn}}{\partial x_j} + \frac{\partial J_{jmn}}{\partial x_i} \right] C_{mnkl} \quad (5.18)$$

### Propriétés du tenseur $T_{ijkl}$

En adoptant la convention d'Einstein et en se servant des propriétés de symétrie que vérifie le tenseur d'élasticité  $C_{ijkl}$ , le tenseur  $T_{ijkl}$  tel que défini, vérifie les propriétés suivantes :

$$2 T_{ijkl} = [J_{imnj} + J_{jmni}] C_{mnkl} = [J_{imnj} + J_{jmni}] C_{mnlk} = 2 T_{ijlk} \quad (5.19)$$

$$2 T_{ijkl} = [J_{imnj} + J_{jmni}] C_{mnkl} = [J_{jmni} + J_{imnj}] C_{mnlk} = 2 T_{jilk} \quad (5.20)$$

$$2 T_{ijkl} = [J_{imnj} + J_{jmni}] C_{mnkl} \neq [J_{imnk} + J_{kmni}] C_{mnjl} = 2 T_{ikjl} \quad (5.21)$$

$$2 T_{ijkl} = [J_{imnj} + J_{jmni}] C_{mnkl} \neq [J_{lmnk} + J_{kmnl}] C_{mni j} = 2 T_{lkji} \quad (5.22)$$

pour  $i, j, k, l$  fixés et  $J_{imnj}$  défini par  $J_{imnj} = \frac{\partial J_{imn}}{\partial x_j}$ .

Par conséquent, le tenseur  $T_{ijkl}$  vérifie donc la symétrie mineure en tout point du massif.

D'autre part, pour  $t \geq \frac{1}{C_2}(a+r)$ , on montre facilement après quelques simplifications de l'expression EQ. B.6 définie en ANNEXE B que cette dernière est équivalente à l'expression EQ. 5.23 en tout point situé à l'intérieur de l'inclusion.

$$J_{imn}(x, t) = \frac{1}{30\mu} \left[ 10 x_n \delta_{im} - \frac{r}{1-\nu} A_{imn} \right] \quad \text{si } r \leq a \quad (5.23)$$

$$r = \|x\| \quad (5.24)$$

En substituant cette dernière équation dans l'expression du tenseur  $T_{ijkl}$ , on montre après regroupement de termes que

$$T_{ijkl} = \frac{5\nu - 1}{15(1-\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{4 - 5\nu}{15(1-\nu)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (5.25)$$

L'expression EQ. 5.25 associée aux propriétés données par les expressions EQ. 5.19 à 5.22 montre que le tenseur  $T_{ijkl}$  est le tenseur d'Eshelby [TOS 87] lorsque le temps  $t$  tend vers l'infini.

## 3.2 Expression du tenseur des contraintes

D'après l'interprétation physique donnée à la résolution du problème d'inclusion dynamique, les contraintes engendrées par la présence d'une inclusion sphérique transitoire dans le massif infini sont définies par la relation :

$$\sigma_{ij} = \tau_{ij} - C_{ijkl} \epsilon_{kl}^* = C_{ijmn} T_{mnkl} \epsilon_{kl}^* - C_{ijkl} \epsilon_{kl}^* = C_{ijmn} [T_{mnkl} - \mathbb{I}_{mnkl} H(r-a)] \epsilon_{kl}^* \quad (5.26)$$

## 5. Modélisation de l'expansion dynamique des inclusions dans un massif semi-infini : cas des inclusions sphériques

---

avec  $\mathbb{I}_{mnl}$  le tenseur identité d'ordre 4 défini par :

$$\mathbb{I}_{mnl} = \frac{1}{2} [\delta_{mk}\delta_{nl} + \delta_{nk}\delta_{lm}] \quad (5.27)$$

Nous introduisons un nouveau tenseur d'ordre 4  $\underline{\underline{S}} = S_{ijkl}$  défini par :

$$S_{ijkl} = T_{mnl} - \mathbb{I}_{mnl}H(r-a) \quad (5.28)$$

Et les contraintes donnée par :

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn}S_{mnl}\epsilon_{kl}^* \quad (5.29)$$

Ainsi le tenseur  $\underline{\underline{S}}$  vérifie la symétrie mineure définie par les expressions EQ. 5.19-5.22. Cette symétrie offre donc un avantage dans l'implémentation numérique de ce tenseur. En effet, au lieu d'implémenter 86 composantes de celui ci, la connaissance de 36 composantes seulement suffit pour déterminer tout le tenseur.

### Détermination des composantes du tenseur $\underline{\underline{S}}$

Par soucis de simplicité, nous posons ici :

$$I_{ijkl} = \mathbb{I}_{ijkl}H(a-r) \quad (5.30)$$

Pour déterminer le tenseur  $\underline{\underline{S}}$ , nous avons déterminé d'abord les expressions des fonctions  $J_{imnj}$ . Ces fonctions étant de formes complexes et de taille volumineuse, nous avons jugé bon de ne pas les élucider dans ce chapitre, plutôt les reporter en ANNEXE B.

Les composantes du tenseur sont élucider ci-dessous après simplification et regroupement des termes.

$$\kappa = \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (5.31)$$

$$\chi = \frac{E}{4(1+\nu)} \quad (5.32)$$

$$S_{1111} = 4\chi J_{1111} + 2\kappa [J_{1111} + J_{1221} + J_{1331}] - I_{1111} \quad (5.33)$$

$$S_{2222} = 4\chi J_{2222} + 2\kappa [J_{2112} + J_{2222} + J_{2332}] - I_{2222} \quad (5.34)$$

$$S_{3333} = 4\chi J_{3333} + 2\kappa [J_{3113} + J_{3223} + J_{3333}] - I_{3333} \quad (5.35)$$

$$S_{1122} = 4\chi J_{1221} + 2\kappa [J_{1111} + J_{1221} + J_{1331}] - I_{1122} \quad (5.36)$$

$$S_{1133} = 4\chi J_{1331} + 2\kappa [J_{3113} + J_{3223} + J_{3333}] - I_{1133} \quad (5.37)$$

$$S_{2211} = 4\chi J_{2112} + 2\kappa [J_{2112} + J_{2222} + J_{2332}] - I_{2211} \quad (5.38)$$

$$S_{2233} = 4\chi J_{2332} + 2\kappa [J_{2112} + J_{2222} + J_{2332}] - I_{2233} \quad (5.39)$$

$$S_{3311} = 4\chi J_{3113} + 2\kappa [J_{3113} + J_{3223} + J_{3333}] - I_{3311} \quad (5.40)$$

$$S_{3322} = 4\chi J_{3223} + 2\kappa [J_{3113} + J_{3223} + J_{3333}] - I_{3322} \quad (5.41)$$

$$S_{1112} = 2\chi [J_{1121} + J_{1211}] - I_{1112} \quad (5.42)$$

$$S_{1113} = 2\chi [J_{1131} + J_{1311}] - I_{1113} \quad (5.43)$$

$$S_{1123} = 2\chi [J_{1231} + J_{1321}] - I_{1123} \quad (5.44)$$

$$S_{2212} = 2\chi [J_{2122} + J_{2212}] - I_{2212} \quad (5.45)$$

$$S_{2213} = 2\chi [J_{2132} + J_{2312}] - I_{2213} \quad (5.46)$$

$$S_{2223} = 2\chi [J_{2232} + J_{2322}] - I_{2223} \quad (5.47)$$

$$S_{3312} = 2\chi [J_{3123} + J_{3213}] - I_{3312} \quad (5.48)$$

$$S_{3313} = 2\chi [J_{3133} + J_{3313}] - I_{3313} \quad (5.49)$$

$$S_{3323} = 2\chi [J_{3233} + J_{3323}] - I_{3323} \quad (5.50)$$

$$S_{1212} = \chi [J_{1122} + J_{2121} + J_{1212} + J_{2211}] - I_{1212} \quad (5.51)$$

$$S_{1223} = \chi [J_{1232} + J_{2231} + J_{1322} + J_{2321}] - I_{1223} \quad (5.52)$$

$$S_{1213} = \chi [J_{1132} + J_{2131} + J_{1312} + J_{2311}] - I_{1213} \quad (5.53)$$

$$S_{1312} = \chi [J_{1123} + J_{3121} + J_{1113} + J_{3211}] - I_{1312} \quad (5.54)$$

$$S_{1323} = \chi [J_{1233} + J_{3231} + J_{1323} + J_{3321}] - I_{1323} \quad (5.55)$$

5. Modélisation de l'expansion dynamique des inclusions dans un massif semi-infini : cas des inclusions sphériques

---

$$S_{1313} = \chi [J_{1133} + J_{3131} + J_{1313} + J_{3311}] - I_{1313} \quad (5.56)$$

$$S_{2312} = \chi [J_{2123} + J_{3122} + J_{2113} + J_{3212}] - I_{2312} \quad (5.57)$$

$$S_{2323} = \chi [J_{2233} + J_{3232} + J_{2323} + J_{3322}] - I_{2323} \quad (5.58)$$

$$S_{2313} = \chi [J_{2133} + J_{3132} + J_{2313} + J_{3312}] - I_{2313} \quad (5.59)$$

$$S_{1211} = \kappa [J_{1112} + J_{2111} + J_{1332} + J_{2331} + J_{1222} + J_{2221}] + \chi [J_{1112} + J_{2111}] - I_{1211} \quad (5.60)$$

$$S_{1222} = \kappa [J_{1222} + J_{2221} + J_{1112} + J_{2111} + J_{1332} + J_{2331}] + \chi [J_{1222} + J_{2221}] - I_{1222} \quad (5.61)$$

$$S_{1233} = 2\kappa [J_{1332} + J_{2331} + J_{1112} + J_{2111} + J_{1222} + J_{2221}] + 2\chi [J_{1332} + J_{2331}] - I_{1233} \quad (5.62)$$

$$S_{1311} = \kappa [J_{1113} + J_{3111} + J_{1333} + J_{3331} + J_{1223} + J_{3221}] + 2\chi [J_{1113} + J_{3111}] - I_{1311} \quad (5.63)$$

$$S_{1322} = \kappa [J_{1223} + J_{3221} + J_{1113} + J_{3111} + J_{1333} + J_{3331}] + 2\chi [J_{1223} + J_{3221}] - I_{1322} \quad (5.64)$$

$$S_{1333} = \kappa [J_{1333} + J_{3331} + J_{1113} + J_{3111} + J_{1223} + J_{3221}] + 2\chi [J_{1333} + J_{3331}] - I_{1333} \quad (5.65)$$

$$S_{2311} = \kappa [J_{2113} + J_{3112} + J_{2333} + J_{3332} + J_{2223} + J_{3222}] + 2\chi [J_{2113} + J_{3112}] - I_{2311} \quad (5.66)$$

$$S_{2322} = \kappa [J_{2223} + J_{3221} + J_{2113} + J_{3112} + J_{2333} + J_{3332}] + 2\chi [J_{2223} + J_{3222}] - I_{2322} \quad (5.67)$$

$$S_{2333} = \kappa [J_{2333} + J_{3332} + J_{2113} + J_{3112} + J_{2223} + J_{3222}] + 2\chi [J_{2333} + J_{3331}] - I_{2333} \quad (5.68)$$

## Tenseur des contraintes

Les composantes du tenseur  $\underline{S}$  étant déterminées, il est donc facile de déduire celles du tenseur des contraintes quelque soit la forme de la déformation inélastique imposée. Ainsi, le développement de l'expression EQ. 5.29 et sa projection dans l'espace des matrices  $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$  donne :

$$\sigma_{11ij} = 2\alpha\kappa(1-\nu) S_{11ij} + 2\alpha\kappa\nu (S_{22ij} + S_{33ij}) \quad (5.69)$$

$$\sigma_{22ij} = 2\alpha\kappa(1-\nu) S_{22ij} + 2\alpha\kappa\nu (S_{11ij} + S_{33ij}) \quad (5.70)$$

$$\sigma_{33ij} = 2\alpha\kappa(1-\nu) S_{33ij} + 2\alpha\kappa\nu (S_{22ij} + S_{11ij}) \quad (5.71)$$

$$\sigma_{12ij} = 4\alpha\chi S_{12ij} \quad (5.72)$$

$$\sigma_{13ij} = 4\alpha\chi S_{13ij} \quad (5.73)$$

$$\sigma_{23ij} = 4\alpha\chi S_{23ij} \quad (5.74)$$

Si l'inclusion sphérique contient une déformation inélastique unitaire normale  $\epsilon_{ii}^p$  i.e  $\epsilon_{ii}^p = 1$ , pour  $i$  fixé, le reste des composantes étant nulles, les contraintes engendrées par la présence d'une telle inclusion dans le massif sont définies pour  $\alpha = 1$ .

Si l'inclusion sphérique contient une déformation inélastique unitaire de cisaillement  $\epsilon_{ij|_{i \neq j}}^p = \epsilon_{ji|_{i \neq j}}^p$  i.e  $\epsilon_{ij|_{i \neq j}}^p = 1$ , l'inclusion engendrerait des contraintes définies pour  $\alpha = 2$ .

Le cas général avec une déformation inélastique quelconque consiste à décomposer le tenseur des déformation dans la base des déformations normales ( $\alpha = 1$ ) et des déformations de cisaillements ( $\alpha = 2$ ).

### 3.3 Résultats numériques et Physique liée à l'expansion de l'inclusion

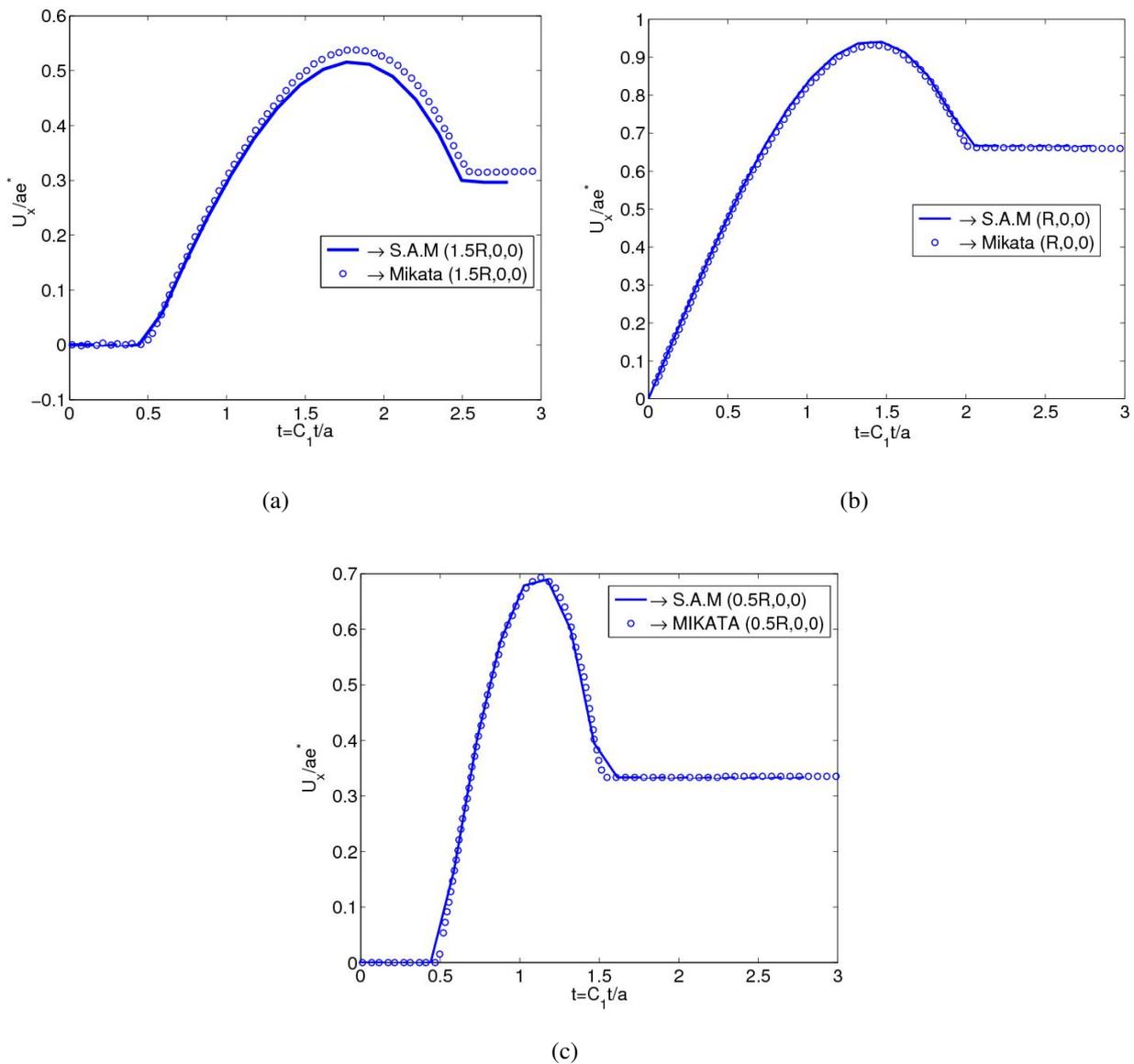
Le calcul des contraintes dans un massif infini ont été validé avec un modèle éléments finis réalisé avec le logiciel commercial Abaqus version 6.11. Les résultats de cette validation sont présentés en ANNEXE B. Ici, seule la physique liée à l'expansion de l'inclusion sera expliquée en détail.

#### 3.3.1 Dilatation isotrope de l'inclusion : $\epsilon_{ij}^* = e^* \delta_{ij} H(t)$

La validation de l'implémentation numérique du champ des déplacements dus à la présence d'une inclusion sphérique qui se dilate soudainement dans un massif infini est représentée sur la figure 5.1 en terme de déplacement  $U_x$  normalisé par  $ae^*$ . Les résultats sont comparés avec les résultats de Mikata [MIK 92] en se plaçant dans les mêmes conditions et hypothèses. Ces résultats sont obtenus en considérant une inclusion qui se dilate soudainement sous l'effet d'une déformation inélastique (eigenstrain) du type  $\epsilon_{ij}^*(t) = \delta_{ij} H(t)$ . Sur ces figures, l'historique des déplacements (normalisés) observées en différents points est présenté : un premier (1) point situé à l'extérieur de l'inclusion (cf FIG. 5.1(a)), un deuxième point (2) situé à l'interface de l'inclusion (cf FIG. 5.1(b)) et un troisième point (3) situé à l'intérieur de l'inclusion (cf FIG. 5.1(c)). Les point (1) et (3) sont à égale distance de l'interface de l'inclusion. La non superposition des résultats observé sur la figure FIG. 5.1(a) s'explique par une mauvaise capture de l'image d'origine qui est d'une mauvaise qualité. Toute fois, les deux autres figures témoignent de la bonne implémentation des déplacements.

Ces résultats montrent la physique suivante qui est liée à l'expansion de l'inclusion :

## 5. Modélisation de l'expansion dynamique des inclusions dans un massif semi-infini : cas des inclusions sphériques



**FIGURE 5.1:** Validation des champs de déplacement par comparaison avec les résultats de Mikata pour une eigenstrain  $\epsilon_{ij}^* = \delta_{ij}H(t)$  : historique du déplacement (a) à l'extérieur de l'inclusion, (b) sur l'interface de l'inclusion et (c) l'intérieur de l'inclusion

dès que l'inclusion se dilate, les déplacements maximum apparaissent à l'interface de l'inclusion (le maximum des déplacements obtenus au cours de la dilatation se localise sur l'interface), pendant ce temps aucun déplacement n'est observé à l'extérieur (1) comme à l'intérieur (3) sur une durée  $t = a/2C_1$ . A partir de  $t = a/2C_1$ , des déplacements commencent à apparaître aux points (1) et (3). Ceci indique que dès que l'inclusion commence à se dilater, les premières ondes sont générées à l'interface de l'inclusion : il s'agit des ondes de compression [MIK 92]. Elles se propagent de part et d'autre de l'interface de l'inclusion et la durée  $t = a/2C_1$  correspond au temps qu'elles mettent pour atteindre les points (1) et (3). Les pics de déplacements observés sur ces figures in-

diquent le passage des ondes de cisaillement et que les grands déplacements sont toujours observés sur l'interface de l'inclusion.

La stabilisation des déplacements commence à l'intérieur de l'inclusion dès que les premières vagues d'ondes atteignent le centre de l'inclusion. Les ondes de retour, du centre de l'inclusion vers l'interface, laissent donc derrière leur front un déplacement stationnaire (cf FIG. 5.1(b), 5.1(c)). Ainsi l'intérieur de l'inclusion se stabilise complètement après une durée  $t = 2a/C_1$  qui correspond à la durée que les ondes de compression mettent pour faire un aller-retour dans l'inclusion. La stabilisation des déplacements à l'extérieur de l'inclusion commence dès l'inclusion entière se comporte comme une inclusion statique ; donc dès que les ondes ne sont plus générées à l'interface de l'inclusion. Ceci montre donc que le temps auquel le régime statique est atteint dans un massif infini dépend fortement de la taille de l'inclusion et aussi de la vitesse des ondes de compressions ; ce qui implique donc une forte influence des paramètres matériaux sur la stabilisation.

### 3.3.2 Expansion de l'inclusion pour une déformation du type $\varepsilon_{ij}^* \neq \delta_{ij}H(t)$

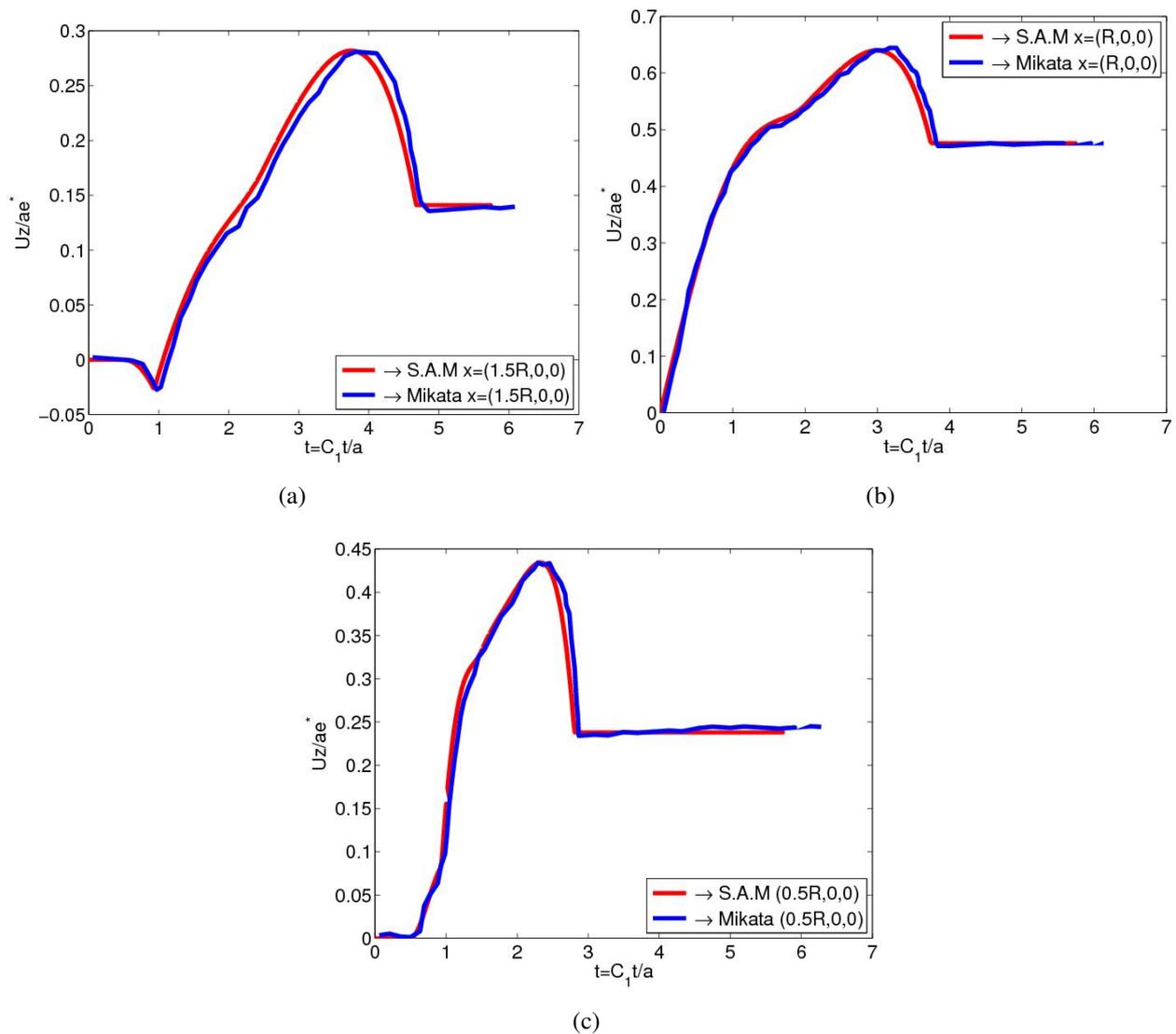
Le cas d'une inclusion sphérique qui se transforme soudainement avec une déformation inélastique donnée par

$$\varepsilon_{13}^* = e^*, \quad \varepsilon_{ij}^* = 0$$

est présenté dans cette partie.

Les résultats comparés avec ceux de Mikata [MIK 92] sont reportés sur les figures 5.2 pour les déplacements verticaux  $U_z$ . Sur ces figures, l'historique des déplacements (normalisés) observés en différents points est présenté : un premier (1) point situé à l'extérieur de l'inclusion (cf FIG. 5.2(a)), un deuxième point (2) situé à l'interface de l'inclusion (cf FIG. 5.2(b)) et un troisième point (3) situé à l'intérieur de celle-ci (cf FIG. 5.2(c)). Les points (1) et (3) sont à égale distance de l'interface de l'inclusion. La figure 5.2(b) montre que les ondes sont toujours générées à l'interface de l'inclusion, et l'ensemble des résultats illustrés montre que la physique ne change pas par rapport au cas précédent à savoir le temps de passage des ondes élastiques à l'intérieur comme à l'extérieur de l'inclusion. Ici aussi la stabilisation des déplacements commence toujours de l'intérieur de l'inclusion vers l'extérieur de celle-ci et le reste du massif.

## 5. Modélisation de l'expansion dynamique des inclusions dans un massif semi-infini : cas des inclusions sphériques



**FIGURE 5.2:** Validation des champs de déplacement par comparaison avec les résultats de Mikata  $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}H(t) = e$  : historique du déplacement (a) à l'extérieur de l'inclusion, (b) sur l'interface de l'inclusion et (c) l'intérieur de l'inclusion

## 4 Simulation de l'expansion dynamique d'une inclusion sphérique dans un massif semi-infini

### 4.1 Cas d'une inclusion dans le massif

La simulation numérique des effets induits par la présence d'une inclusion en statique dans un massif semi-infini a été proposée par Zhou et al. [ZHO 09]. Dans ce qui suit, on se propose d'étendre cette méthode au cas des inclusions en dynamique plus particulièrement lorsque l'on considère une inclusion sphérique qui se dilate au cours du temps dans le massif semi-infini sous

l'action d'une déformation inélastique. Dans ce paragraphe et dans le reste de ce chapitre, nous nous limiterons au cas d'une déformation inélastique transitoire  $\underline{\underline{\epsilon}}^*(t) = \underline{\underline{\epsilon}}^p H(t)$  comme dans le cas d'un massif infini.

La solution du problème de l'expansion dynamique d'une inclusion (ici sphérique de rayon  $a$ ) dans un massif semi-infini contenant une déformation inélastique  $\underline{\underline{\epsilon}}^p(t) = [\epsilon_{11}^p, \epsilon_{22}^p, \epsilon_{33}^p, \epsilon_{12}^p, \epsilon_{13}^p, \epsilon_{23}^p] H(t)$  peut être obtenue en décomposant le problème en trois sous problèmes :

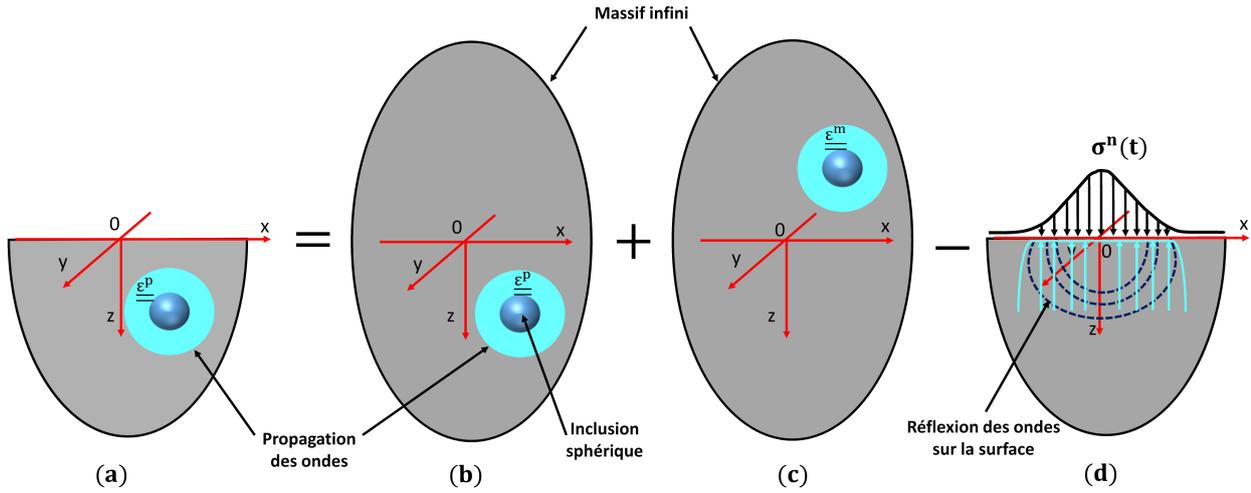
1. une inclusion avec une déformation inélastique  $\underline{\underline{\epsilon}}^p(t) = [\epsilon_{11}^p, \epsilon_{22}^p, \epsilon_{33}^p, \epsilon_{12}^p, \epsilon_{13}^p, \epsilon_{23}^p] H(t)$  dans un massif infini,
2. une inclusion miroir avec une déformation inélastique  $\underline{\underline{\epsilon}}^m(t) = [\epsilon_{11}^p, \epsilon_{22}^p, \epsilon_{33}^p, \epsilon_{12}^p, -\epsilon_{13}^p, -\epsilon_{23}^p] H(t)$  dans le même massif infini,
3. un massif semi-infini avec une distribution de contraintes normales de traction  $\sigma^n(t)$  sur la surface du massif.

La décomposition du problème est illustrée sur la figure FIG. 5.3.

En statique, Chiu [CHI 77] a montré que la sommation de solutions des problèmes (1) et (2) laisse le plan  $z = 0$  libre de contraintes de tractions tangentiellles, seule demeure la contrainte normale de traction  $\sigma^n$ . En dynamique, lorsqu'on considère une inclusion (sphérique), elle génère des ondes de compressions qui initient sur leur passage des déformations et par conséquent des contraintes. Ainsi, avant l'arrivée des ondes de compression dans le plan  $z = 0$ , la sommation des résultats des problèmes (1) et (2) laisse toujours le plan  $z = 0$  libre de toute forme de contrainte. Une fois que ces ondes atteignent le plan  $z = 0$ , elles commencent par s'interpénétrer générant des contraintes normales  $\sigma^n(t)$  à leur interface dans le plan  $z = 0$ , les contraintes de cisaillement ou contraintes tangentiellles disparaissent à cause de l'effet miroir imposé sur les eigenstrains dans (1) et (2) (les termes de cisaillement du tenseurs des déformations sont opposés). Ces contraintes normales évoluant au cours du temps peuvent être des contraintes de traction comme des contraintes de compression par endroit dans le même plan. Ainsi, soustraire la solution du problème (3) de celle du problème (1) + (2) à tout instant  $t$  permet donc de supprimer ces contraintes normales et ainsi simuler la condition aux limites dite de *surface libre de contraintes*. En dynamique, la solution du problème (3) n'est pas aussi aisée qu'en statique. En effet, la contrainte normale  $\sigma^n(t)$  à tout instant en surface doit être considérée comme l'amplitude d'une pression appliquée à cet instant et dont le profil temporel correspondrait à celui décrit par  $\sigma^n(t)$  depuis l'arrivée des ondes en surface jusqu'à l'instant  $t$ . Ainsi, La solution finale du problème s'obtient comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x, y, z, t) = & B_{ijkl}(x - x_o, y - y_o, z - z_o, t) \epsilon_{kl}^p + \\ & B_{ijkl}(x - x_o, y - y_o, z + z_o, t) \epsilon_{kl}^m - \\ & \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{ij}^s(x - v, y - \kappa, z, t - \tau) \sigma^n(v, \kappa, 0, \tau) dv d\kappa \end{aligned} \quad (5.75)$$

## 5. Modélisation de l'expansion dynamique des inclusions dans un massif semi-infini : cas des inclusions sphériques



**FIGURE 5.3:** Décomposition du problème d'une inclusion sphérique contenant une eigenstrain  $\epsilon^P$  dans un massif semi-infini, élastique et isotrope et de surface libre située dans le plan  $z = 0$  en trois sous problèmes

Si l'on suppose que  $t_o$  est l'instant auquel les premières ondes de compression arrivent dans le plan  $z = 0$ , l'équation ci-dessus prend alors la forme :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x, y, z, t) = & B_{ijkl}(x - x_o, y - y_o, z - z_o, t) \epsilon_{kl}^P + & (5.76) \\ & B_{ijkl}(x - x_o, y - y_o, z + z_o, t) \epsilon_{kl}^m - \\ & H(t - t_o) \int_{t_o}^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{ij}^s(x - v, y - \kappa, z, t - \tau) \sigma^n(v, \kappa, 0, \tau) dv d\kappa \end{aligned}$$

Dans l'expression EQ. 5.76, les deux premiers termes correspondent donc aux solutions des problèmes (1) et (2) ou  $B_{ijkl}$  sont donnés par les expressions EQ. 5.69-5.74,  $(x_o, y_o, z_o)$  est la position du centre de l'inclusion dans les massifs semi-infini et infini,  $(x_o, y_o, -z_o)$  la position de l'inclusion miroir dans le massif infini. Le troisième terme est la solution du problème (3) avec  $\sigma^n(\cdot, \cdot, 0, \cdot)$  la contrainte normale obtenue dans le plan  $z = 0$  et définie par l'expression EQ. 5.77,  $\Gamma_{ij}^s(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$  sont les fonctions de Green en terme de contraintes dans le massif semi-infini due à l'application soudaine d'un effort ponctuel  $F(t) = \delta(r)\delta(t)$  sur la surface libre du massif.

$$\begin{aligned} \sigma^n(x, y, 0, t) = & -B_{33kl}(x - x_o, y - y_o, -z_o, t) \epsilon_{kl}^P & (5.77) \\ & -B_{33kl}(x - x_o, y - y_o, z_o, t) \epsilon_{kl}^m \end{aligned}$$

Il est important de souligner ici que l'expression EQ. 5.76 présente deux types de convolutions : une convolution liée à l'espace et une deuxième liée au temps.

## 4.2 Implémentation numérique

L'implémentation numérique du problème EQ. 5.76 dans le cas de plusieurs inclusions repose essentiellement sur la technique de 3D-FFT mise en place par Zhou et al. [ZHO 09] et implémentée dans le code ISAAC.

Considérons une inclusion sphérique de rayon  $a$  dans un massif semi-infini noté  $\mathcal{D}$  de module de Young  $E$ , de densité  $\rho$  et de coefficient de Poisson  $\nu$ . On suppose que la surface libre de  $\mathcal{D}$  se situe dans le plan  $z = 0$  et que le repère choisi est le repère cartésien  $(x, y, z)$  muni de l'espace temporel  $t$ . On discrétise  $\mathcal{D}$  en  $N_x \times N_y \times N_z$  éléments cubiques de taille  $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$  et dont chaque élément est indexé par le triplet  $(x_\alpha, y_\beta, z_\gamma)$  qui fait référence au point représentatif de calcul, avec  $1 \leq x_\alpha \leq N_x$ ,  $1 \leq y_\beta \leq N_y$ ,  $1 \leq z_\gamma \leq N_z$ . De même on discrétise l'inclusion en éléments cubiques identiques à ceux du massif pour approximer le problème.

On suppose que  $\mathcal{D}$  reste suffisamment large (massif semi-infini) et que la discrétisation  $N_x \times N_y \times N_z$  est celle nécessaire dans la zone d'intérêt, ce qui permet de négliger à tout instant la contrainte normale  $\sigma^n(t)$  en dehors de cette zone ( $\sigma^n(t) \simeq 0$ ). Dans la zone d'intérêt, on suppose que la contrainte normale  $\sigma^n(t)$  à un instant  $t$  est une constante, uniforme sur l'élément  $\Delta x \times \Delta y$  et représentée par la contrainte prise au centre de cette surface élémentaire.

Ainsi, l'expression EQ. 5.76 donnant les contraintes en tout point de  $\mathcal{D}$  due à la présence d'une seule inclusion dans le massif s'approxime comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x_\alpha, y_\beta, z_\gamma, t) = & B_{ijkl}(x_\alpha - x_c, y_\beta - y_c, z_\gamma - z_c, t) \mathfrak{E}_{kl}^p(x_c, y_c, z_c, t) \\ & + B_{ijkl}(x_\alpha - x_c, y_\beta - y_c, z_\gamma + z_c, t) \mathfrak{E}_{kl}^{pm}(x_c, y_c, z_c, t) \\ & - \sum_{\tau=0}^t \sum_{(x', y') \in A_d} \Gamma_{kl}^p(x_\alpha - x', y_\beta - y', z_\gamma, t - \tau) \sigma^n(x', y', \tau) \end{aligned} \quad (5.78)$$

avec

$$\begin{aligned} \Gamma_{kl}^p(x_\alpha - x', y_\beta - y', z_\gamma, t) = & \int_{x' - \Delta x/2}^{x' + \Delta x/2} \int_{y' - \Delta y/2}^{y' + \Delta y/2} \Gamma_{ij}^s(x_\alpha - x', y_\beta - y', z_\gamma, t) dx' dy' \\ \simeq & \Gamma_{kl}(x_\alpha - x', y_\beta - y', z_\gamma, t) \end{aligned} \quad (5.79)$$

où  $\Gamma_{kl}$  sont les fonctions de Green (coefficients d'influence) mises en place dans le chapitre CHAP. 3 i.e les contraintes d'un patch de pression  $\Delta x \times \Delta y$  et de durée d'impulsion  $\Delta t$ . Dans tout ce qui suit, on se limitera uniquement aux coefficients d'influence dont la durée d'impulsion est égale au pas de temps  $\Delta t$ .

Pour simuler l'effet de plusieurs inclusions sphériques dans un massif semi-infini avec chacune une déformation inélastique transitoire, le principe de superposition est appliqué. Ainsi, la solution pour une multitude d'inclusions sphériques qui se dilatent simultanément dans le massif s'obtient en superposant les contributions de toutes les inclusions dans le massif. En désignant par  $\Omega_p = \{(x_o, y_o, z_o)\}$  l'ensemble des centres des inclusions dans le massif et  $A_d$  le domaine discrétisé, on a alors :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x, y, z, t) = & \sum_{(x_0, y_0, z_0) \in \Omega_p} \left[ B_{ijkl}(x - x_0, y - y_0, z - z_0, t) \varepsilon_{kl}^p(x_0, y_0, z_0, t) \right. \\ & \left. + B_{ijkl}(x - x_0, y - y_0, z + z_0, t) \varepsilon_{kl}^{pm}(x_0, y_0, z_0, t) \right] \\ & - \sum_{\tau=0}^t \sum_{(x', y') \in A_d} \Gamma_{kl}^p(x - x', y - y', z, t - \tau) \sigma^n(x', y', \tau) \end{aligned} \quad (5.80)$$

$$\begin{aligned} \sigma^n(x', y', t) = & \sum_{(x_0, y_0, z_0) \in \Omega_p} \left[ B_{33kl}(x' - x_0, y' - y_0, z' - z_0, t) \varepsilon_{kl}^p(x_0, y_0, z_0, t) \right. \\ & \left. + B_{33kl}(x' - x_0, y' - y_0, z' + z_0, t) \varepsilon_{kl}^{pm}(x_0, y_0, z_0, t) \right] \end{aligned} \quad (5.81)$$

L'implémentation de EQ. 5.82 par application de la FFT permet de transformer le produit de convolution spatiale en un simple produit scalaire dans l'espace fréquentiel, puis par l'application de la FFT inverse on retrouve donc les contraintes calculées dans l'espace réel. Cette technique permet donc de réduire les temps de calcul [ZHO 09].

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x, y, z, t) = & FFT^{-1}(\hat{B}_{ijkl} \hat{\varepsilon}_{kl}^p) + FFT^{-1}(\hat{B}_{ijkl} \hat{\varepsilon}_{kl}^{pm}) \\ & - \sum_{\tau=0}^t FFT^{-1}(\hat{\Gamma}_{kl}(t - \tau) \hat{\sigma}^n(\tau)) \end{aligned} \quad (5.82)$$

avec  $\hat{B}_{ijkl}$ ,  $\hat{\varepsilon}_{kl}^p$ ,  $\hat{\varepsilon}_{kl}^{pm}$ ,  $\hat{\Gamma}_{kl}$ ,  $\hat{\sigma}^n$  obtenus par application de 3D-FFT à  $B_{ijkl}$ ,  $\varepsilon_{kl}^p$ ,  $\varepsilon_{kl}^{pm}$  respectivement et 2D-FFT à  $\Gamma_{kl}$ ,  $\sigma^n$  respectivement.

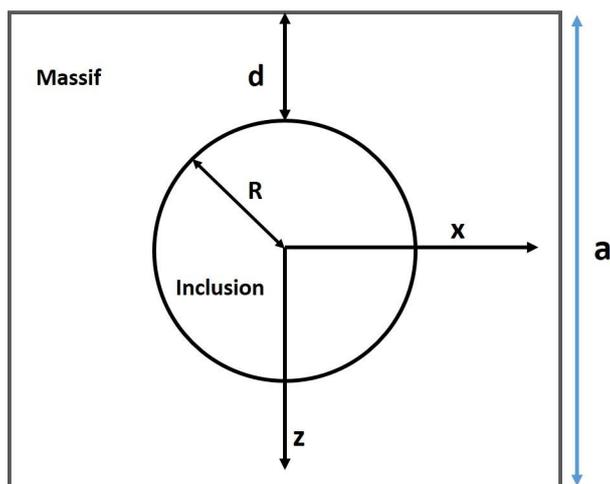
### 4.3 Validation du modèle et analyse des résultats

La validation du modèle d'inclusion mis en place est présentée dans ce paragraphe pour le cas d'une seule inclusion dans un massif semi-infini. Deux cas de validations ont été mis en place pour assurer l'efficacité de la méthode : une première validation avec le modèle analytique de Mindlin et al. [MIN 50] permettant de retrouver le cas d'une inclusion sphérique en statique dont la source des déformation inélastique sont d'origine thermique ; une deuxième validation faite par comparaison avec un modèle éléments finis pour attester l'efficacité en dynamique.

#### 4.3.1 Validation par le modèle analytique

Mindlin et al. [MIN 50] ont proposé un modèle analytique pour calculer les contraintes thermo-élastiques générées par la présence d'une inclusion sphérique de rayon  $R$  dans un massif semi-infini. Ce modèle sera la solution de référence en statique.

Dans notre modèle, nous avons considéré une géométrie de taille  $a \times a \times a$  et une inclusion sphérique de rayon  $R = 7a/16$  (cf FIG. 5.4) dont le centre coïncide avec celui de la géométrie. On considère une inclusion qui se dilate dans le massif, avec une déformation inélastique du type  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p = \alpha T \delta_{ij}$  d'origine thermique, où  $T$  désigne la température et  $\alpha$  le coefficient d'expansion thermique isotrope ; ces deux paramètres sont fixés à l'unité pour la comparaison. Le calcul est fait directement pour un temps très long (de l'ordre des secondes) car dans ces ordres de grandeur de



**FIGURE 5.4:** Massif de taille  $a \times a \times a \times a$  contenant une inclusion sphérique de rayon  $R = 7a/16$

temps, les coefficients d'influence tendent vers les coefficients d'influence statique et l'inclusion dans le massif infini se comporte comme une inclusion statique aussi.

Les résultats de la comparaison sont reportés sur la figure 5.5. Sur ces figures, les résultats tracés sont normalisés par la grandeur  $\sigma_o = E\alpha T/3(1 - \nu)$  avec  $E$  et  $\nu$  le module de Young et le coefficient de Poisson affectés à l'inclusion et au massif. Les axes sont normalisés par la taille de la géométrie. Pour rappel, nous avons toujours considéré les propriétés matériaux de l'acier donnés dans les chapitres précédents.

La figure 5.5(a) montre les contraintes obtenues en surface dans la direction radiale  $x$  et sur la figure 5.5(b), les contraintes sont obtenues à l'intérieure de l'inclusion suivant la direction radiale  $x$  et passant par le centre de l'inclusion tandis que sur la figure 5.5(c), les contraintes sont tracées comme fonction de la profondeur suivant la ligne issue du centre de repère en surface.

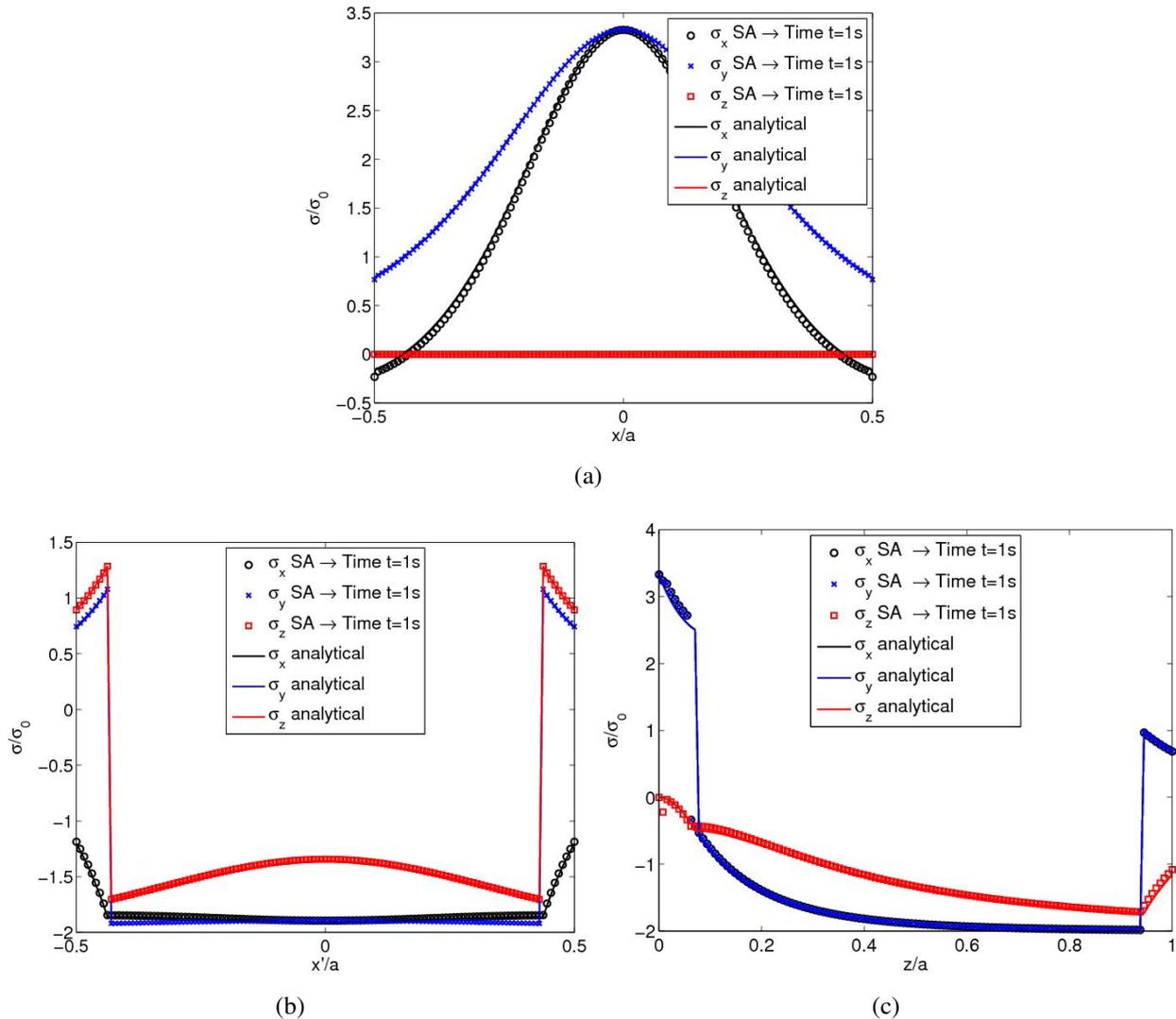
Ces résultats montrent qu'une très bonne corrélation entre le modèle analytique et le modèle semi-analytique est obtenue. Toute fois la légère différence observée sur la figure 5.5(c) lorsqu'on s'approche de la surface est due à la méthode des différences finies et à la superposition des efforts ponctuels pour simuler un patch de pression (erreurs numériques) contrairement au modèle Mindlin et al. [MIN 50] qui exprime ces contraintes de façon exacte.

#### 4.3.2 Validation par le modèle éléments finis

Cette partie présente la validation du problème en dynamique. Pour cette validation, un modèle éléments finis a été réalisé avec le logiciel commercial Abaqus version 6.11 et les calculs sont effectués par un schéma type explicite.

Une géométrie est réalisée et les dimensions sont choisies suffisamment grandes pour avoir les propriétés de massif semi-infini et ainsi éviter un retour d'ondes parasites dans le massif (jusqu'à l'arrêt des calculs) qui seront source de mauvais résultats pour la comparaison. Une inclusion sphérique de rayon  $a = 1.5 \text{ mm}$  est placée dans le massif à un distance  $d = 2 \text{ mm}$  de la surface libre du massif. Dans ces conditions, les ondes générées par l'inclusion et qui se propagent à l'intérieure de l'inclusion atteignent le centre de l'inclusion avant que, celles se dirigeant vers la surface

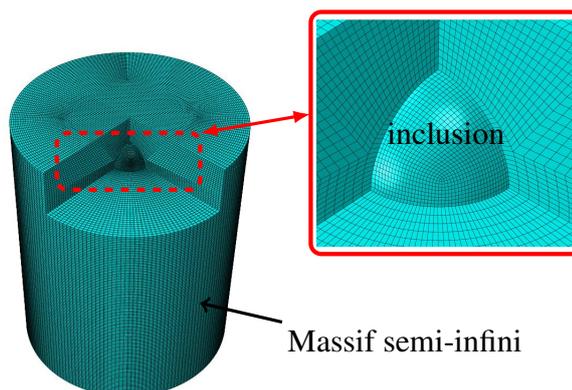
## 5. Modélisation de l'expansion dynamique des inclusions dans un massif semi-infini : cas des inclusions sphériques



**FIGURE 5.5:** Validation des contraintes dues à la présence d'une inclusion sphérique dans un massif semi-infini par comparaison avec le modèle analytique de Mindlin et al. [MIN 50] : (a) contraintes en surface prises suivant la direction  $x$  ; (b) contraintes à l'intérieur de l'inclusion et passant par son centre suivant la direction  $x$  et (c) contrainte dans la profondeur suivant la ligne issue de l'origine du repère en surface

atteignent la surface et soient réfléchies vers l'intérieur du massif. Le massif étant en acier, la vitesse des ondes de compression dans le massif et à l'intérieur de l'inclusion est approximativement  $C_1 \simeq 6020 \text{ ms}^{-1}$ . A cette vitesse, les ondes de compression atteignent le centre de l'inclusion au temps  $t_0 \simeq 249 \text{ ns}$  tandis que celles se propageant dans le massif atteindront la surface au temps  $t_1 \simeq 333 \text{ ns}$ .

Pour simuler l'effet de l'expansion dynamique de l'inclusion, une déformation inélastique d'origine thermique a été appliquée dans le modèle éléments finis par le biais du module *Pre-defined fields* dans le step dynamique créé. Comme dans le cas statique, on considère toujours une inclusion qui se dilate, ici une dilatation soudaine engendrée par la déformation inélastique



**FIGURE 5.6:** Modèle éléments finis réalisé en dynamique explicite : présence d'une inclusion sphérique dans un massif semi-infini

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^* = \alpha T \delta_{ij} H(t).$$

Le problème est ensuite discrétisé par des éléments C3D8R relativement fins sur un pavé de taille  $3.5 \times 3.5 \times 3.5 \text{ mm}^3$  enveloppant l'inclusion, le reste de la géométrie étant maillé par des éléments plus grossiers.

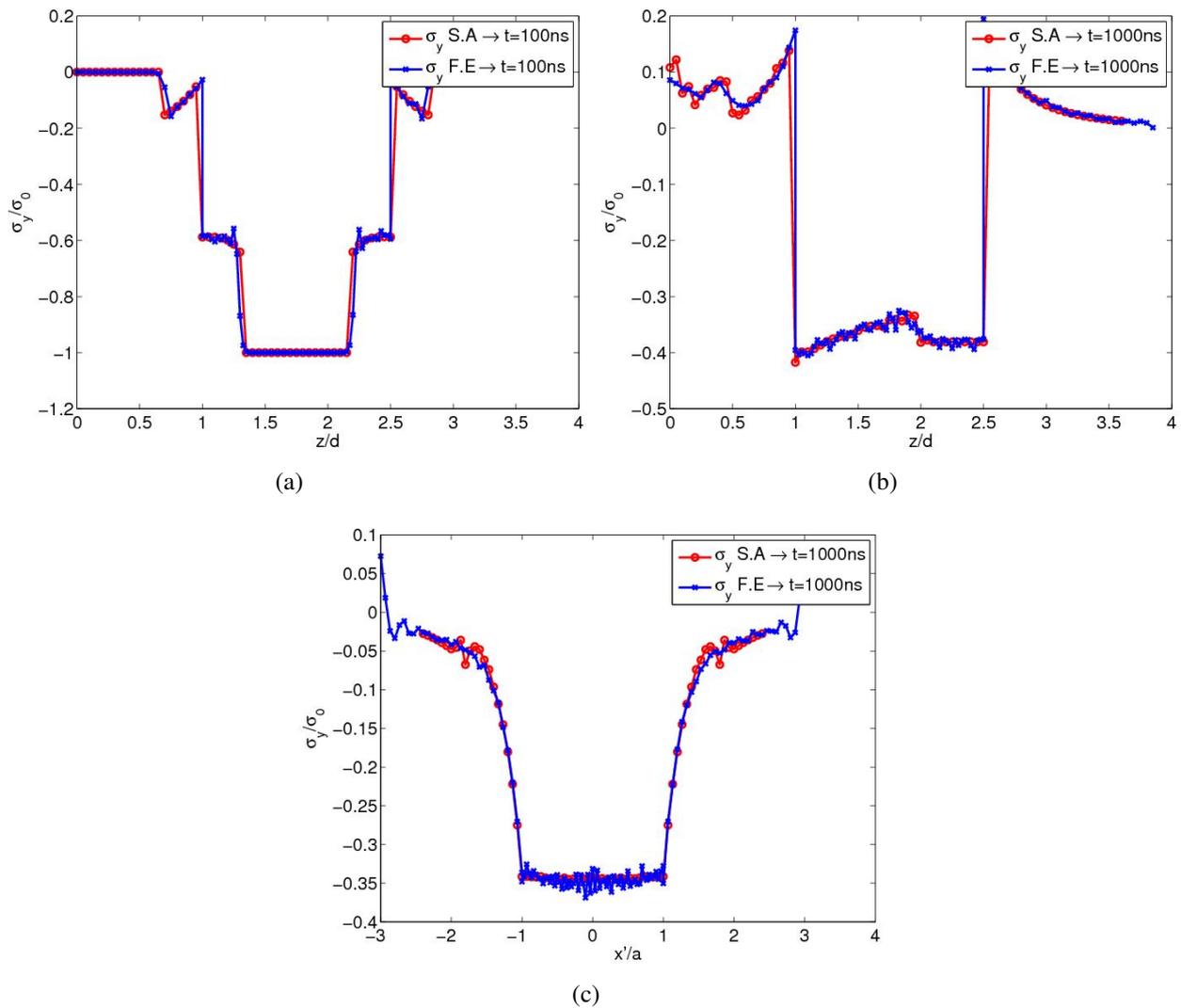
Le modèle éléments finis tel que réalisé nous permet de valider le problème dans les cas où les ondes sont déjà réfléchies une ou deux fois sur la surface du massif et que celles à l'intérieur de l'inclusion auraient déjà atteint son centre. Les résultats de la comparaison entre le modèle éléments finis et le modèle semi-analytique sont reportés sur les figures FIG. 5.7 et 5.8. En ordonnée, les contraintes sont normalisées par la grandeur  $\sigma_o$  défini précédemment et l'axe des abscisses normalisée par le rayon  $a$  de la sphère d'une part et d'autre part, par la distance  $d$  qui sépare la surface et l'interface de l'inclusion.

Le problème étant axisymétrique, seule les contraintes  $\sigma_z$  et  $\sigma_y$  seront comparées car  $\sigma_y = \sigma_x$ . Sur chacune de ces figures, les résultats sont présentés comme fonctions de la profondeur de la géométrie suivant la ligne issue du centre de la géométrie dans le plan  $z = 0$  d'une part : avant l'arrivée des ondes de compression au centre de l'inclusion et en surface du massif ( $t = 100 \text{ ns}$ , voir figures 5.7(a), 5.8(a)), après que les ondes soient arrivées en surface ( $t = 1000 \text{ ns} \simeq 3t_1$ , voir figures 5.7(b), 5.8(b)).

D'autre part, les figures 5.7(c), 5.8(c) montrent la comparaison à  $t = 1000 \text{ ns} \simeq 3t_1$  des contraintes suivant la direction radiale  $x$  et passant par le centre de l'inclusion.

Sur ces figures, notamment sur 5.7(a), 5.8(a), 5.7(b), 5.8(b), on remarque que le modèle semi-analytique décrit parfaitement le phénomène de réflexion des ondes dans le massif et donne un profil de propagation des ondes quasiment identique à celui du modèle éléments finis, toutefois avec le modèle éléments finis, nous avons une légère disparité au niveau du front d'onde et sur l'interface de l'inclusion, ce qui explique donc les pics de contraintes observés sur les figures 5.7(b), 5.8(b) juste en dessous de la surface puisque à  $t = 1000 \text{ ns}$  le problème n'est pas encore stabilisé. Toutefois, il faut aussi souligner les effets parasites liés à la méthode de résolution explicite dans Abaqus comme en témoignent ces variations à l'intérieur de l'inclusion tandis que le modèle semi-analytique présente des résultats beaucoup plus stabilisés.

## 5. Modélisation de l'expansion dynamique des inclusions dans un massif semi-infini : cas des inclusions sphériques

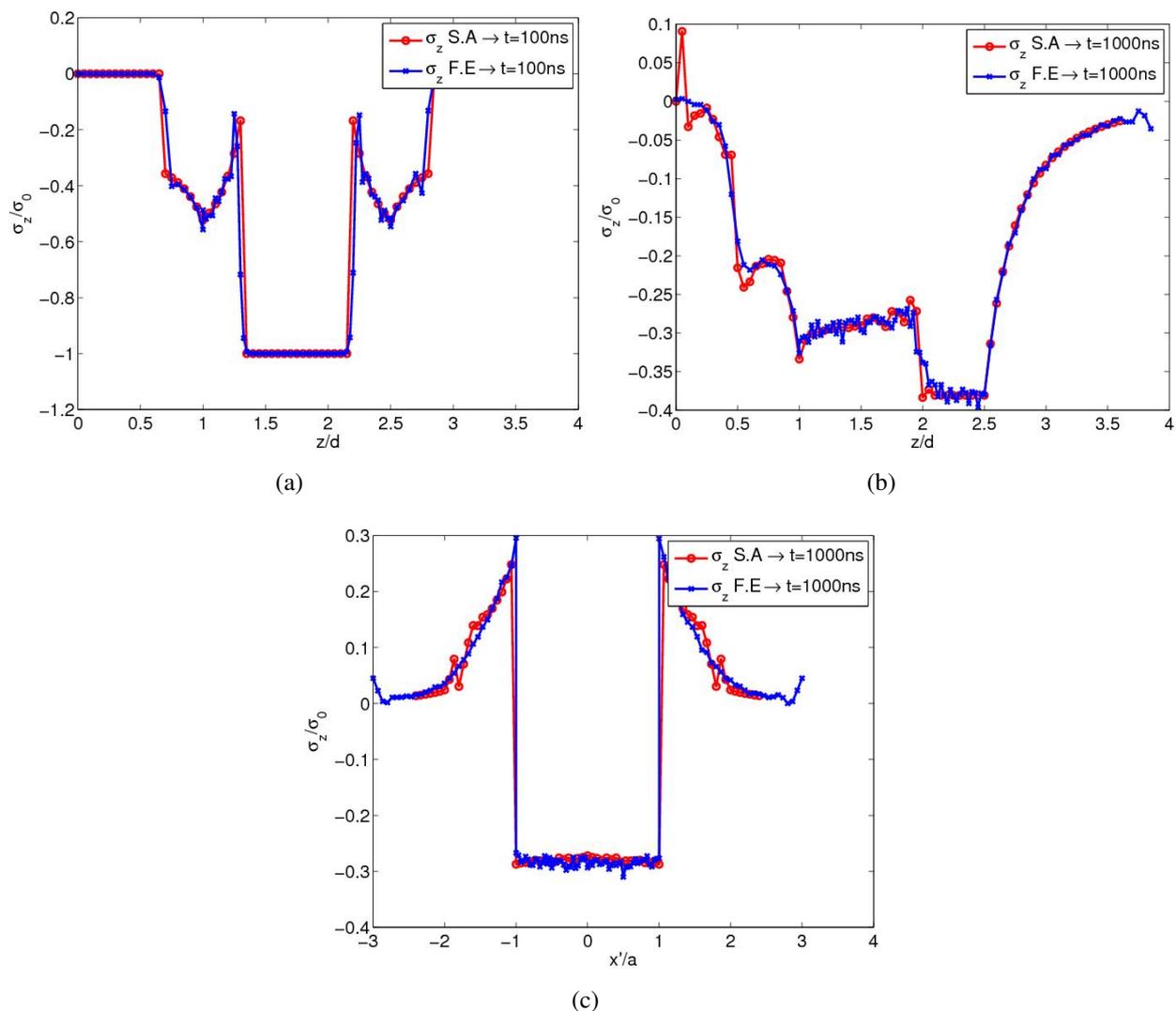


**FIGURE 5.7:** Validation des contraintes transversales dues à la présence d'une inclusion sphérique dans un massif semi-infini par comparaison avec un modèle éléments finis en dynamique explicite : (a) avant l'arrivée des ondes en surface du massif ; (b)-(c) après le passage des ondes

Les résultats des figures 5.7(a), 5.8(a) comparés au résultats présenté en ANNEXE B, montre que avant l'arrivée des ondes en surface du massif, le problème est logiquement équivalent à celui d'une inclusion dans un massif infini. La propagation des ondes élastiques dans le massif semi-infini est illustrée en ANNEXE B, section 4.

### 4.3.3 Stabilisation de l'inclusion : régime statique

Cette partie ne fait pas une étude en soi. En effet, pour réaliser une étude proprement dite sur ce paramètre, il faudrait faire une étude paramétrique sur la position de l'inclusion dans le massif, la taille de l'inclusion et peut être aussi la forme de l'eigenstrain. Ces points ne font pas l'objet de cette thèse.



**FIGURE 5.8:** Validation des contraintes longitudinales dues à la présence d'une inclusion sphérique dans un massif semi-infini par comparaison avec un modèle éléments finis en dynamique explicite : (a) avant l'arrivée des ondes en surface du massif ; (b)-(c) après le passage des ondes

Néanmoins, le cas d'une inclusion sphérique de rayon  $r$ , dont le centre se situe à une distance  $2r$  de la surface a été réalisé. On impose une déformation inélastique d'origine thermique comme dans le cas de la validation avec le modèle éléments finis. Les résultats de cette étude sont reportés sur la figure FIG. 5.9, en terme de l'évolution de la contraintes équivalente de von Mises observée à l'intérieur de l'inclusion aux points  $(x, y, z) = (0, 0, 5r/2)$ , à l'extérieur de l'inclusion : au points  $(x, y, z) = (0, 0, 3r/5)$ ,  $(x, y, z) = (0, 0, 8r/5)$ . Sur cette figure, la contrainte de von Mises et normalisée par  $\sigma_o = Tr \left( \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\epsilon}}^* \right)$  et l'axe des temps normalisé par  $t_o$  qui correspond au temps que l'onde de compression met pour arriver à la surface. Les contraintes de von Mises se stabilisent à partir de  $t \simeq 15t_o$ . On peut donc conclure que l'inclusion dynamique dans ces conditions atteint le régime statique après un temps  $t \geq 15t_o$ .

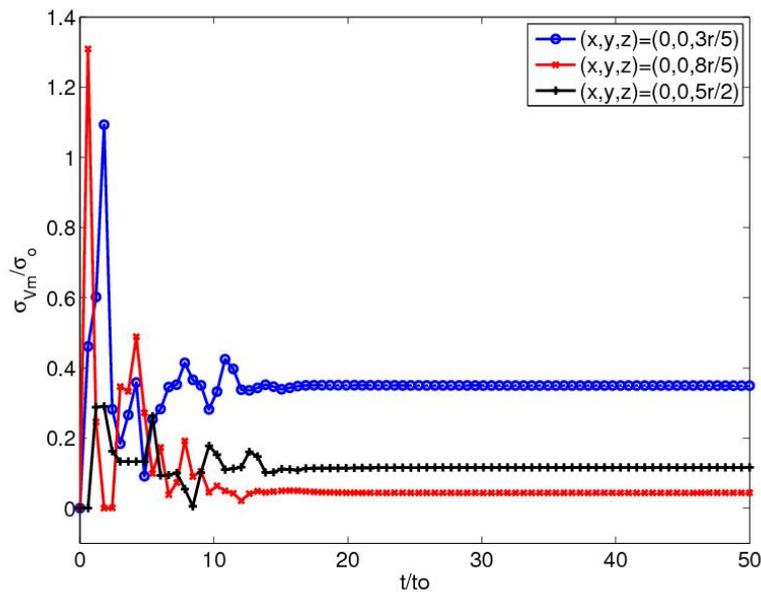


FIGURE 5.9: Historique de la contrainte de von Mises pour une inclusion sphérique de rayon  $r$  dont le centre se situe à une distance  $2r$  de la surface

## 5 Simulation de l'expansion dynamique d'une multitude d'inclusions

Dans ce paragraphe, la simulation de l'expansion simultanée de plusieurs inclusions sphériques est réalisée. Le but de cette section est de comprendre le comportement d'une inclusion (1) et celui d'un ensemble fini d'inclusion de mêmes formes occupant le volume de l'inclusion (1). L'objectif réel poursuivi ici consiste à voir si les contraintes engendrées par la présence d'un volume de déformations inélastiques dans un massif semi-infini peuvent être simulées par un ensemble fini d'inclusions de petites tailles.

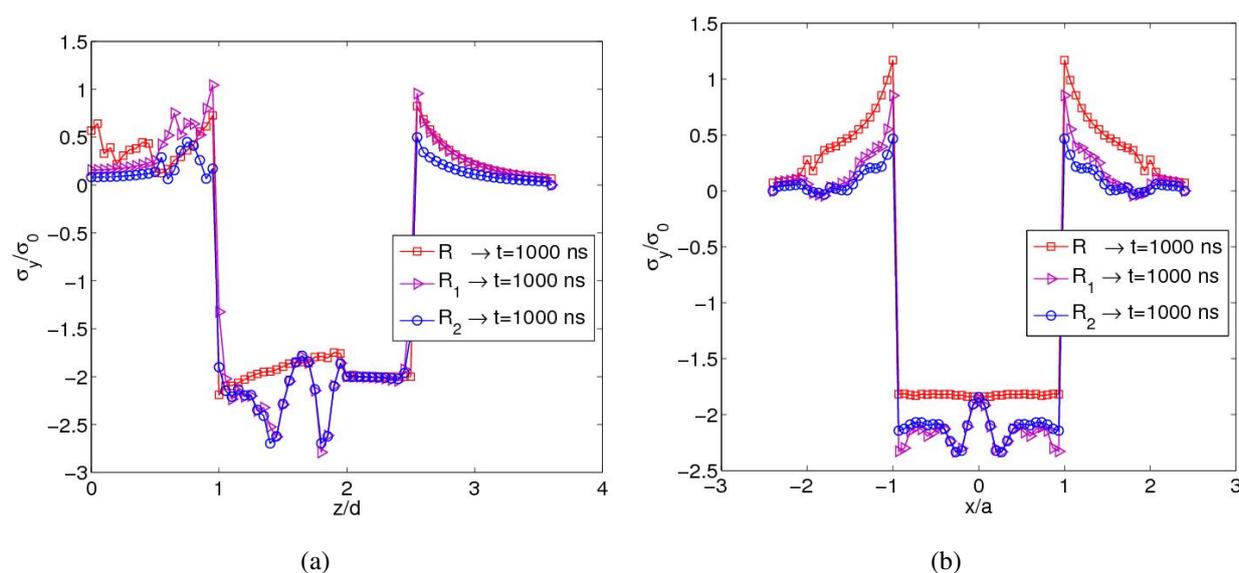
Pour répondre à cette question, nous avons donc réalisé des simulations en dynamique puis en statique pour différents cas de taille d'inclusions. Nous considérons toujours que les inclusions ont une déformation inélastique transitoire  $\varepsilon_{ij} = \delta_{ij}H(t)$ , et l'inclusion (1) est le volume de déformations inélastiques (transitoire) que nous souhaitons simuler.

### 5.1 En dynamique

- 1<sup>er</sup> cas : la géométrie étant maillée par des éléments cubiques de taille  $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$ , nous considérons plusieurs inclusions sphériques identiques de rayon  $R_1$ , chacune de volume égal au volume de l'élément cubique  $V_i = \Delta x \Delta y \Delta z$ . Le centre de chaque inclusion coïncide avec le point représentatif de calcul de l'élément cubique. On suppose que l'ensemble est contenue dans un volume  $V = \sum_i V_i$  (sphérique de rayon  $R$ ) comme illustré sur la figure 5.11(b). Bien entendu, dans cette hypothèse, les inclusions s'interpénètrent les unes dans les autres à l'instant initial.

- 2<sup>e</sup> cas : Comme dans le premier cas, nous changeons juste la taille des inclusions, ici nous supposons que chaque inclusion est contenue dans l'élément cubique dont le point représentatif de calcul coïncide avec le centre de l'inclusion. On note par  $R_2$  le rayon de ces inclusions donné par  $R_2 = \min\{\Delta x/2, \Delta y/2, \Delta z/2\}$ . L'ensemble est toujours contenu dans le volume  $V$ . Ici, les inclusions sont juste en contact par leurs interfaces à l'instant initial.
- 3<sup>e</sup> cas : on considère une seule inclusion sphérique occupant le volume  $V$  et de rayon  $a = R$  comme illustré sur la figure 5.11(a). Il s'agit de la même inclusion définie dans la section précédente.

Les résultats de cette étude sont illustrés en terme de contraintes  $\sigma_y$  sur la figure 5.10. Les contraintes sont normalisées par la grandeur  $\sigma_0$  définie précédemment et les axes des abscisses par le rayon  $a$  de la grande inclusion sur la figure 5.10(a), puis la distance  $d$  qui sépare la surface du massif de l'interface de l'inclusion sur la figure 5.10(b).

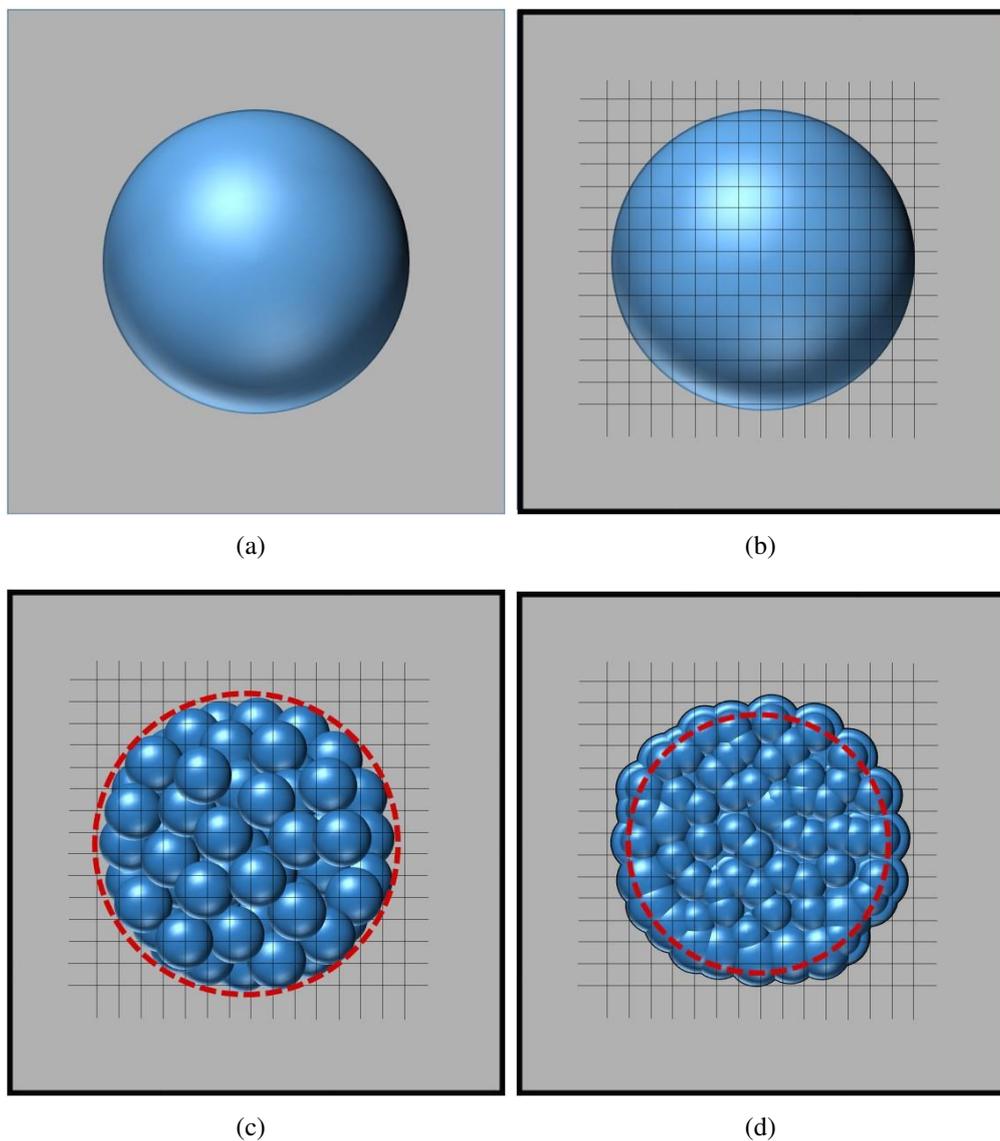


**FIGURE 5.10:** Simulation de plusieurs inclusions en dynamique et comparaison avec une seule inclusion occupant le volume de l'ensemble des inclusions : (a) contraintes en profondeur et (b) contraintes dans la direction radiale  $x$  suivant la ligne passant par le centre de la grande inclusion

## 5.2 En statique

- 1<sup>er</sup> cas : nous considérons plusieurs inclusions sphériques en statiques identiques de rayon  $R_1$ , chacune de volume égal au volume de l'élément cubique  $V_i = \Delta x \Delta y \Delta z$ . Le centre de chaque inclusion coïncide avec le point représentatif de calcul de l'élément cubique. On suppose que l'ensemble est contenu dans le volume  $V = \sum_i V_i$  (sphérique de rayon  $R$ ). Ici, les inclusions s'interpénètrent dans ce volume comme dans le cas dynamique.

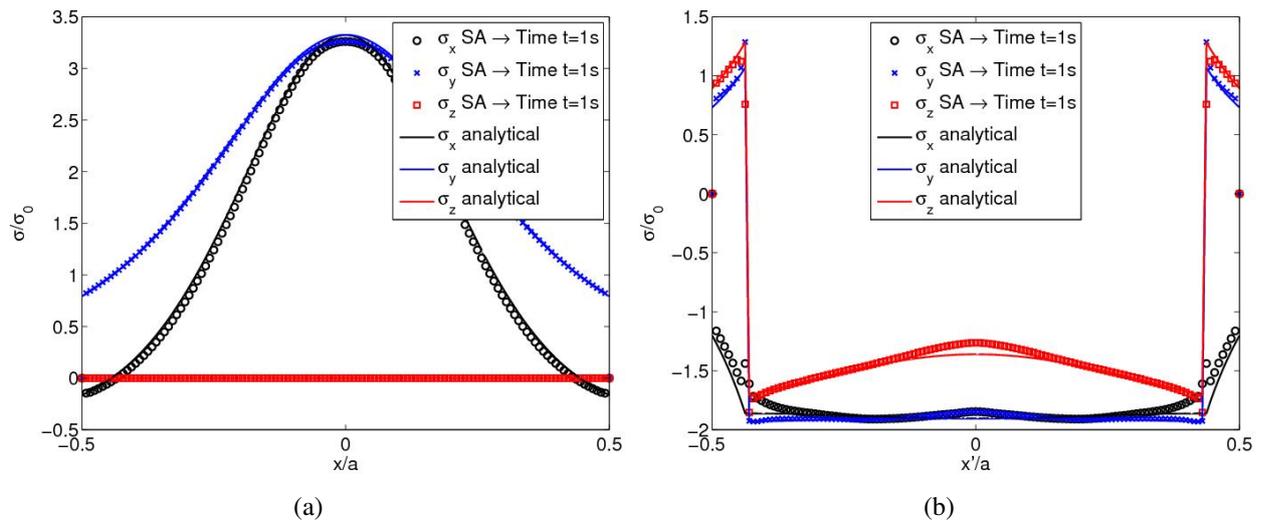
## 5. Modélisation de l'expansion dynamique des inclusions dans un massif semi-infini : cas des inclusions sphériques



**FIGURE 5.11:** Illustration du problème de l'influence mutuelle entre les inclusions en dynamique : (a) inclusion mère, (b) maillage de l'inclusion, (c) approximation de l'inclusion mère par plusieurs inclusions sphériques, (d) illustration de l'interaction que peuvent avoir les inclusions entre elles au cours de leur expansion en dynamique

- 2<sup>e</sup> cas : on considère une seule inclusion sphérique occupant le volume  $V$  et de rayon  $a = R$ . Il s'agit de la même inclusion que celle définie dans la section précédente mais en formulations statique.

Les résultats de cette étude sont illustrés sur la figure FIG. 5.12. Les contraintes sont normalisées par la grandeur  $\sigma_o$  définie précédemment et l'axe des abscisse par le rayon  $a$  de la grande inclusion.



**FIGURE 5.12:** Simulation d'une multitude d'inclusions en statique et comparaison avec une seule inclusion occupant le volume de l'ensemble des inclusions : (a) contraintes en surface et (b) contraintes dans la direction radiale  $x$  suivant la ligne passant par le centre de la grande inclusion

A l'issue de ces études, nous avons donc détecté les points suivants qui expliquent la disparité entre les résultats :

- ◆ En dynamique, lorsqu'on considère le cas de l'inclusion de volume  $V$ , les ondes de compression mettent un temps pour se propager à l'intérieur de l'inclusion (donc dans le volume  $V$ ), ce temps varie d'un point d'observation à un autre. Plus le point est proche de l'interface, plus ce temps est court comme expliqué dans la section 3.3. Lorsqu'on approxime ce volume  $V$  par une multitude d'inclusions sphérique, à l'instant  $t = \Delta t$ , chacune des inclusions a déjà émis des ondes de compression dans le volume : donc tout le volume observe déjà le passage des ondes de compression, ce qui n'en est donc pas le cas pour la grande inclusion. Ce problème d'effet de retard des ondes ne change pas lorsqu'on diminue la taille des inclusions. En effet, les inclusions en se dilatant augmentent de volume au fil du temps, ainsi, elles finissent par se toucher et s'interpénétrer avant leur stabilisation. La figure 5.11(d) schématise l'interaction et la forme que peuvent avoir les inclusions lorsqu'elles se dilatent et s'interpénètrent en phase dynamique. A cet stade, l'influence mutuelle entre les inclusions peut entrer en jeu et avoir un effet significatif sur les résultats. Ce qui explique donc la disparité des résultats à l'intérieur de l'inclusion et sur son voisinage comme le montre les figures FIG. 5.10(a), 5.10(b).
- ◆ En statique, les ondes ne sont plus mises en jeu et les inclusions gardent leur forme statique, après s'être dilatée. Toutefois, l'écart observé entre l'analytique et la simulation sur la figure 5.12(b) est dû à l'influence mutuelle des inclusions qui est une conséquence du tenseur d'Eshelby : nous avons d'ailleurs montré que avec les solutions analytiques dynamiques, on retrouve bien le tenseur d'Eshelby en statique. Cette étude confirme bien l'existence de l'influence mutuelle des inclusions qu'il faudra donc étudier.

## 6 Conclusions

Nous avons dans ce chapitre construit un tenseur  $\underline{\underline{S}}$  d'ordre 4 nous permettant de définir le champ de contraintes dû à l'expansion dynamique d'une inclusion sphérique dans un massif infini. La symétrie mineure que vérifie le tenseur  $\underline{\underline{S}}$  a permis d'implémenter que 36 de ses composantes. Ceci nous a donc permis de mettre en place une méthode permettant de simuler le cas de l'expansion dans un massif semi-infini en vu d'une simulation des contraintes résiduelles dans le calcul plastique.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous avons présenté un modèle semi-analytique pour la simulation de la réponse élastodynamique d'un massif semi-infini contenant une inclusion sphérique affectée de déformation inélastique transitoire. Le modèle présenté a été validé avec un modèle éléments finis que nous avons mis au point. Ensuite des cas de simulations de l'expansion dynamique simultanée d'une multitude d'inclusions sphériques contenu dans un volume  $V$  ont été réalisées en dynamique et en statique. Les résultats ont été comparés aux résultats d'une inclusion sphérique de volume  $V$  équivalent afin de voir la pertinence d'une telle approche lorsqu'il sera couplé au modèle d'impact rapide en élasticité. A l'issue de des simulations faites pour différentes tailles d'inclusions, les points suivants ont été retenus :

- l'influence mutuelle des inclusions est très dépendante de l'agrandissement du volume de l'inclusion au cours du temps.
- problème d'effet retard des ondes dans la simulation de l'expansion dynamique d'une inclusion par plusieurs inclusions qui se déforment simultanément. Ceci ne dépend probablement pas de la taille des inclusions discrétisant la grande inclusion.

Ces deux points constituent une limitation dans l'application de ce modèle pour le calcul des contraintes résiduelles lors du couplage du modèle d'impact rapide élastique à un solveur plastique. En résumé la présence des effets d'inertie n'est pas utile dans le calcul des coefficients d'influence pour le calcul des contraintes.

## Chapitre 6

# Modélisation d'un impact rapide élasto-viscoplastique et application pour la simulation d'un mono impact laser

*Dans ce chapitre, on s'intéresse à la réponse viscoplastique des matériaux sous choc. Dans une première partie, un algorithme viscoplastique du type retour radial a été proposé pour le calcul des déformations (visco)plastiques. Dans une seconde partie, pour reproduire le comportement du matériau sous choc, une loi viscoplastique du type Johnson-Cook a été implémentée et une validation du modèle est proposée par comparaison avec un modèle éléments finis. Dans la troisième partie, un modèle numérique de simulation de la pression induite par un mono impact laser est développé puis couplé au modèle viscoplastique pour la simulation du procédé de choc laser, cette partie est précédée d'une étude paramétrique réalisée pour identifier les paramètres du procédé les plus influents.*

## Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>163</b>
<b>2</b>	<b>Généralités</b>	<b>163</b>
2.1	Définitions	163
2.2	Critère de plasticité et surface de charge	164
2.3	Déformation et écoulement plastique ou viscoplastique	165
<b>3</b>	<b>Modélisation d'un impact rapide élasto-plastique ou viscoplastique</b>	<b>167</b>
3.1	Problème plastique ou viscoplastique en dynamique	167
3.2	Algorithme du retour radial	168
3.3	Algorithme de simulation d'un impact rapide viscoplastique	170
<b>4</b>	<b>Validation du modèle d'impact rapide</b>	<b>177</b>
4.1	Impact rapide élasto-plastique	178
4.2	Influence du maillage et du pas de temps	183
4.3	Impact rapide viscoplastique	186
<b>5</b>	<b>Atténuation élasto-plastique des ondes de choc</b>	<b>192</b>
<b>6</b>	<b>Étude paramétrique</b>	<b>194</b>
6.1	Influence de la taille du spot	194
6.2	Influence de la pression maximale	197
6.3	Influence de la limite élastique	199
6.4	Influence de la durée de l'impulsion	201
<b>7</b>	<b>Génération d'un impact rapide par Laser</b>	<b>204</b>
7.1	Simulation de la pression induite par impact laser en régime confiné	204
7.2	Influence des impédances caractéristiques sur la pression induite	208
7.3	Simulation des effets mécaniques induit par un mono impact laser en régime confiné	210
<b>8</b>	<b>Conclusions</b>	<b>214</b>

---

# 1 Introduction

En dynamique lorsque un matériau est sollicité et déformé plastiquement, les déformations qui se forment dépendent à la fois des contraintes appliquées et aussi de la vitesse de chargement (c'est-à-dire de la vitesse de déformation). Cette vitesse induit un changement significatif sur les déformations plastiques et sur les contraintes dans le matériau. Pour analyser l'influence de la vitesse de déformation sur la réponse dynamique du matériau, Hopkinson [HOP 05] a mené une série d'études expérimentales en dynamique sur l'acier et est parvenu à la conclusion que la limite élastique dynamique d'un matériau est environ deux fois supérieure à celle obtenue à très faible vitesse de déformation. Cela signifie que la limite élastique du matériau augmente avec la vitesse de déformation. Par conséquent, le comportement d'un matériau en dynamique est très dépendant de la vitesse de déformation. Dans ces conditions, les lois de comportement permettant de décrire le comportement d'un matériau sous choc doivent être des lois viscoplastiques et les simulations numériques doivent en tenir compte.

Dans la perspective de simuler les procédés de mise en compression par impacts rapides, de type choc laser, nous avons présenté dans le chapitre 4 les outils de base permettant de traiter d'abord un impact rapide sur un matériau élastique et isotrope. Cependant, les conditions de chargement étaient limitées aux cas des matériaux élastiques. Il est donc nécessaire d'enrichir le modèle pour la détermination des déformations plastiques. Toutefois, il faut souligner que les problèmes d'impact rapide que nous traitons ici sont des problèmes pour lesquels les vitesses de déformation peuvent atteindre  $10^6 \text{ s}^{-1}$  [PEY 07a], avec des temps de traitement de l'ordre des nanosecondes. Dans ces conditions, les lois d'écroutissage standards (sans dépendance à la vitesse de déformation) ne permettent donc pas de décrire raisonnablement la réponse du matériau. Il faut donc des lois viscoplastiques. Par conséquent, l'implémentation d'un algorithme viscoplastique est nécessaire pour enrichir le modèle développé.

Ce chapitre se situe dans le cadre du couplage de la plasticité et/ou de la viscoplasticité au modèle d'impact élastique présenté dans le chapitre 4. La première partie de ce chapitre est donc destinée à la mise en place d'un algorithme viscoplastique pour le calcul des déformations plastiques, puis à la mise en place du modèle d'impact rapide sur un massif élastoplastique ou élastoviscoplastique. Dans une seconde partie, une étude paramétrique sera réalisée pour identifier les paramètres les plus influents dans les problèmes d'impacts rapides de type choc laser. En dernière partie, un modèle numérique sera proposé pour simuler le champ de pression induit par un mono-impact de type choc laser ainsi que le couplage de ce dernier au modèle d'impact rapide viscoplastique mis en place.

## 2 Généralités

### 2.1 Définitions

D'après Mandel [MAN 73], les corps élastiques-viscoplastiques sont des corps pour lesquels on peut définir à chaque instant, dans l'espace des contraintes, un domaine élastique borné tel que si la contrainte reste intérieure à ce domaine, les déformations sont réversibles quelque soit leur vitesse et, lorsque la contrainte sort de ce domaine, des déformations permanentes dites plastiques, se produisent. A ce moment la contrainte dépend du trajet de déformation et en général de la vitesse à laquelle il est décrit (corps viscoplastique). La plasticité classique correspond au cas

d'une contrainte indépendante de la vitesse de description du trajet. Dans l'un ou l'autre des cas, la frontière du domaine élastique se modifie au cours du temps sous l'effet de deux causes à savoir :

- les perturbations introduites par les déformations plastiques qui se traduisent par *l'écroûissage* du matériau
- et des remaniements lents qui s'opèrent même en l'absence de déformations plastiques et parfois en absence de toute déformation : il s'agit de *l'adoucissement* du matériau.

Cependant l'allure des courbes d'écroûissage d'un matériau élastique-viscoplastique ne diffère pas sensiblement de celle des matériaux plastiques d'après Lemaitre et Chaboche [LEM 09]. Par contre, trois différences sont mises en évidence entre un matériau viscoplastique et un matériau plastique :

- la vitesse de déformation joue un rôle important sur l'état des contraintes, donc sur la limite élastique du matériau. En effet les essais expérimentaux ont montré que plus la vitesse de déformation est élevée, plus la contrainte est grande pour une même déformation donnée [HOP 05],
- un changement de vitesse de déformation en cours d'essai produit un changement immédiat de la courbe de traction qui a tendance à rejoindre la courbe monotone correspondant à la nouvelle vitesse,
- la notion de seuil de plasticité stricte disparaît car un écoulement peut se produire pour une contrainte inférieure à la contrainte appliquée antérieurement.

## 2.2 Critère de plasticité et surface de charge

Dans tout ce chapitre, Il est supposé que les durées des impulsions sont très courtes et que ces durées sont insuffisantes pour une quelconque élévation de température pendant la durée de propagation des ondes de choc dans le matériau cible ; par conséquent nous négligerons tout effet de température dans la modélisation tout comme dans les simulations.

Pour décrire l'évolution des déformations plastiques, il faut définir au préalable un critère de plasticité, une loi d'écoulement et une loi d'écroûissage. En effet lors d'un chargement important, l'état de contrainte peut atteindre un seuil de plasticité (cf section 2.1). Dès lors un écoulement se produit et une surface délimitant le domaine élastique dans l'espace des contraintes se définit. Cette surface est appelée **surface de charge** ou **frontière élastique**. Elle permet ainsi de définir le critère de plasticité pour déterminer si l'état actuel d'un élément matériel suit un comportement plastique ou élastique. Cette surface peut être représentée par une fonction qui dépend non seulement de la contrainte mais aussi des variables d'écroûissage isotrope notées  $R$  (agrandissement de la surface) et aussi des variables cinématiques notées  $\underline{X}$  (déplacement de la surface). Dans la suite, cette fonction sera notée  $f(\underline{\sigma}, R, \underline{X})$ .

En dimension 3 (ce qui sera le cas ici) la contrainte totale  $\underline{\sigma}$  est comparée à la limite élastique  $\sigma_y$  du matériau par l'intermédiaire d'une contrainte équivalente et le critère de plasticité en tout point matériel est régi par trois critères :

- un comportement élastique si  $f = f(\underline{\underline{\sigma}}, R, \underline{\underline{X}}) < 0$
- un comportement plastique si  $f = f(\underline{\underline{\sigma}}, R, \underline{\underline{X}}) = 0$
- un comportement non physique  $f = f(\underline{\underline{\sigma}}, R, \underline{\underline{X}}) > 0$

Lors de la plastification ( $f = 0$ ), une décharge de la contrainte induit un retour immédiat dans le domaine élastique qui se traduit par la relation  $\dot{f} < 0$ . Le cadre élasto-plastique consiste à imposer au point représentant l'état de contrainte de ne pas quitter la surface de charge pendant l'écoulement. Cette condition est appelée **condition de consistance** et elle se traduit par la relation 6.1.

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \dot{\underline{\underline{\sigma}}} + \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{X}}} : \dot{\underline{\underline{X}}} + \frac{\partial f}{\partial R} \dot{R} = 0 \quad (6.1)$$

Dans ce qui suit nous utiliserons le **critère de von Mises** qui s'écrit :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, R, \underline{\underline{X}}) = J_2(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}) - \sigma_f(R) \quad (6.2)$$

où  $\sigma_f$  est la limite d'élasticité apparente et  $J_2()$  la fonction retournant la contrainte équivalente au sens de von Mises donnée par l'expression EQ. 6.3.

$$J_2(\underline{\underline{S}}) = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{S}}' : \underline{\underline{S}}'} \quad (6.3)$$

avec  $\underline{\underline{S}}'$  le tenseur déviateur du tenseur  $\underline{\underline{S}}$  donné par l'expression EQ. 6.4.

$$S'_{ij} = S_{ij} - \frac{1}{3} \text{Trace}(\underline{\underline{S}}) \delta_{ij} \quad (6.4)$$

Dans le cas d'un comportement visqueux, le critère de plasticité de von Mises sera toujours utilisé.

## 2.3 Déformation et écoulement plastique ou viscoplastique

Dans la majorité des cas, on suppose que le tenseur des déformations totales est additif [LEM 09] car en hypothèse de petites perturbations, le tenseur des déformations totales  $\underline{\underline{\epsilon}}$  peut être décomposé en une partie réversible qui constitue la déformation élastique  $\underline{\underline{\epsilon}}^e$  et une partie inélastique [LEM 09]. La partie inélastique regroupe les termes de déformation plastique indépendantes du temps (nous la supposons négligeable ici), de déformation irréversible permanente qui est la déformation plastique ou viscoplastique (dépendante du temps) notée  $\underline{\underline{\epsilon}}^{vp}$  et une déformation anélastique ou à élasticité retardé (supposée négligeable ici). Ainsi, l'additivité des déformations permet d'écrire les déformations totales sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}^e + \underline{\underline{\epsilon}}^{vp} \quad (6.5)$$

## 6. Modélisation d'un impact rapide élasto-viscoplastique et application pour la simulation d'un mono impact laser

Les contraintes sont reliées aux déformations élastiques par la loi de Hooke donnée par l'expression EQ. 6.6, où  $\underline{\underline{C}}$  est le tenseur d'ordre 4 qui représente le comportement élastique du matériau.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : (\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^{vp}) \quad (6.6)$$

Lorsque l'écoulement plastique se produit, l'évolution de la déformations plastiques du matériau est donnée par

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p = \dot{\lambda} \underline{\underline{\mu}}$$

où  $\underline{\underline{\mu}}$  est le tenseur définissant la direction des déformations, et le coefficients  $\lambda$  est obtenu par la relation de consistance

$$\dot{f} = 0$$

lorsque  $\underline{\underline{\mu}}$  et l'écrouissage sont connus.

La loi d'écoulement plastique s'écrit à l'aide d'un potentiel plastique  $Q$  qui permet de définir la direction des déformations plastiques ou viscoplastiques. Cette relation est donnée par l'expression EQ. 6.7 dans laquelle le coefficient  $\dot{\lambda}$  est appelé **multiplicateur plastique**.

$$\underline{\underline{\epsilon}}^{vp} = \dot{\lambda} \frac{\partial Q}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (6.7)$$

Cette dernière expression montre que l'écoulement plastique est toujours normal à la surface de charge et est régi par le problème d'optimisation de Kuhn Tucker défini par le système d'équations EQ. 6.8.

$$\begin{cases} \dot{\lambda} > 0 & \text{si } f = 0 \text{ et } \dot{f} = 0 \\ \dot{\lambda} = 0 & \text{si } f < 0 \text{ et } \dot{f} < 0 \end{cases} \quad (6.8)$$

La fonction de charge qui décrit le comportement du matériau dans le domaine plastique est donnée par l'expression EQ. 6.9. Cette fonction peut être interprétée comme une généralisation de la fonction de charge définie dans le cas de la plasticité "classique" i.e sans dépendance de la vitesse de déformation. Les matériaux traités ici étant isotropes, la fonction de charge dépend de la contrainte équivalente, de la déformation plastique cumulée  $\gamma$  et de sa vitesse  $\dot{\gamma}$  (problème isotherme).

$$f = f(\underline{\underline{\sigma}}, \gamma, \dot{\gamma}) \quad (6.9)$$

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{2}{3} \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^{vp} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^{vp}} \quad (6.10)$$

$$\gamma = \int_0^t \dot{\gamma} dt \quad (6.11)$$

Les conditions de Kuhn-Tucker qui conditionnent la plastification ou la non plastification du matériau s'écrivent comme suit :

$$\dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\lambda} f = 0, \quad f \leq 0 \quad (6.12)$$

Dans le cas de la plasticité classique, la fonction de charge définie par l'expression EQ. 6.9 ne dépend seulement que de la déformation plastique cumulée  $\gamma$ . Elle est définie par :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, \gamma, \dot{\gamma}) = J_2(\underline{\underline{\sigma}}) - \sigma_f(\gamma, \dot{\gamma} = 0) \quad (6.13)$$

avec  $J_2$  la fonction retournant la contrainte équivalente au sens de von Mises, définie par l'expression EQ. 6.3 et  $\sigma_f(*, *)$  est la fonction décrivant l'érouissage du matériau.

Dans la suite de ce chapitre, les lois de comportement considérées pour décrire le comportement des matériaux sous choc seront des lois à érouissage isotrope uniquement.

### 3 Modélisation d'un impact rapide élasto-plastique ou viscoplastique

#### 3.1 Problème plastique ou viscoplastique en dynamique

Le problème traité dans ce paragraphe s'énonce comme suit : pour un état initial de contraintes, de déformations plastiques, de vitesse de déformation et d'érouissage  $(\underline{\underline{\sigma}}^n, \underline{\underline{\epsilon}}^{pn}, \dot{\gamma}^n, \gamma^n)$  données à un instant  $t_n$ , on cherche un nouvel état  $(\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}, \underline{\underline{\epsilon}}^{pn+1}, \dot{\gamma}^{n+1}, \gamma^{n+1})$  sur un incrément de temps  $\Delta t$  vérifiant les équations locales de Kuhn Tucker.

Ce nouvel état est obtenu par la résolution du système EQ. 6.12. Cette résolution permet de chercher un incrément de déformation  $\Delta \underline{\underline{\epsilon}}^{vp}$  sur la durée  $\Delta t$  tel que :

$$\Delta \lambda = \sqrt{\frac{2}{3} \Delta \underline{\underline{\epsilon}}^{vp} : \Delta \underline{\underline{\epsilon}}^{vp}} \quad (6.14)$$

$$\gamma^{n+1} = \gamma^n + \Delta \lambda \quad (6.15)$$

$$\dot{\gamma}^{n+1} = \frac{\Delta \lambda}{\Delta t} \quad (6.16)$$

$$\underline{\underline{\mu}}^{n+1} = \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}}{J_2(\underline{\underline{\sigma}}^{n+1})} \quad (6.17)$$

$$\underline{\underline{\epsilon}}^{pn+1} = \underline{\underline{\epsilon}}^{pn} + \Delta \lambda \underline{\underline{\mu}}^{n+1} \quad (6.18)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^{n+1} = \underline{\underline{\sigma}}^n - 2 G \Delta \lambda \underline{\underline{\mu}}^{n+1} \quad (6.19)$$

$$f^{n+1} = J_2(\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}) - \sigma_f(\gamma^{n+1}, \dot{\gamma}^{n+1}) = 0 \quad (6.20)$$

avec  $G$  le module de cisaillement défini en fonction du module de Young  $E$  et du coefficient Poisson  $\nu$  par :

$$G = \frac{E}{2(1 - \nu)}$$

$\underline{\underline{\mu}}^{n+1}$  est le tenseur normalisé qui permet de donner la direction des déformations visco-plastiques et vérifiant la propriété suivante

$$\underline{\underline{\mu}}^{n+1} : \underline{\underline{\mu}}^{n+1} = \frac{3}{2}$$

En substituant les équations EQ. 6.14 à 6.19 dans l'équation de consistance EQ. 6.20, on obtient une équation non linéaire de variable inconnue  $\Delta\lambda$  :

$$g(\Delta\lambda) = \bar{\sigma} - \sigma_f\left(\gamma^n + \Delta\lambda, \frac{\Delta\lambda}{\Delta t}\right) = 0 \quad (6.21)$$

$$\bar{\sigma} = J_2\left(\underline{\underline{\sigma}}^n\right) - 3 G\Delta\lambda \quad (6.22)$$

Généralement, les lois de comportement plastiques ou viscoplastiques  $\sigma_f(*,*)$  ne sont pas linéaires, par conséquent il est très difficile de déterminer explicitement l'incrément  $\Delta\lambda$ . Dans la majorité des cas, cet incrément est déterminé en utilisant des méthodes itératives tels que la méthode de Newton-Raphson et ces dérivées.

Dans l'histoire de la méthode semi-analytique [JAC 02a, CHA 11c, CHA 11b, CHA 11e], le couplage de la plasticité (sans dépendance au temps et à la vitesse de déformation) est fait en s'appuyant les travaux de Fotiu et al. [FOT 96]. Ces auteurs ont proposé un algorithme universel dit de retour radial permettant de déterminer l'incrément de déformation plastique en prenant en compte la vitesse de déformation. Cet algorithme sera utilisé ici pour le calcul des déformations plastiques ou viscoplastiques.

### 3.2 Algorithme du retour radial

L'algorithme du retour radial a été proposé par Simo et al. [SIM 85] et étendu notamment par Fotiu et al. [FOT 96] à des cas plus généraux. L'algorithme étendu proposé par Fotiu et al. permet de prendre en compte la vitesse de déformation dans le calcul des déformations plastiques et est inconditionnellement stable et précis. L'algorithme du retour radial avec prédicteur élastique et correcteur plastique a été implémenté, ici seules les grandes lignes sont rappelées.

A tout instant  $t_n$ , connaissant la contrainte totale déviatorique  $\underline{\underline{\sigma}}^n$ , l'écroutissage du matériau  $g^n$ , la vitesse de déformation  $\dot{\gamma}^n$ , l'écroutissage cinématique  $H^n$ , la déformation plastique cumulée  $\gamma^n$ , les nouveaux états sont déterminés sur la base du principe résumé comme suit :

i) Initialisation des variables connaissant  $\gamma^n, \underline{\underline{\sigma}}^n, g^n, H^n$ , à l'instant  $t_n$

$$\begin{aligned}
 \gamma^{(1)} &= \gamma^n \\
 \dot{\gamma}^{(1)} &= \dot{\gamma}^n \\
 \underline{\underline{\sigma}}'^{(1)} &= \underline{\underline{\sigma}}'^n \\
 \sigma^{(1)} &= J_2(\underline{\underline{\sigma}}'^n) \\
 \underline{\underline{\mu}}^{(1)} &= \frac{3 \underline{\underline{\sigma}}'^{(1)}}{2 \sigma^{(1)}} \\
 g^{(1)} &= g^n \\
 H^{(1)} &= H^n
 \end{aligned} \tag{6.23}$$

ii) Déterminer  $f^{(k)}$

$$f^{(k)} = \sigma^{(k)} - g^{(k)} \neq 0 \tag{6.24}$$

iii) Linéarisation de  $f^{(k)}$

$$f_L^{(k)} = f^{(k)} + f_{,\sigma}^{(k)} \Delta \sigma^{(k)} + f_{,\dot{\gamma}}^{(k)} \Delta \dot{\gamma}^{(k)} + f_{,\dot{\gamma}}^{(k)} \Delta \dot{\gamma}^{(k)} = 0 \tag{6.25}$$

$$f_{,\sigma}^{(k)} = 1 \tag{6.26}$$

$$f_{,\dot{\gamma}}^{(k)} = -g_{,\dot{\gamma}}^{(k)} \tag{6.27}$$

$$f_{,\dot{\gamma}}^{(k)} = -g_{,\dot{\gamma}}^{(k)} \tag{6.28}$$

iv) Détermination des incréments de contrainte, déformation plastique et vitesse de déformation

$$\Delta \sigma^{(k)} = -K^{(k)} \Delta \gamma^{(k)} \tag{6.29}$$

$$K^{(k)} = 3 \left( G + \frac{H^{(k)}}{2} \right) \tag{6.30}$$

$$\Delta \dot{\gamma}^{(k)} = \frac{1}{\Delta t} \left[ \sum_{i=1}^{(k)} \Delta \gamma^{(i)} \right] - \dot{\gamma}^{(k)} \tag{6.31}$$

$$\Delta \gamma^{(k)} = \begin{cases} \frac{f^{(k)}}{K^{(k)} + g_{,\dot{\gamma}}^{(k)} + \frac{g_{,\dot{\gamma}}^{(k)}}{\Delta t}} \\ \frac{f^{(1)} + g_{,\dot{\gamma}}^{(1)} \dot{\gamma}_n}{K^{(1)} + g_{,\dot{\gamma}}^{(1)} + \frac{g_{,\dot{\gamma}}^{(1)}}{\Delta t}} \end{cases} \tag{6.32}$$

- v) Mise à jour des contraintes équivalentes, des variables d'écrouissage, de vitesse et de déformation

$$\begin{aligned}
 \underline{\sigma}^{(k+1)} &= \underline{\sigma}^{(k)} - K^{(k)} \Delta \underline{\gamma}^{(k)} \\
 \underline{s}'^{(k+1)} &= \underline{s}'^{(k)} - \frac{2}{3} K^{(k)} \Delta \underline{\gamma}^{(k)} \underline{\mu}^{(k)} \\
 \underline{\gamma}^{(k+1)} &= \underline{\gamma}^{(k)} + \Delta \underline{\gamma}^{(k)} \\
 \underline{\epsilon}^p{}^{(k+1)} &= \underline{\epsilon}^p{}^{(k)} + \Delta \underline{\gamma}^{(k)} \underline{\mu}^{(k)} \\
 g^{(k+1)} &= g \left( \underline{\gamma}^{(k+1)}, \dot{\underline{\gamma}}^{(k+1)} \right) \\
 H^{(k+1)} &= H \left( \underline{\gamma}^{(k+1)} \right) \\
 \underline{X}^{(k+1)} &= \underline{X}^{(k)} + H^{(k)} \Delta \underline{\gamma}^{(k)} \underline{\mu}^{(k)}
 \end{aligned} \tag{6.33}$$

- vi) Vérification la convergence du problème plastique

$$\left| f^{(k+1)} \right| = \left| \underline{\sigma}^{(k+1)} - g^{(k+1)} \right| < \varepsilon. \tag{6.34}$$

Si oui, alors

$$\begin{aligned}
 \underline{\gamma}^{(n+1)} &= \underline{\gamma}^{(k+1)} \\
 \dot{\underline{\gamma}}^{(n+1)} &= \frac{\Delta \underline{\gamma}^{(k+1)}}{\Delta t} \\
 \underline{\epsilon}^p{}^{(n+1)} &= \underline{\epsilon}^p{}^{(k+1)} \\
 g^{(n+1)} &= g^{(k+1)} \\
 H^{(n+1)} &= H^{(k+1)} \\
 \underline{X}^{(n+1)} &= \underline{X}^{(k+1)}
 \end{aligned} \tag{6.35}$$

Sinon, reprendre les étapes iii) à vi)

### 3.3 Algorithme de simulation d'un impact rapide viscoplastique

Dans ce paragraphe, les étapes de l'algorithme de modélisation d'un impact rapide élasto-plastique ou viscoplastique seront présentées en détail. L'algorithme peut être structuré en trois grandes étapes : recherche de l'incrément de déformation et équilibre mécanique de l'état, calcul des contraintes résiduelles et enfin critère d'arrêt des calculs.

#### 3.3.1 Zone potentiellement plastique

L'optimisation du solveur plastique passe par la minimisation du coup des opérations à effectuer et notamment la réduction de la taille de zone de calcul. L'un des avantages de la méthode semi-analytique étant de limiter les calculs uniquement dans les zones d'intérêt, il est aussi possible de limiter le calcul plastique uniquement dans les zones se déformant plastiquement. Dans

le chapitre 4, la notion de zone potentiellement plastique a été introduite pour décrire l'évolution eulérienne de la zone susceptible de se déformer plastiquement. Dans le couplage élasto-plastique ou élasto-viscoplastique, cette définition de zone potentiellement plastique est modifiée. Ici, à tout instant  $t$  la zone potentiellement plastique est donnée par :

$$\left\{ M \in Z_c / J_2(\underline{\underline{\sigma}}(M)) - \sigma_f(\gamma, \dot{\gamma}) \geq 0 \right\} \quad (6.36)$$

où  $\underline{\underline{\sigma}}$  est la contrainte totale,  $\gamma$  la déformation plastique équivalente et  $\dot{\gamma}$  la vitesse de déformation à l'instant  $t$  dans le massif.  $\sigma_f(., .)$  est la loi de comportement donnant la limite élastique dynamique.  $Z_c$  est la zone de calcul décrite dans le CHAP. 4.

La zone potentiellement plastique sera donc la zone sur laquelle le calcul plastique ou viscoplastique sera effectué à chaque incrément de temps. La réduction de la zone de calcul à la zone potentiellement plastique pour le calcul (visco)plastique permet également de décrire le plus fidèlement possible le parcours des ondes plastiques dans le massif.

### 3.3.2 Calcul des états mécaniques induits par impact rapide

Le modèle viscoplastique mis en place ici permet de calculer à chaque incrément de temps  $\Delta t$  les états mécaniques engendrés par le passage de l'onde de choc. Partant de l'instant initial  $t = 0$ , les contraintes élastiques dues au champ de pression appliqué sont calculées à tout instant  $t_n = (n - 1)\Delta t$  en suivant l'algorithme de simulation d'impact rapide présenté dans le chapitre 4. En tout point du massif, les contraintes demeurent nulles tant que l'onde de choc initiée n'a pas atteint ce point. Dès lors que l'onde de choc atteint un point du massif, la contrainte observée est non nulle et son amplitude peut être définie par la contrainte équivalente au sens de von Mises. Tant que l'amplitude de l'onde de choc n'a pas atteint la limite élastique du matériau, la contrainte totale dans le massif demeure égale à la contrainte élastique (contrainte due à la pression appliquée). Lorsque l'amplitude de l'onde de choc (la contraintes équivalentes au sens de von Mises) dépasse la limite élastique du matériau sollicité, des déformations plastiques ou viscoplastique se forment dans le matériau. Ces déformations plastiques sont liées d'une part, à l'évolution des contraintes totales dans le massif et d'autre part leur évolution (déformations plastiques) dans le massif permet de modifier le champ de contraintes résiduelles et par conséquent les contraintes totales sur chaque durée de longueur  $\Delta t$ .

L'algorithme du retour radial viscoplastique intégré permet de calculer les incréments de déformations viscoplastiques, ou plastiques si le comportement du matériau est décrit par une loi sans dépendance de vitesse. A chaque instant où apparait une déformation plastique dans la massif, un premier incrément de déformation  $\underline{\underline{\epsilon}}^{vp}$  est déterminé avec une vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}^{vp}$  associée si le comportement du matériau sous choc obéit à une loi viscoplastique. Cet incrément génère à son tour un incrément de contraintes résiduelles  $\underline{\underline{\sigma}}^r$  qui est utilisé pour vérifier l'équilibre sur les contraintes totales dans le massif. L'équilibre des contraintes totales dans le massif est donnée par l'expression EQ. 6.37.

$$|f(\underline{\underline{\sigma}}^n + \underline{\underline{\sigma}}^r, \underline{\underline{\epsilon}}^{vp}, \dot{\epsilon}^{vp})| = |J_2(\underline{\underline{\sigma}}^n + \underline{\underline{\sigma}}^r) - \sigma_f(\gamma^{n+1}, \dot{\epsilon}^{vp})| \leq \epsilon \quad (6.37)$$

avec  $\epsilon$  l'erreur sur l'équilibre des contraintes résiduelles. Dans les simulations elle est prise égale à  $10^{-5}$

6. Modélisation d'un impact rapide élasto-viscoplastique et application pour la simulation d'un mono impact laser

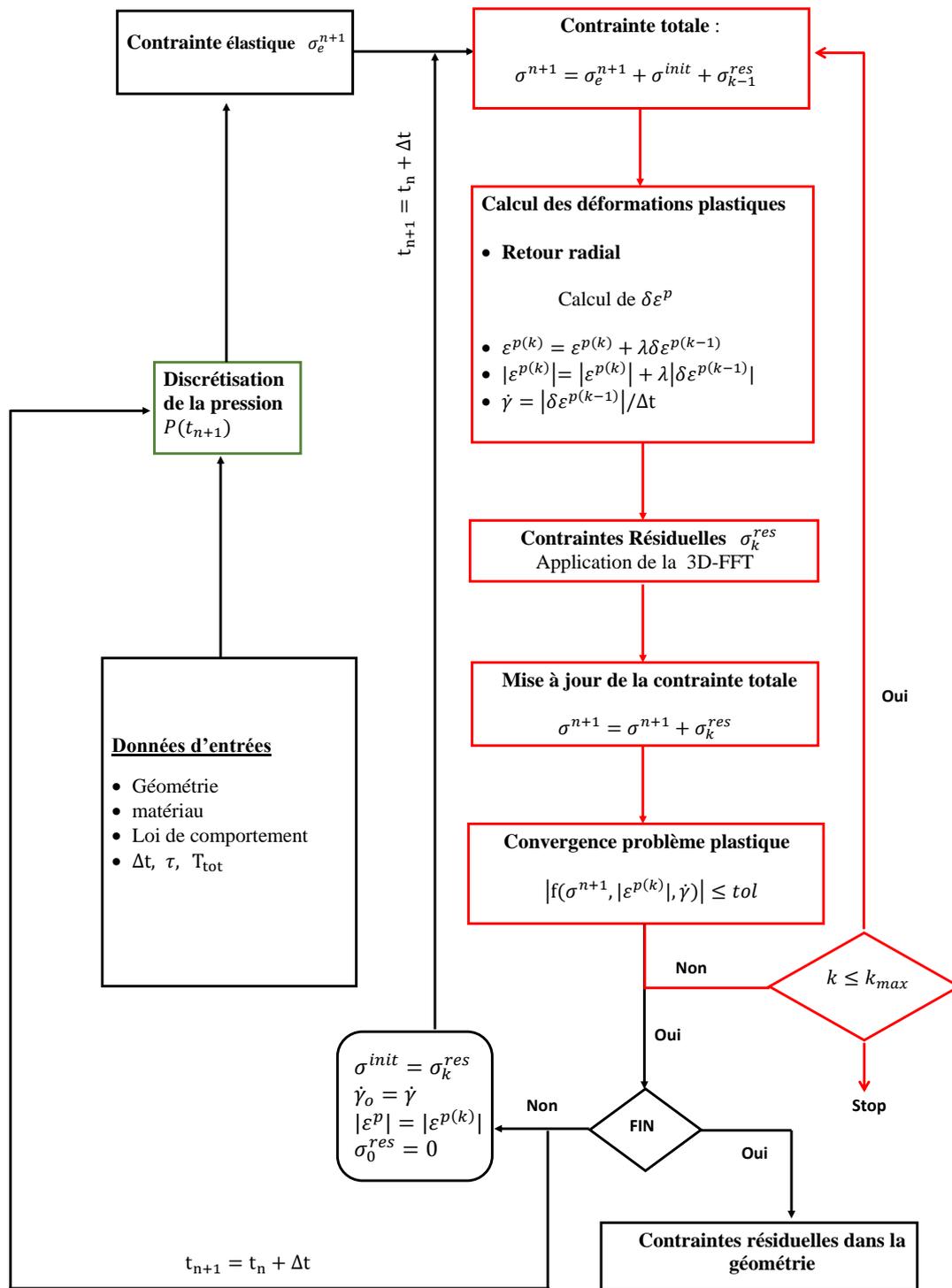


FIGURE 6.1: Algorithme général du modèle d'impact rapide viscoplastique. Le solveur (visco)plastique est illustré en rouge

Si la convergence est atteinte, alors  $(\underline{\underline{\sigma}}^r, \underline{\underline{\epsilon}}^{vp}, \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^{vp})$  constitue l'état mécanique du matériau à l'instant  $t_n$  :  $\underline{\underline{\sigma}}^r$  est la contrainte dite résiduelle (dynamique) due à la présence de la déformation plastique  $\underline{\underline{\epsilon}}^{vp}$  dans le massif. Lorsque la convergence n'est pas vérifiée, un nouvel incrément de déformation plastique est calculé pour permettre la mise à jour de l'état mécanique donnant l'équilibre sur les contraintes totales. Le processus est réitéré jusqu'à ce que l'équilibre soit vérifié.

L'état mécanique  $(\underline{\underline{\sigma}}^r, \underline{\underline{\epsilon}}^{vp}, \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^{vp})$  en fin de convergence est reconduit à l'instant  $t_n + \Delta t$  comme un état résiduel initial du massif auquel s'ajoutent les nouvelles contraintes élastiques. Ce processus est répété jusqu'à ce que le critère d'arrêt (ce point sera discuté dans la section 3.3.4) de calcul soit atteint. A l'arrêt du calcul, les contraintes résiduelles sont recalculées sur toute la géométrie et l'état mécanique obtenu est donc l'état résiduel généré par les ondes de choc au cours d'un impact rapide.

L'algorithme général de la simulation d'un impact rapide élasto-plastique ou élastique-viscoplastique est présenté sur la figure 6.29.

*Remarque.* Il est important de rappeler ici que, dans la littérature, nous n'avons pas trouvé d'étude faite sur le profil temporel des contraintes résiduelles (évolution de la contrainte résiduelles au cours du temps) dans le domaine d'impact rapide. Ceci est tout à fait logique car généralement le terme contraintes résiduel n'est employé que dans une analyse statique pour désigner les contraintes permanentes issues des déformations plastiques. Ici les contraintes résiduelles calculées au cours du processus de propagation des ondes de choc représentent juste les contraintes que l'on obtiendrait si une décharge s'effectue dès l'apparition des déformations plastiques. Ces contraintes deviennent résiduelles à la fin du problème de choc lorsqu'elles ont été calculées sur tout le massif. Cet abus de langage sera utilisé dans tout le chapitre.

### 3.3.3 Calcul des contraintes résiduelles sous choc

Le calcul des contraintes résiduelles est basé sur le modèle d'inclusion équivalente au sens d'Eshelby. Dans le chapitre précédent, nous avons mené une étude approfondie sur le choix du modèle d'inclusion à utiliser. La question de fond de ce chapitre reposait sur la présence des termes inertiels dans les formulations du modèle inclusion, ce qui revenait à étudier le comportement des inclusions en présence du terme inertiel ( $\rho\dot{U}$ ). A l'issue de cette étude, nous avons conclu que l'utilisation du modèle d'inclusion dynamique n'est pas adapté pour représenter les contraintes engendrées par la présence d'une déformation plastique dans le massif lors d'un chargement dynamique pour des raisons de coup de calcul. Nous utiliserons donc le modèle d'inclusion statique déjà implémenté dans le code ISAAC. Une brève synthèse de ce modèle est présentée ci-dessous. Pour plus de détails le lecteur pourra se référer aux travaux de Jacq [JAC 01] et Chaise [CHA 11d].

Les coefficients d'influence permettant d'effectuer le calcul des contraintes résiduelles  $\underline{\underline{\sigma}}^{res}$  dues à la présence d'un cube de déformation plastique uniforme dans un massif semi-infini ont été proposés par Chiu [CHI 77, CHI 78] sous forme intégrale et Jacq [JAC 01] sous forme analytique. Le principe du calcul est identique à celui présenté dans le chapitre 5 à savoir la décomposition du problème en trois sous problèmes comme illustré sur la figure 6.26. Contrairement à ce qui a été présenté dans le chapitre 5, les inclusions ici considérées n'émettent plus d'onde car elles

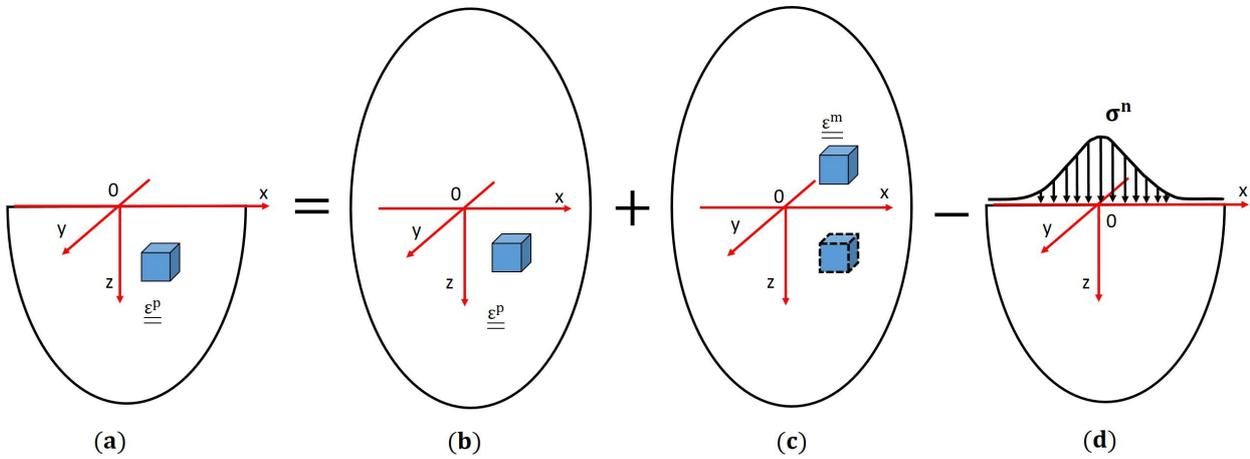
## 6. Modélisation d'un impact rapide élasto-viscoplastique et application pour la simulation d'un mono impact laser

sont déjà dans leur état statique. Ainsi, les contraintes résiduelles sont obtenues sur la base de la formule EQ. 6.38.

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\text{res}} = \underline{\underline{\sigma}}^{\text{res.}\infty} + \underline{\underline{\sigma}}^{\text{res } m.\infty} - \underline{\underline{\sigma}}^{\text{res.surf}} \quad (6.38)$$

où  $\underline{\underline{\sigma}}^{\text{res.}\infty}$ ,  $\underline{\underline{\sigma}}^{\text{res } m.\infty}$  et  $\underline{\underline{\sigma}}^{\text{res.surf}}$  sont respectivement les contraintes dues à la présence de l'inclusion dans le massif infini, de son miroir dans le même massif et les contraintes engendrées par la contrainte normale dans le plan  $z = 0$ . Cette contrainte normale résulte de la sommation des contributions de l'inclusion et de son miroir dans le massif infini. Le calcul de chacun des termes et l'implémentation dans le code ISAAC sont présentés en détails dans les travaux de thèse de Jacq [JAC 01] et de Chaise [CHA 11d].

En présence d'un volume  $\Omega_d$  de déformations plastiques, les contraintes résiduelles engen-



**FIGURE 6.2:** Principe de superposition : (a) problème initial, présence d'un cube de déformation plastique dans le massif semi-infini, (b) considération du même cube dans le massif infini, (c) considération du cube miroir dans le même massif infini et (c) contrainte normale appliquée en surface du massif semi-infini

drées en tout point  $M(x,y,z)$  du massif sont obtenues par application du principe de superposition et sont données par l'expression ci-dessous EQ. 6.39.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{\text{res}}(x,y,z) = & \sum_{(x_0,y_0,z_0) \in \Omega_p} \left[ B_{ijkl}^{\infty}(x-x_0,y-y_0,z-z_0) \epsilon_{kl}^p(x_0,y_0,z_0) \right. \\ & \left. + B_{ijkl}^{\infty}(x-x_0,y-y_0,z+z_0) \epsilon_{kl}^{pm}(x_0,y_0,z_0) \right] \\ & - \sum_{(x',y') \in A_d} C_{kl}^p(x-x',y-y',z) \sigma_{kl}^n(x',y') \end{aligned} \quad (6.39)$$

où  $A_d$  est la zone discrétisée qui représente le domaine de calcul et  $\sigma^n$  est la contrainte normale à la surface libre du massif qui est générée par le volume de déformations plastiques et de son miroir dans le massif infini.  $(x_0,y_0,z_0)$  représente le centre de chaque cuboïde de déformation plastique

discrétisant le volume  $\Omega_p$ .

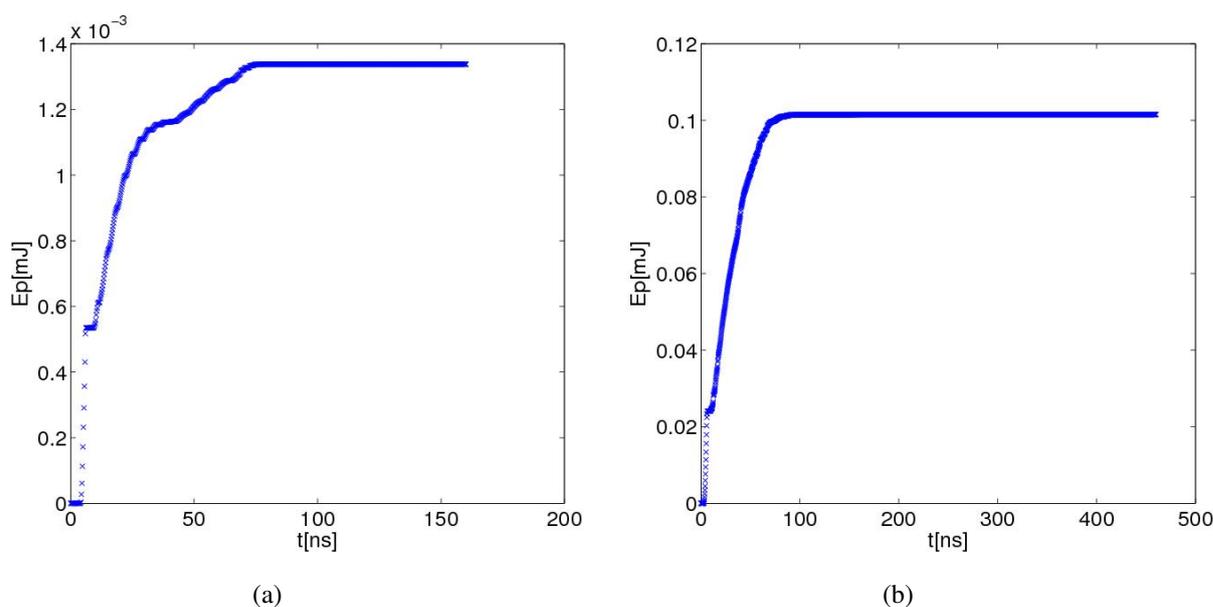
$$\begin{aligned} \sigma^n(x', y') = & \sum_{(x_0, y_0, z_0) \in \Omega_p} \left[ B_{zzkl}^\infty(x' - x_0, y' - y_0, z' - z_0) \varepsilon_{kl}^p(x_0, y_0, z_0) \right. \\ & \left. + B_{zzkl}^\infty(x' - x_0, y' - y_0, z' + z_0) \varepsilon_{kl}^{pm}(x_0, y_0, z_0) \right] \end{aligned} \quad (6.40)$$

Les coefficients  $B_{zzkl}^\infty$  sont les coefficients d'influence donnés dans l'ANNEXE C qui représentent l'effet de la présence d'un cuboïde de déformation plastique uniforme dans un massif infini. Les  $C_{kl}^p$  représentent les coefficients en statique dus à un champ de pression appliqué sur une surface élémentaire de taille  $\Delta x \times \Delta y$  proposé par Jacq et al. [JAC 02b].

### 3.3.4 Critère d'arrêt des calculs

Un problème majeur dans la simulation est la détermination du critère d'arrêt des calculs. Dans le chapitre 1, la revue de la littérature a permis de rappeler les différents critères employés dans la littérature [KAN 06, SON 10, WEI 14] et qui permettent l'arrêt du calcul dynamique au profit du calcul statique pour la détermination des états résiduels.

Contrairement au critère sur l'énergie cinétique et l'énergie interne du massif proposé par ces



**FIGURE 6.3:** Illustration de l'énergie plastique dissipée au cours de la propagation des ondes de choc dans un acier : (a) cas d'un impact rapide avec une pression maximale de 1 GPa élasto-plastique avec la loi d'érouissage Ramberg-Osgood, (b) cas d'un impact rapide élasto-viscoplastique d'une pression maximale de 4GPa avec une loi d'érouissage du type Johnson-Cook

auteurs, dans nos simulations, nous avons choisis d'observer l'évolution de l'énergie plastique dissipée au cours du processus et d'arrêter les calculs lorsque l'énergie plastique totale dissipée est stationnaire comme illustré sur la figure 6.3. Dans un premier temps, nous cherchons le temps  $t_0$

pour lequel la pression devient quasi nulle en surface ( $P(t_o) = P_o$  pour le choc laser avec  $P_o$  la pression à partir de laquelle le matériau commence à se plastifier.  $P(t_o) = 0 Pa$  lorsque le profil de pression est défini au préalable et tabulé en entrée). Le critère d'arrêt est activé lorsque le temps  $t = n\Delta t \geq \beta t_o$ . Dans les simulations élasto-plastiques  $\beta = 2$  et pour les simulations viscoplastiques  $\beta = 4$ . Enfin on s'assure que sur les 100 incréments qui suivent la variation de l'énergie est quasi négligeable. Ici, la variation fixée n'excède pas  $10^{-6}$ . Les calculs sont donc arrêtés dès que ce dernier point du critère d'arrêt est vérifié. En choisissant donc l'énergie plastique dissipée comme critère nous supposons ici que la stabilisation de l'énergie plastique totale dissipée conduit à la formation de faibles déformations plastiques qui ont une influence négligeable sur les états mécaniques résiduels.

### 3.3.5 Comportement viscoplastique sous choc

Dans ce paragraphe, nous présentons le modèle viscoplastique implémenté dans le code ISAAC pour la simulation du comportement des matériaux sous choc.

Afin de reproduire le plus fidèlement possible la réponse dynamique du matériau viscoplastique, deux objectifs doivent apparaître dans la modélisation, à savoir [SON 10] :

- d'une part, la modélisation du comportement des matériaux sous choc doit représenter quasiment le seuil de plastification sous un choc à très grande vitesse de déformation : ce qui nécessite donc la prise en compte de la vitesse de déformation durant toute la durée de propagation des ondes de choc (cf section 2.1).
- d'autre part, elle doit représenter une loi statique réaliste permettant de déterminer les états résiduels du matériau à la fin du processus : à ce stade, la vitesse de déformation devient négligeable, par conséquent les contraintes totales sont : soit insuffisantes pour générer à nouveau des déformations plastiques, soit elles génèrent de faibles déformations plastiques que l'on peut supposer négligeables.

Pour répondre à ces deux critères dans la modélisation, une loi de comportement de type Johnson-Cook a été implémentée pour reproduire le comportement du matériau sous choc. La disponibilité abondante des paramètres matériaux dans la littérature a été la raison principale du choix d'une telle loi. Comme présenté dans le chapitre 1, il existe plusieurs variantes de la loi de Johnson-Cook. Celle implémentée dans le code est donnée par l'expression 1.24. Dans un souci de simplification et surtout afin d'éviter les erreurs numériques lorsque la vitesse de déformation prend des valeurs en dessous de la vitesse de référence  $\dot{\bar{\epsilon}}_o^p$ , l'implémentation est faite en suivant la définition donnée par l'expression EQ. 6.41.

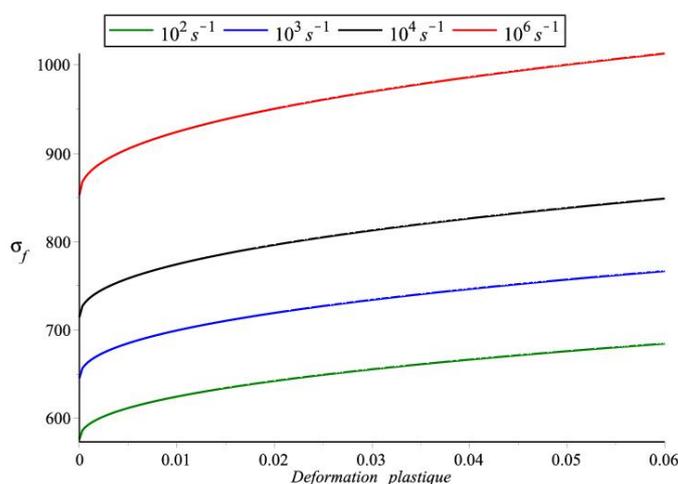
$$\sigma_f(\bar{\epsilon}^p, \dot{\bar{\epsilon}}^p) = \begin{cases} [A + B(\bar{\epsilon}^p)^n] & \text{si } \dot{\bar{\epsilon}}^p \leq \dot{\bar{\epsilon}}_o^p \\ [A + B(\bar{\epsilon}^p)^n] \left[ 1 + C \ln \left( \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^p}{\dot{\bar{\epsilon}}_o^p} \right) \right] & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.41)$$

où la définition et la signification de chacun des paramètres est donnée dans le tableau 1.1.

La loi implémentée est donc constituée de deux termes : un terme élasto-plastique avec écrouissage isotrope et un terme visqueux qui introduit la sensibilité à la vitesse de déformation. Ceci

décrit parfaitement les deux objectifs attendus dans la modélisation. Cette loi est la plus utilisée dans les simulation de chocs puisqu'elle permet d'augmenter la limite élastique du matériau avec la vitesse de déformation comme illustré sur la figure 6.4. Sur cette figure l'évolution de l'écroutissement du matériau est donnée pour différentes valeurs de vitesse de déformation. Cela corrèle bien avec les observation de Hopkinson [HOP 05].

Toutefois, il est important de souligner ici que la loi de Johnson-Cook décrit correctement le comportement du matériau pour des vitesses de déformation allant de  $10^3 \text{s}^{-1}$  à  $10^5 \text{s}^{-1}$ . Au delà de  $10^5 \text{s}^{-1}$  elle devient quelque fois insuffisante. Bien entendu, le matériau choisis ici pour la simulation du choc visqueux peut se déformer avec une vitesse de déformation pouvant atteindre  $10^6 \text{s}^{-1}$ . Ainsi, les résultats présentés ici peuvent présenter quelques insuffisances au niveau de la modélisation du comportement. Une détermination plus fine de la loi de comportement du matériau à grande vitesse de déformation serait nécessaire pour une bonne prédiction. Ce point sera évoqué dans les perspectives de cette thèse.



**FIGURE 6.4:** Représentation de la loi de comportement à différentes vitesses de déformation  $\dot{\epsilon}^p$  avec les valeurs de paramètres suivants :  $A=870 \text{ MPa}$ ,  $B=400 \text{ MPa}$ ,  $n=0.4$ ,  $C=0.015$  et  $\dot{\epsilon}_o^p = 10^{-2} \text{s}^{-1}$

## 4 Validation du modèle d'impact rapide

Pour la validation du modèle semi-analytique mis en place, un impact rapide élasto-plastique à écroutissement isotrope sans prendre en compte l'effet retard (vitesse de déformation plastique) a été réalisée pour valider le solveur plastique mis en place. Dans une seconde partie, un impact rapide élastique-viscoplastique (prise en compte de la vitesse de déformation) a été réalisé pour la validation du modèle d'écroutissement.

## 4.1 Impact rapide élasto-plastique

### 4.1.1 Paramètres numériques pour les modèles éléments finis et semi-analytique

Dans cette section, un modèle élasto-plastique d'impact rapide est réalisé avec le logiciel commercial Abaqus version 6.11 avec le solveur dynamique explicite pour valider l'algorithme semi-analytique mis en place. Un modèle axisymétrique a été réalisé sous Abaqus (voir FIG. 6.5). Les dimensions de la géométrie ont été choisies suffisamment grandes devant la taille de la zone d'impact pour éviter tout effet de bord i.e un retour d'onde dans le massif et ainsi avoir les hypothèses de massif semi-infini.

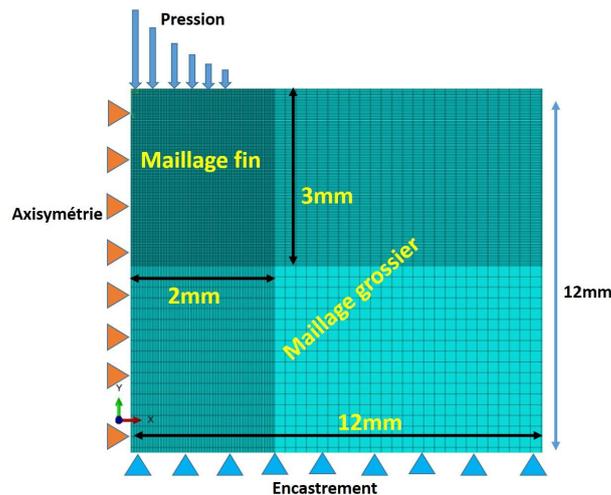


FIGURE 6.5: Modèle éléments finis axisymétrique pour la validation de l'algorithme élasto-plastique/visco-plastique

### Matériau et chargement

Le matériau considéré ici est un acier dont les propriétés matériaux sont reportées dans le tableau 6.3. Nous supposons que le comportement du matériau sous choc obéit à une loi du type Ramberg-Osgood lors du processus de choc. Cette loi est définie par l'expression EQ. 6.42.

$$\sigma_y = A + B(\epsilon^p)^n \quad (6.42)$$

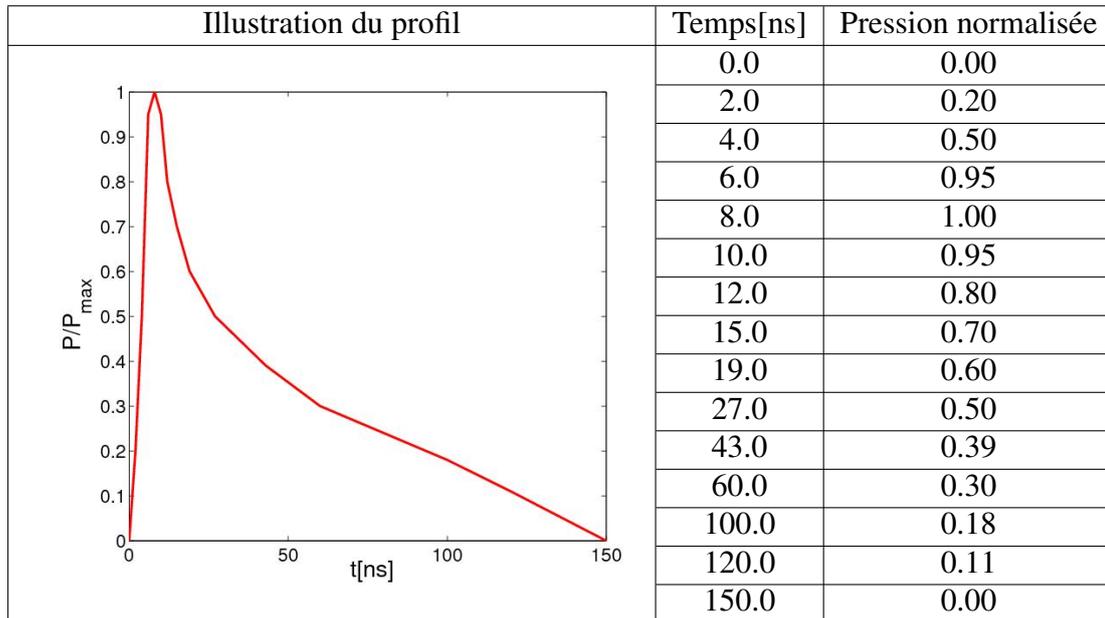
où les coefficients A, B, et n sont des paramètres matériaux reportés dans le tableau TAB. 6.1.

Une distribution gaussienne (voir le tableau TAB. 4.1 pour l'expression analytique et la forme

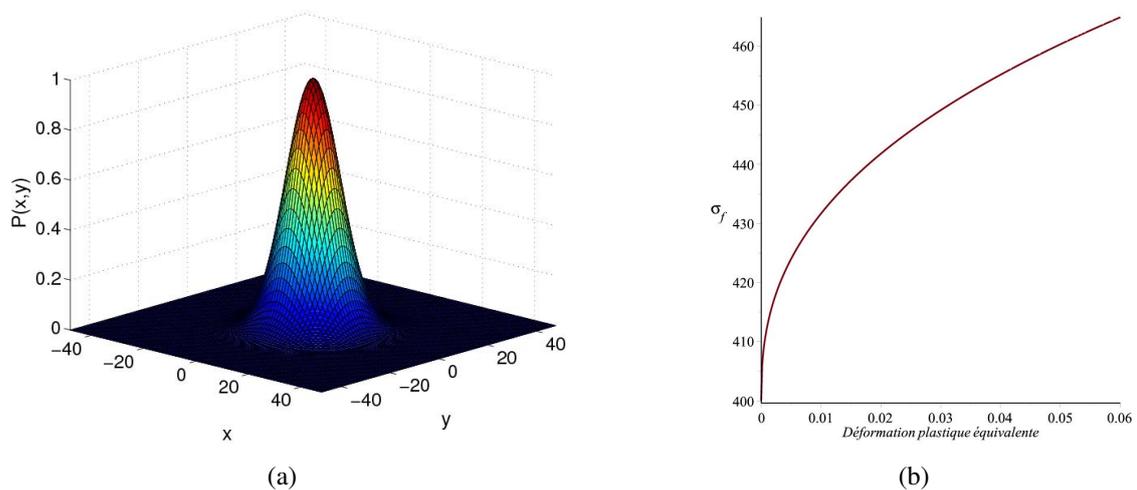
Paramètres	A[MPa]	B[MPa]	n
Valeurs	400	200	0.4

TABLE 6.1: Paramètres matériaux pour la simulation d'un impact rapide élasto-plastique

du spot) est choisie pour reproduire la distribution spatiale du champ de pression appliqué sur la surface libre du massif. Le profil temporel de la pression est tabulé dans Abaqus et reproduit sur le



**TABLE 6.2:** Profil de pression tabulé pour la simulation d'impact rapide élasto-plastique



**FIGURE 6.6:** (a) Illustration de la distribution spatiale du champ de pression et (b) Illustration de la loi de comportement élasto-plastique du type Ramberg-Osgood donnée par l'expression 6.42 pour les paramètres matériaux donnés dans le tableau 6.1

## 6. Modélisation d'un impact rapide élasto-viscoplastique et application pour la simulation d'un mono impact laser

tableau 6.2. La pression maximale  $P_{max}$  appliquée est de  $1\text{GPa}$  et est atteinte à l'instant  $t = 8\text{ ns}$ . La durée de l'impulsion est de  $150\text{ ns}$ . Le rayon  $R$  de base du spot est fixé à  $0.1\text{mm}$ .

Taille des éléments	Code éléments finis (Abaqus, 2D)		Méthode semi-analytique (3D) $\Delta x = \Delta y = 20\mu\text{m}$ , $\Delta z = 20\mu\text{m}$
	Maillage fin $\Delta x = \Delta y = 40\mu\text{m}$ , $\Delta z = 40\mu\text{m}$	Maillage grossier non constante	
Type d'éléments	CAX4R		cubique avec un point de calcul en surface
Pression	distribution gaussienne de rayon $R = 100\mu\text{m}$		distribution gaussienne de rayon $R = 100\mu\text{m}$
Matériaux	module de Young $E = 210\text{ GPa}$ Coefficient de Poisson $\nu = 0.3$ Densité $\rho = 7800\text{Kg m}^{-3}$		

**TABLE 6.3:** Paramètres numériques pour la validation du modèle élasto-plastique : simulation par éléments finis et celle de la méthode semi-analytique

### Stabilité du maillage sur le modèle éléments finis dans ABAQUS

Le problème d'impact élasto-plastique est très sensible au maillage, ce point a été aussi souligné par Kan et al. [KAN 06] dans leur travaux sur la simulation du choc laser. L'influence du maillage sur les résultats a été étudiée afin de choisir une taille optimale des éléments dans la zone d'intérêt. En effet, plus le maillage est fin, plus le pas de temps critique est petit. La taille optimale choisie dans la zone d'intérêt à l'issue de cette étude est reportée dans le tableau 6.3. Des éléments de taille relativement grossière ont été utilisés autour de la zone d'intérêt car cela n'affecte pas les résultats dans la zone d'impact.

### Paramètres numériques pour la méthode semi-analytique

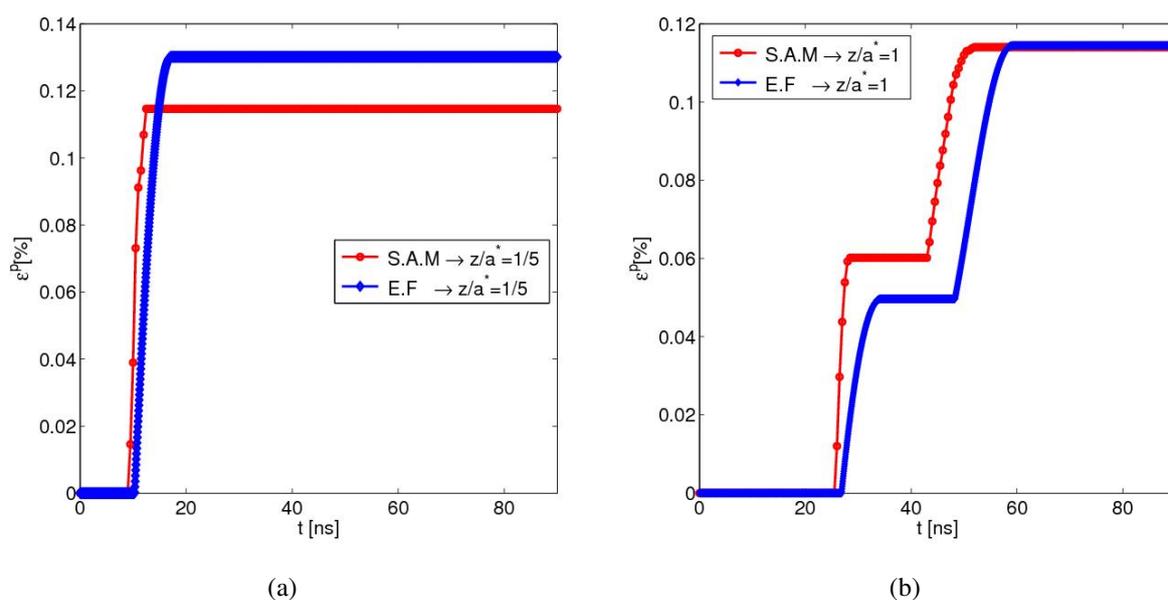
Pour la simulation d'un impact rapide élastoplastique par la méthode semi-analytique (modèle 3D), le même matériau et les mêmes paramètres de pression que le modèle éléments finis ont été choisis. Ici, le profil de pression est donné en entrée sous sa forme tabulé et est discrétisé par des impulsions créneaux de durée  $\tau = \Delta t = 0.2\text{ns}$ ,  $\Delta t$  étant le pas de temps. La géométrie est discrétisée par des éléments cubiques de taille deux fois plus petite que celle du modèle éléments finis. L'ensemble des paramètres numériques est reporté dans les tableaux 6.1, 6.3.

### 4.1.2 Résultats du modèle élasto-plastique et discussions

Les résultats de la comparaison entre le modèle éléments finis (ABAQUS explicite) et celui de la méthode semi-analytique sont reportés sur la figure 6.7. Sur cette figure, l'évolution (historique) des déformations plastiques cumulées en différents points du massif est comparée : un point proche de la surface (FIG. 6.7(a)) et un point plus en profondeur (FIG. 6.7(b)). Ces points ont été choisis pour coïncider avec les points de Gauss du modèle éléments finis.

Sur ces figures, un effet retard est observé sur l'évolution des déformations plastiques dans le

massif au cours de la propagation des ondes de choc. L'onde plastique dans le modèle S.A. arrive plus vite que celui du modèle éléments finis. Ceci peut être lié à la différence de position entre les points de calculs comme présenté dans le CHAP. 4. Néanmoins, l'erreur entre les deux modèles n'excède pas 2% sur les déformations plastiques observées plus près de la surface. L'erreur entre les deux modèles diminue avec la profondeur comme montré sur la figure 6.7(b). Dans la figure 6.10, nous obtenons malgré les simplifications effectuées les mêmes profondeurs de déformations plastiques et de contraintes de von Mises résiduelles que le modèle éléments finis. Également les mêmes ordres de grandeur sont obtenus pour les contraintes de von Mises résiduelles.

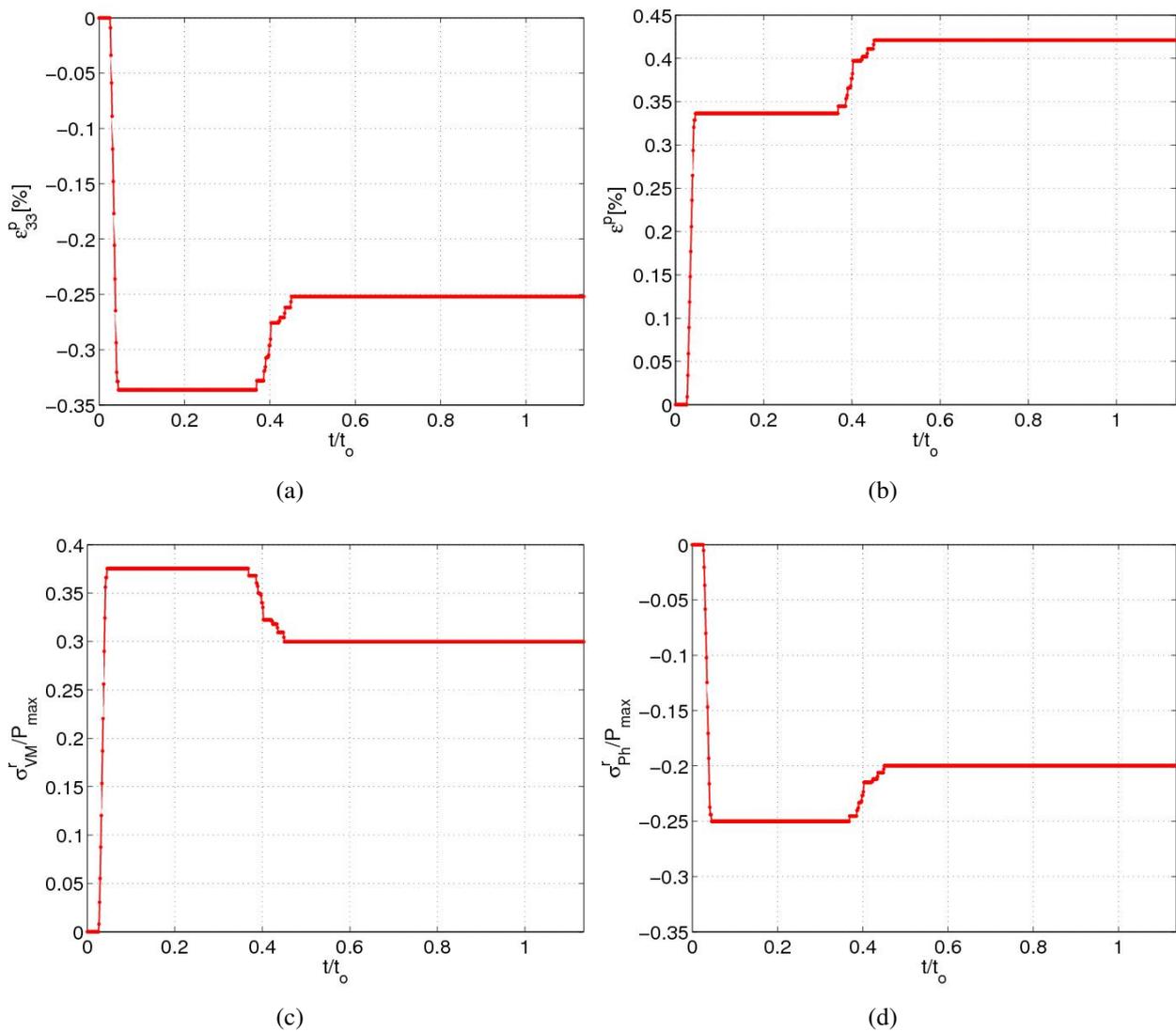


**FIGURE 6.7:** Historique des déformations plastiques cumulées dans la profondeur du massif : (a) près de la surface du massif au point  $(0, 0, a^*/5)$ , (b) point plus en profondeur  $(0, 0, a^*)$

Sur les figures 6.8, les résultats obtenus dans la zone d'impact (plan  $z=0$ ) plus précisément au centre de l'impact (point de coordonnées  $(0, 0, 0)$ ) sont illustrés pour les déformations plastiques (FIG. 6.8(a)), déformations plastiques cumulées (FIG. 6.8(b)), contraintes de von Mises résiduelles (FIG. 6.8(c)) et contraintes hydrostatiques résiduelles (FIG. 6.8(d)). Les contraintes sont normalisées par la pression maximale appliquée et l'axe des abscisses sur chaque figure est normalisé par la durée d'impulsion  $t_{pul} = t_o = 150$ . Sur ces figures, quatre étapes sont observées sur l'évolution des états mécaniques au cours de la propagation des ondes de choc dans le matériau :

- une augmentation des contraintes et des déformations plastiques est observée entre les instants  $t=0$  ns et  $t \simeq 0.05t_0 \simeq 8$ ns. Cette phase représente la réponse du matériau face à la pression appliquée.
- dès que le pic de pression est atteint, une phase de stabilisation est observée sur les déformations plastiques comme sur les contraintes résiduelles entre les instants  $t \simeq 0.05t_0 \simeq 8$ ns et  $t \simeq 0.38t_0$ .

## 6. Modélisation d'un impact rapide élasto-viscoplastique et application pour la simulation d'un mono impact laser



**FIGURE 6.8:** Historique des contraintes "résiduelles" et des déformations plastiques dans la zone d'impact (plan  $z = 0$ ) après un impact rapide élasto-plastique de pression maximale  $P=1\text{GPa}$  et diamètre de spot  $d = 0.2\text{mm}$  et influence de l'onde de décharge : (a) déformation plastique  $\epsilon_{33}^p$ , (b) déformation plastique cumulée  $\epsilon^p$ , (c) contrainte de von Mises résiduelle, (d) contrainte hydrostatique résiduelle

- entre les instants  $t \simeq 0.38t_0$  et  $t \simeq 0.46t_0$ , la décharge de la pression entraîne un effet de décharge dans le matériau et par conséquent une réversibilité sur les déformations plastiques (FIG. 6.8(a)). En effet au cours de cette étape, les contraintes normales de compression ( $\sigma_{33}$ , dues au champ de pression) sont d'amplitude nettement plus faible de que celles des contraintes radiales ( $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ) qui sont des contraintes de traction (il faut noter aussi que ces contrainte de traction sont d'amplitude plus grande que celle des contraintes résiduelles radiales). D'après la section 2.3 dans le CHAP. 4 sur la propagation des ondes de choc dans le matériau, cette étape de réversibilité correspond à la phase de détente latérale des ondes de

choc dans le matériau. Pendant ce temps (lors de la réversibilité des formations plastique), les déformations plastiques cumulées augmentent (FIG. 6.8(b)) car  $c$ 'est une grandeur scalaire positive et additive.

- après cette phase de réversibilité, toutes les contraintes résiduelles et déformations plastiques se stabilisent donnant ainsi les état mécaniques résiduels en fin du choc.

Nous avons aussi observé le phénomène de réversibilité en sous couche dans la massif et qui s'étend sur une épaisseur mince d'environ  $0.8a^*$  dans le massif.

Paradoxalement, nous n'avons pas pu observer ce phénomène de réversibilité des déformations plastiques et des contraintes résiduelles dans notre modèle éléments finis. Dans la littérature, à notre connaissance aucune simulation numérique du procédé de choc laser n'a montré ce résultat pour un impact élasto-plastique (plasticité classique). Ceci explique aussi, les écarts observés sur les contraintes résiduelles finales et sur les déformations plastiques lorsqu'on s'approche de la surface.

Comme souligné en remarque dans la section 3.3.2, dans cette analyse, le terme "résiduelle(s)" n'est pas parfaitement approprié au cours de la propagation des ondes de choc jusqu'à la fin de la réversibilité des déformations plastiques (étape 1 à 3). En effet, au cours de ces étapes les contraintes dites ici "résiduelles" (FIG. 6.8(c), 6.8(d)) continuent de changer. Elles représentent juste les contraintes observées dans le massif si une décharge complète devait avoir lieu. Elles le sont après la réversibilité des déformations plastiques. Ceci est un avantage de la méthode semi-analytique : en effet, ici nous connaissons à tout instant cette contrainte contrairement au modèle éléments finis où il faut réaliser un calcul supplémentaire avec transfert des déformations plastiques.

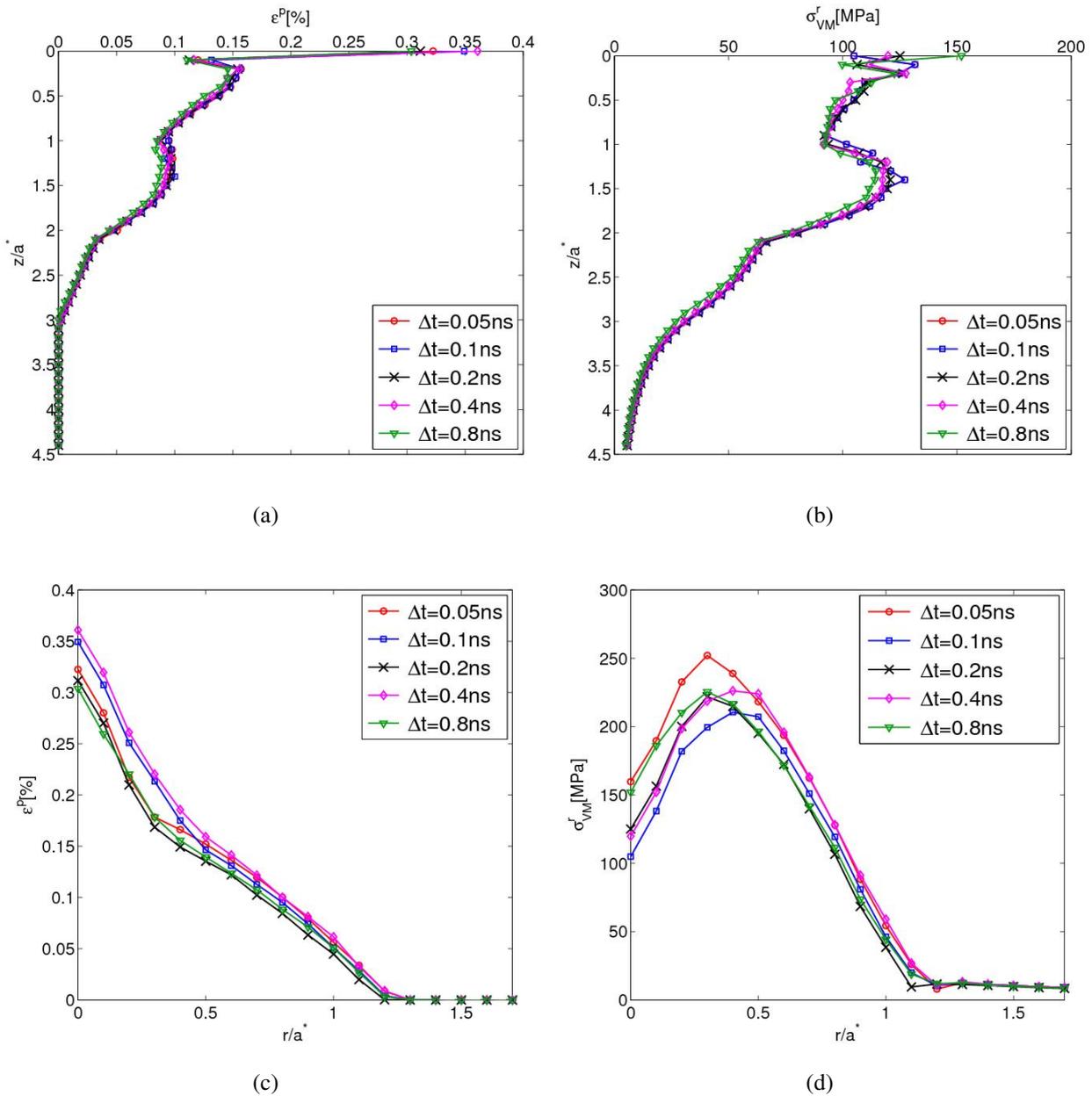
## 4.2 Influence du maillage et du pas de temps

Dans cette section l'influence des paramètres numériques est étudiée. Ici on se limite à l'étude de l'influence du maillage et du pas de temps  $\Delta t$  sur les états résiduels après un impact rapide élasto-plastique. Les résultats de cette étude sont reportés sur les figures 6.10, 6.9.

Sur les figures 6.9(a), 6.9(b) l'influence du pas de temps  $\Delta t$  sur les déformations plastiques (ici cumulées) et sur les contraintes de von Mises résiduelles (à la fin d'un impact élasto-plastique) est illustrée. Ces figures montrent que le pas de temps n'influe pas sur la profondeur de la zone plastifiée et celle des contraintes résiduelles, le maximum des déformations plastiques et celui des contraintes résiduelles, ainsi que leur localisation. Toutefois, les figures 6.9(c), 6.9(d) montrent une légère variation sur les déformations plastiques et sur les contraintes résiduelles en surface dans le plan  $z = 0$ . Cette variation étant faible, l'influence du pas de temps sur les états résiduels surfaciques peut être négligée au premier ordre.

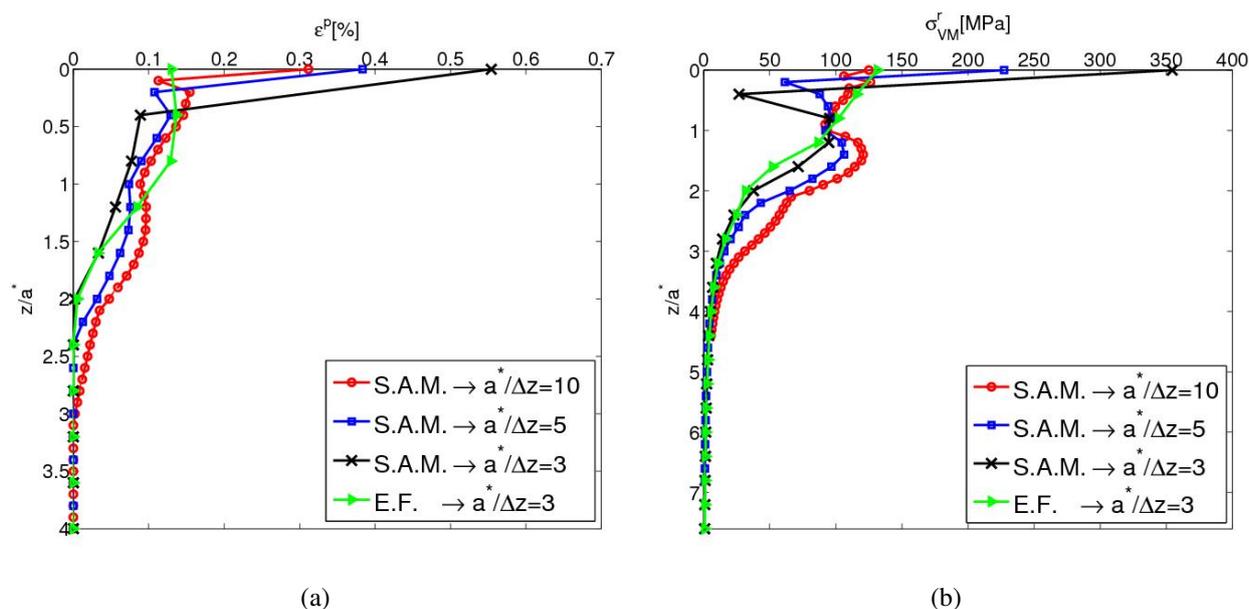
L'influence du maillage sur les déformations plastiques cumulées est illustrée par la figure 6.10(a) et sur les contraintes de von Mises résiduelles par la figure 6.10(b). Ces résultats montrent la forte influence du maillage sur les états résiduels finaux. Pour un maillage très fin (éléments de taille  $a^*/\Delta z = 10$ ), la profondeur plastifiée est plus importante que celle du modèle éléments finis, néanmoins cela n'affecte pas la profondeur des contraintes résiduelles et leur valeur maximale en profondeur ainsi que leur localisation.

## 6. Modélisation d'un impact rapide élasto-viscoplastique et application pour la simulation d'un mono impact laser



**FIGURE 6.9:** Influence du pas de temps sur les contraintes de von Mises résiduelles et sur les déformations plastiques pour une pression maximale  $P = 1\text{GPa}$  et un diamètre de base du spot  $R = 200\ \mu\text{m}$  pour le maillage  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 20\ \mu\text{m}$  : (a) déformations plastiques cumulées en profondeur, (b) contraintes de von Mises en profondeur, (c) déformations plastiques cumulées en surface ( $z=0$ ) et (d) contraintes de von Mises résiduelles en surface ( $z=0$ )

De cette analyse, nous concluons que les éléments de tailles identiques à ceux du modèle élément finis (maillage grossier) ou tout au plus deux fois plus petit (maillage fin) corréleront mieux avec les résultats éléments finis.



**FIGURE 6.10:** Influence du maillage sur les contraintes de von Mises résiduelles et sur les déformations plastiques pour une pression maximale  $P = 1\text{GPa}$  et un diamètre du spot de base  $d = 0.2\text{mm}$  avec discrétisation du profil temporel par des impulsions créneaux de durée  $\tau = \Delta t = 0.2\text{ns}$  :  
 (a) déformations plastiques cumulées (b) contraintes de von Mises résiduelles

Modèle	Machines	Maillage E.F	Temps CPU	
E.F (2D)	Cluster de calcul 1 nœud, 8 cœurs	$\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.04\text{mm}$	$\simeq 3\text{h}$	
S.A.M (3D)	Processeur 4 cœurs, 250GHz, RAM 8Go	Maillage S.A.M	$\Delta t = 0.2\text{ns}$	$\Delta t = 0.4\text{ns}$
		$\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.04\text{mm}$	$\simeq 50\text{ min}$	$\simeq 33\text{ min}$
		$\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.02\text{mm}$	$\simeq 1\text{h}40\text{ min}$	$\simeq 44\text{ min}$
		$\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.01\text{mm}$	$\simeq 5\text{h}00\text{ min}$	$\simeq 2\text{h}$

**TABLE 6.4:** Comparaison des temps de calcul entre le modèle éléments finis et la méthode semi-analytique pour un impact rapide élastoplastique : durée d'impulsion  $t=150\text{ns}$

Le tableau 6.4 montre les temps de calcul entre le modèles S.A. et le modèle éléments finis. Pour le modèle S.A le calcul de la plasticité s'effectue uniquement dans la zone plastique et cette zone varie d'un incrément de temps à l'autre. Sur ce tableau, les temps de calcul pour le modèle S.A sont reportés pour différents pas de temps  $\Delta t$  et différentes tailles d'éléments choisies. A maillage identique, la méthode semi-analytique est au moins 2 fois plus rapide pour une discrétisation  $\Delta t = 0.2\text{ns}$  et au moins 4 fois plus rapide lorsque l'incrément de temps  $\Delta t$  est doublé ( $\Delta t = 0.4\text{ns}$ ). Cette étude montre encore une fois l'efficacité de la méthode semi-analytique.

### 4.3 Impact rapide viscoplastique

#### 4.3.1 Paramètres numériques pour les simulations

Dans ce paragraphe, un modèle éléments finis d'impact rapide sur un matériau élastique-viscoplastique est réalisé avec le logiciel commercial Abaqus comme détaillé dans la section 4.1.1. Ici, les paramètres qui ont été changés sont le matériau, la loi de comportement et la taille des éléments de maillage dans la zone d'impact et la pression maximale appliquée.

Le matériau considéré ici est un acier martensitique à 12%Cr dont la composition chimique est reportée dans le tableau 6.5. L'acier martensitique 12%Cr est un matériau notamment utilisé dans les aubes de turbine à vapeur pour sa bonne résistance à la corrosion et à la fatigue [PEY 07b]. Pour reproduire non seulement le comportement déviatorique mais aussi la relation contrainte-déformation à très grande vitesse, la loi de Johnson Cook (EQ. 6.41) avec un écrouissage isotrope est utilisée (voir section 3.3.5). Les propriétés matériaux qui lui sont affectées sont reportées dans le tableau 6.6 et les paramètres matériaux pour la loi de Johnson Cook sont reportés dans le tableau 6.7. La pression maximale appliquée est  $P = 4\text{GPa}$  avec un spot de diamètre  $d = 0.2\text{mm}$

Fe	Cr	Ni	Mo	C
base	12	2.6	1.5	0.13

TABLE 6.5: Composition chimique de l'acier martensitique 12%Cr [PEY 07b]

	Code éléments finis (Abaqus, 2D)		Méthode semi-analytique (3D)
Taille des éléments	Maillage fin	Maillage grossier	$\Delta x = \Delta y = 30\mu\text{m}$ , $\Delta z = 30\mu\text{m}$
	$\Delta x = \Delta y = 30\mu\text{m}$ , $\Delta z = 30\mu\text{m}$	non constante	
Type d'éléments	CAX4R		cubique avec un point de calcul en surface
Pression	distribution gaussienne de rayon $R = 100\mu\text{m}$		distribution gaussienne de rayon $R = 100\mu\text{m}$
Matériaux	module de Young $E = 210\text{GPa}$ Coefficient de Poisson $\nu = 0.3$ Densité $\rho = 7800\text{Kgm}^{-3}$		

TABLE 6.6: Paramètres numériques pour la validation du modèle élasto-viscoplastique : simulation par éléments finis et méthode semi-analytique

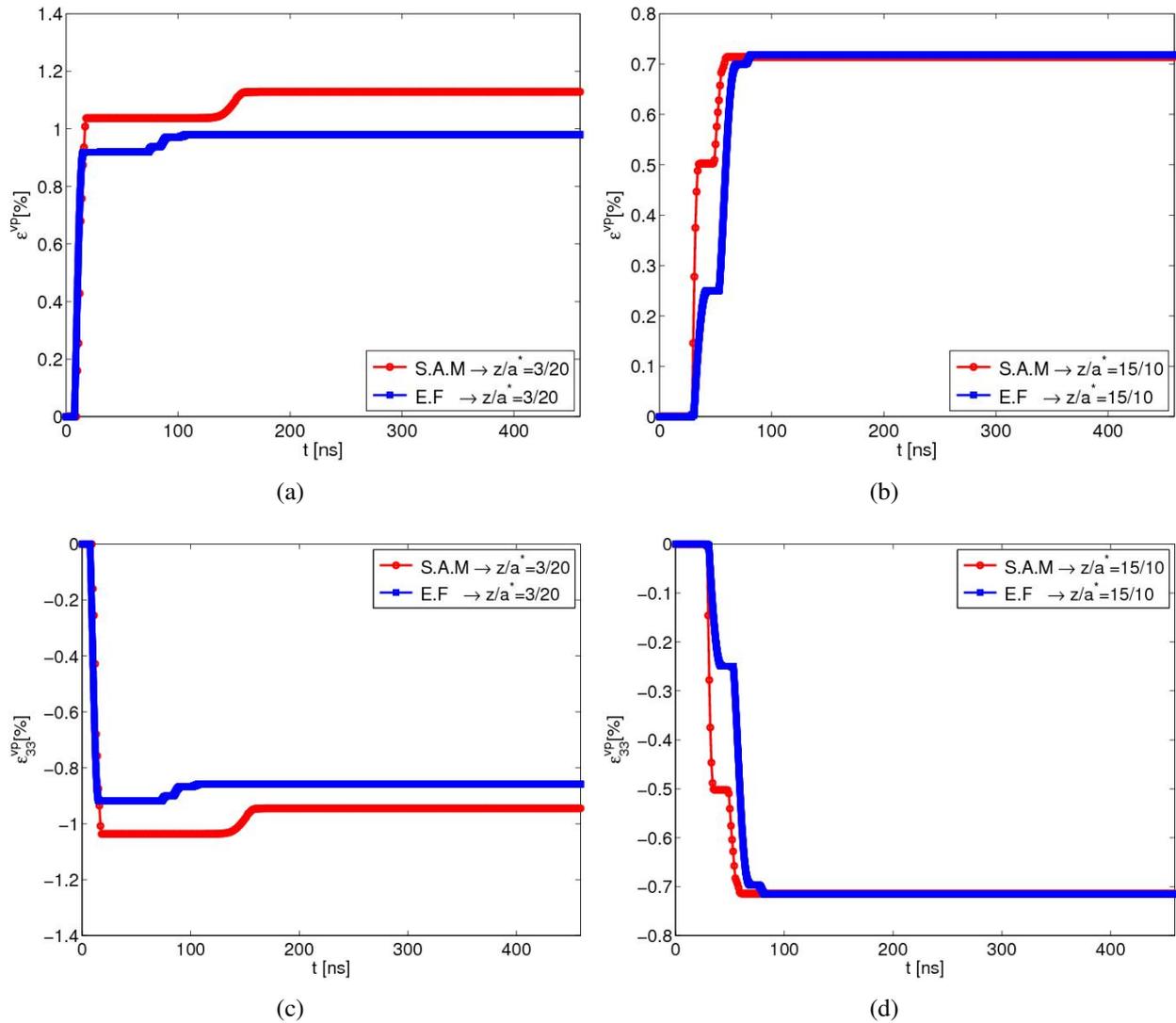
Paramètres	A[MPa]	B[MPa]	n	C	$\frac{\sigma}{\epsilon}^p$
Valeurs	870	400	0.4	0.015	0.01

TABLE 6.7: Paramètres matériaux pour la simulation d'un impact rapide viscoplastique [PEY 07b]

### 4.3.2 Résultats du modèle viscoplastique et discussion

Les résultats de la comparaison entre le modèle éléments finis et celui de la méthode semi-analytique sont reportés sur les figures 6.11 pour l'évolution des déformations plastiques au cours du temps dans le matériau cible. Sur les figures 6.12 les contraintes résiduelles et les déformations plastiques à la fin d'un impact sont illustrées en fonction de la profondeur du massif.

Sur les figures 6.11(a), 6.11(b), l'historique des déformations plastiques cumulées  $\varepsilon^p$  au

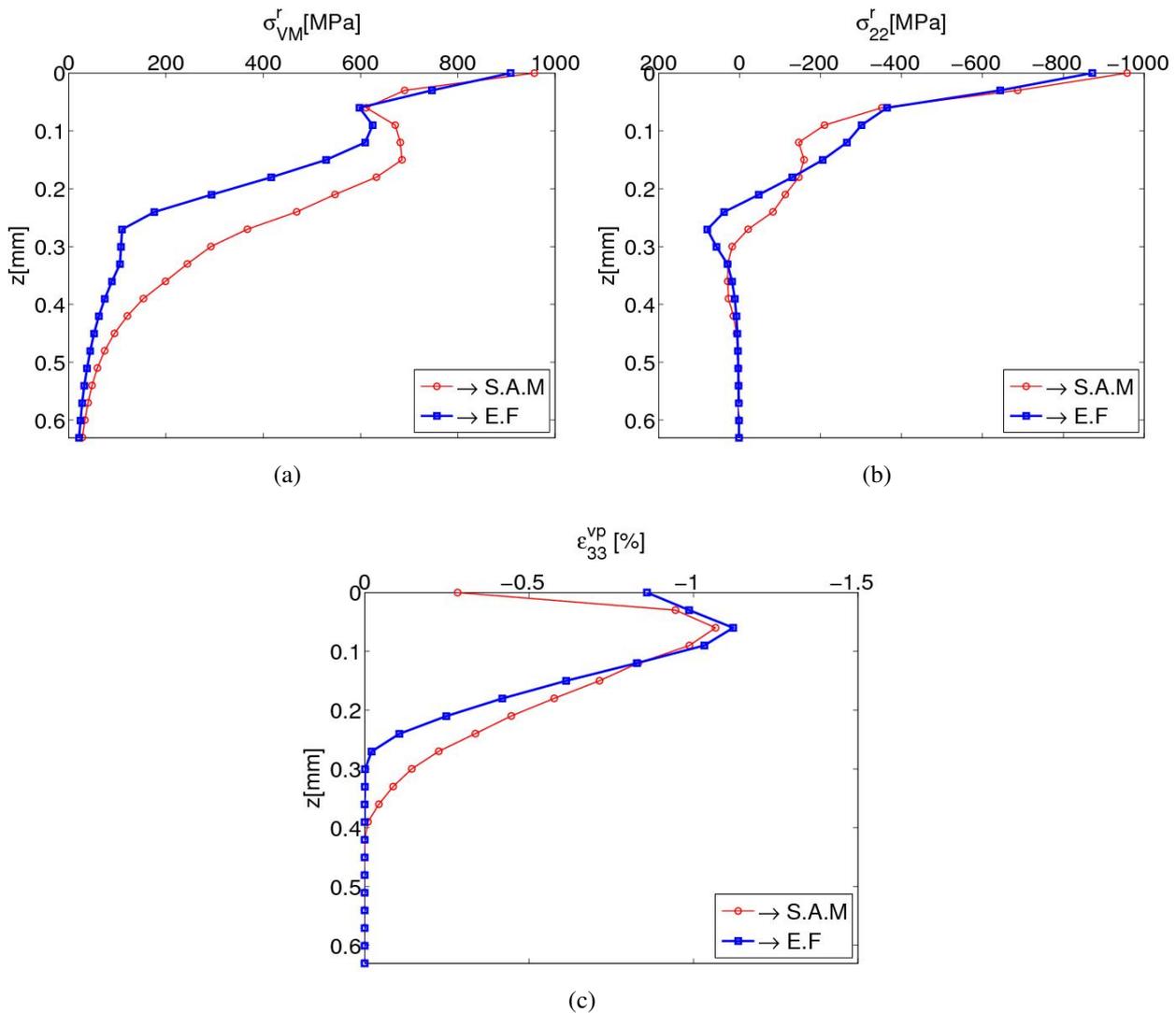


**FIGURE 6.11:** Comparaison des déformations plastiques entre le modèle éléments finis et le modèle S.A. après un impact rapide sur un massif élastique-viscoplastique. Évolution au cours du temps des déformations plastiques  $\varepsilon_{33}^p$  et cumulées  $\varepsilon^p$  en différents points du massif : (a)-(c) près de la surface et (b)-(d) à plus grande profondeur au point  $(0, 0, 15a^*/10)$

cours de la propagation des ondes de choc dans le matériau cible est illustrée en différents points du massif et sur les figures 6.11(c), 6.11(d) les déformations  $\varepsilon_{33}^p$ . Comme évoqué dans le cas

## 6. Modélisation d'un impact rapide élasto-viscoplastique et application pour la simulation d'un mono impact laser

d'un impact rapide élasto-plastique, on observe également dans le cas du modèle viscoplastique un décalage sur le passage de l'onde plastique entre le deux modèles. Ici le maillage est choisi identique (voir TAB. 6.6) et la comparaison se fait entre le point de Gauss (pour le modèle éléments finis) considéré et le point de calcul du modèle S.A. le plus proche. L'effet retard sur le passage de l'onde plastique est à l'origine des écarts observés entre les résultats éléments finis et semi-analytique. Toutefois, l'erreur entre les deux résultats n'excède pas 2% (voir la figure 6.11(a)) lorsque les déformations plastiques sont stabilisées. Cette erreur diminue avec la profondeur.



**FIGURE 6.12:** Comparaison des contraintes résiduelles entre le modèle éléments finis et le modèle S.A. après un impact élasto-viscoplastique : (a) contraintes de von Mises résiduelles en fonction de la profondeur, (b) contraintes résiduelles radiales  $\sigma_{22}^r$  en fonction de la profondeur, (c) déformations plastiques  $\epsilon_{33}^p$  en fonction de la profondeur.

Sur la figure 6.12(c), les déformations plastiques  $\epsilon_{33}^p$  du modèle S.A. et celui éléments finis

(E.F) sont comparées dans la profondeur du massif. Ce résultat montre que le modèle S.A reproduit le même pic de déformation plastique et un profil similaire dans toute la profondeur. Cependant, la profondeur plastifiée est légèrement supérieure à celle obtenue par simulation éléments finis. Néanmoins une bonne corrélation est observée sur les déformations plastiques.

Les contraintes de von Mises résiduelles sont illustrées sur la figure 6.12(a) et les contraintes résiduelles  $\sigma_{22}^r$  dans la FIG. 6.12(b). Les contraintes sont illustrées en fonction de la profondeur du massif. Ces figures montrent que le modèle semi-analytique donne les mêmes profondeurs de contraintes résiduelles. Par conséquent, une très bonne corrélation est observée sur les contraintes résiduelles entre le modèle S.A. et le modèle éléments finis.

Il est aussi intéressant de remarquer que, d'une part (voir FIG. 6.12(a)) les contraintes de von Mises résiduelles générées dans le massif n'excèdent pas la limite élastique initial du matériau et d'autre part (voir FIG. 6.12(b)) les contraintes résiduelles engendrées sont des contraintes résiduelles de compression sur une profondeur qui atteint  $0.25 \text{ mm} \simeq d$  et des contraintes de traction au delà de cette profondeur.

Sur les figures 6.13 sont illustrées en fonction du temps (normalisé par la durée d'application du champ de pression) l'évolution des déformations plastiques  $\epsilon_{33}^p$  et cumulées  $\mathcal{E}^p$ , les contraintes de von Mises et hydrostatiques résiduelles (normalisées par la pression maximale) sur la surface (dans le plan  $z = 0$ ) de la cible. L'historique est observé au centre de l'impact. Sur ces figures, on observe également les 4 étapes soulignées dans le cas d'un impact rapide élasto-plastique à savoir :

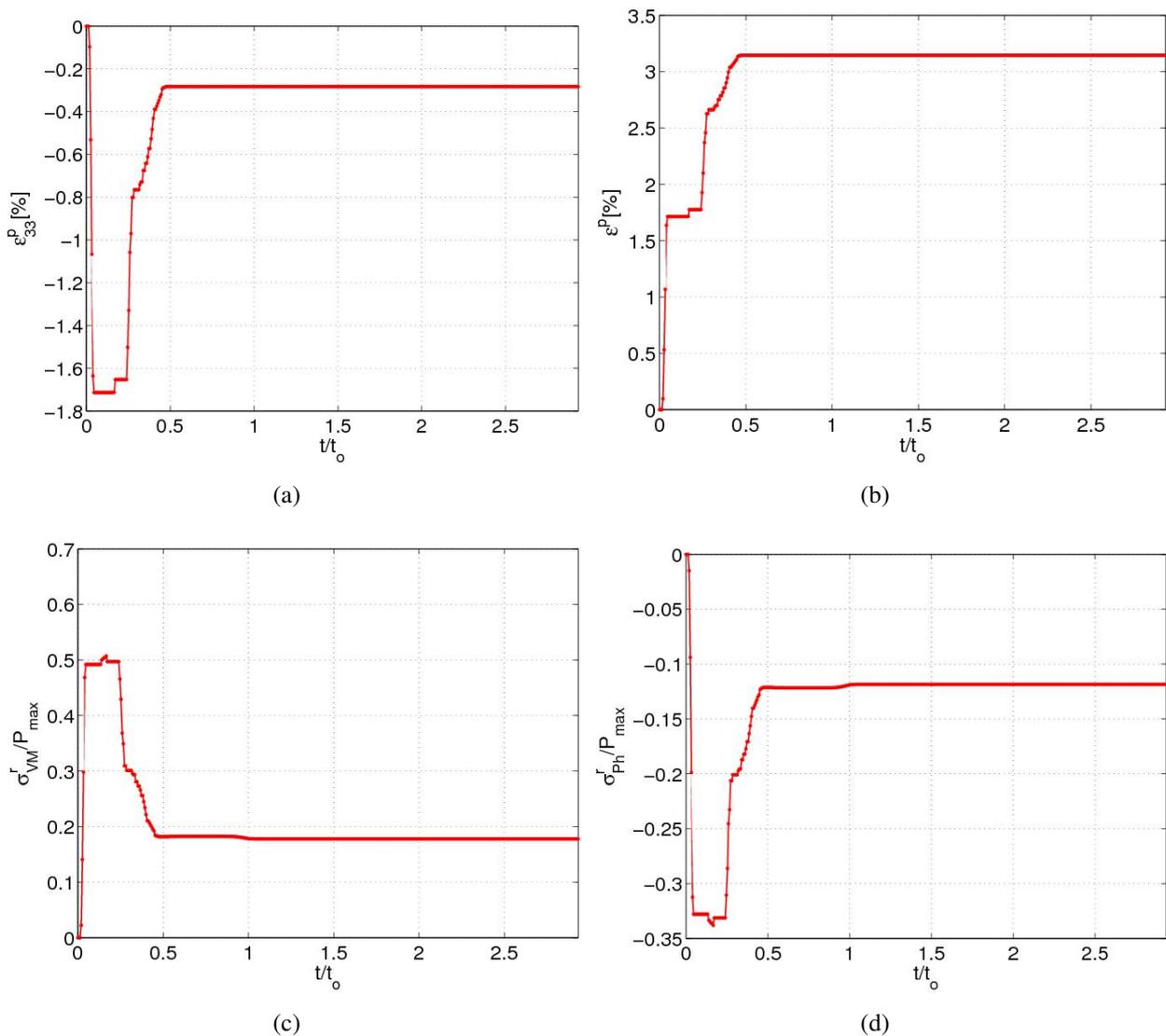
- réponse du matériau due à la pression appliquée entre  $t=0\text{ns}$  et  $t \simeq 0.06t_o$ ,
- stabilisation des états mécaniques sous choc entre  $t \simeq 0.06t_o$  et  $t \simeq 0.13t_o$ ,
- réversibilité des déformations plastiques entre  $t \simeq 0.13t_o$  et  $t \simeq 0.48t_o$ ,
- stabilisation des états mécaniques à partir de  $t \simeq 0.48t_o$  donnant lieu aux contraintes résiduelles et déformations plastiques finales.

La réversibilité des déformations plastiques est également observée dans le modèle éléments finis comme illustré sur les figures 6.13(a), 6.13(c) pour les déformations plastiques très près de la zone d'impact. Toutefois elle est très faible dans la zone d'impact comparée à celle observée dans le modèle semi-analytique (voir FIG. 6.14). La faible réversibilité des déformations plastiques dans le modèle éléments finis s'explique par le fait que le calcul des contraintes soit fait au point de Gauss et non directement dans le plan de l'impact.

La réversibilité des déformations plastiques a été également illustrée par Yongxiang et al. [YON 12] et Mithila et al [MIT 11] dans leur travaux sur la simulation du choc laser. Ces auteurs ont montré qu'au cours de la décharge (pression), une réversibilité des déformations plastiques se produit dans la zone d'impact entraînant donc la baisse des niveaux de déformations plastiques. La réversibilité des déformations plastiques ne se produit pas uniquement dans le plan de la surface, elle s'étend aussi en profondeur sur une faible épaisseur.

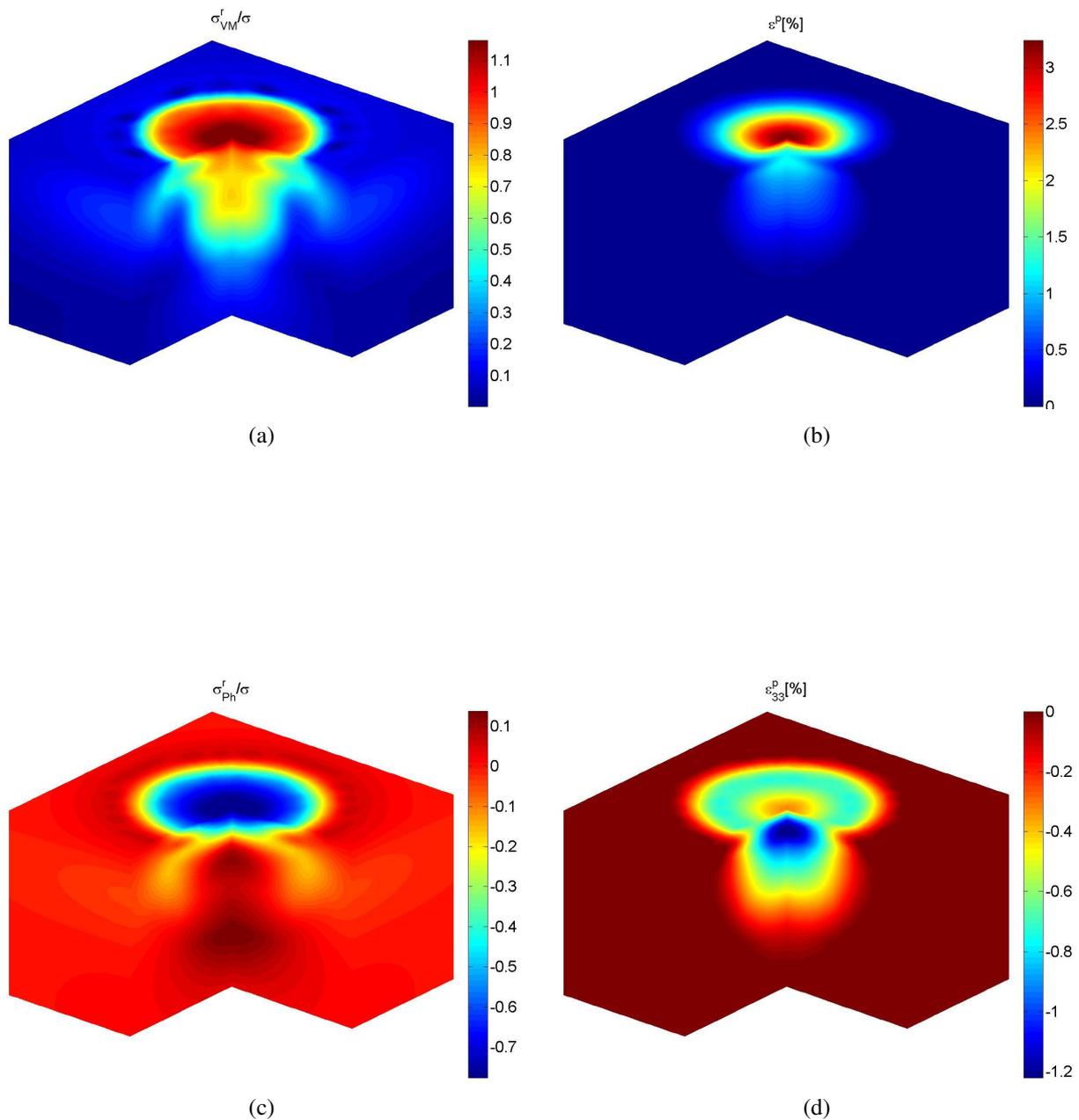
Pour conclure, les résultats du modèle semi-analytique corrélent bien avec le modèle éléments finis. De plus les niveaux de déformations plastiques sont en dessous du seuil (2% [BAL 91]) de déformations plastiques générée par un impact rapide du type laser. Aussi, le

## 6. Modélisation d'un impact rapide élasto-viscoplastique et application pour la simulation d'un mono impact laser



**FIGURE 6.13:** Historique des contraintes "résiduelles" et des déformations plastiques dans la zone d'impact (plan  $z = 0$ ) après un impact rapide viscoplastique de pression maximale  $P=4\text{GPa}$  et diamètre de spot  $d = 0.2\text{mm}$  et influence de l'onde de décharge : (a) déformation plastique  $\epsilon_{33}^p$ , (b) déformation plastique cumulée  $\epsilon^p$ , (c) contrainte de von Mises résiduelle, (d) contrainte hydrostatique résiduelle

modèle semi-analytique décrit parfaitement les phénomènes physiques rencontrés dans la littérature à savoir : contraintes résiduelles de compression en surface et en sous couche, réversibilité des déformations plastiques. Toutefois nous pensons que les écarts observés entre les deux modèles peuvent provenir des méthodes de calcul des contraintes résiduelles et des déformations plastiques lors de la propagation des ondes de choc dans le matériau cible, ce qui se confirme par la grande disparité observée dans le plan  $z=0$ .



**FIGURE 6.14:** Distribution des contraintes résiduelles dans le massif (3D) après un impact rapide de pression maximale  $P=4\text{GPa}$  et de diamètre du spot  $d = 0.2\text{mm}$  : (a) contrainte de von Mises résiduelles normalisées par la limite élastique initiale, (b) déformations plastiques cumulées  $\varepsilon^P$ , (c) contraintes hydrostatiques résiduelles normalisées par la limite élastique initiale, (d) déformations plastiques  $\varepsilon_{33}^P$

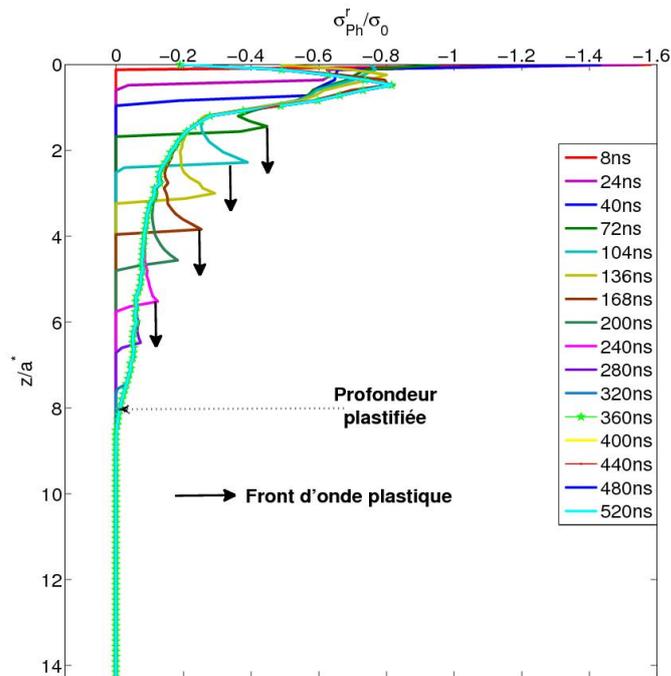
Les figures 6.14(b), 6.14(d) illustrent la distribution en dimension 3 des déformations plastiques  $\varepsilon_{33}^P$ , les déformations plastiques cumulées  $\varepsilon^P$  et les figures 6.14(a), 6.14(c) illustrent les contraintes de von Mises résiduelles et hydrostatiques résiduelles finales dans le matériau

après l'impact. Sur ces figures, les contraintes sont normalisées par la limite élastique initiale du matériau.

## 5 Atténuation élasto-plastique des ondes de choc

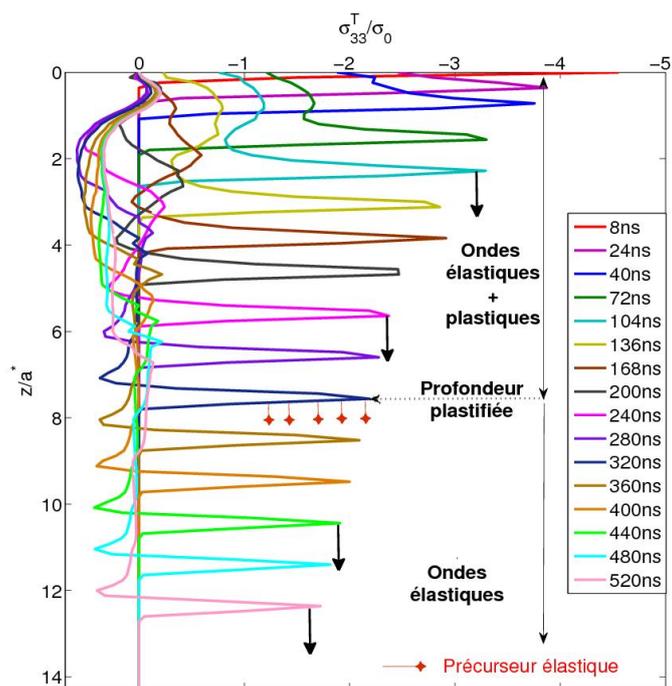
Dans cette section, le cas d'une pression  $P=4\text{GPa}$  appliquée avec un spot de diamètre  $d = 0.5\text{mm}$  sur l'acier défini dans le tableau 6.7 est considéré.

La propagation et l'atténuation des ondes de choc dans le matériau cible est étudiée. Les résultats de cette étude sont reportés sur les figures 6.15 et 6.16. Les résultats sont normalisés en abscisse par la limite élastique initiale  $\sigma_o = A$  du matériau et en ordonnée par le rayon  $a^*$  du spot.  $\sigma_{33}^T$ ,  $\sigma_{22}^T$  représentent respectivement les contraintes totales dans les directions normale (au plan d'impact) et radiale. La contrainte totale est la somme de la contrainte élastique (due au champ de pression) et la contrainte résiduelle (due à la présence des déformations plastiques) et  $\sigma_{Ph}^r$  est la pression hydrostatique résiduelle au cours de la propagation des ondes de choc. Sur les

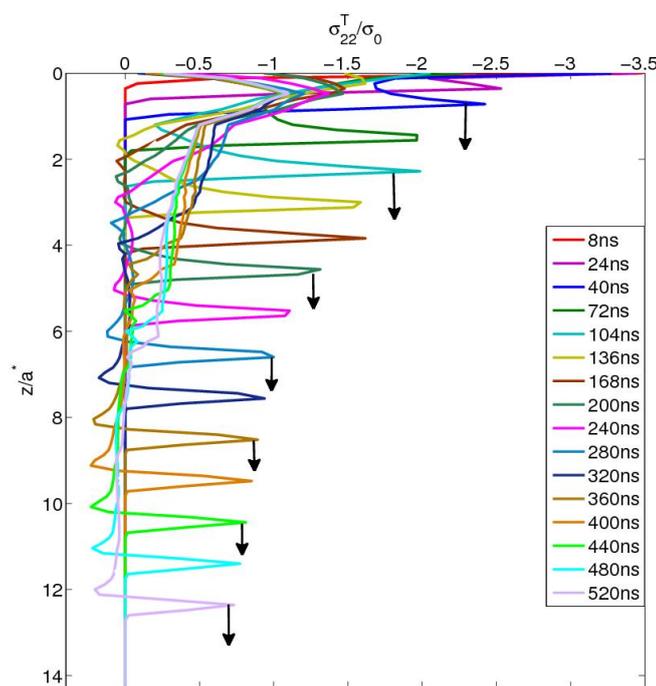


**FIGURE 6.15:** Propagation des ondes plastiques dans le matériau cible ( $P=4\text{GPa}$ ,  $d=0.5\text{mm}$ )

figures 6.16, il est observé que le front de l'onde de choc devient de plus en plus raide et ce très rapidement. Ce raidissement est nettement visible à partir de  $t = 24\text{ns}$ . Durant toute la propagation de l'onde de choc, l'onde de compression (voir FIG. 6.16(a)) est d'amplitude plus importante que l'onde de détente radiale (voir FIG. 6.16(b)), ceci est dû au fait que les ondes élastiques de compression se déplacent plus rapidement que les ondes de cisaillement. Toutefois, l'onde de choc s'atténue progressivement avec la profondeur laissant apparaître un précurseur élastique. Sur



(a)



(b)

**FIGURE 6.16:** Atténuation des ondes de choc dans le matériau cible ( $P=4\text{GPa}$ ,  $d=0.5\text{mm}$ ) et raidissement rapide de l'onde de choc dans le matériau avec détection du précurseur élastique : (a) contrainte totale normale en fonction de la profondeur à différents instants, (b) contrainte totale radiale en fonction de la profondeur à différents instants

la figure 6.16(a), le précurseur élastique commence à se former sous forme d'une inflexion à partir de  $t = 168ns$  et devient nettement visible à partir de  $t = 320ns$ . A partir de cet instant, le front de l'onde de choc est moins raide.

Sur la figure 6.15, l'évolution de la pression hydrostatique résiduelle est illustrée pour représenter le front de l'onde plastique dans le matériau. A tout instant, il est observé que l'onde plastique se propage moins rapidement que l'onde élastique et qu'elle s'atténue et s'amortit progressivement.

Nous retrouvons ici les comportements physiques sur l'amortissement et l'atténuation des ondes de choc dans le matériau cible décrit par Ballard [BAL 91], Peyre [PEY 07b] et Song [SON 10] notamment.

Pour conclure, le modèle semi-analytique décrit parfaitement la physique liée à la propagation des ondes de choc dans le matériau cible.

## 6 Étude paramétrique

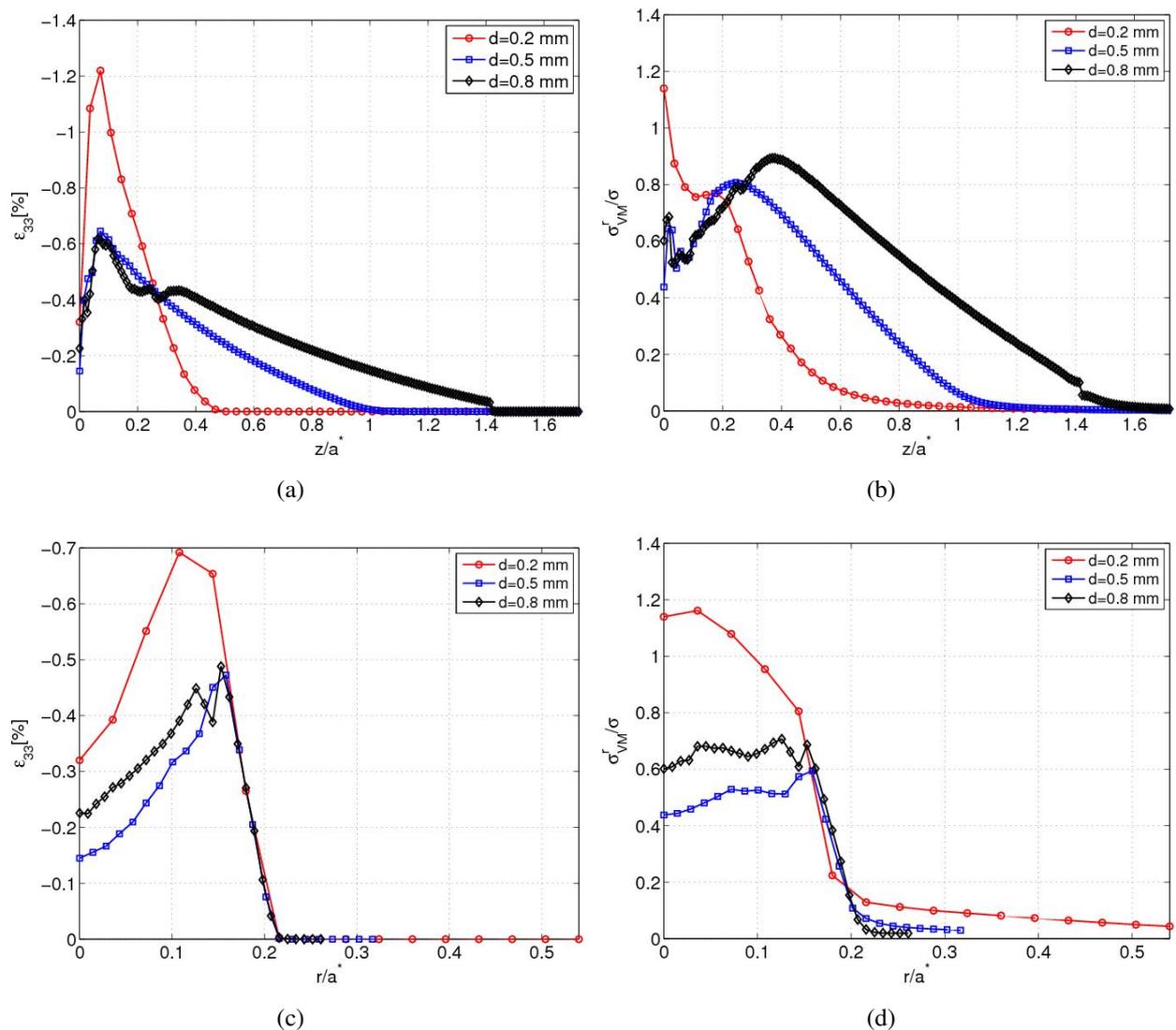
Dans les sections précédentes, nous avons présenté le modèle élasto-plastique et viscoplastique pour la simulation d'un impact rapide. La validation des modèles ayant été obtenue, plusieurs simulations peuvent être réalisées pour identifier les paramètres pouvant gouverner le problème d'impact rapide.

On s'intéresse ici à l'influence de quelques paramètres (liées au problème d'impact rapide) sur les contraintes résiduelles et sur les déformations plastiques induites par un impact rapide viscoplastique. Notre étude se focalisera sur l'influence de la taille du spot, de la limite élastique initiale du matériau, la pression maximale appliquée et enfin de la durée d'application de la pression. Les résultats présentés dans cette section sont obtenues à la fin d'un impact rapide. Le matériau considéré dans cette section est l'acier martensitique 12%Cr présenté dans la section 4.3.1.

### 6.1 Influence de la taille du spot

L'influence de la taille du spot sur les états mécaniques résiduels induits par un impact laser semble faire aujourd'hui un débat dans la communauté mécanique. En effet, Kan et al. [KAN 06], Peyre et al. [PEY 07b] ont montré par simulation éléments finis la forte influence du diamètre d'impact sur la profondeur plastifiée et sur les contraintes résiduelles ainsi que leurs maxima. Song [SON 10] et Julian [JUL 14] montrent également l'influence de la taille du spot sur la profondeur des contraintes, mais ont aussi montré que le maximum en profondeur n'est pas influencé par la taille du spot. Rankin et al. [RAN 02] obtiennent des profils de contraintes résiduelles très similaires pour des diamètres de spot  $d = 3.2mm$  et  $d = 5mm$ . Ainsi ces auteurs montrent que la taille du spot n'a pas d'influence sur les contraintes résiduelles. Cette divergence des résultats retrouvés dans la littérature nous a conduit à étudier l'influence de la taille spot sur les états résiduels finaux après un impact rapide.

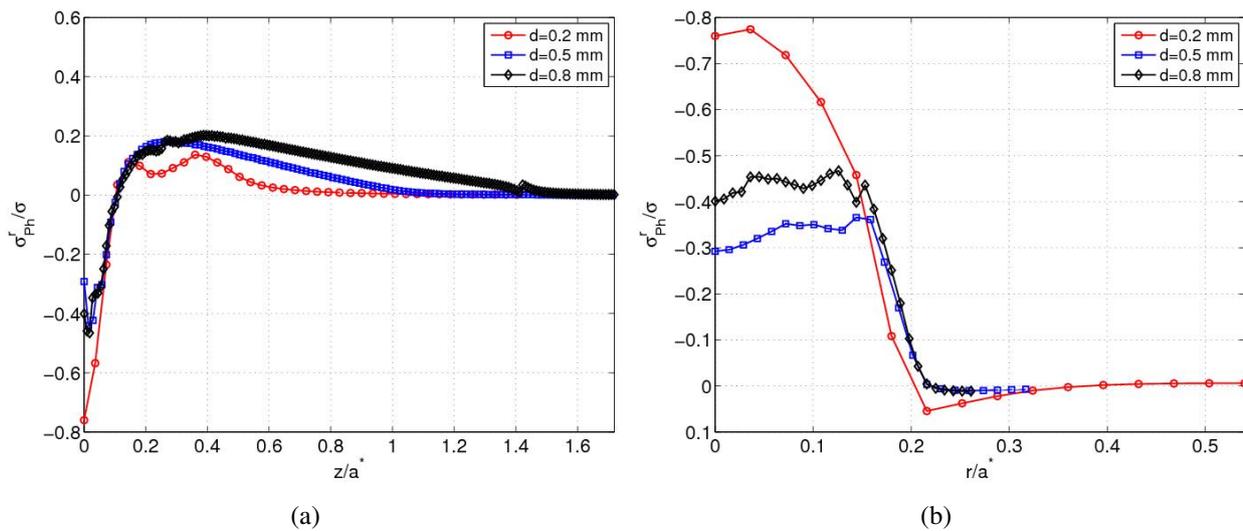
Dans cette étude, nous considérons un impact rapide de pression maximale  $P=4GPa$  et dont les diamètres de base du spot varient de  $d = 0.2mm$  à  $d = 0.8mm$ . Les résultats de cette étude sont reportés sur les figures 6.17 et 6.18.



**FIGURE 6.17:** Influence de la taille du spot sur les états résiduels pour une pression maximale  $P=4$ GPa. Dans la profondeur : (a) déformations plastiques  $\epsilon_{33}^p$  et (b) contraintes de von Mises résiduelles normalisées par la limite élastique initiale. Suivant la direction radiale dans le plan  $z = 0$  (c) déformations plastiques  $\epsilon_{33}^p$ , (d) contraintes de von Mises résiduelles normalisées par la limite élastique initiale

Sur la figure 6.18, les déformations plastiques et les contraintes de von Mises résiduelles (normalisée par la limite élastique initiale) sont illustrées en fonction de la profondeur et suivant la direction radiale dans le plan  $z = 0$ . Les distances sont normalisées par le rayon de chaque spot  $a^* = d/2$ . Ces résultats montrent que la taille du spot a une forte influence sur la profondeur des déformations plastiques et contraintes résiduelles : plus la taille du spot est grande, plus la profondeur plastifiée est importante. De même, les déformations plastiques et les contraintes résiduelles maximales et leur localisation dans la profondeur sont influencées par la taille du spot. En effet, pour des spots de petites tailles, une atténuation des ondes de choc dans le

## 6. Modélisation d'un impact rapide élasto-viscoplastique et application pour la simulation d'un mono impact laser



**FIGURE 6.18:** Influence de la taille du spot sur les états résiduels pour une pression maximale  $P=4\text{GPa}$  : (a) pression hydrostatique dans la profondeur normalisée par la limite élastique initiale, (b) pression hydrostatique dans le plan  $z=0$  suivant la direction radiale issue du centre de l'impact

matériaux cible se produit très rapidement entraînant ainsi une réduction rapide de la profondeur plastifiée [PEY 07b]. Ce phénomène a été mis en évidence expérimentalement par Peyre et al. [PEY 96]. Ces auteurs ont observé lors d'un choc laser sur l'acier ferritique 55C1 que les impacts de spots très larges donnent des contraintes plus profondes que les impacts de petits spots. Ceci est en effet logique d'après l'étude réalisée dans la section 3.1 sur l'influence de la taille du spot sur la densité d'énergie de déformation au cours d'un impact rapide élastique ; dans la dite section, nous avons montré que les impacts de spots larges génèrent des densités d'énergie de déformation plus importantes en profondeur que celles données par des impacts de petits spots. Cependant, l'influence de la taille du spot sur les déformations et contraintes dans le plan de la surface est un peu complexe à analyser. Les figures 6.17(c) et 6.17(d) montrent les déformations plastiques et contraintes de von Mises résiduelles dans le plan  $z=0$  suivant la direction radiale issue du centre de l'impact. Ces figures montrent une variation significative des contraintes et des déformations plastiques. Les contraintes de von Mises résiduelles et déformations plastiques générées par l'impact de diamètre plus petit (ici  $d = 0.2\text{mm}$ ) sont plus importantes et uniformes que celles générées par les deux autres spots. Nous pouvons dire tout simplement que la taille du spot influe sur les états résiduels dans le plan de la surface, mais qu'il est difficile d'établir un rapport direct avec la variation du spot.

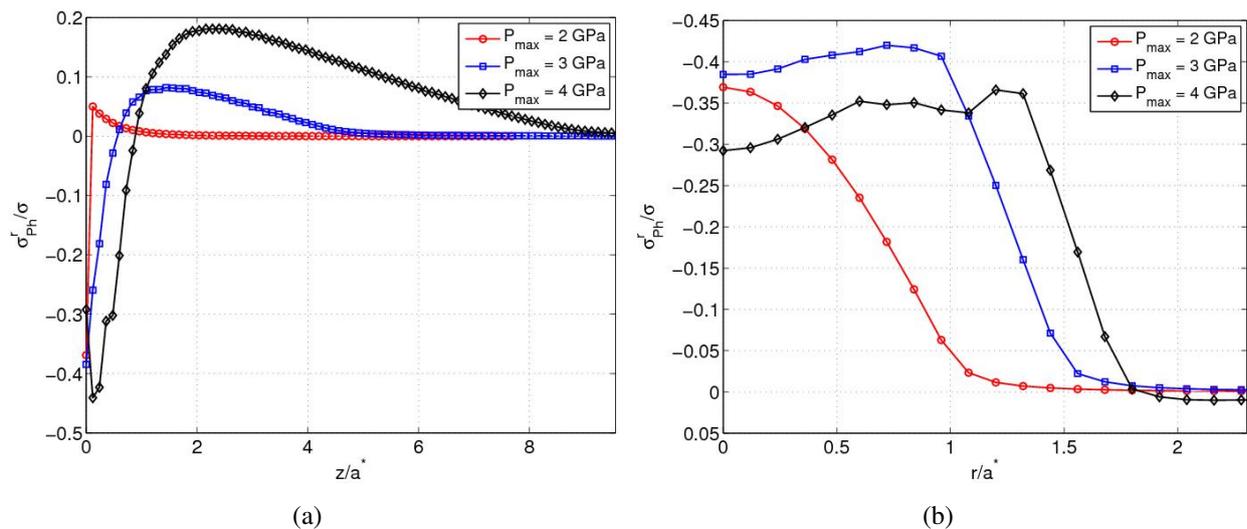
L'analyse des contraintes hydrostatiques résiduelles en profondeur (voir 6.18(a)) et en surface (voir 6.18(b)) montre que les contraintes générées sont des contraintes de compression en surface et en sous couche. Toutefois, en profondeur, il existe des contraintes résiduelles compressives sur une couche d'environ  $z/a^* \simeq 0.1$  depuis la surface (donc dans la zone déformée plastiquement) et des contraintes résiduelles de traction dans le reste de la profondeur. En surface, les contraintes résiduelles de compression s'étendent sur une zone de rayon  $r/a^* \simeq 0.2$ .

Pour conclure, les résultats obtenus ici sont en accord avec la littérature. La méthode semi-analytique décrit parfaitement l'influence de la taille du spot sur les contraintes résiduelles et

sur les déformations plastiques comme discuté par les auteurs Kan et al. [KAN 06], Peyre et al. [PEY 07b]. De même les niveaux de déformations plastiques obtenues ici sont dans la gamme des niveaux de déformation obtenus par un impact laser (<2%).

## 6.2 Influence de la pression maximale

Dans cette partie, nous étudions l'influence de la pression d'impact. Les résultats sont illustrés sur les figures 6.19 et 6.20. Les pressions appliquées varient de 2GPa à 4GPa avec un spot de



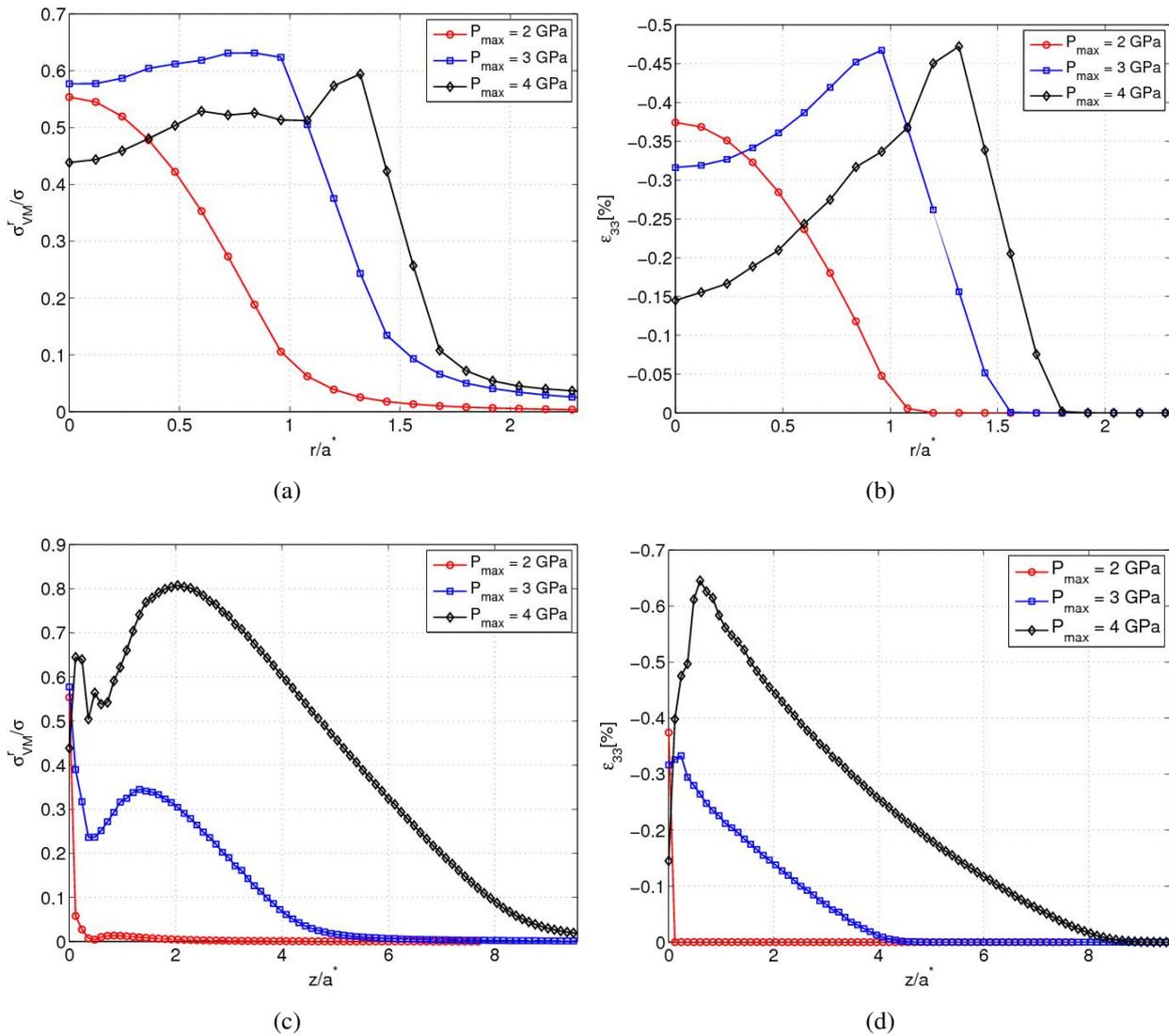
**FIGURE 6.19:** Étude de l'influence de la pression maximale appliquée sur les états résiduels en surface dans le plan  $z = 0$  suivant la direction radiale issue du centre de l'impact. Avec un spot de diamètre  $d = 0.5\text{mm}$ . Contraintes hydrostatiques résiduelles : (a) en fonction de la profondeur, (b) dans le plan  $z = 0$  suivant la direction radiale issue du centre de l'impact

diamètre  $d = 0.5\text{mm}$  pour toutes les simulations.

L'analyse des résultats montre que :

- la profondeur de la zone plastique augmente avec la pression maximale appliquée
- les déformations plastiques dans la profondeur augmentent avec la pression maximale et les pics de déformations plastiques sont de plus en plus profonds
- les contraintes résiduelles maximales sont localisées en sous couche et tendent vers la limite élastique initiale lorsque la pression augmente. Les contraintes maximales sont de plus en plus profondes pour des pressions très élevées.
- la figure 6.19(a) montre que la profondeur des contraintes résiduelles de compression augmente avec la pression et les zones de contraintes de compression élevées sont aussi de plus en plus profondes.

## 6. Modélisation d'un impact rapide élasto-viscoplastique et application pour la simulation d'un mono impact laser



**FIGURE 6.20:** Étude de l'influence de la pression maximale appliquée pour un spot de diamètre  $d = 0.5$  mm sur les états résiduels. En surface du matériau cible suivant la direction radiale issue du centre de l'impact : (a) contraintes de von Mises résiduelles, (b) déformations plastiques  $\epsilon_{33}^p$ . Dans la profondeur de la cible : (c) contraintes de von Mises résiduelles, (d) déformations plastiques  $\epsilon_{33}^p$

Ces résultats ont également été observés par Ballard [BAL 91], Peyre [PEY 07b], Song [SON 10], Kim et al. [KIM 13a] et Julan [JUL 14].

Toutefois l'analyse des résultats en surface dans le plan  $z = 0$  ne nous permet pas de donner une conclusion concernant l'effet de la pression sur les états résiduels en surface. Il faut noter que dans la littérature à notre connaissance, aucune conclusion n'a été donnée sur l'effet de la pression en surface, car jusqu'ici aucune simulation numérique n'a réussi à établir un rapport entre la pression et les contraintes résiduelles en surface comme c'est le cas dans la profondeur. Également dans le modèle analytique de Ballard [BAL 91], les expressions donnant les contraintes résiduelles surfaciques (EQ. 1.14, 1.13) montrent qu'elles sont indépendantes de la pression appliquée.

Néanmoins, la figure 6.19(b) montre que les contraintes résiduelles dans la zone d'impact sont des contraintes de compression.

### 6.3 Influence de la limite élastique

L'influence de la limite élastique du matériau sur les états résiduels induits par impact rapide de type choc laser est également un sujet de discussion dans la littérature. Peyre et al. [PEY 96] ont montré expérimentalement sur les alliages d'aluminium que les contraintes résiduelles générées par impact rapide augmentent avec la limite élastique, ces observations sont en accord avec les résultats du modèle de Ballard [BAL 91].

Les résultats de cette étude sont reportés sur la figure 6.21 pour les contraintes de von Mises résiduelles, déformations plastiques respectivement en profondeur du matériau cible.

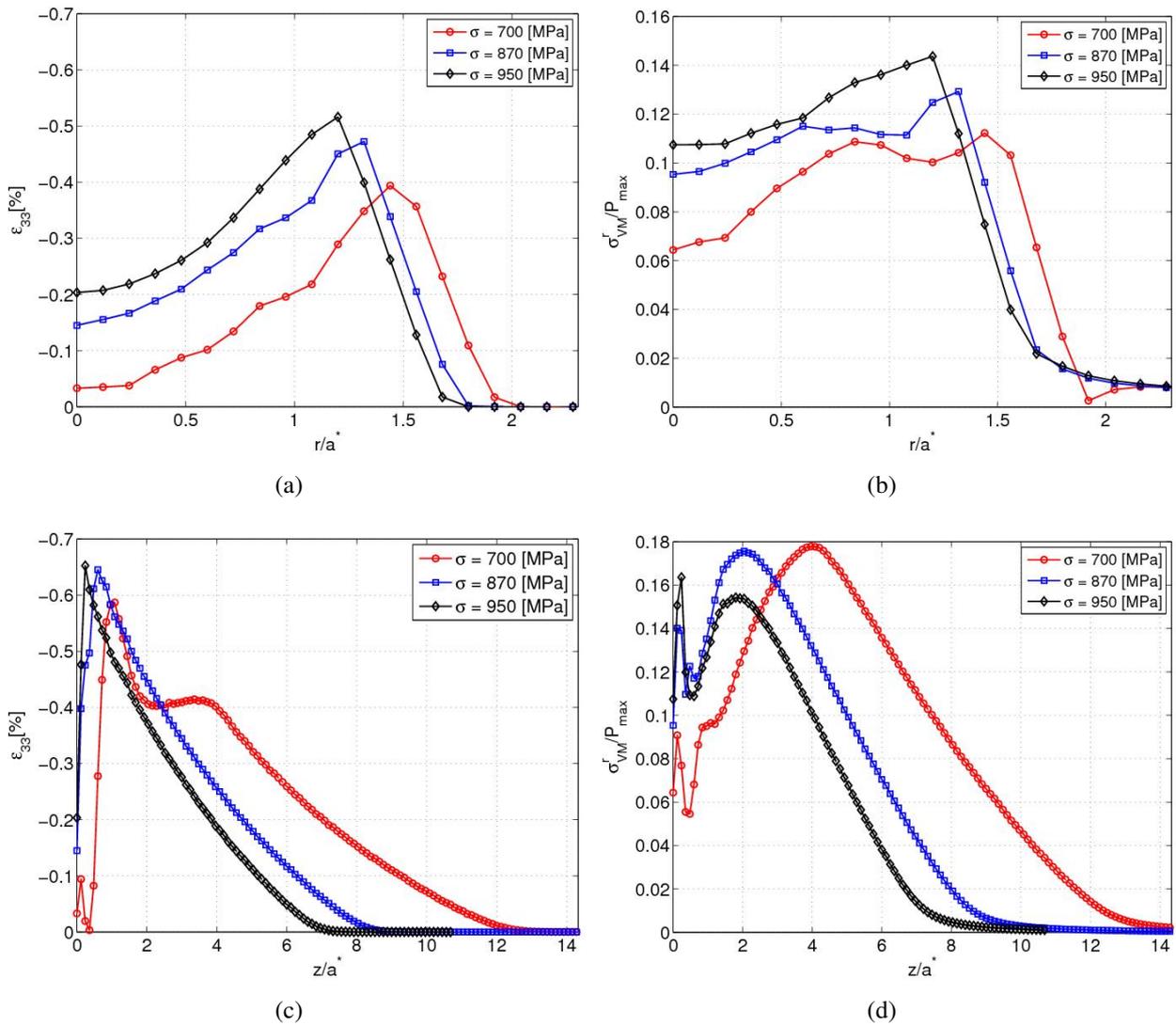
On considère des matériaux ayant les mêmes propriétés matériaux que l'acier 12%Cr et de limites élastiques initiales  $\sigma = 700\text{MPa}$ ,  $870\text{MPa}$ ,  $950\text{MPa}$ . On considère une pression maximale  $P=4\text{GPa}$  et de diamètre du spot  $d = 0.5\text{mm}$ .

L'analyse des résultats permettent de conclure que :

- la profondeur plastifiée et celle des contraintes résiduelles diminuent lorsque la limite élastique initiale du matériau est élevée du fait de l'augmentation de la limite élastique augmente la résistance du matériau [BAN 09]. Cela entraîne une atténuation rapide des ondes de choc dans le matériau avec de faibles niveaux de déformations plastiques se formant en profondeur,
- les contraintes résiduelles et les déformations plastiques surfaciques augmentent avec la limite élastique dans la zone d'impact,
- les pics de déformations plastiques et de contraintes résiduelles surfaciques obtenues croissent linéairement avec la limite élastique comme décrit par ,
- les déformations plastiques maximales en profondeur augmentent avec la limite élastique et se localisent plus près de la surface,
- le maximum des contraintes de von Mises résiduelles en profondeur diminue lorsque la limite élastique du matériau augmente et se localise plus près de la surface,
- les contraintes résiduelles sont des contraintes de compression dans la zone d'impact et en sous couche du matériau cible. D'une part la profondeur des contraintes résiduelles de compression diminue avec la limite élastique du matériau et d'autre les zones dont les contraintes de compression sont élevées se localisent de plus en plus vers la surface.

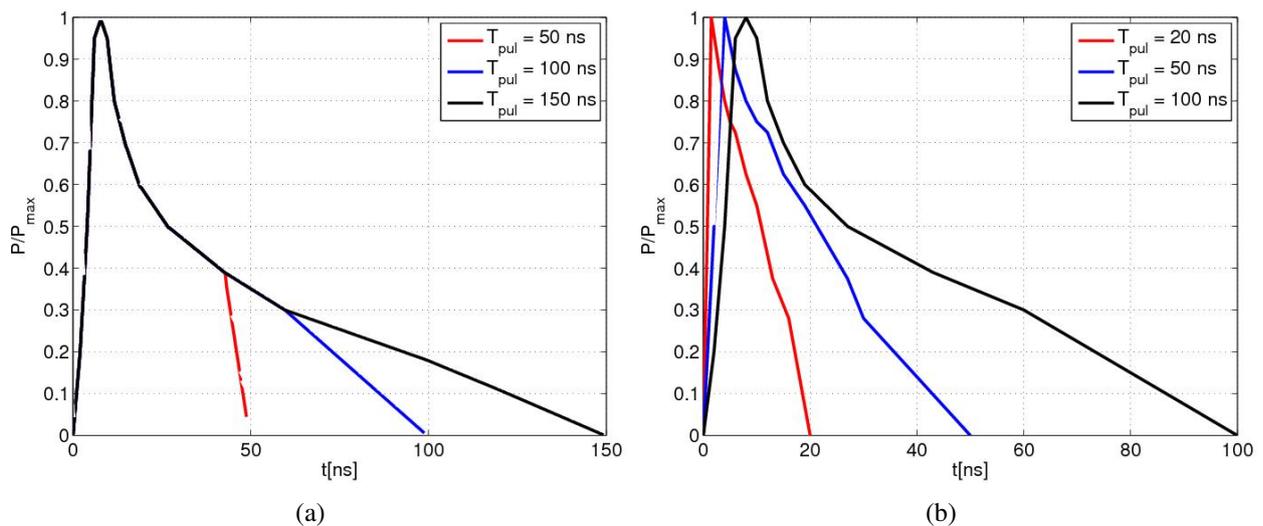
Ces résultats sont en accord avec le modèle analytique (impact circulaire) de Ballard [BAL 91] pour lequel la profondeur plastifiée diminue lorsque la limite élastique augment. Les contraintes résiduelles (EQ. 1.14) et les déformations plastiques (EQ. 1.9, 1.10, 1.11) maximales augmentent avec la limite élastique. Ils sont aussi en accord avec les résultats expérimentaux de Peyre et al. [PEY 96] et ceux de Cellard [CEL 10].

## 6. Modélisation d'un impact rapide élasto-viscoplastique et application pour la simulation d'un mono impact laser



**FIGURE 6.21:** Influence de la limite élastique sur les contraintes résiduelles et déformations plastiques pour une pression maximale  $P=4\text{GPa}$  et de diamètre du spot  $d = 0.5\text{mm}$ . En surface (plan  $z = 0$ ) du matériau cible suivant la direction radiale issue du centre de l'impact : (a) déformations plastiques  $\epsilon_{33}^p$ , (b) contraintes de von Mises résiduelles. En profondeur de la cible : (c) déformations plastiques  $\epsilon_{33}^p$ , (d) contraintes de von Mises résiduelles

Pour conclure, nous avons encore montré dans ce paragraphe que le modèle semi-analytique décrit parfaitement l'influence de la limite élastique sur les contraintes résiduelles et sur les déformations plastiques. Les résultats sont en accord avec la littérature.



**FIGURE 6.22:** Profil de pression défini pour l'étude de l'influence de la durée d'impulsion : (a) durée d'application du chargement et durée à mi-hauteur identiques, (b) durée d'application et durée à mi-hauteur différentes

## 6.4 Influence de la durée de l'impulsion

La durée d'application du champ de pression est un autre paramètre important associé au procédé du choc laser. Plusieurs simulations numériques [DIN 03, OCA 04, PEY 07b, KIM 13a] et le modèle analytique de Ballard [BAL 91] ont montré que la durée de l'intensité laser et par conséquent celle de la pression générée à une influence sur les contraintes résiduelles.

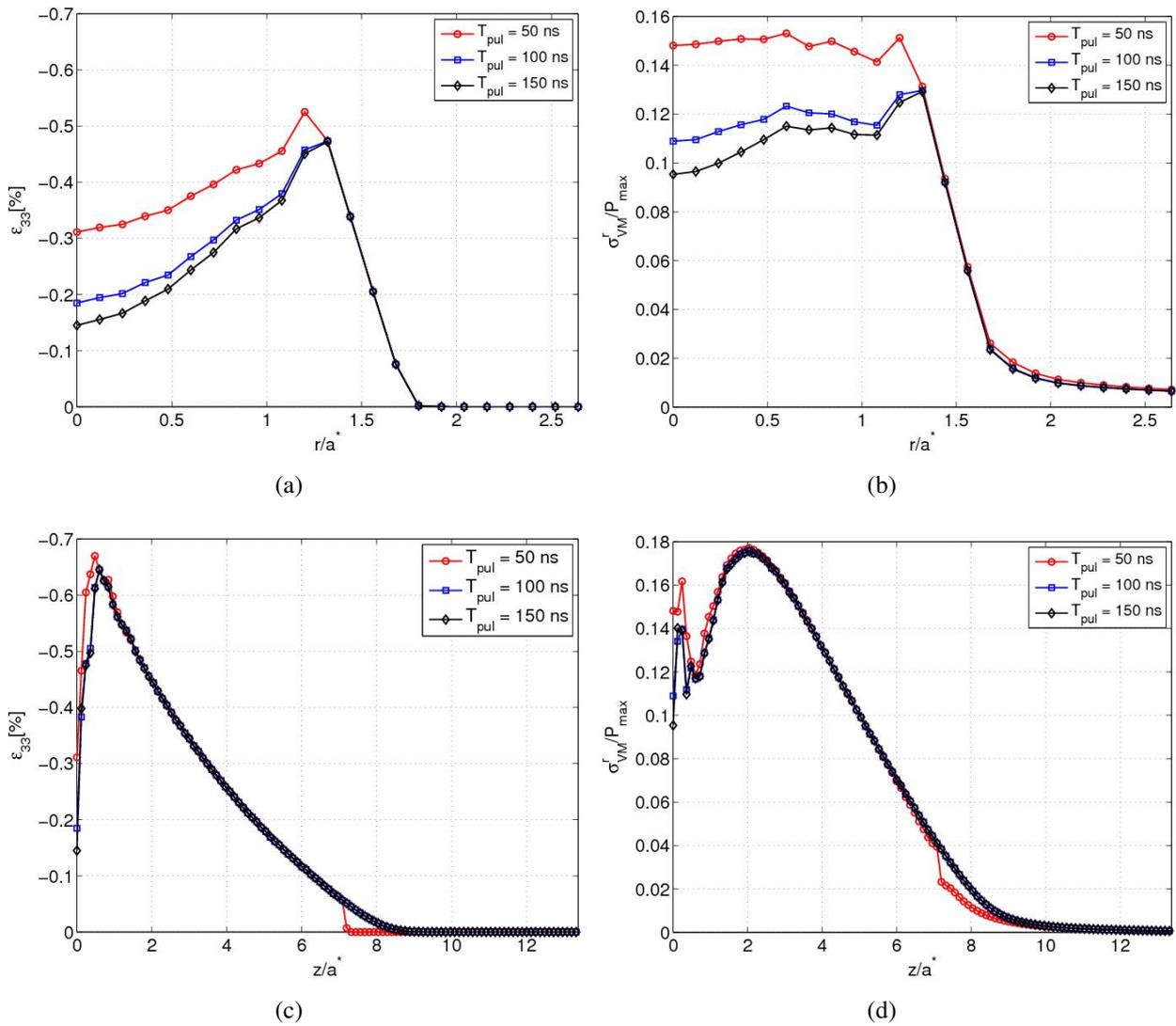
Dans cette section, l'influence de la durée de d'application du champ de pression sur les états résiduels est analysée. Ici deux cas d'étude ont été faites. Dans le premier cas, on considère des pressions de profils au cours du chargement identiques et dont les durée d'application varient de  $t = 50\text{ns}$  à  $t = 150\text{ns}$  comme illustré sur la figure 6.22(a). La pression maximale vaut  $P=4\text{GPa}$  à  $t = 8\text{ns}$  et de diamètre de base  $d = 0.5\text{mm}$ . Dans le second cas, on considère des profils de pression à chargement et durée à mi-hauteur différents, de durée d'application 20ns, 50ns et 100ns respectivement comme illustré sur la figure 6.22(b).

Les résultats de cette étude sont reportés sur les figures 6.23 et 6.24

✂ L'analyse de ces résultats montre qu'à chargement et durée à mi-hauteur identiques (voir FIG. 6.23) :

- la profondeur plastifiée augmente avec la durée de l'impulsion tandis que les impulsions de courtes durées génèrent de grande déformations plastiques qui se localisent très près de la surface. Ceci est une conséquence de l'atténuation rapide des ondes de choc dans le matériau lorsque la durée d'application de la pression est très courte. Ceci a été démontré expérimentalement par Forget et al [FOR 90] et numériquement par [DIN 03, PEY 07b] et analytiquement par [BAL 91]
- les contraintes résiduelles maximales en surface et en profondeur sont générées par des

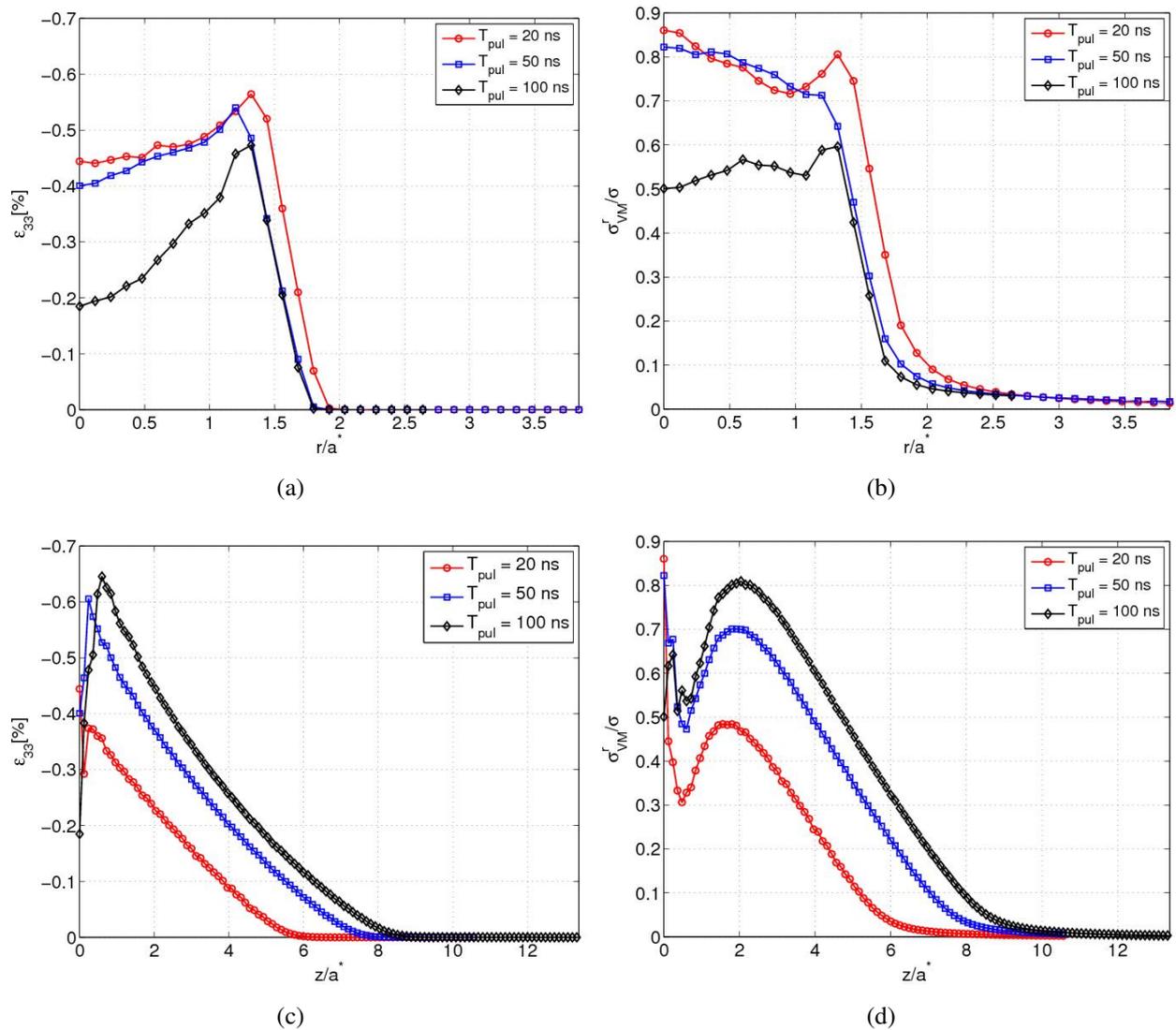
## 6. Modélisation d'un impact rapide élasto-viscoplastique et application pour la simulation d'un mono impact laser



**FIGURE 6.23:** Influence de la durée d'application de la pression à chargement identique sur les états résiduels. Pour une pression maximale  $P=4$  GPa atteinte à  $t/t_{pul} = 0.05$  et de diamètre du spot  $d = 0.5$  mm. En surface dans le plan  $z = 0$  suivant la direction radiale : (a) déformations plastiques  $\epsilon_{33}^p$ , (b) Contraintes de von Mises résiduelles. En profondeur du matériau cible : (c) déformations plastiques  $\epsilon_{33}^p$ , (d) Contraintes de von Mises résiduelles

impulsions de courtes durées. Ce phénomène est dû aux effets de surface [PEY 07b] qui entraînent une chute des contraintes résiduelles au centre de la zone d'impact et dans le voisinage de ce dernier comme observé sur les figures 6.23(a) et 6.23(b). Nous avons ainsi observé que la réversibilité des déformations plastiques dans la zone d'impact est plus importante pour des pressions de longue durée d'application. Les effets de surface sont dus à l'amplification des ondes latérales initiées sur les bords de l'impact.

- les contraintes résiduelles générées sont des contraintes de compression dans la zone d'impact et aussi en profondeur. Dans notre cas, la profondeur des contraintes rési-



**FIGURE 6.24:** Influence de la durée d'application de la pression à chargement et durée à mi-hauteur différents sur les états résiduels. Pour une pression maximale  $P=4\text{GPa}$  et de diamètre du spot  $d = 0.5\text{mm}$ . En surface dans le plan  $z = 0$  suivant la direction radiale : (a) déformations plastiques  $\epsilon_{33}^p$ , (b) Contraintes de von Mises résiduelles. En profondeur du matériau cible : (c) déformations plastiques  $\epsilon_{33}^p$ , (d) Contraintes de von Mises résiduelles

duelles de compression ne change pas ni celle des contraintes de traction.

✂ A chargement et durée à mi-hauteur différents (voir FIG. 6.22(b) et 6.24) les même observation sont faites à savoir :

- l'augmentation de la profondeur plastifiée et celle des contraintes résiduelles avec la durée d'application de la pression,
- les contraintes résiduelles maximale en surface sont générées par les pressions de

courtes durées d'application

Contrairement au premier cas d'étude, la deuxième étude montre que les contraintes résiduelles et déformations plastiques en sous couche augmentent avec la durée d'application de la pression. Leur maximum sont obtenus pratiquement à la même profondeur. Ce résultat est en accord avec les études préliminaires faites dans le chapitre 4, section 3.4.3. En effet, dans la dite section, nous avons montré à travers l'analyse de la zone potentiellement plastique que les zones de grandes déformations plastiques ou de grande sollicitation sont générées par des impulsions de longue durée et l'écart maximale se localise pratiquement à la même profondeur.

## 7 Génération d'un impact rapide par Laser

Jusqu'ici, nous avons défini pour chaque simulation un profil de pression qui s'approche des profils observés expérimentalement. Toutefois, les profils qui ont été choisis dans toutes les simulations depuis le modèle d'impact élastique jusqu'au modèle (visco)plastique sont des impulsions de courtes durées. Dans cette partie, nous allons nous intéresser à la manière dont ces impacts sont générés d'un point de vue industriel. Sur le plan industriel, plusieurs techniques existent pour générer des impacts rapides. Ce point a été déjà évoqué dans le chapitre 1. Parmi toutes les techniques présentées, le choc est le procédé qui répond aux hypothèses faites dans le chapitre 3. Dans cette section, une simulation de ce procédé est proposée.

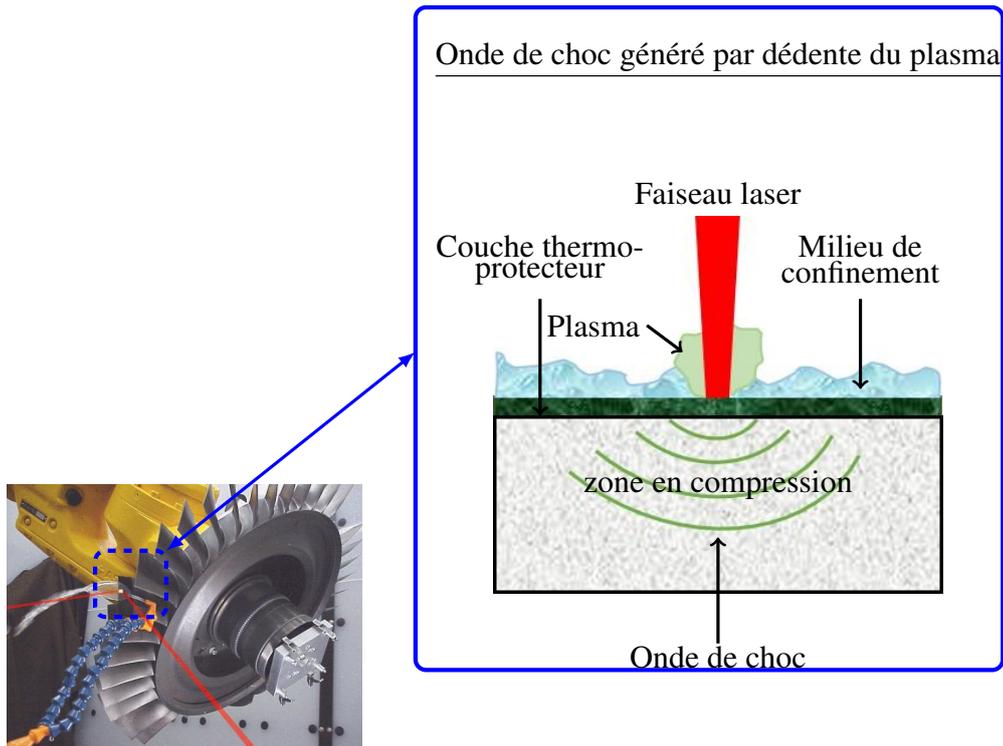
### 7.1 Simulation de la pression induite par impact laser en régime confiné

La simulation du profil temporel  $P(t)$  du champ de pression induit par choc laser en régime confiné proposé ici repose essentiellement sur les travaux de Fabbro et al. [FAB 90].

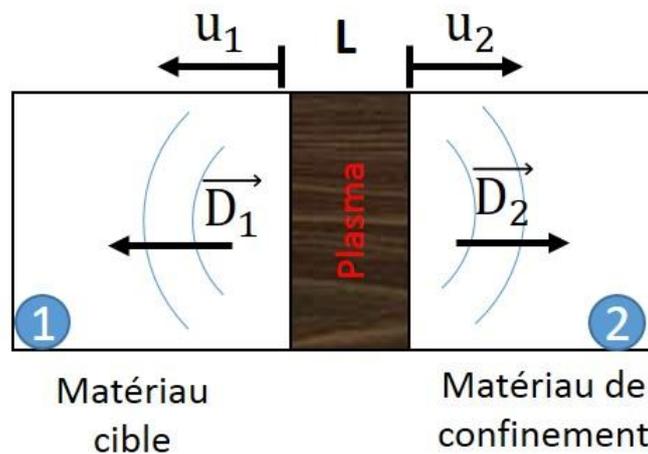
En supposant que le plasma est un gaz parfait et qu'aucun échange thermique n'a lieu avec le milieu extérieur (pas de perte d'énergie), le traitement en régime confiné peut être décrit en trois étapes :

- durant la durée de l'impulsion laser, la pression générée par le plasma induit deux ondes de choc qui se propagent l'une dans le matériau cible avec une vitesse  $\vec{D}_1$  et l'autre avec une vitesse  $\vec{D}_2$  dans le milieu de confinement. La matière qui se déplace derrière le front d'onde de chacune des ondes de choc entraîne une ouverture de l'interface entre le matériau cible et le milieu de confinement. Cette ouverture a une épaisseur  $L(t)$  qui évolue au cours du temps,
- lorsque l'impulsion laser disparaît complètement de la surface, le plasma continue de générer la pression qui décroît au cours du refroidissement adiabatique. Au cours de ces deux étapes, le matériau cible reçoit une quantité de mouvement due à la génération des ondes de choc,
- sur de longues durées, après la recombinaison complète du plasma, l'expansion du gaz chauffé entre les interfaces transfère beaucoup de quantité de mouvement à la cible.

En supposant que la pression générée est suffisante pour créer deux ondes de choc, l'une se propageant dans le matériau cible et l'autre dans le milieu de confinement, Fabbro et al. [FAB 90]



**FIGURE 6.25:** Schémas illustrant le principe de génération des ondes de choc par traitement laser en régime confiné



**FIGURE 6.26:** Géométrie de l'interaction confiné

montrent que l'épaisseur entre les deux matériaux s'élargit et obéit à l'équation :

$$\frac{dL(t)}{dt} = u_1 + u_2 \quad (6.43)$$

## 6. Modélisation d'un impact rapide élasto-viscoplastique et application pour la simulation d'un mono impact laser

où  $u_1$  et  $u_2$  sont respectivement les déplacements de matière en arrière de chacune des ondes de choc.

D'autre part, l'expression EQ. 6.43 associée aux équations de conservation de quantité de mouvement de Rankine-Hugoniot (EQ. 6.44), permet d'établir la relation entre la pression  $P(t)$  et l'épaisseur de l'interface  $L(t)$ . Cette relation est donnée par l'expression EQ. 6.45

$$P(t) = \rho_i D_i u_i = Z_i u_i \quad (6.44)$$

$$\frac{dL(t)}{dt} = \frac{2}{Z} P(t) \quad (6.45)$$

$$\frac{2}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \quad (6.46)$$

avec  $\rho_i$ ,  $D_i$  et  $Z_i$  la densité du matériau  $i$ , la vitesse et l'impédance de l'onde de choc dans le matériau  $i$ .  $Z$  est l'impédance mécanique réduite du système.

L'énergie laser absorbée est utilisée pour augmenter l'énergie interne  $E_i(t)$  du plasma dans l'interface ce qui permet donc l'ouverture de l'interface. Au cours du processus, une partie de l'énergie interne est convertie en énergie thermique  $E_T(t)$  et le reste  $E_i(t) - E_T(t)$  de l'énergie est utilisée pour ioniser le gaz (le plasma). Ainsi, en se servant de l'équation d'état EQ. 6.47 reliant la pression et l'énergie  $E_T$  d'une part et d'autre part celle reliant la pression, l'intensité laser, l'énergie  $E_i$  et l'épaisseur de l'interface  $L(t)$  EQ. 6.48,

$$P(t) = \frac{2}{3} E_t(t) = \frac{2}{3} \alpha E_i(t) \quad (6.47)$$

$$I(t) = P(t) \frac{dL(t)}{dt} + \frac{d[E_i(t)L(t)]}{dt} \quad (6.48)$$

ces auteurs montrent que l'intensité laser vérifie l'équation EQ. 6.49.

$$I(t) = P(t) \frac{dL(t)}{dt} + \frac{3}{2\alpha} \frac{d[P(t)L(t)]}{dt} \quad (6.49)$$

où  $\alpha$  est le rendement d'interaction qui représente la fraction représentative de l'énergie thermique et qui est toujours compris entre 0 et 1.

Ainsi, des expressions EQ. 6.45, 6.47, 6.49, on obtient le système d'équations différentielles du 1<sup>er</sup> ordre donné par l'équation EQ. 6.50 dont les inconnues sont la pression  $P(t)$  et l'épaisseur de l'interface  $L(t)$ .

$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} = \frac{2}{Z} P(t) \\ \frac{dP}{dt} = \frac{I(t) - \frac{2}{Z} \left(1 + \frac{3}{2\alpha}\right) P(t)^2}{\frac{3}{2\alpha} L(t)} \end{cases} \quad (6.50)$$

L'intégration analytique de l'expression EQ. 6.50 est très complexe. Néanmoins, cette intégration est possible pour des profils temporels simples. Des solutions analytiques ont été proposées pour des impulsions laser de formes triangulaire et rectangulaire [FAB 90]. Plus généralement, le

profil de l'intensité laser ne se limite pas seulement à ces deux profils. Dans ces cas, la solution de l'expression EQ. 6.50 doit être approchée numériquement. La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est une méthode numérique itérative d'approximation de solution d'équation différentielle. Celle ci sera donc utilisée pour l'intégration numérique du système EQ. 6.50.

La validation de ce modèle nécessite l'initialisation de la pression  $P(t)$  et de l'épaisseur  $L(t)$  du plasma à l'instant  $t = 0$ . A l'instant initial, nous avons choisi une pression nulle ( $P(t = 0) = P_o = 0$ ) et une épaisseur initiale  $L(t = 0) = L_o = 10^{-6}$ . Le choix de l'épaisseur non nulle permet d'éviter des erreurs numériques dans l'implémentation. En effet prendre une valeur initiale nulle de l'épaisseur revient à avoir une valeur infinie de  $\dot{P}(t)$  dans la deuxième équation du système à résoudre. Le rendement interactif  $\alpha$  est choisi égale à 0.2. On considère ici une irradiation en régime confiné par eau sur une cible d'aluminium. Le profil de l'impulsion laser appliqué est illustré sur la figure 6.27(a). L'impulsion laser est appliquée sur une durée de 20 ns avec une densité de puissance maximale de  $10 \text{ GWcm}^{-2}$ . Les impédances caractéristiques des différents matériaux mis en jeu (ici il s'agit de l'eau et l'aluminium) figurent dans le tableau 6.8.

Nous avons donc comparé nos résultats avec les résultats présentés dans les travaux de

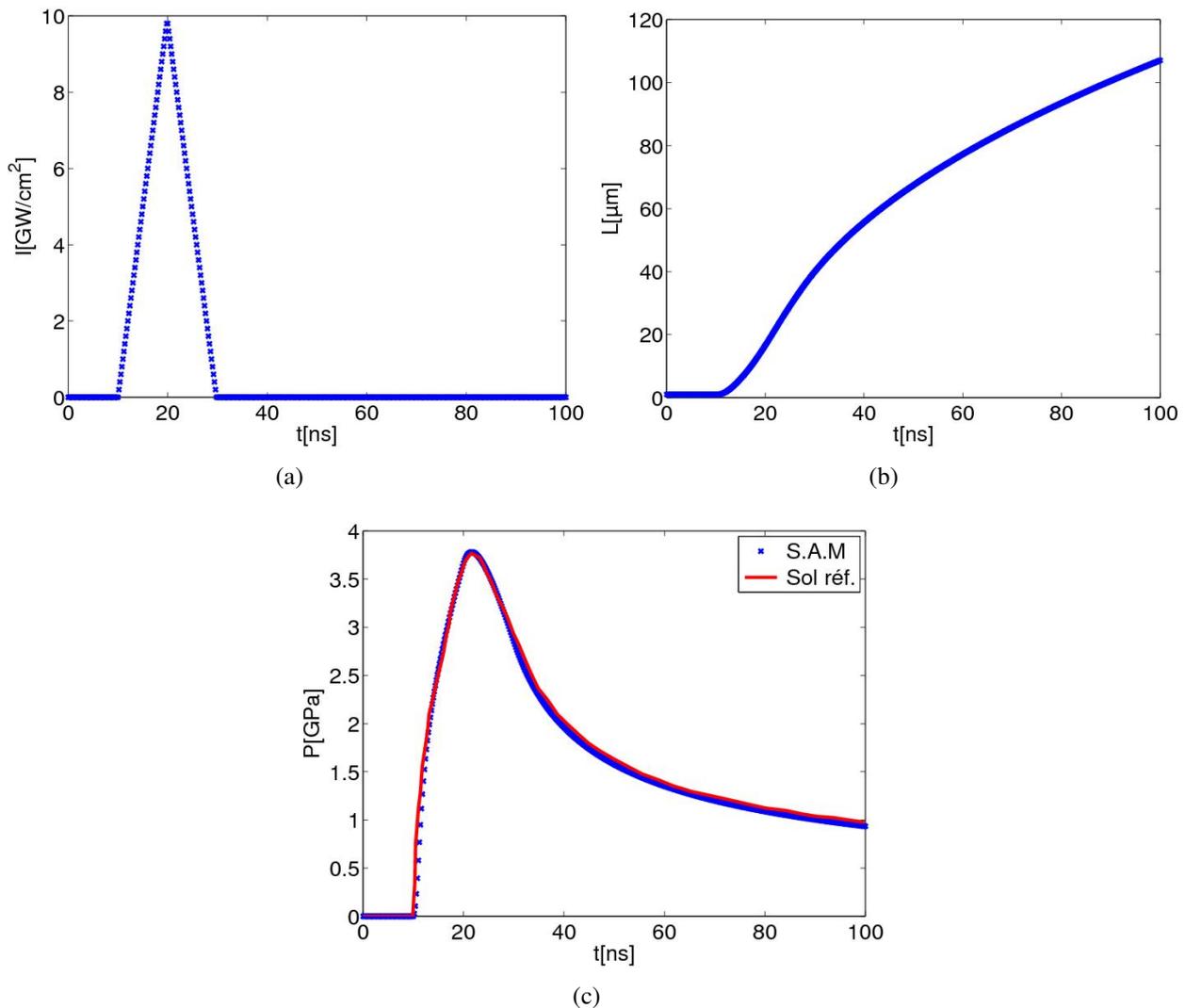
Matériaux cibles	$Z_1 = \gamma \times 10^6$ [gcm <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup> ]	Milieux de confinement	$Z_2 = \gamma \times 10^6$ [gcm <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup> ]
Ti-6Al-4V	2.75	Eau	0.17
AA7050-T7451	1.50	plexiglas	0.32
SS304	3.61	Silicone (caoutchouc)	0.47
Mg-Ca	0.88	Verre K9	1.14-1.5
Al	1.48	Quartz	1.31
Cu	0.16	verre plomb (Pb)	1.54
Acier 12%Cr	3.6	verre BK	1.44

**TABLE 6.8:** Impédances caractéristiques de quelques matériaux cibles et milieux de confinement [SOL 02, GUJ 14]

thèse de Sollier [SOL 02] pour les mêmes paramètres matériaux (cible et confinement) et les mêmes conditions d'irradiation laser. Les résultats de cette comparaison sont illustrés sur la figure 6.27(c). Sur cette figure est reproduit la pression induite à tout instant par l'expansion du plasma dont l'évolution de l'épaisseur donnée par la simulation est illustrée sur la figure 6.27(b). La pression maximale est atteint à l'instant  $t \simeq 20\text{ns}$  avec une épaisseur du plasma  $L \simeq 9.7 \mu\text{m}$ . Cette comparaison montre qu'une très bonne corrélation existe entre notre simulation et les résultats de Sollier (Sol réf).

Contrairement aux études précédentes dans lesquelles nous avons toujours imposé une durée de chargement ne dépassant pas 150ns, cette simulation montre que la pression induite par un impact laser en régime confiné peut avoir une durée d'application dépassant largement les 150 ns. A la fin de l'impulsion laser, l'épaisseur du plasma continue d'augmenter tandis que la pression induite décroît. C'est au cours de cette phase que s'établit progressivement un refroidissement adiabatique du système qui est donc la deuxième étape décrite dans [FAB 90]. La pression au bout d'un certain temps a tendance à se stabiliser avec une décroissance très lente. Ce comportement s'explique par la troisième étape décrite dans [FAB 90] durant laquelle le gaz chauffé s'expand

## 6. Modélisation d'un impact rapide élasto-viscoplastique et application pour la simulation d'un mono impact laser



**FIGURE 6.27:** Validation du modèle de simulation du profil temporel de champ de pression induit par une irradiation laser en régime confiné : (a) profil de densité de puissance du laser imposé, (b) profondeur du plasma obtenue par simulation, (c) comparaison du profil temporel avec la solution de référence

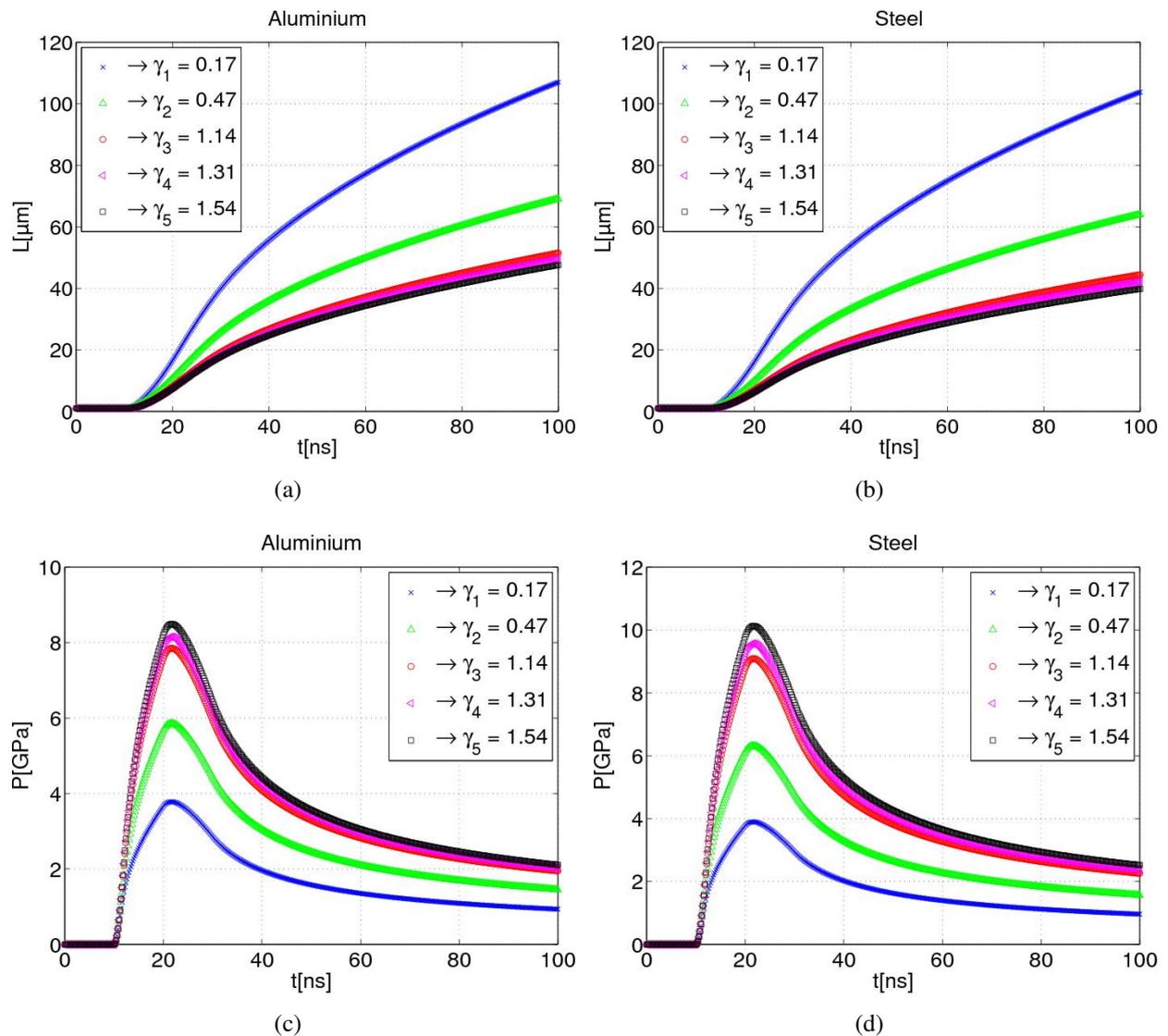
pour transférer une quantité de mouvement à la cible.

## 7.2 Influence des impédances caractéristiques sur la pression induite

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à l'influence du milieu de confinement sur la pression induite dans un matériau soumis à un traitement de surface de type choc laser. On considère le même alliage d'aluminium que dans la section 7.1 et l'acier 12%Cr dont les impédances caractéristiques sont reportées dans le tableau 6.9. Les deux matériaux sont soumis à un impact laser avec différents milieux de confinement. Les milieux de confinement choisis sont : l'eau, le verre K9, le Quartz,

le verre plomb et le silicone. Les impédances caractéristiques associées à chacun des milieux de confinement sont reportées dans le tableau 6.8. On considère un laser délivrant une densité de puissance équivalente à celle représentée sur la figure 6.27(a). Dans les deux cas de simulation, nous supposons que le rendement interactif  $\alpha$  vaut 0.2.

Les résultats de cette étude sont reportés sur la figure 6.28 pour la pression induite et l'épaisseur



**FIGURE 6.28:** Influence du milieu de confinement ( $Z_i = \gamma_i \times 10^6 [\text{gcm}^{-2}\text{s}^{-1}]$ ) sur la pression induite par choc laser dans l'alliage d'aluminium ( $Z = 1.48 \times 10^6 [\text{gcm}^{-2}\text{s}^{-1}]$ ) et dans l'acier 12%Cr ( $Z = 3.6 \times 10^6 [\text{gcm}^{-2}\text{s}^{-1}]$ ) : (a)-(b) épaisseur du plasma obtenue pour différents milieux de confinement, (c)-(d) pression induite pour différents milieux de confinement

du plasma généré au cours de la propagation des ondes de choc. Comme discuté dans la section 7.1, l'épaisseur du plasma générée dans les deux matériaux continue d'augmenter lorsque les pressions générées diminuent (voir figures 6.28(a), 6.28(b)). Dans les deux matériaux on constate, à tout

## 6. Modélisation d'un impact rapide élasto-viscoplastique et application pour la simulation d'un mono impact laser

instant, que l'épaisseur du plasma est plus importante lorsque le matériau est confiné par eau. Pour toutes les simulations, l'épaisseur obtenue est légèrement plus importante sur l'aluminium que sur l'acier quelque soit le milieu de confinement choisi. Les plasmas sont plus confinés par des milieu à faible impédance caractéristique, ce qui permet d'obtenir de grandes pressions maximales. En effet, les figures 6.28(c), 6.28(d) illustrent les pressions induites dans les deux matériaux pour les différents milieux de confinement choisis. Les pressions maximales induites dans chaque matériau sont reportées dans le tableau 6.9. D'une part, les pressions maximales générées dans chaque matériau augmentent avec l'impédance caractéristique du milieu de confinement et d'autre part avec l'impédance caractéristique du matériau cible.

Il en résulte que les pressions maximales induites par impact laser augmentent avec impédance

	Eau P[GPa]	Silicone P[GPa]	Verre K9 P[GPa]	Quartz P[GPa]	Verre Plomb P[GPa]
Aluminium $Z = 1.48 \times 10^6 [\text{gcm}^{-2}\text{s}^{-1}]$	3.8	5.9	7.8	8.1	8.5
Acier 12%Cr $Z = 3.6 \times 10^6 [\text{gcm}^{-2}\text{s}^{-1}]$	3.9	6.3	9.0	9.6	10.1

**TABLE 6.9:** Pression maximale induite dans l'aluminium et dans l'acier pour différents milieux de confinement pour  $\alpha = 0.2$

caractéristique et inversement, l'épaisseur du plasma généré dans le matériau devient de plus en plus faible lorsque les impédances caractéristiques augmentent.

### 7.3 Simulation des effets mécaniques induit par un mono impact laser en régime confiné

Le modèle numérique de simulation de la pression induite par un impact laser en régime confiné est couplé avec le modèle élastoplastique et viscoplastique mis en place précédemment. Ce couplage ne change pas le fonctionnement de l'algorithme présenté dans la section 3.3. La différence se situe dans le calcul de la pression. Connaissant en entrée le profil de densité de puissance laser tabulé ou donné sous forme analytique, à chaque incrément de temps  $\Delta t$ , la densité de puissance est calculée et la pression correspondante à cette dernière est simulée en utilisant l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4.

L'algorithme générale de simulation d'un impact rapide élasto-plastique ou viscoplastique par simulation d'un choc laser ou par imposition d'un champ de pression connu est reporté sur la figure 6.29.

Une simulation d'un mono impact laser est réalisée dans cette section pour prédire les déformations et les contraintes résiduelles induites par le procédé. On considère une cible en acier martensitique 12%Cr précédemment présenté et soumis à un impact laser en régime confiné. Le milieu de confinement choisis ici est l'eau. Les impédances caractéristiques de chacun des milieux

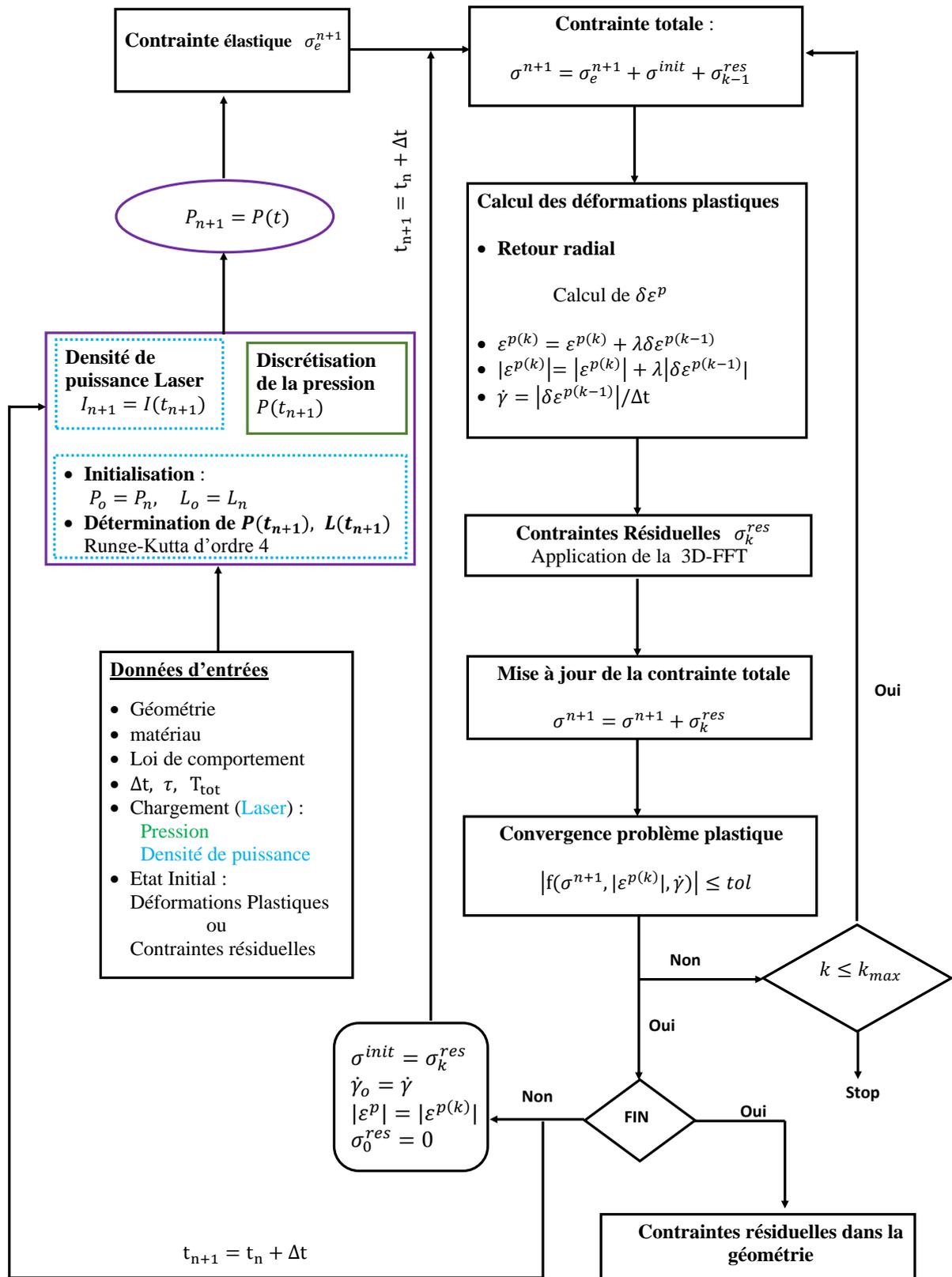
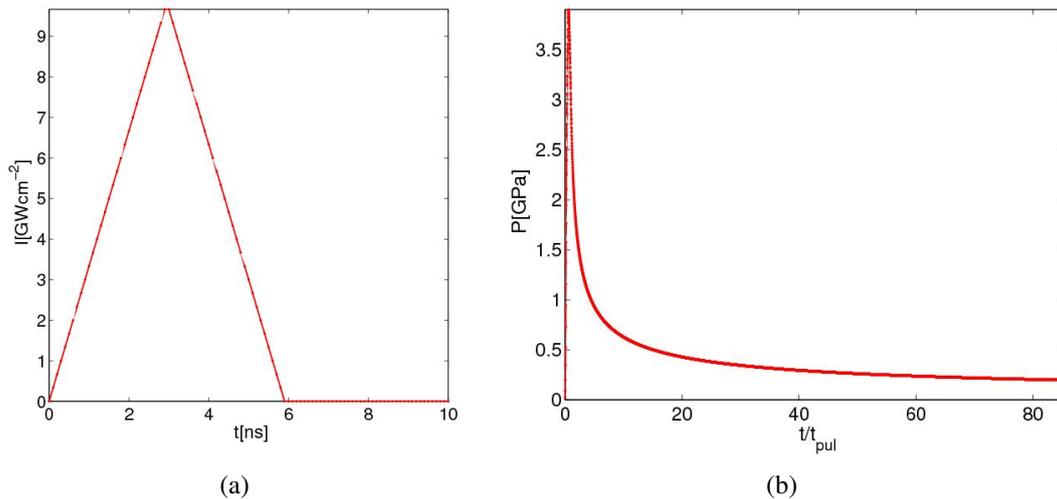


FIGURE 6.29: Algorithme général pour la simulation du procédé de mise en compression par choc laser

## 6. Modélisation d'un impact rapide élasto-viscoplastique et application pour la simulation d'un mono impact laser

considérés sont reportées dans le tableau 6.8.

On considère un laser délivrant une densité de puissance (voir FIG. 6.30(a)) maximale  $I=10\text{GWcm}^{-2}$ , de forme triangulaire et de durée d'impulsion  $t_{pul} = 6\text{ns}$ . Le diamètre du spot laser vaut  $d = 0.5\text{mm}$  et est supposé de forme gaussienne. Le rendement d'interaction est fixé à  $\alpha = 0.2$ . La pression induite est illustrée sur la figure 6.30(b). Sur cette figure, une pression

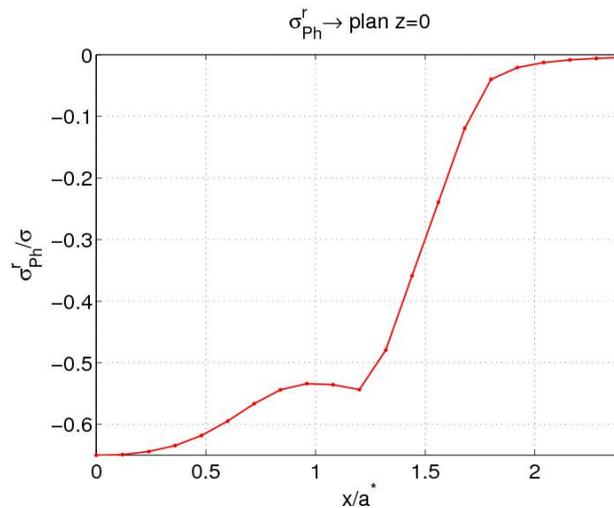


**FIGURE 6.30:** Simulation d'un mono impact laser en régime confiné sur l'acier martensitique 12%Cr : (a) densité de puissance délivrée par le laser, (b) pression induite par le procédé

maximale  $P = 4\text{GPa}$  est atteinte à  $t/t_{pul} \simeq 0.56$  et la durée à mi-hauteur de la pression induite est  $\simeq 2t_{pul}$ . Contrairement aux profils de pressions considérés dans les sections précédentes (courte durée d'impulsion), ici la pression induite par le laser reste appliquée assez longtemps dans la zone d'impact ; une durée dépassant 80 fois la durée  $t_{pul}$  du laser. Toutefois à partir de  $t/t_{pul} \geq 60$ , la pression dans la zone d'impact devient négligeable pour générer de nouvelles déformations plastiques. Au cours de cette phase, la pression diminue très lentement dans la zone d'impact donnant ainsi une allure quasiment stationnaire à partir de  $t/t_{pul} \geq 80$ .

Les contraintes résiduelles et déformations plastiques induites par le traitement sont reportées sur les figure 6.32. Sur ces figures, les contraintes résiduelles (normalisées  $\sigma$ ) et les déformations plastiques sont illustrées en fonctions de la profondeur de la pièce (normalisée par  $a^*$ ) à la fin de l'impact. La profondeur plastifiée (voir FIG. 6.32(b)) est plus faible que celle obtenue dans la section 6.4, et les contraintes de von Mises résiduelles en surface sont plus élevées que celles obtenues dans la même section. Ceci s'explique par l'atténuation rapide des ondes de choc dans le matériau du fait de la courte durée d'impulsion laser appliquée. En effet, le profil défini sur la figure 6.2 est celui d'un laser du type Nd-YAG (avec une longueur d'onde  $\lambda = 0,532\text{nm}$ ) délivrant une impulsion de durée  $9\text{ns}$  et de densité de puissance pouvant dépasser  $10\text{GWcm}^{-2}$  [SON 10]. Ce nouveau résultat confirme encore l'influence de la durée d'impulsion sur la profondeur plastifiée et sur les contraintes résiduelles maximales engendrées.

Sur les figures 6.32(c) et 6.31, les contraintes hydrostatiques résiduelles sont illustrées en fonction de la profondeur de la pièce et en surface suivant la direction radiale depuis le centre d'impact. Ces résultats montrent que les contraintes résiduelles générées sont des contraintes de



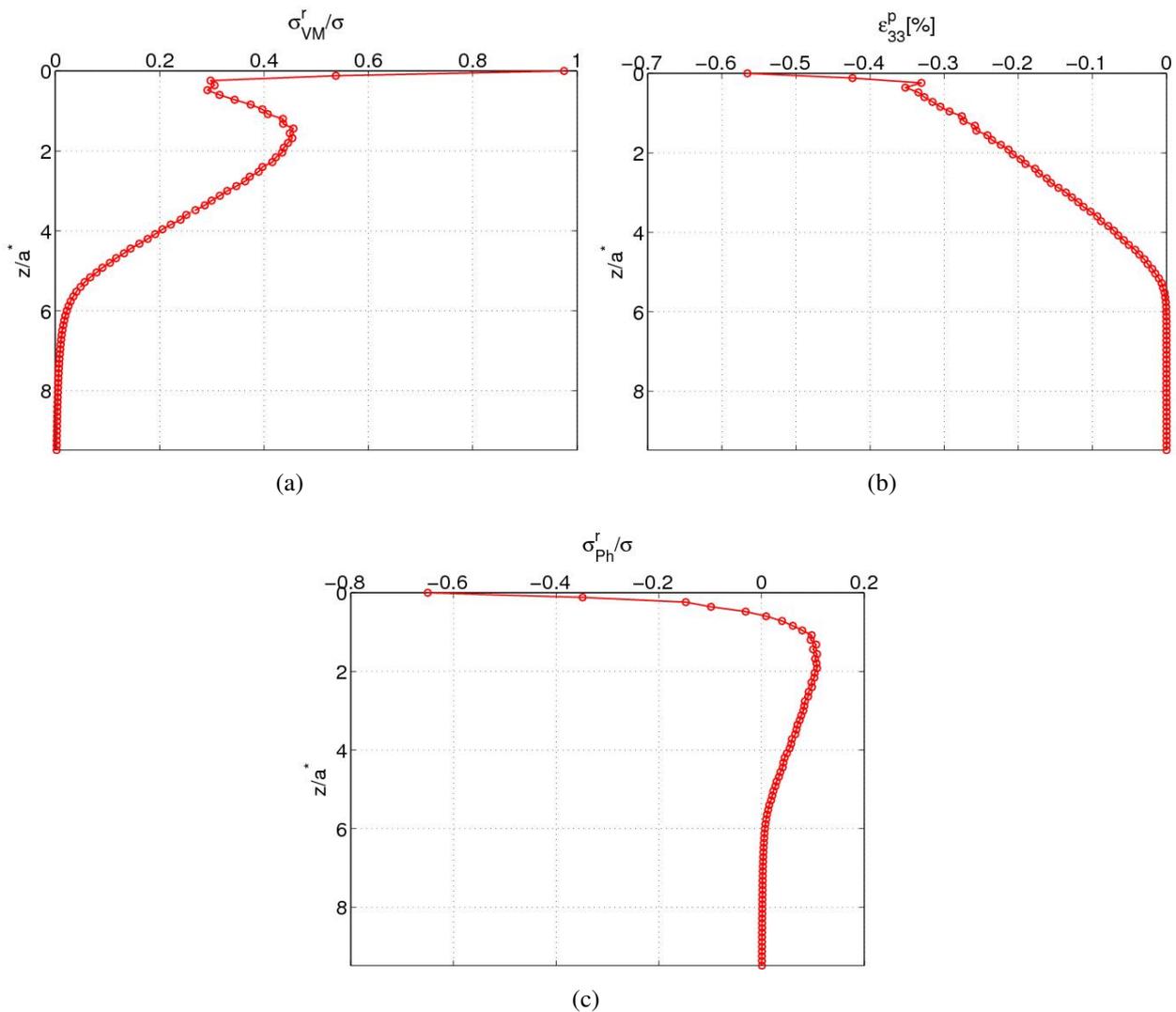
**FIGURE 6.31:** Simulation d'un mono impact laser en régime confiné sur l'acier martensitique 12%Cr. Illustration de la contrainte hydrostatique résiduelle en surface suivant la direction radiale

compression sur une profondeur  $z \simeq 0.5a^*$  et en surface sur une zone de rayon pouvant atteindre  $\simeq 2a^*$ . D'après la figure 6.32(a), les contraintes résiduelles maximales générées atteignent  $0.95\sigma \simeq 820MPa$  dans la zone impacté. Sur la figure 6.32(b), les niveaux de déformations plastiques obtenues sont toujours en dessous du seuil maximal (2%) lors d'un mono impact laser.

Les contraintes résiduelles maximales et la profondeur des contraintes de compression obtenues ici sont proches de celles obtenues par Peyre et al. [PEY 07b]. En effet, ces auteurs ont montré par une simulation éléments finis que pour une pression maximale de  $4GPa$  et une distribution spatiale uniformément appliqué sur l'acier martensitique, les contraintes résiduelles  $\sigma_{11}^r$  obtenues atteignent  $-800MPa$  pour une durée d'impulsion laser de  $2.5ns$  à mis hauteur. Toutefois la profondeur de ces contraintes atteint  $\simeq 0.5a^*$  et en surface une zone de rayon  $\simeq 1.6a^*$ . L'écart observé en surface s'explique par la forme des spots appliquée : uniforme (cylindrique) de rayon  $a^*$  pour les résultats issus de [PEY 07b] et gaussienne de rayon de base  $a^*$  pour la méthode semi-analytique.

Ceci démontre que le modèle de choc laser mis en place est capables de prédire les contraintes résiduelles et les déformations plastiques induite par un mono impact laser, ainsi que la profondeur des contraintes résiduelles de compression.

## 6. Modélisation d'un impact rapide élasto-viscoplastique et application pour la simulation d'un mono impact laser



**FIGURE 6.32:** Simulation d'un mono impact laser en régime confiné sur l'acier martensitique 12%Cr : (a) contraintes de von Mises résiduelles, (b) déformations plastiques  $\epsilon_{33}^p$ , (c) contraintes hydrostatiques résiduelles en profondeur.

## 8 Conclusions

Dans ce chapitre, le modèle d'impact rapide sur un matériau élastique a été enrichi pour tenir compte de la plasticité et de la viscoplasticité. Un algorithme viscoplastique a été proposé et couplé au modèle précédent pour le calcul des déformations plastiques et des contraintes résiduelles. Une loi viscoplastique du type Johnson-Cook a été implémentée pour décrire le comportement du matériau sous choc à très grande vitesse de déformation. Un modèle éléments finis d'impact rapide sur un matériau élasto-plastique et élasto-viscoplastique a été réalisé pour valider le modèle d'impact rapide mis en place.

Les résultats présentés dans ce chapitre se résument comme suit :

#### ☞ Simulation d'un impact rapide de type choc laser

- le modèle d'impact rapide a été validé avec le modèle éléments finis, les résultats obtenus corréleront bien avec le modèles éléments finis, toutefois, les disparités existant entre les deux modèles résultent des méthode pour le calcul des différents états mécaniques induits dans le matériau au cours de la propagation des onde de choc.
- le modèle viscoplastique décrit parfaitement les physiques rencontrées dans la littérature à savoir la réversibilité des déformations plastiques et par conséquent des contraintes résiduelles. La réversibilité est une conséquence de l'effet de décharge de la pression appliquée.
- le phénomène d'amortissement et d'atténuation élasto-plastique a été observé et le pré-curseur élastique a été détecté

#### ☞ influence des paramètres procédés :

L'influence des paramètres liées aux problème d'impact rapide de type choc laser a été étudiée. Les résultats obtenus sont en accord avec la littérature.

- l'augmentation de pression maximale augmente les contraintes résiduelles et les déformations plastiques dans la profondeur, ainsi que la profondeur plastifiée
- le rayon du spot influe sur la profondeur plastifiée et celle des contraintes résiduelles, et aussi sur leur maximum en sous couche
- l'augmentation de la limite élastique initiale du matériau augmente les contraintes résiduelles et les déformations plastiques en surface, par contre la profondeur plastifiée et les contraintes maximales en sous couche diminuent lorsque la limite élastique augmente
- la durée de l'impulsion influe sur la profondeur plastifiée et sur les contraintes résiduelles et déformations plastiques maximales en surface et sous couche.

#### ☞ simulation d'un mono impact laser :

- un modèle numérique pour la simulation du profil de pression induit par impact laser a été proposé et validé avec des données de la littérature. Enfin, une étude paramétrique réalisée à permis de montrer que la pression induite lors d'un choc laser en régime confiné augmente avec l'impédance caractéristique du milieu de confinement et du matériau traité
- le modèle numérique est couplé au modèle viscoplastique pour la simulation des contraintes résiduelles et déformations plastiques induite par laser. Dans cette partie, il a été montré que les ordres de grandeur des contraintes résiduelles maximale et la profondeur des contraintes de compressions sont en accord avec les données trouvées dans la littérature.



# Conclusions et Perspectives

## *Conclusions*

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'extension de la méthode semi-analytique pour la simulation des procédés de mise en compression à très grande vitesse de déformation, et de son application à la simulation des effets mécaniques induits par le procédé de choc laser.

Les objectifs de ces travaux étaient d'une part, la recherche et l'implémentation des solutions analytiques élémentaires appelées coefficients d'influence faisant intervenir les effets d'inertie. D'autre part, l'application de ses formulations pour la modélisation de problèmes d'impact rapide.

Après avoir présenté, dans le chapitre 1, les différentes physiques liées aux problèmes d'impacts rapides, les effets induits par ces derniers et les techniques de génération d'onde de choc par production d'impact rapide, une étude bibliographique sur la méthode semi-analytique dans le chapitre 2 nous a permis de prendre connaissance des différentes démarches de résolutions d'un problème par la dite méthode et ainsi, d'identifier les points bloquants sur lesquels travailler.

Ces points ont été abordés en détail dans les chapitres suivants de ce mémoire. Ainsi dans un premier temps (CHAP. 3), partant de l'hypothèse qu'une force de type transitoire d'amplitude constante au cours du temps est appliquée sur un massif semi-infini, les solutions analytiques élémentaires (ici données par les solutions en contraintes et en déplacements de la force appliquée) ont été développées et implémentées. Dans un second temps, ces solutions ont été utilisées pour simuler les contraintes engendrées par une pression uniforme appliquée sur une surface élémentaire d'un massif semi-infini. Les solutions obtenues sont en accord avec la littérature pour les solutions analytiques élémentaires et avec les résultats d'un modèle éléments finis réalisé avec ABAQUS-explicit pour la validation des coefficients d'influence.

En se servant des coefficients d'influence, une modélisation et une simulation numérique d'un impact rapide par application d'un champ de pression sur la surface libre d'un matériau purement élastique a été proposée dans le CHAP. 4 puis validée par un modèle éléments finis réalisé avec le logiciel commercial ABAQUS 6.11 en utilisant le solveur dynamique-explicite. La propagation des ondes de choc dans le matériau impacté a été analysée en détail ainsi que la réponse du matériau sollicité. La simulation a montré que le matériau impacté reste en compression dans les zones déformées par le passage des ondes durant la période d'application de la pression jusqu'à la détente latérale des ondes dans le matériau. Les physiques liées à la propagation des ondes et présentées dans ce mémoire sont en accord avec la littérature. Une étude paramétrique préliminaire réalisée a également permis de montrer que la taille de la zone d'impact, la pression maximale appliquée et la durée d'application de la pression sont parmi les paramètres les plus influents du problème de choc par impact rapide. Cependant, l'étude a également montré que pour un impact rapide réalisé sur un matériau élastique la profondeur sollicitée est indépendante de la taille d'impact.

En ce qui concerne les procédés de mise en compression, les traitements sont faits pour plastifier le matériau avec des champs de pression élevés et jusqu'ici, le modèle d'impact présenté se limitait uniquement au calcul élastique. Des développements analytiques et numériques ont été entrepris dans les chapitres 5 et 6 pour mettre en place des algorithmes constituant le solveur plastique en dynamique. Dans le chapitre 5, les développements ont permis de calculer les coefficients d'influence nécessaire au calcul des contraintes résiduelles induites lors du procédé de type impact rapide. Les coefficients d'influence identifiés sont basés sur un modèle d'inclusions en dynamique qui se dilatent au cours du temps. Dans ce chapitre, il a été montré que la présence du terme inertiel dans la formulation de calcul des contraintes résiduelles n'est pas adapté pour le problème traité due à la complexité de ces solutions analytiques. Dans le chapitre 6, un algorithme viscoplastique du type retour radial a été implémenté pour le calcul des déformations plastiques. De plus, pour reproduire le comportement du matériau sous choc, une loi viscoplastique à écrouissage isotrope du type Johnson-Cook a été implémentée dans le solveur (visco)plastique. Le solveur (visco)plastique dynamique est couplé au modèle d'impact rapide élastique pour la simulation d'un impact rapide sur un matériau élasto-plastique ou élasto-viscoplastique. La validation du modèle semi-analytique par comparaison avec un modèle éléments finis (ABAQUS 6.11, en dynamique explicite) a été faite dans un premier temps pour un impact rapide sur un matériau élasto-plastique, puis dans un second temps, pour un impact rapide réalisé sur un matériau élasto-viscoplastique. Les résultats obtenus dans les deux cas corréleront bien avec les résultats éléments finis.

Il a été montré dans ce mémoire que les physiques liées à la propagation de l'onde de choc dans le matériau cible telles que l'amortissement, l'atténuation, le raidissement du front de l'onde de choc et la formation du précurseur élastique sont parfaitement décrits par le modèle semi-analytique. Pour achever ce point, une étude paramétrique sur les paramètres gouvernant le problème d'impact rapide a été réalisée et les résultats obtenus ont montré que le modèle semi-analytique décrit parfaitement l'influence des différents paramètres liés au procédé d'impact rapide. Les influences des paramètres étudiés sont en accord avec la littérature. Cette étude a permis ainsi de montrer l'influence de la pression maximale appliquée, de la taille de l'impact et de la durée d'application de la pression sur les profondeurs, sur les maxima en surface et en sous couche des déformations plastiques et des contraintes résiduelles induites.

Le modèle viscoplastique a été appliqué à la simulation du procédé de choc laser. Ainsi un modèle numérique de simulation de la pression induite par un mono impact laser a été proposé et implémenté. Ce modèle permet de déterminer la pression induite dans la zone d'impact lorsque le laser est utilisé en régime confiné. Le modèle a été validé par rapport à la littérature puis couplé au modèle d'impact rapide viscoplastique. Enfin, un cas de simulation des contraintes résiduelles et déformations plastiques induites par un mono impact laser en régime confiné a été réalisé sur un massif semi-infini en acier martensitique 12%Cr. Les paramètres laser ont été choisis pour être représentatifs des données retrouvées dans la littérature. Les résultats de la simulation ont montré que les niveaux de contraintes résiduelles et la profondeur des contraintes résiduelles de compression obtenus sont dans les mêmes ordres de grandeurs que ceux observés dans la littérature.

Ces travaux et résultats montrent bien la robustesse et l'efficacité du modèle semi-analytique pour la modélisation des problèmes dynamiques à très grandes vitesses de déformation.

## *Perspectives*

Les perspectives liées aux travaux présentés ici sont nombreuses, que se soit sur le plan numérique ou expérimental. Ci-dessous une liste non exhaustive de ces perspectives :

→ Sur le plan numérique :

- il serait intéressant de réaliser un benchmark avec différents codes éléments finis pour valider soigneusement le modèle d'impact rapide élasto-plastique et élasto-viscoplastique mis en place. Ce point comprendrait la mise en place du modèle d'impacts multiples permettant de montrer l'influence des impacts juxtaposés et superposés sur les états résiduels induits. En effet, dans la littérature, le modèle analytique [BAL 91], les simulations numériques [SON 10, KIM 13b, JUL 14] et les résultats expérimentaux ont montré que les impacts multiples modifient la profondeur et les niveaux des déformations plastiques, ainsi que les contraintes résiduelles obtenues,
- le modèle de simulation de la pression induite par un mono impact laser décrit la pression en régime confiné sans la présence du milieu thermo-protecteur (voir FIG. 6.25). Dubouchet [DUB 93] a montré expérimentalement que ce type de traitement confère au matériau cible une dureté élevée en surface et un champ de contrainte de compression s'étendant sur une profondeur importante. Cependant, pour un traitement laser sans la couche thermo-protectrice avec des spots de tailles très grandes ou un cumul d'impacts de petite tailles, les contraintes résiduelles surfaciques engendrées sont des contraintes de traction [BAL 91, SOL 02]. Dans ce cas l'utilisation du milieu thermo-protecteur met en évidence que grâce à un choc mécanique (Dubouchet montre que les effets du choc laser sont purement mécaniques), il est possible de transformer un champ de contrainte initial (dû à l'opération de trempage). La replastification engendrée par l'onde de choc peut même entraîner la mise en compression d'un champ de contrainte de traction. Ceci montre qu'il serait intéressant de réaliser des études numériques thermo-mécaniques pour étudier l'influence d'un revêtement thermo-protecteur sur le champ de contraintes résiduelles et les déformations plastiques.
- il serait intéressant d'étendre le modèle à d'autres procédés impliquant les effets d'inertie tels que le traitement par jet d'eau (water jet peening), le traitement par cavitation (cavitation peening), pour la prédiction des contraintes résiduelles et des déformations plastiques induites par ces procédés. Une telle étude permettrait de comparer les procédés de mise en compression des surfaces pouvant être simulés par la méthode semi-analytique. Cette étude pourra s'étendre facilement à la rugosité des surfaces engendrée par chaque procédé,
- bien que le modèle semi-analytique soit plus efficace (réduction du temps de calcul) que le modèle éléments finis implémenté dans ABAQUS, l'algorithme de calcul des contraintes engendrées par la pression reste encore à améliorer. En effet aucune optimisation n'a été effectuée jusqu'ici pour réduire le temps de calcul lié à la convolution temporelle. A long terme, il serait intéressant de développer des outils d'optimisation permettant de réduire le temps de calcul liée à cette convolution.

- nous avons montré à travers ces travaux que les coefficients d'influence proposés sont utilisables pour tout type de chargement, et aussi montré l'efficacité du solveur plastique. Ainsi, le champ d'application de la méthode pourrait être étendu aux problèmes de contact en dynamique. Ce qui permettra de simuler le procédé d'impact plan qui consiste à impacter le matériau cible par une plaque mince projetée à très grande vitesse (voir CHAP. 1) ou l'impact d'un projectile de forme sphérique sur le matériau cible.
- ✈ Sur le plan expérimental :
- l'expérimental n'a pas fait l'objet de cette thèse, toutefois, nous pensons qu'il serait intéressant de réaliser une campagne expérimentale pour comparer les résultats expérimentaux avec les résultats numériques obtenus par la méthode semi-analytique. Ceci permettrait également d'étudier l'influence de la loi de comportement du matériau sur les contraintes résiduelles et sur les déformations plastiques.

# Annexes



# Annexe A

## Coefficients d'influence en dynamique

### 1 Méthode de Transformation des intégrales [ALE 00, GRA 07]

**Définition 4** : Définition de la Transformation de Hankel

Soit  $f(r)$  une fonction définie pour  $r \geq 0$ . On appelle transformation de Hankel d'ordre  $\nu$  associée à  $f$ , la fonction définie par :

$$F_\nu(s) = \bar{f}(r) = \int_0^\infty r f(r) J_\nu(sr) dr \quad (\text{A.1})$$

où  $J_\nu$  est la fonction de Bessel du premier type d'ordre  $\nu$

Si  $\nu \geq -1/2$ , alors la transformation inverse de Hankel est définie par

$$f_\nu(r) = \int_0^\infty s F_\nu(s) J_\nu(sr) ds \quad (\text{A.2})$$

**Définition 5** : Définition de la Transformé de Laplace

La transformée de Laplace d'une fonction  $f$  d'une variable réelle  $t$ , à support positif est la fonction  $F(p)$  définie par :

$$F(p) = \int_{0^-}^\infty e^{-pt} f(t) dt \quad (\text{A.3})$$

L'inversion de la transformation de Laplace s'effectue dans le plan complexe. Elle est définie par :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} F(p) dp \quad (\text{A.4})$$

avec  $\gamma$  choisi pour que l'intégrale converge.

**Définition 6** : Propriétés associées à la transformation de Hankel  
 On a les propriétés suivantes pour la transformation de Hankel

(1)

$$\int_0^{\infty} r \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\nu}{r^2} \right) f(r) J_{\nu}(sr) dr = -s^2 \int_0^{\infty} r f(r) J_{\nu}(sr) dr \quad (\text{A.5})$$

(2)

$$\int_0^{\infty} r \left[ \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right] J_1(sr) dr = -s \int_0^{\infty} r f(r) J_0(sr) dr \quad (\text{A.6})$$

(3)

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (r^2 f(r))}{\partial r} \right] J_1(sr) dr = s \int_0^{\infty} r f(r) J_2(sr) dr \quad (\text{A.7})$$

(4)

$$\int_0^{\infty} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{f(r)}{r} \right] J_2(sr) dr = -s \int_0^{\infty} r f(r) J_1(sr) dr \quad (\text{A.8})$$

(5)

$$\int_0^{\infty} \left[ \frac{\partial (r f(r))}{\partial r} \right] J_0(sr) dr = s \int_0^{\infty} r f(r) J_1(sr) dr \quad (\text{A.9})$$

## 2 Les intégrales de type Lipschitz pour la simplification des $\phi_i^r$ et $\phi_i^z$

Les expressions suivantes ont été développées et démontrées en détails dans les travaux de Watson [WAT 66] et résumé par Gradshteyn et Ryzhik [GRA 07]. Dans toute cette partie, la fonction  $Re(\cdot)$  désigne la partie réelle de la variable,  $Im$  sa partie imaginaire et  $\Gamma$  est la fonction gamma

### 1. Combinaisons entre les fonctions de Bessel et exponentielle

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} J_{\nu}(\beta x) dx = \frac{(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha)^{\nu}}{\beta^{\nu} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad (\text{A.10})$$

$$[Re(\nu) > -1, Re(\alpha \pm i\beta) > 0]$$

2. Combinaisons entre les fonctions de Bessel, exponentielle et puissance

$$\int_0^\infty x^{m+1} e^{-\alpha x} J_\nu(\beta x) dx = \frac{(-1)^{m+1}}{\beta^\nu} \frac{d^{m+1}}{d\alpha^{m+1}} \left[ \frac{(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha)^\nu}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right] \quad (\text{A.11})$$

$[\beta > 0, \operatorname{Re}(\nu) > -(m+2)]$

3. Combinaisons entre les fonctions de Bessel, exponentielle et trigonométrique

$$\int_0^\infty e^{-\beta x} \cos(\alpha x) J_\nu(cx) dx = \frac{\sqrt{\left[ \beta^2 + c^2 - \alpha^2 + \sqrt{(\beta^2 + c^2 - \alpha^2)^2 + 4\beta^2 \alpha^2} \right]}}{\sqrt{2} \sqrt{(\beta^2 + c^2 - \alpha^2)^2 + 4\beta^2 \alpha^2}} \quad (\text{A.12})$$

$[c > 0]$

4. Combinaisons entre les fonctions de Bessel et trigonométriques

Pour  $\operatorname{Re}(\nu) > -2$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty J_\nu(\alpha x) \sin(\beta x) dx &= \frac{\sin \left[ \nu \arcsin \left( \frac{\beta}{\alpha} \right) \right]}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} && [\beta < \alpha] \\ &= \infty \text{ ou } 0 && [\beta = \alpha] \\ &= \frac{\alpha^\nu \cos \left( \frac{\nu\pi}{2} \right)}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} \left( \beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} \right)^\nu} && [\beta > \alpha] \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Pour  $\operatorname{Re}(\nu) > -1$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty J_\nu(\alpha x) \cos(\beta x) dx &= \frac{\cos \left[ \nu \arcsin \left( \frac{\beta}{\alpha} \right) \right]}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} && [\beta < \alpha] \\ &= \infty \text{ ou } 0 && [\beta = \alpha] \\ &= \frac{-\alpha^\nu \sin \left( \frac{\nu\pi}{2} \right)}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} \left( \beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} \right)^\nu} && [\beta > \alpha] \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

5. A partir des deux dernières formules on a les cas particuliers suivants :

Pour  $\nu = 0$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} J_0(\alpha x) \sin(\beta x) dx &= 0 && [0 < \beta < \alpha] \\ &= \infty && [\beta = \alpha] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} && [\beta > \alpha > 0] \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} J_0(\alpha x) \cos(\beta x) dx &= 0 && [\beta > \alpha > 0] \\ &= \infty && [\beta = \alpha] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} && [0 < \beta < \alpha] \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

### 6. Combinaison des fonctions de Bessel, trigonométrique, exponentielle et puissance

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{\nu+1} e^{-sx} \cos(\beta x) J_{\nu}(\alpha x) dx &= \frac{2(2\alpha)^{\nu}}{\sqrt{\pi}} \left\{ s \cos\left(\nu + \frac{3}{2}\right) \varphi - \beta \sin\left(\nu + \frac{3}{2}\right) \varphi \right\} \times \\ &\Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right) R^{-2\nu-3} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

$[Re(\nu) > -1, Re(s) > |Im(\alpha)| + |Im(\beta)|]$   
 $[\varphi = \arg(s^2 + \alpha^2 - \beta^2 - 2i\beta s), R^4 = (s^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\beta^2 s^2]$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{\nu+1} e^{-sx} \sin(\beta x) J_{\nu}(\alpha x) dx &= -\frac{2(2\alpha)^{\nu}}{\sqrt{\pi}} \left\{ s \sin\left(\nu + \frac{3}{2}\right) \varphi + \beta \cos\left(\nu + \frac{3}{2}\right) \varphi \right\} \times \\ &\Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right) R^{-2\nu-3} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

$[Re(\nu) > -1, Re(s) > |Im(\alpha)| + |Im(\beta)|]$   
 $[\varphi = \arg(s^2 + \alpha^2 - \beta^2 - 2i\beta s), R^4 = (s^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\beta^2 s^2]$

## 3 Signe de $(y\gamma \pm \rho_k z)$ par rapport à la distance radiale $r$

Pour la simplification des intégrales du type

$$\int_0^{\infty} J_{0,1}(\zeta r) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} [\zeta(y\gamma \pm \rho_{1,2} z)] d\zeta$$

présentes dans les expressions du champ de déplacement exprimé dans le chapitre 3, Eason [EAS 66] a étudié les inégalités suivantes :  $r \leq y\gamma \pm \rho_{1z}$  et  $r \leq y\gamma \pm \rho_{2z}$ .

Les racines des équations  $r = y\gamma \pm \rho_1 z$  et  $r = y\gamma \pm \rho_2 z$  sont données par les fonctions  $y_1^*$ ,  $y_1^{**}$  pour la première équation et  $y_2^*$ ,  $y_2^{**}$  pour la deuxième équation. Ces fonctions sont exprimées dans la section 4 de cette annexe. Dans ce qui suit, seul le cas  $r \leq y\gamma \pm \rho_2 z$  sera présenté et les mêmes résultats sont obtenus pour le cas  $r \leq y\gamma \pm \rho_1 z$  en posant  $\beta = 1$ .

On a donc les résultats suivants :

$$0 < \beta r < \gamma, \quad \begin{array}{l} y\gamma + \rho_2 z > r \quad \forall y \\ |y\gamma - \rho_2 z| > r \quad \text{si } 1/\beta < y < y^* \text{ ou } y > y^{**} \\ |\rho_2 z - y\gamma| < r \quad \text{si } y^* < y < y^{**} \end{array}$$

$$\gamma < \beta r, \quad \begin{array}{l} y\gamma + \rho_2 z > r \quad \text{si } y > y^* \\ y\gamma + \rho_2 z < r \quad \text{si } 1/\beta < y < y^* \\ \rho_2 z - y\gamma > r \quad \text{si } y > y^{**} \\ \rho_2 z - y\gamma < r \quad \text{si } 1/\beta < y < y^{**} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 0 < \beta r < (\gamma^2 - \beta^2 z^2)^{1/2}, \quad y\gamma \pm \rho_2 z > r \quad \forall y \\ (\gamma^2 - \beta^2 z^2)^{1/2} < \beta r < \gamma \quad \begin{array}{l} y\gamma + \rho_2 z > r \quad \forall y \\ y\gamma - \rho_2 z > r \quad \text{si } 1/\beta < y < y^* \text{ ou } y > y^{**} \\ y\gamma - \rho_2 z < r \quad \text{si } y^* < y < y^{**} \end{array} \\ \gamma < \beta r, \quad \begin{array}{l} y\gamma + \rho_2 z > r \quad \text{si } y > y^* \\ y\gamma + \rho_2 z < r \quad \text{si } 1/\beta < y < y^* \\ y\gamma - \rho_2 z > r \quad \text{si } y > y^{**} \\ y\gamma - \rho_2 z < r \quad \text{si } 1/\beta < y < y^{**} \end{array} \end{array}$$

## 4 Expressions simplifiées des fonctions $\phi_i^r$ et $\phi_i^z$

Ici sont présentés les fonctions élémentaires  $\Phi_i^r$  et  $\Phi_i^z$  définies dans le chapitre 3 pour le calcul des champs de déplacements engendrés par une force impulsive de type Heaviside appliquée sur la surface libre d'un massif semi-infini élastique et isotrope.

$$\begin{cases} \rho_1 = (y^2 - 1)^{1/2} \\ \rho_2 = (\beta^2 y^2 - 1)^{1/2} \\ \nu_1 = (1 - y^2)^{1/2} \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{cases} \psi_1 = (1 - \frac{1}{2}\beta^2 y^2)^2 + \rho_1 \rho_2 \\ \psi_2 = (1 - \frac{1}{2}\beta^2 y^2)^4 + \nu_1^2 \rho_2^2 \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

$$\begin{cases} \bar{h}_1 = (1 - \alpha^2)^{1/2} \\ \bar{h}_2 = (1 - \beta^2 \alpha^2)^{1/2} \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

$$\begin{cases} R_1 = \left[ (r^2 + \hbar_1^2 z^2 - \alpha^2 \gamma^2)^2 + 4\hbar_1^2 z^2 \alpha^2 \gamma^2 \right]^{1/2} \\ R_2 = \left[ (r^2 + \hbar_2^2 z^2 - \alpha^2 \gamma^2)^2 + 4\hbar_2^2 z^2 \alpha^2 \gamma^2 \right]^{1/2} \\ R_3 = \left[ (r^2 + v_1^2 z^2 - \gamma^2 y^2)^2 + 4\gamma^2 v_1^2 z^2 y^2 \right]^{1/2} \\ \Xi = 2\beta^2 \left(1 - \frac{1}{2}\beta^2 \alpha^2\right) - \frac{\hbar_2}{\hbar_1} - \beta^2 \frac{\hbar_1}{\hbar_2} \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

$$\begin{cases} y_1^{**} = \frac{r\gamma + z(r^2 + z^2 - \gamma^2)^{1/2}}{|\gamma^2 - z^2|} \\ y_1^* = \frac{r\gamma - z(r^2 + z^2 - \gamma^2)^{1/2}}{\gamma^2 - z^2} \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{cases} y_2^{**} = \frac{r\gamma + z(\beta^2(r^2 + z^2) - \gamma^2)^{1/2}}{|\gamma^2 - \beta^2 z^2|} \\ y_2^* = \frac{r\gamma - z(\beta^2(r^2 + z^2) - \gamma^2)^{1/2}}{\gamma^2 - \beta^2 z^2} \end{cases} \quad (\text{A.24})$$

$$\begin{aligned} \phi_1^r(r, z, \gamma) &= \int_0^\infty \cos(\zeta \alpha \gamma) \left[ \left(1 - \frac{1}{2}\beta^2 \alpha^2\right) e^{-\zeta \hbar_1 z} - \hbar_1 \hbar_2 e^{-\zeta \hbar_2 z} \right] J_1(\zeta r) d\zeta \\ &= \frac{(1 - \frac{1}{2}\beta^2 \alpha^2)}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{R_1 \sqrt{2}} \left[ \hbar_1 z (R_1 + r^2 + \hbar_1^2 z^2 - \alpha^2 \gamma^2)^{1/2} \right] \right\} + \\ &\quad \alpha \gamma \frac{(1 - \frac{1}{2}\beta^2 \alpha^2)}{r R_1 \sqrt{2}} (R_1 - r^2 - \hbar_1^2 z^2 + \alpha^2 \gamma^2)^{1/2} - \\ &\quad \frac{\hbar_1 \hbar_2}{r} \left\{ 1 - \frac{K_2 z}{R_2 \sqrt{2}} (R_2 + r^2 + \hbar_2^2 z^2 - \alpha^2 \gamma^2)^{1/2} \right\} + \\ &\quad \alpha \gamma \frac{\hbar_1 \hbar_2}{R_2 r \sqrt{2}} (R_2 + \alpha^2 \gamma^2 - r^2 - \hbar_2^2 z^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

$$\begin{aligned} \phi_1^z(r, z, \gamma) &= \int_0^\infty \cos(\zeta \alpha \gamma) \left[ \left(1 - \frac{1}{2}\beta^2 \alpha^2\right) e^{-\zeta \hbar_1 z} - e^{-\zeta \hbar_2 z} \right] J_0(\zeta r) d\zeta \\ &= \frac{(1 - \frac{1}{2}\beta^2 \alpha^2)}{R_1 \sqrt{2}} (R_1 + r^2 + \hbar_1^2 z^2 - \alpha^2 \gamma^2)^{1/2} - \frac{1}{R_2 \sqrt{2}} (R_2 + r^2 + \hbar_2^2 z^2 - \alpha^2 \gamma^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

$$\begin{aligned} \phi_2^r(r, z, \gamma) &= \int_0^\infty (1 - \zeta z (\beta^2 - 1)) J_1(\zeta r) e^{-\zeta z} \\ &= \frac{1}{r} \left[ 1 - \frac{z}{(r^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{z r^2 (\beta^2 - 1)}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

$$\begin{aligned}\phi_2^z(r, z, \gamma) &= \int_0^\infty (\beta^2 - \zeta z (\beta^2 - 1)) J_0(\zeta r) e^{-\zeta z} d\zeta \\ &= \left[ \frac{\beta^2}{(r^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{z r^2 (\beta^2 - 1)}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \right]\end{aligned}\quad (\text{A.28})$$

$$\begin{aligned}\phi_3^r(r, z, \gamma) &= \int_1^\infty \frac{(1 - \frac{1}{2}\beta^2 y^2)}{y \psi_1} dy \int_0^\infty \sin[\zeta(y\gamma + q_1 z)] J_1(\zeta r) d\zeta \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma > r \\ \int_1^{y_1^*} \frac{(1 - \frac{1}{2}\beta^2 y^2) (y\gamma + \rho_1 z)}{r y \psi_1 [r^2 - (y\tau + \rho_1 z)^2]^{1/2}} dy & \text{si } \gamma < r \end{cases}\end{aligned}\quad (\text{A.29})$$

$$\begin{aligned}\phi_3^z(r, z, \gamma) &= \int_1^\infty \frac{\rho_1 (1 - \frac{1}{2}\beta^2 y^2)}{y \psi_1} dy \int_0^\infty \cos[\zeta(y\gamma + \rho_1 z)] J_0(\zeta r) d\zeta \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma > r \\ \int_1^{y_1^*} \frac{\rho_1 (1 - \frac{1}{2}\beta^2 y^2)}{y \psi_1 [r^2 - (y\gamma + \rho_1 z)^2]^{1/2}} dy & \text{si } \gamma < r \end{cases}\end{aligned}\quad (\text{A.30})$$

$$\begin{aligned}\phi_4^r(r, z, \gamma) &= \int_1^\infty \frac{(1 - \frac{1}{2}\beta^2 y^2)}{y \psi_1} dy \int_0^\infty \sin[\zeta(y\gamma - \rho_1 z)] J_1(\zeta r) d\zeta \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma > (r^2 + z^2)^{1/2} \\ \int_b^{y_1^{**}} \frac{(1 - \frac{1}{2}\beta^2 y^2) (y\gamma - q_1 z)}{r y \psi_1 [r^2 - (y\gamma - \rho_1 z)^2]^{1/2}} dy & \text{si } \gamma < (r^2 + z^2)^{1/2} \end{cases}\end{aligned}\quad (\text{A.31})$$

$$\begin{aligned}\phi_4^z(r, z, \gamma) &= \int_1^\infty \frac{\rho_1 (1 - \frac{1}{2}\beta^2 y^2)}{y \psi_1} dy \int_0^\infty \cos[\zeta(y\gamma - \rho_1 z)] J_0(\zeta r) d\zeta \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma > (r^2 + z^2)^{1/2} \\ \int_b^{y_1^{**}} \frac{q_1 (1 - \frac{1}{2}\beta^2 y^2)}{y \psi_1 [r^2 - (y\gamma - q_1 z)^2]^{1/2}} dy & \text{si } \gamma < (r^2 + z^2)^{1/2} \end{cases}\end{aligned}\quad (\text{A.32})$$

avec :

$$\begin{cases} b = 1 & \text{si } \gamma < r \\ b = y_1^* & \text{si } r < \gamma < (r^2 + z^2)^{1/2} \end{cases}\quad (\text{A.33})$$

$$\phi_5^r(r, z, \gamma) = \int_1^\infty \frac{\rho_1 \rho_2}{y \psi_1} dy \int_0^\infty \sin[\zeta(y\gamma + \rho_2 z)] J_1(\zeta r) d\zeta \quad (\text{A.34})$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma > \beta r \\ \int_1^c \frac{\rho_1 \rho_2 (y\gamma + \rho_2 z)}{r y \psi_1 [r^2 - (y\gamma + \rho_2 z)^2]^{1/2}} dy & \text{si } \gamma < \beta r \end{cases}$$

$$\phi_5^z(r, z, \gamma) = \int_1^\infty \frac{\rho_1}{y \psi_1} dy \int_0^\infty \cos[\zeta(y\gamma + \rho_2 z)] J_0(\zeta r) d\zeta \quad (\text{A.35})$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma > \beta r \\ \int_1^c \frac{\rho_1}{y \psi_1 [r^2 - (y\gamma + \rho_2 z)^2]^{1/2}} dy & \text{si } \gamma < \beta r \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} c = y_2^* & \text{si } y_2^* > 1 \\ c = 1 & \text{si } y_2^* < 1 \end{cases} \quad (\text{A.36})$$

$$\phi_6^r(r, z, \gamma) = \int_1^\infty \frac{\rho_1 \rho_2}{y \psi_1} dy \int_0^\infty \sin[\zeta(y\gamma - \rho_2 z)] J_1(\zeta r) d\zeta \quad (\text{A.37})$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma > \beta(r^2 + z^2)^{1/2} \\ \int_b^{y_2^{**}} \frac{\rho_1 \rho_2 (y\gamma - \rho_2 z)}{r y \psi_1 [r^2 - (y\gamma - \rho_2 z)^2]^{1/2}} dy & \text{si } \gamma < \beta(r^2 + z^2)^{1/2} \end{cases}$$

$$\phi_6^z(r, z, \gamma) = \int_1^\infty \frac{\rho_1}{y \psi_1} dy \int_0^\infty \cos[\zeta(y\gamma - \rho_2 z)] J_0(\zeta r) d\zeta \quad (\text{A.38})$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma > \beta(r^2 + z^2)^{1/2} \\ \int_b^{y_2^{**}} \frac{\rho_1}{y \psi_1 [r^2 - (y\gamma - \rho_2 z)^2]^{1/2}} dy & \text{si } \gamma < \beta(r^2 + z^2)^{1/2} \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} b = y_2^{**} & \text{si } y_2^{**} < 1 \\ b = y_2^* & \text{si } \beta r < \gamma < \beta(r^2 + z^2)^{1/2} \text{ et } y_2^* > 1 \\ b = 1 & \text{si } \beta r < \gamma < \beta(r^2 + z^2)^{1/2} \text{ et } y_2^* < 1 \text{ et } y_2^{**} > 1 \\ b = 1 & \text{si } \gamma < \beta r \text{ et } y_2^{**} > 1 \end{cases} \quad (\text{A.39})$$

$$\begin{aligned}\phi_7^r(r, z, \gamma) &= \int_{1/\beta}^1 \frac{v_1 \rho_2 (1 - \frac{1}{2} \beta^2 y^2)}{y \psi_2} dy \int_0^\infty \cos(\zeta y \gamma) e^{-v_1 \zeta z} J_1(\zeta r) d\zeta \\ &= \int_{1/\beta}^1 \frac{v_1 \rho_2 (1 - \frac{1}{2} \beta^2 y^2)}{r y \psi_2} \left\{ 1 - \frac{1}{R_3 \sqrt{2}} \left[ v_1 z (R_3 + r^2 + v_1^2 z^2 - y^2 \gamma^2)^{1/2} \right] \right\} dy + \\ &\quad \int_{1/\beta}^1 \frac{v_1 \rho_2 (1 - \frac{1}{2} \beta^2 y^2)}{r y \psi_2} y \gamma (R_3 + y^2 \gamma^2 - r^2 - v_1^2 z^2)^{1/2} dy\end{aligned}\quad (\text{A.40})$$

$$\begin{aligned}\phi_7^z(r, z, \gamma) &= \int_{1/\beta}^1 \frac{v_1^2 \rho_2 (1 - \frac{1}{2} \beta^2 y^2)}{y \psi_2} dy \int_0^\infty e^{-v_1 \zeta z} \cos(\zeta y \gamma) J_0(\zeta r) d\zeta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{1/\beta}^1 \frac{v_1^2 \rho_2 (1 - \frac{1}{2} \beta^2 y^2) (R_3 + r^2 + v_1^2 z^2 - \gamma y^2)^{1/2}}{y \psi_2 R_3} dy\end{aligned}\quad (\text{A.41})$$

$$\begin{aligned}\phi_8^r(r, z, \gamma) &= \int_{1/\beta}^1 \frac{v_1 \rho_2 (1 - \frac{1}{2} \beta^2 y^2)^2}{y \psi_2} dy \int_0^\infty \cos[\zeta(y\gamma + \rho_2 z)] e^{-v_1 \zeta z} J_1(\zeta r) d\zeta \\ &= \int_{1/\beta}^1 \frac{v_1 \rho_2 (1 - \frac{1}{2} \beta^2 y^2)^2}{r y \psi_2} dy - \int_b^1 \frac{v_1 \rho_2 (1 - \frac{1}{2} \beta^2 y^2)^2 (\gamma y + \rho_2 z)}{r y \psi_2 [(\gamma y + \rho_2 z)^2 - r^2]^{1/2}} dy\end{aligned}\quad (\text{A.42})$$

$$\begin{aligned}\phi_8^z(r, z, \gamma) &= \int_{1/\beta}^1 \frac{v_1 (1 - \frac{1}{2} \beta^2 y^2)^2}{y \psi_2} dy \int_0^\infty \sin[\zeta(y\gamma + \rho_2 z)] J_0(\zeta r) d\zeta \\ &= \int_b^1 \frac{v_1 (1 - \frac{1}{2} \beta^2 y^2)^2}{y \psi_2 [(\gamma y + \rho_2 z)^2 - r^2]^{1/2}} dy\end{aligned}\quad (\text{A.43})$$

avec :

$$\begin{cases} b = 1 & \text{si } \gamma < \beta r \text{ et } y_2^* > 1 \\ b = y_2^* & \text{si } \gamma < \beta r \text{ et } y_2^* < 1 \\ b = 1/\beta & \text{si } \gamma > \beta r \end{cases}\quad (\text{A.44})$$

$$\begin{aligned}\phi_9^r(r, z, \gamma) &= \int_{1/\beta}^1 \frac{v_1 \rho_2 (1 - \frac{1}{2} \beta^2 y^2)^2}{y \psi_2} dy \int_0^\infty \cos[\zeta(y\gamma - \rho_2 z)] e^{-v_1 \zeta z} J_1(\zeta r) d\zeta \\ &= \int_{1/\beta}^1 \frac{v_1 \rho_2 (1 - \frac{1}{2} \beta^2 y^2)^2}{r y \psi_2} dy - \int_b^c \frac{v_1 \rho_2 (1 - \frac{1}{2} \beta^2 y^2)^2 |\gamma y - \rho_2 z|}{r y \psi_2 [(\gamma y - \rho_2 z)^2 - r^2]^{1/2}} dy\end{aligned}\quad (\text{A.45})$$

$$\begin{aligned}\phi_9^z(r, z, \gamma) &= \int_{1/\beta}^1 \frac{v_1 (1 - \frac{1}{2} \beta^2 y^2)^2}{y \psi_2} dy \int_0^\infty \sin[\zeta(y\gamma - \rho_2 z)] J_0(\zeta r) d\zeta \\ &= \int_b^c \frac{v_1 (1 - \frac{1}{2} \beta^2 y^2)^2 \text{sgn}(\gamma y - \rho_2 z)}{y \psi_2 [(\gamma y - \rho_2 z)^2 - r^2]^{1/2}} dy\end{aligned}\quad (\text{A.46})$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{ll} b = y_2^{**}, c = 1 & \text{si } \gamma < \beta r \text{ et } y_2^{**} < 1 \\ b = 0, c = 0 & \text{si } \gamma < \beta r \text{ et } y_2^{**} > 1 \\ b = 1/\beta, c = 1 & \text{si } \beta r < \gamma < \beta(r^2 + z^2)^{1/2} \text{ et } y_2^{**} > 1 \\ b = 1/\beta, c = 1 & \text{si } \beta(r^2 + z^2)^{1/2} < \gamma \text{ et } y_2^{**} > 1 \\ b = 1/\beta, c = y_2^* & \text{si } \beta r < \gamma < \beta(r^2 + z^2)^{1/2} \text{ et } y_2^{**} > 1, y_2^* < 1 \\ b = 1/\beta, c = y_2^* \text{ et } b = y_2^{**}, c = 1 & \text{si } \beta r < \gamma < \beta(r^2 + z^2)^{1/2} \text{ et } y_2^{**} < 1 \end{array} \right. \quad (\text{A.47})$$

$$\begin{aligned} \Phi_{10}^r(r, z, \gamma) &= \int_{1/\beta}^1 \frac{v_1^2 \rho_2^2}{y \psi_2} dy \int_0^\infty \sin[\zeta(\gamma y + \rho_2 z)] J_1(\zeta r) d\zeta \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma > \beta r \\ \int_{1/\beta}^c \frac{v_1^2 \rho_2^2 (y\gamma + \rho_2 z)}{r y \psi_2 [r^2 - (y\gamma + \rho_2 z)^2]^{1/2}} dy & \text{si } \gamma < \beta r \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

$$\begin{aligned} \Phi_{10}^z(r, z, \gamma) &= \int_{1/\beta}^1 \frac{v_1^2 \rho_2^2}{y \psi_2} dy \int_0^\infty \cos[\zeta(\gamma y + \rho_2 z)] J_0(\zeta r) d\zeta \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma > \beta r \\ \int_{1/\beta}^c \frac{v_1^2 \rho_2^2}{r y \psi_2 [r^2 - (y\gamma + \rho_2 z)^2]^{1/2}} dy & \text{si } \gamma < \beta r \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{ll} c = 1 & \text{si } y_2^* > 1 \\ c = y_2^* & \text{si } y_2^* < 1 \end{array} \right. \quad (\text{A.50})$$

$$\begin{aligned} \Phi_{11}^r(r, z, \gamma) &= \int_{1/\beta}^1 \frac{v_1^2 \rho_2^2}{y \psi_2} dy \int_0^\infty \sin[\zeta(\gamma y - \rho_2 z)] J_1(\zeta r) d\zeta \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma > \beta(r^2 + z^2)^{1/2} \\ \int_{1/\beta}^c \frac{v_1^2 \rho_2^2 (y\gamma - \rho_2 z)}{r y \psi_2 [r^2 - (y\gamma - \rho_2 z)^2]^{1/2}} dy & \text{si } \gamma < \beta(r^2 + z^2)^{1/2} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

$$\begin{aligned} \Phi_{11}^z(r, z, \gamma) &= \int_{1/\beta}^1 \frac{v_1^2 \rho_2^2}{y \psi_2} dy \int_0^\infty \cos[\zeta(\gamma y - \rho_2 z)] J_0(\zeta r) d\zeta \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma > \beta(r^2 + z^2)^{1/2} \\ \int_{1/\beta}^c \frac{v_1^2 \rho_2^2}{r y \psi_2 [r^2 - (y\gamma - \rho_2 z)^2]^{1/2}} dy & \text{si } \gamma < \beta(r^2 + z^2)^{1/2} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{ll} b = y_2^*, c = y_2^{**} & \text{si } \gamma > \beta r \text{ et } y_2^{**} < 1 \\ b = y_2^*, c = 1 & \text{si } \gamma > \beta r \text{ et } y_2^{**} > 1, y_2^* < 1 \\ b = 0, c = 0 & \text{si } \gamma > \beta r \text{ et } y_2^* > 1 \\ b = 1/\beta, c = y_2^{**} & \text{si } \gamma < \beta r \text{ et } y_2^{**} < 1 \\ b = 1/\beta, c = 1 & \text{si } \gamma < \beta r \text{ et } y_2^{**} > 1 \end{array} \right. \quad (\text{A.53})$$

## 5 Expression de vitesse des ondes de Rayleigh

La vitesse à laquelle les ondes de Rayleigh se propagent sur la surface d'un massif semi-infini isotrope et élastique est l'une racine de l'équation EQ. A.54.

$$R(V) = (2 - M_2^2)^2 - 4\sqrt{1 - M_1^2}\sqrt{1 - M_2^2} = 0 \quad (\text{A.54})$$

où  $M_1 = \frac{V}{C_1}$  et  $M_2 = \frac{V}{C_2}$ ,  $C_1$  et  $C_2$  sont respectivement les vitesses des ondes de compression et de cisaillement.

Rahman et al. [RAH 95] ont montré que la vitesse des ondes de Rayleigh en fonction des valeurs du coefficients Poisson du matériau.

On définit ainsi :

$$\Lambda = \frac{C_2^2}{C_1^2} = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \quad (\text{A.55})$$

$$p = \frac{8}{3}(1 - 6\Lambda) \quad (\text{A.56})$$

$$q = \frac{16}{27}(17 - 45\Lambda) \quad (\text{A.57})$$

$$\nu^* = 0.2630821 \quad (\text{A.58})$$

et la vitesse des ondes de Rayleigh est exprimée par les cas suivants :

- Cas 1 :  $-1 < \nu < \nu^*$

Pour ce cas, l'équation EQ. A.54 possède trois racines réelles exprimées comme suit :

$$m_1 = \frac{8}{3} + 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\phi + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (\text{A.59})$$

$$m_2 = \frac{8}{3} + 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\phi + \frac{4\pi}{3}\right) \quad (\text{A.60})$$

$$m_3 = \frac{8}{3} + 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos(\phi) \quad (\text{A.61})$$

$$\phi = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3q}{2p\sqrt{-\frac{p}{3}}}\right) \quad (\text{A.62})$$

Si on définit la valeur principale de arccos compris entre 0 et  $\pi$ , alors les inégalités  $m_1 < m_2 < m_3$ ,  $M_1^2 < \min\{m_2, m_3\}$  sont vérifiées et la vitesse des ondes de Rayleigh est donnée par

$$C_3 = C_2\sqrt{m_1} \quad (\text{A.63})$$

- Cas 2 :  $\nu = \nu^*$

Ce cas correspond consiste à tendre  $\nu$  vers  $\nu^*$  dans le cas précédent. On obtient donc  $m_2 = m_3$

et  $\phi \rightarrow \frac{\pi}{3}$ .

$$m_1 = \frac{8}{3} + 2\sigma \quad (\text{A.64})$$

$$m_2 = m_3 = \frac{8}{3} - \sigma \quad (\text{A.65})$$

$$\sigma = \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{11 - 56v^*}{2(1 - v^*)}} \quad (\text{A.66})$$

Comme dans le cas précédent, la vitesse des ondes de Rayleigh est définie également par

$$C_3 = C_2 \sqrt{m_1} \quad (\text{A.67})$$

- Cas 3 :  $v^* < v < 0.5$

Dans ce troisième cas, l'équation EQ. A.54 possède deux racines complexes  $m_2$  et  $m_3$  et une racine réelle  $m_1$ . Les trois racines s'exprime comme suit :

$$m_1 = \frac{8}{3} + \gamma + \eta \quad (\text{A.68})$$

$$m_2 = \frac{8}{3} - \frac{\gamma + \eta}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} (\gamma - \eta) \quad (\text{A.69})$$

$$m_3 = \frac{8}{3} - \frac{\gamma + \eta}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} (\gamma - \eta) \quad (\text{A.70})$$

$$\gamma = \frac{2}{3} \sqrt[3]{-(17 - 45\Lambda) + \sqrt{(17 - 45\Lambda)^2 + 8(1 - 6\Lambda)^3}} \quad (\text{A.71})$$

$$\eta = \frac{2}{3} \sqrt[3]{-(17 - 45\Lambda) - \sqrt{(17 - 45\Lambda)^2 + 8(1 - 6\Lambda)^3}} \quad (\text{A.72})$$

Également, la vitesse des ondes de Rayleigh est définie par

$$C_3 = C_2 \sqrt{m_1} \quad (\text{A.73})$$

## Fonctions intermédiaires pour la simulation de l'expansion dynamique d'une inclusion

### 1 Expansion dynamique des inclusions sphériques dans un massif infini

Les fonctions  $J_{imn}$  définies par MIKATA [MIK 92] pour le calcul du champs de déplacement induit dans un massif infini de module de Young  $E$  et de coefficient de Poisson  $\nu$  par la présence d'une inclusion sphérique de rayon  $a$  et de centre qui coïncide avec l'origine du repère sont définies ci-dessous. Dans ces expressions,  $r$  est la distance radiale du point d'observation depuis le centre de l'inclusion,  $c_1$  et  $c_2$  sont respectivement la vitesse des ondes de compression et de cisaillement.

$$\begin{cases} t \leq \frac{1}{c_1} |a - r| \\ J_{imn}(x, t) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{cases} \frac{1}{c_1} |a - r| \leq t \leq \min \left\{ \frac{1}{c_1} (a + r), \frac{1}{c_2} |a - r| \right\} \\ J_{imn}(x, t) = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{16E(1-\nu)r^4} [M_{imn}(z)]_{|a-r|}^{c_1 t} \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{cases} \frac{1}{c_2} |a - r| \leq t \leq \frac{1}{c_1} (a + r) \\ J_{imn}(x, t) = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{16E(1-\nu)r^4} \left[ [P_{imn}(z)]_{|a-r|}^{c_1 t} - \frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)} [P_{imn}(z)]_{|a-r|}^{c_2 t} - \frac{Q(x)}{1-2\nu} C_{imn}(x) + \right. \\ \left. \frac{8(1-\nu)}{(1-2\nu)} r x_n \delta_{im} [L(z)]_{|a-r|}^{c_2 t} \right] \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_1}(a+r) \leq t \leq \frac{1}{c_2}|a-r| \\ J_{imn}(x,t) = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{16E(1-\nu)r^4} \left[ [P_{imn}(z,x)]_{|a-r|}^{a+r} + \left\{ [K(z)]_{|a-r|}^{c_1 t} - [R_{imn}(z)]_{|a-r|}^{a+r} \right\} C_{imn}(x) \right] \end{array} \right. \quad (\text{B.4})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \left\{ \frac{1}{c_1}(a+r), \frac{1}{c_2}|a-r| \right\} \leq t \leq \frac{1}{c_2}(a+r) \\ J_{imn}(x,t) = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{16E(1-\nu)r^4} \left[ [P_{imn}(z)]_{|a-r|}^{a+r} - \frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)} [P_{imn}(z)]_{|a-r|}^{c_2 t} + \left\{ [R_{imn}(z)]_{a+r}^{c_1 t} - \frac{Q(x)}{1-2\nu} \right\} C_{imn}(x) + \frac{8(1-\nu)}{(1-2\nu)} r x_n \delta_{im} [L(z)]_{|a-r|}^{c_2 t} \right] \end{array} \right. \quad (\text{B.5})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t \geq \frac{1}{c_2}(a+r) \\ J_{imn}(x,t) = J_{imn} \left( x, \frac{1}{c_2}(a+r) \right) \end{array} \right. \quad (\text{B.6})$$

Avec les fonctions  $P_{imn}, M_{imn}, C_{imn}, P_{imn}, K, L, R, Q$  définies ci dessous :

$$\beta = \frac{c_1}{c_2} \quad (\text{B.7})$$

$$M_{imn} = P_{imn} + I(z)C_{imn} \quad (\text{B.8})$$

$$P_{imn} = S(z)A_{imn} + T(z)B_{imn} \quad (\text{B.9})$$

$$A_{imn} = \frac{x_i}{r} \delta_{mn} + \frac{x_n}{r} \delta_{mi} + \frac{x_m}{r} \delta_{in} \quad (\text{B.10})$$

$$B_{imn} = \frac{x_i x_m x_n}{r} \quad (\text{B.11})$$

$$C_{imn} = 5B_{imn} - A_{imn} \quad (\text{B.12})$$

$$S(z) = \frac{z^5}{5} - \frac{2}{3} z^3 (r^2 + 3a^2) + z (r^2 + a^2) (r^2 + 3a^2) \quad (\text{B.13})$$

$$T(z) = -z^5 + 2z^3 (x^2 + 5a^2) - z (r^4 + 6a^2 r^2 - 15a^4) \quad (\text{B.14})$$

$$I(z) = -\frac{a-r}{|a-r|}R(z) = -\text{sgn}(a-r)R(z) \quad (\text{B.15})$$

$$K(z) = \left(1 - \frac{a-r}{|a-r|}\right)R(z) = (1 - \text{sgn}(a-r))R(z) \quad (\text{B.16})$$

$$L(z) = -\frac{z^3}{3} + z(x^2 + a^2) \quad (\text{B.17})$$

$$R(z) = 4a^3z^2 \quad (\text{B.18})$$

$$Q(x) = -(1-2\nu)[I(z)]_{|a-r|}^{\beta|a-r|} = 4a^3(a-r)|a-r| \quad (\text{B.19})$$

## 2 Contraintes engendrées par une inclusion sphérique en dynamique dans un massif infini

Les fonctions  $J_{imnj}$  permettant de calculer le tenseur  $S_{ijkl}$  défini pour la détermination des contraintes dans un massif infini due à la présence d'une inclusion sphérique de rayon  $a$  et défini par une déformation inélastique (eigenstrain) transitoire sont présentés ci-dessous. Elles traduisent donc la variation des fonctions  $J_{imn}$  dans la direction  $j$ .

$$\begin{cases} M_{imn0}(z, x) = P_{imn0}(z, x) + I_0(z, x)C_{imn}(x) + I(z, x)C_{imn0}(x) \\ M_{imnj}(z, x) = P_{imnj}(z, x) + I_j(z, x)C_{imn}(x) + I(z, x)C_{imnj}(x) \end{cases} \quad (\text{B.20})$$

$$\begin{cases} P_{imn0}(z, x) = S_0(z, x)A_{imn}(z, x) + \mathcal{S}(z, x)A_{imn0}(z, x) + \\ T_0(z, x)B_{imn}(x) + T(z, x)B_{imn0}(z, x) \\ P_{imnj}(z, x) = S_j(z, x)A_{imn}(z, x) + \mathcal{S}(z, x)A_{imnj}(z, x) + \\ T_j(z, x)B_{imn}(x) + T(z, x)B_{imnj}(z, x) \end{cases} \quad (\text{B.21})$$

$$\begin{cases} T_0(z, x) = -5z^4 + 6z^2(r^2 + 5a^2) - (r^4 + 6a^2r^2 - 15a^4) \\ T_j(z, x) = 4z^3x_j - 4zx_j(r^2 + 3a^2) \end{cases} \quad (\text{B.22})$$

$$\begin{cases} S_0(z, x) = z^4 - 2z^2(r^2 + 3a^2) + (r^2 - a^2)(r^2 + 3a^2) \\ S_j(z, x) = -\frac{4}{3}z^3x_j + 4x_j(r^2 + a^2) \end{cases} \quad (\text{B.23})$$

$$\begin{cases} Q_0(x) = 0 \\ Q_j(x) = -\frac{x_j}{r} \left( 4a^3 |a-r| + \operatorname{sgn}(a-r)(a-x) \right) \end{cases} \quad (\text{B.24})$$

$$\begin{cases} K_0(z, x) = (1 - \operatorname{sgn}(a-r)) R_0(z, x) \\ K_j(z, x) = (1 - \operatorname{sgn}(a-r)) R_j(z, x) \end{cases} \quad (\text{B.25})$$

$$\begin{cases} I_0(z, x) = -\operatorname{sgn}(a-r) R_0(z, x) \\ I_j(z, x) = -\operatorname{sgn}(a-r) R_j(z, x) \end{cases} \quad (\text{B.26})$$

$$\begin{cases} L_0(z, x) = r^2 + a^2 - z^2 \\ L_j(z, x) = 2zx_j \end{cases} \quad (\text{B.27})$$

$$\begin{cases} R_0(z, x) = 8a^3 z \\ R_j(z, x) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.28})$$

$$\begin{cases} A_{imn0}(x) = 0 \\ B_{imn0}(x) = 0 \\ C_{imn0}(x) = 0 \\ A_{imnj}(x) = \frac{1}{r^3} \left( (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) \delta_{mn} + (r^2 \delta_{mj} - x_m x_j) \delta_{in} + (r^2 \delta_{nj} - x_n x_j) \delta_{mi} \right) \\ B_{imnj}(x) = \frac{1}{r} \left( x_m x_n \delta_{ij} + x_i x_n \delta_{mj} + x_m x_i \delta_{nj} \right) + \frac{3x_i x_m x_n x_j}{r^5} \\ C_{imnj}(x) = 5B_{imnj}(x) - A_{imnj}(x) \end{cases} \quad (\text{B.29})$$

$$\begin{cases} t \leq \frac{1}{c_1} |a-r| \\ J_{imnj}(x, t) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.30})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_1}|a-r| \leq t \leq \min \left\{ \frac{1}{c_1}(a+r), \frac{1}{c_2}|a-r| \right\} \\ J_{imnj}(x,t) = -\frac{x_j}{4(2\mu+\lambda)r^6} \left[ M_{imn}(c_1t,x) - M_{imn}(|a-r|,x) \right] + \frac{1}{16(2\mu+\lambda)r^4} \\ \left[ M_{imnj}(c_1t,x) - \left( -\frac{x_j}{r} \operatorname{sgn}(a-r) M_{imn0}(|a-r|,x) + M_{imnj}(|a-r|,x) \right) \right] \end{array} \right. \quad (\text{B.31})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_2}|a-r| \leq t \leq \frac{1}{c_1}(a+r) \\ J_{imnj}(x,t) = -\frac{x_j}{4(2\mu+\lambda)r^6} \left[ P_{imn}(c_1t,x) - P_{imn}(|a-r|,x) - \frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)} \right. \\ \left( P_{imn}(c_2t,x) - P_{imn}(|a-r|,x) \right) - \frac{Q(x)}{1-2\nu} C_{imn}(x) + \frac{8(1-\nu)}{1-2\nu} \\ \left. r x_n \delta_{im} \left( L(c_2t,x) - L(|a-r|,x) \right) \right] + \frac{1}{16(2\mu+\lambda)r^4} \left[ P_{imnj}(c_1t,x) - \right. \\ \left( -\frac{x_j}{r} \operatorname{sgn}(a-r) P_{imn0}(|a-r|,x) + P_{imnj}(|a-r|,x) \right) - \frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)} \\ \left. \left( P_{imnj}(c_2t,x) + \frac{x_j}{r} \operatorname{sgn}(a-r) P_{imn0}(|a-r|,x) - P_{imnj}(|a-r|,x) \right) - \right. \\ \left. \frac{1}{1-2\nu} \left( Q_j(x) C_{imn}(x) - Q(x) C_{imnj}(x) \right) + \frac{8(1-\nu)}{1-2\nu} \left\{ \left( \frac{x_j}{r} x_n \delta_{im} + r \delta_{jn} \delta_{im} \right) \right. \right. \\ \left. \left. \left( L(c_2t,x) - L(|a-r|,x) \right) + r x_n \delta_{im} \left( L_j(c_2t,x) + \frac{x_j}{r} \operatorname{sgn}(a-r) L_0(|a-r|,x) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - L_j(|a-r|,x) \right) \right\} \right] \end{array} \right. \quad (\text{B.32})$$

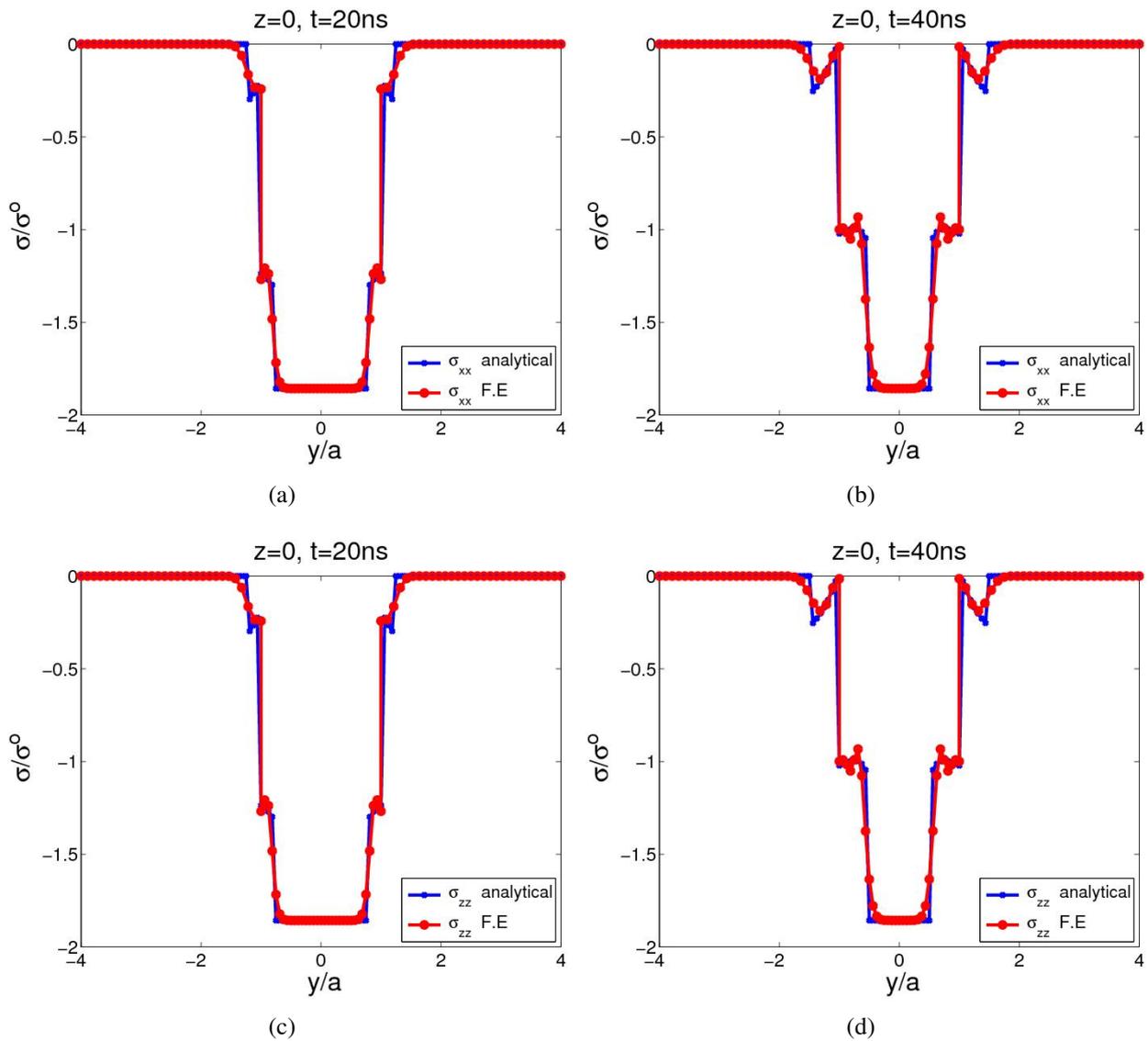
$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{1}{c_1}(a+r) \leq t \leq \frac{1}{c_2}|a-r| \\
 J_{imnj}(x,t) = -\frac{x_j}{4(2\mu+\lambda)r^6} \left[ P_{imn}(a+r,x) - P_{imn}(|a-r|,x) + \left( K(c_1t,x) - \right. \right. \\
 \left. \left. K(|a-r|,x) - R(a+r,x) + R(|a-r|,x) \right) C_{imn}(x) \right] + \frac{1}{16(2\mu+\lambda)r^4} \\
 \left[ \frac{x_j}{r} P_{imn0}(a+r,x) + P_{imnj}(a+r,x) + \frac{x_j}{r} \operatorname{sgn}(a-r) P_{imn0}(|a-r|,x) - \right. \\
 P_{imnj}(|a-r|,x) + \left( K_j(c_1t,x) + \frac{x_j}{r} \operatorname{sgn}(a-r) K_0(|a-r|,x) - K_j(|a-r|,x) - \right. \\
 \left. \frac{x_j}{r} R_0(a+r,x) - R_j(a+r,x) - \frac{x_j}{r} \operatorname{sgn}(a-r) R_0(|a-r|,x) + R_j(|a-r|,x) \right) C_{imn}(x) + \\
 \left. \left( K(c_1t,x) - K(|a-r|,x) - R(a+r,x) + R(|a-r|,x) \right) C_{imnj}(x) \right]
 \end{array} \right. \quad (\text{B.33})$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \max \left\{ \frac{1}{c_1} (a+r), \frac{1}{c_2} |a-r| \right\} \leq t \leq \frac{1}{c_2} (a+r) \\
 \\
 J_{imnj}(x,t) = -\frac{x_j}{4(2\mu+\lambda)r^6} \left[ P_{imn}(a+r,x) - P_{imn}(|a-r|,x) - \frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)} \right. \\
 \left. \left( P_{imn}(c_2t,x) - P_{imn}(|a-r|,x) \right) + \left( R(c_1t,x) - R(a+r,x) - \frac{Q(x)}{(1-2\nu)} \right) C_{imn}(x) \right. \\
 \left. \frac{8(1-\nu)}{(1-2\nu)} r x_n \delta_{im} \left( L(c_2t,x) - L(|a-r|,x) \right) \right] - \frac{1}{16(2\mu+\lambda)r^4} \left[ \frac{x_j}{r} P_{imn0}(a+r,x) \right. \\
 \left. P_{imnj}(a+r,x) + \frac{x_j}{r} \operatorname{sgn}(a-r) P_{imn0}(|a-r|,x) - P_{imnj}(|a-r|,x) - \frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)} \right. \\
 \left. \left( P_{imnj}(c_2t,x) + \frac{x_j}{r} \operatorname{sgn}(a-r) P_{imn0}(|a-r|,x) - P_{imnj}(|a-r|,x) \right) + \left( R_j(c_1t,x) - \right. \right. \\
 \left. \left. \frac{x_j}{r} R_0(a+r,x) - R_j(a+r,x) - \frac{Q_j(x)}{(1-2\nu)} \right) C_{imn}(x) + \left( R(c_1t,x) - R(a+r,x) - \right. \right. \\
 \left. \left. \frac{Q(x)}{(1-2\nu)} \right) C_{imnj}(x) + \frac{8(1-\nu)}{(1-2\nu)} \left\{ \left( \frac{x_j}{r} x_n + r \delta_{jn} \right) \delta_{im} \left( L(c_2t,x) - L(|a-r|,x) \right) + \right. \right. \\
 \left. \left. r x_n \delta_{im} \left( L_j(c_2t,x) + \frac{x_j}{r} \operatorname{sgn}(a-r) L_0(|a-r|,x) - L_j(|a-r|,x) \right) \right\} \right] \quad (B.34)
 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 t \geq \frac{1}{c_2} (a+r) \\
 \\
 J_{imnj}(x,t) = J_{imnj} \left( x, \frac{1}{c_2} (a+r) \right)
 \end{array} \right. \quad (B.35)$$

### 3 Validation par éléments finis du calcul des contraintes dans un massif infini

Pour valider les contraintes engendrées dans un massif infini ( $E = 210GPa$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 7800Kgm^{-3}$ ) par la présence d'une inclusion sphérique qui se dilate soudainement, un modèle éléments finis est réalisé avec le logiciel commercial ABAQUS 6.11 avec un schéma de résolu-



**FIGURE B.1:** Validation des contraintes engendrées par la présence d'une inclusion sphérique qui se dilate soudainement dans un massif infini sous l'effet d'une déformation inélastique d'origine thermique  $\epsilon_{ij} = \delta_{ij}H(t)$

tion du type explicite. On considère une inclusion sphérique de rayon  $a = 1,5mm$ , possédant les mêmes propriétés matériaux dont le centre coïncide avec l'origine du repère placer au centre du

massif. Les résultats de cette étude sont illustrés sur les figure B.3. Les contraintes  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{zz}$  analytiques sont comparées au résultats du modèle éléments finis à des temps différents. Ces résultats sont obtenus dans le plan  $z = 0$  (plan passant par le centre de l'inclusion) et suivant la direction  $x = 0$  passant par le centre de l'inclusion. Les contraintes sont normalisées par la limite élastique de l'acier  $\sigma = 400\text{MPa}$  et les distances par le rayons de l'inclusion. Une très bonne corrélation est observée entre les solutions analytiques et le modèle éléments finis.

## 4 Expansion dynamique d'une inclusion dans un massif semi-infini

Illustration de la propagation des ondes élastiques engendrées par la présence d'une inclusion sphérique dans un massif semi-infini et qui se dilate soudainement en présence d'une déformation inélastique définie par  $\epsilon_{ij} = \delta_{ij}H(t)$ .

## B. Fonctions intermédiaires pour la simulation de l'expansion dynamique d'une inclusion

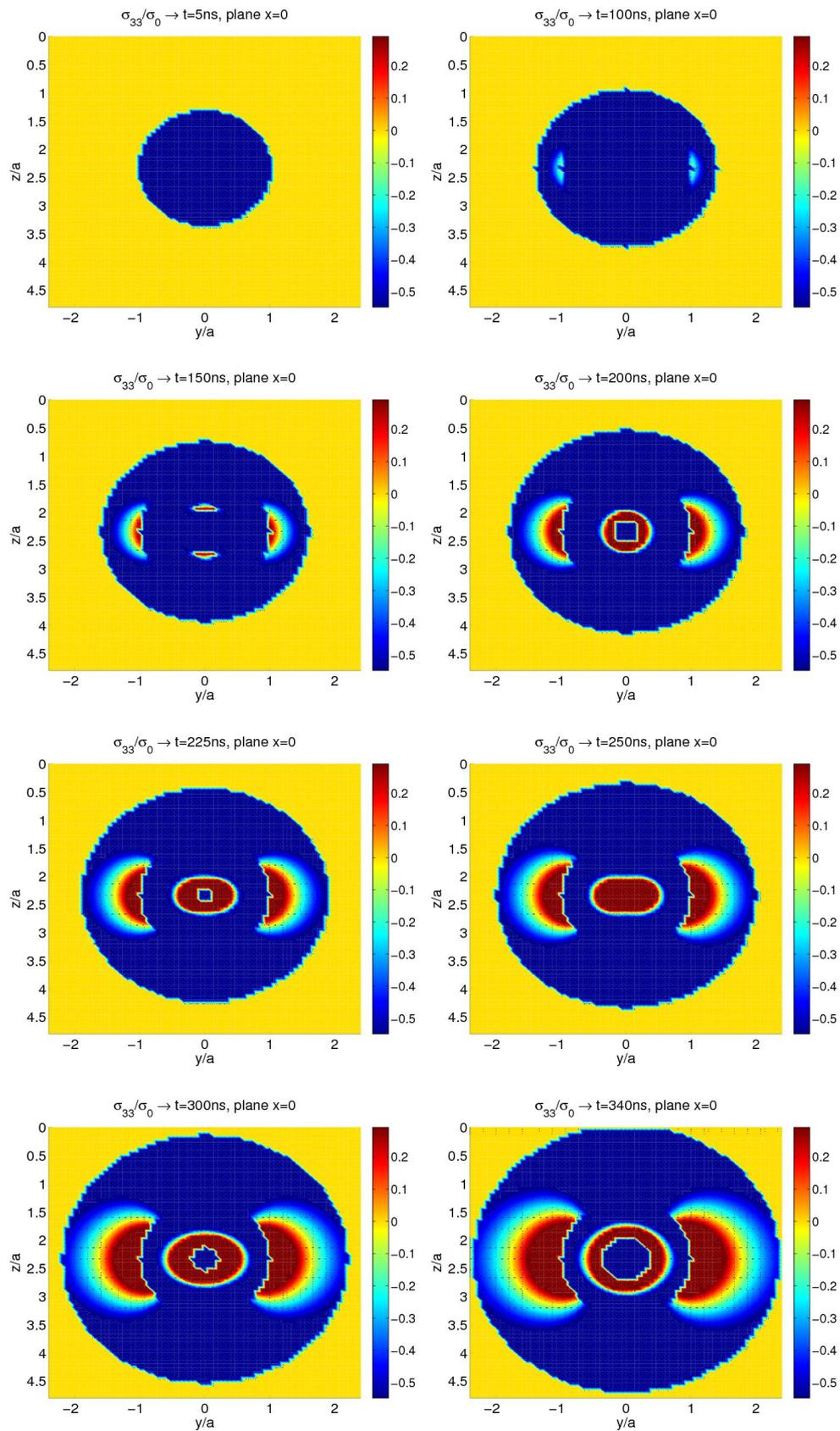
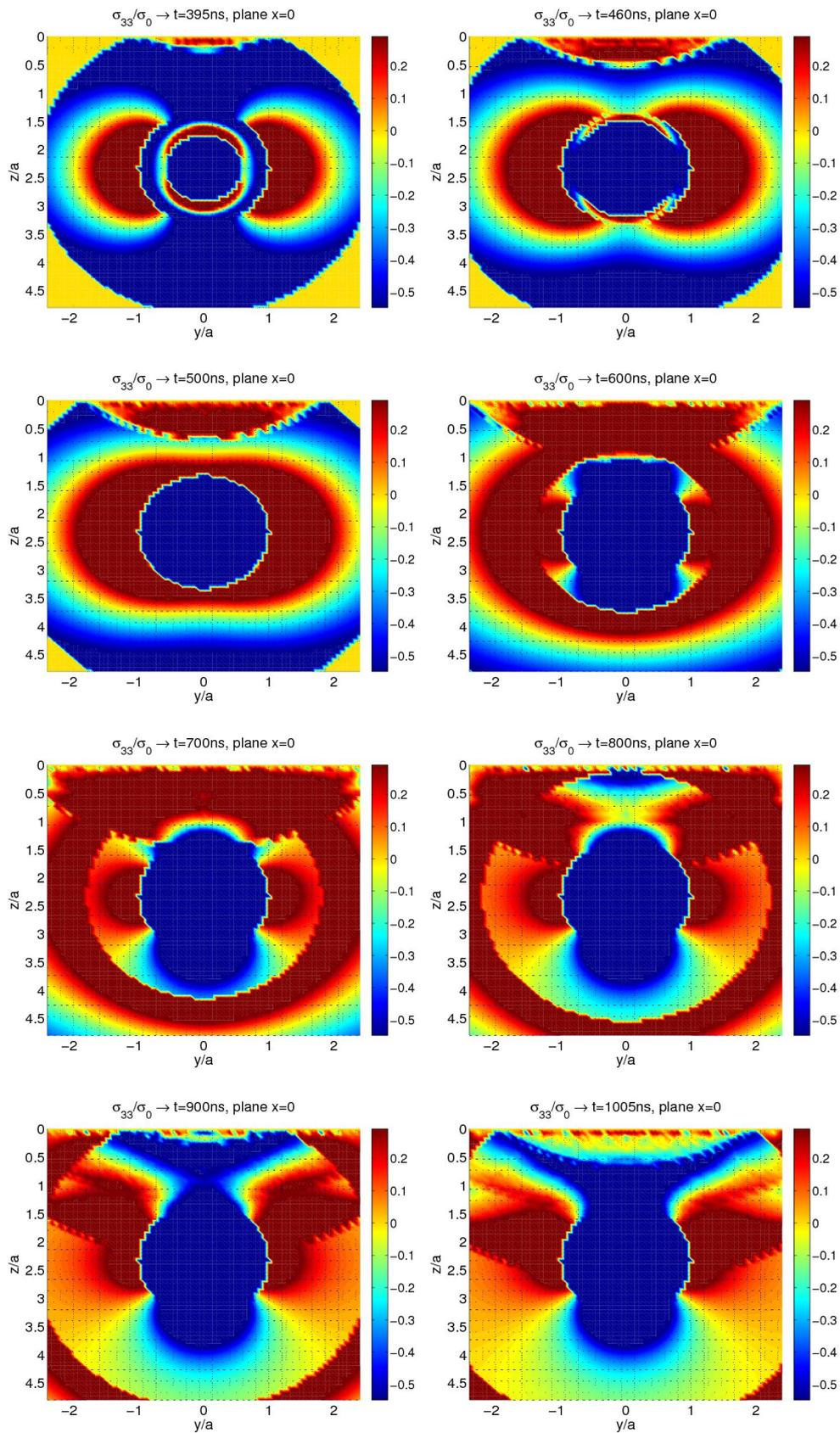


FIGURE B.2: Avant l'arrivée des ondes de compression en surface du massif semi-infini.



**FIGURE B.3:** Après l'arrivée des ondes de compression en surface du massif semi-infini : réflexion des ondes en surface du massif et retour de ces dernières dans le massif.



# Coefficients d'influence pour le calcul des contraintes résiduelles et déplacements résiduels surfaciques

## 1 Déplacement résiduel généré par un cuboïde de déformation plastique

Les coefficients d'influences donnant le déplacement résiduel en surface d'un massif semi-infini généré par la présence d'un cuboïde de déformation plastique uniforme sont rappelés ici. Les solutions pour le déplacement normal en surface ont été développées par Chiu [CHI 78] et Jacq [JAC 01]. La source de déplacement est donc un cube de déformation plastique de taille  $\Delta x \Delta y$  centré au point  $(x, y, z)$ . Les points de calcul sont donc localisés sur la surface du massif de coefficient de Poisson  $\nu$ .

Le déplacement résiduel en un point A dans la direction normale à la surface est donnée par l'équation EQ. C.1.

$$u_z^{res}(A) = \epsilon_{ij}^p D_{3ij}(A, C) \mid (i, j) = 1, 2, 3 \quad (C.1)$$

Les fonctions  $D_{3ij}$  ont été déterminées analytiquement par Jacq et al. [JAC 01] et sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} D_{3ij}(A, C) = & F_{3ij} \left( x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z + \frac{\Delta z}{2} \right) - F_{3ij} \left( x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z - \frac{\Delta z}{2} \right) \\ & - F_{3ij} \left( x + \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, z + \frac{\Delta z}{2} \right) - F_{3ij} \left( x - \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z + \frac{\Delta z}{2} \right) \\ & + F_{3ij} \left( x + \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, z - \frac{\Delta z}{2} \right) + F_{3ij} \left( x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, z + \frac{\Delta z}{2} \right) \\ & + F_{3ij} \left( x - \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z - \frac{\Delta z}{2} \right) - F_{3ij} \left( x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, z - \frac{\Delta z}{2} \right) \end{aligned} \quad (C.2)$$

avec :

$$F_{311}(x, y, z) = \frac{1}{\pi} \left( -vx \ln(y+R) - (1-2\nu)z \arctan\left(\frac{y+z+R}{x}\right) \right) \quad (\text{C.3})$$

$$F_{322}(x, y, z) = \frac{1}{\pi} \left( -vy \ln(x+R) - (1-2\nu)z \arctan\left(\frac{x+z+R}{y}\right) \right) \quad (\text{C.4})$$

$$F_{333}(x, y, z) = \frac{1}{\pi} \left( (1-2\nu) \left( 2z \arctan\left(\frac{x+y+R}{z}\right) + x \ln(R+y) + y \ln(R+x) \right) + \frac{z}{2} \arctan\left(\frac{xy}{zR}\right) \right) \quad (\text{C.5})$$

$$F_{312}(x, y, z) = \frac{1}{\pi} (-2\nu R - (1-2\nu)z \ln(z+R)) \quad (\text{C.6})$$

$$F_{313}(x, y, z) = \frac{1}{\pi} \left( 2x \arctan\left(\frac{y+z+R}{x}\right) + y \ln(z+R) \right) \quad (\text{C.7})$$

$$F_{323}(x, y, z) = \frac{1}{\pi} \left( 2y \arctan\left(\frac{x+z+R}{y}\right) + x \ln(z+R) \right) \quad (\text{C.8})$$

avec  $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

## 2 Contraintes résiduelles générées par un cuboïde de déformation plastique dans un massif infini

Les coefficients d'influence permettant de calculer les contraintes résiduelles générées dans un massif infini de coefficient de Poisson  $\nu$  par la présence d'un cube de déformation  $\epsilon_{ij}^p$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) sont reportés dans ce paragraphe. Les solutions analytiques ont été développées par Chiu [CHI 77].

La source des contraintes est un cube de déformation uniforme et de taille  $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$  et dont le centre coïncide avec l'origine du repère  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ . Le point de calcul M est donné par ces coordonnées  $(x, y, z)$  dans le massif infini.

$$C_1 = \left( x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, z - \frac{\Delta z}{2} \right) = (c_1^1, c_2^1, c_3^1) \quad (\text{C.9})$$

$$C_2 = \left( x + \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, z - \frac{\Delta z}{2} \right) = (c_1^2, c_2^2, c_3^2) \quad (\text{C.10})$$

$$C_3 = \left( x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z - \frac{\Delta z}{2} \right) \quad (\text{C.11})$$

$$C_4 = \left( x - \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z - \frac{\Delta z}{2} \right) \quad (\text{C.12})$$

$$C_5 = \left( x - \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z + \frac{\Delta z}{2} \right) \quad (\text{C.13})$$

$$C_6 = \left( x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, z + \frac{\Delta z}{2} \right) \quad (C.14)$$

$$C_7 = \left( x + \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, z + \frac{\Delta z}{2} \right) \quad (C.15)$$

$$C_8 = \left( x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z + \frac{\Delta z}{2} \right) \quad (C.16)$$

Pour un cube de déformation plastique donnée uniquement par ces composantes normales, i.e.  $\varepsilon_{11}^p = 1$  and  $\varepsilon_{ij}^p = 0 | (i, j) \neq (1, 1)$ , les déformations élastiques au point d'observation M sont données par :

$$\varepsilon_{1111} = \frac{1}{8\pi^3} \sum_{m=1}^8 \left[ D_{,1111}^m + \frac{2-\nu}{1-\nu} (D_{,1111}^m + D_{,1133}^m) \right] - H(M) \quad (C.17)$$

$$\varepsilon_{2211} = -\frac{1}{8\pi^3} \sum_{m=1}^8 [-D_{,1122}^m] + \frac{\nu}{1-\nu} (D_{,2222}^m + D_{,2233}^m) \quad (C.18)$$

$$\varepsilon_{3311} = -\frac{1}{8\pi^3} \sum_{m=1}^8 [-D_{,1133}^m] + \frac{\nu}{1-\nu} (D_{,2233}^m + D_{,3333}^m) \quad (C.19)$$

$$\varepsilon_{1211} = \frac{1}{8\pi^3} \sum_{m=1}^8 \left[ \frac{\nu}{1-\nu} D_{,1112}^m \right] + \frac{1+\nu}{1-\nu} (D_{,2221}^m + D_{,3312}^m) \quad (C.20)$$

$$\varepsilon_{1311} = \frac{1}{8\pi^3} \sum_{m=1}^8 \left[ \frac{\nu}{1-\nu} D_{,1113}^m \right] + \frac{1+\nu}{1-\nu} (D_{,3331}^m + D_{,2213}^m) \quad (C.21)$$

$$\varepsilon_{2311} = \frac{1}{8\pi^3} \sum_{m=1}^8 \left[ \frac{\nu}{1-\nu} (D_{,2233}^m + D_{,3332}^m) \right] \quad (C.22)$$

Pour un cube de déformation plastique donnée par uniquement par ces composante de cisaillement, i.e.  $\varepsilon_{12}^p = \varepsilon_{21}^p = 1$  and  $\varepsilon_{ij}^p = 0 | (i, j) \neq (1, 2), (2, 1)$ , les déformations élastiques au point d'observation M sont donnée par :

$$\varepsilon_{1112} = \frac{1}{8\pi^3} \sum_{m=1}^8 \left[ \frac{-2\nu}{1-\nu} D_{,1112}^m \right] + 2 (D_{,2221}^m + D_{,3312}^m) \quad (C.23)$$

$$\varepsilon_{2212} = \frac{1}{8\pi^3} \sum_{m=1}^8 \left[ \frac{-2\nu}{1-\nu} D_{,1222}^m \right] + 2 (D_{,1112}^m + D_{,3312}^m) \quad (C.24)$$

$$\varepsilon_{3312} = \frac{1}{8\pi^3} \sum_{m=1}^8 \left[ \frac{-2\nu}{1-\nu} D_{,3312}^m \right] \quad (C.25)$$

$$\varepsilon_{1212} = \frac{1}{8\pi^3} \sum_{m=1}^8 \left[ \frac{-2\nu}{1-\nu} D_{,1122}^m + D_{,1111}^m + D_{,2222}^m + D_{,1133}^m + D_{,2233}^m \right] - H(M) \quad (C.26)$$

$$\varepsilon_{1312} = \frac{1}{8\pi^3} \sum_{m=1}^8 \left[ -\frac{1+\nu}{1-\nu} D_{,1123}^m \right] + D_{,2223}^m + D_{,3332}^m \quad (\text{C.27})$$

$$\varepsilon_{2312} = \frac{1}{8\pi^3} \sum_{m=1}^8 \left[ -\frac{1+\nu}{1-\nu} D_{,2213}^m \right] + D_{,1113}^m + D_{,3331}^m \quad (\text{C.28})$$

Si le point M se situe à l'intérieur de l'inclusion,  $H(M) = 1$  and  $H(M) = 0$  sinon. Les fonctions  $D_{,ijkl}^m$  ( $m = 1 \dots 8$ ) sont définies comme suit :

$$D_{,1111}^m = 2\pi^2 \left( \arctan \left( \frac{c_2^m c_3^m}{c_1^m R} \right) - \frac{c_1^m c_2^m c_3^m}{2R} \left( \frac{1}{(c_1^m)^2 + (c_2^m)^2} + \frac{1}{(c_1^m)^2 + (c_3^m)^2} \right) \right) \quad (\text{C.29})$$

$$D_{,1112}^m = -\pi^2 (\text{sign}(c_3^m)) \times \ln \left( \frac{R + |c_3^m|}{\sqrt{(c_1^m)^2 + (c_2^m)^2}} - \frac{(c_1^m)^2 c_3^m}{((c_1^m)^2 + (c_2^m)^2) R} \right) \quad (\text{C.30})$$

$$D_{,1122}^m = \frac{\pi^2 c_1^m c_2^m c_3^m}{((c_1^m)^2 + (c_2^m)^2) R} \quad (\text{C.31})$$

$$D_{,1123}^m = -\frac{\pi^2 c_1^m}{R} \quad (\text{C.32})$$

où

$$R = \sqrt{(c_1^m)^2 + (c_2^m)^2 + (c_3^m)^2} \quad (\text{C.33})$$

Les autres fonction  $D_{,ijkl}^m$  sont obtenues par une permutation circulaire sur les indices i, j, k, l. Une permutation similaire permet de déterminer les déformation élastiques au point d'observation M générées par d'autres déformation plastique. Enfin, l'application de la loi de Hook permet de calculer les contraintes générées par la déformation plastique à partir des déformations élastiques.

### 3 Coefficients d'influence en statique pour le calcul des contraintes élastiques

La pression est appliquée sur une surface élémentaire de taille  $\Delta x \times \Delta y$  centrée  $(x, y) = (0, 0)$ . Les coefficients d'influence sont donnés comme fonction de la position du point de calcul  $(x, y, z)$  et du coefficient de Poisson du matériau.

$$\frac{\sigma_{IJ}}{p} = C_{IJ}^p(x, y, z, E, \nu) = S_{IJ}^p\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z, E, \nu\right) + S_{IJ}^p\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, z, E, \nu\right) - S_{IJ}^p\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, z, E, \nu\right) - S_{IJ}^p\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z, E, \nu\right), \quad (\text{C.34})$$

avec

$$S_{xx}^p(x, y, z, E, \nu) = \frac{\nu}{\pi} \arctan\left(\frac{z^2 + y^2 - y\rho}{zx}\right) + \frac{1 - 2\nu}{\pi} \arctan\left(\frac{\rho - y + z}{x}\right) + \frac{z}{2\pi} \frac{xy}{(x^2 + z^2)\rho}, \quad (\text{C.35})$$

$$S_{yy}^p(x, y, z, E, \nu) = \frac{\nu}{\pi} \arctan\left(\frac{z^2 + y^2 - y\rho}{zx}\right) + \frac{1 - 2\nu}{\pi} \arctan\left(\frac{\rho - x + z}{y}\right) + \frac{z}{2\pi} \frac{xy}{(y^2 + z^2)\rho}, \quad (\text{C.36})$$

$$S_{zz}^p(x, y, z, E, \nu) = \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{z^2 + y^2 - y\rho}{zx}\right) - \frac{z}{2\pi} \frac{xy}{\rho} \left(\frac{1}{x^2 + z^2} + \frac{1}{y^2 + z^2}\right), \quad (\text{C.37})$$

$$S_{xy}^p(x, y, z, E, \nu) = -\frac{z}{2\pi} \frac{1}{\rho} - \frac{1 - 2\nu}{2\pi} \ln(\rho + z), \quad (\text{C.38})$$

$$S_{yz}^p(x, y, z, E, \nu) = \frac{z^2}{2\pi} \frac{x}{(y^2 + z^2)\rho}, \quad (\text{C.39})$$

$$S_{xz}^p(x, y, z, E, \nu) = \frac{z^2}{2\pi} \frac{y}{(x^2 + z^2)\rho}. \quad (\text{C.40})$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (\text{C.41})$$



# Bibliographie

- [ALE 00] ALEXANDER E., POULARIKAS D.  
The Transforms and Applications Handbook : Second Edition, 2000.
- [ALK 07] AL-KINDI G. A., SHIRINZADEH B.  
An evaluation of surface roughness parameters measurement using vision-based data. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, vol. 47, 2007, p. 697-708.
- [AMA 09] AMARCHINTA H. K., GRANDHI R. V., LANGER K., STARGEL D. S.  
Material model validation for laser shock peening process simulation. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, vol. 17, 2009, page 015010.
- [ANT 05] ANTALUCA E.  
Contribution à l'étude des contacts élasto-plastiques-effet d'un chargement normal et tangentiel. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2005.
- [BAG 13] BAGAUT C.  
Mechanical Contact for Layered Anisotropic Materials Using a Semi-Analytical Method. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2013.
- [BAL 91] BALLARD P.  
Contraintes résiduelles induites par impact rapide. Application au choc-laser. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, 1991.
- [BAN 09] BANG B. W., KIM J. M., CHO C. D., SON S. K.  
Residual stress prediction in LSP surface treatment by using FEM. *Transactions of the Korean Society of Mechanical Engineers*, vol. 43, 2009, p. 767-772.
- [BAU 13] BAUDIN G.  
Physique des explosifs : de l'amorçage aux effets des explosifs condensés. Thèse de doctorat, Université Paris Ouest Nanterre La Défense, 2013.
- [BEN 67] BENTALL R., JOHNSON K.  
Slip in the rolling contact of two dissimilar elastic rollers. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 9, n° 6, 1967, p. 389 - 404.
- [BOU 85] BOUSSINESQ J.  
*Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques : principalement au calcul des déformations et des pressions que produisent, dans ces solides, des efforts quelconques exercés sur une petite partie de leur surface ou de leur intérieur : mémoire suivi de notes étendues sur divers points de physique, mathématique et d'analyse.* Gauthier-Villars, 1885.

- [BOU 07] BOUCLY V., NELIAS D., GREEN I.  
Modeling of the rolling and sliding contact between two asperities. *Journal of Tribology*, vol. 129, n° 2, 2007, p. 235-245.
- [BRA 99] BRAISTED W., BROCKMAN R.  
Finite element simulation of laser shock peening. *International Journal of Fatigue*, vol. 21, 1999, p. 719-724.
- [CAS 09] CASLARU R., GUO Y., SEALY M., CHEN S. C.  
Fabrication and characterization of micro dent array produced by laser shock peening on aluminum surfaces. *Transactions of NAMRI/SME*, vol. 37, 2009, p. 159-166.
- [CEL 10] CELLARD C.  
Etude du choc laser sur l'alliage de titane Ti-17 : application aux plaques minces. Thèse de doctorat, Troyes, 2010.
- [CHA ] CHAISE T., DANIEL N.  
Modélisation du choc laser sur une surface préalablement traitée par grenailage ultrasonore et application à une pièce réelle.
- [CHA 60] CHAO C.-C.  
Dynamical response of an elastic half-space to tangential surface loadings. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 27, 1960, p. 559-567.
- [CHA 02a] CHARLES S. M., TAO W., LIN Y., GRAHAM C., YIU-WING M.  
Laser shock processing and its effects on microstructure and properties of metal alloys : a review. *International Journal of Fatigue*, vol. 24, n° 10, 2002, p. 1021 - 1036.
- [CHA 02b] CHARLES S M., TAO W., LIN Y., GRAHAM C., YIU-WING M.  
Laser shock processing and its effects on microstructure and properties of metal alloys : a review. *International Journal of Fatigue*, vol. 24, 2002, p. 1021-1036.
- [CHA 11a] CHAISE T., NELIAS D.  
Contact pressure and residual strain in 3D elasto-plastic rolling contact for a circular or elliptical point contact. *Journal of Tribology*, vol. 133, n° 4, 2011.
- [CHA 11b] CHAISE T., NÉLIAS D.  
Contact pressure and residual strain in 3D elasto-plastic rolling contact for a circular or elliptical point contact. *Journal of Tribology*, vol. 133, 2011, p. 041402.1-041402.9.
- [CHA 11c] CHAISE T., NELIAS D., SADEGHI F.  
On the effect of isotropic hardening on the coefficient of restitution for single or repeated impacts using a semi-analytical method. *Tribology Transactions*, vol. 54, n° 5, 2011, p. 714-722.
- [CHA 11d] CHAISE T.  
Mechanical simulation using a semi analytical method : from elasto-plastic rolling contact to multiple impacts. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2011.
- [CHA 11e] CHAISE T.  
Mechanical simulation using a semi analytical method : from elasto-plastic rolling contact to multiple impacts. Thèse de doctorat, INSA, Lyon, 2011.

- [CHA 11f] CHAISE T., NELIAS D., SADEGHI F.  
On the effect of isotropic hardening on the coefficient of restitution for single or repeated impacts using a semi-analytical method. *Tribology Transactions*, vol. 54 (5), 2011, p. 714-722.
- [CHA 11g] CHATEAU F., DESFONTAINE V., CHAPUIS-KERIVEN A.  
Endurance des billes en carbure de tungstène. rapport, 2011, SONATS.
- [CHA 12] CHAISE T., LI J., NELIAS D., KUBLER R., TAHERI S., DOUCHET G., ROBIN V., GILLES P.  
Modelling of multiple impacts for the prediction of distortions and residual stresses induced by ultrasonic shot peening (USP). *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 212, 2012, p. 2080-2090.
- [CHE 05] CHENG G., SHEHADEH M.  
Dislocation behavior in silicon crystal induced by laser shock peening : A multiscale simulation approach. *Scripta Materialia*, vol. 53, n° 9, 2005, p. 1013 - 1018.
- [CHI 77] CHIU Y. P.  
On the Stress Field Due to Initial Strains in a Cuboid Surrounded by an Infinite Elastic Space. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 44, 1977, p. 587-590.
- [CHI 78] CHIU Y. P.  
On the Stress Field and Surface Deformation in a Half Space With a Cuboidal Zone in Which Initial Strains Are Uniform. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 45, 1978, p. 302-306.
- [CHO 72] CHOU P. C., HOPKINS A. K.  
*Dynamic response of material to intense impulsive loading*. Air Force Materials Laboratory, Wright Patterson AFB, OH, 1972.
- [CLA 77] CLAUER A., FAIRAND B., WILCOX B.  
Pulsed laser induced deformation in an Fe-3 Wt Pct Si alloy. *Metallurgical Transactions A*, vol. 8, n° 1, 1977, p. 119-125, Springer-Verlag.
- [COF 11] COFFO M. I. R.  
Contribution à la modélisation, à l'optimisation et à l'étude expérimentale d'un lanceur à rails augmenté et du projectile. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, 2011.
- [DIN 03] DING K.  
Three-dimensional Dynamic Finite Element Analysis of Multiple Laser Shock Peening Processes. *Surface Engineering*, vol. 19, n° 5, 2003, p. 351-358.
- [DON 30] DONNELL L. H.  
*Longitudinal wave transmission and impact*. University of Michigan, 1930.
- [DUB 93] DUBOUCHET C.  
Traitements thermomécaniques de surfaces métalliques à l'aide de lasers CO2 continus et de lasers impulsionnels. Thèse de doctorat, Université de Paris 11, Orsay, FRANCE, 1993.
- [EAS 66] EASON G.  
The Displacements Produced in an Elastic Half-space by a Suddenly Applied Surface Force. *Journal of Applied Mathematics*, vol. 2, 1966, p. 299-326.
- [ESH 61] ESHELBY J. D.  
Elastic inclusions and inhomogeneities. *Progress in solid mechanics*, vol. 2, 1961, p. 89-140.

- [FAB 90] FABBRO R., FOURNIER J., BALLARD P., DEVAUX D., VIRMONT J.  
Physical study of laser-produced plasma in confined geometry. *Journal of Applied Physics*, vol. 68, 1990, page 775.
- [FOR 90] FORGET P., STRUDEL J., JEANDIN M., LU J., CASTEX L.  
Laser shock surface treatment of Ni-Base superalloys. *Materials and Manufacturing Processes*, vol. 5, n° 4, 1990, p. 501-528.
- [FOT 96] FOTIU P., NEMAT-NASSER S.  
A universal integration algorithm for rate-dependent elastoplasticity. *Computers & Structures*, vol. 59, n° 6, 1996, p. 1173 - 1184.
- [FUL 10] FULLERINGER B., NELIAS D.  
On the tangential displacement of a surface point due to a cuboid of uniform plastic strain in a half-space. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, vol. 77, n° 2, 2010, p. 1-7.
- [FUL 11] FULLERINGER B.  
Semi-analytical modeling of complex mechanical contacts : Application to inclusion and wear of coated surfaces. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2011.
- [GAD 02] GADELMAWLA E. S., KOURA M., MAKSOU D., ELEWA I., SOLIMAN H.  
Roughness parameters. *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 123, 2002, p. 133-145.
- [GAL 61] GALIN L. A., MOSS H., SNEDDON I. N.  
Contact problems in the theory of elasticity. rapport, 1961, DTIC Document.
- [GAL 06] GALLEGO L., NÉLIAS D., JACQ C.  
A Comprehensive Method to Predict Wear and to Define the Optimum Geometry of Fretting Surfaces. *Journal of Tribology*, vol. 128, 2006.
- [GAL 07a] GALLEGO L., NELIAS D.  
Modeling of Fretting Wear Under Gross Slip and Partial Slip Conditions. *Journal of Tribology*, vol. 129, 2007, p. 528-535.
- [GAL 07b] GALLEGO L.  
Fretting et Usure des contacts Mécaniques : Modélisation Numérique. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2007.
- [GAL 10a] GALLEGO L., NÉLIAS D., DEYBER S.  
A fast and efficient contact algorithm for fretting problems applied to fretting modes I, {II} and {III}. *Wear*, vol. 268, 2010, p. 208 - 222.
- [GAL 10b] GALLEGO L., NÉLIAS D., DEYBER S.  
A fast and efficient contact algorithm for fretting problems applied to fretting modes I, II and III. *Wear*, vol. 268, 2010, p. 208-222.
- [GEO 99] GEORGIADIS H. G., VAMVATSIKOS D., VARDOULAKIS I.  
Numerical implementation of the integral-transform solution to Lamb's point-load problem. *Computational mechanics*, vol. 24, 1999, p. 90-99.
- [GÉR 13] GÉRARD B.  
Physique des explosifs : de l'amorçage aux effets des explosifs condensés. Thèse de doctorat, Université Paris Ouest Nanterre La défense, 2013.

- [GOR 83] GORDON JOHNSON R., H C. W.  
A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high strain rates and high temperatures. *Proceedings of the 7th International Symposium on Ballistics*, vol. 21 The Netherlands, 1983, p. 541-547.
- [GRA 07] GRADSHTEYN I. S., RYZHIK I. M.  
*Table of integrals, series, and products*, Chapitre Definite integrals of special functions, p. 702, 717. Academic Press, 2007.
- [GRR 57] G RR C., PAUL S. S.  
Strain-hardening and strain-rate effects in the impact loading of cantilever beams. rapport, 1957, DTIC Document.
- [GUI 07] GUI Y. F., DOU W.-B.  
A rigorous and completed statement on Helmholtz theorem. *Progress In Electromagnetics Research*, vol. 69, 2007, p. 287-304.
- [GUJ 14] GUJBA A. K., MEDRAJ M.  
Laser Peening Process and Its Impact on Materials Properties in Comparison with Shot Peening and Ultrasonic Impact Peening. *Materials*, vol. 7, 2014, p. 7925-7974.
- [GUO 11a] GUO Y. B., CASLARU R.  
Fabrication and characterization of micro dent arrays produced by laser shock peening on titanium Ti-6Al-4V surfaces. *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 211, 2011, p. 729-736.
- [GUO 11b] GUO Y.  
*Laser Shock Peening : Modeling, Simulations, and Applications*. INTECH Open Access Publisher, 2011.
- [HAL 88] HALLOUIN M., GERLAND M., ROMAIN J., COTTET F., MARTY L.  
MODIFICATIONS MICROSTRUC-TURALES ENGENDREES PAR CHOC LASER SUR LE FER ET L'ACIER 316. *Physique Colloques*, vol. 49, 1988, p. C3-413-C3-418.
- [HOF 05] HOFFMANN D., BLAZEVIC A., NI P., ROSMEJ O., ROTH M., TAHIR N., TAUSCHWITZ A., UDREA S., VARENTSOV D., WEYRICH K., MARON Y.  
Present and future perspectives for high energy density physics with intense heavy ion and laser beams. *Laser and Particle Beams*, vol. 23, 2005, p. 47-53.
- [HOL 91] HOLMQUIST T., JOHNSON G.  
Determination of constants and comparison of results for various constitutive models. *Le Journal de Physique IV*, vol. 1, 1991, p. C3-853.
- [HON 98] HONG X., WANG S., GUO D., WU H., WANG J., DAI Y., XIA X., XIE Y.  
Confining medium and absorptive overlay : Their effects on a laser-induced shock wave. *Optics and Lasers in Engineering*, vol. 29, n° 6, 1998, p. 447 - 455.
- [HOP 05] HOPKINSON B.  
The Effects of Momentary Stresses in Metals. *Proceedings of the Royal Society of London*, vol. 74, 1905, p. 498-506.
- [HU 06] HU Y., YAO Z., HU J.  
3-D FEM simulation of laser shock processing. *201*, vol. 1426-1435, 2006.

- [IRY 04] IRYNA Y., CAROLINE R., BÉRANGER G., PATRICE P.  
Laser peening processing effect on mechanical and tribological properties of rolling steel 100Cr6. *Wear*, vol. 256, 2004, p. 311 - 320.
- [JAC 01] JACQ C.  
Limite d'endurance et durée de vie en fatigue de roulement du 32CrMoV13 nituré en présence d'indentations. Thèse de doctorat, Institut National des Science Appliquées de Lyon, 2001.
- [JAC 02a] JACQ C., NELIAS D., LORMAND G., D.GIRODIN  
Development of a three-dimensional semi-analytical elastic-plastic contact code. *Journal of Tribology*, vol. 124, 2002, p. 653-667.
- [JAC 02b] JACQ C., NELIAS D., LORMAND G., GIRODIN D.  
Development of a three-dimensional semi-analytical elastic-plastic contact code. *Journal of Tribology*, vol. 124, n° 4, 2002, p. 653-667.
- [JEU 08] JEUNECHAMPS P.-P.  
Simulation numérique à l'aide d'algorithmes thermomécanique implicites, de matériaux endommageables pouvant subir de grandes vitesses de déformation. Thèse de doctorat, Université de Liège, 2008.
- [J.F 87] J. FRANK Z., W. ARMSTRONG R.  
Dislocation-mechanics-based constitutive relations for material dynamics calculations. *Journal of Applied Physics*, vol. 61, 1987, p. 1816-1825.
- [JOH 85] JOHNSON K. L.  
*Contact Mechanics*. Cambridge University Press, 1985.
- [JON 93] JONES N.  
Material properties for structural impact problems. *International symposium on*, 1993.
- [JON 00] JONG K. W., HOON H.  
Crash analysis of auto-body structures considering the strain-rate hardening effect. *International journal of automotive technology*, vol. 1, 2000, p. 35-41.
- [JUL 13] JULIEN L.  
Modélisation numérique du contact pour matériaux composites. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2013.
- [JUL 14] JULAN E.  
Simulation numérique du choc laser pour la mise en compression en présence de l'état initial du au soudage. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, 2014.
- [KAN 06] KAN D., LIN Y.  
Simulation of multiple laser shock peening of a 35CD4 steel alloy. *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 178, 2006, p. 162 - 169.
- [KAR 75] KARL F. G.  
*Wave motion in elastic solids*. Oxford University Press, 1975.
- [KAR 02] KARUPPANAN S., RODOPOULOS J. R. C., LEVERS C.  
A theoretical and experimental investigation into the developpement of coverage in shot peening. *Proceedings of the 8th International conference on shot peening*, pp. 101-107, 2002.

- [KHA 07] KHAN A. S., KAZMI R., FARROKH B.  
Multiaxial and non-proportional loading responses, anisotropy and modeling of Ti-6Al-4V titanium alloy over wide ranges of strain rates and temperatures. *International Journal of Plasticity*, vol. 23, 2007, p. 931-950.
- [KHO 08] KHOJASTEH A., RAHIMIAN, PAK R.  
Three-dimensional Dynamic Green's Functions in Transversely Isotropic Bi-materials. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 45, 2008, p. 4952-4972.
- [KHO 11] KHOJASTEH A., RAHIMIAN M., ESKANDARI M., PAK R.  
Three-dimensional Dynamic Green's Functions for a Multilayered Transversely Isotropic Half-Space. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 48, 2011, p. 1349-1361.
- [KHO 13] KHOJASTEH A., RAHIMIAN M., ESKANDARI M.  
Three-dimensional Dynamic Green's Functions in Transversely Isotropic Tri-materials. *Journal of Applied Mathematical Modelling*, vol. 37, 2013, p. 3164-3180.
- [KIM 13a] KIM J. H., JONG W. L.  
Effects of Simulation Parameters on Residual Stresses in 3D Finite Element Laser Shock Peening Analysis. *The Global Journal of Researches in Engineering*, vol. 13, n° 9, 2013.
- [KIM 13b] KIM T., LEE H., HYUN H. C., JUNG S.  
Effects of Rayleigh damping, friction and rate-dependency on 3D residual stress simulation of angled shot peening. *Materials and Design*, vol. 46, 2013, p. 26-37.
- [KIR 93] KIRK D., ABYANEH M.  
Theoretical basis of shoot peening coverage control. *Proceeding of the 5th International Conference on shoot peening, pp 183-190*, 1993.
- [KOL 63] KOLSKY H.  
*Stress Waves in Solids*. Oxford University Press, 1963.
- [KOL 79] KOLM H., FINE K., WILLIAMS F., MONGEAU P.  
2nd International Pulsed Power Conference. *Electromagnetic guns launchers and reaction engines*, 1979.
- [KRE 11] KREHL P.  
Shock wave physics and detonation physics - a stimulus for the emergence of numerous new branches in science and engineering. *The European Physical Journal H*, vol. 36, n° 1, 2011, p. 85-152, Springer-Verlag.
- [LAM 04] LAMB H.  
On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid. *Philosophical Transactions A*, vol. 203, 1904, p. 1-42.
- [LAN 99] LANGRAND B., GEOFFROY P., PETITNIOT J.-L., FABIS J., MARKIEWICZ E., DRAZETIC P.  
Identification technique of constitutive model parameters for crashworthiness modelling. *Aerospace Science and Technology*, vol. 3, 1999, p. 215 - 227.
- [LAU 03] LAURENCE C.  
Modélisation et simulation de la viscoplasticité et de l'endommagement en grandes vitesses de déformation. Thèse de doctorat, Université Louis PASTEUR de Strasbourg, 2003.

- [LEA 02] LEACH R. K., HARRIS P. M.  
Ambiguities in the definition of spacing parameter for surface-texture characterization. *Journal of Measurement Science and Technology*, vol. 13, 2002, p. 1924-1930.
- [LEM 09] LEMAITRE J., CHABOCHE J. L., AHMED B., DESMORAT R.  
*Mécanique des matériaux solides*, Chapitre Élasto-visco-plasticité, p. 261-313. 2009.
- [LER 12] LEROUX MAXIME L.  
Superconductivity, Charge Density Wave and Soft Phonons, in the dichalcogenides 2H-NbSe<sub>2</sub> and 2H-NbS<sub>2</sub>, as well as the intermetallic compound Lu<sub>5</sub>Ir<sub>4</sub>Si<sub>10</sub>. Thèse de doctorat, Université de Grenoble, 2012.
- [LI 13] LI K., HU Y., YAO Z.  
Experimental study of micro dimple fabrication based on laser shock processing. *Optics & Laser Technology*, vol. 48, n° 0, 2013, p. 216 - 225.
- [LIA 99] LIANG R., KHAN A. S.  
A critical review of experimental results and constitutive models for {BCC} and {FCC} metals over a wide range of strain rates and temperatures. *International Journal of Plasticity*, vol. 15, n° 9, 1999, p. 963 - 980.
- [LIN 64] LINDHOLM U.  
Some experiments with the split hopkinson pressure bar. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 12, 1964, p. 317-335.
- [LIU 00] LIU S., QIAN W., GENG L.  
A versatile method of discrete convolution and FFT (DC-FFT) for contact analyses. *Wear*, vol. 243, 2000, p. 101 - 111.
- [LUD 05] LUDIAN T., WAGNER L.  
Coverage effects in shot peening of AL 2024-T4. *ICSP9 : Shot peening*, 2005.
- [LUO 14] LUO K., WANG C., LI Y., LUO M., HUANG S., HUA X., LU J.  
Effects of laser shock peening and groove spacing on the wear behavior of non-smooth surface fabricated by laser surface texturing. *Applied Surface Science*, vol. 313, n° 0, 2014, p. 600 - 606.
- [M. 91] M. H., M. G.  
Microstructure résiduelles d'un aciers 304 soumis à un choc laser. Influence du flux et de la durée d'impulsion laser. *Journal de Physique IV*, vol. 01, 1991, p. C3-519-C3-524.
- [MAN 73] MANDEL J.  
Equations constitutives et directeurs dans les milieux plastiques et viscoplastiques. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 9, n° 6, 1973, p. 725 - 740.
- [MAR 94] MARC A. M.  
*Dynamic behavior of materials*. John Wiley & Sons, Inc, 1994.
- [MEI 68] MEIJERS P.  
The contact problem of a rigid cylinder on an elastic layer. *Applied Scientific Research*, vol. 18, n° 1, 1968, p. 353-383, Martinus Nijhoff, The Hague/Kluwer Academic Publishers.

- [MEY 81] MEYERS M. A., MURR L. E.  
Shock Waves and High-Strain-Rate Phenomena in Metals. Concepts and Applications. rapport, 1981, DTIC Document.
- [MIC 02] MICHEL A.  
Etude de l'influence des rugosités d'interface, de porosités et de l'épaisseur d'échantillon sur la propagation des chocs laser dans des systèmes revêtus. Application au procédé LASAT (Laser Adhérence Test). Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 2002.
- [MIK 92] MIKATA Y.  
Transient elastic field due to a spherical dynamic inclusion with an arbitrary time profile. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, vol. 46, 1992, p. 275-297.
- [MIN 50] MINDLIN R. D., CHENG D. H.  
Thermoelastic Stress in the Semi Infinite Solid. *Journal of Applied Physics*, vol. 21, n° 9, 1950, p. 931-933.
- [MIT 11] MITHILA A., DAVID N.  
Eigenstrain modelling of residual stresses generated by laser shock peening. *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 211, n° 6, 2011, p. 1091 - 1101.
- [NEI 15] NEILA H., PATRICE P., HONGBIN S., IOANA P., VINCENT J., VINCENT V.  
Finite element analysis of laser shock peening of 2050-T8 aluminum alloy. *International Journal of Fatigue*, vol. 70, 2015, p. 480-489.
- [NÉL 07] NÉLIAS D., ANTALUCA E., BOUCLY V.  
Rolling of an Elastic Ellipsoid Upon an Elastic-Plastic Flat. *Journal of Tribology*, vol. 129, 2007, p. 791-800.
- [NEM 09] NEMOTO K., YANAGI K., AKETAGAWA M., YOSHIDA I., UCHIDATE M., MIYAGUCHI T., MARUYAMA H.  
Development of a roughness measurement standard with irregular surface topography for improving 3D surface texture measurement. *Measurement Science and Technology*, vol. 20, 2009.
- [OCA 04] OCANA J. L., MORALES M., MOLPECERES C., TORRES J. A., GOMEZ G., RUBIO C.  
Predictive assessment and experimental characterization of the influence of irradiation parameters on surface deformation and residual stresses in laser-shock-processed metallic alloys. *High-Power Laser Ablation 2004*, 2004.
- [PAU 81] PAUL B., HASHEMI J.  
Contact Pressures on Closely Conforming Elastic Bodies. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 48, 1981, p. 543-548.
- [PEK 55] PEKERIS C. L.  
The Seismic Surface Pulse. *Geochemical Journal*, vol. 41, 1955, p. 469-480.
- [PEN 93] PENAZZI L., BOIS D.  
Lois de comportement utilisables dans la simulation numérique des phénomènes dynamiques. *Document DYMAT, ETCA, Arcueil, France*, vol. 298, 1993.
- [PER 86] PERZYNA P.  
Internal state variable description of dynamic fracture of ductile solids. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 22, 1986, p. 797-818.

- [PEY 96] PEYRE P., BERTHE L., SCHERPEREEL X., FABBRO R.  
Laser-shock processing of aluminium-coated 55C1 steel in water-confinement regime, characterization and application to high-cycle fatigue behaviour. *Journal of Materials Science*, vol. 33, n° 6, 1996, p. 1421-1429, Kluwer Academic Publishers.
- [PEY 06] PEYRE P., BERTHE L., FABBRO R.  
Le choc-laser en 2006 : état de l'art et applications. rapport, 2006, GERALIP-LALP, UPR 1578 CNRS, 94114 Arcueil cedex.
- [PEY 07a] PEYRE P., CHAIEB I., BRAHAM C.  
FEM calculation of residual stresses induced by laser shock processing in stainless steels. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, vol. 15, 2007, p. 205-221.
- [PEY 07b] PEYRE P., CHAIEB I., BRAHAM C.  
FEM calculation of residual stresses induced by laser shock processing in stainless steels. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, vol. 15, n° 3, 2007, page 205.
- [PEY 07c] PEYRE P., CARBONI C., FORGET P., BERANGER G., LEMAITRE C., STUART D.  
Influence of thermal and mechanical surface modifications induced by laser shock processing on the initiation of corrosion pits in 316L stainless steel. *Journal of Materials Science*, vol. 42, n° 16, 2007, p. 6866-6877, Kluwer Academic Publishers-Plenum Publishers.
- [POL 99] POLONSKY I., KEER L.  
A numerical method for solving rough contact problems based on the multi-level multi-summation and conjugate gradient techniques. *Wear*, vol. 231, n° 2, 1999, p. 206 - 219.
- [PRE 92] PRESS W., TEUKOLSKY S., VETTERLING W., FLANNERY B.  
. « Numerical Recipes in Fortran 77 : The Art of Scientific Computing, 933 pp ». Cambridge Univ. Press, New York, 1992.
- [RAG 77] RAGAN III C., SILBERT M., DIVEN B.  
Shock compression of molybdenum to 2.0 TPa by means of a nuclear explosion. *Journal of Applied Physics*, vol. 48, 1977, p. 2860-2870.
- [RAH 95] RAHMAN M., BARBER J.  
Exact expressions for the roots of the secular equation for Rayleigh waves. *Journal of applied mechanics*, vol. 62, 1995, p. 250-252.
- [RAN 02] RANKIN J. E., HILL M. R., HALPIN J., CHEN H. L., HACKEL L. A., HARRIS F.  
The effects of process variations on residual stress induced by laser peening. *Materials science forum*, vol. 404 Trans Tech Publ, 2002, p. 95-100.
- [RAN 03] RANKIN J. E., HILL M. R., HACKEL L. A.  
The effects of process variations on residual stress in laser peened 7049 T73 aluminum alloy. *Materials Science and Engineering : A*, vol. 349, 2003, p. 279-291.
- [RAY 96] RAYLEIGH J. W. S. B.  
*The theory of sound*. Macmillan, 1896.
- [RIC 11] RICHTER H.  
Simulating transient effects of pulsed beams on beam intercepting devices. Thèse de doctorat, CERN, 2011.

- [RIZ 94] RIZOS D., KARABALIS D.  
An advanced direct time domain BEM formulation for general 3-D elastodynamic problems. *Computational mechanics*, vol. 15, 1994, p. 249-269.
- [ROB 69] ROBOTNOV Y.  
Fundamental Problems in Visco-Plasticity. *Recent Advances in Applied Mechanics*, , 1969.
- [ROU 97] ROUHAUD E., MILLEY A., LU J.  
Introduction of residual stress fields in finite element three-dimensional structures. *5th Int. Conf. on Residual Stresses, ICRS*, 1997.
- [ROU 09] ROUSSEAU J.  
Modélisation numérique du comportement dynamique de structures sous impact sévère avec un couplage éléments discrets/éléments finis. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier - Grenoble I, 2009.
- [ROZ 10] ROZMUS-GÓRNIKOWSKA M.  
Surface modifications of a Ti6Al4 V alloy by a laser shock processing. *Acta Physica Polonica-Series A General Physics*, vol. 117, 2010, page 808.
- [RUL 98] RULE WILLIAM K., JONES S.  
A revised form for the Johnson-Cook strength model. *International Journal of Impact Engineering*, vol. 21, 1998, p. 609-624.
- [RUS 99] RUSCHAU J. J., JOHN R., THOMPSON S. R., NICHOLAS T.  
Fatigue crack nucleation and growth rate behavior of laser shock peened titanium. *International Journal of Fatigue*, vol. 21, Supplement 1, n° 0, 1999, p. S199 - S209.
- [SAN 97] SANO Y., N M., K O., M O.  
Residual stress improvement in metal surface irradiation by underwater laser. *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. B I*, vol. 21, 1997, p. 432-436.
- [SEE 97a] SEETHARAMAIAH M., E M. A., D C. W., HERBERT H., E R. J., E G. J.  
. « Laser shock peened gas turbine engine fan blade edges ». Google Patents, jan " 7" 1997. US Patent 5,591,009.
- [SEE 97b] SEETHARAMAIAH M., L Y. R., E M. A.  
. « Dry tape covered laser shock peening ». Google Patents, oct " 7" 1997. US Patent 5,674,328.
- [SIM 85] SIMO J., TAYLOR R.  
Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 48, n° 1, 1985, p. 101 - 118.
- [SOA 11] SOADY K., MELLOR B., SHACKLETON J., MORRIS A., REED P.  
The effect of shot peening on notched low cycle fatigue. *Journal of Materials Science and Engineering*, vol. 528, 2011, p. 8579-8588.
- [SOA 13] SOADY K., MELLOR B., WEST G., HARRISON G., MORRIS A., REED P.  
Evaluating surface deformation and near surface strain hardening resulting from shot peening a tempered martensitic steel and application to low cycle fatigue. *International Journal of Fatigue*, vol. 54, 2013, p. 106-117.

- [SOL 02] SOLLIER A.  
Etude des plasmas générés par interaction laser-matière en régime confiné. Application au traitement des matériaux par choc laser. Thèse de doctorat, Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines, 2002.
- [SON 10] SONG H.  
Analyse expérimentale et numérique de la distribution des contraintes résiduelles induites par choc-laser dans les alliages d'aluminium. Thèse de doctorat, Arts et Métiers ParisTech, 2010.
- [STE 01] STEPHEN J. F., MCALLISTER K. G., MANNAVA S.  
. « Laser shock peened gas turbine engine seal teeth ». Google Patents, mar " 13" 2001. US Patent 6,200,689.
- [TAH 08] TAHIR N. A., LOMONOSOV I. V., SHUTOV A., KIM V., FORTOV V. E., PIRIZ A. R., WOUCHUK G., MORENO M. C. S., CELA J. J. L., HOFFMANN D. H. H., DEUTSCH C.  
High energy density matter research using intense heavy ion beams at the future FAIR facility at Darmstadt : the HEDgeHOB collaboration. *Journal of physics : Conference Series*, vol. 112, 2008, page 042025.
- [TAH 11] TAHIR N. A., SHUTOV A., PIRIZ A. R., LOMONOSOV I. V., DEUTSCH C., SPILLER P.  
Application of intense heavy ion beams to study high energy density physics. *Plasmas Physics and Controlled Fusion*, vol. 53, 2011, page 124004.
- [TEC 07] TECHNOLOGIES L.  
. « Laser Peening of Raptor Engine Components », May 14 2007.
- [THA 07] THAREJA R., SHUKLA S.  
Synthesis and characterization of zinc oxide nanoparticles by laser ablation of zinc in liquid. *Applied Surface Science*, vol. 253, n° 22, 2007, p. 8889 - 8895.
- [THO 97] THOUVENIN J.-M.  
*Détonique*. Eyrolles, 1997.
- [TOS 87] TOSHIO M.  
*Micromechanics of defects in solids*, vol. 3. Springer Science & Business Media, 1987.
- [TSU 02] TSUBOI N., KATOH S., HAYASHI A. K.  
Three-dimensional numerical simulation for hydrogen/air detonation : Rectangular and diagonal structures. *Proceedings of the Combustion Institute*, vol. 29, 2002, p. 2783 -2788.
- [VAR 07] VARENTOV D., TERNOVOI V. Y., KULISH M., FERNENGEL D., FERTMAN A., HUG A., MENZEL J., NI P., NIKOLAEV D., SHILKIN N., TURTIKOV V., UDREA S., FORTOV V., GOLUBEV A., GRYAZNOV V., HOFFMANN D., KIM V., LOMONOSOV I., MINTSEV V., SHARKOV B., SHUTOV A., SPILLER P., TAHIR N., WAHL H.  
High-energy-density physics experiments with intense heavy ion beam. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, vol. 577, 2007, p. 262-266.
- [VE 10] VE F., IV L.  
Shock waves and equations of state of matter. *Shock waves*, vol. 20, 2010, p. 53-71.
- [WAG 99] WAGNER L.  
Mechanical surface treatments on titanium, aluminium and magnesium alloys. *Journal of Materials Science and Engineering*, vol. A263, 1999, p. 210-216.

- [WAT 66] WATSON G.  
*A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Chapitre Infinite integrals, p. 386, 405. Cambridge University Press, 1966.
- [WEI 14] WEI X., LING X.  
Numerical modeling of residual stress induced by laser shock processing. *Applied Surface Science*, vol. 301, n° 0, 2014, p. 557 - 563.
- [WES 39] WESTERGAARD H.  
Bearing Pressures and Cracks. *Journal of applied mechanics*, , 1939.
- [WIL 65] WILLIS J. R.  
Dislocations and inclusions. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 13, 1965, p. 377-395.
- [YIL 04] YILBAS B. S., GONDAL M. A., ARIF A. M. F., SHUJA S. Z.  
Laser shock processing of Ti-6Al-4V alloy. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B : Journal of Engineering Manufacture*, vol. 218, 2004, p. 473-482.
- [YIM 90] YIM D., KIM S.  
Optical roughness measurement of ground surfaces by light scattering. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, vol. 30, 1990, p. 283-289.
- [YON 12] YONGXIANG H., RAMANA V. G.  
Efficient numerical prediction of residual stress and deformation for large-scale laser shock processing using the eigenstrain methodology. *Surface and Coatings Technology*, vol. 206, n° 15, 2012, p. 3374 - 3385.
- [YUJ 06] YUJI S., KOICHI A., KIYOTAKA M., YASUO O., IGOR A., BERTHOLD S.  
Laser peening without coating as a surface enhancement technology. *Pulse*, vol. 100, 2006, page 250mJ.
- [ZEN 95] ZENG Q.  
Optimisation de l'utilisation des explosifs en Génie Civil. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1995.
- [ZHA 10a] ZHANG X., ZHANG Y., LU J., XUAN F., WANG Z., TU S.  
Improvement of fatigue life of Ti-6Al-4V alloy by laser shock peening. *Materials Science and Engineering : A*, vol. 527, n° 15, 2010, p. 3411 - 3415.
- [ZHA 10b] ZHANG X., ZHANG Y., LU J., XUAN F., WANG Z., TU S.  
Improvement of fatigue life of Ti-6Al-4V alloy by laser shock peening. *Materials Science and Engineering : A*, vol. 527, n° 15, 2010, p. 3411 - 3415.
- [ZHO 09] ZHOU K., CHEN W. W., KEER L. M., WANG Q. J.  
A fast method for solving three-dimensional arbitrarily shaped inclusions in a half space. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 198, 2009, p. 885-892.
- [ZHO 12] ZHOU Z., BHAMARE S., RAMAKRISHNAN G., MANNAVA S. R., LANGER K., WEN Y., QIAN D., VASUDEVAN V. K.  
Thermal relaxation of residual stress in laser shock peened Ti-6Al-4V alloy. *Surface and Coatings Technology*, vol. 206, n° 22, 2012, p. 4619 - 4627.



NOM : TARO

DATE de SOUTENANCE : 30 Novembre 2015

Prénoms : Mandikizinoyou

TITRE : Modélisation et simulation des procédés de mise en compression des surfaces à très grandes vitesses de déformation par méthode semi-analytique

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2015-ISAL-0105

École doctorale : MEGA

Spécialité : Mécanique - Génie Mécanique - Génie Civil

Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 / et bis

CLASSE :

**RÉSUMÉ :**

La défaillance des pièces mécaniques est très souvent initiée par un défaut de surface. Ainsi, la qualité des couches superficielles des pièces devient donc un élément essentiel dans l'ingénierie. Par conséquent, la génération de contraintes résiduelles compressives sur des pièces mécaniques via une déformation plastique hétérogène améliore la tenue en fatigue et augmente la durée de vie des pièces. Parmi les procédés permettant d'introduire des contraintes résiduelles dans les pièces, le traitement par choc laser apparaît comme un procédé récent pour le traitement de surfaces. Il appartient à la classe des procédés à très grande vitesse de déformation, de l'ordre de  $10^6 \text{s}^{-1}$  et est plus intéressant à plusieurs titres. D'une part, il permet de produire des pressions en surface du matériau de l'ordre de 1 à 6 GPa sur de courtes durées d'impulsion allant de 3 à 30 nanosecondes. D'autre part, il offre la possibilité d'introduire des contraintes résiduelles de compression sur une certaine profondeur tout en conservant l'état initial de la pièce traitée. Pour bien cerner le procédé et mieux prédire les contraintes résiduelles engendrées, il devient nécessaire de mettre en avant les simulations numériques par réalisation de modèles simples. Dans cette perspective, la méthode semi-analytique est une classe de méthode numérique qui offre d'énormes avantages, notamment la simplicité des modèles et la réduction des temps de calcul. Cette méthode a été étendue aux problèmes de contact et très récemment a été appliquée pour la simulation des procédés de grenailage. Cependant, les hypothèses faites dans les modèles réduisent le champ d'application de cette méthode notamment l'absence du terme inertiel dans les formulations analytiques. Dans cette thèse la méthode semi-analytique a été étendue aux problèmes dynamiques. Ainsi, la mise en place de fonctions de Green prenant en compte les effets d'inertie a été réalisées et intégrées à la méthode semi-analytique et un cas de simulation d'impact rapide sur matériau élastique a été réalisé. Ensuite, le modèle élastique mis en place a été enrichi pour tenir compte de la plasticité et/ou de la viscoplasticité lorsque le seuil de pression appliqué induit des déformations plastiques. Enfin, une validation numérique du modèle a été proposée. Le modèle viscoplastique a donc été appliqué pour la simulation du procédé de choc Laser pour prédire les déformations plastiques et les contraintes résiduelles engendrées par le procédé. De plus, une étude paramétrique a été réalisée afin de prédire les paramètres du procédé les plus influents.

**MOTS-CLÉS :** Méthode semi-analytique, impact rapide, onde de choc, viscoplasticité, déformations plastiques, contraintes résiduelles.

Laboratoire(s) de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Solides  
UMR CNRS 5259 - INSA de Lyon  
20, avenue Albert Einstein  
69621 Villeurbanne Cedex FRANCE

Directeurs de thèse : Professeur Daniel NELIAS

Président du jury : le président

Composition du jury : MICHEL ARRIGONI, Maître de Conférences, ENSTA Bretagne (Examinateur)  
JAWAD BADREDDINE, Docteur, Ingénieur-SAFRAN (Invité)  
THIBAUT CHAISE, Maître de Conférences, INSA Lyon (Co-Encadrant de thèse)  
ALAIN COMBESURE, Professeur, INSA Lyon (Examinateur)  
THIBAUT DE RESSEGUIER, Professeur, ENSMA, Futuroscope (Examinateur)  
DANIEL NELIAS, Professeur, INSA Lyon (Directeur de thèse)  
GILLES PERRIN, Expert-AREVA (Examinateur)  
PATRICE PEYRE, DR CNRS, ENSAM ParisTech (Rapporteur)