

N ° d'ordre NNT : 2016LYSEI018

**THÈSE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON**  
préparée au sein de  
**l'INSA LYON**

**École Doctorale ED 162 MEGA**  
**Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique**

**Spécialité de doctorat :**  
**MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL**

Soutenue publiquement le 03/03/2016, par :  
**Lihan XIE**

---

**Suivi numérique des bifurcations  
pour l'analyse paramétrique  
de la dynamique non-linéaire des rotors**

---

Devant le jury composé de

D. DUREISSEIX	Professeur, INSA Lyon	Président du jury
G. KERSCHEN	Professeur, Université de Liège	Rapporteur
M. LEGRAND	Professeur, McGill University	Rapporteur
R. DUFOUR	Professeur, INSA Lyon	Directeur de thèse
S. BAGUET	Maître de Conférences, INSA Lyon	Co-Encadrant
B. PRABEL	Ingénieur chercheur, CEA Saclay	Co-Encadrant

LaMCoS - UMR CNRS 5259 - INSA de Lyon  
20, avenue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex (France)



**INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales – Quinquennal 2011-2015**

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
<b>CHIMIE</b>	<b>CHIMIE DE LYON</b> <a href="http://www.edchimie-lyon.fr">http://www.edchimie-lyon.fr</a> Sec : Renée EL MELHEM Bat Blaise Pascal 3 <sup>e</sup> etage 04 72 43 80 46 Insa : R. GOURDON <a href="mailto:secretariat@edchimie-lyon.fr">secretariat@edchimie-lyon.fr</a>	<b>M. Jean Marc LANCELIN</b> Université de Lyon – Collège Doctoral Bat ESCPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 13 95 <a href="mailto:directeur@edchimie-lyon.fr">directeur@edchimie-lyon.fr</a>
<b>E.E.A.</b>	<b>ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</b> <a href="http://edeea.ec-lyon.fr">http://edeea.ec-lyon.fr</a>  Sec : M.C. HAVGOUDOUKIAN <a href="mailto:Ecole-doctorale.eea@ec-lyon.fr">Ecole-doctorale.eea@ec-lyon.fr</a>	<b>M. Gérard SCORLETTI</b> Ecole Centrale de Lyon 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 60.97 Fax : 04 78 43 37 17 <a href="mailto:Gerard.scorletti@ec-lyon.fr">Gerard.scorletti@ec-lyon.fr</a>
<b>E2M2</b>	<b>EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION</b> <a href="http://e2m2.universite-lyon.fr">http://e2m2.universite-lyon.fr</a>  Sec : Bat Atrium- UCB Lyon 1 04.72.44.83.62 Insa : S. REVERCHON <a href="mailto:secretariat.e2m2@univ-lyon.fr">secretariat.e2m2@univ-lyon.fr</a>	<b>M. Fabrice CORDEY</b> Laboratoire de Géologie de Lyon Université Claude Bernard Lyon 1 Bât Géode – Bureau 225 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.72.44.83.74 <a href="mailto:Sylvie.reverchon-pescheux@insa-lyon.fr">Sylvie.reverchon-pescheux@insa-lyon.fr</a> <a href="mailto:fabrice.cordev@univ-lyon1.fr">fabrice.cordev@univ-lyon1.fr</a>
<b>EDISS</b>	<b>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES- SANTÉ</b> <a href="http://www.ediss-lyon.fr">http://www.ediss-lyon.fr</a> Sec : Bat Atrium – UCB Lyon 1 04 72 44 83 62 Insa : <a href="mailto:secretariat.ediss@univ-lyon1.fr">secretariat.ediss@univ-lyon1.fr</a>	<b>Mme Emmanuelle CANET-SOULAS</b> INSERM U1060, CarMeN lab, Univ. Lyon 1 Bâtiment IMBL 11 avenue Jean Capelle INSA de Lyon 696621 Villeurbanne Tél : 04.72.11.90.13 <a href="mailto:Emmanuelle.canet@univ-lyon1.fr">Emmanuelle.canet@univ-lyon1.fr</a>
<b>INFOMATHS</b>	<b>INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUES</b> <a href="http://infomaths.univ-lyon1.fr">http://infomaths.univ-lyon1.fr</a>  Sec : Renée EL MELHEM Bat Blaise Pascal 3 <sup>e</sup> etage <a href="mailto:infomaths@univ-lyon1.fr">infomaths@univ-lyon1.fr</a>	<b>Mme Sylvie CALABRETTO</b> LIRIS – INSA de Lyon Bat Blaise Pascal 7 avenue Jean Capelle 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 43. 80. 46 Fax 04 72 43 16 87 <a href="mailto:Sylvie.calabretto@insa-lyon.fr">Sylvie.calabretto@insa-lyon.fr</a>
<b>Matériaux</b>	<b>MATERIAUX DE LYON</b> <a href="http://ed34.universite-lyon.fr">http://ed34.universite-lyon.fr</a>  Sec : M. LABOUNE-DAHMANI PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Direction 1 <sup>er</sup> et. <a href="mailto:Ed.materiaux@insa-lyon.fr">Ed.materiaux@insa-lyon.fr</a>	<b>M. Jean-Yves BUFFIERE</b> INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Saint Exupéry 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 71.70 Fax 04 72 43 85 28 <a href="mailto:Ed.materiaux@insa-lyon.fr">Ed.materiaux@insa-lyon.fr</a>
<b>MEGA</b>	<b>MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE</b> <a href="http://mega.universite-lyon.fr">http://mega.universite-lyon.fr</a>  Sec : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Direction 1 <sup>er</sup> et. <a href="mailto:mega@insa-lyon.fr">mega@insa-lyon.fr</a>	<b>M. Philippe BOISSE</b> INSA de Lyon Laboratoire LAMCOS Bâtiment Jacquard 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 43.71.70 Fax : 04 72 43 72 37 <a href="mailto:Philippe.boisse@insa-lyon.fr">Philippe.boisse@insa-lyon.fr</a>
<b>ScSo</b>	<b>ScSo*</b> <a href="http://recherche.univ-lyon2.fr/scso/">http://recherche.univ-lyon2.fr/scso/</a>  Sec : Viviane POLSINELLI Brigitte DUBOIS Insa : J.Y. TOUSSAINT <a href="mailto:viviane.polsinelli@univ-lyon2.fr">viviane.polsinelli@univ-lyon2.fr</a>	<b>Mme Isabelle VON BUELTZINGLOEWEN</b> Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.77.23.86 Fax : 04.37.28.04.48 <a href="mailto:isavonb@dbmail.com">isavonb@dbmail.com</a>

\*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie



# Avant-propos

Cette thèse a été financée par le CEA par un contrat de formation par la recherche (CFR), et a été réalisée au Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures, UMR CNRS 5259, INSA Lyon, Institut Carnot Ingénierie@Lyon et au laboratoire d'Etudes de Dynamique (DEN/DANS/DM2S/SEMT/DYN) du CEA Saclay.

Je tiens en premier lieu à remercier du fond du coeur mon directeur de thèse M. le Professeur Régis DUFOUR pour m'avoir permis d'explorer dans le domaine des machines tournantes, pour avoir dirigé ces travaux de thèse et partagé son immense savoir scientifique, aussi pour sa gentillesse, sa bonne humeur, son encouragement dans tout le moment de la thèse.

Je tiens à exprimer mes plus profonds remerciements à mes encadrants M. Sébastien BAGUET et M. Benoit PRABEL, pour leur patience, leur gentillesse et leur support sans limite. Leur grande expertise et sens de la rigueur ont apporté énormément de valeur de cette thèse. C'était aussi un très grand plaisir d'avoir travaillé avec eux. Leur encouragement et leur soutien à chaque conversation était ma source de motivation et d'inspiration. Je n'aurais pas pu aboutir ces travaux sans leur aide.

Je remercie sincèrement M. le Professeur David DUREISSEIX, directeur de LaMCoS de l'INSA Lyon, d'avoir présidé le jury lors de la soutenance et M. le Professeur Gaëtan KERSCHEN de l'Université de Liège et M. le Professeur Mathias LEGRAND de *McGill University* pour leur travail en tant que rapporteurs et pour leur avis favorable concernant mon mémoire de thèse.

Je tiens également à remercier les membres de l'équipe Dynamique et Contrôle des Structures. Le bon déroulement de la thèse est en grande partie due à la bonne ambiance dans le laboratoire. Je remercie sincèrement d'abord M. Jarir MAHFOUD, mon encadrant durant ma recherche de Master, pour m'avoir permis de découvrir dans la dynamique non-linéaire, pour sa gentillesse et sa passion. Ensuite, je tiens à attribuer mes respects en particulier aux autres doctorants, les copains de table de midi qui m'ont apporté beaucoup de joies et toujours des histoires intéressantes : José, Sophie, Zaki, Bartolomé, Guillaume, Clément J, Clément G, Ilaria, Mélodie, Arwa, Nitin, Etienne, Carlos...

Egalement, j'adresse mes remerciement aux membres de laboratoire d'Etudes de Dynamique du CEA Saclay qui m'ont accueilli chaleureusement et partagé des moments de plaisir dans la salle café pendant une année et demie. Merci à ma chère co-bureau et bonne amie Marwa de m'avoir subi et partagé les joies et les peines de la vie.

Sans doute, je n'oublie pas mes copains chinois que j'ai rencontré sur le plateau de Saclay. C'était une belle surprise d'avoir construit cette petite communauté. J'ai passé de très bons moments avec eux : Yunsong, Fan, Langshi, Lu, Yiting, Feng, etc... Je tiens à exprimer surtout mes remerciements à mes amis Da, Qi, Bo, Cheng pour avoir entrés dans ma vie et leur amitiés sincères. Je remercie aussi mes copains à Lyon : Zhen, Lv et sa famille, Hu, Miao, Wenjun et Hanfeng. Je n'oublie pas également remercier mes onze copains qui sont venus en France en 2010 pour leur accompagnement et leur aide pendant les deux premières années difficiles.

---

C'est avec une pensée à ma famille que je voudrais terminer ces remerciements. Merci à mes parents et ma soeur de m'avoir soutenu tout le temps dans ma vie. Le tout dernier merci pour Wenfeng, son soutien sans limite, sa patience, son encouragement et sa compréhension.

# Résumé

Au cœur des moyens de transport, de transformation d'énergie, et de biens d'équipements, les machines tournantes peuvent avoir des comportements dynamiques complexes dus à de multiples sources de non linéarités liées aux paliers hydrodynamiques, à la présence de fissures, aux touches rotor-stator, . . . Des phénomènes comme les décalages fréquentiels et donc de vitesses critiques, les cycles d'hystérésis avec sauts d'amplitudes, le changement brutal du contenu fréquentiel des réponses, sont des expressions de ces comportements. Résoudre les équations du mouvement induites par des modélisations avec des éléments finis de type poutre ou volumique, pour calculer les réponses à des sollicitations diverses (comme le balourd ou le poids propre), est réalisable avec des méthodes d'intégration pas à pas dans le temps mais au prix de temps de calcul prohibitifs. Cela devient particulièrement préjudiciable au stade du pré-dimensionnement où il est nécessaire de réaliser rapidement des études paramétriques.

Aussi une alternative intéressante est de mettre en œuvre une méthode numérique, à la fois générale et efficace pour analyser la réponse non linéaire des rotors en régime stationnaire. La démarche proposée combine, dans un premier temps, la méthode de la balance harmonique (HBM) et la technique de bascule Temps-Fréquence (AFT) afin d'obtenir rapidement dans le domaine fréquentiel les réponses périodiques des rotors à grand nombre de degrés de liberté apportés par les éléments finis volumiques. Puis, l'association à la méthode de continuation par pseudo-longueur d'arc aboutit à établir continûment l'ensemble des solutions d'équilibre dynamique sur la plage de vitesse de rotation. Enfin la stabilité dynamique locale de la solution périodique est analysée grâce à des indicateurs de bifurcation basés sur l'évolution des exposants de Floquet. Ainsi sont détectées les bifurcations de branches de solutions périodiques de type point limite, point de branchement et notamment Neimark-Sacker. Leur localisation est déterminée précisément en résolvant un système augmenté constitué de l'équation du mouvement et d'une équation supplémentaire caractérisant le type de bifurcation considéré. En déclarant un paramètre du système (coefficient de frottement, jeu rotor/stator, amplitude de l'excitation,...) comme nouvelle variable, l'utilisation de la technique de continuation conjointement avec le système augmenté détermine directement le cheminement des bifurcations en fonction de ce paramètre sur la nappe des réponses non linéaires. Les suivis de bifurcations délimitent les zones de fonctionnement spécifiques, extraient efficacement l'essentiel du comportement dynamique et offrent ainsi une nouvelle approche pour dimensionner de façon efficace les systèmes notamment en rotation. Nombre des développements réalisés sont implantés dans le code de calcul Cast3M.

La thèse a été réalisée au Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures, UMR CNRS 5259, INSA Lyon, Institut Carnot Ingénierie@Lyon et au laboratoire d'Etudes de Dynamique (DEN/DANS/DM2S/SEMT/DYN) du CEA Saclay.

---

**MOTS CLÉS:** suivi des bifurcations, Neimark-Sacker, réponse non linéaire des rotors, dynamique des machines tournantes, modélisation avec EF volumiques, contact rotor-stator, méthode de la balance harmonique, méthode continuation, méthode de Floquet, matrice de monodromie.

# Abstract

Generally speaking, the rotating systems utilized in the energy production have a small rotor-stator gap, are able to run during long periods, and are mounted on hydrodynamic bearings. Rotor-stator interactions in case of blade loss, crack propagation due to fatigue, and a variable stiffness due to the nonlinear restoring forces of the bearings can make the rotordynamics nonlinear and the responses complicated : significant amplitude and frequency shifts are introduced, sub- and super-harmonics appear, and hysteresis occurs. It is of great importance to understand, predict and control this complicated dynamics. Due to the large number of DOFs and the broad range of study frequency, the computation time for solving the equations of motion by a temporal integration method can be quite prohibitive. It becomes particularly disadvantageous at the design stage where a parametrical study need to be quickly performed.

An alternative numerical method, which is general and effective at the same time, is proposed in order to analyse the nonlinear response of the rotors at steady state. Firstly, the periodic responses of nonlinear rotors are calculated in the frequency domain by combining harmonic balance method (HBM) and alternating frequency-time (AFT). With the help of continuation method, all dynamic equilibrium solutions of nonlinear systems are determined for the range of study frequency. Then, Floquet exponents which are the eigenvalues of Jacobian are sought for stability analysis of periodic solutions. Then the local stability of the periodic solution is analysed through the bifurcation indicators which are based on the evolution of Floquet exponents. The bifurcations of periodic solution branch, such as limit point, branch point, and Neimark-Sacker bifurcation, are thus detected. By declaring a system parameter (friction coefficient, rotor / stator gap, excitation amplitude, ...) as a new variable, applying once again the continuation method to the augmented system determines directly the bifurcation's evolution as a function of this parameter. Thus, parametric analysis of the nonlinear dynamic behaviour is achieved, the stability boundary or the regime change boundary is directly determined. Numerous developments are implemented in the calculation code Cast3M.

**KEYWORDS:** bifurcation tracking, Neimark-Sacker, nonlinear periodic solutions, rotating machinery dynamics, rotor-stator contact, model reduction, harmonic balance method, continuation method, Floquet theory, monodromy matrix.



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>Table des figures</b>	<b>v</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>ix</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 État de l’art bibliographique</b>	<b>3</b>
1.1 Dynamique des rotors . . . . .	5
1.1.1 Comportements vibratoires des machines tournantes . . . . .	6
1.1.2 Sources des instabilités . . . . .	7
1.1.3 Quelques sources de vibrations non linéaires . . . . .	9
1.2 Modélisation par éléments finis des machines tournantes . . . . .	13
1.2.1 Modélisation par des éléments de poutre . . . . .	14
1.2.2 Modélisation axisymétrique par modes de Fourier dans le repère tournant . . . . .	16
1.2.3 Modélisation par éléments finis massifs dans le repère tournant . .	16
1.2.4 Techniques de réduction de modèle . . . . .	18
1.3 Méthodes numériques de résolution . . . . .	19
1.3.1 Résolution temporelle . . . . .	19
1.3.2 Résolution fréquentielle . . . . .	20
1.3.3 Technique de continuation . . . . .	22
1.4 Stabilité et bifurcations . . . . .	23
1.4.1 Stabilité des solutions périodiques . . . . .	23
1.4.2 Bifurcations des solutions périodiques . . . . .	24
1.5 Analyse paramétrique directe du comportement dynamique non linéaire .	26
1.5.1 Suivi numérique pour l’étude paramétrique de la résonance . . . .	27
1.5.2 Localisation des bifurcations . . . . .	27
1.5.3 Frontière de stabilité . . . . .	28
1.6 Bilan du chapitre . . . . .	28
1.7 Positionnement de la thèse . . . . .	29

<b>2</b>	<b>Modélisation avec des éléments finis 3D du rotor</b>	<b>31</b>
2.1	Définition des repères . . . . .	33
2.2	Modélisation du rotor dans le repère tournant . . . . .	34
2.2.1	Equations cinématiques relatives aux rotors . . . . .	34
2.2.2	Équilibre d'un système dans le repère mobile . . . . .	36
2.2.3	Équations du mouvement dans le repère tournant . . . . .	39
2.3	Équation du mouvement du stator dans le repère fixe . . . . .	40
2.4	Liaison entre le rotor et le stator . . . . .	41
2.4.1	Condensation des déplacements du rotor et du stator . . . . .	41
2.4.2	Équations de liaison à l'interface . . . . .	42
2.5	Réduction du modèle . . . . .	42
2.5.1	Approximation sur la base des modes propres . . . . .	43
2.5.2	Sous-structuration dynamique de Craig-Bampton . . . . .	43
2.6	Validation du modèle avec éléments finis 3D en dynamique linéaire . . . . .	45
2.6.1	Comparaison modèle avec éléments finis 1D, modèle avec éléments finis 3D . . . . .	45
2.6.2	Influence de réduction du modèle . . . . .	48
2.7	Conclusion . . . . .	51
<b>3</b>	<b>Réponses forcées stationnaires et non-linéaires</b>	<b>53</b>
3.1	Méthode de l'équilibrage harmonique . . . . .	55
3.2	Continuation . . . . .	58
3.2.1	Pas Prédicteur . . . . .	58
3.2.2	Pas Correcteur . . . . .	59
3.2.3	Suivi robuste des solutions périodiques . . . . .	59
3.3	Prise en compte des non-linéarités par la méthode Temps-Fréquence . . . . .	61
3.3.1	Principe de la méthode AFT . . . . .	61
3.3.2	Expression des matrices jacobiennes . . . . .	63
3.3.3	Illustration sur l'oscillateur de Duffing . . . . .	65
3.4	Analyse de Stabilité . . . . .	67
3.4.1	Théorie de Floquet - Multiplicateurs de Floquet . . . . .	67
3.4.2	Méthode de Hill - Exposants de Floquet . . . . .	69
3.4.3	Illustration sur l'oscillateur de Duffing . . . . .	70
3.5	Prise en compte des spécificités liées à une modélisation du rotor dans le repère tournant . . . . .	72
3.5.1	Cinématique du rotor et du stator exprimés en harmonique . . . . .	74
3.5.2	Liaison entre rotor et stator . . . . .	75
3.5.3	Sous-structuration dans le domaine fréquentiel . . . . .	79
3.5.4	Efforts non-linéaires par AFT . . . . .	79
3.6	Exemples d'application . . . . .	82
3.6.1	Rotor de Jeffcott avec contact rotor-stator . . . . .	82
3.6.2	Rotor à 3 disques avec contact rotor-stator . . . . .	87
3.7	Conclusion . . . . .	90

---

<b>4</b>	<b>Suivi numérique pour analyse paramétrique directe des bifurcations</b>	<b>91</b>
4.1	Analyse paramétrique de la résonance . . . . .	93
4.1.1	Équation contrainte de la résonance . . . . .	93
4.1.2	Localisation un point de résonance . . . . .	93
4.1.3	Suivi de la résonance selon un paramètre variable . . . . .	94
4.1.4	Expressions des matrices jacobienne du système augmenté . . . . .	95
4.1.5	Exemple de l'oscillateur Duffing . . . . .	97
4.2	Analyse paramétrique des points de bifurcation . . . . .	99
4.2.1	Détection des bifurcations . . . . .	99
4.2.2	Localisation des points de bifurcations . . . . .	100
4.2.3	Expression des jacobienne . . . . .	105
4.2.4	Suivi direct des points de bifurcation . . . . .	106
4.3	Exemples d'application . . . . .	108
4.3.1	Oscillateur de Duffing . . . . .	108
4.3.2	Absorbeur de vibration non-linéaire . . . . .	113
4.3.3	Rotor de Jeffcott . . . . .	121
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>127</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>131</b>



# Table des figures

1.1	Exemple d'un diagramme de Campbell d'un rotor axisymétrique . . . . .	6
1.2	Exemple de la réponse au balourd d'un rotor axisymétrique. . . . .	7
1.3	Caractéristiques des réponses du rotor avec contact rotor-stator en fonction de la vitesse de rotation et du coefficient de frottement. (La ligne 'DF' indique la frontière à partir de laquelle la précession rétrograde est possible, et 'DW' indique où la précession rétrograde se déclenche avec la seule force de balourd. La ligne 'HP' correspond au suivi des bifurcations de Hopf, et donc à la transition entre les régimes périodiques et quasi-périodiques, tandis que 'SN' représente les points limites où la précession synchrone directe s'arrête. ) [JIA 09] . . . . .	12
1.4	Multiplicateurs de Floquet traversant le cercle unité dans le plan complexe et révélant les bifurcations. . . . .	24
1.5	Bifurcations des solutions périodiques. . . . .	25
1.6	Exposants de Floquet traversant l'axe imaginaire du plan complexe (LP : Point limite, BP : Point de branchement). . . . .	26
2.1	Définition des repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ . . . . .	33
2.2	Passage du repère fixe $\mathcal{R}$ au repère local $\mathcal{R}'$ en utilisant deux repères intermédiaires $\mathcal{R}^{i1}$ et $\mathcal{R}^{i2}$ . . . . .	34
2.3	Changement des repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ et point $P$ . . . . .	35
2.4	Vibrations autour d'un état d'équilibre . . . . .	36
2.5	Schémas des nœuds de contours et de la liaison rotor-stator . . . . .	41
2.6	Schémas du rotor à trois disques [LAL 98] . . . . .	46
2.7	Réponse au balourd au nœud du 2e disque, rotor modélisé par des éléments poutres avec différents maillages . . . . .	47
2.8	Modèle du rotor de 3 disques avec éléments volumiques (maillage le plus fin dans Tableau 2.3) . . . . .	47
2.9	Déformée modales avec les contraintes de Von-Mises en isovolume . . . . .	49
2.10	Réponse au balourd au nœud du centre du 2e disque, rotor modélisé par des éléments poutres (312 ddl) et volumiques (39339 ddl) . . . . .	49
2.11	Réponse au balourd du rotor modélisé par des éléments poutres et réduit par Craig-Bampton avec différents nombres de modes contraints . . . . .	50

2.12	Réponse au balourd du rotor modélisé par des éléments volumiques et réduit par la méthode de Craig-Bampton avec différents nombres des modes contraints . . . . .	51
3.1	Schéma de la HBM avec continuation. . . . .	60
3.2	Méthode de temps-fréquence. . . . .	62
3.3	Réponses de l'oscillateur de Duffing pour $k_{nl} = 5$ , avec différents nombre d'harmoniques retenues. . . . .	65
3.4	Réponses de l'oscillateur de Duffing pour $k_{nl} = 5$ , tracées par harmonique. . . . .	66
3.5	Amplitudes des coefficients de Fourier des quatre points sur la courbe de réponse de l'oscillateur de Duffing pour $k_{nl} = 5$ . . . . .	66
3.6	Réponse de l'oscillateur de Duffing pour $k_{nl} = 5$ . . . . .	72
3.7	Les multiplicateurs et exposants de Floquet dans le plan complexe, (a) et (d) sont les solutions instables. . . . .	73
3.8	Méthode Alternating Frequency-Time (AFT) pour construire $\mathbf{F}'_{nl}$ dans le repère tournant $\mathcal{R}'$ . . . . .	80
3.9	Organigramme du calcul d'un rotor 3D réduit par Craig-Bampton sous Cast3M. . . . .	81
3.10	Réponse au balourd du rotor de Jeffcott avec contact rotor-stator pour $\mu = 0.11$ . . . . .	82
3.11	Réponses au balourd du rotor de Jeffcott avec contact rotor-stator pour $\mu = 0.11$ , tracées par harmonique. . . . .	83
3.12	Amplitudes des coefficients de Fourier des quatre points sur la réponse au balourd du rotor de Jeffcott avec contact rotor-stator pour $\mu = 0.11$ . . . . .	84
3.13	Les multiplicateurs et exposants de Floquet dans le plan complexe, (b) et (c) sont des solutions instables. . . . .	85
3.14	Réponses au balourd du rotor de Jeffcott avec contact rotor-stator pour $\mu = 0.11$ , comparant avec les résultats obtenus par l'intégration temporelle. . . . .	86
3.15	Réponse temporelle du rotor en régime quasi-périodique pour $\mu = 0.11$ , $\omega/\omega_0 = 0.92$ . . . . .	86
3.16	Réponses au balourd du rotor de Jeffcott avec contact rotor-stator pour différents $\mu$ . . . . .	87
3.17	Réponses au balourd du rotor poutre avec contact rotor-stator pour différent $\mu$ . . . . .	88
3.18	Réponse au balourd du rotor poutre avec contact rotor-stator pour $\mu = 0.03$ , comparé avec l'intégration temporelle. . . . .	88
3.19	Modèle du rotor de 3 disques avec des EF 3D. . . . .	89
3.20	Réponses au balourd du rotor poutre et 3D avec contact rotor-stator pour $\mu = 0.1$ . . . . .	89
4.1	Schéma de la continuation pour le suivi des points de résonance. . . . .	94
4.2	Réponses de l'oscillateur duffing présentées en 3D pour $2\zeta = 0.1$ , $\omega_0 = 1$ , $p_0 = 0.5$ et $0 \leq k_{nl} \leq 10$ ; Suivi des points de résonance en fonction de $k_{nl}$ . . . . .	98

4.3	Réponses de l'oscillateur duffing présentées en 3D pour $2\zeta = 0.1$ , $\omega_0 = 1$ , $k_{nl} = 1$ et $0 \leq p_0 \leq 20$ ; Suivi des points de résonance en fonction de $p_0$ .	98
4.4	Réponse de l'oscillateur de Duffing pour $k_{nl} = 0.02$ avec localisation des bifurcations.	108
4.5	Réponse de l'oscillateur de Duffing pour $k_{nl} = 10$ avec localisation des bifurcations.	109
4.6	Réponse de l'oscillateur de Duffing pour $k_{nl} = 10$ par intégration temporelle avec balayages croissant et décroissant.	109
4.7	Réponses temporelles de Duffing illustrées dans l'espace des phases pour $k_{nl} = 10$ et $\omega = 0.52$ , $\omega = 0.82$ , $\omega = 1.5$ , $\omega = 3.5$ .	110
4.8	Suivi des points de bifurcation et réponses de l'oscillateur de Duffing pour $0 \leq k_{nl} \leq 10$ .	111
4.9	Suivi des points de bifurcation et réponses de l'oscillateur de Duffing pour $0 \leq k_{nl} \leq 10$ (Zoom de la Figure 4.8).	111
4.10	Projections des courbes de suivi de bifurcations.	112
4.11	Schéma de l'absorbeur de vibration non linéaire (NES).	113
4.12	Courbes de réponse de la masse principale $m_1$ pour $\varepsilon = 0.1$ , $\lambda_{NES} = 0.4$ , $A = 0.3$ plusieurs valeurs du coefficient de raideur non-linéaire $k_{NES} = 1, 3, 5, 7, 9$ . Réponses périodiques stables et instables.	114
4.13	Energie totale moyenne du système pour $\varepsilon = 0.1$ , $\lambda_{NES} = 0.4$ , $A = 0.3$ et $k_{NES} = 1, 3, 5, 7, 9$ . Solutions stables périodiques et quasi-périodiques.	115
4.14	Réponses quasi-périodiques pour $k_{NES} = 5$ et $\omega = 0.97$ , $\omega = 1$ , $\omega = 1.04$ .	116
4.15	Courbes de réponse et suivi des bifurcations NS pour $\varepsilon = 0.1$ , $\lambda_{NES} = 0.4$ , $A = 0.3$ et $k_{NES}$ variable.	116
4.16	Projections du suivi des bifurcations NS pour $\varepsilon = 0.1$ , $\lambda_{NES} = 0.4$ , $A = 0.3$ et $k_{NES}$ variable.	117
4.17	Energie totale moyenne du système pour $\varepsilon = 0.1$ , $\lambda_{NES} = 0.4$ , $k_{NES} = 5$ et $A = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ . Solutions stables périodiques et quasi-périodiques.	119
4.18	Courbes de réponse et suivi des bifurcations NS pour $\varepsilon = 0.1$ , $\lambda_{NES} = 0.4$ , $k_{NES} = 5$ et $A$ variable.	119
4.19	Projections du suivi des bifurcations NS pour $\varepsilon = 0.1$ , $\lambda_{NES} = 0.4$ , $k_{NES} = 5$ et $A$ variable.	120
4.20	Courbe de réponse du rotor de Jeffcott pour $\mu = 0.05$ .	122
4.21	Courbe de réponse du rotor de Jeffcott pour $\mu = 0.11$ .	122
4.22	Courbe de réponse du rotor de Jeffcott pour $\mu = 0.2$ .	122
4.23	Suivi des points de bifurcation et courbes de réponse du rotor de Jeffcott pour $0 \leq \mu \leq 0.4$ .	123
4.24	Projections des courbes de suivi de bifurcations sur le plan $\omega - \mu$ . Confrontation avec les résultats des Figures 4.20, 4.21 et 4.22.	123
4.25	Projections des courbes de suivi de bifurcations sur le plan $\omega - \mu$ . Identification des différentes zones de fonctionnement.	124



# Liste des tableaux

1.1	Revue des capacités des méthodes par éléments finis pour modéliser un rotor tournant [NAN 03]. . . . .	17
2.1	Analyse modale du rotor modélisé par des éléments poutres en fonction du nombre d'éléments . . . . .	46
2.2	Nombre total d'itérations et temps de CPU pour calculer la réponse au balourd. Modèle poutre avec différentes finesses de maillage . . . . .	47
2.3	Analyse modale du rotor modélisé par des éléments volumiques CUB8 ou CUB20 avec différentes finesses de maillage . . . . .	48
3.1	Evolution des valeurs propres de la matrice de monodromie en fonction du nombre de pas d'intégration sur une période par la méthode de Newmark. . . . .	71
3.2	Evolution des exposants de Floquet et des multiplicateurs correspondants en fonction du nombre d'harmoniques retenues. . . . .	71
3.3	Liaison du rotor et stator par les coefficients de Fourier dans le repère $\mathcal{R}'$ . . . . .	78
4.1	Coût de calcul du suivi de bifurcations pour le rotor de Jeffcott. . . . .	125



# Introduction générale

Les machines tournantes sont présentes dans la plupart des secteurs industriels : turbo-compresseur dans l'industrie automobile, turboalternateur des centrales nucléaires, ou turboréacteur dans l'aéronautique en sont quelques exemples. Les exigences de sécurité, de réduction des coûts et d'accroissements des performances poussent concepteurs, constructeurs et exploitants à créer des équipements technologiques de plus en plus avancés et à maîtriser leur comportement dans des situations normales ou exceptionnelles de fonctionnement.

En conséquence, les études vibratoires doivent intégrer de plus en plus fréquemment des sources de non-linéarité comme les paliers hydrodynamiques, la présence d'éventuelles fissures, les touches rotor-stator. Combinés à la rotation du système, ces éléments induisent des réponses complexes avec des décalages fréquentiels significatifs, des phénomènes d'hystérésis et un fort contenu d'harmoniques. Les non-linéarités présentes dans les rotors peuvent également conduire à des instabilités qui sont fortement indésirables : sauts d'amplitude, changements brutaux de régime dynamique (périodique à  $nT$  périodique, quasi-périodique, voire chaotique, etc).

Dans ce contexte, les simulations numériques contribuent fortement à la compréhension rapide du comportement dynamique du système modélisé si elles sont capables de prévoir l'évolution de la réponse en fonction des paramètres du système. Les études paramétriques sont souvent effectuées lors de la conception des machines et de diagnostics vibratoires pour obtenir la valeur du paramètre pour laquelle un indice de performance du système est optimisé, et pour maîtriser, voire contrôler, l'ensemble du comportement dynamique non linéaire.

Simuler les comportements non linéaires par une méthode classique d'intégration temporelle induit des coûts de calculs importants, voire prohibitifs, dans le cadre d'études paramétriques. Ainsi, une méthode numérique, à la fois efficace et générale, est développée afin d'analyser de façon paramétrique le comportement dynamique des rotors non linéaires.

Cette thèse poursuit donc les objectifs suivants :

- modéliser des systèmes tournants comportant des non linéarités,
- mettre en place des méthodes de résolution efficaces et générales afin de prévoir le comportement des structures en dynamique non linéaire,
- analyser la stabilité des solutions trouvées, afin d'identifier les éventuels changements de régime, mutations de stabilité, etc.
- mettre en place une méthode d'étude paramétrique pour accélérer l'étude du

système en dynamique non linéaire en évitant la redondance des calculs classiques, en identifiant directement la frontière de stabilité et les éventuels changements de régime.

Dans un premier chapitre, une synthèse bibliographique dresse un état de l'art de la modélisation des rotors. Elle donne une idée générale sur les méthodes d'approximation des rotors, la phénoménologie des rotors en présence de non-linéarités courantes, les méthodes de résolution et d'analyse dynamique des systèmes non-linéaires. Cela justifie l'organisation des chapitres suivants.

Le deuxième chapitre vise à mettre en place la modélisation du rotor maillé avec des éléments finis volumiques. Le rotor est construit dans le repère tournant qui lui est lié, et le repère Galiléen est utilisé pour le stator. Le couplage entre rotor et stator consiste à lier les inconnues cinématiques entre les deux repères. Est également abordée l'utilisation de techniques de condensation dynamique nécessaires afin de réduire la taille du système à résoudre en profitant de la précision des modèles de grande taille.

Ensuite, le troisième chapitre décrit l'ensemble des méthodes numériques pour déterminer la courbe de réponse des rotors en dynamique non linéaire. La méthode de l'équilibrage harmonique (HBM) est employée car elle facilite la résolution des problèmes périodiques en les traitant dans le domaine fréquentiel, tout en conservant la richesse du contenu fréquentiel des réponses. Son implémentation dans le cadre de la modélisation avec Cast3M, logiciel de calcul par éléments finis, met en évidence quelques spécificités illustrées. L'analyse de stabilité des solutions trouvées par HBM basée sur la théorie de Floquet détermine si la solution est physiquement acceptable (stable) ou pas (instable).

Pour atteindre le quatrième objectif, une méthode paramétrique basée sur les caractérisations des points d'intérêt (résonance, bifurcations) combinées avec la technique de continuation est proposée dans le quatrième chapitre. Cette extension de la technique de continuation conduit à effectuer une étude paramétrique des systèmes dynamiques non linéaires de manière directe. Les méthodes pour localiser et suivre de façon paramétrique ces points d'intérêt sont détaillées et des applications numériques concluent ce chapitre.

# Chapitre 1

## État de l'art bibliographique

*Le chapitre dresse l'état de l'art bibliographique de l'analyse numérique des vibrations linéaires et non linéaires des rotors.*

*Tout d'abord la dynamique des systèmes tournants est présentée. Le comportement vibratoire, les instabilités et les non-linéarités sont ensuite rappelés, puis une synthèse de littérature des méthodes d'approximation numérique est proposée. Les notions de stabilité et de bifurcations sont ensuite décrites. A la fin, nous nous intéressons aux outils décrits dans la littérature permettant d'effectuer une étude paramétrique du comportement dynamique non linéaire.*

## Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Dynamique des rotors</b> . . . . .	<b>5</b>
1.1.1	Comportements vibratoires des machines tournantes . . . . .	6
1.1.2	Sources des instabilités . . . . .	7
1.1.3	Quelques sources de vibrations non linéaires . . . . .	9
<b>1.2</b>	<b>Modélisation par éléments finis des machines tournantes</b> . . . . .	<b>13</b>
1.2.1	Modélisation par des éléments de poutre . . . . .	14
1.2.2	Modélisation axisymétrique par modes de Fourier dans le repère tournant . . . . .	16
1.2.3	Modélisation par éléments finis massifs dans le repère tournant . . . . .	16
1.2.4	Techniques de réduction de modèle . . . . .	18
<b>1.3</b>	<b>Méthodes numériques de résolution</b> . . . . .	<b>19</b>
1.3.1	Résolution temporelle . . . . .	19
1.3.2	Résolution fréquentielle . . . . .	20
1.3.3	Technique de continuation . . . . .	22
<b>1.4</b>	<b>Stabilité et bifurcations</b> . . . . .	<b>23</b>
1.4.1	Stabilité des solutions périodiques . . . . .	23
1.4.2	Bifurcations des solutions périodiques . . . . .	24
<b>1.5</b>	<b>Analyse paramétrique directe du comportement dynamique non linéaire</b> . . . . .	<b>26</b>
1.5.1	Suivi numérique pour l'étude paramétrique de la résonance . . . . .	27
1.5.2	Localisation des bifurcations . . . . .	27
1.5.3	Frontière de stabilité . . . . .	28
<b>1.6</b>	<b>Bilan du chapitre</b> . . . . .	<b>28</b>
<b>1.7</b>	<b>Positionnement de la thèse</b> . . . . .	<b>29</b>

---

## 1.1 Dynamique des rotors

Les machines tournantes telles que les turboalternateurs, turbines, turbo-compresseurs, pompes, compresseurs, moteurs, etc, jouent un rôle prépondérant dans les domaines de l'énergie, du transport, des biens, des équipements... Classiquement une machine tournante se compose d'un rotor monté dans un stator par des paliers et butées. Il peut y avoir plusieurs rotors montés en parallèle ou co-axialement. Le rotor est constitué d'un arbre portant des roues de turbine, de compresseur, d'engrenage, et des parties équipées d'un accouplement.

Il existe une vaste littérature sur la dynamique des rotors, comme les ouvrages de GENTA [GEN 99] [GEN 07], RAO [RAO 83], YAMAMOTO et ISHIDA [YAM 01], LALLANNE et FERRARIS [LAL 98], EHRICH [EHR 99], et MUSZYNSKA [MUS 05].

La vitesse de rotation des rotors leur confère une énergie cinétique importante qu'il convient de maîtriser. En effet, la présence d'imperfections génère des balourds distribués le long des lignes d'arbres qui sont source de vibrations dont l'amplitude doit rester faible afin de garantir le bon fonctionnement des installations. Ainsi, l'étude des vibrations des rotors est un sujet important pour l'industriel.

Sous les hypothèses de petits déplacements, de petit balourd, et d'un rotor linéaire axialement symétrique par rapport à son axe de rotation, la forme générale des équations différentielles du mouvement vibratoire du rotor est donnée par :

$$M\ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{C}(\Omega) + \mathbf{G}(\Omega))\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}(\Omega)\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (1.1)$$

avec

- $\mathbf{q}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{q}}(t)$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}(t)$  les vecteurs de déplacements et leurs dérivées,
- $M, C, G, K$  respectivement matrices de masse, amortissement, gyroscopique et raideur du système dont la construction dépend du choix de modélisation.

La rotation induit les efforts de balourd, les effets gyroscopiques (effet Coriolis dans le repère tournant), les effets centrifuges dans le rotor, la modification des caractéristiques des paliers hydrostationnaires. Les effets gyroscopiques se matérialisent par des matrices anti-symétriques et proportionnelles à la vitesse de rotation  $\Omega$  alors que les effets centrifuges et de balourd sont des efforts proportionnels à  $\Omega^2$ .

Les paliers, selon leur type (rigide, hydrodynamique ou roulement), introduisent quelquefois une raideur dissymétrique et un amortissement non-proportionnel.

Quelques aspects classiques de la dynamique des rotors sont abordés dans la suite de ce chapitre. Les notions de vitesses critiques, de réponses forcées, d'instabilités, ainsi que les sources possibles des vibrations non linéaires sont présentées afin d'introduire les principaux concepts de la dynamique non linéaire des rotors.

### 1.1.1 Comportements vibratoires des machines tournantes

Les machines tournantes sont soumises à diverses excitations extérieures. Celles-ci peuvent être asynchrones à la rotation du rotor, comme par exemple le poids, ou une force harmonique tournante à une autre vitesse que celle du rotor (moteur électrique...). Mais dans les rotors classiques, la force synchrone due au balourd n'est jamais absente. Elle peut être causée par des imprécisions d'usinage, de montage, d'usure, de la détérioration des éléments, voire par la perte d'une aube ou d'un autre élément.

L'étude dynamique du système revient donc à résoudre l'Eq. (1.1) en faisant varier la vitesse de rotation  $\Omega$ . Si l'équation sans second membre est choisie, alors un problème aux valeurs propres est résolu, et l'évolution des fréquences propres avec  $\Omega$  constitue le diagramme de Campbell. Si le second membre est harmonique, alors il s'agit le plus souvent d'obtenir la réponse en régime stationnaire. D'autres analyses (transitoire,...) sont possibles, mais les deux sus-citées caractérisant classiquement le comportement dynamique des machines tournantes sont les plus importantes pour l'ingénieur et sont donc présentées dans le paragraphe suivant.

#### Diagramme de Campbell (vitesse critique)

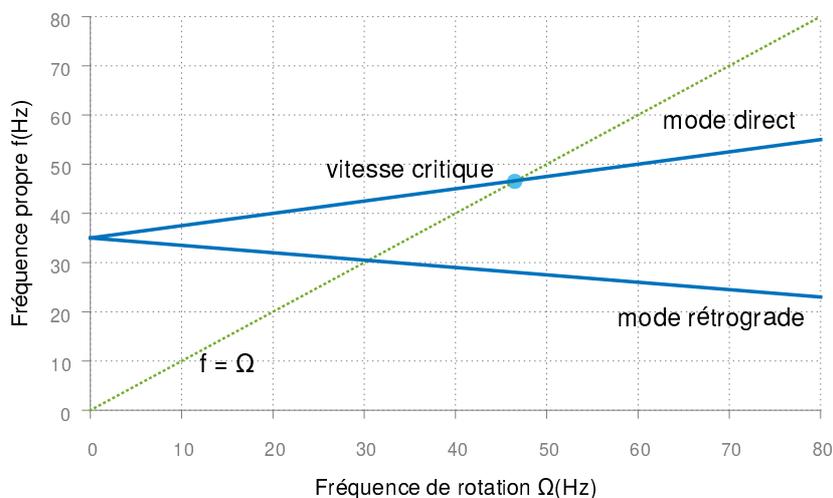


FIGURE 1.1: Exemple d'un diagramme de Campbell d'un rotor axisymétrique

En tenant compte les effets dus à la rotation, à savoir des effets gyroscopiques, et de l'impédance du palier qui dépend quelques fois aussi de la vitesse de rotation  $\Omega$ , les fréquences naturelles du rotor varient en fonction de  $\Omega$ . Le diagramme de Campbell est construit par ces fonctions. Des modes *directs* et *rétrogrades* sont distingués suivant que la précession du rotor s'effectue dans le sens identique ou inverse à la rotation. Pour des modes directs, les termes gyroscopiques augmentent leur fréquences propres, la courbe croît. Pour des modes rétrogrades, les fréquences propres diminuent à cause de l'effet gyroscopique, la courbe décroît.

L'excitation dans un système en rotation est généralement la force synchrone de balourd, qui est représenté par une bissectrice  $f = \Omega$ . Une vitesse de rotation est critique quand elle coïncide avec l'une des fréquences propres du système. Les vitesses critiques sont donc déterminées par l'intersection des droites d'excitation synchrone et les courbes des fréquences propres. Dans les rotors symétriques, les modes rétrogrades ne peuvent pas être excités par un balourd [EHR 99]. Parfois, les droites d'excitation  $f = n \cdot \Omega$  ou  $f = \Omega/n$  sont tracées pour détecter les résonances de sur- et sous-harmoniques.

### Réponse en régime permanent

Les balourds sont la principale source d'excitation des machines tournantes, dont la réponse en régime établi est tracée pour différentes vitesses de rotation sur une plage de vitesse couvrant le fonctionnement, voir l'exemple donné par la Figure 1.2. Cette réponse met en évidence les résonances dues aux vitesses de rotation qui correspondent aux fréquences des modes propres de précession directe pour des rotors symétriques.

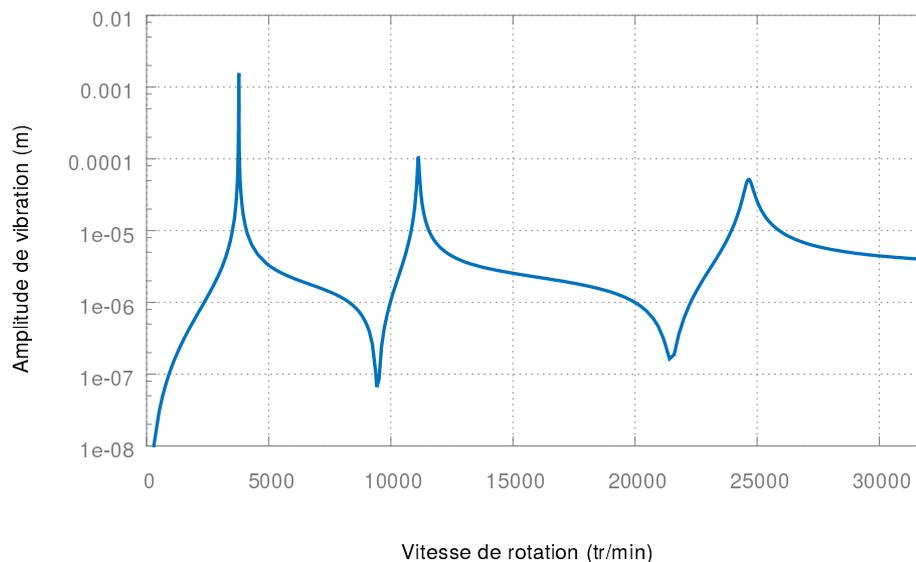


FIGURE 1.2: Exemple de la réponse au balourd d'un rotor axisymétrique.

Les outils présentés (le diagramme de Campbell et la réponse au balourd) caractérisent la dynamique du système. Bien que le diagramme de Campbell prévienne les vitesses critiques où la vibration atteint souvent des niveaux élevés (les résonances), cette approche n'est plus suffisante pour l'analyse de systèmes non linéaires car l'effort non linéaire peut modifier sensiblement le système et déplacer les résonances.

### 1.1.2 Sources des instabilités

La perte de stabilité se traduit par un changement de comportement dynamique. Le régime périodique peut devenir quasi-périodique,  $nT$  périodique, voire chaotique. Les changements brutaux de réponse peuvent avoir des conséquences préjudiciables.

Les causes d'instabilités d'un rotor peuvent être l'amortissement tournant, la présence d'un film d'huile (*oil whip* et *oil whirl*), des termes de raideurs croisées dans le couplage avec le palier, la dissymétrie du rotor, l'effet gyroscopique, les efforts axiaux, etc. Les paliers hydrodynamiques étant des composants non linéaires, ils seront traités à la section 1.1.3. L'amortissement tournant et la dissymétrie des supports sont abordés ci-après.

### **Amortissement tournant**

La partie de l'amortissement associée aux éléments immobiles (paliers, accouplement, interaction avec les fluide, etc) est nommé l'*amortissement non-tournant* (ou externe), l'autre partie associée au rotor est nommé l'*amortissement tournant* (ou interne)[GEN 07]. L'amortissement visqueux non-tournant est proportionnel à la vitesse de rotation et stabilise le mouvement. Quand le rotor est décrit dans le repère stationnaire, l'amortissement tournant est divisé en une partie proportionnelle à la vitesse de rotation donnant la matrice d'amortissement symétrique classique, et en une partie proportionnelle au déplacement donnant la matrice anti-symétrique dite d'*amortissement corotatif*. Cette dernière génère des forces circulatoires et est l'origine des instabilités à haute vitesse. Quand les forces de l'amortissement tournant deviennent supérieures à celles de l'amortissement externe, le mouvement devient instable.

Seul l'amortissement des éléments fixes peut limiter l'amplitude de vibration lors de la traversée des vitesses critiques.

### **Dissymétrie**

Généralement, les rotors sont axisymétriques. Ce n'est pas toujours le cas pour les stators. La dissymétrie des raideurs de supports change l'orbite circulaire du mouvement du rotor en orbite elliptique. En plus, les modes dans les plans vertical et horizontal sont différents. Sur le diagramme de Campbell, les modes directs et rétrogrades ont une fréquence différente même à vitesse nulle. De plus, les modes rétrogrades peuvent être excités par l'excitation synchrone. Cela double donc les vitesses critiques [LAL 98]. CHILDS [CHI 93] a également montré que l'introduction des paliers anisotropes dans les rotors peut décaler l'instabilité due à l'amortissement tournant.

Dans [MUS 96], MUSZYNSKA a étudié analytiquement et expérimentalement un rotor vertical supporté par des paliers anisotropes. Elle a observé la précession directe, la précession rétrograde, et aussi les deux comportements le long de l'arbre simultanément. Ces résultats sont validés par DIAS et al. [DIA 04] et d'autres études. Bien que rare, la dissymétrie du rotor est aussi étudiée dans la littérature. ONCESCU et al. [ONC 01] ont étudié les réponses permanentes et la stabilité d'un rotor avec une dissymétrie de l'inertie. Dans [LAZ 10], LAZARUS et al. ont proposé une modélisation par éléments finis tri-dimensionnel pour l'analyse vibratoire d'un rotor dissymétrique. NANDI [NAN 04] [NAN 05] a étudié un rotor avec un arbre dissymétrique supporté par des paliers anisotropes dans le repère tournant. Dans sa thèse, GRISIN [GRI 97] a étudié le comportement dynamique de rotors non symétriques couplés par engrenage (deux pompes 'ROOTS'). D'autres études combinent cette dissymétrie de l'inertie avec d'autres non-linéarités, comme CHEN et al. [CHE 07] qui ont étudié la dynamique d'un rotor fissuré avec des

supports asymétriques viscoélastiques, tandis que DIDIER et al. [DID 12] ont pris en compte les incertitudes.

### 1.1.3 Quelques sources de vibrations non linéaires

De nombreuses études concernant la dynamique du rotor traitent de la prise en compte de différents modèles de non-linéarités. Quelques non-linéarités fréquentes sont abordées ci-après.

#### Paliers non linéaires

Un premier type de non-linéarité concerne les rotors supportés par des paliers à roulements (voir HARRIS [HAR 01]), à cause du jeu et du contact entre le palier et le rotor. KIM et NOAH [KIM 90] ont étudié un simple rotor de type Jeffcott monté sur des paliers avec jeu par la méthode de la balance harmonique. Le contact a lieu lorsque l'excentricité est supérieure au jeu. Ce modèle à jeu radial est nommé *normal loose*, et est aussi utilisé par CHILDS [CHI 93]. Ce dernier montre que la vitesse critique et l'amplitude maximale de la résonance diminuent si le jeu radial augmente. Puis KIM et NOAH [KIM 91a] ont analysé les réponses forcées synchrones et la stabilité d'un modèle éléments finis de poutre représentant un rotor supporté par un palier linéaire à l'extrémité et un autre non linéaire au milieu. La non-linéarité due au jeu est modélisée par une raideur linéaire par morceau. Dans [KIM 96], ils ont exposé les réponses quasi-périodiques du rotor de Jeffcott avec jeu au niveau du palier en utilisant un modèle à raideur radiale bilinéaire, tandis que KARPENKO et al. [KAR 02] ont aussi utilisé ce modèle pour démontrer la possible présence de régimes chaotiques pour ce type de rotor non linéaire.

Un autre modèle prenant en compte la cinématique des éléments roulants existe dans la littérature (voir LIM et SINGH [LIM 90]), et étudie les défauts des éléments roulants et l'ondulation des pistes de roulement, voir JANG et JEONG [JAN 04]. Dans HARSHA [HAR 06], l'effet du jeu radial est étudié par l'intégration numérique circonférentielle tandis que TIWARI et al. [TIW 00] ont mené les études numériques et expérimentales sur le même modèle. L'influence sur la dynamique d'un rotor flexible des paliers à roulements avec jeu radial sont étudiés par VILLA et al. [VIL 08] où la cinématique des éléments roulants est prise en compte.

Les paliers hydrodynamiques sont un autre type de paliers où la vitesse de l'arbre génère une pression dans le fluide (l'huile ou l'air pour les paliers aérodynamiques) assurant un certain effort entre les interfaces. Dans l'industrie, les paliers fluides sont fréquemment utilisés dans le cas d'une charge élevée, de haute vitesse ou de haute précision, lorsque les roulements à billes ordinaires ont une durée de vie trop courte ou entraînent du bruit et de fortes vibrations. De plus, les paliers fluides nécessitent peu de maintenance.

Cependant, les efforts dans les paliers ne sont pas toujours faciles à estimer. Un grand nombre de paramètres influence sensiblement la force du film fluide comme par exemple la longueur du palier, le jeu radial, la forme du palier, le modèle choisi pour la cavitation, l'étanchéité aux limites, la température (qui influence la viscosité de fluide), etc...

En plus, la force hydrodynamique est une fonction non linéaire des déplacements et vitesses du rotor au niveau du palier. Le premier modèle de palier court est développé par OCVIRK [OCV 52] en négligeant la contribution circonferentielle du gradient de pression dans l'intégration de l'équation de Reynolds [FRÊ 97]. HOLMES et al. [HOL 78] ont utilisé ce modèle de palier court pour étudier la dynamique non linéaire d'un rotor rigide supporté par deux paliers hydrodynamiques. Les mouvements asymptotiquement périodiques et non-périodiques (complexe) du rotor ont été exposés. Un rotor rigide avec des paliers courts est aussi étudié par BROWN [BRO 94], qui observe des mouvements chaotiques du rotor. CHEN et YAU [CHE 98] [CHE 01] ont effectué des études paramétriques sur la dynamique non linéaire d'un rotor flexible sur des paliers longs et courts. Un modèle éléments finis d'un rotor flexible supporté par des paliers elliptiques est étudié par ZHENG et HASEBE [ZHE 99]. Les auteurs de [ZHA 05] (ZHAO et al.) ont comparé la force non linéaire et linéarisée du film d'huile pour un rotor de type Jeffcott supporté par des paliers hydrodynamiques. L'utilisation de la force hydrodynamique linéarisée n'est pas valable pour une excitation de balourd relativement forte.

Les paliers amortisseur de type squeeze film sont un cas particulier des paliers hydrodynamiques et sont constitués d'une cavité annulaire remplie de fluide entourant la bague extérieure d'un palier à roulement. Ils sont beaucoup utilisés dans l'industrie pour des machines tournantes à haute vitesse afin de réduire la réponse synchrone, en particulier lors de la traversée de vitesses critiques, ou pour éliminer des problèmes d'instabilité du rotor.

COOKSON et KOSSA comparent l'efficacité de l'amortisseur squeeze film agissant sur un rotor rigide pour différentes configurations en fonction de trois paramètres du palier et du rotor dans [COO 79]. Plus tard, l'étude est effectuée sur un rotor flexible où la performance des paliers est exprimée en fonction de six paramètres différents dans [COO 80]. NATARAJ et NELSON [NAT 89] et ZHAO et al. [ZHA 94] ont exposés les réponses périodiques, quasi-périodiques des rotors rigides montés sur des paliers excentrés munis de squeeze film. INAYAT-HUSSAIN et al. ont mené une série d'analyses dynamiques non linéaires, incluant les bifurcations de rotors rigide ou flexible supportés par des paliers munis de squeeze-film sans ou avec un ressort de centrage [INA 01] [INA 02] [INA 03] [INA 06] [INA 09].

### **Fissure respirante**

La présence d'une fissure de fatigue dans une machine tournante est susceptible d'entraîner la défaillance catastrophique en très peu de temps sans avertissement. Sa détection est donc très importante. Les caractéristiques mécanique d'un rotor avec une fissure localisée sont donc beaucoup étudiées à travers des approches numériques et expérimentales (voir DIMAROGONAS [DIM 96], BACHSCHMID et al. [BAC 10], et ISHIDA [ISH 08]).

Une modélisation simple de la fissure sur l'arbre consiste à modifier la flexibilité locale par un élément de poutre de section droite plus faible (voir SPRINGER et al. [SPR 87]), mais elle surestime le changement des vitesses critiques par rapport aux modèles de rotor avec une fissure de fermeture [BOV 15]. La fissure de fermeture, ou

de respiration, est un modèle qui décrit le fait qu'une fissure s'ouvre et se ferme au cours du temps. La présence de ce mécanisme se rencontre uniquement dans les rotors où le poids propre contribue notablement à la déflexion. Il s'agit de prendre en compte la modification de la flexibilité locale due à la fissure, et ensuite modéliser le phénomène de fermeture cyclique (respiration) de la fissure.

PAPAECONOMOU et DIMAROGONAS [PAP 89] ont déterminé la matrice de flexibilité dans une section rectangulaire des éléments de poutre avec fissure transversale à l'aide de la méthode de restitution d'énergie. La recherche de différentes approches basées sur la méthode de restitution d'énergie pour la modélisation des fissures dans les rotors a été accomplie par PAPADOPOULOS [PAP 08].

La variation de la matrice de flexibilité dans le temps est définie de différentes façons. La première façon appelé *switching model* où la fissure passe de l'état ouvert à l'état fermé instantanée. Pour prévoir l'état de la fissure, le signe du facteur d'intensité de contrainte (SIF) dans la section fissurée est utilisé voir JUN et al. [JUN 92], DARPE et al. [DAR 04]. Quand le signe est positif, la fissure est ouverte ; lorsque le signe est négatif, la fissure est fermée. Dans MAYES et DAVIES [MAY 84], la fonction respiratoire de la fissure est modélisée par une fonction trigonométrique de l'angle de rotation :

$$f(t) = \frac{1 - \cos \Omega t}{2} \quad (1.2)$$

Cette fonction varie entre 0 et 1 et représente la fermeture et l'ouverture de la fissure.

Dans la littérature, la fissure transversale est la plus étudiée. Un rotor de Jeffcott avec une fissure inclinée d'orientation arbitraire est étudié par RAMEZANPOUR et al. [RAM 12]. Pour des fissures de forme plus complexe, une modélisation en trois dimensions est nécessaire. Une première étude est faite par ANDRIEUX et VARRE [AND 02] où un rotor avec une formulation tri-dimensionnelle éléments finis est étudiée sous un chargement statique.

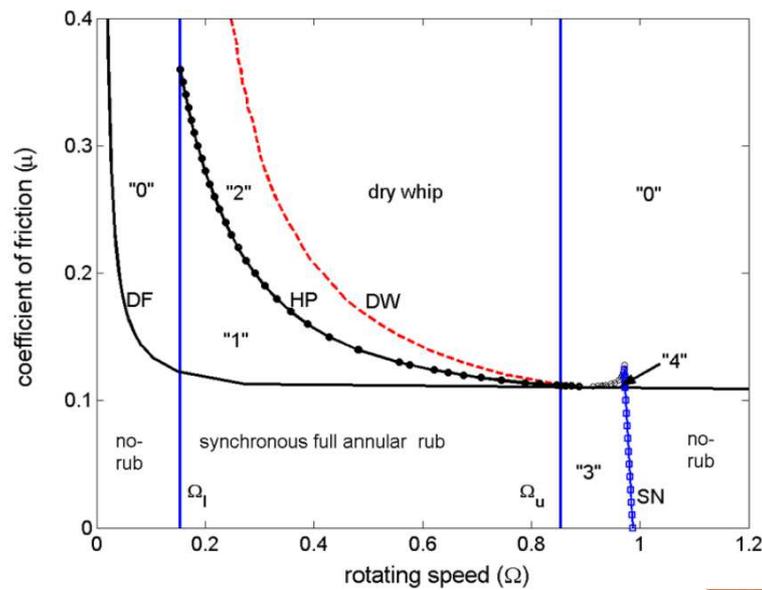
### Contact Rotor-Stator

De nombreuses études sont consacrées à l'interaction entre rotor et stator car le contact entre les parties tournantes et les parties fixes, par exemple entre le sommet des aubes et le carter, risque de compromettre la sécurité de fonctionnement. BATAILLY et al. [BAT 08] [BAT 10] a étudié ces phénomènes d'interaction dans les turbo-machines aéronautiques sur des modèles 2D simplifiés avec l'analyse de la sensibilité des régimes d'interaction à la taille des modèles réduits, puis sur des modèles 3D industriels [LEG 12]. PARENT [PAR 15] a aussi mené une étude sur la stabilité en contact rotor-stator dans les turboréacteurs d'avion. Le modèle dit 3D du contact introduisant de manière précise la géométrie locale de la zone de contact est utilisé.

Plusieurs modèles de contact existent. Un contact unilatéral interdit que le mouvement du rotor dépasse le jeu initial (qui correspond à la réalité). Le modèle du contact unilatéral avec rebond impose au point de contact l'inverse du signe de vitesse normale, qui s'exprime par

$$v_n^{\text{après}} = -\beta v_n^{\text{avant}} \quad (1.3)$$

avec  $\beta$  le coefficient de restitution. Son application est souvent couplée avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Un autre modèle autorise la pénétration avec du frottement qui permet le rotor traverse le jeu initial. Dans [CHO 01], CHOI et BAE ont montré que le modèle de pénétration linéaire par morceau (*piecewise-linear*) donne des résultats plus cohérents avec les mesures expérimentales que le contact avec rebond.



**FIGURE 1.3:** Caractéristiques des réponses du rotor avec contact rotor-stator en fonction de la vitesse de rotation et du coefficient de frottement. (La ligne 'DF' indique la frontière à partir de laquelle la précession rétrograde est possible, et 'DW' indique où la précession rétrograde se déclenche avec la seule force de balourd. La ligne 'HP' correspond au suivi des bifurcations de Hopf, et donc à la transition entre les régimes périodiques et quasi-périodiques, tandis que 'SN' représente les points limites où la précession synchrone directe s'arrête. ) [JIA 09]

De nombreux phénomènes dynamiques accompagnent le contact rotor-stator. EHRICH et OCONNOR [EHR 67] ont démontré que le rotor tournant mis en contact avec le stator peut entraîner un mouvement du stator en précession directe. Ces phénomènes sont montrés aussi dans le travail de BLACK [BLA 68], VON GROLL et EWINS [VON 01], ISMEURT [ISM 95] et DURAN et al. [DUR 15]. Le rotor frotte en permanence contre le stator qui décrit un mouvement synchrone annulaire. Des sauts d'amplitude (effet d'hystérésis) sont observés lors de la montée (ou descente) en vitesse de rotation. Mais ce phénomène où le rotor et le stator ont uniquement des mouvements synchrones stables n'existe que pour un coefficient de frottement faible.

La force de contact génère un frottement qui s'oppose à la direction de précession. Quand le coefficient de frottement est important, le rotor suit un mouvement de précession inverse. Dans [CHO 87] CHOY et PADOVAN ont exposé les réponses transitoires d'un rotor avec contact. MUSZYNSKA [MUS 96] a étudié un rotor vertical avec des supports

anisotropes analytiquement et expérimentalement. KU [KU 98] a analysé le mouvement rétrograde d'un modèle éléments finis. Dans [PAT 08], PATEL et DARPE ont couplé le contact avec un rotor fissuré, et des mouvements de précession inverse sont aussi observés.

Il existe aussi une phase où le rotor touche le stator de manière intermittente. Une fois le rotor mis en contact avec le stator, la force de réaction du stator repousse suffisamment le rotor pour le décoller. Le rotor présente un mouvement quasi-périodique dû au contact partiel. Des mouvements chaotiques sont aussi souvent observés quand la fréquence d'excitation augmente. CHU et ZHANG [CHU 98] ont analysé un rotor simplifié de Jeffcott, QIN et al. [QIN 04] ont modélisé un rotor cantilever, ZHANG et MENG [ZHA 06] ont traité un micro-rotor dans les MEMS (micro-électromagnétiques), en prenant en compte le contact entre rotor et stator. Ils ont tous observé des mouvements périodiques (précession directe ou inverse), quasi-périodiques (contact partiel) et chaotiques du rotor.

L'article de JIANG [JIA 09] est assez représentatif des aspects phénoménologiques du rotor mis en contact avec un stator fixe. Les résultats analytiques de la Figure 1.3 montrent la coexistence des réponses possibles d'un rotor de Jeffcott en fonction de la vitesse de rotation et du coefficient de frottement. Différentes zones sont distinguées par les lignes dessinées. Dans la zone "0", le mouvement sans contact et le mouvement en précession inverse coexistent. Puis les zones "1", "2" indiquent les plages où la précession inverse coexiste avec le mouvement en précession directe (contact annulaire) et le mouvement quasi-périodique (contact partiel) respectivement. La zone "3" est la zone où le mouvement sans contact coexiste avec la précession directe. PELETAN et al. [PEL 14] ont étudié le même système et confirmé ces frontières numériquement.

## 1.2 Modélisation par éléments finis des machines tournantes

Après avoir parcouru les comportements généraux des rotors non linéaires, il convient de prévoir ces comportements par une approche numérique.

Dans les simulations, pour étudier la dynamique d'une structure réelle, plusieurs techniques d'approximation numérique peuvent être utilisées. Ce choix dépend notamment du type de problème à traiter. Avant d'aborder la modélisation par éléments finis, plusieurs méthodes d'approximation analytique sont présentées.

Un rotor peut être considéré comme rigide quand il fonctionne à une vitesse sensiblement inférieure à celle du premier mode de flexion (voir [EHR 99]). En effet, sous l'hypothèse que les éléments tournants ne se déforment pas, les études élémentaires sont plus facilement effectuées pour des rotors dont la non-linéarité est introduite par les paliers. Ainsi, beaucoup d'études de rotors supportés par des paliers hydrodynamiques sont menées sous l'hypothèse d'un rotor rigide (voir ZHAO et al. [ZHA 94], COOKSON et KOSSA [COO 79], et la série du travail de INAYAT-HUSSAIN et al. [INA 01] [INA 02] [INA 03] [INA 06], et les études récentes de CHEN et al. [CHE 14], ADILETTA [ADI 15] sur les rotors supportés par des amortisseurs du type squeeze-film). Le rotor ri-

guide est modélisé par deux degrés de liberté (ddl) décrivant directement les déplacements au niveau du palier. Cela facilite beaucoup l'intégration des effets du palier dans le modèle et les résolutions analytiques et numériques.

Le rotor de type Jeffcott est un modèle simplifié à paramètres localisés représentant un rotor symétrique avec un disque au milieu de l'arbre supporté par des paliers identiques aux extrémités. Il est souvent utilisé comme modèle de rotor flexible pour étudier l'effet introduit par des paliers non linéaires (voir ZHU et al. [ZHU 02], ZHAO et al. [ZHA 05]). Dans ce cas, le système est souvent simplifié à 4 ddl dont 2 pour les déplacements au niveau du disque où se trouve la masse concentrée du rotor, et 2 ddl au niveau du palier liés aux effets hydrodynamiques. Bien que l'effet gyroscopique soit négligé, ainsi que les autres effets de rotation, ce modèle de Jeffcott a l'avantage d'être assez simple mais aussi représentatif en tant que rotor idéal et constitue un bon système de base pour étudier les effets des autres éléments d'un rotor, comme les paliers non linéaires (voir COOKSON et KOSSA [COO 80], KIM et NOAH [KIM 96]), les touches du rotor et stator (voir CHU et ZHANG [CHU 98], PELETAN et al. [PEL 14], DURAN et al. [DUR 15]), les fissures (voir DARPE et al. [DAR 04], ZHANG et MENG [ZHA 06], ISHIDA [ISH 08]), etc. Les équations de mouvement sont faciles à construire et à résoudre analytiquement et numériquement.

La méthode de Rayleigh-Ritz établit un modèle simple de rotor en séparant les descriptions temporelles et spatiales de la solution. Le choix de la forme spatiale de la solution est guidé par une connaissance a priori du système (voir LALANNE et FERRARIS [LAL 98], DUCHEMIN et al. [DUC 06], DRIOT et al. [DRI 09], DUFOUR et BERLIOZ [DUF 98], BOU-SAID et al. [BOU 07]). Le modèle mis en place possède un nombre réduit de ddl, et permet de mettre en évidence les phénomènes classiques et de montrer l'influence des différents éléments sur le comportement dynamique du rotor.

La méthode des éléments finis est probablement la méthode la plus utilisée pour les simulations numériques dans tous les domaines mécaniques, dont la dynamique des rotors. Avec cette méthode, le type d'éléments et la finesse du maillage sont modifiables selon la géométrie et les propriétés de la structure à modéliser. De plus, avec les développements récents en termes de capacité de calcul, un grand nombre de ddl est beaucoup moins contraignant. Ainsi, une discrétisation fine pour une description plus complète du système à étudier est possible. Nous citons ici quelques ouvrages présentant la méthode des éléments finis de manière non exhaustive, appliquée ou non à la dynamique des rotors, voir NELSON et MCVAUGH [NEL 76], GENTA [GEN 99] [GEN 07], LALANNE et FERRARIS [LAL 98], ZIENKIEWICZ et TAYLOR [ZIE 00], GERADIN et CARDONA [GÉR 01].

### 1.2.1 Modélisation par des éléments de poutre

La modélisation avec des éléments finis 1D du rotor est largement utilisée pour les rotors simples. L'arbre est modélisé par des éléments de poutre et les disques sont modélisés par des éléments de corps rigides. Ce modèle est souvent suffisamment précis pour les études et son implémentation et son utilisation sont très aisées.

Pour une structure élancée et soumise à une excitation appliquée perpendiculairement à un axe longitudinal tel qu'un rotor soumis à une force de balourd, les modes de flexion sont prédominants. L'équation du mouvement d'une poutre vibrante de Bernoulli a tendance à surestimer les fréquences propres de la poutre et a été légèrement améliorée par Rayleigh en 1877 par l'ajout d'une rotation au plan moyen. En 1921, Stephen Timoshenko améliore la théorie en incorporant l'effet du cisaillement dans la réponse dynamique de poutres de flexion. Cela a permis à la théorie d'être utilisée pour les problèmes impliquant les hautes fréquences de vibration où la théorie d'Euler-Bernoulli est insuffisante.

Les premiers travaux d'un rotor modélisé par la méthode des éléments finis sont dus à Nelson et al. [NEL 76]. Les effets d'inertie de rotation, de charges axiales et d'efforts gyroscopiques sont pris en compte dans la modélisation par des éléments de poutre de type Rayleigh. Ensuite, plusieurs éléments de l'arbre ont été développés pour introduire des déformations de cisaillement [NEL 80]. ONCESCU et al. [ONC 01] ont discrétisé le système rotor-palier par la méthode des éléments finis en utilisant des poutres de type Rayleigh-Bernoulli en prenant en compte l'effet de la dissymétrie de l'arbre et du palier. NANDI [NAN 04] a présenté une méthode de réduction pour le modèle basé sur la poutre de Rayleigh d'un rotor dissymétrique supporté par les paliers non-isotropes dans le repère tournant.

Une formulation éléments finis du système de rotor non linéaire dont l'arbre est modélisé par des éléments de poutre d'Euler-Bernoulli est utilisée dans nombreuses études, par exemple, pour un rotor supporté par un palier linéaire et un autre non linéaire avec jeu (voir KIM et NOAH [KIM 91a]), un rotor supporté par des paliers à roulements (voir VILLA et al. [VIL 08]), un rotor avec fissure (voir HAN et CHU [HAN 13]), etc. Le type d'élément de poutre de Timoshenko est le plus utilisé car il fournit une approximation précise du comportement de l'arbre, par exemple, pour modéliser un rotor supporté par des paliers elliptiques (voir ZHENG et HASEBE [ZHE 99]), un système rotor-palier soumis à des excitations de type choc par la base (voir LEE et al. [LEE 06]), un rotor monté sur des paliers hydrodynamique poreux (voir LAHA et KAKOTY [LAH 11]), etc.

Plusieurs variantes de la théorie de poutre existent pour des géométries plus complexes, par exemple pour une section creuse ou conique voir ROUCH et KAO [ROU 79], VEST et DARLOW [VES 90], et KUMAR et al. [KUM 97]. Dans STEPHENSON et al. [STE 89] et VEST et DARLOW [VES 90], les auteurs ont démontré que l'hypothèse selon laquelle les sections planes normales restent planes après déformation n'est pas respectée lors d'un changement brutal du diamètre de section. Les éléments de poutre ne peuvent pas modéliser correctement les distorsions de l'arbre creux et conique. Un élément de poutre avec module corrigé est proposé dans [VES 90] pour pallier ce problème.

Cependant, les rotors n'ont pas tous une géométrie adéquate pour la modélisation 1D. En plus, les disques sont souvent modélisés par des masses localisées en supposant qu'ils soient infiniment rigides. Cela ne permet pas de prendre en compte tous les effets éventuels dans le rotor, comme l'influence de l'interface du disque et de l'arbre, des composantes complexes ou asymétriques, l'effet centrifuge, etc.

### 1.2.2 Modélisation axisymétrique par modes de Fourier dans le repère tournant

D'abord, un système parfaitement axisymétrique peut être simplifié en le décrivant dans le plan  $(r, z)$ ,  $\theta = 0$  (voir ZIENKIEWICZ et TAYLOR [ZIE 00]). Cette approche analytique transforme un problème tri-dimensionnel en un problème bi-dimensionnel et réduit remarquablement la taille du système. Mais pour que le modèle soit valide, la géométrie, les propriétés des matériaux, les conditions aux limites et les chargements doivent tous être axisymétriques. Ainsi l'utilisation de cette approche est très limitée.

La méthode de modélisation par modes de Fourier d'un système axisymétrique est une méthode semi-analytique développée depuis cinquante ans [WIL 65]. Elle utilise des développements en série de Fourier afin de réduire un modèle à trois dimensions à un modèle harmonique à deux dimensions et afin de calculer la solution en tant que superposition des résultats de l'analyse de chaque composante harmonique. STEPHENSON et al. [STE 89][STE 93] ont proposé d'utiliser des éléments finis solides axisymétriques pour modéliser des rotors. Cette méthode peut traiter efficacement les distorsions de sections. Mais à cause de la difficulté d'application des excitations, son utilisation est peu aisée pour les études non linéaires. De même que pour la méthode précédente, le système à étudier doit être axisymétrique ou cyclique pour pouvoir être discrétisé en série de Fourier. Ainsi, peu d'applications de cette approche pour les rotors figurent dans la littérature (voir CHATELET et al. [CHA 02], NANDI et NEOGY [NAN 05], GHOSH et al. [GHO 09], COMBESCURE et LAZARUS [COM 08]).

### 1.2.3 Modélisation par éléments finis massifs dans le repère tournant

Sans considération sur le coût de la modélisation et du calcul associé, la méthode la plus générale consiste à modéliser le rotor non linéaire par des éléments finis massifs en trois dimensions. Les rotors industriels ont souvent des interfaces compliquées avec des interactions entre différents composants. En outre, la prise en compte d'un phénomène localisé (de type fissure, contact, impact) en se basant sur les modèles globaux et analytiques n'est pas toujours précise et une étude basée sur un mono-modèle tridimensionnel fin est alors nécessaire.

	Rotary inertia	Gyroscopic effect	Shear deformation	Prismatic solid or hollow cross-section		Tapered			Abrupt change in cross-section	
				Axi-symmetric	Two principal axes	Solid axisymmetric	Two principle axis	Hollow axisymmetric	Axi-symmetric	Non axisymmetric
Rayleigh Shaft element [NEL 76]	✓	✓		✓	✓					
Conical shaft element based on Timoshenko beam [GEN 88] [NEL 80]	✓	✓	✓	✓		✓		✓		
Modulus corrected elements [VES 90]	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
Axi-symmetric finite elements [STE 89]	✓	✓	✓	✓		✓		✓	✓	
Three-dimensional solid finite element [NAN 05]	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

**TABLE 1.1:** Revue des capacités des méthodes par éléments finis pour modéliser un rotor tournant [NAN 03].

Lors de la flexion du rotor, l'amplitude de l'effort centrifuge est proportionnelle au déplacement radial des points de l'élément dans la section transversale et au carré de la vitesse de rotation du rotor. Cet effet centrifuge est négligé dans l'étude de BOSSAK et ZIENKIEWICZ [BOS 73], SREENIVASAMURTHY et RAMAMURTI [SRE 81]. Cependant, dans l'étude de NANDI et al. [NAN 01], il est observé que cet effet centrifuge ne peut pas être négligé, même dans une analyse en petits déplacements. Les auteurs ont proposé une formulation éléments finis autorisant le gauchissement dans le plan des sections transversales et donc la prise en compte de l'effet gyroscopique. Plus tard, NANDI [NAN 03] a proposé une autre méthode pour considérer l'effet centrifuge dans l'analyse des rotors. Les mêmes équations de mouvement sont résolues en deux fois séparément : une fois sur la configuration originale pour évaluer l'effet centrifuge et une autre sur la configuration déformée. Un système rotor-fuselage subissant d'importantes manœuvres d'angle est étudié par BAUCHAU et al. [BAU 04]. Dans [CHA 05], CHATELET et al. ont étudié la dynamique d'un ensemble de turbomachines en rotation grâce à la modélisation des rotors en 3D. LAZARUS et al. [LAZ 10] ont étudié un rotor asymétrique avec paliers non-isotropes modélisé par des éléments finis 3D en prenant en compte le couplage entre rotor et stator. Les modèles d'éléments 3D massifs sont utilisés pour modéliser des géométries complexes, des couplages fins entre composants, afin de chercher la réponse du rotor en prenant en compte des effets gyroscopique, centrifuge, et non linéaires.

Un résumé des principales caractéristiques des formulations éléments finis présentées précédemment est donné dans le Tableau 1.1, ainsi que les cas qu'elles sont capables de modéliser NANDI [NAN 03]. Ce tableau montre que les modèles de poutre et axisymétrique peuvent s'appliquer à un nombre limité de rotors. Ils sont principalement limité par la géométrie et les conditions aux limites. Lorsque le rotor est soumis à une force non régulière (par exemple l'interaction fluide-structure), les hypothèses axisymétrique et cyclique s'appliquent difficilement, ce qui justifie l'utilisation des éléments finis massifs pour modéliser ces rotors en 3D.

### 1.2.4 Techniques de réduction de modèle

Le modèle peut impliquer une géométrie complexe de l'arbre, des paliers, et des composants attachés tels que des disques, des lames, des accouplements, etc, et donc facilement atteindre un nombre élevé de ddl lors de la modélisation par éléments finis massifs. L'application d'une méthode de réduction est indispensable pour maintenir un temps de calcul raisonnable tout en conservant la précision nécessaire à l'interprétation physique du calcul sur la plage de fréquence de fonctionnement.

Comme la réduction est souvent nécessaire pour un modèle éléments finis 3D, beaucoup de chercheurs ont mené des études sur ce sujet. Dans l'ouvrage [ANT 05], ANTOULAS a présenté exhaustivement les méthodes pour réduire la taille des modèles des systèmes dynamique à grande échelle, avec application aux problèmes de calcul de structure, de transfert de chaleur, électronique, etc. Son étude la plus récente [ANT 09] a donné un bref aperçu sur la méthode de réduction basée sur la SVD (*Singular Value Decomposition*) et la méthode de Krylov. Il a trouvé que la réduction du modèle peut être effectuée

par une troncature équilibrée grâce à la méthode de Krylov mais le calcul n'est pas assez efficace.

La revue de WAGNER et al. [WAG 10] se concentre spécifiquement sur les systèmes dynamiques des rotors. Des méthodes de réduction pour la modélisation, l'analyse et le contrôle des rotors sont présentés brièvement, ainsi qu'une discussion sur les outils d'évaluation des méthodes de réduction. Dans la réduction modale, la sélection de modes à retenir est faite en incluant les fréquences jusqu'à au moins deux fois la fréquence d'intérêt. Dans les méthodes de décomposition en sous-domaines, les ddl des interfaces, la discrétisation du système, et les modes à retenir pour chaque sous-domaine sont déterminés par l'utilisateur. L'utilisation des méthodes nécessite donc des connaissances a priori pour choisir les paramètres appropriés. Des critères sont donc présentés pour qualifier la réduction et la similarité dynamique par rapport au modèle complet : l'erreur sur la fréquence naturelle, le coefficient de corrélation du vecteur propre, la norme Hankel, etc. Dans la thèse de PELETAN [PEL 12], une synthèse bibliographique sur les méthodes de réduction des rotors en dynamique non linéaire est décrite de façon approfondie. Y sont présentés plusieurs types de méthodes : projections modales en linéaire (voir BATAILLY et al. [BAT 10]), décomposition de domaine du système (voir COUDEYRAS et al. [COU 09]), et l'utilisation de modes non linéaires (voir KERSCHEN et al. [KER 09], PEETERS [PEE 09]), PESHECK et al. [PES 01] [PES 02], VILLA et al. [VIL 05], BATAILLY et al. [BAT 07], et LAXALDE et al. [LAX 09] [LAX 11].

La méthode de réduction basée sur les modes non linéaires est très récente. Comme son utilisation n'est pas courante ni triviale pour les structures de l'industrie, on lui préfère la méthode de sous-structuration dynamique de Craig-Bampton qui est bien adaptée aux rotors avec non-linéarité localisées : les ddl de contour (ddl qui portent les non-linéarités) sont conservés ainsi que les variables modales du rotor bloqué sur ses ddl de contour.

## 1.3 Méthodes numériques de résolution

Les équations à résoudre sont les équations du mouvement provenant de la discrétisation par la méthode éléments finis. En tant qu'équations différentielles du second ordre non linéaires, trouver des solutions analytiques est généralement impossible. Ainsi, diverses méthodes d'approximation sont utilisées dans la recherche des solutions. Elles peuvent être distinguées en deux types principaux : les méthodes d'intégration temporelle directe et les méthodes fréquentielles.

### 1.3.1 Résolution temporelle

Les méthodes temporelles sont indispensables lorsque les réponses transitoires sont recherchées, par exemple, pour le calcul de la réaction du système lorsque les dispositifs d'arrêt sont mis en fonction, ou sous un choc soudain, ou pour la réponse du rotor soumis à une montée en vitesse rapide, etc.

Une étude détaillée des méthodes d'intégration temporelle directe explicites et implicites est présentée par Dokainish et Subbaraj dans [DOK 89] [SUB 89].

La méthode de RUNGE-KUTTA est une méthode d'intégration explicite classique. Elle est utilisée dans de nombreuses études de rotor (voir KHONSARI et CHANG [KHO 93], ZHAO et al. [ZHA 05]), surtout en présence de fortes non-linéarités. Par exemple, Brown et al. [BRO 94] ont utilisé cette méthode pour étudier le mouvement chaotique d'un tourillon hydrodynamique. Un rotor prenant en compte la force du film d'huile du palier et les forces induites par les joints d'étanchéité est étudié dans [LI 11] par LI et al. afin d'établir des mouvements périodiques, des mouvements avec doublement de période, quasi-périodiques, voire chaotiques. Grâce à sa haute précision dans l'analyse non linéaire, elle est aussi souvent utilisée comme méthode de référence (voir SINHA et WU [SIN 91], KIM et al. [KIM 91b], GU et al. [GU 03], CHEN et al. [CHE 14]). Son inconvénient est d'écrire le système différentiel sous forme d'état, donc de doubler la taille le système à résoudre et d'être très lourde en termes de temps de calcul.

Pour les méthodes de Newmark [NEW 59], le schéma de l'accélération moyenne est une méthode implicite qui a l'intérêt d'être inconditionnellement stable pour les problèmes linéaires. Mais pour les problèmes non linéaires, elle a aussi l'inconvénient d'être lourde à calculer car elle nécessite un algorithme non linéaire (de type point-fixe ou Newton par exemple). Elle est utilisée pour étudier les réponses transitoires des systèmes non linéaires (voir QIN et al. [QIN 04], LEE et al. [LEE 06], GU et al. [GU 03]). Pour certains paramètres de la méthode de Newmark, on obtient les schémas explicites des différences finies centrées (voir ROOSE [ROO 85a], BELYTSCHKO et al. [BEL 00], CHASALEVRIS et PAPADOPOULOS [CHA 14]). Dans ce cas, la condition de stabilité de l'algorithme est limitée par la plus petite taille de maillage. Le pas de temps doit donc être petit, mais l'algorithme ne demande pas d'itérations de Newton.

Les méthodes d'intégration temporelle ne sont pas efficaces pour chercher des solutions stationnaires sauf si elles sont couplées avec d'autres techniques, par exemple la méthode de tir (shooting). Beaucoup d'études sur des machines tournantes ont été faites en employant cette méthode. SUNDARARAJAN et NOAH [SUN 97] [SUN 98] ont employé la méthode de tir avec la technique de continuation par longueur d'arc pour étudier la réponse au balourd d'un rotor rigide supporté par des amortisseurs squeeze-film et des paliers lisses. Dans IBRAHIM et al. [IBR 09], la méthode de tir est réalisée avec le schéma d'intégration temporelle de Newmark et la technique de continuation pour étudier les vibrations forcées d'une poutre courbée. Dans [LIA 13], LIAO et WANG ont cherché l'amplitude maximum de vibration des systèmes dynamiques non linéaires en utilisant la méthode de tir couplée avec l'algorithme *multistart*. Dans [DAK 14], DAKEL et al. l'ont utilisée pour calculer la réponse d'un rotor non linéaire excité par la base. Elle a l'avantage d'être efficace pour la recherche des solutions périodiques.

### 1.3.2 Résolution fréquentielle

Bien que robustes, les méthodes temporelles sont coûteuses en terme de temps de calcul pour étudier la réponse du système sur une large plage de fréquence. Dans la phase

de conception, les études paramétriques sont nécessaires, multipliant ainsi le nombre de simulations à réaliser. De plus, pour pouvoir maîtriser puis contrôler la dynamique du système, l'évaluation du comportement dynamique est essentielle. Dans ce cas, les méthodes qui fournissent rapidement les réponses stationnaires s'avèrent plus adéquates.

La méthode fréquentielle la plus épanouie pour la recherche des solutions périodiques stationnaires est la méthode de l'équilibrage harmonique (*Harmonic Balance Method*). En 1964, CESARI [CES 64] a obtenu des solutions stationnaires des équations dynamiques non-linéaires à l'aide de polynômes trigonométriques (séries de Fourier). Sa méthode, précurseur de la méthode de la balance harmonique, est essentiellement l'application de la méthode d'approximation de Galerkin pour la détermination des solutions périodiques. NAKHLA et VLACH [NAK 76] ont employé cette méthode pour la détermination des réponses périodiques pour l'analyse de circuit électronique. Puis, la méthode est employée dans les applications variées, par exemple les études sur les oscillations non linéaires des systèmes nano- et micro-électro-mécanique par KACEM et al. [KAC 11], sur les interactions entre plusieurs étages d'une même turbine par HE et al. [HE 02], sur les zones de contact avec frottement en cas de perte d'aube par PETROV et al. [PET 04], sur le comportement de rotor avec un amortisseur de type squeeze film par BONELLO et al. [BON 02], sur la dynamique d'une structure décrite par symétrie cyclique par GROLET et al. [GRO 12a], sur le comportement dynamique d'un rotor fissuré par PU et al. [PU 02], DARPE et al. [DAR 04].

Plusieurs variantes existent. Dans CHU et ZHANG [CHU 98], la HBM simple et la théorie de Floquet sont utilisées pour l'analyse de bifurcation d'un rotor de Jeffcott avec contact rotor/stator. La HBM couplée avec la continuation par longueur d'arc est illustrée dans VONGROLL et EWINS [VON 01] et utilisée dans RAGHOTHAMA et NARAYANAN [RAG 99], FERREIRA et SERPA [FER 05], et GROLET et THOUVEREZ [GRO 12a]. Son couplage avec l'algorithme "alternating frequency/time domain" (AFT) pour déterminer les efforts non linéaires est développé dans CAMERON et GRIFFIN [CAM 89] et utilisé largement dans KIM et NOAH [KIM 96], NARAYANAN et SEKAR [NAR 98], et PETROV [PET 07]. Une autre variante de la balance harmonique est la technique dite de la *Balance Harmonique Incrémentale*. Les premiers travaux concernant cette méthode sont effectués par LAU et CHEUNG [LAU 81] [LAU 82]. Les termes non linéaires sont a priori plus faciles à calculer car la procédure de Newton-Raphson est effectuée en premier ce qui linéarise les équations du mouvement mais peut complexifier en contrepartie les séries de Fourier à calculer. L'équivalence de ces deux méthodes a été démontré par FERRI dans [FER 86]. La méthode de la *Receptance Harmonique Balance* (RHB) est employé par BONELLO et al. dans [BON 02] pour étudier la dynamique d'un rotor assemblé avec un amortisseur de type squeeze film.

Pour optimiser l'efficacité de la HBM, la technique de sélection automatique des ordres d'harmonique, dite *Adaptive Harmonic Balance Method* (AHBM), développée dans MAPEL et al. [MAP 04], JAUMOUILLE et al. [JAU 10], GROLET et THOUVEREZ [GRO 12b] ajuste le nombre d'harmoniques retenues pour une précision donnée et pour chaque valeur de fréquence. En outre, des améliorations ont été proposées à ces méthodes afin de pouvoir prévoir des régimes quasi-périodiques. Dans KIM et NOAH

[KIM 96], la transformation de fourier rapide (FFT) est utilisée pour déterminer le 'winding number'  $\beta$  pour construire le déplacement en quasi-périodique afin d'obtenir des solutions quasi-périodiques d'un rotor de Jeffcott horizontal supporté par deux paliers avec jeu. LAU [LAU 83] ainsi que KIM [KIM 97] ont développé la MHBM (*Multiple Harmonic Balance Method*), tandis que dans [COU 09] COUDEYRAS et al. proposent une généralisation de la méthode, nommée GCHBM (*Generalized Constrained Harmonic Balance Method*), pour calculer des réponses quasi-périodiques. Dans [GUS 12], GUSKOV et THOUVEREZ présentent une généralisation de la version multi-dimensionnelle de la HBM pour les systèmes avec excitations multiples. L'étude des vibrations quasi-périodiques d'un rotor fissuré par la HBM avec une troncature de haut ordre des harmoniques est détaillée dans PU et al. [PU 02] alors que le rotor soumis à un contact avec le stator est étudié par PELETAN et al. dans [PEL 14] en déterminant automatiquement la fréquence fondamentale a priori inconnue pendant le calcul par la HBM. Une variante de la HBM à coefficients périodiques est introduite dans [ZHO 15] pour le calcul des réponses quasi-périodiques.

En tant que méthode qui cherche directement les solutions périodiques, la méthode de collocation trigonométrique est aussi utilisée dans les études de rotors non linéaires : dans NATARAJ et NELSON [NAT 89] pour étudier la dynamique du rotor monté sur paliers non linéaires à film d'huile, dans ZHAO et al. [ZHA 94] pour établir les comportements sub-harmoniques et quasi-périodiques d'un rotor supporté par des amortisseurs de type squeeze-film.

### 1.3.3 Technique de continuation

Les méthodes de résolution sont souvent couplées à une technique de continuation afin d'évaluer ensemble la dynamique du système sur toute la plage de vitesse de fonctionnement. Il existe plusieurs types de techniques de continuation.

La continuation séquentielle se caractérise par une fréquence d'excitation fixe. Elle est souvent couplée avec une méthode d'intégration temporelle. Les calculs à chaque pas de vitesse sont initiés par la solution convergée du pas précédant, le phénomène d'hystérésis du système non linéaire est représenté en faisant des balayages croissant et décroissant.

La continuation par longueur d'arc (ou pseudo longueur d'arc) aide aux calculs des réponses présentant un *snap-back* en ajoutant la fréquence d'excitation aux inconnues. Elle est souvent couplée avec la HBM et la méthode de tir, afin de suivre la totalité de courbe de réponse. Pour étudier les structures élastiques, COCHELIN [COC 94] a présenté la technique de suivi de courbe de réponse par une méthode asymptotique numérique. Dans [SUN 97], SUNDARARAJAN et NOAH ont couplé la méthode de tir avec la technique de continuation par longueur d'arc pour étudier les rotors non linéaires. RAGHOTHAMA et NARAYANAN [RAG 99] ont utilisé cette technique de continuation couplée avec la HBM incrémentale pour tracer le diagramme de bifurcation. La technique de continuation est indispensable dans les simulations numériques des systèmes dynamiques non linéaires car elle fournit la totalité de la courbe y compris les points limites et les multi-solutions pour une configuration donnée. La technique de continuation est

implémentée dans de nombreux codes de calcul non linéaires, citons par exemple MATCONT [DHO 03], AUTO [DOE 08], MANLAB [ARQ 07]. Un schéma adaptatif de taille de pas peut être appliqué pour la robustesse de l'algorithme AUTO [DOE 08] [SEY 09].

## 1.4 Stabilité et bifurcations

Les solutions vérifiant l'équation d'équilibre peuvent ne pas représenter le comportement réel du système si elles sont instables. Par conséquent, il est important d'étudier la stabilité après la résolution des équations d'équilibre afin de déterminer l'ensemble des solutions stables.

Cette section a pour objectif de poser quelques notions liées à la stabilité d'un système dynamique non linéaire, notions nécessaires pour comprendre les chapitres suivants. Il s'agit d'une section bibliographique basique et restreinte. Pour des présentations plus complètes, les ouvrages classiques de NAYFEH et BALACHANDRAN [NAY 08], GOVAERTS [GOV 00], KUZNETSOV [KUZ 04], SEYDEL [SEY 09] et GUCKENHEIMER [GUC 83] font référence sur ce sujet.

### 1.4.1 Stabilité des solutions périodiques

Les rotors sous excitation périodique se comportent très souvent de façon périodique. Le mouvement périodique est défini par la solution passant par un point fixe  $x^*$  de période minimale  $T$  ou de multiple entier de  $T$ . Des solutions périodiques stables et instables peuvent coexister pour une excitation donnée. Cependant, seules les solutions stables sont observées expérimentalement.

La théorie de Floquet est le moyen le plus utilisé pour déterminer la stabilité des solutions périodiques. L'application directe de la théorie de Floquet consiste à calculer la matrice de transition par intégration en temps des équations du système. La matrice de transition donne la matrice de monodromie dont les valeurs propres sont les multiplicateurs de Floquet qui caractérisent la stabilité de la solution.

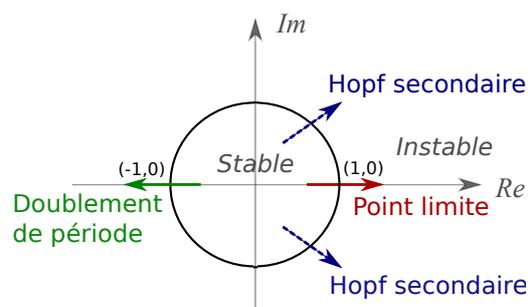
SINHA et WU dans [SIN 91] couplent cette méthode avec les polynômes de Chebyshev pour obtenir la matrice de transition (ou la matrice de monodromie) et analyser les conditions de stabilité des systèmes périodiques, voir aussi BERLIOZ et al. [BER 00]. Cette méthode est fréquente dans l'analyse dynamique des structures tournantes, comme les pales d'hélicoptère (voir FRULLA [FRU 00]), les turbines d'éoliennes (voir DUGUNDIJI et WENDELL [DUG 83]) ou encore les rotors fissurés (voir MENG et GASCH [MEN 00]). Dans [KIM 96], KIM et NOAH ont étudié la stabilité des solutions quasi-périodiques d'un modèle de rotor de Jeffcott supporté par des paliers avec jeu en construisant et analysant la matrice de monodromie alors que SHEN et al. [SHE 08] ont utilisé une approximation de cette dernière sur l'oscillateur de Mathieu-Duffing. Pour éviter de rechercher toutes les valeurs propres de la matrice de monodromie, BAUCHAU et NIKISHKOV [BAU 01] proposent d'utiliser l'algorithme d'Arnoldi pour chercher directement la valeur propre dominante (de norme maximale) puis analyser la stabilité.

La méthode de Hill (voir TAKAHASHI [TAK 79]), est souvent appliquée pour déterminer la stabilité des solutions obtenues dans le domaine fréquentiel, comme par la HBM ou la méthode de collocation trigonométrique, voir VONGROLL et EWINS [VON 01], SINHA [SIN 04]. Dans la revue de FRIEDMAN [FRI 86], l'auteur indique que la méthode de Hill n'est pas très commode pour le calcul numérique des systèmes avec un grand nombre de degrés de liberté. L'étude comparative menée par PELETAN et al. [PEL 13] montre que les techniques basées sur le calcul de la matrice de monodromie dans le domaine temporel ont une bien meilleure précision que la méthode de Hill, et que la méthode de Newmark offre le meilleur compromis entre la précision des résultats et les temps de calcul pour le calcul de la matrice de monodromie.

D'autres méthodes existent pour analyser la stabilité des solutions périodiques. GE et al. [GE 01] ont utilisé la méthode directe de Lyapunov pour déterminer la stabilité des mouvements périodiques d'un pendule avec support vibrant et en rotation. D'autre part, comme la solution périodique peut être présentée sur la section de Poincaré (voir WIGGINS [WIG 03]) par un point fixe, étudier la stabilité asymptotique revient donc à l'analyse d'un point fixe sur la carte correspondante. Pour des solutions quasi-périodiques, la section de Poincaré est composée d'un nombre infini de points formant une courbe fermée de manière quasi-uniforme.

### 1.4.2 Bifurcations des solutions périodiques

Considérons la branche de solutions périodiques qui décrit l'évolution des solutions périodiques en fonction d'un des paramètres noté  $\alpha$ .



**FIGURE 1.4:** Multiplicateurs de Floquet traversant le cercle unité dans le plan complexe et révélant les bifurcations.

#### **Théorie de Floquet par la matrice de monodromie**

Le long de la branche des solutions périodiques, les multiplicateurs de Floquet sont surveillés pour déterminer la stabilité par la méthode de Floquet. Ils sont tracés sur le plan complexe comme montré par la Figure 1.4. S'ils sont tous à l'intérieur du cercle unité, alors la solution étudiée est stable. Si un ou plusieurs multiplicateurs sortent du

cercle, la solution devient instable. La façon dont ils traversent le cercle indique le type de bifurcation (Figure 1.4) :

- Si un multiplicateur sort du cercle unité par l'axe des réels positifs, il s'agit soit d'un **point limite** (*saddle-node* ou *fold bifurcation*, voir Figure 1.5(a)), qui est un point de coalescence de deux cycles limites, l'un stable et l'autre instable, soit d'un **point de branchement** (ou *branch point*, voir Figure 1.5(b)), si une autre branche stable de solutions périodique s'initie à partir de ce point critique.
- Si un multiplicateur sort du cercle unité par l'axe des réels négatifs, il s'agit d'une bifurcation de type **doublément de période** (ou *flip bifurcation*). Dans ce cas, le cycle stable de période  $T$  perd sa stabilité au profit d'un cycle limite de période  $2T$ . On distingue les bifurcations par doublement de période sur-critique et sous-critique. Dans le premier cas, au passage de la bifurcation, la perte de stabilité conduit nécessairement à la solution  $2T$  périodique stable correspondante. Dans le deuxième cas, la solution  $2T$  périodique issue de la bifurcation est instable. On ne peut donc pas prévoir la réponse juste après la bifurcation.
- Si une paire de multiplicateurs complexes conjugués sortent du cercle unité, la solution périodique devient instable, il s'agit d'une bifurcation de type **Neimark-Sacker** (aussi appelée Hopf secondaire), par analogie avec la bifurcation de Hopf des points fixes. Le cycle limite de pulsation  $\omega_1$  devient un tore avec l'apparition de la deuxième pulsation  $\omega_2$ . Si les pulsations sont incommensurables, une branche de solutions quasi-périodiques stables apparaît à ce point critique (dans la Figure 1.5(c), les amplitudes des solutions périodiques et quasi-périodiques sont tracées). De la même manière, les cas sur-critique et sous-critique sont à distinguer, avec les mêmes conséquences que pour la bifurcation par doublement de période.

Pour les solutions périodiques dont l'amplitude de vibration est présentée en fonction du paramètre  $\alpha$ , les bifurcations sont analogues à celles des points fixes. Surtout dans le cas où les systèmes dynamiques non linéaires sont traités par la HBM dans le domaine fréquentiel, les solutions trouvées sont des points fixes numériquement, mais elles représentent les mouvements périodiques. Une bifurcation de type Neimark-Sacker des mouvements du système est donc une bifurcation de Hopf dans le cadre de la HBM (voir MOORE [MOO 08]). Cette notion est nécessaire pour la présentation du Chapitre.4.

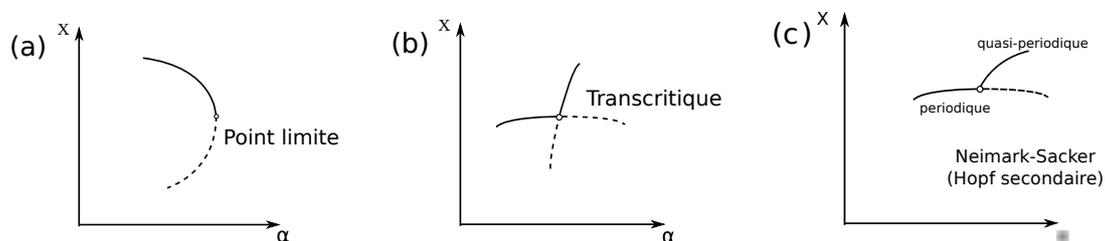
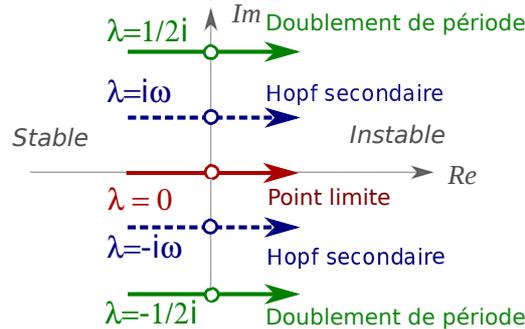


FIGURE 1.5: Bifurcations des solutions périodiques.

### Méthode de Hill

Les valeurs propres de la matrice de monodromie sont appelées les multiplicateurs de Floquet  $\eta$ . Les exposants de Floquet  $\lambda$  sont recherchés dans le cadre de la méthode de Hill. Ils sont liés aux multiplicateurs de Floquet par la relation suivante :

$$\eta_i = e^{\lambda_i 2\pi\Omega} \quad (1.4)$$



**FIGURE 1.6:** Exposants de Floquet traversant l'axe imaginaire du plan complexe (LP : Point limite, BP : Point de branchement).

Le point critique qui possède un exposant de Floquet dont la partie réelle est nulle peut être distingué comme suit :

- Si  $\lambda = 0$ , il s'agit d'une bifurcation simple (point limite ou point de branchement) qui correspond au point  $(1, 0)$  d'un multiplicateur de Floquet.
- Si un des exposants est imaginaire pur avec  $\lambda = \pm \frac{1}{2}i$ , il s'agit d'une bifurcation de type doublement de période.
- Si une paire d'exposants complexes conjugués traversent l'axe imaginaire par d'autres valeurs, il s'agit d'une bifurcation de Neimark-Sacker.

## 1.5 Analyse paramétrique directe du comportement dynamique non linéaire

Les non-linéarités dans le système rendent impossible le calcul immédiat des vitesses critiques, ainsi que le tracé du diagramme de Campbell. Les études des systèmes dynamiques non linéaires sont ainsi généralement limitées au calcul des réponses forcées, habituellement au balourd. Or, une analyse directe, façon 'paramétrique', peut simplifier l'étude de l'ensemble de la dynamique du système non linéaire.

Elle est souvent effectuée afin de trouver les paramètres qui répondent aux exigences de conception et qui mènent à un fonctionnement optimal. Par exemple, le choix de paramètres appropriés évite des phénomènes de résonances dangereux en déplaçant les fréquences propres en dehors de la plage de fréquences de fonctionnement ou en diminuant les amplitudes de résonance à des niveaux acceptables. Pouvoir évaluer l'influence

des paramètres sur le comportement du système d'une façon rapide et efficace est donc d'un grand intérêt.

Une étude numérique peut être menée pour analyser de manière directe l'influence d'un paramètre sur le comportement dynamique du système non linéaire. Le suivi numérique (d'un pic, d'un point singulier, etc...) peut être réalisé en couplant la technique de continuation avec un système dit augmenté, constitué de l'équation du mouvement et d'une équation supplémentaire caractérisant les points d'intérêt qu'il s'agit de suivre. Dans l'analyse dynamique des rotors, l'amplitude de la résonance et les seuils de stabilité sont souvent recherchés. Par conséquent, la fonction qui caractérise le point d'amplitude maximale (résonance) ou le changement de stabilité (bifurcations) est couplée avec la continuation pour effectuer une analyse paramétrique directe.

### 1.5.1 Suivi numérique pour l'étude paramétrique de la résonance

Quelques travaux existent sur le suivi paramétrique de la résonance de systèmes dynamiques non linéaires. Dans [LIA 13], LIAO a combiné la méthode de tir (*shooting*) et la théorie de Floquet avec l'algorithme de recherche globale pour déterminer le pic de résonance des systèmes non linéaires. De même, BALARAM et al [BAL 12] ont couplé la technique de continuation avec une technique d'optimisation pour effectuer une conception optimale.

### 1.5.2 Localisation des bifurcations

Lorsque la stabilité est le principal critère de conception, une telle analyse paramétrique est couramment obtenue en calculant un diagramme de stabilité qui contient les différentes limites de stabilité du système en fonction d'un paramètre d'intérêt. Une approche très simple consiste à calculer la courbe de réponse du système pour plusieurs valeurs du paramètre de bifurcation choisi, puis à détecter les points de bifurcation sur ces courbes de manière à former les limites de stabilité. Cependant, cette méthode est très coûteuse car elle nécessite le calcul d'un grand nombre d'informations parmi lesquelles seuls quelques points présentent un intérêt.

Une bifurcation est souvent liée soit au changement de stabilité (point limite), soit à une autre branche de solution (point de branchement), soit à un changement de régime dynamique (Neimark-Sacker), voir §.1.4.2. Des méthodes numériques pour caractériser et localiser les bifurcations d'un système dynamique sont données par KUZNETSOV [KUZ 04], KRAUSKOPF [KRA 07], et GOVAERTS [GOV 00].

Deux approches sont employées pour la localisation précise des bifurcations. La première est basée sur l'utilisation d'un système augmenté complet (*Fully Extended System*) qui consiste à ajouter à l'équation d'équilibre une ou plusieurs équations caractérisant les bifurcations. MOORE et SPENCE [MOO 80], WRIGGERS et SIMO [WRI 90], ERIKSSON et al. [ERI 99], BAGUET et al. [BAG 01][BAG 02] s'intéressent ainsi au calcul direct de points limites et de points de branchement de systèmes dynamiques non linéaires et de problèmes de post-flambement modélisés par éléments fi-

nis. Les travaux de ROOSE [ROO 89], CARDONNA [CAR 99], et LOPEZ [LOP 02] se concentrent sur le calcul des points de branchement et des branches qui en émanent. FELIPPA [FEL 87] a proposé une régularisation par pénalité pour éviter la singularité du système augmenté à l'approche des bifurcations de type branchement. GRIEWANK et REDDIEN [GRI 83] ont présenté un algorithme pour le calcul des bifurcations de Hopf par un système augmenté complet. Dans [ROO 85a], ROOSE a proposé une variante plus efficace de cet algorithme.

Cette première approche double la taille du système. Elle est donc défavorable en temps de calcul. Cependant, toutes les équations supplémentaires ont la même forme quel que soit le type de bifurcation considéré, ce qui facilite beaucoup l'implémentation de cette méthode.

La deuxième approche est basée sur l'utilisation d'un système augmenté minimal (*Minimally Extended Systems*) et d'une technique de type *bordering*. Ce système augmenté est dit 'minimal' car l'équation ajoutée est scalaire (indicateur de bifurcation par exemple), voir KUZNETSOV [KUZ 04] et GOVAERTS [GOV 00]. Dans [DET 15], DETROUX et al. ont couplé cette approche avec la méthode de la balance harmonique pour localiser les bifurcations de type point limite, point de branchement, bifurcation de Neimark-Sacker. L'inconvénient de cette approche est de nécessiter le calcul des matrices jacobiniennes spécifiques. Toutefois, elle a l'avantage d'avoir une taille du système réduite, donc plus adaptée aux systèmes avec un grand nombre de degrés de liberté.

### 1.5.3 Frontière de stabilité

La technique de continuation peut être couplée avec la localisation des bifurcations pour suivre directement les bifurcations en fonction d'un paramètre dans le système. Dans [REZ 14], REZAIEE-PAJAND et MOGHADDASIE ont tracé la frontière de stabilité d'un système non linéaire élastique à deux-paramètres par identification des points limites et des points de branchement couplée avec la continuation. D'ailleurs, plusieurs logiciels utilisent cette technique pour le suivi des points critiques : MATCONT [DHO 03] utilise la collocation orthogonale avec la technique de continuation pour la détection et le suivi des bifurcations ; LOCA [SAL 02] propose également la continuation en fonction d'un paramètre pour suivre les bifurcations.

## 1.6 Bilan du chapitre

L'analyse des rotors non linéaires par une approche numérique, implique la modélisation du rotor, l'intégration des effets non linéaires, la recherche des réponses, etc. Dans ce chapitre, une synthèse bibliographique des méthodes d'approximation numérique est présentée, ainsi qu'une comparaison entre les différentes modélisations possibles (poutre, axisymétrique, 3D) par la méthode des éléments finis. Cette section justifie la modélisation avec des éléments finis volumiques (3D) pour l'analyse de certains types de rotors. Les sources d'instabilités sont souvent liées à l'amortissement tournant, à la

dissymétrie du système et aux non-linéarités fréquentes dans les rotors, comme les paliers hydrodynamiques, les paliers à roulements avec jeu, le contact entre rotor et stator, et les fissures respirantes. Cette bibliographie expose quelques modèles qui servent de référence pour l'application des méthodes proposées dans les chapitres suivants. Il convient de noter que ces non-linéarités sont souvent locales, seule une petite partie du modèle est concernée, ce qui facilite beaucoup le calcul des effets non linéaires dans le rotor par l'approche AFT.

Pour les systèmes en présence de non-linéarité, seule la réponse au balourd ou à une autre force périodique est cherchée. D'autres scénarios spécifiques, par exemple une montée en vitesse, la réponse à un choc, ou à un séisme, etc. mettent en jeu des phénomènes transitoires importants et ne seront pas abordées dans cette thèse.

Parmi les méthodes de résolution temporelles et fréquentielles, la méthode HBM dans le domaine fréquentiel semble la plus adaptée quand des réponses périodiques sont cherchées. Son couplage avec la technique de continuation donne la courbe de réponse indiquant l'évolution de l'amplitude de vibration en fonction de la vitesse de rotation.

Pendant l'analyse de stabilité des solutions trouvées, la théorie de Floquet définit des bifurcations s'accompagnant d'un changement de stabilité ou de régime le long de la branche des solutions périodiques. En exploitant ces définitions de bifurcations, une étude paramétrique directe est donc possible en utilisant un système augmenté couplé à la technique de continuation. De la même façon, les points de résonances peuvent aussi être suivis directement en fonction d'un paramètre du système sans calculer l'intégralité des courbes de réponse. Le suivi direct de ces points d'intérêt conduit à une analyse paramétrique efficace de la dynamique non linéaire du rotor. En particulier, le suivi des points de bifurcations donne les frontières de stabilité et de changement de régime dynamique. Cette étude de suivi dans le cadre de la HBM dans le domaine fréquentiel a l'avantage d'être efficace et économique.

## 1.7 Positionnement de la thèse

Les non-linéarités présentes dans les rotors induisent à des comportements dynamiques compliqués et amènent des instabilités qui sont fortement indésirables dans l'application industrielle, par exemple, des sauts d'amplitude, des changements brutaux de comportement (instabilité), des changements de régime de périodique à  $nT$  périodique, quasi-périodique, voire chaotique, etc.

Dans le cadre de simulations numériques, une étude paramétrique est souvent effectuée pour la conception des machines, les diagnostics vibratoires, et aussi la maîtrise totale du comportement du système. L'influence des paramètres sur les réponses du système met en évidence l'importance des non-linéarités sur l'ensemble du fonctionnement du système, et la tendance au changement de comportement en fonction d'un paramètre. Cela rend possible de prévoir, maîtriser, voire contrôler le comportement dynamique des rotors non linéaires. Ainsi, une méthode numérique, à la fois efficace et générale, est nécessaire afin d'analyser, de façon paramétrique, le comportement dyna-

mique des rotors non linéaires.

Cette thèse consiste donc à mettre en place des méthodes numériques fréquentielles pour analyser de façon paramétrique la dynamique non linéaire des machines tournantes dans le cadre d'une modélisation par éléments finis tri-dimensionnel. L'organisation des chapitres est la suivante :

- La modélisation du rotor par éléments finis 3D est présentée dans le chapitre II.
- Dans le chapitre III, l'implémentation de la méthode HBM et de l'analyse de stabilité au sein du logiciel de calcul par élément fini Cast3M fait apparaître des spécificités liées à la modélisation éléments finis 3D. Des applications de type rotor sont aussi présentées.
- L'approche proposée de suivi des points d'intérêt pour l'analyse paramétrique des systèmes dynamiques non linéaires est développée dans le chapitre IV. Elle se base sur la résolution de systèmes non linéaires augmentés dans un cadre HBM. Des exemples d'application montrent l'efficacité et les performances de la méthode proposée.

La définition des systèmes augmentés du chapitre IV caractérisant les bifurcations dans le cadre de la HBM, leur résolution et le couplage avec une méthode de continuation, constituent les apports principaux de cette thèse. Notamment, le système augmenté pour la détection et le suivi des bifurcations de Neimark-Sacker constitue une originalité forte de ce mémoire.

# Chapitre 2

## Modélisation avec des éléments finis 3D du rotor

*Ce chapitre présente une formulation du comportement dynamique des rotor modélisé avec des éléments finis 3D dans le repère tournant alors que le stator est décrit dans le repère fixe galiléen. Des analyses vibratoires des modèles linéaires sont effectuées pour comparer des différents modèles, réduits ou non réduits.*

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Définition des repères</b>	<b>33</b>
<b>2.2</b>	<b>Modélisation du rotor dans le repère tournant</b>	<b>34</b>
2.2.1	Equations cinématiques relatives aux rotors	34
2.2.2	Équilibre d'un système dans le repère mobile	36
2.2.3	Équations du mouvement dans le repère tournant	39
<b>2.3</b>	<b>Équation du mouvement du stator dans le repère fixe</b>	<b>40</b>
<b>2.4</b>	<b>Liaison entre le rotor et le stator</b>	<b>41</b>
2.4.1	Condensation des déplacements du rotor et du stator	41
2.4.2	Équations de liaison à l'interface	42
<b>2.5</b>	<b>Réduction du modèle</b>	<b>42</b>
2.5.1	Approximation sur la base des modes propres	43
2.5.2	Sous-structuration dynamique de Craig-Bampton	43
<b>2.6</b>	<b>Validation du modèle avec éléments finis 3D en dynamique linéaire</b>	<b>45</b>
2.6.1	Comparaison modèle avec éléments finis 1D, modèle avec éléments finis 3D	45
2.6.2	Influence de réduction du modèle	48
<b>2.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>51</b>

---

Modéliser des machines industrielles nécessite le recours à la méthode des éléments finis. La prévision des comportements dynamiques des lignes d'arbre fait classiquement appel aux éléments finis de poutre [LAL 98], aux éléments finis volumiques [GEN 07] et aussi aux éléments finis axisymétriques [COM 08].

La modélisation des rotors par des éléments poutres est réalisée dans le repère galiléen (auss appelé inertiel ou fixe). Cela est possible car la géométrie du rotor est alors confinée à l'axe de rotation. La cinématique du rotor est ainsi décrite par des variables (déplacement et rotation) discrétisée le long de cet axe. Cette hypothèse facilite grandement les analyses. Cependant, dans certains cas, des modèles volumiques, à la cinématique plus riche, sont souhaitables. La modélisation est alors formulée dans le repère tournant. La mise en équation du problème de la dynamique des rotors est effectuée en explicitant le mouvement du repère en fonction du temps. Les équations d'équilibre dynamique du système sont écrites dans le repère mobile pour le rotor et dans le repère Galiléen pour le stator. Les démarches pour étudier des vibrations des rotors, décomposition du mouvement, équilibre du chargement centrifuge, sont aussi présentées dans ce chapitre.

Une méthode de réduction du modèle dynamique est également présentée pour réduire la taille des modèles relativement gros, le but étant de minimiser le nombre de degrés de liberté tout en assurant une bonne précision de résultat, et donc économiser le temps de calcul. Des analyses dynamiques linéaires (analyse modale, réponse au balourd) sont conduites sur les modèles en poutre et volumiques, sans et avec réduction. L'étude de l'influence de la réduction sur la réponse dynamique linéaire est aussi menée.

## 2.1 Définition des repères

Comme illustré dans la Figure 2.1, deux repères sont considérés :

- $\mathcal{R}(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  est le repère fixe (ou Galiléen, inertiel)
- $\mathcal{R}'(O', \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3')$  est le repère mobile (ou local, tournant) lié au corps au mouvement

Le passage du repère fixe  $\mathcal{R}$  au repère local  $\mathcal{R}'$  s'effectue par les trois rota-

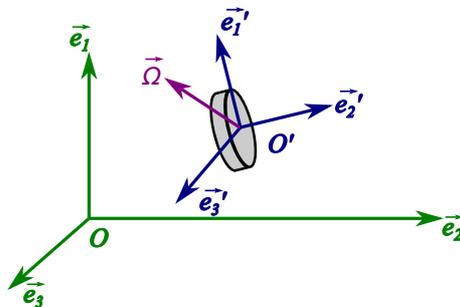
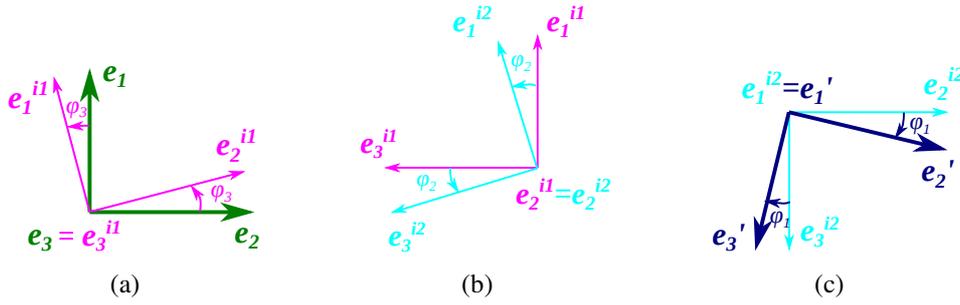


FIGURE 2.1: Définition des repères  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$



**FIGURE 2.2:** Passage du repère fixe  $\mathcal{R}$  au repère local  $\mathcal{R}'$  en utilisant deux repères intermédiaires  $\mathcal{R}^{i1}$  et  $\mathcal{R}^{i2}$

tions  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  (Figure 2.2) d'Euler en faisant intervenir deux repères intermédiaires  $\mathcal{R}^{i1}(\mathbf{e}_{1i1}, \mathbf{e}_{2i1}, \mathbf{e}_{3i1})$  et  $\mathcal{R}^{i2}(\mathbf{e}_{1i2}, \mathbf{e}_{2i2}, \mathbf{e}_{3i2})$ . La précession, la première rotation  $\varphi_3$  est autour de l'axe  $O\mathbf{e}_3$ , avec pour matrice de passage :

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_3 t) & \sin(\varphi_3 t) & 0 \\ -\sin(\varphi_3 t) & \cos(\varphi_3 t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Puis interviennent successivement les nutation et rotation propre  $\varphi_2$ ,  $\varphi_1$  respectivement autour des axes  $O\mathbf{e}_{2i1}$  et  $O\mathbf{e}_{1i2}$  dont les matrices de passage s'écrivent comme suit :

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_2 t) & 0 & -\sin(\varphi_2 t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varphi_2 t) & 0 & \cos(\varphi_2 t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi_1 t) & \sin(\varphi_1 t) \\ 0 & -\sin(\varphi_1 t) & \cos(\varphi_1 t) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Par conséquent, un vecteur  $\mathbf{r}_t$  est écrit dans le repère mobile en fonction de ses expressions dans le repère fixe  $\mathbf{r}_f$  comme :

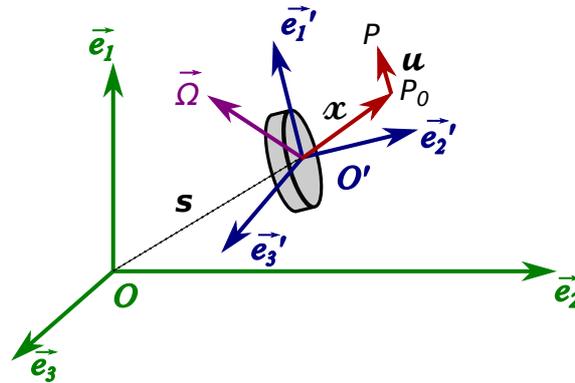
$$\mathbf{r}_t = \mathbf{R}_3 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1 \mathbf{r}_f = \mathbf{R} \mathbf{r}_f \quad (2.3)$$

## 2.2 Modélisation du rotor dans le repère tournant

### 2.2.1 Equations cinématiques relatives aux rotors

L'écriture des équations du mouvement du rotor s'effectue dans le repère tournant qui lui est lié. Les vecteurs de déplacement et de vitesse du point  $P$  sont exprimés dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  qui effectue des déplacements et/ou rotations par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ . La transformation réglant le passage d'un repère à l'autre est entièrement déterminée par le déplacement de l'origine du repère tournant (matérialisée par le vecteur  $\overrightarrow{O\mathcal{O}'}$ ) et le vecteur de vitesse de rotation  $\boldsymbol{\Omega}$ . Dans  $\mathcal{R}$ , la position de  $P$  appartenant au rotor s'écrit :

$$\mathbf{y}_f = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O\mathcal{O}'} + \overrightarrow{\mathcal{O}'P} = \mathbf{s} + \mathbf{R}(\mathbf{x} + \mathbf{u}) \quad (2.4)$$


 FIGURE 2.3: Changement des repères  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  et point  $P$ 

où  $\mathbf{R} = [\mathbf{e}'_1 \ \mathbf{e}'_2 \ \mathbf{e}'_3]$  est la matrice orthogonale des vecteurs de la base  $\mathcal{R}'$  exprimés dans le repère  $\mathcal{R}$  (2.3).  $\mathbf{s}$  est défini dans  $\mathcal{R}$  tandis que  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{u}$  le sont dans  $\mathcal{R}'$ .  $P_0$  appartient au rotor dans un état d'équilibre stationnaire et  $\mathbf{u}$  est le petit déplacement autour de ce dernier. En utilisant les formules de la base mobile  $\dot{\mathbf{e}}'_i = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{e}'_i$ , la vitesse et l'accélération du point  $P$  dans le repère fixe sont obtenues par dérivation :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}_f &= \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{x} + \mathbf{u}) \\ &= \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{R}(\mathbf{x} + \mathbf{u})) \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\ddot{\mathbf{y}}_f = \ddot{\mathbf{s}} + \mathbf{R}\ddot{\mathbf{u}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge (\mathbf{R}(\mathbf{x} + \mathbf{u})) + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{R}(\mathbf{x} + \mathbf{u})) + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{R}\dot{\mathbf{u}}) \quad (2.6)$$

où les coordonnées  $\Omega$  de  $\boldsymbol{\Omega}$  sont exprimées dans le repère fixe.

### 2.2.1.1 Décomposition du mouvement du rotor

Soit un rotor dont la position statique initiale est notée  $\mathbf{x}^0$ . Lors de la mise en rotation, le rotor est soumis aux efforts centrifuges. Il se place alors dans un état déformé défini par  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \mathbf{u}^0$  et considéré comme la position d'équilibre du rotor en rotation. Il reste ensuite à étudier les petits déplacements du rotor autour de cette position d'équilibre. L'étude des vibrations du rotor consiste donc à analyser les petits mouvements dynamiques  $\mathbf{u}$  autour d'un état d'équilibre stationnaire  $\mathbf{x}$ , comme illustré par la Figure 2.4 où  $\epsilon$ ,  $\sigma$  sont les champs de déformation et de contrainte,  $\epsilon^0$ ,  $\sigma^0$  étant dues à la précharge,  $E$  est le module d'Young.

Soit  $V_\Omega$  l'état qui équilibre les efforts centrifuges définis par la vitesse de rotation  $\Omega$  en supposant nulles les forces extérieures. Seul le préchargement centrifuge intervient, on considère que le déplacement associé  $\mathbf{u}_0$  est statique (dans le repère mobile). La position de référence et le déplacement du problème vibratoire se décomposent respectivement en deux parties :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \mathbf{u}^0 \quad \text{et} \quad \mathbf{u}^{tot} = \mathbf{u}^0 + \mathbf{u} \quad (2.7)$$

Comme la position finale est donnée par  $\mathbf{x}^0 + \mathbf{u}^{tot} = \mathbf{x}^0 + \mathbf{u}^0 + \mathbf{u} = \mathbf{x} + \mathbf{u}$ , il peut être utilisé indifféremment  $\mathbf{x}^0 + \mathbf{u}^{tot}$  ou  $\mathbf{x} + \mathbf{u}$  dans l'équation d'équilibre dynamique. Comme

le déplacement  $\mathbf{u}^0$  est constant au cours du temps, il vient :

$$\dot{\mathbf{u}}^{tot} = \dot{\mathbf{u}} \quad \text{et} \quad \ddot{\mathbf{u}}^{tot} = \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.8)$$

En conséquence, la précontrainte  $\sigma^0$  n'a aucune influence sur l'expression des énergies cinétique et de dissipation visqueuse.

## 2.2.2 Équilibre d'un système dans le repère mobile

En se basant sur les expressions des énergies cinétique et potentielle, les équations de Lagrange, qui conduisent à l'équation du mouvement, s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{F}_d}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (2.9)$$

où  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{F}_d$  représentent l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et le travail des forces dissipatives respectivement.

### 2.2.2.1 Énergie cinétique

L'énergie cinétique du rotor, exprimée pour le domaine  $V$  de frontière  $\partial V$ , se met sous la forme suivante :

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{y}_f^t \dot{y}_f^t dV \quad (2.10)$$

En substituant les dérivées temporelles (2.5), dans (2.10) l'énergie cinétique prend la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{2} \int_V \rho (\mathbf{R}^t \dot{\mathbf{s}} + \dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{x} + \mathbf{u}))^t (\mathbf{R}^t \dot{\mathbf{s}} + \dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{x} + \mathbf{u})) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V \rho [\dot{\mathbf{s}}^t \dot{\mathbf{s}} + 2\mathbf{R}^t \dot{\mathbf{s}}^t \dot{\mathbf{u}} + 2\mathbf{R}^t \dot{\mathbf{s}}^t \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{x} + \mathbf{u}) \\ &\quad + \dot{\mathbf{u}}^t \dot{\mathbf{u}} + 2\dot{\mathbf{u}} \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{x} + \mathbf{u}) - \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{x} + \mathbf{u})^t (\mathbf{x} + \mathbf{u})] dV \end{aligned} \quad (2.11)$$

Les deux termes d'inertie de l'équation de Lagrange (2.9) sont décomposés de cette

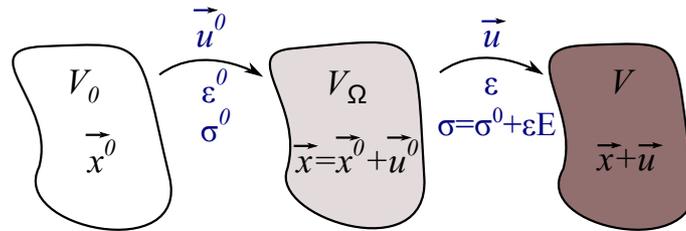


FIGURE 2.4: Vibrations autour d'un état d'équilibre

manière :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right)_{/R'} &= \int_V \rho \mathbf{R}^t \ddot{\mathbf{s}} dV + \int_V \rho \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{R}^t \dot{\mathbf{s}} dV + \int_V \rho \ddot{\mathbf{u}} dV + \int_V \rho \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge (\mathbf{x} + \mathbf{u}) dV + \int_V \rho \boldsymbol{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{u}} dV \\ - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \mathbf{u}}_{/R'} &= - \int_V \rho \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{R}^t \dot{\mathbf{s}} dV + \int_V \rho \boldsymbol{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{u}} dV + \int_V \rho \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{x} + \mathbf{u}) dV \end{aligned} \quad (2.12)$$

Les termes dus au caractère non-galiléen du repère sont couramment classés de la manière suivante :

— les efforts d'entraînement en translation :

$$\mathbf{F}_{ent} = \int_V \rho \mathbf{R}^t \ddot{\mathbf{s}} dV \quad (2.13)$$

— les efforts d'inertie relative qui ne dépendent pas de la vitesse de rotation :

$$\mathbf{F}_{rela} = \int_V \rho \ddot{\mathbf{u}} dV \quad (2.14)$$

— les efforts centrifuges qui sont proportionnels au vecteur déplacement et au carré de la vitesse de rotation du rotor :

$$\mathbf{F}_{cent} = \int_V \rho \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{x} + \mathbf{u}) dV \quad (2.15)$$

— les efforts d'Euler qui s'annulent lorsque la vitesse de rotation est constante :

$$\mathbf{F}_{eul} = \int_V \rho \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge (\mathbf{x} + \mathbf{u}) dV \quad (2.16)$$

— les efforts de Coriolis :

$$\mathbf{F}_{corio} = \int_V 2\rho \boldsymbol{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{u}} dV \quad (2.17)$$

Ces efforts sont proportionnels à la vitesse de rotation. Ils peuvent donc se noter de la forme :

$$\mathbf{F}_{corio} = \boldsymbol{\Omega} [G_{corio}] \dot{\mathbf{y}} \quad (2.18)$$

Les efforts de Coriolis, d'entraînement d'Euler et centrifuges sont de type suiveur car ils dépendent explicitement de la configuration dans laquelle ils sont calculés et agissent sur la position finale de la structure, définie par  $\mathbf{x} + \mathbf{u}$  (voir Figure 2.4).

### 2.2.2.2 Énergie potentielle

Dans le repère mobile, l'énergie potentielle a la même forme que dans le repère inertiel. Pour prendre en compte des pré-contraintes statiques, l'énergie de déformation s'écrit comme :

$$d\mathcal{W} = \int_0^\epsilon \boldsymbol{\sigma}^t d\boldsymbol{\epsilon} = \int [\boldsymbol{\sigma}_0^t + \boldsymbol{\epsilon}^t \mathbf{E}] d\boldsymbol{\epsilon} \quad (2.19)$$

Après intégration, l'énergie de déformation prend la forme suivante :

$$\mathcal{W} = \int_0^\epsilon d\mathcal{W}(\epsilon) = \sigma_0^t \epsilon + \frac{1}{2} \epsilon^t \mathbf{D} \epsilon \quad (2.20)$$

où  $D$  est le tenseur d'élasticité. La déformation  $\epsilon$  comporte une partie linéaire  $\epsilon^l$  et une partie quadratique  $\epsilon^{nl}$  (grandes déformations).

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^l + \epsilon_{ij}^{nl} = (\mathbf{u}_{i,j} + \mathbf{u}_{j,i} + \mathbf{u}_{k,j} \mathbf{u}_{k,i})/2 \quad (2.21)$$

où  $\mathbf{u}_{i,j} = \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_j}$ .

L'expression finale de l'énergie potentielle est donnée par :

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_V \epsilon^t \mathbf{D} \epsilon^l dV + \int_V (\sigma_0^t \epsilon - \epsilon_0^t \mathbf{D} \epsilon) dV - \int_V \mathbf{u}^t \mathbf{f} dV - \int_{\partial V} \mathbf{u}^t \mathbf{t} d\partial V \quad (2.22)$$

avec  $\epsilon = \nabla \mathbf{u}$  où  $\nabla$  est l'opérateur différentiel. Le premier terme représente la contribution de l'énergie élastique. Le second terme est causé par la pré-contrainte  $\sigma_0$  ou la pré-déformation  $\epsilon_0$  avec la partie linéaire ou quadratique du champ de déplacement  $\epsilon$ . Dans le cas de rotor, la pré-contrainte est liée aux efforts centrifuges, qui peut être considérée comme proportionnelle au carré de la vitesse de rotation. La pré-déformation peut souvent être négligée dans la plupart des cas. Les deux derniers termes représentent le travail virtuel des forces volumiques  $\mathbf{f}$  et surfaciques  $\mathbf{t}$  respectivement.

### 2.2.2.3 Énergie de dissipation

On introduit la fonction de dissipation qui justifie une loi de comportement viscoélastique exprimée sous la forme :

$$\mathcal{F}_d = \frac{1}{2} \int_V \eta (\nabla \dot{\mathbf{u}})^t \mathbf{D} (\nabla \dot{\mathbf{u}}) dV \quad (2.23)$$

où  $\eta$  est le coefficient de viscosité.

### 2.2.2.4 Équilibre du chargement centrifuge

Comme illustré par la Figure 2.4, les vibrations du rotor sont des petits mouvements dynamiques  $\mathbf{u}$  autour d'un état d'équilibre stationnaire  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \mathbf{u}^0$ . Dans l'Eq. (2.12), les efforts centrifuges peuvent être décomposés en deux parties (statique et dynamique) :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{cent} &= \int_V \rho \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{x} + \mathbf{u}) dV \\ &= \int_V \rho \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{x}^0 + \mathbf{u}^0) dV + \int_V \rho \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u} dV \end{aligned} \quad (2.24)$$

La première étape consiste à trouver la solution statique  $\mathbf{u}^0$ ,  $\sigma_0$  qui équilibre le chargement centrifuge 'statique' :

$$\mathbf{F}_{int} = -\mathbf{F}_{cent}^s \quad \text{soit} \quad \int_V \epsilon^t \sigma_0 dV = - \int_V \rho \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{x}^0 + \mathbf{u}^0) dV \quad (2.25)$$

Cette équation peut être résolue en considérant l'effet non linéaire avec un algorithme itératif ou en linéarisant les équations et en négligeant  $\rho\Omega \wedge \Omega \wedge \mathbf{u}^0$ . Avec cette seconde approche, il devient :

$$\mathbf{K}_{elas}\mathbf{u}^0(\Omega) = -\Omega^2\mathbf{K}_{cent}\mathbf{x}^0 \quad (2.26)$$

On en déduit aussi  $\mathbf{u}^0$  et  $\sigma^0$  comme des fonctions linéaires de  $\Omega^2$ .

### 2.2.3 Équations du mouvement dans le repère tournant

Les déplacements  $\mathbf{u}$  discrétisés par la méthode des éléments finis s'écrivent comme :

$$\mathbf{u} = \mathcal{N}\mathbf{q} \quad (2.27)$$

où le vecteur  $\mathbf{q}$  est des coordonnées généralisées (déplacements nodaux) de l'élément volumique.  $\mathcal{N}$  est la matrice des fonctions de forme. Les expressions de l'énergie cinétique  $\mathcal{T}$ , de l'énergie potentielle  $\mathcal{U}$  et du travail des forces dissipatives  $\mathcal{F}_d$  s'écrivent alors comme suit :

**Énergie cinétique** Les deux premiers termes de l'équation de Lagrange qui sont liés avec l'énergie cinétique s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)_{/R'} &= -\mathbf{r} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{P}\mathbf{q} + \frac{1}{2}\mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} \\ -\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \mathbf{q}}_{/R'} &= \frac{1}{2}\mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + (\Omega^2\mathbf{K}_{cent} + \mathbf{K}_{\sigma_0})\mathbf{q} \end{aligned} \quad (2.28)$$

où les quantités suivantes sont :

— Matrice de masse,

$$\mathbf{M} = \int_V \rho \mathcal{N}^t \mathcal{N} dV \quad (2.29)$$

— Matrice d'accélération angulaire (Euler),

$$\mathbf{P} = \int_V \rho \mathcal{N}^t \dot{\Omega} \mathcal{N} dV \quad (2.30)$$

— Matrice de Coriolis (gyroscopique),

$$\mathbf{G} = \int_V 2\rho \mathcal{N}^t \Omega \mathcal{N} dV \quad (2.31)$$

— Matrice d'accélération centrifuge (assouplissement centrifuge),

$$\mathbf{K}_{cent} = - \int_V \rho \mathcal{N}^t \Omega^2 \mathcal{N} dV \quad (2.32)$$

— Matrice de précontrainte centrifuge :

$$\mathbf{K}_{\sigma_0} = \int_V \mathcal{N}^t \sigma_0 \mathcal{N} dV \quad (2.33)$$

— Vecteur d'excitation dues à l'entraînement du système de coordonnées,

$$\mathbf{r} = - \int_V \rho \mathcal{N}^t (\mathbf{R}'\ddot{\mathbf{s}} + \dot{\Omega}\mathbf{x}) dV \quad (2.34)$$

**Énergie potentielle** L'énergie potentielle de (2.22) est réécrite sous la forme :

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^t \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{q}^t \left( \int_V \mathcal{N}^t \mathbf{f} dV + \int_{\partial V} \mathcal{N}^t \mathbf{t} d\partial V \right) \quad (2.35)$$

où  $\mathbf{K}$  est la matrice de raideur,  $\mathbf{F}$  le vecteur des excitations par les forces volumiques et surfaciques.

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_V (\nabla \mathcal{N})^t \mathbf{D} (\nabla \mathcal{N}) dV \\ \mathbf{F} &= \int_V \mathcal{N}^t \mathbf{f} dV + \int_{\partial V} \mathcal{N}^t \mathbf{t} d\partial V \end{aligned} \quad (2.36)$$

**Travail des forces dissipatives** L'énergie de dissipation dans (2.23) prend la forme suivante :

$$\mathcal{F}_d = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^t \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} dV \quad (2.37)$$

où  $\mathbf{C}$  est la matrice d'amortissement :

$$\mathbf{C} = \int_V \eta (\nabla \mathcal{N})^t \mathbf{D} (\nabla \mathcal{N}) dV \quad (2.38)$$

### Équation de mouvement du rotor dans le repère mobile

Finalement, en s'appuyant sur l'équation de Lagrange, l'équation de mouvement d'un système tournant dans un repère mobile s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C} + \mathbf{G}) \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{P} + \mathbf{K}_{\sigma_0} + \mathbf{K}_{cent}) \mathbf{q} = \mathbf{F} + \mathbf{r} \quad (2.39)$$

## 2.3 Équation du mouvement du stator dans le repère fixe

Le stator est modélisé dans le repère fixe  $\mathcal{R}$ . En supposant  $\mathbf{u}_f$  le champ de déplacement exprimé dans le repère Galiléen, les énergies cinétique, potentielle et de dissipation s'écrivent sous la forme classique :

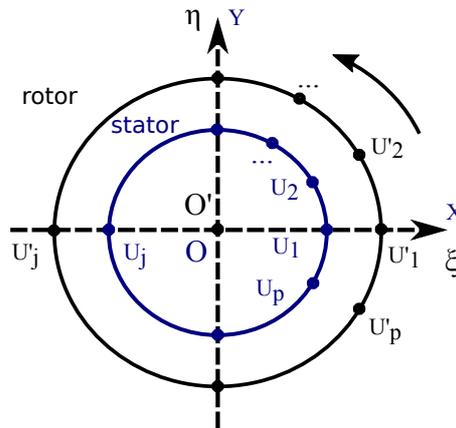
$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{u}}_f^t \dot{\mathbf{u}}_f dV \quad (2.40)$$

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\epsilon}^t \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} dV - \int_V (\mathbf{R} \mathbf{u}_f)^t \mathbf{f} dV - \int_{\partial V} (\mathbf{R} \mathbf{u}_f)^t \mathbf{t} d\partial V \quad (2.41)$$

$$\mathcal{F}_d = \frac{1}{2} \int_V \eta (\nabla (\mathbf{R} \dot{\mathbf{u}}_f))^t \mathbf{D} (\nabla (\mathbf{R} \dot{\mathbf{u}}_f)) dV \quad (2.42)$$

En appliquant les équations de Lagrange et discrétisant le champ de déplacement par la méthode des éléments finis, l'équilibre du stator seul sous forme matricielle s'écrit dans le repère fixe :

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_s \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_s \mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (2.43)$$



**FIGURE 2.5:** Schémas des nœuds de contours et de la liaison rotor-stator

Les matrices  $\mathbf{M}_s$ ,  $\mathbf{C}_s$ ,  $\mathbf{K}_s$  sont les matrices du stator de masse, d'amortissement et de raideur respectivement.

*Sous Cast3M, chaque nœud de maillage possède au maximum 6 ddl dans le cadre de la modélisation des rotors, il y a donc 6 noms 'PRIMAL' classiques  $UX, UY, UZ, RX, RY, RZ$  pour les déplacements et 6 noms 'DUAL' correspondant à  $FX, FY, FZ, MX, MY, MZ$  pour les forces dans le domaine temporel.*

## 2.4 Liaison entre le rotor et le stator

Dans les modèles 3D, le rotor est modélisé dans le repère qui lui est lié  $\mathcal{R}'$ , et le stator dans le repère inertiel  $\mathcal{R}$ . Une liaison doit être ajoutée entre ces deux structures afin de rendre compte des éléments technologiques (roulements, palier hydrodynamique ou magnétique...) liant rotor et stator. Dans le cas analytique d'une liaison cinématique idéale (sans raideur, ni amortissement propre), une relation est appliquée entre une restriction du champ de déplacement du rotor (noté  $U'_j$  dans la Figure 2.5) exprimé dans le repère tournant et son analogue  $U_j$  pour le stator exprimé dans le repère fixe.

### 2.4.1 Condensation des déplacements du rotor et du stator

Avant d'écrire les liaisons entre rotor et stator, il est nécessaire de définir un déplacement moyen de ces deux parties. Une manière simple de le faire consiste à considérer le déplacement moyen du contour circulaire. Le point additionnel est généralement positionné où sont définis les déplacements moyens sur l'axe de rotation afin de pouvoir utiliser la matrice de passage  $\mathbf{R}$  pour établir la liaison. Sur la Figure 2.5, l'axe  $Z$  est celui de rotation du rotor, et le plan lié au rotor dans son repère est  $O'\xi\eta$ .  $U = [u^x, u^y, u^z]^t$  sont les degrés de liberté du stator et  $U' = [u^\xi, u^\eta, u^\zeta]^t$  du rotor.

*Sous Cast3M, le nœud qui ramène le champ de déplacement de contour est créé artificiellement. Généralement les points  $O'$  sont les barycentres des interfaces.*

Dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation selon Z, le champ de déplacement transversal moyen (défini au point additionnel  $O'$ ) s'exprime par :

$$U'_O{}^\xi = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p U_j'^\xi \quad U'_O{}^\eta = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p U_j'^\eta \quad (2.44)$$

$$R'_O{}^z = \sum_{j=1}^p \frac{\eta_j U_j'^\xi - \xi_j U_j'^\eta}{p(z_j^2 + \xi_j^2 + \eta_j^2)} \quad (2.45)$$

Selon le type de liaison, les conditions aux limites peuvent aussi être imposées sur le champ de rotation transversal moyen au point de l'axe  $O'$  (inclinaison d'un disque par exemple) :

$$R'_O{}^\xi = \sum_{j=1}^p \frac{\eta_j U_j'^z - z_j U_j'^\eta}{p(z_j^2 + \xi_j^2 + \eta_j^2)} \quad R'_O{}^\eta = \sum_{j=1}^p \frac{z_j U_j'^\xi - \xi_j U_j'^z}{p(z_j^2 + \xi_j^2 + \eta_j^2)} \quad (2.46)$$

### 2.4.2 Équations de liaison à l'interface

Le plan  $O'\xi\eta$  lié au rotor fait un angle  $\Omega t$  avec le plan  $OXY$  lié au stator. La relation entre les champs de déplacements moyens des deux repères est donc :

$$U = \mathbb{R}U' \quad \text{avec} \quad \mathbb{R} = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & -\sin \Omega t & 0 \\ \sin \Omega t & \cos \Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

En introduisant un vecteur de multiplicateurs de Lagrange  $\Lambda^l$  associés aux relations de  $\mathbb{R}$ , la liaison entre rotor et stator est remise sous la forme :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -I^t \\ 0 & 0 & \mathbb{R}^t \\ -I^t & \mathbb{R} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U \\ U' \\ \Lambda^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

*Sous Cast3M, les relations sont imposées par l'opérateur 'RELA'. De nouveaux nœuds sont créés pour supporter les multiplicateurs de Lagrange 'LX' dans (2.48).*

## 2.5 Réduction du modèle

Le chapitre précédent a mis en place la méthode générale pour modéliser le comportement vibratoire d'une structure tournante modélisée en 3D. Afin de réduire la taille du système à résoudre, les calculs de la courbe de réponse du système forcé peuvent être menés sur une base réduite  $\phi$  où le système est projeté.

### 2.5.1 Approximation sur la base des modes propres

L'approche de base est d'effectuer une réduction du modèle par projection sur une base tronquée des modes propres linéaires non amortis, calculés en résolvant :

$$\mathbf{K}\phi_j = \mathbf{M}\phi_j\omega_j^2 \quad (2.49)$$

où  $\omega_j$  est la fréquence propre du  $j^e$  mode, et  $\phi_j$ , la forme modale. En projetant les énergies sur la base linéaire  $\Phi$ , la taille du système à résoudre est réduite :

$$\hat{\mathbf{M}}\ddot{\hat{\mathbf{q}}}(t) + \hat{\mathbf{C}}\dot{\hat{\mathbf{q}}}(t) + \hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{q}}(t) = \hat{\mathbf{F}}(t) \quad (2.50)$$

où  $\hat{\mathbf{q}} = \Phi' \mathbf{q}$  représente les nouvelles inconnues dans la base réduite,

$\hat{\mathbf{M}} = \Phi' \mathbf{M} \Phi$  la matrice de masse réduite,

$\hat{\mathbf{C}} = \Phi' \mathbf{C} \Phi$  la matrice d'amortissement et de gyroscopie réduite,

$\hat{\mathbf{K}} = \Phi' \mathbf{K} \Phi$  la matrice de raideur réduite,

$\hat{\mathbf{F}} = \Phi' \mathbf{F} \Phi$  le vecteur des forces extérieures projeté.

L'approximation sur la base modale permet de réduire la taille du système à un nombre égal au nombre de modes après troncature. Cependant, elle présente certains inconvénients. Premièrement, le problème vient du nombre de modes qu'il convient de conserver pour bien représenter le comportement dynamique du système. En général, on ne conserve que les modes dont la fréquence propre est inférieure à une valeur choisie. Ensuite, quand une non-linéarité est présente dans le système, en plus du problème concernant le nombre de modes à conserver pour avoir une bonne représentation dynamique du système, se pose celui du traitement des non linéarités. Sachant que des efforts non linéaires nécessitent la connaissance des déplacements dans la base physique pour pouvoir être déterminés, il est nécessaire de basculer, à chaque pas de temps, dans la base physique pour calculer les efforts  $\mathbf{F}$ , puis revenir dans la base modale pour déterminer  $\hat{\mathbf{F}}$ , puis résoudre le problème réduit. Cette lourdeur montre que le coût en terme de temps de calcul de cette opération peut être pénalisant. De plus, ces modes ayant été calculés sur une hypothèse de linéarité, la validité de cette hypothèse est partielle.

### 2.5.2 Sous-structuration dynamique de Craig-Bampton

La méthode plus adaptée pour étudier les comportements vibratoires d'un système constitué de plusieurs organes liés les uns aux autres par un petit nombre de degrés de liberté (ddl) est la méthode de sous-structuration dynamique. C'est le cas d'une machine tournante supportée par un nombre fini de paliers et butées eux-mêmes étant solidaires de structures non tournantes. La méthode de Craig-Bampton [CRA 68] est utilisée pour réduire la taille des modèles 3D volumiques.

La réduction de modèle par la méthode de Craig et Bampton se fait en plusieurs étapes. Il s'agit de construire la base constituée par deux types de modes :

- *Modes propres des sous-structures*, notés  $\Phi = [\dots\phi_j\dots]$ . Les modes contraints correspondent aux modes de la structure ayant ses degrés de liberté d'interface bloqués. Chaque

mode propre bloqué  $\phi_j$  de cette sous-structure est obtenu en résolvant le système avec l'interface bloquée :

$$\left( \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ib} & 0 \\ K_{bi} & K_{bb} & L_b^t \\ 0 & L_b & 0 \end{bmatrix} - \omega_j^2 \begin{bmatrix} M_{ii} & M_{ib} & 0 \\ M_{bi} & M_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{U}_i \\ \mathbf{U}_b \\ \lambda^{cb} \end{pmatrix}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

avec  $\mathbf{U}_i$  le vecteur des ddl internes à la sous-structure,  $\mathbf{U}_b$  le vecteur des ddl d'interface de la sous-structure, et  $\lambda^{cb}$  le vecteur des multiplicateurs de Lagrange associés aux relations  $L_b$  qui décrit les encastremets des interfaces de sous-structure.

Comme  $\mathbf{U}_b$  sont bloqués, le système (2.51) devient :

$$(K_{ii} - \omega_j^2 M_{ii}) \mathbf{U}_i = 0 \quad (2.52)$$

En pratique et comme mentionnée dans le paragraphe précédent, on tronquera la base  $\Phi = [\dots\phi_j\dots]$  afin d'avoir une réduction de modèle efficace. Les nouvelles inconnues  $\hat{\mathbf{q}}$  dans la base des modes contraints ont alors la relation suivante avec  $\mathbf{U}_i$  :

$$\mathbf{U}_i = \Phi \hat{\mathbf{q}} \quad (2.53)$$

- *Modes statiques des sous-structure*, notés  $\Psi = [\dots\psi_j\dots]$ . Les modes statiques correspondent aux déformées du domaine lorsque un déplacement unitaire est imposé à l'un des degrés de liberté d'interface alors que tous les autres sont bloqués. Il existe donc autant de modes statiques que de degrés de liberté d'interface. Il s'agit d'établir la relation cinématique entre les ddl internes de la structure et les ddl d'interface :

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ib} & 0 \\ K_{bi} & K_{bb} & L_{b\lambda} \\ 0 & L_{\lambda b} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{U}_i \\ \mathbf{U}_b \\ \lambda^{cb} \end{pmatrix}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U_j^{imp} \end{pmatrix}_j \quad (2.54)$$

où  $U_j^{imp}$  représente un vecteur avec seulement la  $j^e$  inconnue non nulle et égale à 1.

Les  $i$  premières équations sont choisies car  $K_{ii}$  est carrée et inversible, il vient :

$$K_{ii} \mathbf{U}_i + K_{ib} \mathbf{U}_b = 0 \quad (2.55)$$

$$\mathbf{U}_i = -K_{ii}^{-1} K_{ib} \mathbf{U}_b \quad (2.56)$$

$$\mathbf{U}_i = \Psi \mathbf{U}_b \quad (2.57)$$

### Changement de variable

La base de projection est construite en reliant les modes contraints conservés et les modes statiques. La projection du système s'opère donc selon la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_i \\ \mathbf{U}_b \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Psi \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{q}} \\ \mathbf{U}_b \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

Les ddl de frontière sont bien conservés.

### Projection des énergies dans la base de Craig-Bampton

En supposant  $[\hat{\mathbf{q}}, \mathbf{U}_b]^t$  le champ de déplacement projeté sur la base de Craig-Bampton, les énergies cinétiques, de déformation et le travail virtuel dans la base projetée prennent les formes suivantes :

$$\hat{\mathcal{T}} = \frac{1}{2} \{\dot{\mathbf{U}}_i \ \dot{\mathbf{U}}_b\} \mathbf{M} \{\dot{\mathbf{U}}_i \ \dot{\mathbf{U}}_b\}^t = \{\hat{\mathbf{q}} \ \dot{\mathbf{U}}_b\} \hat{\mathbf{M}} \{\hat{\mathbf{q}} \ \dot{\mathbf{U}}_b\}^t \quad (2.59)$$

$$\hat{\mathcal{E}}_d = \frac{1}{2} \{\mathbf{U}_i \ \mathbf{U}_b\} \mathbf{K} \{\mathbf{U}_i \ \mathbf{U}_b\}^t = \frac{1}{2} \{\hat{\mathbf{q}} \ \mathbf{U}_b\} \hat{\mathbf{K}} \{\hat{\mathbf{q}} \ \mathbf{U}_b\}^t \quad (2.60)$$

$$\delta \hat{\mathcal{F}} = \{\delta \mathbf{U}_i \ \delta \mathbf{U}_b\} \{f_i \ f_b\}^t = \{\delta \hat{\mathbf{q}} \ \delta \mathbf{U}_b\} \{\hat{f}_i \ \hat{f}_b\}^t \quad (2.61)$$

avec les matrices de raideur et de masse projetées

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \text{diag}(\hat{k}_j) & 0 \\ 0 & \Psi^t \mathbf{K} \Psi \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \text{diag}(\hat{m}_j) & \Psi^t \mathbf{M} \Phi \\ \Phi^t \mathbf{M} \Psi & \Psi^t \mathbf{K} \Psi \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

$f_i$  et  $f_b$  les forces appliquées sur les ddl internes et d'interface respectivement,  $\{\hat{f}_i \ \hat{f}_b\}^t$  le vecteur des forces extérieures réduit.

*Sous Cast3M, les solutions issues de la sous-structuration sont supportées par de nouveaux nœuds qui ne possède qu'une composante : ALFA pour les ddl réduits de contour et BETA pour les ddl réduits internes.*

## 2.6 Validation du modèle avec éléments finis 3D en dynamique linéaire

L'objectif est de modéliser avec deux types de maillage (EF 1D et EF 3D) un rotor académique pour tout d'abord quantifier le nombre d'éléments finis qu'il convient d'utiliser pour obtenir le compromis solution convergée/coût du calcul et aussi pour valider le maillage 3D par rapport au maillage 1D.

Le modèle étudié dans cette section est un rotor académique symétrique représenté dans la Figure 2.6 [LAL 98]. C'est un cas test des logiciels ROTORINSA et Code ASTER. L'arbre a une longueur de 1.3m, un diamètre de 0.1m, supporte trois disques aux abscisses 0.2m, 0.5m, et 1.m, et ses extrémités sont montées sur paliers. L'excitation est provoquée par un balourd sur le deuxième disque d'une valeur de  $2.10^{-4}$ kg.m.

### 2.6.1 Comparaison modèle avec éléments finis 1D, modèle avec éléments finis 3D

Deux types de modèles sont construits. Le premier est un modèle éléments finis composé d'éléments poutres de type Timoshenko. Les disques sont rigides et modélisés par des masses et des inerties ajoutées sur les nœuds de maillage. Pour le second modèle,

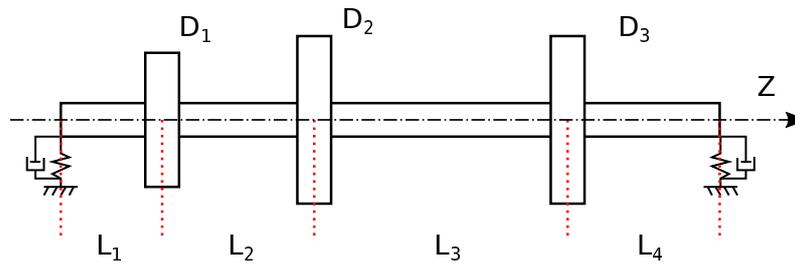


FIGURE 2.6: Schémas du rotor à trois disques [LAL 98]

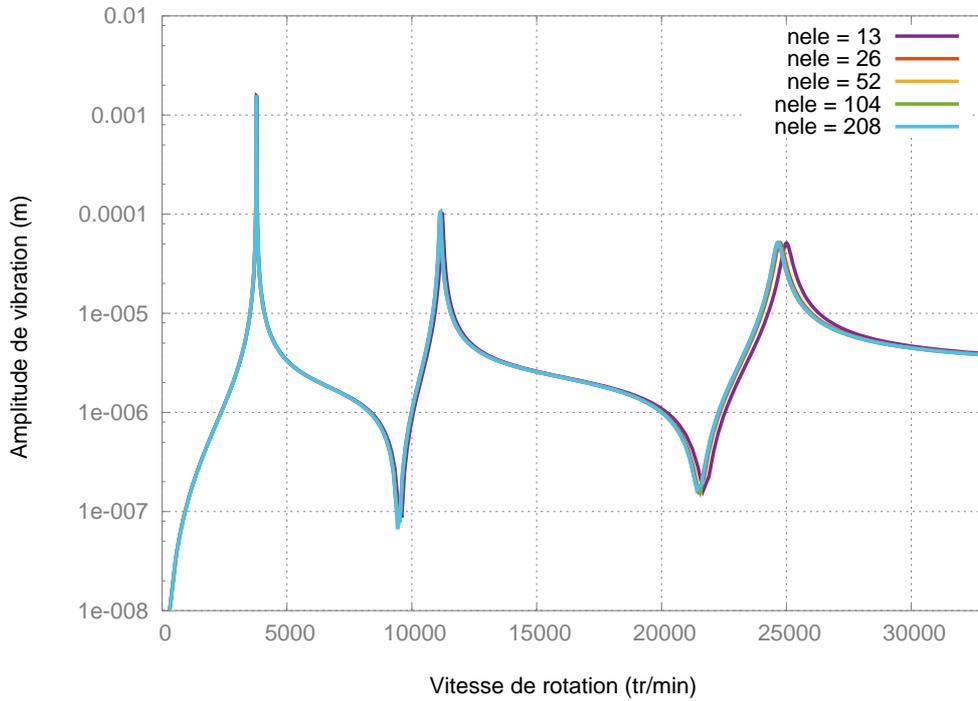
le rotor est modélisé par des éléments volumiques. Des calculs d'analyse modale et de réponses au balourd sont effectués sur les deux modèles, en faisant varier la finesse du maillage. L'objectif est de trouver le nombre minimum de ddl nécessaires pour obtenir des solutions convergées avec les modèles 1D et 3D, afin d'optimiser le coût de calcul en assurant un résultat satisfaisant. Ensuite, les comparaisons sont faites entre les deux modèles pour pouvoir valider le modèle 3D. On s'intéresse à une plage d'étude de 0 à 550Hz (33000tr/min), ce qui explique le choix du nombre de modes à observer dans la suite.

Pour le modèle 1D, les fréquences des huit premiers modes sont listées dans le Tableau 2.1. Il est observé une convergence monotone vers le bas en fonction de la finesse du maillage. Le maillage avec 26 éléments finis 1D fournit les huit premières fréquences avec une erreur inférieure à 1% par rapport aux fréquences calculées avec le maillage à 208 éléments finis 1D. Comme le système est linéaire, la réponse au balourd est calculée avec une seule harmonique dans la HBM et montre aussi une rapide convergence en fonction de la finesse du maillage. Le temps de calculs augmente quasi-linéairement avec le nombre total de ddl du système comme illustré dans le Tableau 2.2. Par souci d'efficacité, 26 est le nombre d'éléments choisi pour les calculs suivants à réaliser avec des éléments poutres.

Les maillages 3D sont réalisés avec des éléments hexaédriques isoparamétriques

Modes (Hz)	Nombre d'éléments de poutre				
	13	26	52	104	208
Flexion 1	62.22	62.07	62.03	62.02	62.02
	62.22	62.07	62.03	62.02	62.02
Flexion 2	179.89	178.91	178.66	178.60	178.58
	179.89	178.91	178.66	178.60	178.58
Flexion 3	349.95	347.85	347.32	347.18	347.15
	349.95	347.85	347.32	347.18	347.15
Flexion 4	552.90	546.91	545.41	545.03	544.93
	552.90	546.91	545.41	545.03	544.93

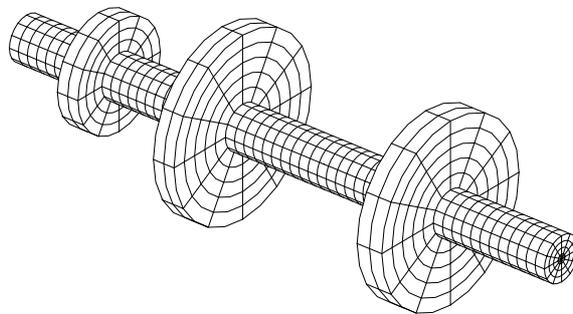
TABLE 2.1: Analyse modale du rotor modélisé par des éléments poutres en fonction du nombre d'éléments



**FIGURE 2.7:** Réponse au balourd au nœud du 2e disque, rotor modélisé par des éléments poutres avec différents maillages

Nombre d'éléments	13	26	52	104	208
Nombre ddl	78	156	312	624	1248
Nombre de pas	793	816	825	836	831
Nombre d'iter	2698	2777	2806	2842	2826
CPU Temps (cs)	4419	5387	12993	21119	39138
Temps(cs)/iter	1.64	1.94	4.63	7.43	13.85

**TABLE 2.2:** Nombre total d'itérations et temps de CPU pour calculer la réponse au balourd. Modèle poutre avec différentes finesses de maillage



**FIGURE 2.8:** Modèle du rotor de 3 disques avec éléments volumiques (maillage le plus fin dans Tableau 2.3)

linéaires à 8 nœuds (CUB8) et quadratiques à 20 nœuds (CUB20). En faisant varier le nombre d'éléments circonférentiels ou selon l'axe de rotation de l'arbre, les modèles comportent différents nombres totaux de ddl. Les fréquences propres trouvées sont listées dans le Tableau 2.3. Quand augmente la finesse du maillage, les fréquences propres tendent à diminuer, mais un écart avec les modèles en poutre (Tableau 2.1) subsiste, trois nouveaux modes sont apparus par rapport au modèle poutre : deux en torsion, un en axial comme montrés Figure 2.9.

Afin de satisfaire un compromis précision/temps de calcul, le modèle avec des éléments CUB20, 26 éléments dans la longueur et 24207 ddl au total, est utilisé pour calculer la réponse au balourd du modèle 3D (montré dans la Figure 2.10). Le décalage de cette courbe avec celle du modèle poutre est dû à la raideur du modèle 3D, ce qui s'explique par la modélisation des disques pour les deux types de maillages 1D et 3D : masse concentrée et donc sans raideur additionnelle pour le premier, masse et raideur modélisées pour le dernier.

### 2.6.2 Influence de réduction du modèle

Les calculs avec des modèles 3D sont très coûteux. La condensation de Craig-Bampton s'impose pour réduire le nombre de ddl du système à résoudre. Une analyse de l'influence de la réduction de modèle sur la réponse au balourd et les performances en temps de calcul est réalisée.

D'abord, les réponses au balourd des modèles poutres réduits sont calculées. Les

Type d'élément	CUB8	CUB8	CUB8	CUB20	CUB20	CUB20	CUB20
$N_{ele}$ circonférentiel	12	12	16	12	12	16	12
$N_{ele}$ transversal	13	26	13	13	26	26	52
Nombre ddl total	4344	6255	6732	16641	24207	38499	39339
Flexion 1	71.68	65.74	71.736	63.65	63.45	63.43	63.25
	71.68	65.74	71.736	63.65	63.45	63.43	63.25
Flexion 2	197.24	188.31	196.21	182.43	181.40	181.35	180.29
	197.24	188.31	196.21	182.43	181.40	181.35	180.29
Flexion 3	381.79	361.03	379.63	347.85	346.04	345.96	344.05
	381.79	361.03	379.63	347.85	346.04	345.96	344.05
Flexion 4	631.62	580.45	629.51	554.22	551.15	550.89	548.82
	631.62	580.45	629.51	554.22	551.15	550.89	548.82
Flexion 5	924.07	843.72	913.52	784.23	777.51	776.87	773.85
	924.07	843.72	913.52	784.23	777.51	776.87	773.85
Torsion 1	263.01	262.73	262.77	261.26	261.04	261.00	260.91
Torsion 2	747.82	746.52	746.64	739.56	738.55	738.41	737.98
Axiale 1	811.73	706.03	800.32	607.14	521.94	522.26	458.26

**TABLE 2.3:** Analyse modale du rotor modélisé par des éléments volumiques CUB8 ou CUB20 avec différentes finesses de maillage

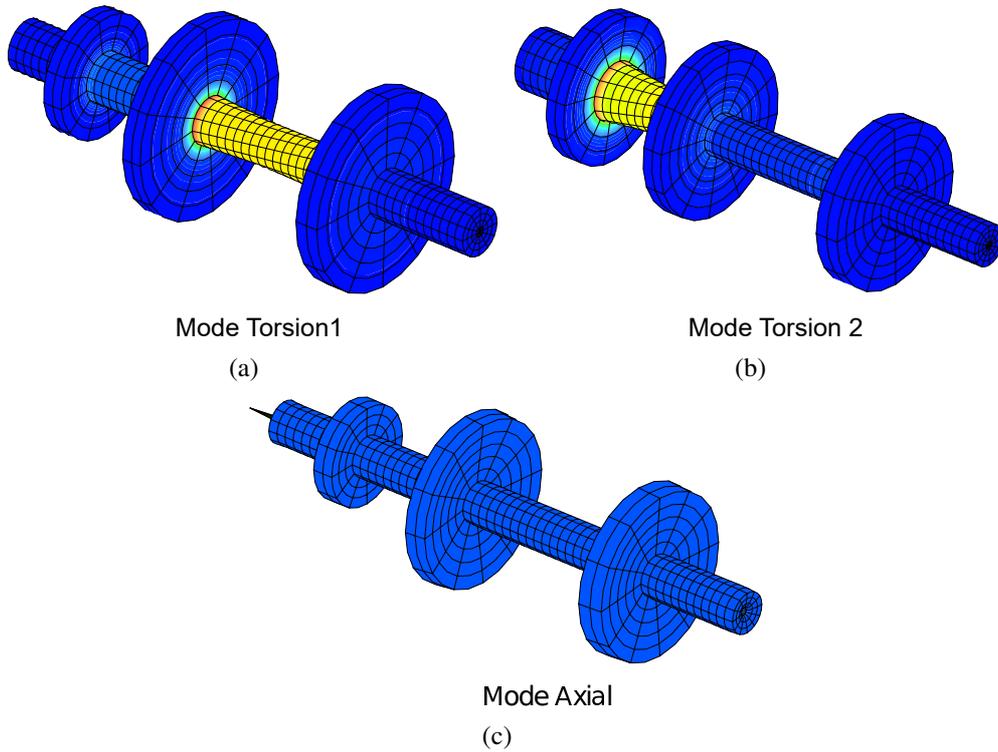


FIGURE 2.9: Déformée modales avec les contraintes de Von-Mises en isovolume

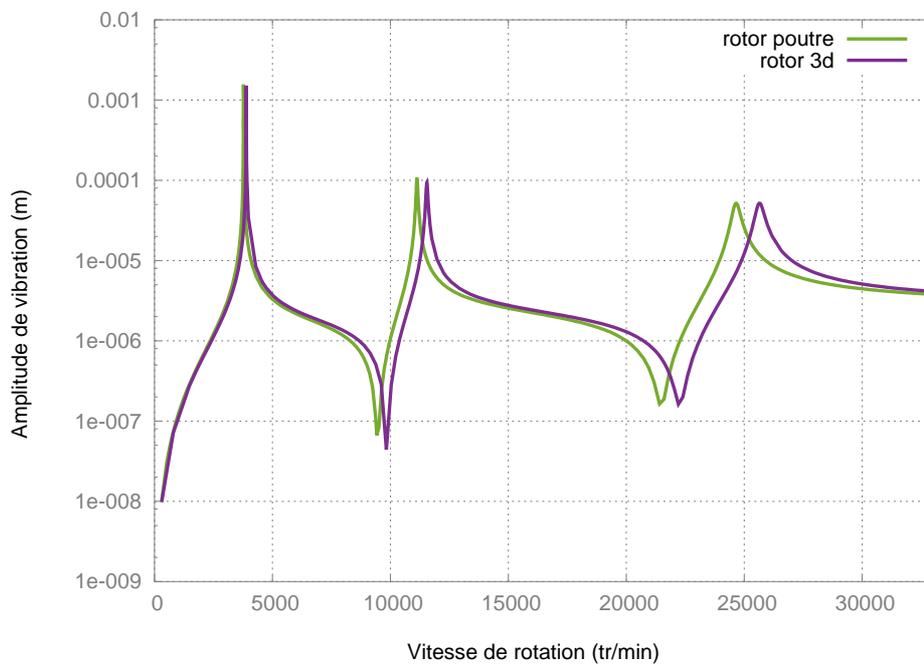
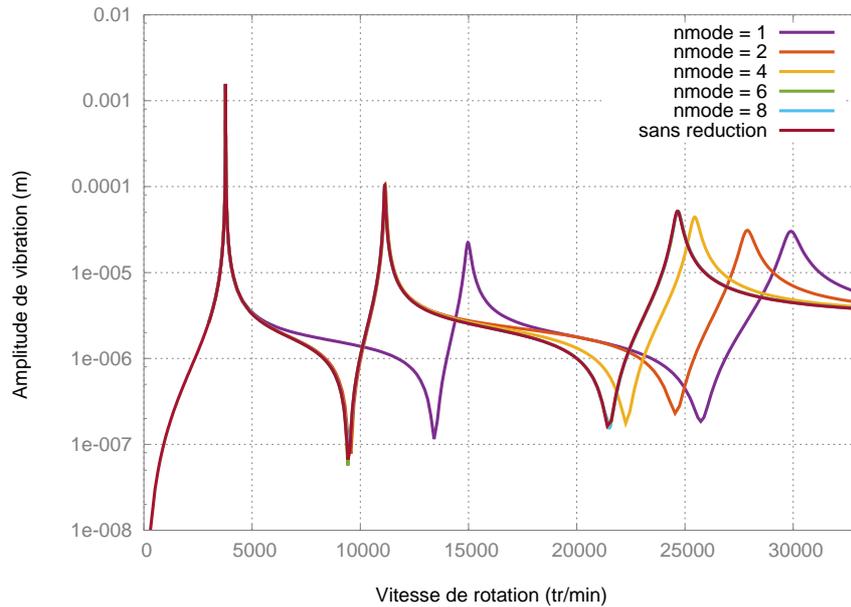


FIGURE 2.10: Réponse au balourd au nœud du centre du 2e disque, rotor modélisé par des éléments poutres (312 ddl) et volumiques (39339 ddl)

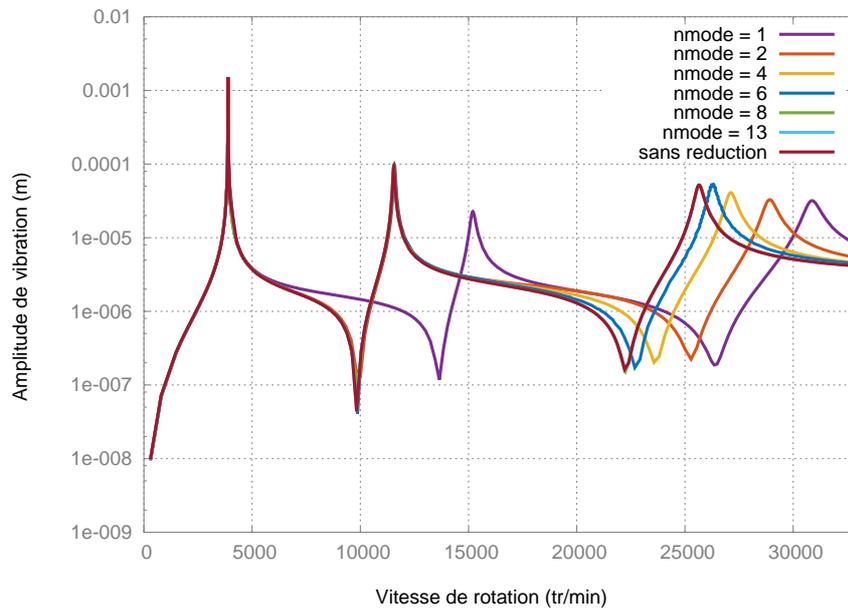


**FIGURE 2.11:** Réponse au balourd du rotor modélisé par des éléments poutres et réduit par Craig-Bampton avec différents nombres de modes contraints

modes à interfaces fixes sont choisis par pair. Dans la Figure 2.11,  $nmode = 1$  indique que seule la première paire de modes (flexion 1) est utilisée. Quand  $nmode = 8$ , 19 modes sont utiles (ce nombre est impair, car il y a d'autres modes présents n'apparaissent pas par paire, comme ceux de torsion, longitudinal...). Pour les deux premières résonances, une réduction sur les deux premiers modes ( $nmode = 2$  soit 4 modes) est satisfaisante pour l'étendue de vitesse de rotation considérée. A partir de  $nmode = 6$  (13 modes), la courbe de réponse coïncide avec le modèle complet (jusqu'à la troisième résonance).

La Figure 2.12 montre les résultats des modèles 3D réduits. On observe le même constat :  $nmode = 2$  (soit 4 modes) est suffisant pour les calculs de deux premières résonances,  $nmode = 8$  (soit 20 modes), pour les trois premières résonances.

Le calcul du modèle poutre réduit à 23 ddl (19 modes contraints soit  $nmode = 9$  et 4 modes statiques) a pris 3819cs au total pour la courbe de réponse au balourd en 2490 itérations, calcul des modes compris. Similairement pour le modèle 3D avec  $nmode = 8$  soit 20 modes contraints et 8 modes statiques, le temps de calcul est de 5401cs. Cela montre que lorsque la réduction du modèle de Craig et Bampton est utilisée, le nombre de ddl à calculer peut être petit, et le temps d'exécution reste modeste. Ce fait justifie l'utilisation des méthodes de réduction modale et montre qu'un faible nombre de modes est suffisant pour bien approximer la solution linéaire autour des toutes premières vitesses de résonance du système.



**FIGURE 2.12:** Réponse au balourd du rotor modélisé par des éléments volumiques et réduit par la méthode de Craig-Bampton avec différents nombres des modes contraints

## 2.7 Conclusion

Dans ce chapitre ont été présentés les éléments théoriques et numérique nécessaires à la modélisation avec un maillage tridimensionnel des machines tournantes. En particulier, les équations du mouvement et de liaison entre rotor et stator ont été détaillées. Les méthodes de réduction de modèle basées sur des approches type Craig et Bampton ont montré leur efficacité et sont utilisés par la suite. Les calculs des réponses au balourd ont montré qu'un faible nombre de modes est suffisant pour bien approximer la solution linéaire autour des toutes premières vitesses de résonance du système.

Ces modélisations ont été validées sur la base d'exemples numériques linéaires, et sont utilisées dans les approches numériques dans le domaine fréquentiel qui sont détaillées et étendues dans les deux chapitres suivants.



# Chapitre 3

## Réponses forcées stationnaires et non-linéaires

*Le chapitre se concentre sur l'aspect théorique des méthodes numériques pour la résolution, la prise en compte des non-linéarités, la continuation et l'analyse de stabilité des solutions trouvées. Les spécificités liées à l'analyse fréquentielle de rotors modélisés dans le repère tournant sont aussi présentées.*

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Méthode de l'équilibrage harmonique</b>	<b>55</b>
<b>3.2</b>	<b>Continuation</b>	<b>58</b>
3.2.1	Pas Prédicteur	58
3.2.2	Pas Correcteur	59
3.2.3	Suivi robuste des solutions périodiques	59
<b>3.3</b>	<b>Prise en compte des non-linéarités par la méthode Temps-Fréquence</b>	<b>61</b>
3.3.1	Principe de la méthode AFT	61
3.3.2	Expression des matrices jacobienes	63
3.3.3	Illustration sur l'oscillateur de Duffing	65
<b>3.4</b>	<b>Analyse de Stabilité</b>	<b>67</b>
3.4.1	Théorie de Floquet - Multiplicateurs de Floquet	67
3.4.2	Méthode de Hill - Exposants de Floquet	69
3.4.3	Illustration sur l'oscillateur de Duffing	70
<b>3.5</b>	<b>Prise en compte des spécificités liées à une modélisation du rotor dans le repère tournant</b>	<b>72</b>
3.5.1	Cinématique du rotor et du stator exprimés en harmonique	74
3.5.2	Liaison entre rotor et stator	75
3.5.3	Sous-structuration dans le domaine fréquentiel	79
3.5.4	Efforts non-linéaires par AFT	79
<b>3.6</b>	<b>Exemples d'application</b>	<b>82</b>
3.6.1	Rotor de Jeffcott avec contact rotor-stator	82
3.6.2	Rotor à 3 disques avec contact rotor-stator	87
<b>3.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>90</b>

---

Dans un premier temps, la méthode de la balance harmonique (HBM) qui traite le problème non-linéaire dans le domaine fréquentiel est présentée. Elle détermine rapidement le comportement périodique des machines tournantes en régime stationnaire. Son association à la méthode de continuation par pseudo-longueur d'arc aboutit à une description continue de l'ensemble des solutions d'équilibre dynamique sur la plage d'étude. La stabilité locale des solutions périodiques est également étudiée.

Ensuite, les déplacements du rotor et du stator sont exprimés et sont liés dans le domaine fréquentiel. Cette liaison, qui représente un changement de repère, est introduite par l'équilibrage des déplacements du rotor et du stator, couplant ainsi des harmoniques différentes. La sous-structuration dynamique du modèle avec des éléments finis 3D est considérée, pour réduire les temps de calcul au prix d'un traitement spécifique dans le domaine fréquentiel.

Un organigramme synthétise la procédure de calcul pour un rotor avec des éléments finis 3D par la HBM traitée avec le code de calcul Cast3M. Puis, des techniques numériques pour rendre l'algorithme plus robuste et plus efficace sont présentées. Enfin, des exemples d'application illustrent ces développements et concluent ce chapitre.

### 3.1 Méthode de l'équilibrage harmonique

La méthode de la balance harmonique (HBM) est une méthode classique qui résout les équations du mouvement dans le domaine fréquentiel par la recherche d'une solution périodique au système non-linéaire sous excitation périodique. Elle consiste à identifier la solution périodique sous la forme d'une série de Fourier tronquée, dont les coefficients sont estimés en résolvant un système d'équations algébriques, non-linéaires dans le cas traité.

Soit le modèle éléments finis établi dans le chapitre précédent. Les effets de rotation (comme les moments gyroscopiques, les forces de Coriolis, l'effet centrifuge, etc...) s'ajoutent aux termes d'amortissement et de rigidité. Les équations du mouvement pour les vibrations forcées d'une structure en rotation avec la prise en compte des non-linéarités s'écrit ainsi sous la forme :

$$r(\mathbf{q}, \omega, t) = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}(\omega)\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{p}(\omega, t) = 0 \quad (3.1)$$

où  $\mathbf{q}(t)$  est le vecteur de déplacements pour  $n$  degrés de liberté (ddl),  $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$  représentent respectivement des matrices de masse, d'amortissement et de gyroscopie, et de rigidité avec une taille de  $n \times n$ ,  $\mathbf{p}(t)$  est le vecteur des efforts d'excitation. Dans le cas où l'excitation est périodique de fréquence  $\omega$ , la réponse en régime établi est supposée également périodique. Les déplacements, les forces non-linéaires et les forces extérieures sont exprimés sous forme de séries de Fourier tronquée à l'ordre  $H$  :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q}(t) &= \mathbf{Q}^0 + \sum_{k=1}^H \mathbf{Q}_c^k \cos(k\omega t) + \mathbf{Q}_s^k \sin(k\omega t) \\
 \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \mathbf{F}^0 + \sum_{k=1}^H \mathbf{F}_c^k \cos(k\omega t) + \mathbf{F}_s^k \sin(k\omega t) \\
 \mathbf{p}(\omega, t) &= \mathbf{P}^0 + \sum_{k=1}^H \mathbf{P}_c^k \cos(k\omega t) + \mathbf{P}_s^k \sin(k\omega t)
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Les vecteurs des coefficients de Fourier  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{F}_{nl}$ , et  $\mathbf{P}$  sont de taille  $L = n \times (2H + 1)$  :

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{Q}^{0T}, \mathbf{Q}_c^{1T}, \mathbf{Q}_s^{1T}, \dots, \mathbf{Q}_c^{HT}, \mathbf{Q}_s^{HT}]^T \tag{3.3}$$

$$\mathbf{F}_{nl} = [\mathbf{F}^{0T}, \mathbf{F}_c^{1T}, \mathbf{F}_s^{1T}, \dots, \mathbf{F}_c^{HT}, \mathbf{F}_s^{HT}]^T \tag{3.4}$$

$$\mathbf{P} = [\mathbf{P}^{0T}, \mathbf{P}_c^{1T}, \mathbf{P}_s^{1T}, \dots, \mathbf{P}_c^{HT}, \mathbf{P}_s^{HT}]^T \tag{3.5}$$

La transformation discrète de Fourier inverse est réalisée par l'opérateur linéaire  $\mathbb{T}$  de taille  $1 \times (2H + 1)$  constitué des fonctions trigonométriques élémentaires suivantes :

$$\mathbb{T}(\omega t) = [1 \quad \cos(\omega t) \quad \sin(\omega t) \quad \dots \quad \cos(H\omega t) \quad \sin(H\omega t)] \tag{3.6}$$

Ainsi, les équations (3.2) sont réécrites sous les formes compactes :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q}(t) &= (\mathbb{T}(\omega t) \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{Q} \\
 \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= (\mathbb{T}(\omega t) \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{F}_{nl} \\
 \mathbf{p}(\omega, t) &= (\mathbb{T}(\omega t) \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{P}
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

avec  $\otimes$  le produit tensoriel de Kronecker, et  $\mathbf{I}_n$  la matrice unité de taille  $n \times n$ .

Les vecteurs de la vitesse et de l'accélération s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{q}}(t) &= \omega (\mathbb{T}(\omega t) \otimes \mathbf{I}_n) (\nabla \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{Q} = \omega [(\mathbb{T}(\omega t) \nabla) \otimes \mathbf{I}_n] \mathbf{Q} \\
 \ddot{\mathbf{q}}(t) &= \omega^2 (\mathbb{T}(\omega t) \otimes \mathbf{I}_n) (\nabla^2 \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{Q} = \omega^2 [(\mathbb{T}(\omega t) \nabla^2) \otimes \mathbf{I}_n] \mathbf{Q}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

en introduisant l'opérateur dérivée :

$$\nabla = \text{diag}(\mathbf{0}, \nabla_1, \dots, \nabla_j, \dots, \nabla_H) \quad \text{avec} \quad \nabla_j = j \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

La procédure de Galerkin est ensuite appliquée à l'équation du mouvement. Elle consiste à projeter l'Eq. (3.1) sur la base trigonométrique  $\mathbb{T}(\omega, t)$  par rapport au produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T f \cdot g dt \tag{3.10}$$

Puis, les équations (3.7) et (3.8) sont aussi introduites. En utilisant la propriété d'orthogonalité  $\langle \mathbb{T}(\omega t), \mathbb{T}(\omega t) \rangle = \mathbf{I}_{2H+1}$ , le système des  $n$  équations non-linéaires (3.1) dans le

domaine temporel est transformé en système d'équations algébriques dans le domaine fréquentiel :

$$\mathbf{R}(\mathbf{Q}, \omega) = \mathbf{Z}(\omega)\mathbf{Q} + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{Q}) - \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (3.11)$$

avec

$$\mathbf{Z}(\omega) = \omega^2 \nabla^2 \otimes \mathbf{M} + \omega \nabla \otimes \mathbf{C} + \mathbf{I}_{2H+1} \otimes \mathbf{K} = \text{diag}(\mathbf{K}, \mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_j, \dots, \mathbf{Z}_H) \quad (3.12)$$

$$\text{où } \mathbf{Z}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{K} - j^2 \omega^2 \mathbf{M} & j\omega \mathbf{C} \\ -j\omega \mathbf{C} & \mathbf{K} - j^2 \omega^2 \mathbf{M} \end{bmatrix}$$

La méthode de l'équilibrage harmonique remplace le problème décrit dans le domaine temporel avec une équation différentielle par un problème décrit dans le domaine fréquentiel avec une équation algébrique non-linéaire. Elle est très adaptée au cas des machines tournantes dont le mouvement est souvent périodique.

La procédure de Newton-Raphson est utilisée pour obtenir des solutions de l'Eq. (3.11), avec des corrections  $\delta \mathbf{Q}$  solutions de :

$$\mathbf{R}_Q^k \delta \mathbf{Q} = -\mathbf{R}^k \quad (3.13)$$

$$\mathbf{Q}^{k+1} = \mathbf{Q}^k + \delta \mathbf{Q} \quad (3.14)$$

où  $\mathbf{R}_Q$  représente la dérivée partielle de  $\mathbf{R}$  par rapport à  $\mathbf{Q}$ , l'exposant  $k$  indique une évaluation avec des variables mises à jour à l'itération  $k$  :

$$\mathbf{R}^k = \mathbf{R}(\mathbf{Q}^k, \omega^k) \quad \mathbf{R}_Q^k = \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{Q}} \right|_{\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^k, \omega=\omega^k} \quad (3.15)$$

*Sous Cast3M, l'implémentation de la HBM est réalisée en pratique par un changement des inconnues. Les ddl associés à chaque nœud du maillage sont dupliqués jusqu'à l'ordre de troncature des harmoniques retenus. Les inconnues 'PRIMAL' et 'DUAL' sont dupliquées de la façon suivante :*

Déplacements : UX, UY, UZ, RX, RY, RZ → ordre 0 : U1, U2, U3, U4, U5, U6,  
ordre 1 en cos : U7, U8, U9, U10, U11, U12,  
ordre 1 en sin : V7, V8, V9, V10, V11, V12,

...

Réactions : FX, FY, FZ, MX, MY, MZ → ordre 0 : F1, F2, F3, F4, F5, F6,  
ordre 1 encos : F7, F8, F9, F10, F11, F12,  
ordre 1 en sin : G7, G8, G9, G10, G11, G12,

...

## 3.2 Continuation

Les systèmes non-linéaires ont la particularité de souvent présenter plusieurs réponses possibles pour une valeur donnée de la fréquence d'excitation  $\omega$ . Une méthode de résolution incrémentale (calculs réalisés pour une suite de fréquences prédéterminées) ne pourra donner qu'une solution par valeur de  $\omega$ . Il est alors plus judicieux d'utiliser une technique capable de suivre les branches solutions de manière continue, et ce, malgré la présence de points singuliers. La technique de continuation par longueur d'arc couplée avec l'algorithme présenté précédemment permet cela en considérant  $\omega$  comme une inconnue. La continuation se fait en deux étapes : prédiction et correction [SEY 09].

### 3.2.1 Pas Prédicteur

A partir du premier point convergé de la courbe de réponse  $(Q^0, \omega^0)$  obtenu en résolvant l'Eq. (3.13), l'étape de prédiction consiste à essayer de déterminer la solution pour la prochaine valeur de  $\omega$ . La prédiction se fait dans une direction tangente à la courbe solution. La direction du vecteur tangent  $t = (\Delta Q^1, \Delta \omega^1)$  est obtenu en exprimant la différentielle totale de  $R$  en  $(Q^0, \omega^0)$ . On a :

$$R(Q^0, \omega^0) = 0 \quad (3.16)$$

d'où

$$\Delta R(Q^0, \omega^0) = \left. \frac{\partial R}{\partial Q} \right|_{Q^0, \omega^0} \Delta Q + \left. \frac{\partial R}{\partial \omega} \right|_{Q^0, \omega^0} \Delta \omega = 0 \quad (3.17)$$

qu'on réécrit sous la forme :

$$R_Q^0 \cdot \Delta Q^1 + R_\omega^0 \cdot \Delta \omega^1 = 0 \quad (3.18)$$

avec  $R_Q^0$  et  $R_\omega^0 = \frac{\partial R}{\partial \omega}$  les deux matrices jacobiennes du système calculées en  $(Q^0, \omega^0)$ . Il reste à fixer la norme du vecteur tangent  $t$  égale à  $\Delta s$  qui représente la longueur du pas.

$$\|t\|^2 = \Delta Q^1 T \Delta Q^1 + \Delta \omega^1^2 = \Delta s^2 \quad (3.19)$$

Ainsi, la procédure pour déterminer le vecteur tangent  $t$  est la suivante :

1. Résoudre le système suivant :

$$R_Q^0 \Delta \widehat{Q}^1 = -R_\omega^0 \quad \text{où} \quad \Delta \widehat{Q}^1 = \Delta Q^1 / \Delta \omega^1 \quad (3.20)$$

2. En déduire  $\Delta \omega^1$  par l'équation suivante :

$$\Delta \omega^1 = \pm \frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta \widehat{Q}^1 T \Delta \widehat{Q}^1 + 1}} \quad (3.21)$$

3. Le signe de  $\Delta \omega^1$  est choisi de sorte que deux vecteurs tangents successifs aient un produit scalaire positif (pas de retour sur une solution déjà décrite).

Une fois le vecteur tangent normé  $t$  calculé, la prédiction est obtenue à partir de la dernière solution convergée obtenue :

$$\begin{pmatrix} Q^1 \\ \omega^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^0 \\ \omega^0 \end{pmatrix} + t \quad (3.22)$$

### 3.2.2 Pas Correcteur

La solution prédite ne vérifie généralement pas l'équation d'équilibre. On calcule donc des corrections  $(\delta Q, \delta \omega)$  de façon itérative de sorte à annuler le résidu, i.e.

$$R(Q^1 + \delta Q, \omega^1 + \delta \omega) \approx R(Q^1, \omega^1) + R_Q^1 \cdot \delta Q + R_\omega^1 \cdot \delta \omega = 0 \quad (3.23)$$

On impose également que les corrections se fassent dans une direction orthogonale au vecteur  $t$ . Le système à résoudre de taille  $(L + 1)$  devient à l'itération  $k$  :

$$J^{ck} \begin{Bmatrix} \delta Q \\ \delta \omega \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_Q^k & R_\omega^k \\ \Delta Q^{1T} & \Delta \omega^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta Q \\ \delta \omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -R^k \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

où  $J^c$  est la matrice jacobienne augmentée par la continuation. La continuation par pseudo-longueur d'arc ajoute donc une equation et une inconnue au système à résoudre. A chaque itération de la procédure de Newton-Raphson, une correction sur  $Q$  et  $\omega$  est apportée. La solution à l'itération  $k + 1$  est donc renouvelée par :

$$\begin{cases} Q^{k+1} &= Q^k + \delta Q \\ \omega^{k+1} &= \omega^k + \delta \omega \end{cases} \quad (3.25)$$

Le calcul itératif a convergé lorsque la précision relative requise  $\varepsilon$  est atteinte. Le critère de convergence est soit en correction  $\frac{\|\delta Q\|}{\|Q\|} < \varepsilon$ , soit basé sur la norme du résidu  $\frac{\max(\|R\|)}{\max(\|Z \cdot Q\|, \|P\|)} < \varepsilon$ .

L'algorithme de la HBM couplé avec la continuation par longueur d'arc est décrit dans la Figure 3.1. Cette méthode de continuation est utilisée pour suivre les branches de réponse du système non-linéaire, et aussi pour les études paramétriques dans le prochain chapitre.

### 3.2.3 Suivi robuste des solutions périodiques

#### Pas adaptatif

La longueur du pas de continuation  $\Delta s$  (3.22) est adaptée de façon continue tout au long de l'étude paramétrique en fonction de la difficulté de convergence de la procédure de Newton-Raphson [SEY 09]. Dans les zones où un plus grand nombre d'itérations est nécessaire pour converger (par exemple dans une zone où la réponse varie fortement avec  $\omega$ ) alors la valeur de  $\Delta s$  est diminuée afin de réduire le nombre d'itérations nécessaire à la

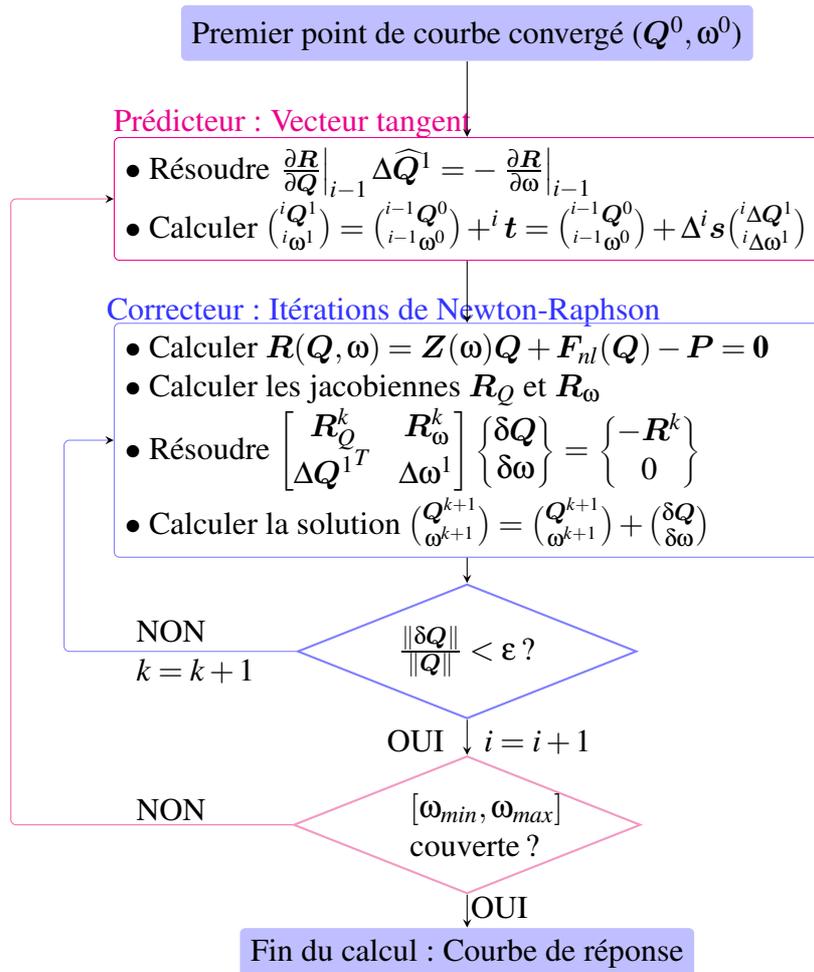


FIGURE 3.1: Schéma de la HBM avec continuation.

convergence du pas suivant. Ainsi, après chaque solution calculée, il est possible d'ajuster la valeur de  $\Delta s$  avec la formule suivante :

$${}^{i+1}\Delta s = {}^i\Delta s \cdot 2^{\frac{n_{iter}-n_{opt}}{n_{opt}}} \quad (3.26)$$

avec  $n_{iter}$  le nombre d'itérations de Newton-Raphson au pas  $i$ , et  $n_{opt}$  le nombre ciblé d'itérations de Newton-Raphson qui est souvent choisi entre 3 et 6 (pour les cas où la procédure quasi-Newton est utilisée).

### Angle consécutif

Une autre technique est appliquée pour ajuster la longueur du pas au cours de calcul. Pour ce faire, l'angle  $\hat{\alpha}$  entre les directions  $t$  de l'étape prédicteur de deux pas consécutifs doit appartenir à la plage  $[\hat{\alpha}_{mini}, \hat{\alpha}_{maxi}]$ . Si  $|\hat{\alpha}| < \hat{\alpha}_{mini}$ , la courbe est très proche d'une droite, et la longueur du pas actuel de prédiction peut être augmenté  ${}^i\Delta s = 1.5 * {}^i\Delta s$ . Si  $\hat{\alpha} > \hat{\alpha}_{maxi}$ , la pente de la courbe de réponse varie rapidement et la longueur du pas actuel doit être réduite :  ${}^i\Delta s = 0.25 * {}^i\Delta s$ .

## 3.3 Prise en compte des non-linéarités par la méthode Temps-Fréquence

Pour effectuer les itérations de Newton-Raphson dans le cadre de la HBM, il faut être capable d'évaluer le résidu  $R(Q^k, \omega^k)$  et les jacobiennes du système. En supposant que les forces non-linéaires ne dépendent que des coefficients  $Q$ , on a :

$$\begin{aligned} R_Q^k &= Z(\omega^k) + \left. \frac{\partial F_{nl}}{\partial Q} \right|_{Q^k} \\ R_\omega^k &= Z_\omega(\omega^k)Q^k - P_\omega(\omega^k) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Le calcul de  $F_{nl}(Q)$  et de sa dérivée  $\frac{\partial F_{nl}}{\partial Q}$  nécessite l'évaluation des coefficients de Fourier des efforts non-linéaires en fonction de ceux des déplacements. Si une relation analytique entre les deux grandeurs  $F_{nl}$  et  $Q$  est connue, alors  $F_{nl}$  est déduit directement à partir de  $Q$ . Si la formule analytique reliant les efforts aux déplacements est connue seulement dans le domaine temporel, des développements analytiques spécifiques à ce type de non-linéarité sont donc nécessaires pour exprimer les coefficients de Fourier des efforts non-linéaires. Selon le type de non-linéarité, ces développements peuvent être très lourds voire impossibles. Ainsi, pour calculer  $F_{nl}$  et  $\frac{\partial F_{nl}}{\partial Q}$ , l'approche AFT (Alternating Frequency Time) est généralement préférée.

### 3.3.1 Principe de la méthode AFT

La méthode AFT consiste à exploiter la facilité à exprimer la force non-linéaire dans le domaine temporel. Cette méthode a l'avantage d'être générique car elle rend possible le

traitement fréquentiel de tous les types de non-linéarité. Comme décrit par la Figure 3.2, les déplacements temporels sont d'abord construits grâce à la transformation discrète de Fourier ( $DFT^{-1}$ ) inverse, puis les forces non-linéaires  $f_{nl}(\mathbf{q})$  sont calculées analytiquement dans le domaine temporel, ensuite la DFT est utilisée pour construire le contenu fréquentiel de  $F_{nl}(\mathbf{Q})$ .

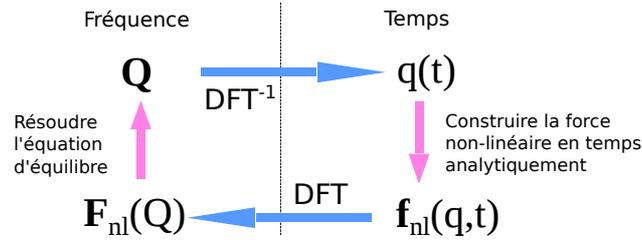


FIGURE 3.2: Méthode de temps-fréquence.

Les  $N$  échantillons temporels  $t_i = i\Delta t, i = 1, \dots, N$  sont définis avec  $\Delta t = \frac{T}{N}$  où  $T = 2\pi/\omega$  et  $N \geq (2H + 1)$ . Les vecteurs des déplacements et des forces non-linéaires temporelles correspondant aux temps  $t_i$  s'écrivent :

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{q}} &= [\mathbf{q}(t_1), \dots, \mathbf{q}(t_N)]^T \\ \bar{\mathbf{f}}_{nl} &= [\mathbf{f}_{nl}(t_1), \dots, \mathbf{f}_{nl}(t_N)]^T\end{aligned}\quad (3.28)$$

En appliquant l'Eq. (3.7), on peut exprimer les vecteurs temporels de déplacement et de vitesse en fonction des coefficients de Fourier via la simple DFT inverse :

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{q}} &= [\mathbb{T}(\omega t_1) \otimes \mathbf{I}_n, \dots, \mathbb{T}(\omega t_N) \otimes \mathbf{I}_n]^T \mathbf{Q} = (\Gamma \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{Q} \\ \bar{\dot{\mathbf{q}}} &= [\mathbb{T}(\omega t_1) \otimes \mathbf{I}_n, \dots, \mathbb{T}(\omega t_N) \otimes \mathbf{I}_n]^T (\nabla \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{Q} \\ &= \omega(\Gamma \otimes \mathbf{I}_n)(\nabla \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{Q} = \omega[(\Gamma \nabla) \otimes \mathbf{I}_n] \mathbf{Q}\end{aligned}\quad (3.29)$$

On remarque que les matrices  $\Gamma$  et  $\Gamma^{-1}$  ne dépendent pas de  $\omega$ , elles sont donc écrites sous la forme suivante en introduisant  $\theta_i = \omega t_i = 2\pi i/N$  et calculées une seule fois :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & \dots & \cos H\theta_1 & \sin H\theta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos \theta_N & \sin \theta_N & \dots & \cos H\theta_N & \sin H\theta_N \end{bmatrix}\quad (3.30)$$

$$\Gamma^{-1} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 2 & \dots & 2 \\ \cos \theta_1 & \dots & \cos \theta_N \\ \sin \theta_1 & \dots & \sin \theta_N \\ \vdots & & \vdots \\ \cos H\theta_1 & \dots & \cos H\theta_N \\ \sin H\theta_1 & \dots & \sin H\theta_N \end{bmatrix}\quad (3.31)$$

Puis, les forces non-linéaires  $\bar{\mathbf{f}}_{nl}$  sont calculées à partir de  $\bar{\mathbf{q}}$  et  $\bar{\dot{\mathbf{q}}}$  dans le domaine temporel. Son expression fréquentielle est ensuite déterminée par la DFT :

$$\mathbf{F}_{nl} = (\Gamma \otimes \mathbf{I}_n)^{-1} \bar{\mathbf{f}}_{nl} = (\Gamma^{-1} \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\mathbf{f}}_{nl}\quad (3.32)$$

### 3.3.2 Expression des matrices jacobiennes

A chaque itération de l'algorithme, il faut calculer la jacobienne du système d'une taille  $L \times L$ . Il s'agit donc de trouver les dérivées des coefficients de Fourier des efforts non-linéaires par rapport à ceux des déplacements  $\frac{\partial \mathbf{F}_{nl}}{\partial \mathbf{Q}}$ .

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{nl}}{\partial \mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_0}{\partial Q_0} & \frac{\partial F_0}{\partial Q_1} & \cdots & \frac{\partial F_0}{\partial Q_{2H}} \\ \frac{\partial F_1}{\partial Q_0} & \frac{\partial F_1}{\partial Q_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial Q_{2H}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_{2H}}{\partial Q_0} & \frac{\partial F_{2H}}{\partial Q_1} & \cdots & \frac{\partial F_{2H}}{\partial Q_{2H}} \end{bmatrix} \quad (3.33a)$$

avec chaque terme :

$$\frac{\partial F_i}{\partial Q_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_i^0}{\partial Q_j^0} & \frac{\partial F_i^0}{\partial Q_j^1} & \cdots & \frac{\partial F_i^0}{\partial Q_j^n} \\ \frac{\partial F_i^1}{\partial Q_j^0} & \frac{\partial F_i^1}{\partial Q_j^1} & \cdots & \frac{\partial F_i^1}{\partial Q_j^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_i^n}{\partial Q_j^0} & \frac{\partial F_i^n}{\partial Q_j^1} & \cdots & \frac{\partial F_i^n}{\partial Q_j^n} \end{bmatrix}$$

La première méthode pour calculer la jacobienne est numérique et consiste à calculer la matrice **par différences finies**. Générique et facile à programmer, elle peut s'avérer très lourde en temps de calcul.

Une seconde approche, **la transformation de Fourier rapide (FFT)**, peut également être utilisée pour construire la jacobienne. Les conventions suivantes sont adoptées pour la dérivée des forces non-linéaires :

$$\left. \frac{\partial \mathbf{F}_{nl}}{\partial \mathbf{Q}} \right|_{k,l} = \frac{\partial F_k}{\partial Q_l} = \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{m-1} e^{-\frac{i2\pi kt}{m}} \left[ \frac{\partial \mathbf{f}_{nl}}{\partial \mathbf{q}} \right]_{q=q(t)} \frac{\partial q(t)}{\partial Q_l} \quad (3.34)$$

Le nombre de points du signal temporel est une puissance de 2, et il influe beaucoup sur la précision du contenu fréquentiel obtenu par FFT donc sur l'efficacité de convergence de solution, surtout où l'effet non-linéaire est important. Typiquement, il faut que la composante fréquentielle  $L$  soit représentée par environ  $10 * L$  instants durant la période. Le détail du calcul des termes de la jacobienne à partir de l'Eq. (3.34) est donné par l'Eq. (3.35) où

se distinguent les cas suivants selon les harmoniques  $k$  et  $l$  :

$$\frac{\partial F_k}{\partial Q_l} = \begin{cases} \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{m-1} \cos\left(\frac{2\pi kt}{m}\right) \left[ \frac{\partial \mathbf{f}_{nl}}{\partial \mathbf{q}} \right]_{q=q(t)} \cos\left(\frac{2\pi lt}{m}\right) & \text{si } k \text{ et } l \text{ pairs} \\ \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{m-1} \cos\left(\frac{2\pi kt}{m}\right) \left[ \frac{\partial \mathbf{f}_{nl}}{\partial \mathbf{q}} \right]_{q=q(t)} \sin\left(-\frac{2\pi lt}{m}\right) & \text{si } k \text{ pair et } l \text{ impair} \\ \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{m-1} \sin\left(\frac{2\pi kt}{m}\right) \left[ \frac{\partial \mathbf{f}_{nl}}{\partial \mathbf{q}} \right]_{q=q(t)} \cos\left(\frac{2\pi lt}{m}\right) & \text{si } k \text{ impair et } l \text{ pair} \\ \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{m-1} \sin\left(\frac{2\pi kt}{m}\right) \left[ \frac{\partial \mathbf{f}_{nl}}{\partial \mathbf{q}} \right]_{q=q(t)} \sin\left(-\frac{2\pi lt}{m}\right) & \text{si } k \text{ et } l \text{ impairs} \end{cases} \quad (3.35)$$

avec  $k, l = 0, 1, \dots, H$  le nombre d'harmoniques. Le calcul de chaque terme contribue à la construction de la matrice jacobienne de l'Eq. (3.33). L'avantage de cette approche est le calcul de matrices élémentaires de petites tailles. Quand la non-linéarité est localisée (ce qui est souvent le cas), seules les composantes concernées dans l'Eq. (3.33) sont calculées et stockées en mémoire.

La troisième façon de calculer la jacobienne est la plus simple à mettre en œuvre. Elle repose sur une écriture **par la DFT** [NAR 98]. Basée sur le même principe que FFT, elle s'écrit sous une forme plus compacte. La  $F_{nl}$  est construite en utilisant l'Eq. (3.32), et la dérivée  $\frac{\partial F_{nl}}{\partial Q}$  est formée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{nl}}{\partial Q} &= \frac{\partial F_{nl}}{\partial \mathbf{f}_{nl}} \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}_{nl}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial Q} + \frac{\partial F_{nl}}{\partial \mathbf{f}_{nl}} \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}_{nl}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial Q} \\ &= (\Gamma^{-1} \otimes \mathbf{I}_n) \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}_{nl}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} (\Gamma \otimes \mathbf{I}_n) + (\Gamma^{-1} \otimes \mathbf{I}_n) \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}_{nl}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \omega [(\Gamma \nabla) \otimes \mathbf{I}_n] \end{aligned} \quad (3.36)$$

avec les matrices bloc-diagonales des dérivées de taille  $nN \times nN$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}_{nl}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} &= \text{diag} \left( \left. \frac{\partial \mathbf{f}_{nl}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{t=t_1}, \dots, \left. \frac{\partial \mathbf{f}_{nl}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{t=t_N} \right) \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}_{nl}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} &= \text{diag} \left( \left. \frac{\partial \mathbf{f}_{nl}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{t=t_1}, \dots, \left. \frac{\partial \mathbf{f}_{nl}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{t=t_N} \right) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Une fois le terme non-linéaire  $\frac{\partial F_{nl}}{\partial Q}$  calculé par l'une des trois méthodes présentées ci-dessus, la matrice jacobienne  $\mathbf{R}_Q$  de l'Eq. (3.27) est accessible car  $\mathbf{Z}(\omega)$  est déjà connu. Par ailleurs, comme  $\mathbf{Z}_\omega$  est calculé avec le formalisme DFT :

$$\mathbf{Z}_\omega = \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \omega} = 2\omega \nabla^2 \otimes \mathbf{M} + \nabla \otimes \mathbf{C} \quad (3.38)$$

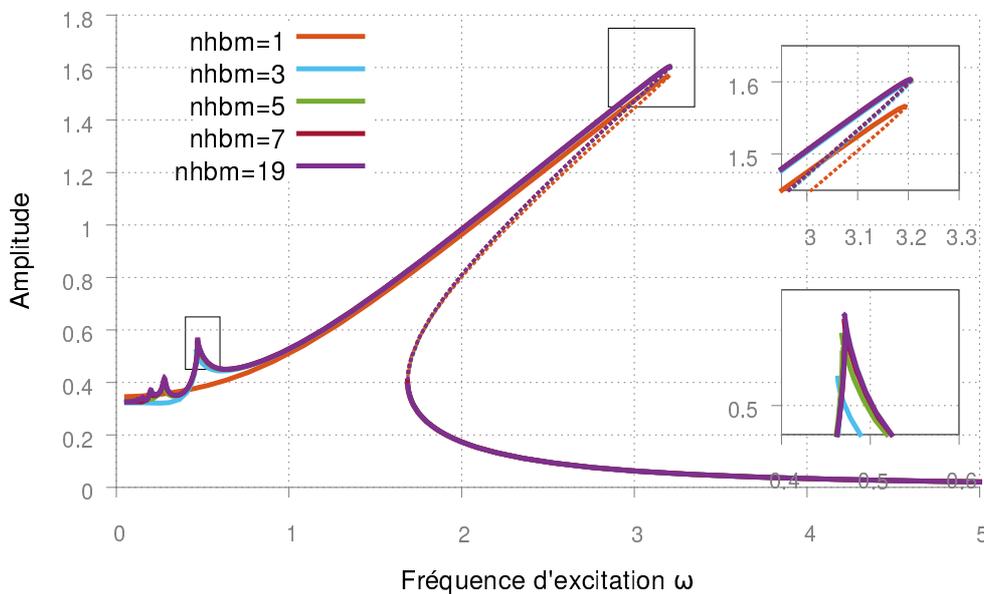
la jacobienne  $\mathbf{R}_\omega$  elle est aussi obtenue, voir l'Eq. (3.27). Cette méthode rend aisé le calcul de la matrice jacobienne par rapport à la méthode des différences finies, et la programmation par rapport à la FFT. Elle est bien adaptée à une implémentation dans Matlab, mais moins efficace dans Cast3M où la construction de matrices pleines  $\Gamma \otimes \mathbf{I}_n$ ,  $\Gamma^{-1} \otimes \mathbf{I}_n$  et  $\Gamma \nabla \otimes \mathbf{I}_n$  n'est pas souhaitable. L'approche FFT sera donc préférée dans ce code éléments finis.

### 3.3.3 Illustration sur l'oscillateur de Duffing

L'oscillateur de Duffing est un système discret à un degré de liberté dont la non-linéarité est la force de rappel proportionnelle au cube du déplacement. Il est utilisé pour illustrer la méthode présentée car c'est un système non-linéaire élémentaire mais suffisamment riche et représentatif. Son mouvement forcé est régi par l'équation différentielle du second ordre sous la forme adimensionnée suivante :

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\dot{x}(t) + \omega_0^2x(t) + k_{nl}x(t)^3 = p_0 \cos(\omega t) \quad (3.39)$$

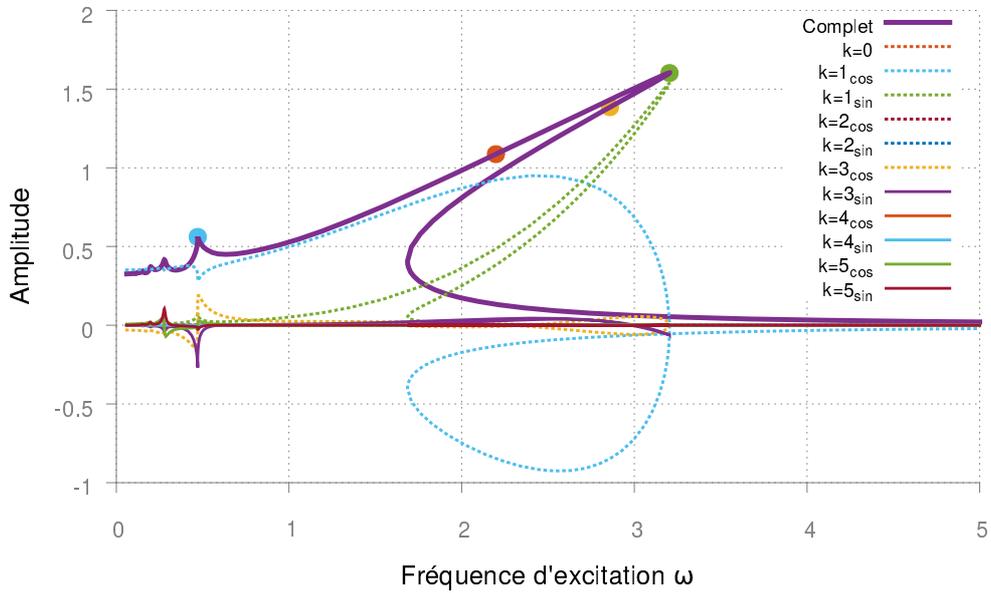
avec  $t$  le temps,  $f(x(t)) = k_{nl}x(t)^3$  la force non-linéaire dont  $k_{nl}$  est le coefficient non-linéaire, et  $p_0$  est l'amplitude d'excitation.



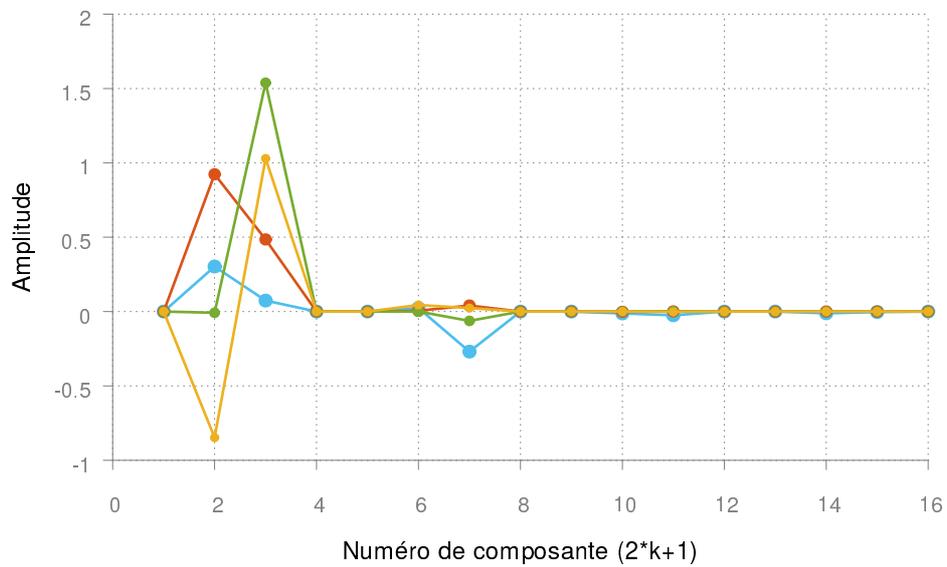
**FIGURE 3.3:** Réponses de l'oscillateur de Duffing pour  $k_{nl} = 5$ , avec différents nombre d'harmoniques retenues.

Sur la Figure 3.3, sont tracées les réponses du système calculées pour les paramètres suivants :  $2\zeta = 0.1$ ,  $\omega_0 = 1$ ,  $p_0 = 0.5$ , et  $k_{nl} = 5$ . Les calculs sont effectués avec différents nombres d'harmoniques. Un effet raidissant de la résonance principale est observé, ainsi que les résonances sur-harmoniques sur la plage de basses fréquences. Ces courbes ont montré qu'un petit nombre d'harmoniques (3) est suffisant pour bien décrire la résonance principale, alors qu'un plus grand nombre d'harmoniques est nécessaire pour capter les résonances sur-harmoniques. Pour savoir quelles sont les composantes qui y contribuent, la Figure 3.4 représente les coefficients de Fourier en fonction de la fréquence d'excitation. Comme pressenti, les premières harmoniques contribuent pour la résonance principale tandis que les résonances sur-harmoniques sont formées par les harmoniques plus élevées. Quatre points sur la courbe de réponse sont sélectionnés

### 3. Réponses forcées stationnaires et non-linéaires



**FIGURE 3.4:** Réponses de l'oscillateur de Duffing pour  $k_{nl} = 5$ , tracées par harmonique.



**FIGURE 3.5:** Amplitudes des coefficients de Fourier des quatre points sur la courbe de réponse de l'oscillateur de Duffing pour  $k_{nl} = 5$ .

( $\omega = 0.47, 2.19, 3.20, 2.86$ ) pour préciser la grandeur des composantes de Fourier comme montré dans la Figure 3.5. Par exemple, pour décrire la résonance sur-harmonique près de  $\omega = 0.47$  (points bleus),  $k = 5$  est nécessaire.

Les harmoniques d'ordre élevé ne contribuent quasiment pas à la solution, permettant ainsi d'obtenir une solution convergée pour un nombre raisonnable d'harmonique  $H$ . Ce nombre dépend surtout de la non-linéarité traitée et du phénomène à analyser. Dans la plupart des applications industrielles, les premières résonances principales sont prédominantes. La HBM qui ne permet de trouver que des solutions périodiques est donc très avantageuse pour les analyses numériques car un petit nombre d'harmoniques est souvent suffisant pour décrire les mouvements périodiques des machines tournantes.

### 3.4 Analyse de Stabilité

Pour les systèmes non-linéaires, la technique de continuation permet de trouver sur la courbe de réponse pour une vitesse de rotation donnée plusieurs solutions dont certaines d'entre elles (instables) ne peuvent pas être obtenues expérimentalement. Par conséquent, il est nécessaire de pouvoir juger de la stabilité d'une solution d'équilibre pendant les simulations numériques. Une solution instable vérifie l'équation du mouvement mais n'est associée à aucun bassin d'attraction. Un mouvement est donc stable si son évolution liée à des perturbations est bornée. Ici, on s'intéresse à la stabilité locale de solution.

#### 3.4.1 Théorie de Floquet - Multiplicateurs de Floquet

La théorie de Floquet est le moyen le plus utilisé pour déterminer la stabilité des solutions périodiques. Elle se base sur la description du problème dans le domaine temporel et consiste à construire la matrice de monodromie puis à chercher ses valeurs propres. Le système temporel étudié Eq. (3.1) s'écrit sous la forme d'état :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathcal{F} \cdot \mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{f}}_{nl}(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{p}}(t) \quad (3.40)$$

où  $\mathcal{F} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{x} = [\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)]^T$ ,  $\tilde{\mathbf{f}}_{nl}(\mathbf{x}) = [0, \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]^T$ ,  $\tilde{\mathbf{p}}(t) = [0, \mathbf{M}^{-1}\mathbf{p}(t)]^T$ . Une petite perturbation  $\mathbf{y}(t)$  est ajoutée à la solution périodique  $\mathbf{x}_0(t)$  de l'Eq. (3.40) pour obtenir  $\mathbf{x}(t)$  :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t) + \mathbf{y}(t) \quad (3.41)$$

En introduisant l'Eq. (3.41) dans (3.40), en développant  $\tilde{\mathbf{f}}_{nl}$  en série de Taylor sur  $\mathbf{x}(t)$ , en ne gardant que les termes linéaires, il vient :

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J}^f(\mathbf{x}_0, t) \cdot \mathbf{y}(t) = \left( \mathcal{F} - \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}_{nl}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \right) \cdot \mathbf{y}(t) \quad (3.42)$$

$$\text{où } \frac{\partial \tilde{f}_{nl}}{\partial \mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{M}^{-1} \frac{\partial f_{nl}}{\partial \mathbf{q}}(t) & \mathbf{M}^{-1} \frac{\partial f_{nl}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(t) \end{bmatrix}.$$

Il est facile de remarquer que  $\mathbf{J}^f$  est aussi périodique de période  $T$ . Le système linéaire de  $2n$  équations (Eq.3.42) possède au maximum  $2n$  solutions linéairement indépendantes  $\mathbf{y}_i$ , avec  $i = 1, 2, \dots, 2n$  et qui sont représentées sous la forme d'une matrice fondamentale des solutions :

$$\mathcal{Y}(t) = [\mathbf{y}_1(t) \ \mathbf{y}_2(t) \ \cdots \ \mathbf{y}_n(t)] \quad (3.43)$$

Elles respectent donc :

$$\dot{\mathcal{Y}} = \mathbf{J}^f(\mathbf{x}_0, t) \mathcal{Y} \quad (3.44)$$

En remplaçant  $t$  par  $t' = t + T$ , l'Eq. (3.44) devient :

$$\frac{d\mathcal{Y}}{dT} = \mathbf{J}^f(\mathbf{x}_0, t) \mathcal{Y}(t) = \mathbf{J}^f(\mathbf{x}_0, t') \mathcal{Y}(t') \quad (3.45)$$

Sachant que  $\mathbf{J}^f$  est périodique,  $\mathbf{J}^f(\mathbf{x}_0, t' - T) = \mathbf{J}^f(\mathbf{x}_0, t')$ . Par conséquent,  $\mathcal{Y}(t + T) = [\mathbf{y}_1(t + T) \ \mathbf{y}_2(t + T) \ \cdots \ \mathbf{y}_n(t + T)]$  est aussi une matrice fondamentale des solutions. Or l'Eq. (3.42) a au plus  $2n$  solutions linéairement indépendantes  $\mathbf{y}_i(t)$ , donc  $\mathbf{y}_i(t + T)$  sont des combinaisons linéaires de  $\mathbf{y}_i(t)$ , en conséquence,

$$\mathcal{Y}(t + T) = \mathcal{Y}(t) \Phi \quad (3.46)$$

où  $\Phi$  est la matrice de monodromie de taille  $2n \times 2n$  qui dépend de la matrice fondamentale des solutions et n'est pas unique. Soit  $\mathcal{Y}(t = 0) = \mathbf{I}_{2n}$ , où  $\mathbf{I}_{2n}$  est la matrice identité carrée. Par conséquent, on obtient  $\Phi = \mathcal{Y}(T)$ .

Le système linéaire de type Eq. (3.44) à intégrer pour calculer la matrice de monodromie  $\Phi = [\phi(T) \ \dot{\phi}(T)]^T$  est le suivant :

$$\mathbf{M} \ddot{\phi}(t) + (\mathbf{C} + \frac{\partial f_{nl}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}) \dot{\phi}(t) + (\mathbf{K} + \frac{\partial f_{nl}}{\partial \mathbf{q}}) \phi(t) = 0 \quad (3.47)$$

Comme décrit dans §1.4.2, le schéma implicite de Newmark de l'accélération moyenne est utilisé car il a la propriété de stabilité inconditionnelle pour des systèmes linéaires. La matrice de monodromie est obtenue après l'intégration sur une période du système Eq. (3.47) par ce schéma avec comme conditions initiales :

$$\phi(t = 0) = [I \ 0] \quad \text{et} \quad \dot{\phi}(t = 0) = [0 \ I] \quad (3.48)$$

Les valeurs propres de la matrice de monodromie, ou multiplicateurs de Floquet, sont uniques et donnent des informations sur la stabilité de la solution périodique. Si tous les multiplicateurs restent à l'intérieur du cercle unité représenté dans le plan complexe ( $Re, Im$ ), ( $|\eta_i| \leq 1 \forall i$ ), la solution correspondante est asymptotiquement stable. Si au moins l'un des multiplicateurs est à l'extérieur du cercle unité ( $\exists i \ t q : |\eta_i| > 1$ ), on a une bifurcation locale du cycle limite avec perte de stabilité.

### 3.4.2 Méthode de Hill - Exposants de Floquet

Les méthodes pour analyser la stabilité des solutions par la matrice de monodromie sont basées sur une description du problème dans le domaine temporel. Cependant, comme la HBM est utilisée pour calculer la courbe de réponse, il paraît avantageux de considérer la stabilité des solutions dans le domaine fréquentiel. La méthode Hill, qui est une variante de la théorie de Floquet, utilise les exposants de Floquet pour examiner la stabilité des solutions dans le domaine fréquentiel [VON 01] [PEL 13]. On rappelle ici le lien entre multiplicateurs  $\eta$  et exposants de Floquet  $\lambda$  :

$$\eta_i = e^{\lambda_i 2\pi/\Omega} \quad (3.49)$$

La méthode de Hill consiste à perturber l'équation du mouvement (3.1) par  $s(t)$  :

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}^0(t) + \mathbf{s}(t) \quad (3.50)$$

où  $\mathbf{q}^0(t)$  est la solution de l'équation d'équilibre (3.1), et  $\mathbf{s}(t) = \tilde{\mathbf{s}}(t)e^{\Lambda t}$  correspond à un terme périodique  $\tilde{\mathbf{s}}$  modulé par une exponentielle décroissante. En supposant que  $\mathbf{s}$  est petit, l'approximation au premier ordre de  $\mathbf{f}_{nl}$  s'écrit :

$$\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{q}) \approx \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{q}^0) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}_{nl}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}^0} \mathbf{s}(t) \quad (3.51)$$

En substituant les Eq. (3.50) et (3.51) dans l'Eq. (3.1), l'équation du mouvement s'écrit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{s}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{s}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{s}(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}_{nl}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}^0} \mathbf{s}(t) = 0 \quad (3.52)$$

Puisque  $\tilde{\mathbf{s}}(t)$  est périodique, elle peut être approximée pour une série de Fourier tronquée à l'ordre  $H$  :

$$\tilde{\mathbf{s}}(t) = \phi^0 + \sum_{k=1}^H (\phi_c^k \cos k\omega t + \phi_s^k \sin k\omega t) = (T(\omega t) \otimes \mathbf{I})\phi \quad (3.53)$$

En appliquant une procédure de Galerkin similaire à celle de la section 3.1, le problème aux valeurs propres quadratique suivant est obtenu :

$$(\mathbf{R}_Q + \Lambda\Delta_1 + \Lambda^2\Delta_2)\phi = 0 \quad (3.54)$$

avec  $\Lambda$  les valeurs propres complexes,  $\phi = \phi_r + i\phi_i$  les vecteurs propres complexes,  $\mathbf{R}_Q$  la matrice jacobienne définie par l'Eq. (3.27) et :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 2\omega\nabla \otimes \mathbf{M} + \mathbf{I}_{2H+1} \otimes \mathbf{C} \\ &= \text{diag} \left( \mathbf{C}, \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 2\omega\mathbf{M} \\ -2\omega\mathbf{M} & \mathbf{C} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 2H\omega\mathbf{M} \\ -2H\omega\mathbf{M} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\Delta_2 = \mathbf{I}_{2H+1} \otimes \mathbf{M} \quad (3.56)$$

l'Eq. (3.54) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$(\hat{\mathbf{J}} - \Lambda \cdot \mathbf{I}_{2L})\bar{\phi} = 0 \quad (3.57)$$

avec

$$\hat{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_L & I_L \\ -\Delta_2^{-1} \mathbf{R}_Q & -\Delta_2^{-1} \Delta_1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\phi} = \begin{pmatrix} \phi \\ \Lambda \phi \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

Par conséquent,  $2L = 2n \times (2H + 1)$  valeurs propres complexes  $\Lambda$  de  $\hat{\mathbf{J}}$  sont trouvées pour le système de taille  $L$  de (3.54). Mais seules  $2n$  d'entre elles ont un sens physique et correspondent aux exposants de Floquet [MOO 04] cherchés  $\lambda$ . On ne retient généralement que les  $2n$  valeurs propres avec la partie imaginaire la plus petite, même si ce choix heuristique n'est pas toujours justifié. Comme présenté dans §1.4.2, quand les parties réelles de tous les exposants de Floquet sont négatifs, la solution analysée est stable.

Comme  $\bar{s}$  est écrit sous forme d'une série de Fourier tronquée, la précision des valeurs propres dépend donc du nombre d'harmoniques retenu dans la décomposition.

*Ces deux méthodes (matrice de monodromie et déterminant de Hill) ont été implémentées dans Cast3M et testées.*

### 3.4.3 Illustration sur l'oscillateur de Duffing

La stabilité des solutions convergées obtenues par la HBM est analysée par les deux méthodes présentées : en analysant les valeurs propres de la matrice de monodromie, calculée par le schéma Newmark, qui sont des multiplicateurs de Floquet  $\eta_i$ , et les valeurs propres de la matrice jacobienne par la méthode de Hill  $\lambda_i$  qui sont les exposants de Floquet. Comme présenté dans §1.4.1, la manière avec laquelle les  $\eta_i$  traversent le cercle unité et les  $\lambda_i$  l'axe imaginaire indique la nature de la perte de stabilité des solutions périodiques (type de bifurcation).

La précision des  $\eta_i$  obtenus avec le calcul de la matrice de monodromie dépend du nombre de points  $n_{pts}$  d'intégration utilisé par le schéma Newmark. De même, la précision des  $\lambda_i$  obtenues avec le déterminant de Hill dépend du nombre d'harmoniques retenu  $H$  dans la décomposition. Des études simples sur ces convergences sont faites pour les quatre points choisis précédemment sur la courbe de réponse (Figure 3.5).

Le Tableau 3.1 donnent les valeurs propres de la matrice de monodromie obtenues avec différents nombres de points d'intégration pour la solution  $\omega = 2.19$ .

On constate que les valeurs convergent avec une erreur relative inférieure à 1% pour  $n_{pts} = 4096$ . Pour ce petit système à un ddl, l'analyse de stabilité a pris 80.23% du coût total du calcul mais ce n'est pas considérable car le temps de calcul reste faible. Cependant, pour un système avec plus de ddl, le nombre de points d'intégration  $n_{pts}$  influence énormément sur le temps de calcul. Un résultat indiquant le changement de stabilité est acceptable sans obligation d'avoir une haute précision. Par conséquent, une valeur  $n_{pts} = 256$  est choisie pour la suite des calculs.

De la même façon, le Tableau 3.2 liste les exposants de Floquet  $\lambda_i$  obtenus avec différents nombres d'harmonique retenus, ainsi que les  $\eta'_i$  calculés par la relation (3.49).

La convergence est atteinte avec un petit nombre d'harmoniques. En comparant avec le Tableau 3.1, les exposants de Floquet donnent des résultats acceptables avec un petit nombre d'harmoniques pour cet exemple de l'oscillateur Duffing. La méthode d'analyse de stabilité par la théorie de Hill a l'avantage de rester dans le domaine fréquentiel, son inconvénient est de chercher les valeurs propres d'une matrice de taille  $2L$ , ce qui peut être prohibitif quand le système est grand et qu'un grand nombre d'harmoniques est nécessaire pour l'analyse non-linéaire.

$n_{pts}$	$\eta_1$	$\eta_2$	$\epsilon_{rela}(\%)$
32	$1.441 + 0.000i$	$0.532 + 0.000i$	229.81
64	$0.716 + 0.494i$	$0.716 - 0.494i$	42.53
128	$0.580 + 0.646i$	$0.580 - 0.646i$	19.24
256	$0.512 + 0.700i$	$0.512 - 0.700i$	9.25
512	$0.478 + 0.723i$	$0.478 - 0.723i$	4.51
1024	$0.462 + 0.734i$	$0.462 - 0.734i$	2.28
2048	$0.453 + 0.738i$	$0.453 - 0.738i$	1.15
4096	$0.449 + 0.741i$	$0.449 - 0.741i$	0.58
8192	$0.447 + 0.743i$	$0.447 - 0.743i$	0.26
16384	$0.446 + 0.743i$	$0.446 - 0.743i$	0.16
32768	$0.445 + 0.744i$	$0.445 - 0.744i$	0.

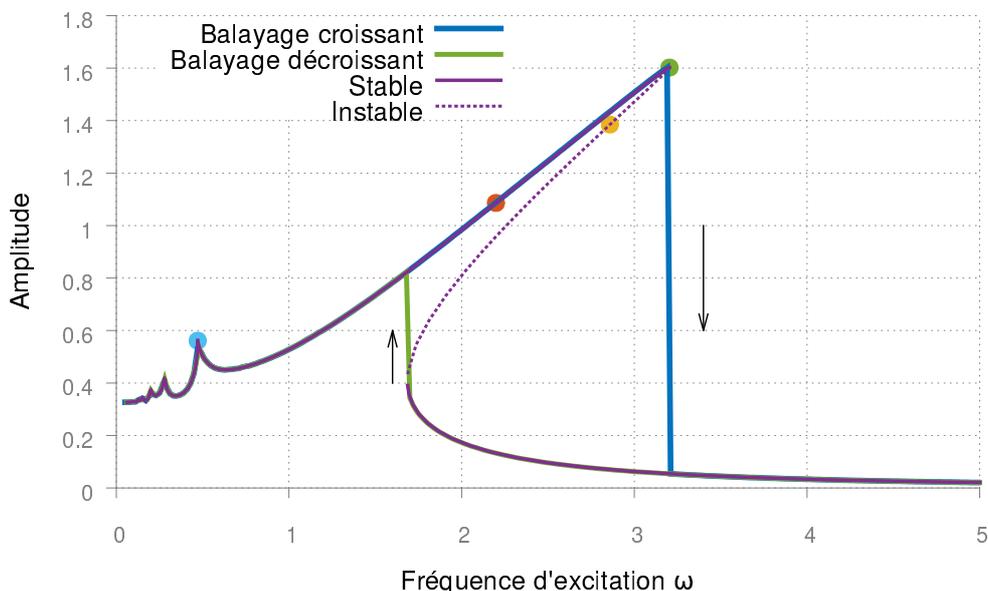
**TABLE 3.1:** Evolution des valeurs propres de la matrice de monodromie en fonction du nombre de pas d'intégration sur une période par la méthode de Newmark.

$H$	$\lambda_{1,2}$	$\eta'_{1,2}$
3	$-0.05000000 \pm 0.36096406i$	$0.44504010 \pm 0.74387472i$
5	$-0.05000000 \pm 0.36096465i$	$0.44503885 \pm 0.74387547i$
19	$-0.05000000 \pm 0.36096463i$	$0.44503889 \pm 0.74387545i$

**TABLE 3.2:** Evolution des exposants de Floquet et des multiplicateurs correspondants en fonction du nombre d'harmoniques retenues.

La précision de la méthode proposée pour prédire les mouvements périodiques de l'oscillateur Duffing forcé est examinée en comparant la branche stable obtenue par HBM (avec 19 harmoniques) avec ceux obtenus à partir de l'intégration temporelle directe comme montré dans la Figure 3.6. Les lignes solide et pointillée représentent les solutions stables et instables respectivement. On peut constater que le changement de stabilité des solutions périodiques obtenues par la HBM coïncident avec les sauts d'amplitude des solutions temporelles intégrées.

Les multiplicateurs de Floquet sont tracés (pour la méthode de Hill, l'Eq. (3.49) a été utilisée) sur le plan complexe pour les quatre solutions d'équilibre comme montré dans la Figure 3.7. Les deux méthodes d'analyse de stabilité donnent les mêmes résultats. Pour  $\omega = 0.47$  (Figure 3.7(a)) et  $\omega = 2.86$  (Figure 3.7(d)), un des multiplicateurs est sorti du



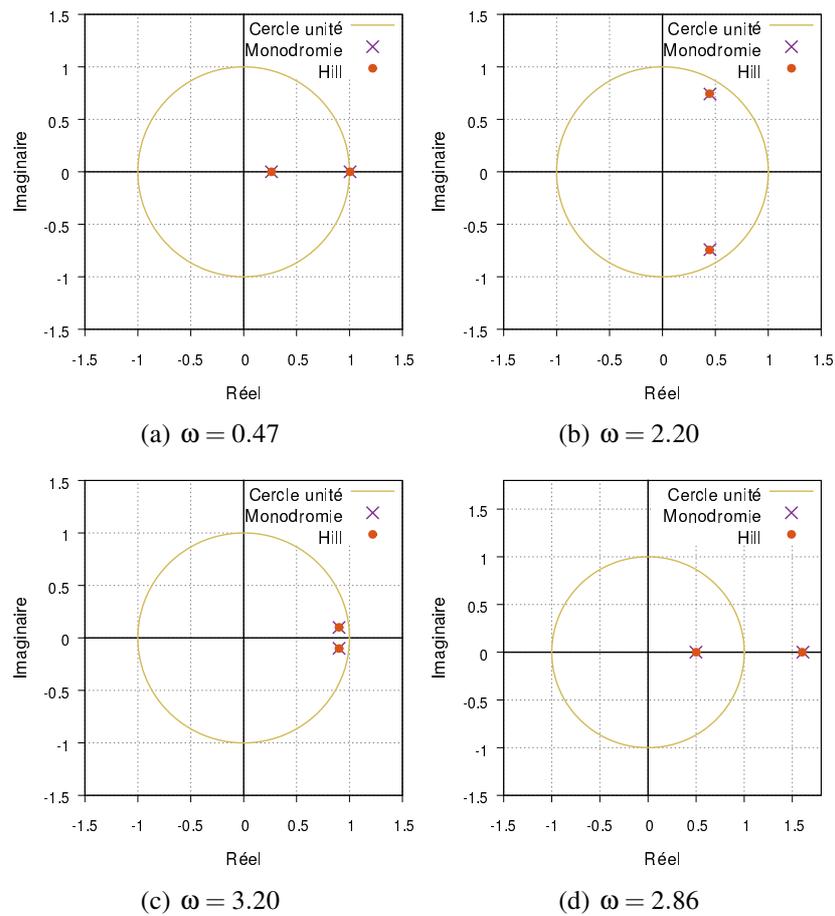
**FIGURE 3.6:** Réponse de l'oscillateur de Duffing pour  $k_{nl} = 5$ .

cercle unité sur l'axe réel positif. Cela indique que la solution trouvée par la HBM est instable tandis qu'elle justifie l'équation d'équilibre. Par contre, les solutions trouvées pour (Figure 3.7(b)) et (Figure 3.7(c)) sont stables car tous les multiplicateurs sont à l'intérieur du cercle unité.

## 3.5 Prise en compte des spécificités liées à une modélisation du rotor dans le repère tournant

Le comportement dynamique du rotor modélisé avec des éléments finis 3D est exprimé dans le repère  $\mathcal{R}'$  qui tourne à une vitesse constante  $\Omega$  alors que celui de la partie immobile de la structure (le stator) est modélisé dans le repère fixe  $\mathcal{R}$ . Les équations de mouvement correspondantes dans les deux repères sont présentées dans le chapitre.2. L'étude vibratoire des ces structures tournantes est réalisée en résolvant ces équations de mouvement dans le domaine fréquentiel par la HBM couplée avec l'AFT. Les mouvements supposés périodiques sont donc discrétisés en un nombre fini d'harmoniques. Comme l'excitation appliquée sur le rotor est périodique, elle peut être directement décrite sur l'harmonique associée.

La résolution par la HBM de ce problème faisant intervenir deux repères nécessite d'écrire les relations de liaison entre ces deux repères dans le domaine fréquentiel, c'est à dire en identifiant les relations linéaires entre inconnues (ddl et harmoniques) du rotor et du stator. Cette spécificité est décrite ci-après.



**FIGURE 3.7:** Les multiplicateurs et exposants de Floquet dans le plan complexe, (a) et (d) sont les solutions instables.

### 3.5.1 Cinématique du rotor et du stator exprimés en harmonique

#### Champs de déplacement en harmonique

La HBM cherche à identifier la solution périodique sous la forme d'une série de Fourier tronquée à l'ordre  $H$ . Dans le système modélisé par éléments finis, les déplacements discrétisés en chaque nœud du maillage du rotor s'écrivent

$$\mathbf{u}'(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}'^\xi(t) \\ \mathbf{u}'^\eta(t) \\ \mathbf{u}'^\zeta(t) \end{Bmatrix} \quad (3.59)$$

dans le repère tournant  $\mathcal{R}'$ ,

$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^x(t) \\ \mathbf{u}^y(t) \\ \mathbf{u}^z(t) \end{Bmatrix} \quad (3.60)$$

pour le stator dans le repère fixe  $\mathcal{R}$ . Dans le cadre de la HBM, ils prennent la forme suivante :

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{U}'^0 + \sum_{k=1}^H (\mathbf{U}'^k \cos k\omega't + \mathbf{V}'^k \sin k\omega't) \quad (3.61)$$

et

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}^0 + \sum_{k=1}^H (\mathbf{U}^k \cos k\omega t + \mathbf{V}^k \sin k\omega t) \quad (3.62)$$

Dans le système à résoudre dans le domaine fréquentiel de forme Eq. (3.11), les inconnues à chaque nœud du maillage sont les coefficients de Fourier :

$$[\mathbf{U}'^0, \mathbf{U}'^1, \mathbf{V}'^1, \dots, \mathbf{U}'^k, \mathbf{V}'^k, \dots], \text{ avec } \mathbf{U}'^k = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}'_k^\xi \\ \mathbf{u}'_k^\eta \\ \mathbf{u}'_k^\zeta \end{Bmatrix}, \mathbf{V}'^k = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}'_k^\xi \\ \mathbf{v}'_k^\eta \\ \mathbf{v}'_k^\zeta \end{Bmatrix}, k = 0, 1, \dots, H \text{ pour le rotor,}$$

$$[\mathbf{U}^0, \mathbf{U}^1, \mathbf{V}^1, \dots, \mathbf{U}^k, \mathbf{V}^k, \dots], \text{ avec } \mathbf{U}^k = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_k^x \\ \mathbf{u}_k^y \\ \mathbf{u}_k^z \end{Bmatrix}, \mathbf{V}^k = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_k^x \\ \mathbf{v}_k^y \\ \mathbf{v}_k^z \end{Bmatrix}, k = 0, 1, \dots, H \text{ pour le stator.}$$

$\omega'$  et  $\omega$  sont respectivement la fréquence du mode de Fourier considéré dans le repère tournant et fixe et la relation entre les deux fréquences est décrite par :

$$\omega' = \omega - \Omega \quad (3.63)$$

#### Chargements extérieurs dans le repère tournant

Dans le cas général, un système tournant est soumis à des chargements extérieurs (balourd, poids propre,...). La fréquence d'excitation des chargements extérieurs dans le repère fixe  $\mathcal{R}$  et tournant  $\mathcal{R}'$  est respectivement  $\omega_e$  et  $\omega'_e$ . Les chargements extérieurs sont

décomposés en série de Fourier sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Dans le repère tournant } \mathcal{R}', \quad \mathbf{f}_e'(t) &= \mathbf{F}_e'^0 + \sum_{k=1}^H (\mathbf{F}_e'^k \cos k\omega_e't + \mathbf{G}_e'^k \sin k\omega_e't) \\ \text{Dans le repère fixe } \mathcal{R}, \quad \mathbf{f}_e(t) &= \mathbf{F}_e^0 + \sum_{k=1}^H (\mathbf{F}_e^k \cos k\omega_e t + \mathbf{G}_e^k \sin k\omega_e t) \end{aligned} \quad (3.64)$$

La force de balourd exprimée dans le repère tournant  $\mathcal{R}'$  est décrite sous la forme :

$$\mathbf{f}_b'(t) = \begin{Bmatrix} m_b d \Omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cos(\omega_e't + \phi_b) + \begin{Bmatrix} 0 \\ m_b d \Omega^2 \\ 0 \end{Bmatrix} \sin(\omega_e't + \phi_b) \quad \text{avec } \omega_e' = 0 \quad (3.65)$$

où  $m_b$  est le balourd et  $d$  sa distance d'excentricité,  $\phi_b$  l'angle initial par rapport à l'axe  $O'\xi$ . Le balourd est donc une force 'statique' dans le repère tournant. Le chargement de type balourd peut être appliqué dans le domaine fréquentiel avec pour seuls coefficients

$$\text{ceux d'ordre 0 : } \mathbf{F}_e'^0 = \begin{Bmatrix} m_b d \Omega^2 \cos(\phi_b) \\ m_b d \Omega^2 \sin(\phi_b) \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Le poids propre (de direction fixe dans  $\mathcal{R}$ ) s'écrit lorsqu'il s'applique au rotor décrit dans le repère  $\mathcal{R}'$  :

$$\mathbf{f}_p'(t) = - \begin{Bmatrix} 0 \\ mg \\ 0 \end{Bmatrix} \cos(\omega_e't) - \begin{Bmatrix} mg \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \sin(\omega_e't) \quad \text{avec } \omega_e' = \Omega, \quad \text{puisque } \omega_e = 0 \quad (3.66)$$

Le poids propre est donc une force harmonique rétrograde de  $\Omega$  et est appliqué dans le domaine fréquentiel par les coefficients de Fourier d'ordre 1 :  $\mathbf{F}_e'^1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{Bmatrix}$  et  $\mathbf{G}_e'^1 =$

$$\begin{Bmatrix} -mg \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Les réponses forcées (3.61) et (3.62) pour les systèmes linéaires sont généralement recherchées avec la même fréquence fondamentale que l'excitation extérieure : soit  $\omega' = 0, \omega = \Omega$  pour la réponse au balourd et  $\omega' = \Omega, \omega = 0$ , pour la réponse sous poids propre.

### 3.5.2 Liaison entre rotor et stator

Dans §2.4, la création de la liaison entre le rotor et le stator est présentée. Les champs de déplacements des interfaces du rotor et stator sont ramenés aux points de l'axe de rotation  $O'$  et  $O$ , puis la liaison est définie par les multiplicateurs de Lagrange  $\Lambda$  et décrit le passage entre les deux repères  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sous la convention décrite par les Eq. (3.61)(3.62).

### 3. Réponses forcées stationnaires et non-linéaires

---

Dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation selon Z, le champ de déplacement fréquentiel latéral condensé au niveau de la liaison du rotor et du stator s'exprime respectivement dans le repère qui lui est lié :

$$U_{O'}^k = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_k^\xi \\ \mathbf{u}_k^\eta \\ \mathbf{v}_k^\xi \\ \mathbf{v}_k^\eta \end{Bmatrix} \quad (3.67)$$

$$U_O^k = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_k^x \\ \mathbf{u}_k^y \\ \mathbf{v}_k^x \\ \mathbf{v}_k^y \end{Bmatrix} \quad (3.68)$$

avec  $k = 0, 1, 2, \dots, H$ . Ici, les composantes en *sinus* de l'ordre 0 sont nulles :  $\mathbf{v}_0^\xi = \mathbf{v}_0^\eta = 0$   
 $\mathbf{v}_0^x = \mathbf{v}_0^y = 0$ .

Dans le repère tournant, en introduisant les Eq. (3.61)(3.62) dans l'équation de passage des repères :

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbb{R}^T \mathbf{u}(t) \quad (3.69)$$

la liaison entre le rotor et le stator est décrite directement par la relation des coefficients de Fourier en utilisant les formules trigonométriques et en annulant les différents termes pour chaque harmonique. Elle est précisée dans le Tableau 3.3. Sa forme compacte s'écrit :

$$U^k = \mathbb{R}_D U^{k-1} + \mathbb{R}_P U^{k+1} \quad (3.70)$$

$$\text{avec } k \geq 2, \mathbb{R}_D = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbb{R}_P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

La même procédure est effectuée pour la relation entre rotor et stator dans le repère  $\mathcal{R}$  sous la forme compacte :

$$U^k = \mathbb{R}_P U^{k-1} + \mathbb{R}_D U^{k+1} \quad (3.72)$$

L'équation de liaison est ainsi décrite avec la matrice de couplage  $\mathbb{L}$  sous la forme :

$$\mathbb{L} Q'_O = 0 \quad (3.73)$$

$$\text{avec } \mathbb{L} = \begin{bmatrix} -\mathbb{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbb{R}_P & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \\ \mathbf{0} & -\mathbb{I} & \mathbb{R}_D & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \\ \mathbf{0} & \mathbb{R}_D & -\mathbb{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbb{R}_P & \dots & \\ \mathbb{R}_P & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbb{I} & \mathbb{R}_D & \mathbf{0} & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbb{R}_D & -\mathbb{I} & \mathbf{0} & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbb{R}_P & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbb{I} & & \\ & & & \vdots & & & & \end{bmatrix} \quad \text{et } Q'_O = \begin{Bmatrix} U_{O'}^0 \\ U_O^0 \\ U_{O'}^1 \\ U_O^1 \\ U_{O'}^2 \\ U_O^2 \\ \dots \\ U_{O'}^H \\ U_O^H \end{Bmatrix} \quad (3.74)$$

Pour décrire une liaison parfaite, l'équation de liaison devrait être infinie, mais elle ne porte que jusqu'à l'harmonique  $H$ . La dernière harmonique de  $U_0^H$  ne contribue pas pour  $U_0^{!H}$ , et se traduit par la condition suivante :

$$\begin{cases} u_H^x - v_H^y = 0 \\ u_H^y + v_H^x = 0 \end{cases} \quad (3.75)$$

La liaison peut être complétée en introduisant le comportement dû au palier. On peut par exemple utiliser une relation de comportement de palier linéarisée équivalente à une raideur agissant sur chaque harmonique  $k$  dans le repère  $\mathcal{R}$  :

$$\begin{Bmatrix} F_{O'}^{xk} \\ F_{O'}^{yk} \\ F_O^{xk} \\ F_O^{yk} \end{Bmatrix} = \mathbb{K}_L \begin{Bmatrix} U_{O'}^{xk} \\ U_{O'}^{yk} \\ U_O^{xk} \\ U_O^{yk} \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbb{K}_L = \begin{bmatrix} k_x & 0 & -k_x & 0 \\ 0 & k_y & 0 & -k_y \\ -k_x & 0 & k_x & 0 \\ 0 & -k_y & 0 & k_y \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

où  $F_{O'}^k$  et  $F_O^k$  sont la réaction en  $O'$  et  $O$  sur chaque harmonique  $k$ . Un amortissement visqueux de palier peut aussi être introduit pour chaque harmonique  $k$  :

$$\begin{Bmatrix} F_{O'}^{xk} \\ F_{O'}^{yk} \\ F_O^{xk} \\ F_O^{yk} \end{Bmatrix} = \mathbb{C}_L \begin{Bmatrix} U_{O'}^{xk} \\ U_{O'}^{yk} \\ U_O^{xk} \\ U_O^{yk} \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbb{C}_L = \begin{bmatrix} c_x & 0 & -c_x & 0 \\ 0 & c_y & 0 & -c_y \\ -c_x & 0 & c_x & 0 \\ 0 & -c_y & 0 & c_y \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

On pourrait aussi ajouter des termes d'amortissement ou de raideur croisés et donner des conditions de liaisons entre les moments et les rotations de  $O'$  et  $O$ . Un modèle non-linéaire de palier peut également être considéré en utilisant une force du type  $F_{palier}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}})$ .

En somme, la condition imposée entre les interfaces du rotor et du stator s'effectue en trois étapes à savoir :

1. Les champs de déplacement moyen des interfaces du rotor et du stator sont ramenés respectivement aux points de l'axe  $O'$  et  $O$  dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation selon  $Z$ ,
2. La projection des champs de déplacement des points  $O'$  et  $O$  sur les harmoniques sont faites dans le repère qui lui est lié respectivement jusqu'à l'ordre  $H$ ,
3. Le couplage entre les coefficients de Fourier du champ de déplacements est réalisé par le passage du repère  $\mathcal{R}$  au  $\mathcal{R}'$  ou son inverse,
4. Des éléments de modélisation (raideur, amortissement,...) qui représentent un palier entre le rotor et le stator sont éventuellement introduits.

### 3. Réponses forcées stationnaires et non-linéaires

$\mathcal{R}'$	$\mathcal{R}_{k=0}$	$\mathcal{R}_{k=1}$	$\mathcal{R}_{k=2}$	$\mathcal{R}_{k=3}$	...	$\mathcal{R}_{k=H-1}$	$\mathcal{R}_{k=H}$
$u_0^\xi$		$\frac{1}{2}(u_1^x - v_1^y)$					
$u_0^\eta$		$\frac{1}{2}(u_1^y + v_1^x)$					
$u_1^\xi$	$u_0^x$		$\frac{1}{2}(u_2^x - v_2^y)$				
$u_1^\eta$	$u_0^y$		$\frac{1}{2}(u_2^y + v_2^x)$				
$v_1^\xi$	$-u_0^y$		$\frac{1}{2}(u_2^y + v_2^x)$				
$v_1^\eta$	$u_0^x$		$\frac{1}{2}(-u_2^x + v_2^y)$				
$u_2^\xi$		$\frac{1}{2}(u_1^x + v_1^y)$		$\frac{1}{2}(u_3^x - v_3^y)$			
$u_2^\eta$		$\frac{1}{2}(u_1^y - v_1^x)$		$\frac{1}{2}(u_3^y + v_3^x)$			
$v_2^\xi$		$\frac{1}{2}(-u_1^y + v_1^x)$		$\frac{1}{2}(u_3^y + v_3^x)$			
$v_2^\eta$		$\frac{1}{2}(u_1^x + v_1^y)$		$\frac{1}{2}(-u_3^x + v_3^y)$			
$u_3^\xi$			$\frac{1}{2}(u_2^x + v_2^y)$				
$u_3^\eta$			$\frac{1}{2}(u_2^y - v_2^x)$				
$v_3^\xi$			$\frac{1}{2}(-u_2^y + v_2^x)$	...			
$v_3^\eta$			$\frac{1}{2}(u_2^x + v_2^y)$				
...							...
$u_{H-1}^\xi$							$\frac{1}{2}(u_H^x - v_H^y)$
$u_{H-1}^\eta$						...	$\frac{1}{2}(u_H^y + v_H^x)$
$v_{H-1}^\xi$							$\frac{1}{2}(u_H^y + v_H^x)$
$v_{H-1}^\eta$							$\frac{1}{2}(-u_H^x + v_H^y)$
$u_H^\xi$						$\frac{1}{2}(u_{H-1}^x + v_{H-1}^y)$	
$u_H^\eta$						$\frac{1}{2}(u_{H-1}^y - v_{H-1}^x)$	
$v_H^\xi$						$\frac{1}{2}(-u_{H-1}^y + v_{H-1}^x)$	
$v_H^\eta$						$\frac{1}{2}(u_{H-1}^x + v_{H-1}^y)$	

**TABLE 3.3:** Liaison du rotor et stator par les coefficients de Fourier dans le repère  $\mathcal{R}'$ .

### 3.5.3 Sous-structuration dans le domaine fréquentiel

La méthode de sous-structuration dynamique la plus utilisée pour réduire la taille des modèles 3D volumiques est celle de Craig-Bampton comme au §2.5.2. En distinguant les ddl intérieurs et ddl de frontière des sous-structures, la base de Craig-Bampton est construite avec les solutions statiques et les modes contraints. L'étape de sous-structuration est faite avant de passer dans le domaine fréquentiel. La réduction modale affecte seulement la description spatiale de la solution, la considération préalable pour décomposer les inconnues en série de Fourier reste valable.

Avant la réduction du modèle, la non-linéarité est souvent localisée dans le système, et l'approche AFT pour calculer la force non-linéaire et sa dérivée peut être appliquée seulement sur les ddl concernés. Pendant la réduction du modèle, tous les ddl concernés par la non-linéarité devraient appartenir à la frontière des sous-structures pour qu'ils soient 'conservés' après la réduction. Si ce n'est pas le cas, tous les ddl du modèle après la réduction sont concernés par l'approche AFT lors des calculs des efforts non-linéaires et ceux-ci devraient être projetés sur la base modale. Malgré cet inconvénient, cette approche reste rentable grâce à la réduction considérable par rapport au grand nombre de ddl.

La réduction de Craig-Bampton est indispensable dans le cas de la modélisation 3D et des traitements dans le domaine fréquentiel. La première raison est la réduction considérable des ddl puisque le modèle 3D possède un nombre de ddl important. La réduction du modèle est indispensable lorsque l'on souhaite obtenir un résultat rapidement. La sous-structuration de Craig-Bampton conserve les ddl de frontière, ce qui rend très facile l'introduction des paliers.

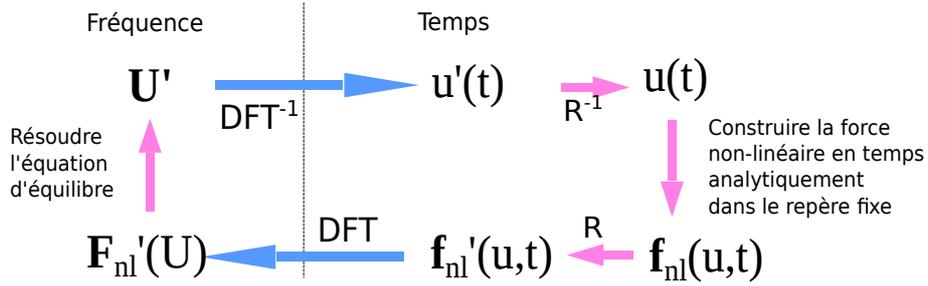
*Sous Cast3M, les solutions statiques et modes issus de la sous-structuration sont supportés par de nouveaux nœuds. Leur composante associée est 'ALFA' pour les ddl projetées sur les modes propres contraints et 'BETA' pour les ddl de frontière. Ils sont liés avec les anciens ddl par la projection (par l'opérateur PJBA) sur la base de la sous-structuration. Puis ces ddl associés au modèle réduit sont utilisés dans le domaine fréquentiel. Les inconnues à chercher sont donc les coefficients de Fourier des ddl réduits. Puis, la liaison du rotor et stator est faite par l'opérateur 'RELA' selon le Tableau 3.3 sur des ddl de 'BETA' en faisant correspondre les composantes des nœuds de frontière avant la réduction.*

### 3.5.4 Efforts non-linéaires par AFT

Le contenu fréquentiel des efforts non-linéaires  $F_{nl}$  est construit par la méthode de AFT (Figure 3.2) dans le repère fixe  $\mathcal{R}$  en profitant du fait que la fonction analytique est connue dans le domaine temporel :

$$\mathbf{f}_{nl}(t) = \mathcal{F}_{nl}(\mathbf{u}(t)) \quad (3.78)$$

où  $\mathcal{F}_{nl}$  est l'opérateur pour construire la force non-linéaire temporelle. Cette approche est suffisante quand ces effets non-linéaires sont appliqués dans la partie immobile de la structure modélisée dans le repère  $\mathcal{R}$ . Sinon, les non-linéarités du rotor sont modélisées dans



**FIGURE 3.8:** Méthode Alternating Frequency-Time (AFT) pour construire  $F'_{nl}$  dans le repère tournant  $\mathcal{R}'$ .

le repère tournant  $\mathcal{R}'$  en faisant la distinction suivante : si  $\mathcal{F}_{nl}$  est un opérateur linéaire,  $f'_{nl}(t)$  peut être calculée directement par  $u'(t)$  :

$$f'_{nl}(t) = \mathbb{R}^T \mathcal{F}_{nl}(\mathbf{u}(t)) = \mathcal{F}_{nl}(\mathbb{R}^T \mathbf{u}(t)) = \mathcal{F}_{nl}(\mathbf{u}'(t)) \quad (3.79)$$

avec  $\mathbb{R}^T = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t & 0 \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  qui décrit le passage du repère  $\mathcal{R}$  au repère  $\mathcal{R}'$ .

Lorsque  $\mathcal{F}_{nl}$  n'est pas linéaire, soit la fonction  $\mathcal{F}_{nl}$  est décrite directement dans le repère  $\mathcal{R}'$ , soit il faut passer aux démarches supplémentaires suivante comme indiqué dans la Figure 3.8.

- le champ de déplacement est ramené du repère  $\mathcal{R}'$  au repère  $\mathcal{R}$  :  $\mathbf{u}(t) = \mathbb{R} \mathbf{u}'(t)$
- la force non-linéaire est construite d'abord dans le repère fixe :  $\mathbf{f}_{nl}(t) = \mathcal{F}_{nl}(\mathbf{u}(t))$
- la force non-linéaire temporelle dans le repère tournant est ensuite déterminée :  $\mathbf{f}'_{nl} = \mathbb{R}^T \mathbf{f}_{nl}$

Enfin, la DFT est utilisée pour construire  $F'_{nl}$  dans le domaine fréquentiel.

La réduction par Craig-Bampton avec les ddl non-linéaires comme ddl de frontière, donne directement accès aux déplacements des ddl non-linéaires. Sinon, après la transformation de Fourier inverse pour construire les ddl réduits temporels, il faut reconstruire les déplacements physiques pour que la fonction analytique  $\mathcal{F}_{nl}$  soit applicable. Puis après calcul de la force non-linéaire  $\mathbf{f}'_{nl}$ , il faut la projeter sur la base réduite. Dans ce dernier cas, tous les ddl réduits sont concernés pour introduire des efforts non-linéaires.

**Organigramme de calcul** *L'organigramme qui décrit la procédure de calcul d'un rotor modélisé en 3D par la HBM et la continuation sous Cast3M est présenté comme suit :*

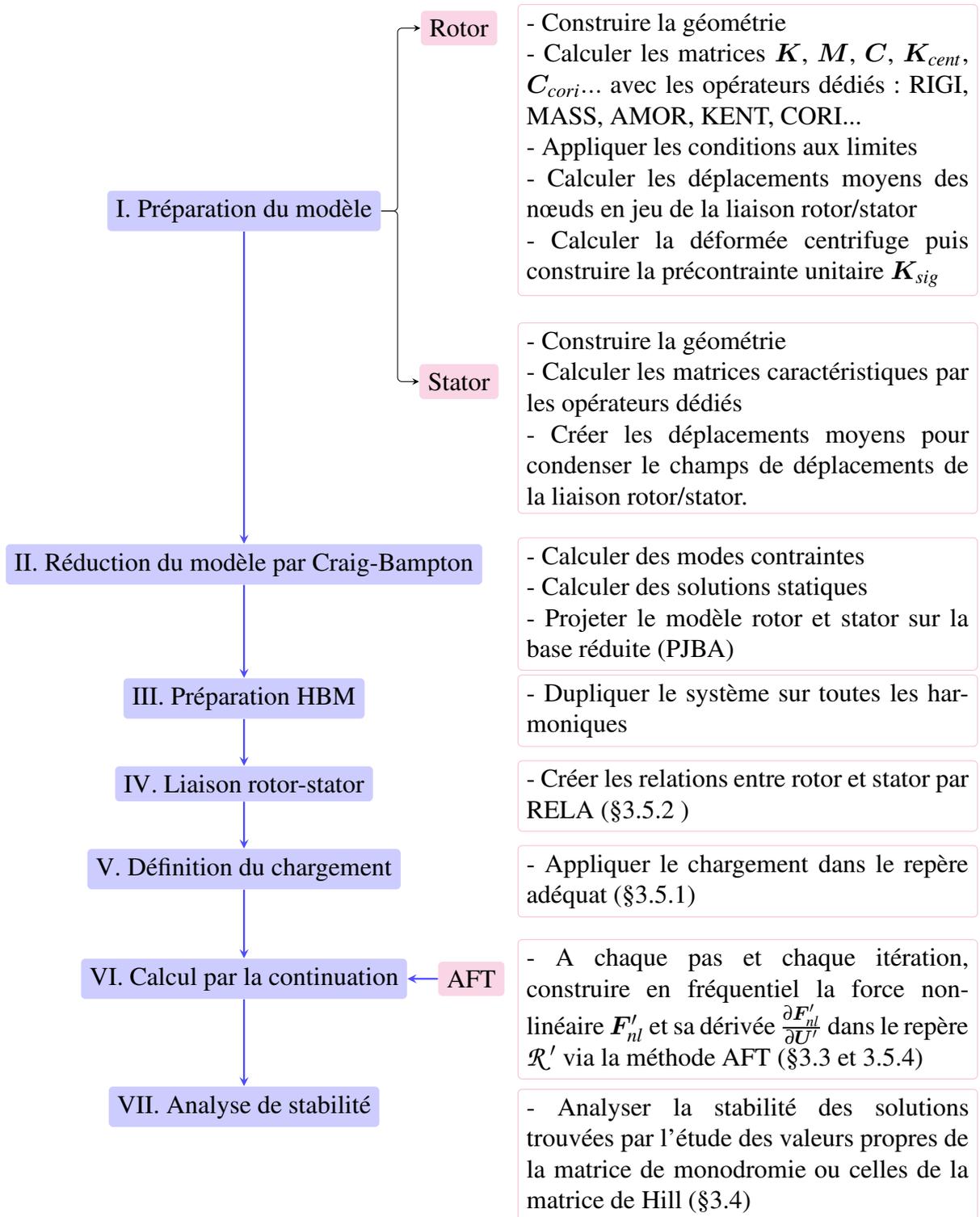


FIGURE 3.9: Organigramme du calcul d'un rotor 3D réduit par Craig-Bampton sous Cast3M.

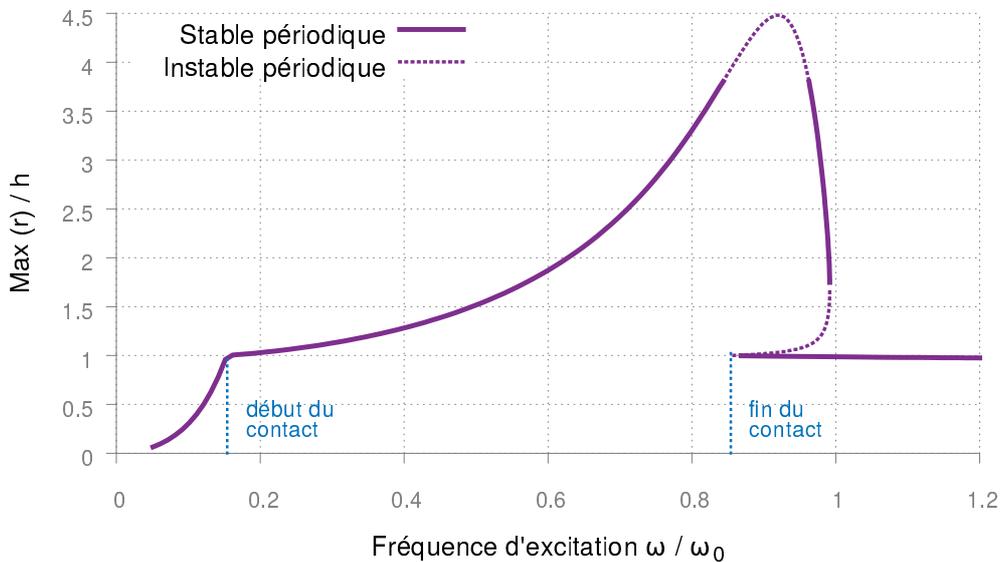
## 3.6 Exemples d'application

### 3.6.1 Rotor de Jeffcott avec contact rotor-stator

Le rotor de Jeffcott dont l'amplitude du mouvement latéral est limitée par le jeu avec le stator sert de cas-test. Le contact frottant est modélisé par une rigidité de contact [JIA 09] [PEL 14] et par une loi de Coulomb. Un disque de masse  $m$  est situé au milieu de l'arbre de masse négligeable. Le jeu initial entre le rotor et le stator est désignée par  $h$ . Le stator comporte une surface de contact élastique modélisée par une raideur isotrope  $k_c$ . Les paramètres sont  $m = 1$ ,  $c = 5$ ,  $k = 100$ ,  $k_c = 2500$ ,  $h = 0.105$ ,  $p_b = 0.1$ ,  $R_{disc} = 20h$ ,  $\omega_0 = 2\pi\sqrt{k_c/m} = 100\pi$ . Le mouvement du disque sur le premier mode du rotor est décrit par les équations couplées suivantes :

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + k_c \left\{1 - \frac{h}{r}\right\}^+ (x - \mu y \operatorname{sign}(v_{rel})) = p_b \omega^2 \cos \omega t \\ m\ddot{y} + c\dot{y} + ky + k_c \left\{1 - \frac{h}{r}\right\}^+ (\mu x \operatorname{sign}(v_{rel}) + y) = p_b \omega^2 \sin \omega t \end{cases} \quad (3.80)$$

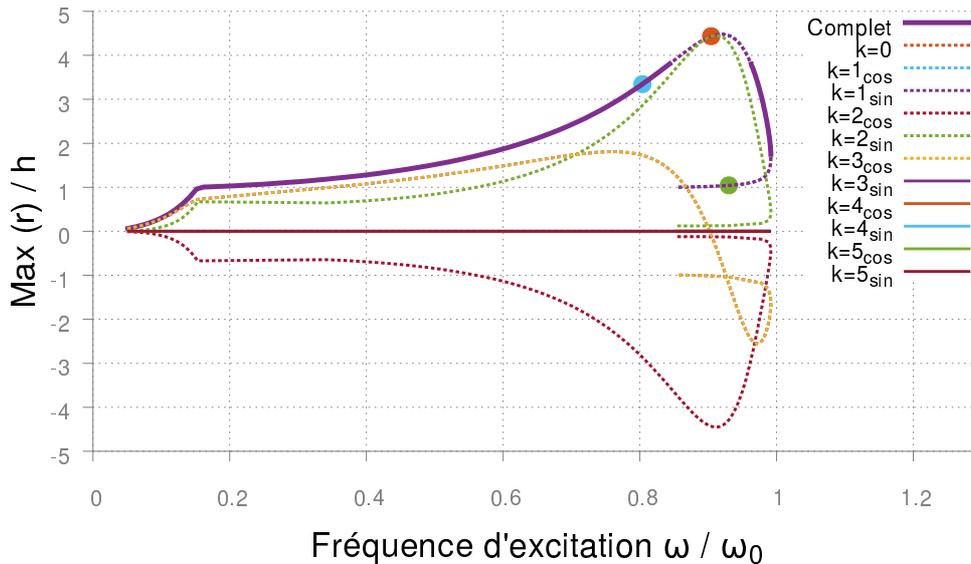
où  $k$  représente la raideur de l'arbre,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  est l'excentricité du disque,  $p_b$  l'amplitude du balourd, et  $v_{rel} = \left(\frac{x}{r}\dot{y} - \frac{y}{r}\dot{x}\right) + R_{disc}\omega$  est la vitesse relative au niveau du contact entre le rotor et le stator.  $\{X\}$  désigne la partie positive de  $X$ .



**FIGURE 3.10:** Réponse au balourd du rotor de Jeffcott avec contact rotor-stator pour  $\mu = 0.11$ .

D'abord, la courbe de réponse au balourd du rotor est calculée par HBM couplée avec la continuation pour un coefficient de frottement  $\mu = 0.11$ . Elle est tracée dans la Figure 3.10.  $H = 15$  harmoniques sont utilisées dans un premier temps. Le rotor commence à toucher le stator vers  $\omega/\omega_0 = 0.16$ , et le contact s'arrête vers 0.86. Les amplitudes

des 5 premières harmoniques sont tracées respectivement en fonction de la fréquence d'excitation adimensionnée  $\omega/\omega_0$  dans la Figure 3.11. Trois points sur la courbe de réponse sont sélectionnés  $\omega/\omega_0 = 0.8$ ,  $\omega/\omega_0 = 0.9$  et  $\omega/\omega_0 = 0.93$ . Leurs composantes de déplacement sont tracées dans la Figure 3.12. Les deux premières harmoniques ( $k=0,1$ , et 2) sont suffisantes pour bien décrire la réponse du rotor.

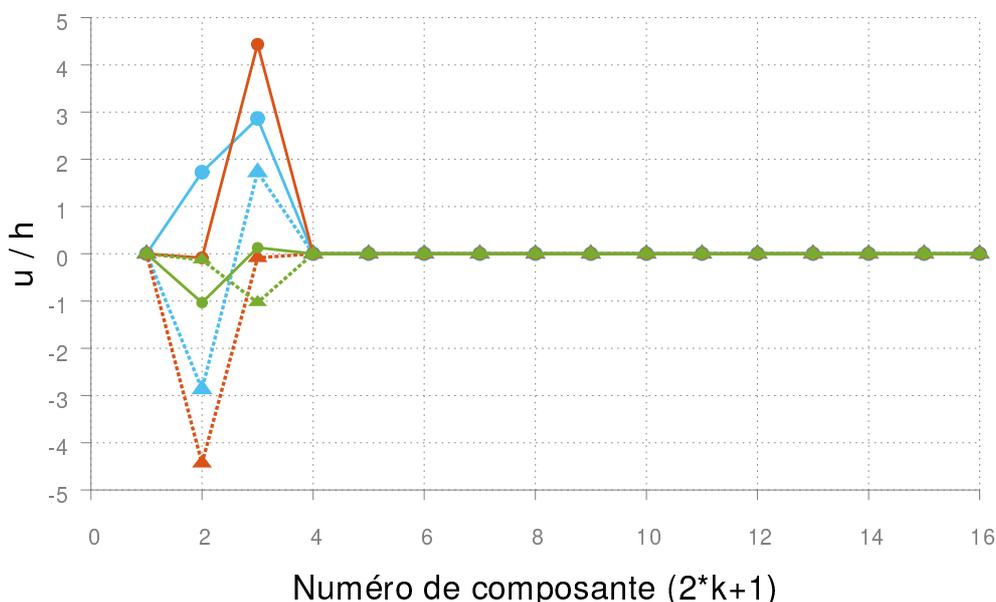


**FIGURE 3.11:** Réponses au balourd du rotor de Jeffcott avec contact rotor-stator pour  $\mu = 0.11$ , tracées par harmonique.

L'analyse de stabilité est aussi menée durant le calcul à l'aide des deux méthodes présentées précédemment. Les solutions stables et instables sont distinguées dans la Figure 3.10 par les lignes solides et pointillées. A partir de  $\omega/\omega_0 = 0.85$ , les solutions périodiques deviennent instables, puis elles sont stables à nouveau vers  $\omega/\omega_0 = 0.96$ . Après le point limite vers  $\omega/\omega_0 = 0.99$  la solution redevient instable, ce qui est similaire à l'exemple de l'oscillateur de Duffing. Les multiplicateurs de Floquet des trois points sont tracés dans la Figure 3.13 :

1. la première solution pour  $\omega/\omega_0 = 0.8$  (Figure 3.13(a)) est stable mais avec une paire des multiplicateurs très proche du cercle unité ( $\eta_{3,4} = 0.443 \pm 0.891i$ ) ;
2. la solution pour  $\omega/\omega_0 = 0.9$  (Figure 3.13(b)) est instable car une paire de multiplicateurs complexes conjugués sont sortis du cercle unité ( $\eta_{3,4} = 0.919 \pm 0.404i$ ), cela indique une bifurcation de Neimark-Sacker ;
3. pour  $\omega/\omega_0 = 0.93$ , la solution est simplement instable et est similaire à l'exemple de Duffing (Figure 3.7(d)) ( $\eta_4 = 2.449 + 0.000i$ ).

Pour vérifier les résultats de l'analyse de stabilité, l'intégration temporelle est effectuée avec des balayages en fréquence croissants et décroissants de la fréquence d'excitation. Les résultats sont montrés dans la Figure 3.14. Après le début du contact, le

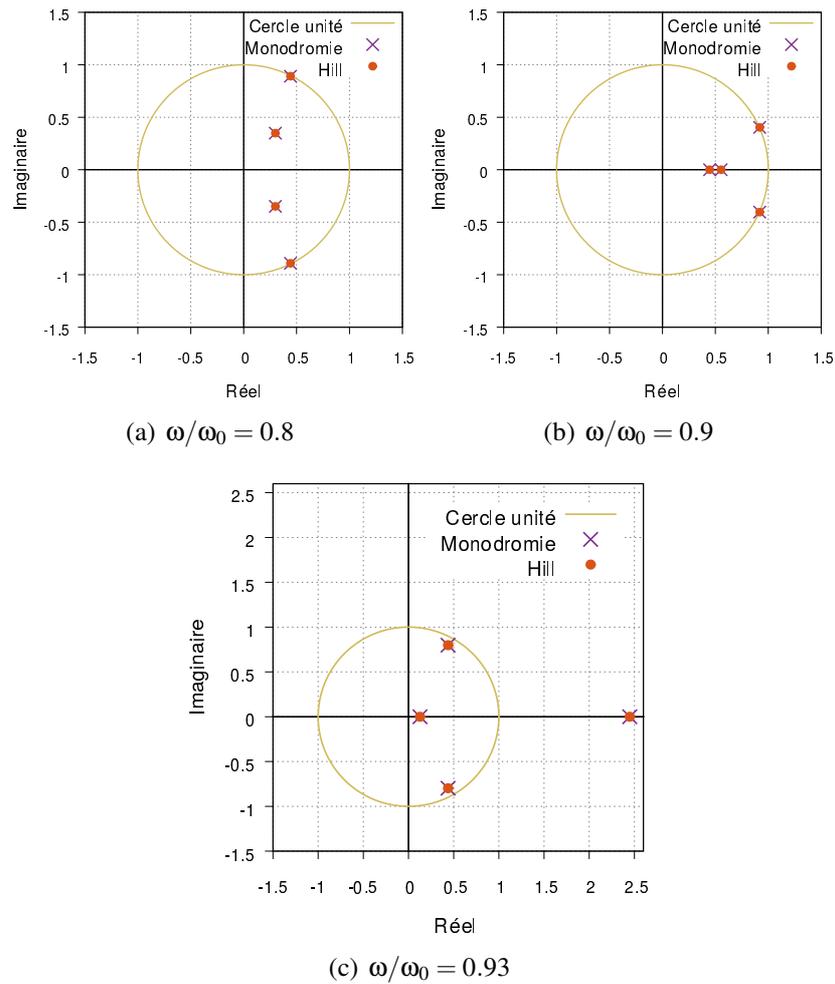


**FIGURE 3.12:** Amplitudes des coefficients de Fourier des quatre points sur la réponse au balourd du rotor de Jeffcott avec contact rotor-stator pour  $\mu = 0.11$ .

rotor frotte en permanence contre le stator. Le mouvement annulaire synchrone continue jusqu'à la fréquence  $\omega/\omega_0 = 0.96$ , après laquelle le mouvement du rotor n'est plus périodique. Les résultats de l'intégration temporelle montrent un mouvement quasi-périodique qui indique un contact partiel entre le rotor et le stator. L'orbite du rotor pour  $\omega/\omega_0 = 0.92$  est tracée dans la Figure 3.15(a), et les sections de Poincaré dans la Figure 3.15(b). Dans la Figure 3.14, la courbe bleue correspond à un balayage croissant pour  $\omega/\omega_0 = [0.1 \ 1.2]$ . Pour le balayage décroissant, deux conditions initiales sont choisies afin d'obtenir la totalité des branches stables de la courbe de réponse. Le premier balayage (courbe verte) est initié à  $\omega/\omega_0 = 1.2$  tandis que le deuxième (courbe orange) est initié à  $\omega/\omega_0 = 0.99$  avec la position initiale du rotor  $(x_0, y_0) = (0.5h, 0)$ . Le troisième balayage décroissant est initié à  $\omega/\omega_0 = 1.2$  avec  $(x_0, y_0) = (10h, 0)$ , la courbe jaune représente la précession inverse du rotor (*backward whirl*).

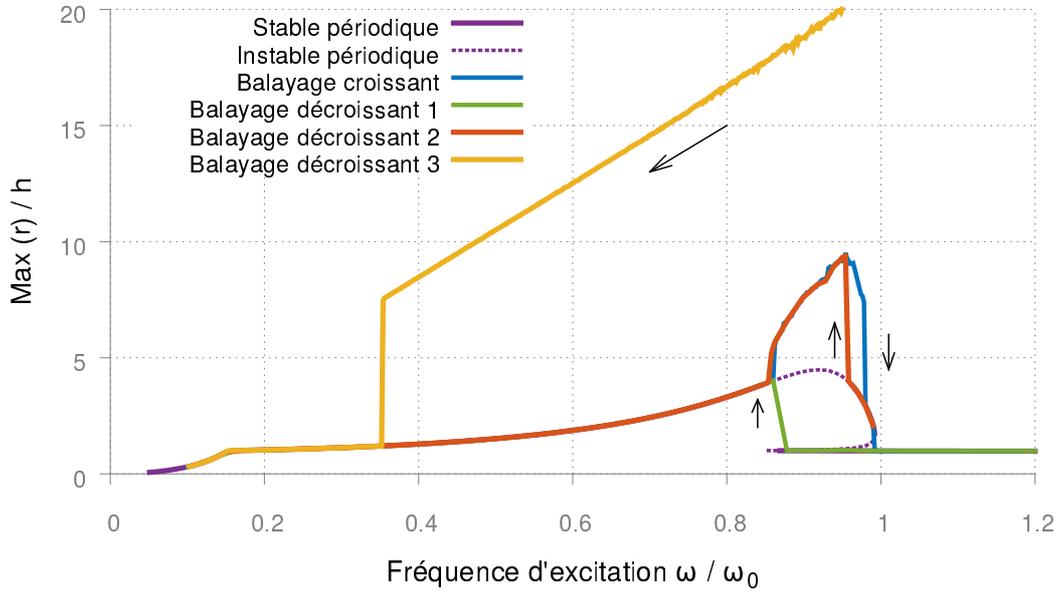
Les réponses stables périodiques prédites par la HBM sont retrouvées par l'intégration temporelle. Des sauts d'amplitude sont observés dans la réponse temporelle où une perte de stabilité est prédite par la méthode de Floquet.

Le coefficient de frottement  $\mu$  étant une grandeur difficile à déterminer précisément, il est pertinent de chercher à caractériser les variations de la réponse avec  $\mu$ . Les courbes de réponses au balourd pour différentes valeurs de  $\mu$  sont donc cherchées et tracées dans la Figure 3.16. Pour un petit  $\mu$ , toute la branche de la solution périodique est stable jusqu'à un point limite, et pour un  $\mu$  plus grand, la zone instable due à l'apparition du régime quasi-périodique (contact partiel) commence avec une fréquence d'excitation plus faible ( $\omega/\omega_0 = 0.42$  pour  $\mu = 0.15$ , et  $\omega/\omega_0 = 0.23$  pour  $\mu = 0.25$ ). De plus, le retour au régime périodique avant le point limite n'apparaît pas pour ces deux valeurs.

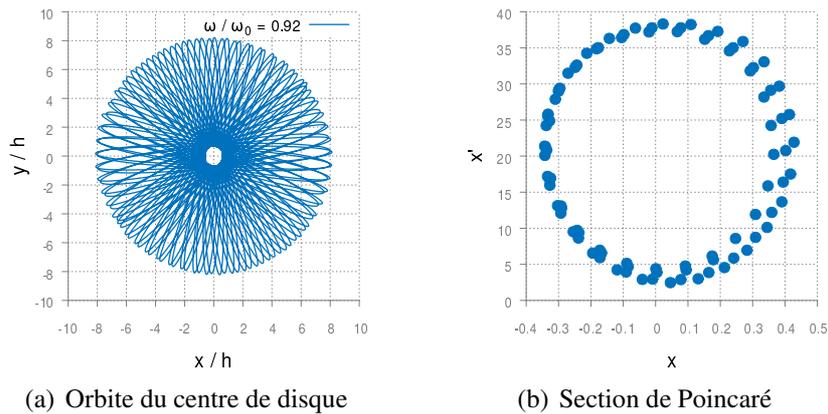


**FIGURE 3.13:** Les multiplicateurs et exposants de Floquet dans le plan complexe, (b) et (c) sont des solutions instables.

### 3. Réponses forcées stationnaires et non-linéaires



**FIGURE 3.14:** Réponses au balourd du rotor de Jeffcott avec contact rotor-stator pour  $\mu = 0.11$ , comparant avec les résultats obtenus par l'intégration temporelle.



**FIGURE 3.15:** Réponse temporelle du rotor en régime quasi-périodique pour  $\mu = 0.11$ ,  $\omega/\omega_0 = 0.92$ .

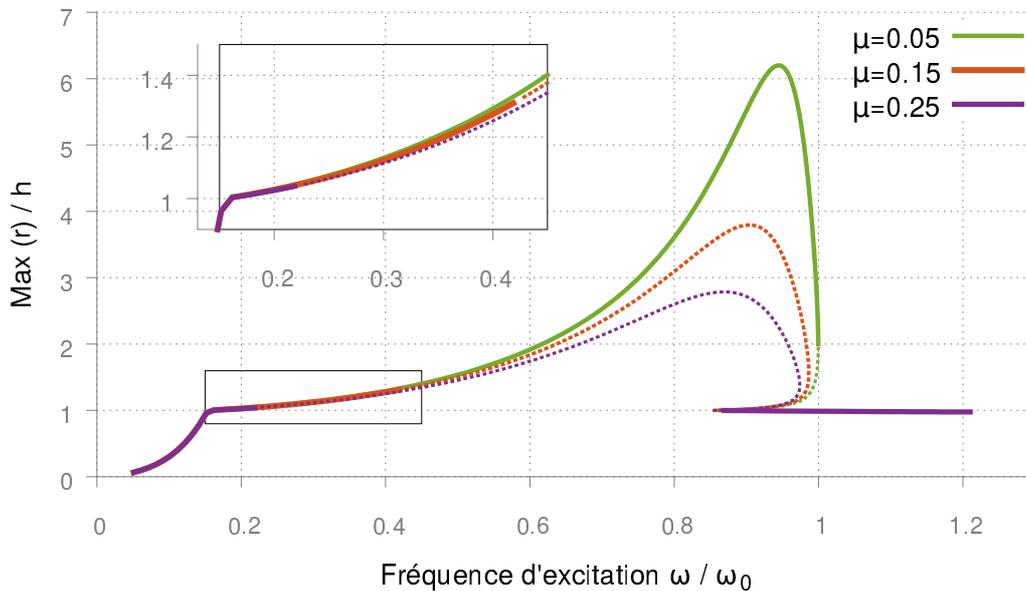


FIGURE 3.16: Réponses au balourd du rotor de Jeffcott avec contact rotor-stator pour différents  $\mu$ .

### 3.6.2 Rotor à 3 disques avec contact rotor-stator

Le rotor éléments finis présenté dans §2.6 est étudié en prenant en compte un possible contact rotor-stator au niveau du deuxième disque.

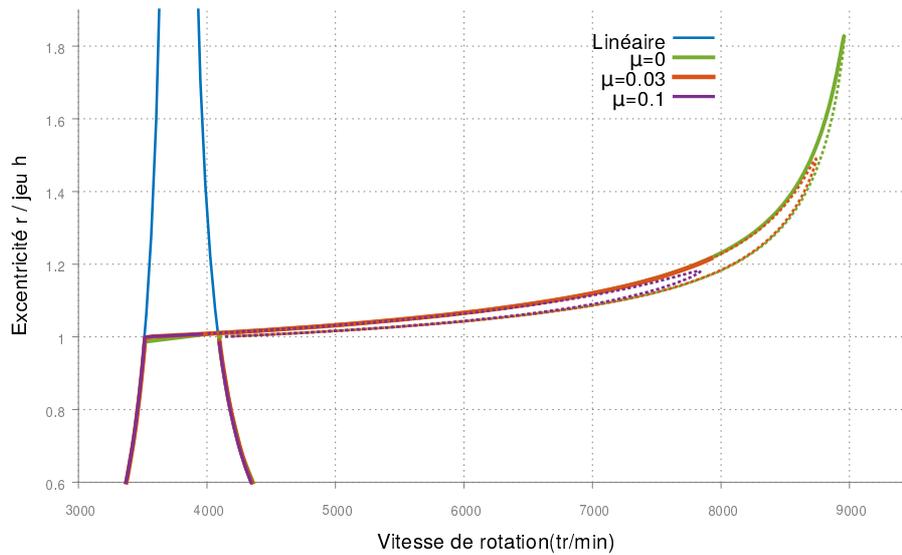
#### 3.6.2.1 Rotor modélisé en poutre

D'abord, le rotor modélisé par des éléments de type poutre est étudié. Il est composé de 26 éléments de poutre à deux nœuds de type Timoshenko. Le nombre total de ddl est  $n = 112$ . Le rotor est supporté par deux paliers identiques isotropes aux deux extrémités avec  $k_{xx} = k_{yy} = 6 \cdot 10^7 \text{N.m}^{-1}$  et  $c_{xx} = c_{yy} = 600 \text{N.s.m}^{-1}$ . Le contact peut avoir lieu au niveau du deuxième disque avec un stator circulaire, fixé et rigide. L'élasticité du stator est modélisé par des ressorts avec la raideur  $k_c$  qui est choisie dix fois plus grande que la raideur du palier. Le modèle du contact est identique à celui dans l'exemple précédent avec un jeu initial  $h = 1 \text{mm}$ . L'équation du mouvement prend la forme Eq. (3.1) avec  $f_{nl}$  la force de contact entre le deuxième disque et le stator. On cherche la réponse à un balourd d'amplitude  $0.02 \text{kg.m}$  situé aussi au deuxième disque.

Sept harmoniques sont utilisés pour calculer la réponse du rotor. Pour plusieurs valeurs du coefficient de frottement  $\mu$ , les réponses au balourd du rotor poutre sont tracées dans la Figure 3.17. Les analyses de stabilité sont aussi réalisées.

Pour  $\mu = 0$ , le rotor se comporte périodiquement sur toute la plage de vitesse de rotation. Le changement de stabilité autour du point limite prédit un saut d'amplitude. L'instabilité apparaît plus tôt lorsque  $\mu$  croît. L'analyse des multiplicateurs de Floquet montre

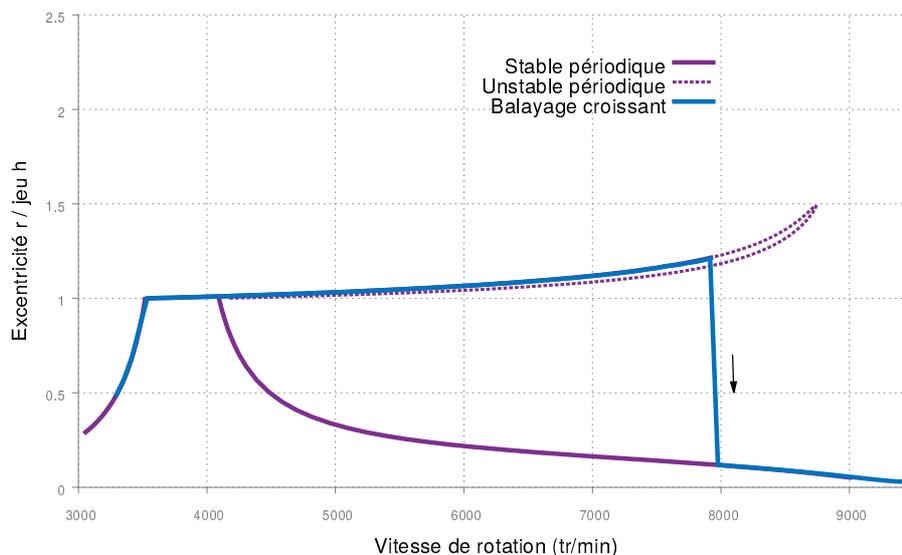
### 3. Réponses forcées stationnaires et non-linéaires



**FIGURE 3.17:** Réponses au balourd du rotor poutre avec contact rotor-stator pour différent  $\mu$ .

que le mouvement quasi-périodique apparaît après  $\Omega = 7900\text{tr/min}$  (pour  $\mu = 0.1$ , après  $\Omega = 4000\text{tr/min}$ ).

La réponse pour  $\mu = 0.03$  est aussi calculée par intégration temporelle avec un balayage en fréquence croissant (Figure 3.18). Les solutions obtenues coïncident parfaitement avec la branche stable obtenue par HBM.



**FIGURE 3.18:** Réponse au balourd du rotor poutre avec contact rotor-stator pour  $\mu = 0.03$ , comparé avec l'intégration temporelle.

### 3.6.2.2 Rotor modélisé en éléments finis 3D

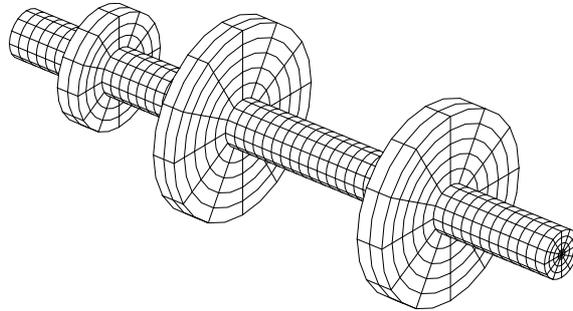


FIGURE 3.19: Modèle du rotor de 3 disques avec des EF 3D.

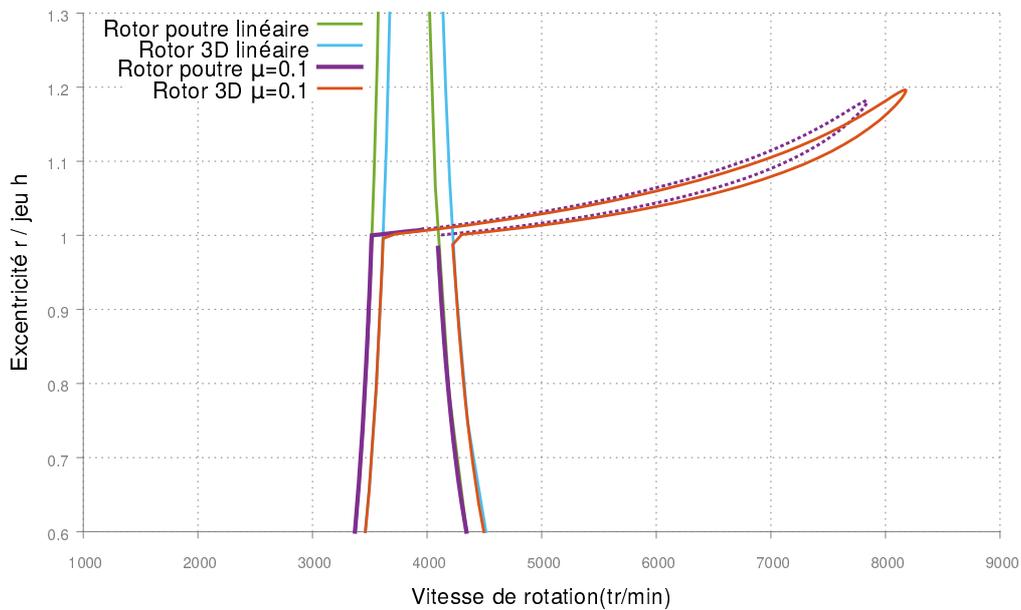


FIGURE 3.20: Réponses au balourd du rotor poutre et 3D avec contact rotor-stator pour  $\mu = 0.1$ .

Le même rotor est aussi modélisé par des éléments massifs (Figure 3.19). On rappelle qu'à la différence des éléments de poutre, une modélisation 3D implique une description du rotor dans le repère tournant. Les paliers situés aux extrémités sont modélisés par le couplage du rotor et stator dans le domaine fréquentiel comme présenté dans §3.5.2. La réduction de Craig-Bampton du modèle est faite en retenant 19 modes contraints, et 4 ddl de contour correspondent aux deux paliers, soit 23 ddl au total.

La courbe de réponse au balourd du rotor 3D est tracé dans la Figure 3.20 pour  $\mu = 0.1$  en comparant avec celle du rotor poutre. Le modèle rotor 3D est plus rigide que le modèle rotor poutre car les interfaces du rotor et disque ne sont pas prises en compte dans ce

dernier modèle. Bien qu'un décalage sur les fréquences soit présent, la courbe de réponse non-linéaire prend la même forme que celle du rotor modélisé en poutre.

## 3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, les méthodes numériques pour la résolution du problème dynamique non-linéaire dans le domaine fréquentiel sont présentées. Le choix s'est porté sur la méthode de l'équilibrage harmonique couplé avec l'AFT. La méthode de continuation donne la totalité de la courbe de réponse. Deux méthodes pour analyser la stabilité de cette réponse reposant sur la théorie de Floquet sont aussi exposées. Les spécificités liées à la modélisation des rotors dans le repère tournant et à l'analyse par la HBM de ces modèles ont été explicitées. L'implémentation de ces méthodes dans Cast3M permet le calcul de la réponse périodique de rotors modélisés en 3D comportant des non-linéarités.

La convergence de la solution est ensuite étudiée et illustrée sur divers exemples. Cette convergence est généralement rapide et montre l'efficacité des méthodes proposées. Différentes non-linéarités sont considérées afin de démontrer la robustesse des méthodes implémentées.

Les simulations effectuées montrent que le choix des paramètres des méthodes de résolution utilisées influencent sensiblement les performances en termes de temps et de précision des calculs ainsi que la convergence des résultats. Dans le cas de la prévision de la réponse au balourd, il s'agit de la finesse des maillages, du nombre d'harmoniques retenus dans la HBM, et de la discrétisation temporelle pour la DFT. Dans le cas de l'analyse de la stabilité dynamique, il s'agit du nombre d'harmoniques utilisé pour le calcul du déterminant de Hill, et de la discrétisation temporelle pour le calcul de la matrice de monodromie.

## Chapitre 4

# Suivi numérique pour analyse paramétrique directe des bifurcations

*Ce chapitre est consacré à la description de la méthode numérique développée dans le domaine fréquentiel pour l'analyse paramétrique rapide de la dynamique du système non-linéaire. Le suivi direct de la résonance est d'abord présenté. Puis les bifurcations associées aux changements de stabilité et de régime dynamique du système sont étudiées. La détection, la localisation et le suivi des différents types de bifurcation en fonction d'un paramètre sont détaillés. Notamment, un système augmenté original pour la détection et le suivi des bifurcations de Neimark-Sacker (Hopf secondaire) est introduit.*

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Analyse paramétrique de la résonance . . . . .</b>	<b>93</b>
4.1.1	Équation contrainte de la résonance . . . . .	93
4.1.2	Localisation un point de résonance . . . . .	93
4.1.3	Suivi de la résonance selon un paramètre variable . . . . .	94
4.1.4	Expressions des matrices jacobiennes du système augmenté . . . . .	95
4.1.5	Exemple de l'oscillateur Duffing . . . . .	97
<b>4.2</b>	<b>Analyse paramétrique des points de bifurcation . . . . .</b>	<b>99</b>
4.2.1	Détection des bifurcations . . . . .	99
4.2.2	Localisation des points de bifurcations . . . . .	100
4.2.3	Expression des jacobiennes . . . . .	105
4.2.4	Suivi direct des points de bifurcation . . . . .	106
<b>4.3</b>	<b>Exemples d'application . . . . .</b>	<b>108</b>
4.3.1	Oscillateur de Duffing . . . . .	108
4.3.2	Absorbeur de vibration non-linéaire . . . . .	113
4.3.3	Rotor de Jeffcott . . . . .	121

---

Tout comme le calcul de la courbe de réponse dans le chapitre précédent, les analyses paramétriques présentées dans ce chapitre sont elles aussi traitées dans le domaine fréquentiel par la méthode de la balance harmonique.

## 4.1 Analyse paramétrique de la résonance

Une étude numérique peut être menée pour analyser de manière directe l'influence d'un paramètre sur le pic de résonance. Le suivi numérique du maximum de résonance peut être réalisé en ajoutant à l'équation du mouvement une équation caractérisant ce point d'amplitude maximale. Il s'agit d'abord de localiser précisément le maximum de résonance, puis de suivre ce maximum en faisant varier un autre paramètre.

### 4.1.1 Équation contrainte de la résonance

Comme exposé dans le chapitre précédent, l'équation du mouvement (3.1) pour les vibrations forcées d'un système dynamique non-linéaire est traitée dans le domaine fréquentiel sous la forme suivante :

$$R(\mathbf{Q}, \omega, \alpha_f, \alpha_p) = \mathbf{Z}(\omega)\mathbf{Q} + F_{nl}(\mathbf{Q}, \alpha_f) - \mathbf{P}(\alpha_p) = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

avec  $\alpha_f, \alpha_p$  l'ensemble des paramètres du système, relatifs par exemple aux efforts non-linéaires et à l'excitation. Les coefficients de Fourier solutions de l'Eq. (4.1) sont calculés par la HBM. En utilisant la technique de continuation par pseudo-longueur d'arc, la courbe de réponse peut être décrite dans son intégralité (voir §3.2).

Pour déterminer le maximum de résonance sur cette courbe de réponse, une équation qui caractérise la résonance est ajoutée afin de restreindre la courbe à ce seul point. Pour simplifier le calcul, l'équation proposée dans [PET 07] exprime le fait que l'amplitude du déplacement pour un ddl  $j$  et une harmonique  $i$  donnés est maximale à la résonance, et s'écrit sous la forme

$$A = \mathbf{Q}^T I_{ij} \mathbf{Q}_\omega = 0 \quad (4.2)$$

avec  $I_{ij}$  une matrice diagonale dont seules deux composantes correspondant aux coefficients en cosinus et sinus de la  $i^e$  harmonique du  $j^e$  ddl sont égales à 1,  $\mathbf{Q}_\omega$  la dérivée de  $\mathbf{Q}$  par rapport à  $\omega$ . Lorsqu'on cherche le maximum de la résonance principale, on choisit généralement  $i = 1$ . Dans le cas de super- ou de sous-harmoniques, il faut adapter ce choix en fonction de l'harmonique dominante au voisinage de la résonance.

### 4.1.2 Localisation un point de résonance

Le critère (4.2) permet de détecter non seulement les points d'amplitude maximale mais aussi d'amplitude minimale. Il est possible de distinguer les points d'amplitude maximale à l'aide du critère suivant

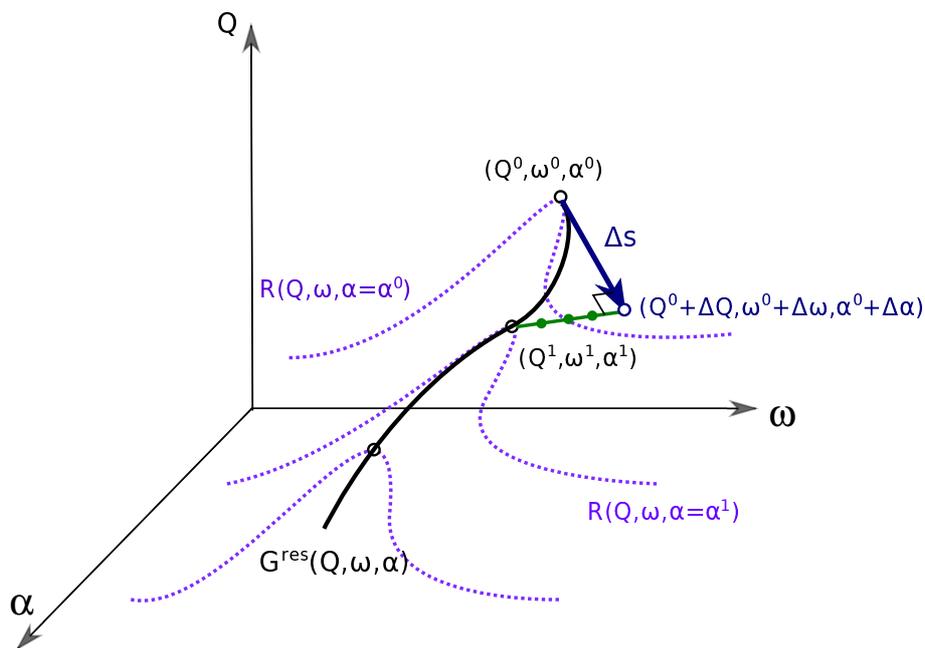
$$(A \Delta\omega)^- > 0 \text{ et } (A \Delta\omega)^+ < 0 \quad (4.3)$$

où les exposants  $-$  et  $+$  caractérisent deux points successifs situés respectivement avant et après la résonance, et  $\Delta\omega$  correspond à l'incrément selon  $\omega$  entre le pas précédent et le pas courant. Pour localiser le point où l'amplitude est localement maximale, le signe de  $A \Delta\omega$  est surveillé lors du calcul de la courbe de réponse. Un changement de signe de positif à négatif entre deux points consécutifs indique que le maximum de résonance est situé entre ces deux points (un changement de signe inverse indique un minimum local). L'algorithme de localisation est alors démarré à partir du point pour lequel  $A \Delta\omega$  est le plus proche de 0. Il s'agit de résoudre un système de taille  $L + 1$  qui vérifie simultanément l'équilibre dynamique et l'Eq. (4.2)

$$\mathbf{G}^{res}(\mathbf{Q}, \omega) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}(\mathbf{Q}, \omega) \\ \mathbf{A}(\mathbf{Q}, \omega) \end{pmatrix} = 0 \quad (4.4)$$

Ce système est résolu par la méthode de Newton-Raphson jusqu'à convergence selon un critère similaire à celui exposé dans le paragraphe 3.2.2 p.59. Le point de résonance est alors localisé précisément.

### 4.1.3 Suivi de la résonance selon un paramètre variable



**FIGURE 4.1:** Schéma de la continuation pour le suivi des points de résonance.

Lorsqu'on fait varier un paramètre sélectionné  $\alpha$ , en général, le pic de résonance varie continûment. Une méthode pour suivre directement les résonances est donc proposée pour que l'analyse paramétrique rapide soit effectuée. Le suivi direct de la résonance se fait par les étapes suivantes :

- Pour une valeur fixée de  $\alpha^0$ , la courbe de réponse est calculée jusqu'au changement de signe de  $A\Delta\omega$  de positive à négative.
- Le point de résonance  $(Q^0, \omega^0)$  est localisé en résolvant le système augmenté (4.4) par la méthode de Newton-Raphson.
- $\alpha$  est ajouté dans le système comme une nouvelle inconnue, avec l'équation caractérisant les points de résonance et l'équation de longueur d'arc. Les points de résonance sont donc suivis par la technique de continuation sur la plage de variation de  $\alpha$  choisie.

La méthode de continuation consiste à calculer pour chaque pas une prédiction et des corrections comme montré sur la Figure 4.1. La prédiction se fait à partir de  $(Q^0, \omega^0, \alpha^0)$  dans la direction tangente de la courbe de suivi, et le vecteur tangent  $t = (\Delta Q, \Delta\omega, \Delta\alpha)^T$  de longueur  $\Delta s$  est obtenu en résolvant le système

$$\begin{cases} \|\{\Delta Q, \Delta\omega, \Delta\alpha\}^T\| = \Delta s \\ \begin{bmatrix} R_Q & R_\alpha \\ A_Q & A_\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta Q/\Delta\omega \\ \Delta\alpha/\Delta\omega \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} R_\omega \\ A_\omega \end{Bmatrix} \end{cases} \quad (4.5)$$

Le point en fin de pas prédicteur est donné par

$$(Q^1, \omega^1, \alpha^1)^T = (Q^0, \omega^0, \alpha^0)^T + t = (Q^0 + \Delta Q, \omega^0 + \Delta\omega, \alpha^0 + \Delta\alpha)^T \quad (4.6)$$

Ensuite, les corrections de Newton-Raphson  $(\delta Q, \delta\omega, \delta\alpha)$  sont effectuées dans la direction orthogonale au pas prédicteur

$$\begin{bmatrix} R_Q^k & R_\omega^k & R_\alpha^k \\ A_Q^k & A_\omega^k & A_\alpha^k \\ \Delta Q^T & \Delta\omega & \Delta\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta Q \\ \delta\omega \\ \delta\alpha \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} R^k \\ A^k \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

et la solution est corrigée à chaque itération par

$$Q^{k+1} = Q^k + \delta Q \quad \omega^{k+1} = \omega^k + \delta\omega \quad \alpha^{k+1} = \alpha^k + \delta\alpha \quad (4.8)$$

jusqu'à convergence. Le suivi des résonances en fonction de  $\alpha$  est complet quand la plage de  $\alpha$  spécifiée est couverte.

#### 4.1.4 Expressions des matrices jacobiennes du système augmenté

Les méthodes pour construire les matrices jacobiennes  $R_Q$  et  $R_\omega$  sont présentées dans le paragraphe 3.3. La dérivée  $R_\alpha^k$  s'écrit sous la forme suivante déduite de l'Eq. (4.1) :

$$R_\alpha^k = F_{nl\alpha}(Q^k, \alpha^k) - P_\alpha(\omega^k, \alpha^k) \quad (4.9)$$

Les termes fréquentiels  $F_{nl\alpha}$  et  $P_\alpha$  sont formés à partir des fonctions analytiques temporelles (approche AFT) grâce à la DFT (*Discret Fourier Transformation*) :

$$F_{nl\alpha} = (\Gamma^{-1} \otimes I_n) \frac{\partial \bar{f}_{nl}}{\partial \alpha} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \bar{f}_{nl}}{\partial \alpha} = \left\{ \frac{\partial f_{nl}}{\partial \alpha} \Big|_{t=t_1}, \dots, \frac{\partial f_{nl}}{\partial \alpha} \Big|_{t=t_N} \right\}^T_{(nN \times 1)} \quad (4.10)$$

$$P_\alpha = (\Gamma^{-1} \otimes I_n) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \alpha} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial \alpha} = \left\{ \frac{\partial \bar{p}}{\partial \alpha} \Big|_{t=t_1}, \dots, \frac{\partial \bar{p}}{\partial \alpha} \Big|_{t=t_N} \right\}^T_{(nN \times 1)} \quad (4.11)$$

Les dérivées relatives à  $A$  de l'Eq. (4.2) sont écrites dans un premier temps sous forme analytique

$$\begin{aligned} A_Q^k(Q^k, \omega^k, \alpha^k) &= I_{ij} \cdot Q_\omega + Q^{kT} \cdot I_{ij} \cdot (Q_\omega)_Q \\ A_\omega^k(Q^k, \omega^k, \alpha^k) &= Q^{kT} \cdot I_{ij} \cdot (Q_\omega)_\omega \\ A_\alpha^k(Q^k, \omega^k, \alpha^k) &= Q^{kT} \cdot I_{ij} \cdot (Q_\omega)_\alpha \end{aligned} \quad (4.12)$$

Le terme  $Q_\omega$  de taille  $(L \times 1)$  et ses dérivées partielles restent à déterminer. En considérant

$$\frac{dR}{d\omega} = R_Q \cdot Q_\omega + R_\omega = 0 \quad (4.13)$$

il vient

$$Q_\omega = -R_Q \setminus R_\omega \quad (4.14)$$

La dérivée de l'Eq. (4.13) par rapport à  $Q$  s'écrit

$$(R_Q)_Q \cdot Q_\omega + R_Q \cdot (Q_\omega)_Q = -(R_\omega)_Q \quad (4.15)$$

en y introduisant l'Eq. (4.1), la dérivée  $(Q_\omega)_Q$  est alors déduite

$$(Q_\omega)_Q = -R_Q \setminus \left( Z_\omega + (F_{nlQ})_Q \cdot Q_\omega \right) \quad (4.16)$$

Sur le même principe, les dérivées  $(Q_\omega)_\omega$  et  $(Q_\omega)_\alpha$  sont obtenues

$$\begin{aligned} (Q_\omega)_\omega &= -R_Q \setminus \left( (Z_\omega)_\omega Q + Z_\omega \cdot Q_\omega \right) \\ (Q_\omega)_\alpha &= -R_Q \setminus \left( (F_{nlQ})_\alpha \cdot Q_\omega \right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

avec  $R_Q$ ,  $Z_\omega$ ,  $Q_\omega$  données par (3.27), (3.38) et (4.14). La dérivée  $(Z_\omega)_\omega$  est facilement déduite de l'Eq. (3.38)

$$(Z_\omega)_\omega = 2\nabla^2 \otimes M \quad (4.18)$$

La dérivée  $(F_{nlQ})_Q$  peut être formulée analytiquement comme pour le terme  $F_{nlQ}$  :

$$(F_{nlQ})_Q = (\Gamma^{-1} \otimes I_n) \frac{\partial}{\partial \bar{q}} \left( \frac{\partial \bar{f}_{nl}}{\partial \bar{q}} + \frac{\partial \bar{f}_{nl}}{\partial \bar{q}} \right) (\Gamma \otimes I_n) + (\Gamma^{-1} \otimes I_n) \frac{\partial}{\partial \bar{q}} \left( \frac{\partial \bar{f}_{nl}}{\partial \bar{q}} + \frac{\partial \bar{f}_{nl}}{\partial \bar{q}} \right) \omega ((\Gamma \nabla) \otimes I_n) \quad (4.19)$$

où les matrices  $\frac{\partial^2 \bar{f}_{nl}}{\partial \bar{q}^2}$ ,  $\frac{\partial^2 \bar{f}_{nl}}{\partial \bar{q} \partial \bar{q}}$ ,  $\frac{\partial^2 \bar{f}_{nl}}{\partial \bar{q}^2}$  sont des matrices de taille  $(nN \times nN)$ , diagonales par blocs, et construites dans le domaine temporel

$$\frac{\partial^2 \bar{f}_{nl}}{\partial \bar{q}^2} = \text{diag} \left\{ \frac{\partial^2 \bar{f}_{nl}}{\partial \bar{q}^2} \Big|_{t=t_1}, \dots, \frac{\partial^2 \bar{f}_{nl}}{\partial \bar{q}^2} \Big|_{t=t_N} \right\} \quad (4.20)$$

avec les échantillons temporels  $t_i$  définis dans la section 3.3.1. Les termes  $\frac{\partial^2 f_{nl}}{\partial q^2}$  sont calculés soit analytiquement, soit par différences finies quand les expressions analytiques sont difficiles à obtenir.

De manière analogue, la dérivée  $(\mathbf{F}_{nlQ})_\alpha$  est formée comme suit :

$$(\mathbf{F}_{nlQ})_\alpha = (\Gamma^{-1} \otimes \mathbf{I}_n) \frac{\partial^2 \bar{f}_{nl}}{\partial \bar{q} \alpha} (\Gamma \otimes \mathbf{I}_n) + (\Gamma^{-1} \otimes \mathbf{I}_n) \frac{\partial^2 \bar{f}_{nl}}{\partial \bar{q} \alpha} \omega((\Gamma \nabla) \otimes \mathbf{I}_n) \quad (4.21)$$

Toutes les matrices jacobiennes de l'Eq. (4.7) sont ainsi obtenues.

Cette approche par AFT est très efficace mais nécessite des efforts de programmation supplémentaires. Une alternative simple à mettre en œuvre (mais plus coûteuse en temps de calcul) consiste à approximer les dérivées de  $A$  par différences finies

$$\begin{aligned} A_{Q_i} &\simeq \frac{1}{\varepsilon} [A(Q + \varepsilon \cdot I_i) - A(Q)] \\ A_\omega &\simeq \frac{1}{\varepsilon} [A(\omega + \varepsilon) - A(\omega)] \\ A_\alpha &\simeq \frac{1}{\varepsilon} [A(\alpha + \varepsilon) - A(\alpha)] \end{aligned} \quad (4.22)$$

avec  $I_i$  le vecteur unité avec seulement la  $i^e$  composante non nulle. La perturbation  $\varepsilon$  est choisie égale à  $10^{-6}$ .

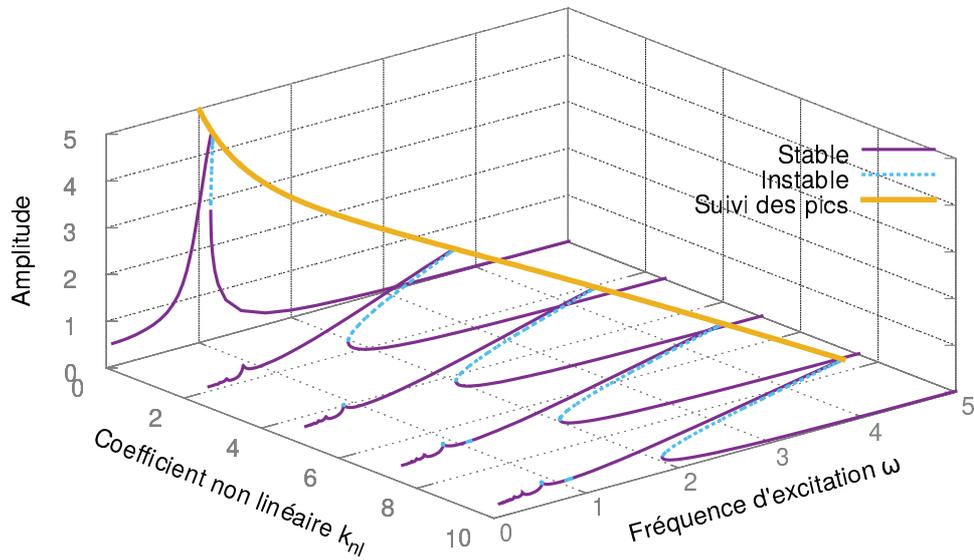
#### 4.1.5 Exemple de l'oscillateur Duffing

On rappelle que l'équation du mouvement de l'oscillateur de Duffing s'écrit sous la forme adimensionnée (3.39). Le coefficient de la force non-linéaire  $k_{nl}$  est considéré comme la nouvelle inconnue  $\alpha$  dans les systèmes (4.5) et (4.7).

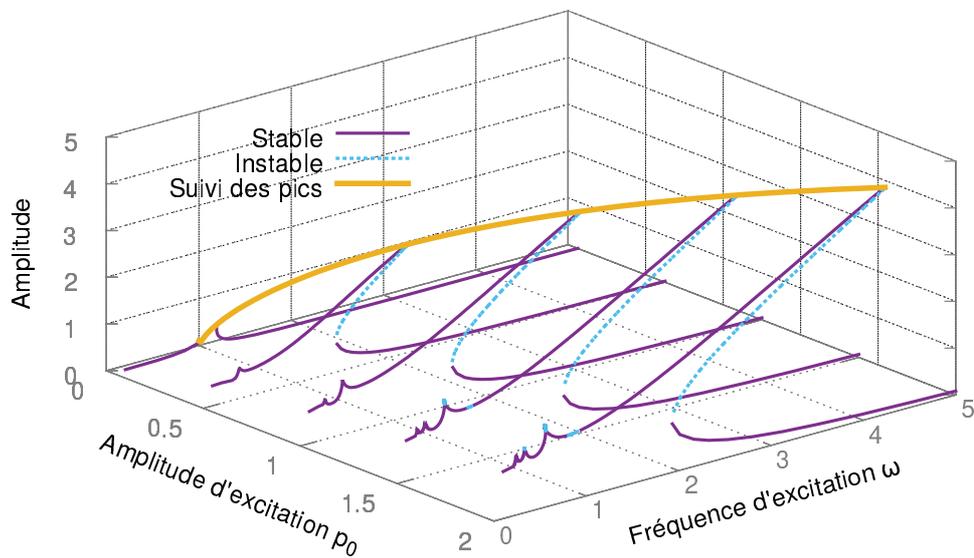
D'abord, les courbes de réponse sont calculées pour plusieurs valeurs de  $k_{nl}$  : 0.02, 2.5, 5, 7.5, 10. Les réponses sont illustrées en 3D (voir Figure 4.2) pour faciliter la démonstration des résultats. Pour effectuer le suivi, le premier maximum de résonances est d'abord cherché pour  $k_{nl} = 1$  à l'aide du système augmenté décrit au paragraphe 4.1.2. Ensuite, en faisant varier  $k_{nl}$  dans le sens croissant et décroissant, la technique de continuation fournit la courbe de suivi sur le plage  $0 < k_{nl} < 10$ . La courbe de suivi des points de résonance est tracée sur la Figure 4.2. Elle relie les résonances des courbes de réponses préalablement calculées ce qui valide la précision du suivi.

Par conséquent, cette approche permet de suivre directement les pics de résonance en fonction de coefficient du non-linéarité  $k_{nl}$ , donc d'étudier efficacement l'influence de  $k_{nl}$  sur l'amplitude maximale de vibration : avec l'augmentation de  $k_{nl}$ , le point de résonance tend vers une fréquence plus haute et une amplitude de vibration plus basse, la force non-linéaire qui croît avec  $k_{nl}$  donne un effet de plus en plus raidissant au comportement de l'oscillateur.

Ce paramètre étudié peut être non seulement celui qui agit sur la force non-linéaire, mais aussi celui de l'excitation extérieure. Par exemple l'amplitude  $p_0$  de l'excitation



**FIGURE 4.2:** Réponses de l'oscillateur duffing présentées en 3D pour  $2\zeta = 0.1$ ,  $\omega_0 = 1$ ,  $p_0 = 0.5$  et  $0 \leq k_{nl} \leq 10$ ; Suivi des points de résonance en fonction de  $k_{nl}$ .



**FIGURE 4.3:** Réponses de l'oscillateur duffing présentées en 3D pour  $2\zeta = 0.1$ ,  $\omega_0 = 1$ ,  $k_{nl} = 1$  et  $0 \leq p_0 \leq 20$ ; Suivi des points de résonance en fonction de  $p_0$ .

harmonique peut être étudiée de la même façon. Son influence sur la courbe de réponse est tracée sur la Figure 4.3. On vérifie bien que l'amplitude de vibration à la résonance croît avec  $p_0$ .

## 4.2 Analyse paramétrique des points de bifurcation

Pour les systèmes non-linéaires en rotation, l'étude de la résonance qui correspond à un niveau vibratoire élevé est importante. L'analyse des points de bifurcation l'est tout autant, étant donné qu'ils sont généralement accompagnés soit d'une perte de stabilité, soit d'un changement de régime dynamique. Il paraît donc opportun de suivre les bifurcations en fonction d'un paramètre du système afin d'obtenir rapidement une cartographie du système dynamique sous la forme de frontières de stabilité ou de frontières de régimes dynamiques.

Souvent, cette étude paramétrique est plus facile à réaliser par une approche analytique. Mais trouver des réponses analytiques est difficile voire impossible pour des systèmes non-linéaires de grande taille. L'analyse numérique est ainsi une bonne approche pour réaliser cette étude paramétrique. Les équations caractérisant les bifurcations sont d'abord présentées. Puis elles sont couplées avec l'équation du mouvement et la technique de continuation pour suivre directement les bifurcations, ce qui nous donne les seuils de stabilité et de changement de régime. Les bifurcations conventionnelles, comme les points limites, les points de branchement et les points de Neimark-Sacker sont abordées.

### 4.2.1 Détection des bifurcations

Au cours du calcul de la courbe de réponse, la matrice Jacobienne augmentée de taille  $(L+1, L+1)$

$$\mathbf{J}^c = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_Q & \mathbf{R}_\omega \\ \Delta\mathbf{Q}^{1T} & \Delta\omega^1 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

doit être inversée à chaque itération pour s'approcher à la solution exacte.

Par définition, un point singulier (point limite ou point de branchement) apparaît quand un exposant de Floquet  $\lambda_i$  du système traverse l'axe imaginaire par l'origine. Il s'agit d'un point limite (*fold bifurcation*) lorsque seule  $\mathbf{R}_Q$  est singulière, ou d'un point de branchement lorsque  $\mathbf{R}_Q$  et la matrice augmentée  $\mathbf{J}^c$  sont singulières. La singularité de  $\mathbf{J}^c$  équivaut à  $\mathbf{R}_\omega\phi = 0$ , où  $\phi$  est le mode propre associé à la valeur propre nulle de  $\mathbf{R}_Q$ . On peut ainsi définir des indicateurs  $\varphi$  pour tester la présence de points singuliers. Il s'agit de fonctions tests qui sont calculées pour chaque solution convergée et qui s'annulent au passage des points de bifurcation. Ainsi, les signes de  $\varphi_{LP} = \det(\mathbf{R}_Q)$  et de  $\varphi_{BP} = \mathbf{R}_\omega\phi$  sont surveillés tout au long du calcul de la courbe de réponse. Un changement de signe d'un ou des deux indicateurs indique la présence d'un point limite ou d'un

point de branchement. Les points d'équilibre sont donc classifiés comme suit :

$$\begin{aligned}
 \text{Point régulier} & \quad \text{si } \varphi_{LP} = \det(\mathbf{R}_Q) \neq 0 \text{ et } \varphi_{BP} = \mathbf{R}_\omega \phi \neq 0 \\
 \text{Point limite} & \quad \text{si } \varphi_{LP} = \det(\mathbf{R}_Q) = 0 \text{ et } \varphi_{BP} = \mathbf{R}_\omega \phi \neq 0 \\
 \text{Point de branchement} & \quad \text{si } \varphi_{LP} = \det(\mathbf{R}_Q) = 0 \text{ et } \varphi_{BP} = \mathbf{R}_\omega \phi = 0
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Une bifurcation de Neimark-Sacker (NS) ou bifurcation de Hopf secondaire indique la transition d'un régime périodique à un régime quasi-périodique pour les solutions de l'équation d'équilibre (3.1) dans le domaine temporel. Son équivalent dans le cadre fréquentiel de la méthode de la balance harmonique est une bifurcation de Hopf qui indique la transition d'un point fixe (solution avec des coefficients de Fourier constants) à un cycle limite (solution avec des coefficients de Fourier périodiques). Étant donné cette équivalence, les deux dénominations seront utilisées indifféremment par la suite. Une bifurcation de Neimark-Sacker se produit lorsqu'une paire d'exposants de Floquet complexes conjugués traverse l'axe imaginaire du plan complexe avec  $\lambda = \pm i\kappa$ . La présence d'une bifurcation de Neimark-Sacker le long de la courbe d'équilibre peut donc être détectée en surveillant l'évolution des exposants de Floquet. Il est possible d'utiliser des indicateurs qui s'annulent au passage d'une bifurcation de Neimark-Sacker [SEY 09][KUZ 04][GOV 00]

$$\begin{aligned}
 \varphi_{NS1} &= \prod_{1 \leq j < i \leq n} \lambda_i + \lambda_j \\
 \varphi_{NS2} &= \det(2\mathbf{J}_B \odot \mathbf{I}_{2n})
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

où  $\mathbf{J}_B$  est la matrice diagonale des  $2n$  exposants de Floquet  $\mathbf{J}_B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{2n})$  et  $\odot$  représente le produit bialterné. Ces deux indicateurs sont équivalents car les valeurs propres de la matrice  $2\mathbf{J}_B \odot \mathbf{I}_{2n}$  sont  $\lambda_i + \lambda_j$ . Cependant, il faut les utiliser avec prudence étant donné qu'ils s'annulent non seulement pour les bifurcations de Neimark-Sacker, mais aussi pour une paire d'exposants de Floquet réels opposés  $\lambda = \pm \kappa$  qui caractérise un point selle neutre (*neutral saddle point*).

## 4.2.2 Localisation des points de bifurcations

Deux approches existent pour le calcul précis des points de bifurcation. La première est basée sur l'utilisation d'un système d'équations communément appelé système augmenté complet (*fully extended system*) et consiste à introduire une ou plusieurs équations additionnelles pour caractériser la bifurcation [MOO 80][SEY 09]. C'est cette approche qui sera utilisée dans ce qui suit. La seconde approche repose sur l'utilisation d'un système augmenté minimal (*minimally extended systems*) couplé à une technique de type *bordering* pour lequel uniquement une équation scalaire est ajoutée [KUZ 04][GOV 00][DET 15]. Les systèmes augmentés complets ont par conséquent une taille beaucoup plus grande, mais le coût de calcul de leur résolution peut être réduit grâce à l'utilisation d'un algorithme d'élimination par blocs [KEL 77]. De plus, les équations

additionnelles de ces systèmes ont la même forme et font intervenir les mêmes dérivées quel que soit le type de bifurcation, comme nous le verrons dans les paragraphes suivants.

La procédure suivante est utilisée pour la localisation précise des points de bifurcation. Lorsqu'un changement de signe de l'un des indicateurs  $\varphi$  est détecté entre deux points consécutifs de la courbe de réponse, le point avec la valeur de l'indicateur la plus faible est utilisé comme point de départ  $(\mathbf{Q}^0, \omega^0)$  pour initialiser le système augmenté.

#### 4.2.2.1 Localisation des points limites

Quand seul l'indicateur  $\varphi_{LP}$ , mais pas  $\varphi_{BP}$ , change de signe entre deux points consécutifs sur la courbe de réponse, un point limite est détecté. Une autre possibilité, si on s'intéresse uniquement aux points limites, consiste à surveiller un changement de signe de la composante  $\Delta\omega$  du vecteur tangent du pas prédictif lors du calcul de la courbe de réponse.

Pour localiser précisément les points limites, plutôt que l'indicateur  $\varphi_{LP} = \det(\mathbf{R}_Q) = 0$ , il est plus efficace d'un point de vue numérique d'utiliser l'équation

$$\mathbf{R}_Q \phi = 0 \quad (4.26)$$

obtenue en substituant  $\Lambda = 0$  dans l'Eq. (3.54), avec  $\phi$  le vecteur propre associé à la valeur propre nulle, comme équation additionnelle dans le système augmenté complet [MOO 80]. Le système augmenté de taille  $2L + 1$  ainsi obtenu s'écrit

$$\mathbf{G}^{LP}(\mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}(\mathbf{Q}, \omega) \\ \mathbf{R}_Q \phi \\ \phi^T \phi - 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{(2L+1)} \quad (4.27)$$

avec  $\mathbf{Y} = (\mathbf{Q}, \phi, \omega)$ . La première équation définit la courbe d'équilibre, la seconde caractérise les points limites et permet de restreindre la courbe d'équilibre à un point singulier et la dernière assure une solution unique non triviale en normalisant le vecteur propre  $\phi$ . Ce système augmenté a été introduit par Moore et Spence [MOO 80]. Il peut être résolu par une méthode de Newton-Raphson, et la correction à l'itération  $k$  est donnée par

$$\mathbf{G}_Y(\mathbf{Y}^k) \delta \mathbf{Y} = -\mathbf{G}(\mathbf{Y}^k) \quad (4.28)$$

$$\mathbf{Y}^{k+1} = \mathbf{Y}^k + \delta \mathbf{Y} \quad (4.29)$$

avec  $\delta \mathbf{Y} = (\delta \mathbf{Q}, \delta \phi, \delta \omega)$ . L'Eq. (4.28) peut être écrite explicitement sous la forme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_Q^k & \mathbf{0}_{L \times L} & \mathbf{R}_\omega^k \\ (\mathbf{R}_Q \phi)_Q^k & \mathbf{R}_Q^k & (\mathbf{R}_Q \phi)_\omega^k \\ \mathbf{0}_L^T & 2\phi^{kT} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{Q} \\ \delta \phi \\ \delta \omega \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}^k \\ \mathbf{R}_Q^k \phi^k \\ \phi^{kT} \phi^k - 1 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

En pratique, le vecteur propre correspondant à la plus petite valeur propre de la matrice Jacobienne  $\mathbf{R}_Q(\mathbf{Q}^0, \omega^0)$  en valeur absolue est utilisé comme valeur initiale  $\phi^0$  pour  $\phi$ .

### Élimination par bloc

Le système augmenté (4.27) de taille  $2L + 1$  n'est pas singulier aux points limites et peut donc être résolu de manière directe. Cependant, lorsque le nombre d'harmoniques est grand ou que le système comporte un grand nombre de ddls, cette méthode devient prohibitive. Dans ce cas, afin de réduire le coût de calcul, il est préférable d'utiliser un algorithme d'élimination par blocs [KEL 77] de manière à ne traiter que des sous-systèmes de taille  $L$  faisant intervenir  $\mathbf{R}_Q$ . Toutefois, cette matrice devient singulière à l'approche des points limites et donc très mal conditionnée pendant des dernières itérations de Newton-Raphson. Pour palier ce problème, un terme de pénalité est ajouté dans la matrice  $\mathbf{R}_Q$  afin d'éliminer la singularité [FEL 87][CAR 99][WRI 90]

$$\hat{\mathbf{R}}_Q^k = \mathbf{R}_Q^k + s\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^T \quad (4.31)$$

et le premier terme  $\mathbf{R}^k$  du second membre de l'Eq. (4.30) est remplacé par  $\mathbf{R}^k + s\mathbf{e}_i(\mathbf{e}_i^T \mathbf{Q})$ . Le terme  $\mathbf{e}_i$  est un vecteur unité dont la  $i^e$  composante égale à 1, l'indice  $i$  correspondant à la plus grande composante réelle de  $\phi$ , et  $s$  est une constant choisie égale à la valeur moyenne de  $\text{diag}(\mathbf{R}_Q)$ . La première équation de (4.30) est décomposée en trois systèmes linéaires avec la même matrice  $\hat{\mathbf{R}}_Q$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}}_Q^k \mathbf{a}_1 &= -\mathbf{R}^k \\ \hat{\mathbf{R}}_Q^k \mathbf{a}_2 &= -\mathbf{R}_\omega^k \\ \hat{\mathbf{R}}_Q^k \mathbf{a}_3 &= s\mathbf{e}_i \end{aligned} \quad (4.32)$$

et une nouvelle inconnue scalaire  $\beta_1$  est introduite

$$\beta_1 = \mathbf{e}_i^T \delta \mathbf{Q} \quad (4.33)$$

Le vecteur  $\delta \mathbf{Q}$  est alors donné par

$$\delta \mathbf{Q} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \delta \omega + \mathbf{a}_3 \beta_1 \quad (4.34)$$

En y introduisant (4.34), la deuxième équation de (4.30) peut être à son tour décomposée en trois systèmes linéaires faisant intervenir  $\hat{\mathbf{R}}_Q$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}}_Q^k \mathbf{b}_1 &= -(\mathbf{R}_Q \phi)_Q^k \mathbf{a}_1 - \mathbf{R}_Q^k \phi^k \\ \hat{\mathbf{R}}_Q^k \mathbf{b}_2 &= -(\mathbf{R}_Q \phi)_Q^k \mathbf{a}_2 - ((\mathbf{R}_Q \phi)^k)_\omega \\ \hat{\mathbf{R}}_Q^k \mathbf{b}_3 &= -(\mathbf{R}_Q \phi)_Q^k \mathbf{a}_3 \end{aligned} \quad (4.35)$$

et  $\delta \phi$  prend la forme

$$\delta \phi = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 \delta \omega + \mathbf{b}_3 \beta_1 + \mathbf{a}_3 \beta_2 \quad (4.36)$$

avec

$$\beta_2 = \mathbf{e}_i^T \delta \phi \quad (4.37)$$

Finalement, en remplaçant les Eqs. (4.34) et (4.36) dans la troisième équation de (4.30) et dans les Eqs. (4.33) et (4.37), un système linéaire de taille  $(3 \times 3)$  est obtenu

$$\begin{bmatrix} 2\phi^{kT} \mathbf{b}_2 & 2\phi^{kT} \mathbf{b}_3 & 2\phi^{kT} \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{e}_i^T \mathbf{a}_2 & \mathbf{e}_i^T \mathbf{a}_3 - 1 & 0 \\ \mathbf{e}_i^T \mathbf{b}_2 & \mathbf{e}_i^T \mathbf{b}_3 & \mathbf{e}_i^T \mathbf{a}_3 - 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\omega \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 - \|\phi^k\|^2 - 2\phi^{kT} \mathbf{b}_1 \\ -\mathbf{e}_i^T \mathbf{a}_1 \\ -\mathbf{e}_i^T \mathbf{b}_1 \end{Bmatrix} \quad (4.38)$$

Ce système fournit  $\delta\omega$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  à partir desquels  $\delta Q$  et  $\delta\phi$  sont déduits grâce aux Eqs.(4.34) et (4.36).

Les six systèmes linéaires (4.32) et (4.35) font tous intervenir la matrice  $\hat{\mathbf{R}}_Q$ . Ils sont résolus en utilisant une décomposition LU de  $\hat{\mathbf{R}}_Q$  suivie de six substitutions de descente-remontée de taille  $L$  au lieu de la résolution directe d'un système de  $2L + 1$ . Cette méthode est particulièrement intéressante dans le cas d'une discrétisation par éléments finis ou par différences finies où  $\mathbf{R}_Q$  est généralement creuse. Elle permet en outre de réduire l'effort de programmation en réutilisant les routines standard de Newton-Raphson correspondant à l'Eq. (3.13) pour le calcul de la courbe de réponse.

#### 4.2.2.2 Localisation des points de branchement

Pour distinguer les points de branchement des points limites, une équation supplémentaire est ajoutée d'après la classification (4.24)

$$\mathbf{R}_\omega^T \phi = 0 \quad (4.39)$$

Contrairement aux points limites, le système (4.30) à résoudre devient singulier aux points de branchement. Pour éviter cette singularité, un terme de pénalité  $\gamma \mathbf{e}_i$  est introduit dans le résidu d'équilibre  $\mathbf{R}$  [FEL 87]. Dans la pratique, le vecteur unitaire  $\mathbf{e}_i$  est choisi identique à celui de l'Eq. (4.31),  $\gamma$  est initialisé avec une valeur nulle  $\gamma^0 = 0$  et le vecteur propre correspondant à la plus petite valeur propre de la matrice Jacobienne  $\mathbf{R}_Q(Q^0, \omega^0)$  en valeur absolue est utilisé comme valeur initiale  $\phi^0$  pour  $\phi$ . Par conséquent, le système augmenté de taille  $2L + 2$  à résoudre à l'itération  $k$  de la procédure de Newton-Raphson s'écrit

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_Q^k & \mathbf{0}_{L \times L} & \mathbf{R}_\omega & \mathbf{e}_j \\ (\mathbf{R}_Q \phi)^k_Q & \mathbf{R}_Q^k & (\mathbf{R}_Q \phi)^k_\omega & \mathbf{0}_L \\ \mathbf{0}_L^T & 2\phi^{kT} & 0 & 0 \\ \mathbf{0}_L^T & \mathbf{R}_\omega^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta Q \\ \delta \phi \\ \delta \omega \\ \delta \gamma \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathbf{R}^k + \gamma^k \mathbf{e}_j \\ \mathbf{R}_Q^k \phi^k \\ \phi^{kT} \phi^k - 1 \\ \mathbf{R}_\omega^T \phi^k \end{Bmatrix} \quad (4.40)$$

De nouveau, un algorithme d'élimination par blocs peut être utilisé de manière à ne résoudre que des sous-systèmes de taille  $L$  faisant intervenir  $\mathbf{R}_Q$ , associé à une procédure particulière pour traiter la singularité de cette matrice à l'approche du point de branchement [PET 15].

#### 4.2.2.3 Localisation des bifurcations de Neimark-Sacker

Le système augmenté utilisé ici pour localiser une bifurcation NS est inspiré de l'approche de GRIEWANK et REDDIEN [GRI 83]. Son adaptation aux systèmes traités dans le cadre de la HBM constitue une des originalités de ce mémoire.

Une bifurcation de Neimark-Sacker se produit lorsqu'une paire d'exposants de Floquet complexes conjugués traverse l'axe imaginaire du plan complexe. Ainsi, en introduisant  $\Lambda = \pm i\kappa$  et  $\phi = \phi_1 \pm i\phi_2$  dans l'Eq. (3.54) et en séparant les parties réelle et imaginaire, deux équations caractérisant les bifurcations de NS sont obtenues. Couplées aux équations d'équilibre et de normalisation des vecteurs propres, elles conduisent à un système augmenté de taille  $3L + 2$  pour localiser une bifurcation NS

$$K(Q, \phi_1, \phi_2, \kappa, \omega) = \begin{pmatrix} R(Q, \omega) \\ R_Q \phi_1 - \kappa \Delta_1 \phi_2 - \kappa^2 \Delta_2 \phi_1 \\ R_Q \phi_2 + \kappa \Delta_1 \phi_1 - \kappa^2 \Delta_2 \phi_2 \\ \mathbf{q}^T \phi_1 \\ \phi_1^T \phi_1 - 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{3L+2} \quad (4.41)$$

où  $\mathbf{q}$  est un vecteur constant avec une projection non nulle sur  $\text{Vect}(\phi_1, \phi_2)$ . D'autres normalisations sont possibles. Elles peuvent modifier le résultat de l'algorithme. Par exemple, si  $\mathbf{q}^T \phi_1 = 0$  et  $\phi_1^T \phi_1 = 1$  sont remplacés par  $\mathbf{q}^T \phi_1 = 0$  et  $\mathbf{q}^T \phi_2 = 1$ , le système (4.41) admet des solutions supplémentaires. En effet, pour  $\kappa = 0$  on a  $\phi_1 = 0$  et ce système se réduit au système (4.27) qui localise les points limites [GRI 83] [ROO 85b]. Dans ce cas, on détecte donc les bifurcations NS et les points limites. Par conséquent, ces normalisations sont à éviter si on s'intéresse uniquement aux bifurcations NS, mais elles se révèlent intéressantes pour passer d'une branche des points limites à une branche de bifurcations NS.

Une fois qu'un point de départ  $(Q^0, \omega^0)$  proche de la bifurcation NS est trouvé sur la courbe de réponse en surveillant l'évolution des exposants de Floquet ou à l'aide des indicateurs (4.25), le vecteur propre complexe associé à la valeur propre  $\Lambda = i\kappa$  de  $R_Q(Q^0, \omega^0)$  est utilisé comme valeur initiale pour  $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ . Cette solution initiale est ensuite corrigée par itérations de Newton-Raphson. Les corrections à l'itération  $k$  sont obtenues en résolvant le système résultant de la linéarisation du système (4.41)

$$\begin{bmatrix} R_Q^k & \mathbf{0}_{L \times L} & \mathbf{0}_{L \times L} & \mathbf{0}_L & R_\omega^k \\ (R_Q \phi_1)_Q^k & R_Q^k - (\kappa^k)^2 \Delta_2 & -\kappa^k \Delta_1^k & -\Delta_1^k \phi_2^k - 2\kappa^k \Delta_2 \phi_1^k & \Phi_\omega^1 \\ (R_Q \phi_2)_Q^k & \kappa^k \Delta_1^k & R_Q^k - (\kappa^k)^2 \Delta_2 & +\Delta_1^k \phi_1^k - 2\kappa^k \Delta_2 \phi_2^k & \Phi_\omega^2 \\ \mathbf{0}_L^T & \mathbf{q}^T & \mathbf{0}_L^T & 0 & 0 \\ \mathbf{0}_L^T & 2\phi_1^{kT} & \mathbf{0}_L^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta Q \\ \delta \phi_1 \\ \delta \phi_2 \\ \delta \kappa \\ \delta \omega \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R^k \\ R_Q^k \phi_1^k - \kappa^k \Delta_1^k \phi_2^k - (\kappa^k)^2 \Delta_2^k \phi_1^k \\ R_Q^k \phi_2^k + \kappa^k \Delta_1^k \phi_1^k - (\kappa^k)^2 \Delta_2^k \phi_2^k \\ \mathbf{q}^T \phi_1^k \\ \phi_1^{kT} \phi_1^k - 1 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

avec

$$\begin{aligned} \Phi_\omega^1 &= (R_Q \phi_1)_\omega^k - \kappa^k (\Delta_1 \phi_2)_\omega^k \\ \Phi_\omega^2 &= (R_Q \phi_2)_\omega^k + \kappa^k (\Delta_1 \phi_1)_\omega^k \end{aligned} \quad (4.43)$$

Ce système n'est pas singulier au niveau des bifurcations NS et peut donc être inversé directement. Afin de réduire le coût de calcul, un algorithme d'élimination par blocs peut être utilisé si  $L$  est grand. Toutefois, aucune procédure de pénalisation n'est nécessaire à l'approche de la bifurcation car la matrice jacobienne  $\mathbf{R}_Q$  n'est pas singulière dans ce cas.

### 4.2.3 Expression des jacobienes

Les expressions des matrices jacobienes  $\mathbf{R}_Q$  et  $\mathbf{R}_\omega$  l'Eq. (4.30) ont déjà été calculées et sont détaillées dans la section 3.3 p.61. Comme  $\phi$  ne dépend pas de  $\omega$ , la dérivée  $(\mathbf{R}_Q\phi)_\omega$  s'écrit

$$(\mathbf{R}_Q\phi)_\omega = (\mathbf{R}_Q)_\omega \phi = \mathbf{Z}_\omega \phi \quad (4.44)$$

avec  $\mathbf{Z}_\omega$  donné par (3.38). Le terme  $(\mathbf{R}_Q\phi)_Q$  peut être calculé par l'approche AFT comme dans l'Eq. (4.19)

$$(\mathbf{R}_Q\phi)_Q = (\Gamma^{-1} \otimes \mathbf{I}_n) \frac{\partial \overline{\mathbf{r}_q \varphi}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} (\Gamma \otimes \mathbf{I}_n) \quad (4.45)$$

avec  $\frac{\partial \overline{\mathbf{r}_q \varphi}}{\partial \bar{\mathbf{q}}}$  la matrice diagonale par blocs de taille  $nN \times nN$

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{r}_q \varphi}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} = \text{diagblk} \left( \left. \frac{\partial \mathbf{r}_q \varphi}{\partial \mathbf{q}} \right|_{t=t_1}, \dots, \left. \frac{\partial \mathbf{r}_q \varphi}{\partial \mathbf{q}} \right|_{t=t_N} \right) \quad (4.46)$$

contenant les  $N$  échantillons temporels de  $\frac{\partial \mathbf{r}_q \varphi}{\partial \mathbf{q}}$  sur une période  $T$ , avec  $\mathbf{r}_q$  la dérivée du résidu d'équilibre dynamique temporel (3.1), et  $\varphi$  le vecteur propre dans le domaine temporel obtenu par

$$\bar{\varphi} = [\varphi(t_1), \dots, \varphi(t_N)]^T = (\Gamma \otimes \mathbf{I}_n) \phi \quad (4.47)$$

Pour les systèmes simples,  $(\mathbf{r}_q \varphi)_q$  peut être formé analytiquement. Pour les systèmes avec un grand nombre de ddl, il peut être approximé par différences finies [WRI 90]

$$(\mathbf{r}_q \varphi)_q = \frac{\partial \mathbf{r}_q \varphi}{\partial \mathbf{q}} \simeq \frac{1}{\varepsilon_q} [\mathbf{r}_q(\mathbf{q} + \varepsilon_q \varphi) - \mathbf{r}_q(\mathbf{q})] \quad (4.48)$$

De même,  $(\mathbf{R}_Q\phi)_Q$  peut aussi être approximé par différences finies directement dans le domaine fréquentiel

$$(\mathbf{R}_Q\phi)_Q \simeq \frac{1}{\varepsilon_Q} [\mathbf{R}_Q(\mathbf{Q} + \varepsilon_Q \phi) - \mathbf{R}_Q(\mathbf{Q})] \quad (4.49)$$

Les choix suivants avec  $\eta = 10^{-6}$  pour les perturbations  $\varepsilon_q$  et  $\varepsilon_Q$  assurent un bon compromis entre précision et robustesse

$$\varepsilon_q = \eta \left( \frac{\|\mathbf{q}\|}{\|\varphi\|} + \eta \right) \quad \varepsilon_Q = \eta \left( \frac{\|\mathbf{Q}\|}{\|\phi\|} + \eta \right) \quad (4.50)$$

Pour la localisation des points de branchement, les dérivées du systèmes (4.40) sont les mêmes que celles du système (4.30) pour les points limites. La localisation des bifurcations NS fait intervenir une dérivée supplémentaire  $(\Delta_1\phi)_\omega$  dans le système (4.42). L'expression analytique de cette dérivée est immédiate d'après (3.55)

$$(\Delta_1\phi)_\omega = (\Delta_1)_\omega \phi = 2(\nabla \otimes \mathbf{M}) \phi \quad (4.51)$$

#### 4.2.4 Suivi direct des points de bifurcation

Selon le même principe que pour le suivi de la résonance, les étapes suivantes sont réalisées pour effectuer le suivi direct d'une branche de points de bifurcation :

- Dans un premier temps, pour une valeur initiale fixée  $\alpha^0$  du paramètre du système à étudier (niveau d'excitation ou de non-linéarité par exemple), la courbe de réponse est calculée par méthode de continuation (section 3.2 p.58) jusqu'à ce qu'une bifurcation  $(Q^0, \omega^0, \alpha^0)$  soit rencontrée et précisément détectée (section 4.2.2 p.100).
- $\alpha$  est considéré comme nouvelle inconnue, ce qui ajoute une colonne dans les systèmes augmentés (4.30), (4.40) et (4.42). Le vecteur des inconnues devient donc  $(Q, \phi, \omega, \alpha)$ .
- L'ajout de l'équation de définition du pilotage par longueur d'arc permet de fermer le problème et de suivre la courbe de points de bifurcation par une technique de continuation lorsque  $\alpha$  varie. Cela se traduit par une ligne supplémentaire dans les systèmes augmentés (4.30), (4.40) et (4.42).

Pour chaque pas de continuation, l'étape de prédiction consiste à calculer le vecteur  $[\Delta Q \Delta \omega \Delta \alpha]$  tangent à la courbe de suivi, puis les étapes de corrections se font dans la direction orthogonale au vecteur tangent par itérations de Newton-Raphson.

Pour le suivi des points limites, ces corrections à l'itération  $k$  sont solutions du système augmenté de taille  $2L + 2$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_Q^k & \mathbf{0}_{L \times L} & \mathbf{R}_\omega^k & \mathbf{R}_\alpha^k \\ (\mathbf{R}_Q \phi)_Q^k & \mathbf{R}_Q^k & (\mathbf{R}_Q \phi)_\omega^k & (\mathbf{R}_Q \phi)_\alpha^k \\ \mathbf{0}_L^T & 2\phi^{kT} & 0 & 0 \\ \Delta Q^T & \mathbf{0}_L^T & \Delta \omega & \Delta \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta Q \\ \delta \phi \\ \delta \omega \\ \delta \alpha \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}^k \\ \mathbf{R}_Q^k \phi^k \\ \phi^{kT} \phi^k - 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

Les deux nouvelles dérivées  $\mathbf{R}_\alpha$  et  $(\mathbf{R}_Q \phi)_\alpha$  peuvent être calculées analytiquement

$$\mathbf{R}_\alpha = \mathbf{Z}_\alpha \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{F}_{nl\alpha} - \mathbf{P}_\alpha \quad (\mathbf{R}_Q \phi)_\alpha = (\mathbf{Z}_\alpha + (\mathbf{F}_{nlQ})_\alpha) \phi \quad (4.53)$$

avec  $(\mathbf{F}_{nlQ})_\alpha$  calculé par (4.21). Les expressions analytiques exactes varient en fonction du paramètre  $\alpha$  considéré. Afin de généraliser le calcul de ces dérivées dans un code informatique, il est plus commode de les calculer par différences finies avec  $\varepsilon_\alpha = \eta(|\alpha| + \eta)$  et  $\eta = 10^{-6}$

$$\mathbf{R}_\alpha(Q, \omega, \alpha) \simeq \frac{1}{\varepsilon_\alpha} [\mathbf{R}(Q, \omega, \alpha + \varepsilon_\alpha) - \mathbf{R}(Q, \omega, \alpha)] \quad (4.54)$$

$$(\mathbf{R}_Q \phi)_\alpha(Q, \omega, \alpha) \simeq \frac{1}{\varepsilon_\alpha} [\mathbf{R}_Q(Q, \omega, \alpha + \varepsilon_\alpha) - \mathbf{R}_Q(Q, \omega, \alpha)] \phi \quad (4.55)$$

Pour suivre les points de branchement, le système augmenté de taille  $2L + 3$  à résoudre

s'écrit

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_Q^k & \mathbf{0}_{L \times L} & \mathbf{R}_\omega & \mathbf{e}_j & \mathbf{R}_\alpha^k \\ (\mathbf{R}_Q \phi)^k_Q & \mathbf{R}_Q^k & (\mathbf{R}_Q \phi)_\omega^k & \mathbf{0}_L & (\mathbf{R}_Q \phi)_\alpha^k \\ \mathbf{0}_L^T & 2\phi^{kT} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0}_L^T & \mathbf{R}_\omega^T & 0 & 0 & 0 \\ \Delta Q^T & \mathbf{0}_L^T & \Delta \omega & 0 & \Delta \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{X} \\ \delta \phi \\ \delta \omega \\ \delta \gamma \\ \delta \alpha \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}^k + \gamma^k \mathbf{e}_j \\ \mathbf{R}_Q^k \phi^k \\ \phi^{kT} \phi^k - 1 \\ \mathbf{R}_\omega^{kT} \phi^k \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

Finalement, pour suivre les bifurcations NS, le système de taille  $3L + 3$  à résoudre à chaque itération de Newton-Raphson s'écrit

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_Q^k & \mathbf{0}_{L \times L} & \mathbf{0}_{L \times L} & \mathbf{0}_L & \mathbf{R}_\omega^k & \mathbf{R}_\alpha^k \\ (\mathbf{R}_Q \phi_1)^k_Q & \mathbf{R}_Q^k - (\kappa^k)^2 \Delta_2 & -\kappa^k \Delta_1^k & -\Delta_1^k \phi_2^k - 2\kappa^k \Delta_2 \phi_1^k & \Phi_\omega^1 & \Phi_\alpha^1 \\ (\mathbf{R}_Q \phi_2)^k_Q & \kappa^k \Delta_1^k & \mathbf{R}_Q^k - (\kappa^k)^2 \Delta_2 & +\Delta_1^k \phi_1^k - 2\kappa^k \Delta_2 \phi_2^k & \Phi_\omega^2 & \Phi_\alpha^2 \\ \mathbf{0}_L^T & \mathbf{q}^T & \mathbf{0}_L^T & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0}_L^T & 2\phi_1^{kT} & \mathbf{0}_L^T & 0 & 0 & 0 \\ \Delta Q^T & \mathbf{0}_L^T & \mathbf{0}_L^T & \Delta \omega & 0 & \Delta \alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \delta Q \\ \delta \phi_1 \\ \delta \phi_2 \\ \delta \kappa \\ \delta \omega \\ \delta \alpha \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}^k \\ \mathbf{R}_Q^k \phi_1^k - \kappa^k \Delta_1^k \phi_2^k - (\kappa^k)^2 \Delta_2^k \phi_1^k \\ \mathbf{R}_Q^k \phi_2^k + \kappa^k \Delta_1^k \phi_1^k - (\kappa^k)^2 \Delta_2^k \phi_2^k \\ \mathbf{q}^T \phi_1^k \\ \phi_1^{kT} \phi_1^k - 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

avec

$$\begin{aligned} \Phi_\omega^1 &= (\mathbf{R}_Q \phi_1)_\omega^k - \kappa^k (\Delta_1)_\omega^k \phi_2^k \\ \Phi_\omega^2 &= (\mathbf{R}_Q \phi_2)_\omega^k + \kappa^k (\Delta_1)_\omega^k \phi_1^k \\ \Phi_\alpha^1 &= (\mathbf{R}_Q \phi_1)_\alpha^k - \kappa^k (\Delta_1)_\alpha^k \phi_2^k - (\kappa^k)^2 (\Delta_2)_\alpha^k \phi_1^k \\ \Phi_\alpha^2 &= (\mathbf{R}_Q \phi_2)_\alpha^k + \kappa^k (\Delta_1)_\alpha^k \phi_1^k - (\kappa^k)^2 (\Delta_2)_\alpha^k \phi_2^k \end{aligned} \quad (4.58)$$

où la dérivée  $(\Delta_1)_\omega$  est définie dans (4.51) et les dérivées  $(\Delta_1)_\alpha$  et  $(\Delta_2)_\alpha$  sont généralement nulles, compte tenu des définitions (3.55) et (3.56) de  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ , sauf si le paramètre  $\alpha$  intervient dans les matrices  $M$  ou  $C$ .

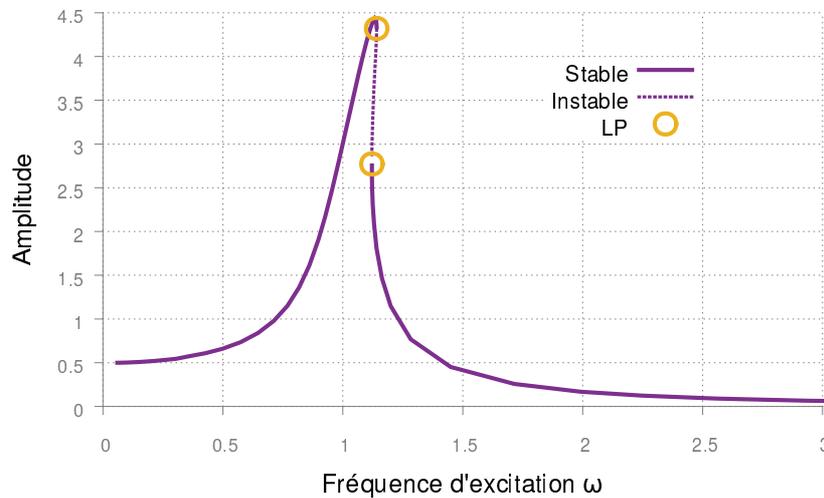
L'algorithme d'élimination par blocs détaillé dans la section 4.2.2.1 p.101 peut être utilisé pour réduire le coût de calcul de chaque itération. Dans le cas du suivi de points limites, cet algorithme fait intervenir une factorisation LU de  $\hat{\mathbf{R}}_Q$  suivie de huit substitutions de descente-remontée de taille  $L$  au lieu de la résolution directe du système augmenté (4.52). En termes de coût de calcul, un pas de suivi est donc globalement équivalent à la détection précise d'un point limite. Pour les systèmes de grande taille, ce pas de suivi des points limites est à peine plus coûteux qu'un simple pas de continuation de la courbe de réponse (section 3.2) puisque dans ce cas la majeure partie du temps de calcul est consacrée à la décomposition de la matrice jacobienne  $\hat{\mathbf{R}}_Q$ .

### 4.3 Exemples d'application

Les algorithmes de suivi de bifurcations sont appliqués à plusieurs systèmes dynamiques afin de mettre en évidence leur potentiel et leurs performances. Ces applications visent également à montrer que le suivi de bifurcations peut être utilisé comme outil efficace de dimensionnement et d'optimisation des systèmes dynamiques non-linéaires.

#### 4.3.1 Oscillateur de Duffing

Le premier exemple concerne l'oscillateur de Duffing. Les calculs sont effectués avec les paramètres :  $2\zeta = 0.1$ ,  $\omega_0 = 1$ ,  $p_0 = 0.5$ .



**FIGURE 4.4:** Réponse de l'oscillateur de Duffing pour  $k_{nl} = 0.02$  avec localisation des bifurcations.

Les courbes de réponses pour  $k_{nl} = 0.02$  et  $k_{nl} = 10$  sont tracées dans les Figures 4.4 et 4.5 respectivement. En utilisant les indicateurs et les systèmes augmentés présentés dans les sections 4.2.1 et 4.2.1, des points limites (LP) et des points de branchement (BP) sont détectés et localisés sur ces courbes de réponse.

Pour une non-linéarité assez faible  $k_{nl} = 0.02$  (Figure 4.4), la courbe de réponse est légèrement raidissante.  $H = 3$  harmoniques suffisent pour la décrire avec précision. Deux points limites délimitant les zones stables sont identifiés, au niveau desquels des sauts d'amplitude ont lieu pendant le fonctionnement réel. Des simulations par intégration temporelle permettent de constater ces sauts.

Pour  $k_{nl} = 10$  (Figure 4.5) où l'effet non-linéaire est important, des super-harmoniques sont clairement visibles, deux points limites supplémentaires vers  $\omega = 0.5$  délimitent une petite boucle instable et indiquent des sauts d'amplitude, et deux points de branchement vers  $\omega = 0.8$  marquent l'apparition d'une autre branche de courbe de réponse. Un nombre d'harmoniques plus grand  $H = 19$  est nécessaire pour obtenir les super-harmoniques représentées ici. Sachant que l'intégration temporelle ne fournit que des solutions stables,

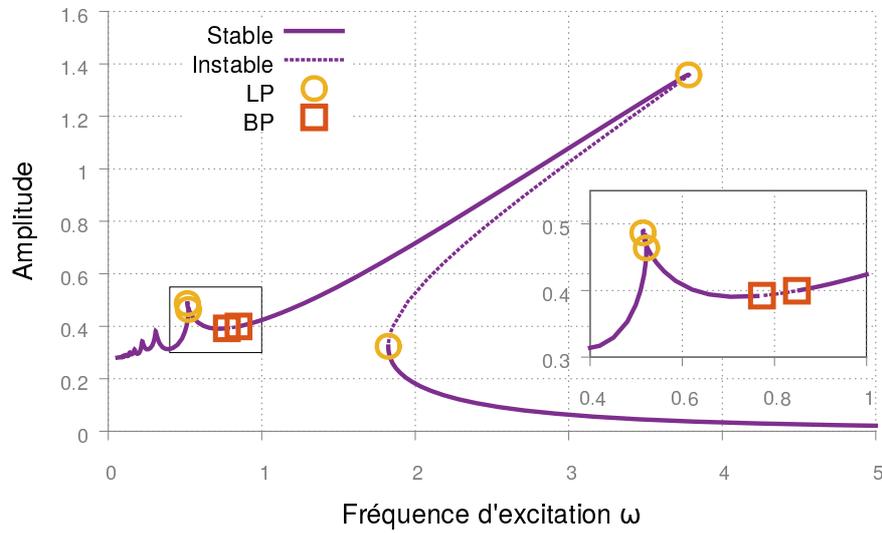


FIGURE 4.5: Réponse de l'oscillateur de Duffing pour  $k_{nl} = 10$  avec localisation des bifurcations.

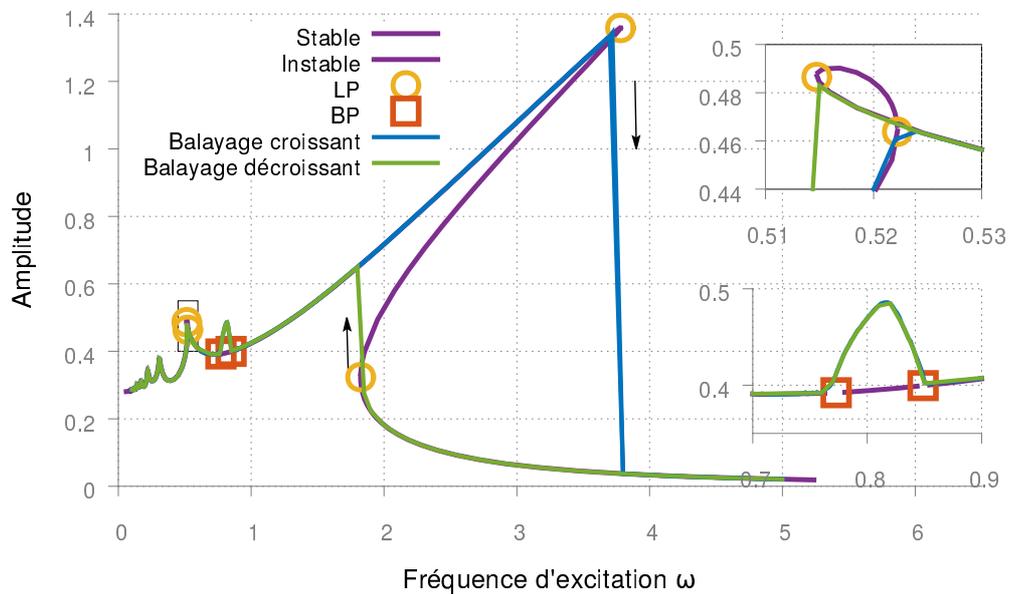
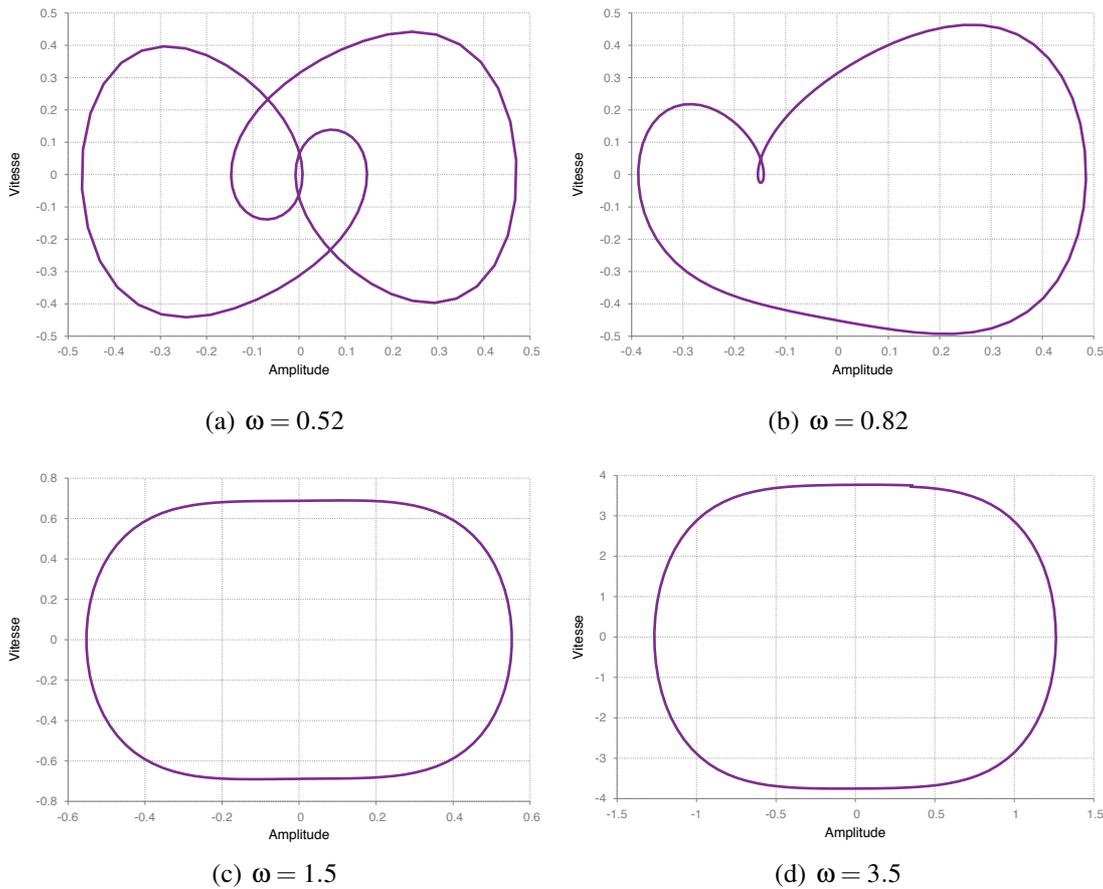


FIGURE 4.6: Réponse de l'oscillateur de Duffing pour  $k_{nl} = 10$  par intégration temporelle avec balayages croissant et décroissant.

des calculs par cette méthode temporelle sont effectués afin de valider les résultats obtenus par la HBM. Comme montré sur la Figure 4.6, les sauts d'amplitude au niveau des points limites et la branche périodique stable bifurquée au niveau des points de branchement sont obtenus, ce qui permet de valider les calculs de stabilité et de bifurcations par HBM. Le portrait de phase qui illustre le trajectoire de l'oscillateur Duffing dans l'espace des phases est tracé (Figure 4.7) pour quatre conditions choisies :  $\omega = 0.52$ ,  $\omega = 0.82$ ,  $\omega = 1.5$  et  $\omega = 3.5$ .



**FIGURE 4.7:** Réponses temporelles de Duffing illustrées dans l'espace des phases pour  $k_{nl} = 10$  et  $\omega = 0.52$ ,  $\omega = 0.82$ ,  $\omega = 1.5$ ,  $\omega = 3.5$ .

En utilisant l'algorithme présenté dans la section 4.2.4, les points limites et les points de branchement sont suivis directement en fonction de  $k_{nl}$ . Pour cela, on effectue tout d'abord la continuation d'une courbe de réponse pour une valeur fixe  $k_{nl} = 10$  jusqu'à ce qu'un point limite ou qu'une bifurcation soit détecté, et l'algorithme de suivi correspondant est démarré. Les courbes de suivi des points limites et des points de branchement sont tracées dans les Figures 4.8 et 4.9. Il convient de noter que les courbes de réponses tracées dans ces mêmes figures pour plusieurs valeurs de  $k_{nl}$  ne sont pas utilisées pour les calculs. Elles sont présentées pour faciliter l'interprétation des courbes en 3D et pour

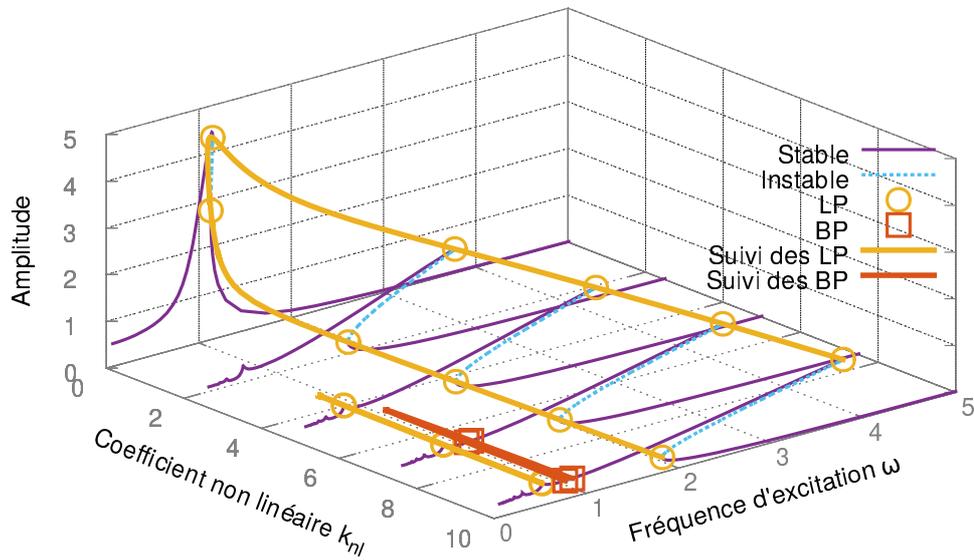


FIGURE 4.8: Suivi des points de bifurcation et réponses de l'oscillateur de Duffing pour  $0 \leq k_{nl} \leq 10$ .

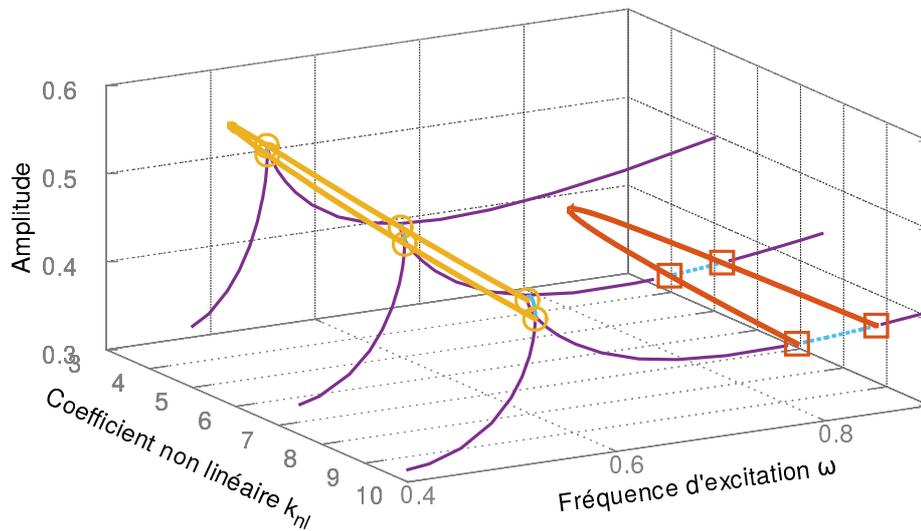
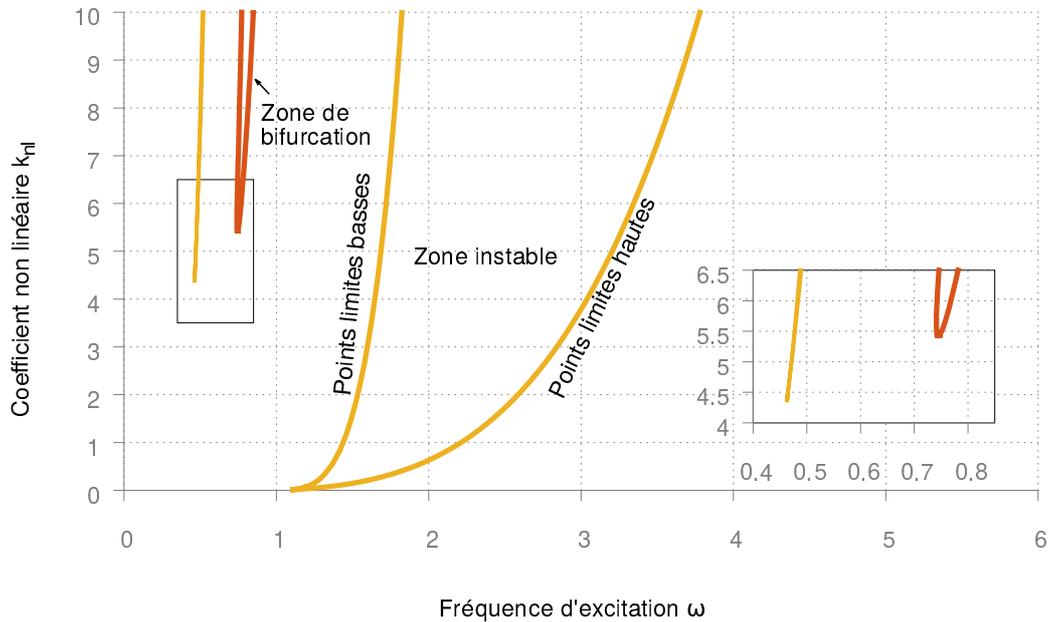


FIGURE 4.9: Suivi des points de bifurcation et réponses de l'oscillateur de Duffing pour  $0 \leq k_{nl} \leq 10$  (Zoom de la Figure 4.8).



**FIGURE 4.10:** Projections des courbes de suivi de bifurcations.

montrer que le suivi passe bien par les points de bifurcation de ces courbes. La seconde branche de points limites agrandie sur la Figure 4.9 correspond aux points limites de la boucle super-harmonique.

La projection des courbes de suivi sur le plan  $k_{nl}$ - $\omega$  est présentée sur la Figure 4.10. Ces courbes projetées correspondent à une analyse paramétrique directe, obtenue sans calculer toutes les courbes de réponse du système. Cette analyse paramétrique peut être utilisée pour améliorer le dimensionnement et les performances du système et, plus généralement, fournit des informations intéressantes sur le comportement dynamique du système. Sur cette projection, on constate que les points limites inférieurs et supérieurs de la résonance principale fusionnent pour  $k_{nl} \simeq 0.0106$ . En dessous de cette valeur, le comportement du système est linéaire avec une seule solution stable quelle que soit la fréquence d'excitation. Au-dessus de cette valeur, le comportement est raidissant et les branches de points limites définissent les frontières d'une zone dans laquelle l'oscillateur est bi-stable. Par exemple, l'intersection de la ligne horizontale  $k_{nl} = 10$  avec les branches de points limites inférieurs et supérieurs indique deux points limites pour  $\omega = 1.82$  et  $3.78$ . Des sauts d'amplitude seront donc observés expérimentalement à ces fréquences. La seconde branche de points limites émerge pour  $k_{nl} \simeq 4.345$ . La boucle de la résonance super-harmonique n'existe donc que pour des valeurs de  $k_{nl}$  supérieures. De même, les points de branchement n'existent que pour  $k_{nl} \geq 5.428$ . Le suivi des points limites supérieurs fournit également des informations sur le décalage en fréquence du pic de résonance induit par le niveau de non-linéarité. De la même manière, la projection des courbes de suivi sur le plan  $k_{nl}$ -Amplitude peut être utilisée pour obtenir des informations sur la réduction d'amplitude de vibration induite par le niveau de non-linéarité.

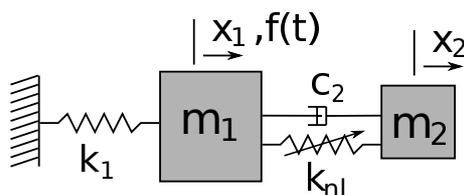


FIGURE 4.11: Schéma de l'absorbeur de vibration non linéaire (NES).

Ce premier exemple simple a permis de montrer l'efficacité des méthodes de suivi proposées pour les points limites et les points de branchement. Notamment, ces courbes de suivi permettent de définir en un seul calcul les frontières des zones de stabilité du système.

### 4.3.2 Absorbeur de vibration non-linéaire

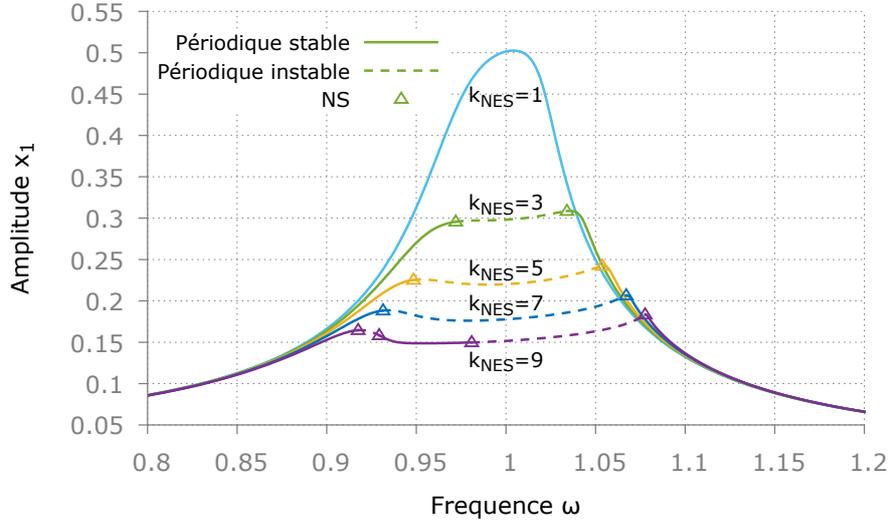
La seconde application concerne un oscillateur linéaire lié à un absorbeur de vibration non-linéaire (*Non linear Energy Sink* ou *NES*). L'objectif du NES est de neutraliser au maximum les vibrations d'une structure principale grâce à un transfert d'énergie irréversible (aussi appelé pompage énergétique). L'idée est de localiser un mode non linéaire dans la structure annexe (le NES) qui peut, contrairement à la structure principale, présenter d'importantes vibrations. Ainsi, les vibrations de la structure à protéger diminuent rapidement jusqu'à un seuil acceptable et les vibrations sont concentrées dans le NES.

Contrairement aux absorbeurs de vibration linéaires, les NES sont efficaces sur une large plage de fréquences et sont efficaces plus rapidement [VAK 09]. Cela est principalement dû à un comportement dynamique qualitativement différent dans le voisinage de la résonance principale, où le NES présente un comportement quasi-périodique plutôt que périodique [GEN 06a, GEN 06b, GOU 07]. En effet, l'énergie de vibration est transférée de manière irréversible au NES et amortie, ce qui conduit à une réduction du niveau d'énergie du système et donc à l'atténuation des vibrations de la masse principale. Ce transfert se produit en régime quasi-périodique avec des mouvements en opposition de phase, ce qui se traduit par un phénomène de battement des deux masses.

Dans le cas d'absorbeurs de vibrations fortement non-linéaires, il a été montré que des régimes faiblement ou fortement quasi-périodiques, et donc des battements plus ou moins forts, peuvent se produire en fonction des paramètres du système, et que ces régimes permettent tous les deux d'absorber efficacement les vibrations [STA 08]. C'est pourquoi il est essentiel de pouvoir déterminer précisément les plages de paramètres pour lesquelles des réponses quasi-périodiques sont possibles.

Etant donné qu'une réponse faiblement quasi-périodique est liée à la perte de stabilité d'une solution périodique via une bifurcation NS, il est possible de déterminer les frontières des réponses quasi-périodiques à l'aide du suivi de bifurcations NS présenté dans la section 4.2.4.

Le système considéré est issu de [STA 08]. Il est constitué d'un oscillateur linéaire de



**FIGURE 4.12:** Courbes de réponse de la masse principale  $m_1$  pour  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\lambda_{NES} = 0.4$ ,  $A = 0.3$  plusieurs valeurs du coefficient de raideur non-linéaire  $k_{NES} = 1, 3, 5, 7, 9$ . Réponses périodiques stables et instables.

masse  $m_1$  et d'une structure annexe essentiellement non-linéaire de masse  $m_2$  relativement petite. L'oscillateur linéaire est la structure principale et la structure annexe est le NES. Ils sont couplés par une raideur non-linéaire cubique et par un amortisseur visqueux, comme le montre le schéma de la Figure 4.11. Ce système est gouverné par les équations :

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_{nl} (x_1 - x_2)^3 &= f \cos(\omega t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_{nl} (x_2 - x_1)^3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.59)$$

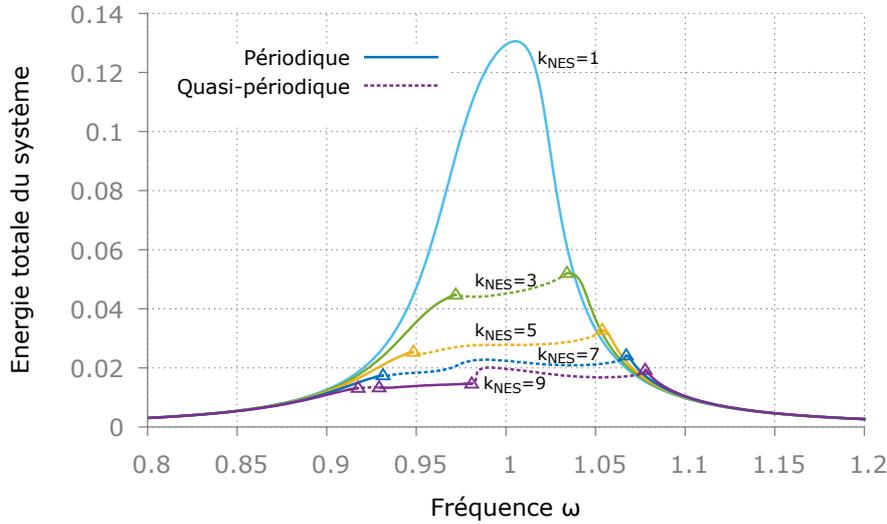
où  $x_1$  et  $x_2$  sont les déplacements de l'oscillateur et de l'absorbeur respectivement,  $k_1$  est la raideur de l'oscillateur linéaire,  $k_{nl}$  est le coefficient de raideur non-linéaire de couplage,  $c_2$  est le coefficient d'amortissement de couplage, et  $f$  est l'amplitude de l'excitation. Pour simplifier le problème, la raideur  $k_1$  de l'oscillateur linéaire est choisie de manière à ce que sa fréquence de résonance soit unitaire. En introduisant les grandeurs suivantes

$$\omega_0^2 = \frac{k_1}{m_1} = 1 \quad \varepsilon = \frac{m_2}{m_1} \quad \lambda_{NES} = \frac{c_2}{m_2} \quad k_{NES} = \frac{k_{nl}}{m_2} \quad A = \frac{f}{m_2} \quad (4.60)$$

l'Eq. (4.59) devient

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \varepsilon \lambda_{NES} (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + x_1 + \varepsilon k_{NES} (x_1 - x_2)^3 &= \varepsilon A \cos(\omega t) \\ \varepsilon \ddot{x}_2 + \varepsilon \lambda_{NES} (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \varepsilon k_{NES} (x_2 - x_1)^3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.61)$$

Dans un premier temps, l'amplitude d'excitation est fixée avec  $A = 0.3$  et la dynamique du système non-linéaire couplé est analysée pour différentes valeurs de  $k_{NES}$ . La réponse forcée est calculée par HBM (section 3.2 p.58). La convergence des résultats



**FIGURE 4.13:** Energie totale moyenne du système pour  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\lambda_{NES} = 0.4$ ,  $A = 0.3$  et  $k_{NES} = 1, 3, 5, 7, 9$ . Solutions stables périodiques et quasi-périodiques.

est obtenue avec  $H = 3$  harmoniques par comparaison avec l'intégration temporelle. L'analyse de stabilité et la détection des bifurcations sont effectuées à l'aide des algorithmes décrits dans la section 4.2.2 p.100. Les courbes de réponse de l'oscillateur linéaire pour  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\lambda_{NES} = 0.4$ ,  $A = 0.3$  et plusieurs valeurs de  $k_{NES}$  sont tracées sur la Figure 4.12. Les lignes pleines et en pointillés correspondent respectivement aux solutions périodiques stables et instables, et les triangles aux bifurcations de Neimark-Sacker (NS). Pour  $k_{NES} = 1$ , la réponse est périodique quelle que soit la fréquence d'excitation. Pour des valeurs de  $k_{NES}$  plus grandes, les bifurcations NS délimitent des plages de fréquence dans lesquelles la réponse périodique est instable, c-à-d. dans lesquelles la réponse de battement quasi-périodique est la seule réponse stable.

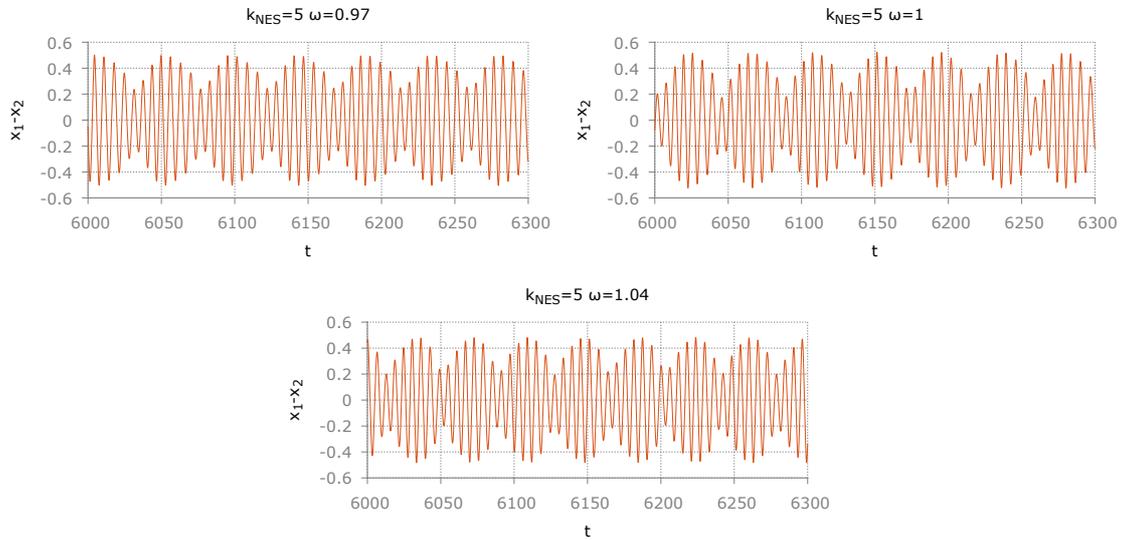
La réponse du système dans ces zones quasi-périodiques peut facilement être calculée par intégration temporelle. Etant donné que l'amplitude  $x_1$  de la réponse quasi-périodique est modulée, il est plus judicieux de considérer l'énergie totale moyenne du système, telle que définie dans [STA 08]

$$E_{tot} = \left\langle \frac{\dot{x}_1^2}{2} + \varepsilon \frac{\dot{x}_2^2}{2} + \frac{x_1^2}{2} + \varepsilon k_{nl} \frac{(x_1 - x_2)^4}{4} \right\rangle_t \quad (4.62)$$

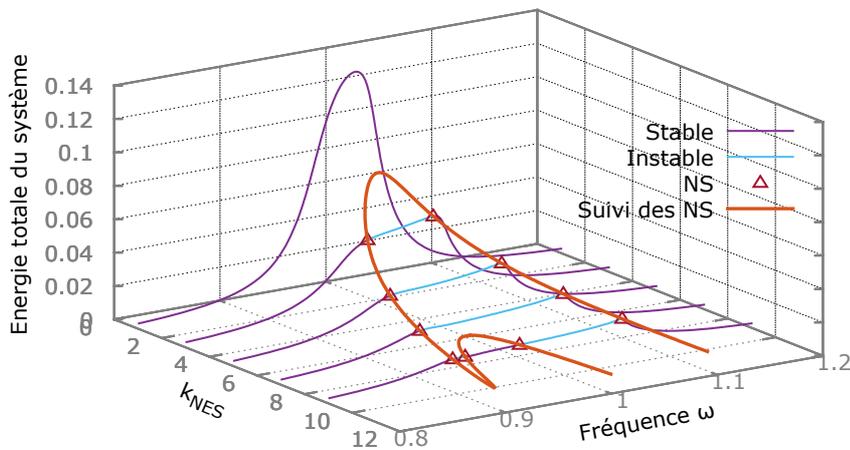
en prenant soin d'effectuer la moyenne sur un temps suffisant long par rapport à la période de modulation (en pratique, 50 fois plus long). Les courbes de réponse en termes d'énergie totale sont tracées sur la Figure 4.13. Par rapport à la figure précédente, dans les zones de battement quasi-périodique, les réponses périodiques instables ont été remplacées par les réponses quasi-périodiques stables. On observe que le niveau d'énergie totale diminue lorsqu'on augmente  $k_{NES}$ , ce qui démontre l'efficacité du NES.

Le déplacement relatif du NES dans la zone quasi-périodique pour  $k_{NES} = 5$  est tracé sur la Figure 4.14. Ces calculs ont été effectués par intégration temporelle pour trois va-

#### 4. Suivi numérique pour analyse paramétrique directe des bifurcations



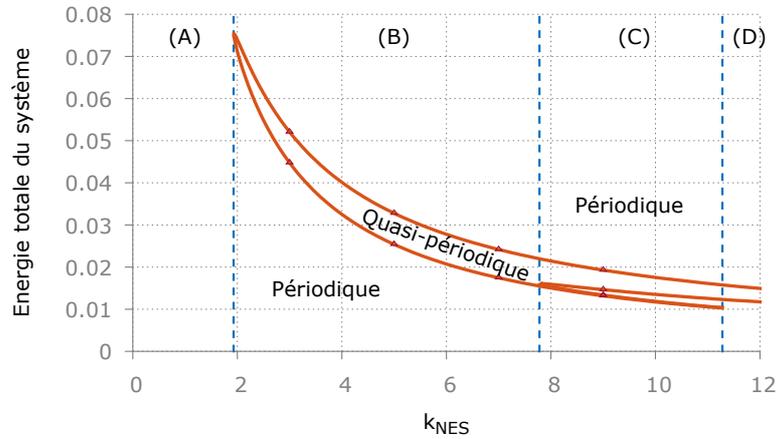
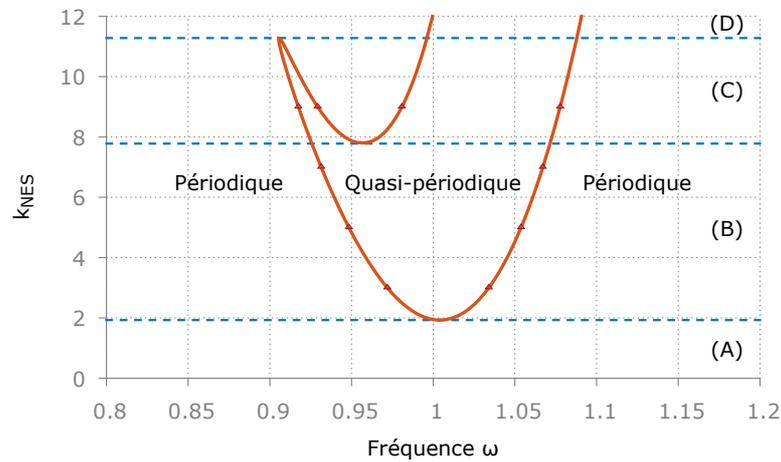
**FIGURE 4.14:** Réponses quasi-périodiques pour  $k_{NES} = 5$  et  $\omega = 0.97$ ,  $\omega = 1$ ,  $\omega = 1.04$ .



**FIGURE 4.15:** Courbes de réponse et suivi des bifurcations NS pour  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\lambda_{NES} = 0.4$ ,  $A = 0.3$  et  $k_{NES}$  variable.

leurs de la fréquence d'excitation  $\omega = 0.97$ ,  $\omega = 1$  et  $\omega = 1.04$  qui correspondent à la fréquence de résonance et au voisinage des frontières de la zone quasi-périodique. On constate que ces trois réponses sont très similaires et présentent les battements attendus, ce qui prouve que le NES est efficace sur toute la plage de fréquences correspondant à la zone de battement quasi-périodique.

Définir précisément les frontières des zones de battement quasi-périodiques à l'aide des courbes de réponse de la Figure 4.13 est une tâche fastidieuse car le calcul des courbes

(a) Dans le plan  $E_{tot} - k_{NES}$ (b) Dans le plan  $k_{NES} - \omega$ 

**FIGURE 4.16:** Projections du suivi des bifurcations NS pour  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\lambda_{NES} = 0.4$ ,  $A = 0.3$  et  $k_{NES}$  variable.

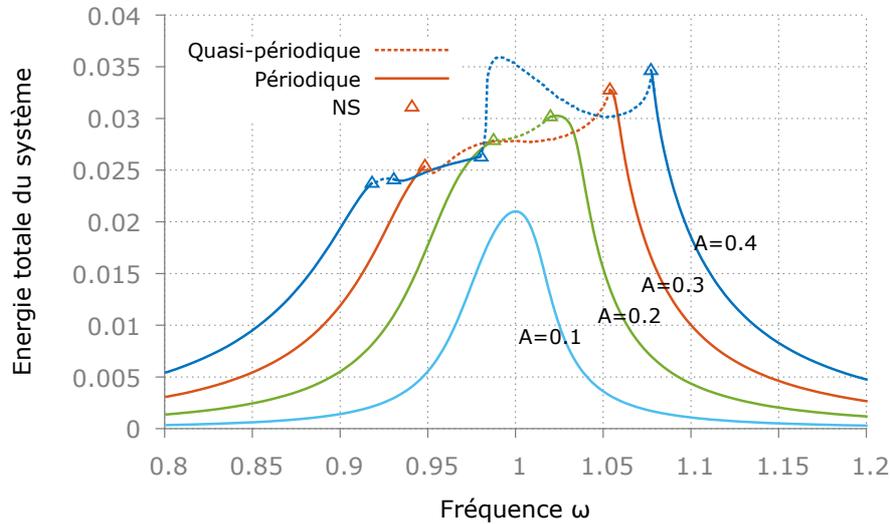
de réponse et la détection des bifurcations doivent être répétés pour chaque valeur de  $k_{NES}$ . Une alternative plus efficace consiste à utiliser l'algorithme de suivi direct des bifurcations NS présenté dans la section 4.2.4. Pour cela, une courbe de réponse est d'abord calculée pour une valeur fixée de  $k_{NES}$ ,  $k_{NES} = 3$  par exemple, jusqu'à ce que la première bifurcation NS soit détectée. Puis,  $k_{NES}$  est considérée comme une nouvelle inconnue et cette bifurcation NS est utilisée comme point de départ pour la continuation directe de la courbe de bifurcations NS. Ainsi, les frontières de la zone de battement quasi-périodique sont obtenues en un seul calcul. Cette courbe de suivi est tracée sur la Figure 4.15. Les courbes de réponses qui l'accompagnent sont représentées uniquement pour rendre l'interprétation de la courbe de suivi plus facile et pour montrer que le suivi est précis.

Les projections de la courbe de suivi des bifurcations NS sur les plans  $E_{tot} - k_{NES}$

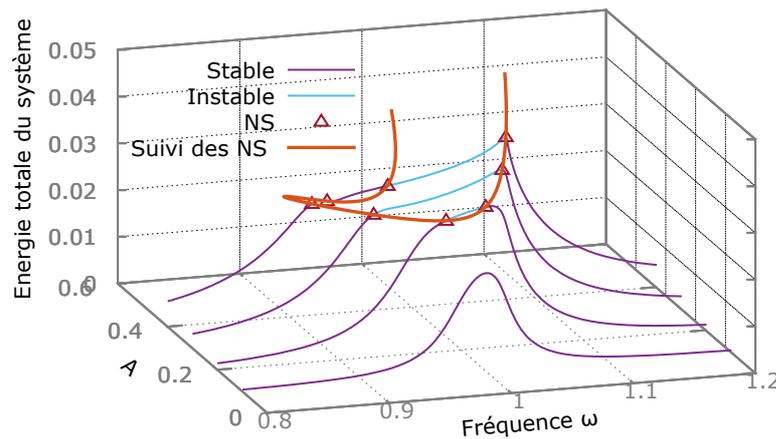
et  $k_{NES} - \omega$  sont tracées sur la Figure 4.16. Ces courbes fournissent des informations très utiles pour le dimensionnement du NES. Les zones à l'intérieur et à l'extérieur de la courbe de suivi correspondent respectivement aux réponses quasi-périodiques avec battement et aux réponses périodiques sans battement. On peut voir sur la Figure 4.16(a) que l'énergie totale du système décroît de manière monotone lorsque  $k_{NES}$  augmente. De plus, pour une valeur donnée de  $k_{NES}$ , le niveau d'énergie du système est compris entre les deux valeurs données par la courbe de suivi. La courbe de suivi de la Figure 4.16(b) permet de lire directement, pour une valeur donnée de  $k_{NES}$ , la plage de fréquences pour laquelle la réponse correspond à un battement quasi-périodique. On peut également observer que le battement quasi-périodique est impossible dans la zone (A) pour  $k_{NES} < 1.92$ . Dans la zone (B) pour  $1.92 < k_{NES} < 7.78$ , le battement quasi-périodique est possible dans une large plage de fréquences centrée sur la résonance. La plus grande valeur de  $k_{NES}$  dans cette zone ( $k_{NES} \simeq 7.78$ ) correspond à un fonctionnement optimal du NES. Dans la zone (C) pour  $7.78 < k_{NES} < 11.28$ , les zones périodiques et quasi-périodiques sont entremêlées. La zone quasi-périodique de gauche est très étroite et donc peu exploitable et la zone de droite n'est pas centrée sur la résonance. Par conséquent, ce n'est pas une zone de fonctionnement optimale. Dans la zone (D) pour  $k_{NES} > 11.28$ , la zone quasi-périodique n'est pas centrée sur la résonance. De plus, les courbes de réponse dans cette zone sont très complexes et des réponses stables autres que le régime de battement quasi-périodique sont susceptibles d'exister. Ce n'est donc pas une zone de fonctionnement sûre et robuste.

L'amplitude  $A$  de l'excitation extérieure est maintenant considérée comme paramètre variable, pendant que tous les autres paramètres du système  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\lambda_{NES} = 0.4$  et  $k_{nl} = 5$  sont fixés. Les courbes de réponse du système en termes d'énergie totale sont tracées sur la Figure 4.13 pour  $A = 0.1, 0.2, 0.3$  et  $0.4$ . Comme on pouvait s'y attendre, on constate que loin de la résonance, dans les zones où la réponse est périodique, le niveau d'énergie augmente avec  $A$ . Cependant, dans le voisinage de la résonance où le battement quasi-périodique se produit, le niveau d'énergie est quasiment le même quelle que soit la valeur de  $A$ . Cela met en évidence l'efficacité de l'absorbeur non-linéaire sur une large plage d'amplitude de l'excitation.

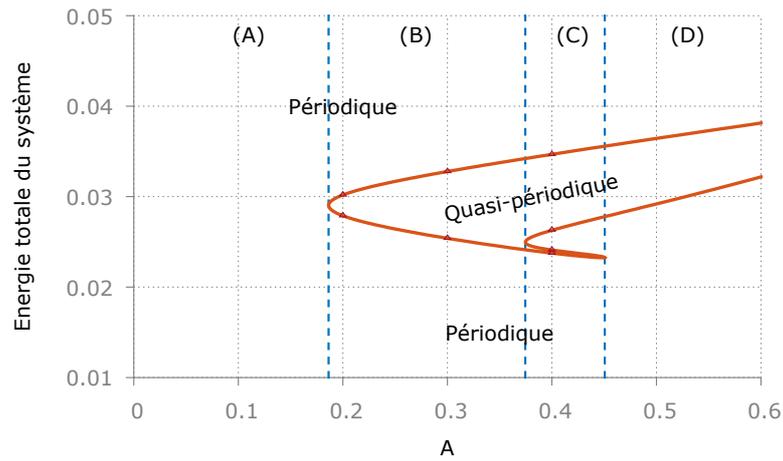
Afin de déterminer les frontières de la zone de battement quasi-périodique, le suivi des bifurcations NS est effectué à partir de la première bifurcation détectée sur la courbe de réponse pour  $A = 0.3$ . La courbe de suivi ainsi obtenue et ses projections sur les plans  $E_{tot} - A$  et  $A - \omega$  sont tracées dans les Figures 4.18 et 4.19. De nouveau, quatre zones de fonctionnement peuvent être identifiées. Dans la zone (A) pour  $A < 0.186$ , le battement quasi-périodique ne se produit jamais. La zone (B) pour  $0.186 < A < 0.374$  correspond à la zone de fonctionnement quasi-périodique optimal avec une large plage de fréquences centrée sur la résonance. Dans la zone (C) pour  $0.374 < A < 0.45$ , la zone quasi-périodique principale n'est plus centrée sur la résonance. Par conséquent, elle n'est pas optimale. On peut par ailleurs vérifier sur la Figure 4.17 que le transfert d'énergie est moins efficace pour  $A = 0.4$  au niveau de la résonance. La zone (D), pour  $A > 0.45$ , n'est pas centrée sur la résonance. De plus, ce n'est pas une zone de fonctionnement sûre car, pour ces valeurs de  $A$ , des solutions stables autres que la réponse quasi-périodique attendue peuvent exister.



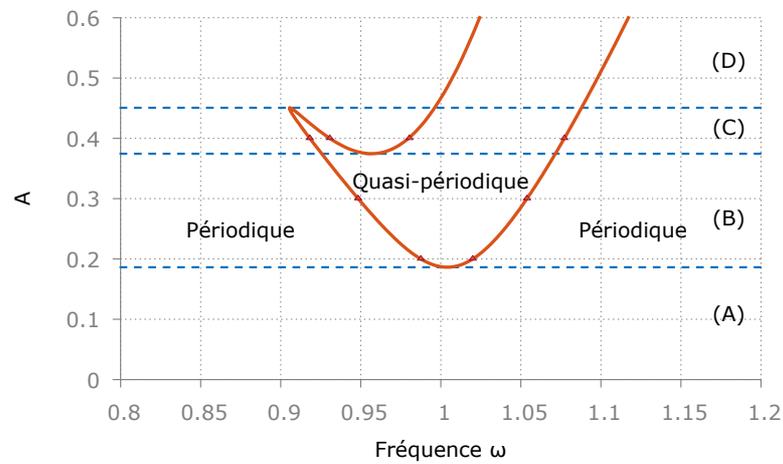
**FIGURE 4.17:** Energie totale moyenne du système pour  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\lambda_{NES} = 0.4$ ,  $k_{NES} = 5$  et  $A = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ . Solutions stables périodiques et quasi-périodiques.



**FIGURE 4.18:** Courbes de réponse et suivi des bifurcations NS pour  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\lambda_{NES} = 0.4$ ,  $k_{NES} = 5$  et  $A$  variable.



(a) Dans le plan  $E_{tot} - A$



(b) Dans le plan  $A - \omega$

**FIGURE 4.19:** Projections du suivi des bifurcations NS pour  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\lambda_{NES} = 0.4$ ,  $k_{NES} = 5$  et  $A$  variable.

Dans cet exemple, la méthode de suivi des bifurcations NS s'avère être un outil de réglage et d'optimisation du NES très efficace, puisque les zones de fonctionnement optimales peuvent être déterminées en un seul calcul.

### 4.3.3 Rotor de Jeffcott

Le troisième exemple concerne le rotor de Jeffcott avec contact rotor-stator. Il a déjà été étudié dans la paragraphe 3.6.1 où les courbes de réponse ont été calculées pour différentes valeurs du coefficient de frottement  $\mu$ . Dans cette section, le suivi des points limites et des bifurcations NS est réalisé. Tous les calculs sont effectués avec le même jeu de paramètres :  $m = 1$ ,  $c = 5$ ,  $k = 100$ ,  $k_c = 2500$ ,  $h = 0.105$ ,  $p_b = 0.1$ ,  $R_{disc} = 20h$ ,  $\omega_0 = \sqrt{k_c/m} = 50$ . Le coefficient de frottement  $\mu$  est considéré comme le paramètre à étudier.  $H = 15$  harmoniques sont retenues pour assurer la précision du calcul.

Dans un premier temps, les courbes de réponse adimensionnées en fonction de  $\omega/\omega_0$  sont tracées dans les Figures 4.20, 4.21 et 4.22 pour  $\mu = 0.05$ ,  $\mu = 0.11$  et  $\mu = 0.2$  respectivement. Les lignes en trait solide et pointillé représentent les solutions périodiques stables et instables, les cercles indiquent les points limites et les triangles les bifurcations NS. Le contact rotor-stator a lieu à partir de  $r/h = 1$  dans tous les cas. Pour  $\mu = 0.05$ , la réponse reste périodique après contact et correspond à un contact annulaire synchrone complet. Cette réponse reste stable jusqu'à l'apparition d'un point limite pour  $\omega/\omega_0 \simeq 1$ . En ce point, un saut d'amplitude sera observé expérimentalement. Pour  $\mu = 0.11$ , la réponse est également périodique après contact, mais ne demeure pas stable jusqu'au point limite. En effet, on constate une perte de stabilité entre  $\omega/\omega_0 = 0.82$  et  $\omega/\omega_0 = 0.95$  qui n'est pas liée à des points limites mais à des bifurcations NS. En effet, on vérifie bien qu'une paire d'exposants de Floquet complexes conjugués traversent l'axe imaginaire dans un sens puis dans l'autre en ces points. Ces bifurcations NS indiquent une transition du régime périodique vers le régime quasi-périodique qui correspond ici à un mouvement de rebond avec contact partiel. Ces zones de stabilité et ces changements de régime dynamique sont corroborés par les résultats obtenus par intégration temporelle de la Figure 3.14 p.86. Pour  $\mu = 0.2$ , la réponse devient instable à partir de  $\omega/\omega_0 = 0.28$  où se trouve une bifurcation NS, et reste instable tant que le rotor et le stator sont en contact.

Pour cet exemple, le coefficient de frottement  $\mu$  est considéré comme une nouvelle inconnue, et on effectue le suivi des points limites et des bifurcations NS. Dans un premier temps, les points limites sont suivis à partir de  $\mu = 0$ . La courbe de suivi est tracée sur la Figure 4.23. Plusieurs courbes de réponse sont également tracées pour faciliter l'interprétation des résultats et pour montrer que les courbes de suivi passent bien par les points limites des courbes de réponse. Une analyse de stabilité est aussi menée le long du suivi des points limites et les points limites stables et instables sont représentés respectivement par des lignes jaunes solide et pointillé. Un point limite est dit stable lorsqu'il correspond à un changement de stabilité de la courbe de réponse correspondante. C'est le cas par exemple pour  $\mu = 0.05$  (Figure 4.20). Quand il n'est pas associé à un changement de stabilité, le point limite localisé est instable comme pour  $\mu = 0.2$  (Figure 4.22). La courbe de suivi devient instable pour  $\mu \simeq 0.1285$ . En dessous de cette valeur, la courbe de

#### 4. Suivi numérique pour analyse paramétrique directe des bifurcations

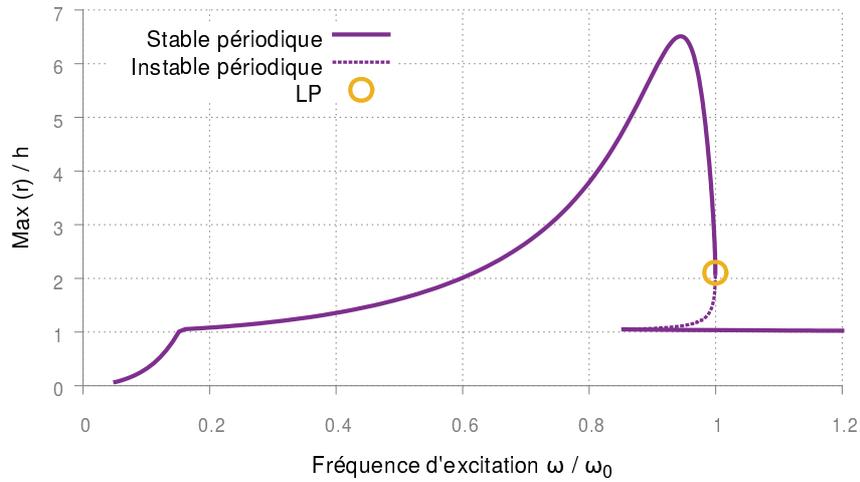


FIGURE 4.20: Courbe de réponse du rotor de Jeffcott pour  $\mu = 0.05$ .

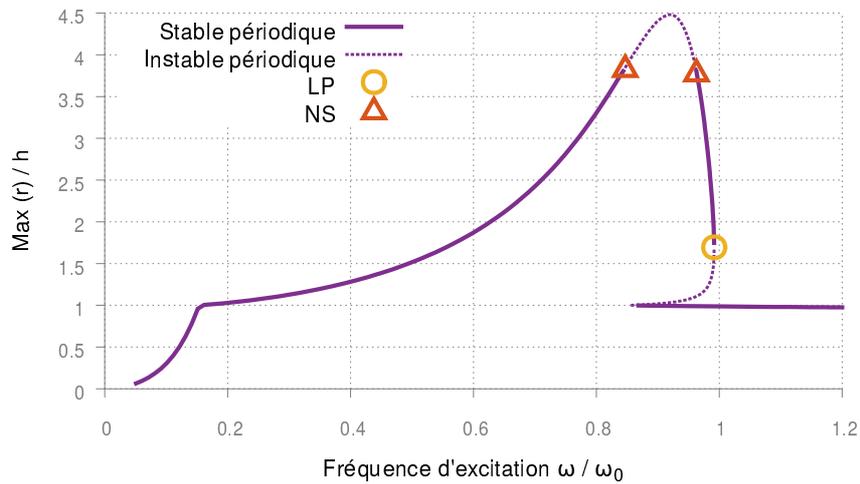


FIGURE 4.21: Courbe de réponse du rotor de Jeffcott pour  $\mu = 0.11$ .

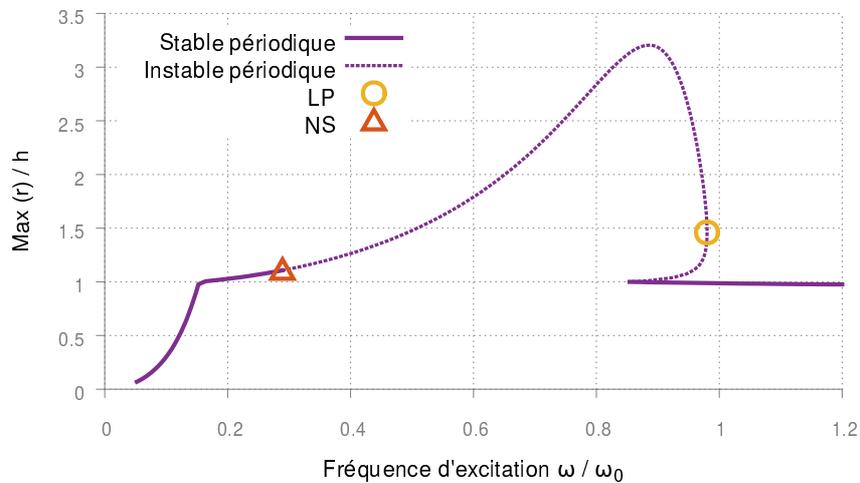
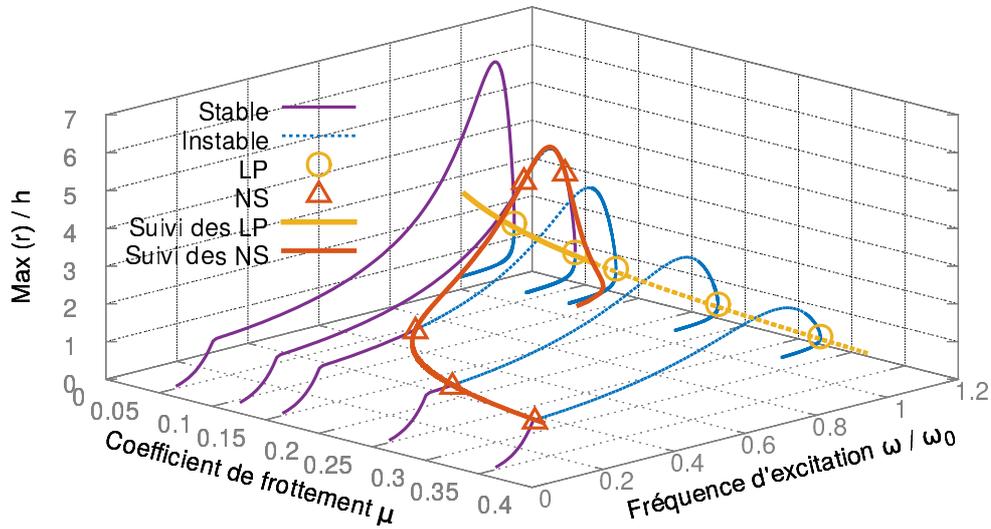
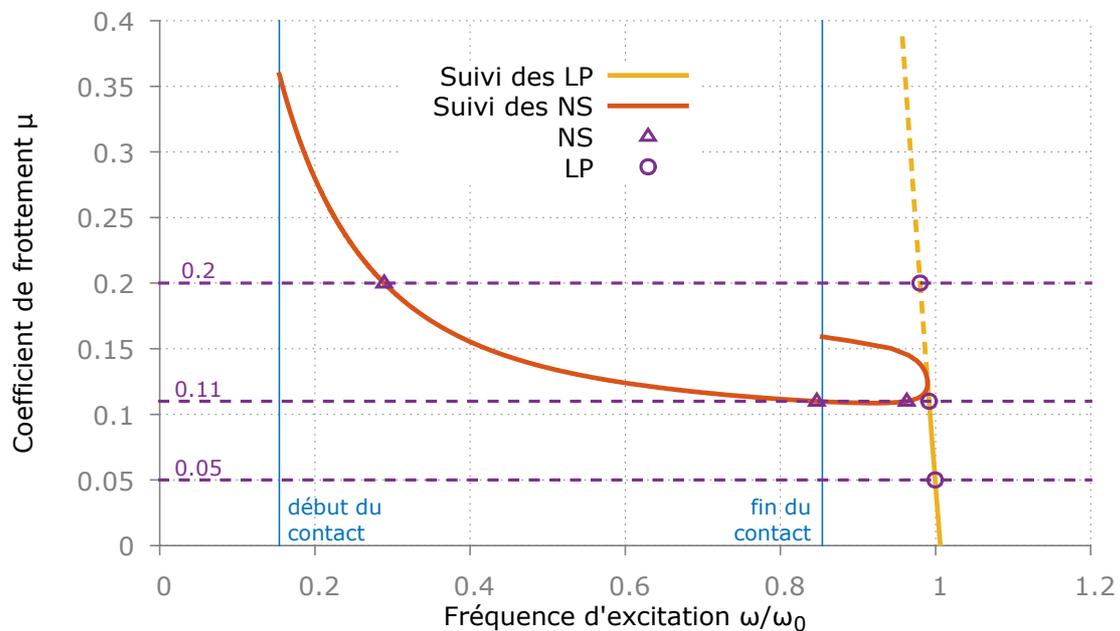


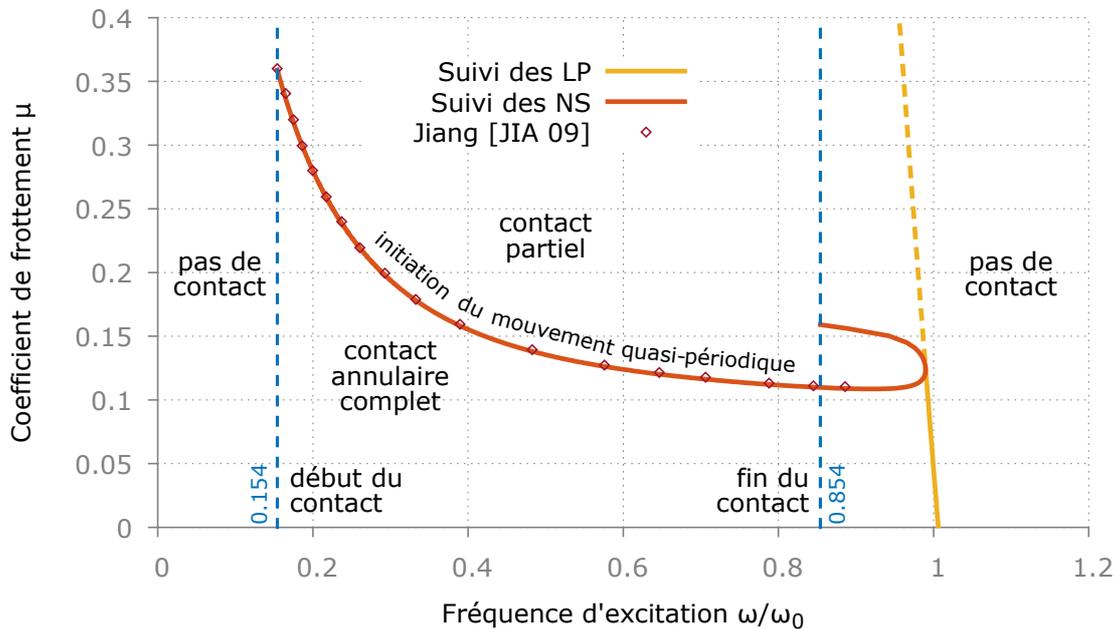
FIGURE 4.22: Courbe de réponse du rotor de Jeffcott pour  $\mu = 0.2$ .



**FIGURE 4.23:** Suivi des points de bifurcation et courbes de réponse du rotor de Jeffcott pour  $0 \leq \mu \leq 0.4$ .



**FIGURE 4.24:** Projections des courbes de suivi de bifurcations sur le plan  $\omega - \mu$ . Confrontation avec les résultats des Figures 4.20, 4.21 et 4.22.



**FIGURE 4.25:** Projections des courbes de suivi de bifurcations sur le plan  $\omega - \mu$ . Identification des différentes zones de fonctionnement.

réponse périodique est stable avant de passer par le point limite, potentiellement avec une partie de régime quasi-périodique délimitée par les points NS. En dessous de cette valeur, la courbe de réponse périodique du rotor après le point NS est instable jusqu'à ce que le contact cesse et la seule solution stable correspond à un contact partiel quasi-périodique. Dans un deuxième temps, les bifurcations NS sont suivies également. La bifurcation NS détectée sur la courbe de réponse pour  $\mu = 0.2$  est utilisée comme point de départ et le suivi est réalisé dans les deux sens ( $\mu$  croissant et décroissant) à partir de ce point. La courbe complète est présentée sur la Figure 4.23.

La projection des deux courbes de suivi sur le plan  $\mu - \omega/\omega_0$  est tracée dans les Figures 4.24 et 4.25. Pour une valeur de  $\mu$  donnée, ces courbes permettent de lire directement les fréquences auxquelles les bifurcations NS et les points limites se produisent. Ainsi, les droites horizontales pour  $\mu = 0.05$ ,  $\mu = 0.11$  et  $\mu = 0.2$  de la Figure 4.24 permettent de confronter les résultats du suivi avec les courbes de réponse des Figures 4.20, 4.21 et 4.22.

Les deux courbes de suivi divisent le plan en plusieurs zones correspondant aux différents régimes dynamiques possibles du rotor (Figure 4.25). Ainsi, la courbe de suivi des bifurcations NS correspond à la frontière du régime quasi-périodique. En-dessous de cette courbe le mouvement est périodique (contact annulaire synchrone complet) et au-dessus le mouvement est quasi-périodique (contact intermittent/partiel avec rebonds). Pour  $\mu < 0.108$  le rotor a un comportement purement périodique. Pour  $\mu > 0.36$ , le comportement est purement quasi-périodique durant le contact. Entre ces deux valeurs, le contact est partagé en deux phases périodique puis quasi-périodique dont les tailles

Type de calcul	Nombre de pas	Temps moyen relatif par pas	Temps total
Courbe de réponse + stabilité ( $\mu = 0.2$ )	56	1	56
Suivi des bifurcations LP	54	1.6	87
Suivi des bifurcations NS	79	2.3	182

**TABLE 4.1:** Coût de calcul du suivi de bifurcations pour le rotor de Jeffcott.

dépendent du coefficient de frottement  $\mu$ .

Le coût de calcul de chaque procédure est récapitulé dans le Tableau 4.1. Le calcul de chacune des courbes de réponse nécessite environ 50 à 60 pas de continuation. Pour  $\mu = 0.2$ , 56 pas adaptatifs de continuation avec un nombre moyen de 3 itérations de Newton-Raphson par pas sont nécessaires pour obtenir la totalité de la courbe de réponse avec une précision  $\varepsilon = 10^6$  et pour analyser la stabilité par la méthode de Hill. Le temps de calcul pour un pas de continuation de la courbe de réponse est normalisé à 1 et utilisé comme temps de référence. On observe qu'un pas de suivi de LP et de suivi de bifurcations NS sont respectivement 1.6 et 2.3 fois plus coûteux qu'un pas de continuation de courbe de réponse. Ce surcoût est dû à la taille plus importante du système augmenté à résoudre. Pour cet exemple, le suivi de LP et le suivi de bifurcations NS nécessitent respectivement 54 et 79 pas de continuation. Par conséquent, le coût de calcul pour le suivi complet est respectivement 1.5 et 3 fois plus élevé que pour une courbe de réponse complète. Cependant, ces coûts de calcul ne prennent pas en compte le calcul du point de bifurcation de départ, qui nécessite à lui seul la continuation de la courbe de réponse pour  $\mu = 0.2$  jusqu'à détection des bifurcations. Pour le cas présent, 40 pas et 17 pas de continuation (de coût 1) sont nécessaires pour atteindre et détecter les bifurcations LP et NS de départ. Par conséquent, les véritables coûts de calcul pour le suivi complet des bifurcations LP et NS sont respectivement  $87+40=127$  and  $182+17=199$ , ce qui est équivalent à 2.3 et 3.5 fois du coût de calcul de la courbe de réponse complète.

Cet exemple de modèle simplifié de rotor non-linéaire en rotation a permis de mettre en évidence l'intérêt du suivi de bifurcations pour l'analyse rapide du comportement dynamique d'un système. En effet, on obtient en un seul calcul une cartographie des zones de stabilité et des changements de régime dynamique du système, qui peut être utilisée lors de la phase de conception pour optimiser son fonctionnement.



# Conclusion générale et perspectives

## Conclusion générale

Dans le cadre de cette thèse, une méthode numérique efficace, basée sur la méthode de l'équilibrage harmonique (HBM), est mise en place afin de calculer efficacement la réponse, évaluer la stabilité et également suivre les bifurcations de systèmes dynamiques non linéaires. Notamment, un système augmenté original est introduit pour la détection et le suivi des bifurcations de Neimark-Sacker (NS) et pour ainsi réaliser directement l'analyse paramétrique du comportement dynamique non linéaire de machines tournantes.

La modélisation avec des éléments finis volumiques est l'approximation de la cinématique la plus générale pour décrire la géométrie et intégrer tout type de non-linéarité dans la dynamique de machines tournantes. Les équations du rotor s'écrivent dans le repère mobile et celles du stator dans le repère Galiléen. Les équations de couplage lient les deux repères dans le domaine fréquentiel.

Ensuite, la méthode de la balance harmonique (HBM) et la technique de bascule Temps-Fréquence (AFT) sont implémentées dans Cast3M afin d'obtenir rapidement les réponses périodiques des rotors dans le domaine fréquentiel. Deux méthodes pour analyser la stabilité sont aussi mises en place et comparées. La méthode de Hill présente une convergence rapide en fonction du nombre d'harmoniques retenues mais nécessite un nombre d'harmoniques plus élevé que celui pour le calcul de la solution. De plus, le choix des exposants de Floquet parmi toutes les valeurs propres de la matrice de Hill n'est pas toujours aisé. Le calcul des multiplicateurs de Floquet comme valeurs propres de la matrice de monodromie est une seconde méthode qui nécessite l'intégration temporelle du système pendant une période d'excitation. La convergence des résultats en fonction du nombre de points d'intégration est lente, et le temps de calcul croît sensiblement. Plus coûteuse mais plus robuste, l'intégration directe dans le domaine temporel fournit la référence des résultats de stabilité.

Des indicateurs de bifurcation basés sur l'évolution des exposants ou des multiplicateurs de Floquet sont utilisés pour détecter les bifurcations de type point limite, point de branchement et Neimark-Sacker le long des branches de solutions périodiques. Ces bifurcations sont localisées précisément en résolvant un système augmenté constitué de l'équation du mouvement et d'une équation supplémentaire caractérisant le type de bifurcation considéré. La résolution de ce système augmenté dans un cadre fréquentiel est une originalité forte de ce travail, notamment dans le cas des bifurcations NS.

L'inconvénient principal de cette méthode est lié à la taille du système augmenté qui est deux à trois fois plus grande que celle des équations d'équilibre dynamique. Il s'avère néanmoins possible de réduire le coût de calcul en exploitant la topologie du système augmenté à l'aide d'un algorithme d'élimination par blocs. Par ailleurs, les équations additionnelles ayant la même forme quel que soit le type de bifurcation, la procédure de Newton-Raphson fait intervenir les mêmes matrices jacobiniennes, ce qui facilite grandement la mise en œuvre des algorithmes.

En considérant un paramètre du système (coefficient de frottement, jeu rotor/stator, amplitude de l'excitation,...) comme nouvelle variable, l'utilisation de la technique de continuation conjointement avec le système augmenté permet de suivre directement les bifurcations en fonction de ce paramètre, et offre ainsi une nouvelle approche pour étudier de façon efficace la dynamique non-linéaire du système. Ces suivis des bifurcations délimitent les zones de fonctionnement spécifiques et extraient l'essentiel du comportement des systèmes non linéaires.

L'ensemble de ces techniques a été appliqué à des exemples de nature différente. Dans l'exemple de l'oscillateur de Duffing, différents points limites et points de branchement sont trouvés sous différentes configurations. Les suivis des points limites délimitent les zones où les solutions périodiques sont instables, tandis que le suivi des points de branchement indique la valeur du coefficient non-linéaire où ce phénomène de bifurcation s'initie. Dans le cas de l'absorbeur de vibrations non linéaires (NES), l'emploi de la méthode de suivi des bifurcations NS détermine en un seul calcul la valeur des paramètres pour laquelle le transfert d'énergie entre les deux masses est optimal.

Dans l'application du rotor de Jeffcott avec contact rotor/stator, plusieurs types de mouvement sont trouvés. Le contact annulaire permanent se traduit par un mouvement périodique stable. Lorsque le mouvement périodique trouvé par HBM devient instable, le rotor est en contact partiel avec le stator, qui se traduit par un mouvement quasi-périodique. La précession inverse apparaît pour un coefficient de frottement important. Grâce à l'indicateur de bifurcation, la transition des mouvements périodiques à quasi-périodiques est bien identifiée comme une bifurcation NS. Le même phénomène est également identifié pour le modèle poutre du rotor avec contact rotor/stator. Les suivis des points limites et des bifurcations NS dressent directement une cartographie des zones de stabilité et des changements de régime dynamique du système. Ils sont donc une aide immédiate au contrôle passif du comportement dynamique du rotor.

Ces applications illustrent les capacités des méthodes proposées et mettent en évidence leurs performances et leur efficacité.

## Perspectives

Les résultats de ce travail de recherche ouvrent les voies suivantes :

- Préviation du mouvement quasi-périodique. La bifurcation NS indique l'initiation d'une branche de mouvement quasi-périodique lorsque la branche périodique devient instable. Il est donc souhaitable de pouvoir déterminer les mouvements

quasi-périodiques afin de calculer les branches bifurquées quasi-périodiques et ainsi compléter la courbe de réponse. Idéalement, l'analyse de stabilité des mouvements quasi-périodiques est également à mettre en place.

- Suivi des autres types de changement de régime dynamique. Les points limites, de bifurcation simple et de Neimark-Sacker sont étudiés dans cette thèse. L'étude d'autres points d'intérêt liés à des changements de régime est à envisager (par exemple les doublements de période, ou le changement de sens de la précession, etc...)
- Suivi des bifurcations en fonction de plusieurs paramètres. Le couplage du suivi de bifurcations à plusieurs paramètres avec une méthode d'optimisation pourrait déterminer en un seul calcul les valeurs optimales des paramètres du système selon un critère donné (niveau d'énergie spécifique, plage de fréquences d'intérêt, apparition de régimes dynamiques particuliers, ...).
- Optimisation informatique. La maquette développée au sein de Cast3M pourrait bénéficier d'optimisations purement informatiques comme par exemple l'écriture de tout ou partie du code (actuellement en langage Gibiane) en langage compilé (Fortran) pour gagner en performances.



# Bibliographie

- [ADI 15] ADILETTA G.  
Bifurcating behaviour of a rotor on two-lobe wave squeeze film damper. *Tribology International*, vol. 92, 2015, pp. 72-83.
- [AND 02] ANDRIEUX S., VARÉ C.  
A 3D cracked beam model with unilateral contact. Application to rotors. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, vol. 21, n° 5, 2002, pp. 793-810.
- [ANT 05] ANTOULAS A. C.  
*Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.
- [ANT 09] ANTOULAS A. C.  
An overview of model reduction methods and a new result. *Decision and Control IEEE*, 2009, pp. 5357–5361.
- [ARQ 07] ARQUIER R.  
A computation method for non linear vibration modes of non linear structures. Thèse de doctorat, Université de la Méditerranée-Aix-Marseille II, 2007.
- [BAC 10] BACHSCHMID N., PENNACCHI P., TANZI E.  
*Cracked Rotors : A Survey on Static and Dynamic Behaviour Including Modelling and Diagnosis*. Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- [BAG 01] BAGUET S.  
Stabilité des structures minces et sensibilité aux imperfections par la méthode asymptotique numérique. Thèse de doctorat, Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 2001.
- [BAG 02] BAGUET S., COCHELIN B.  
Stability of thin-shell structures and imperfection sensitivity analysis with the Asymptotic Numerical Method. *Revue Européenne des Eléments Finis*, vol. 11/2-3-4, 2002, pp. 493-509, Hermès.
- [BAL 12] BALARAM B., NARAYANAN M., RAJENDRAKUMAR P.  
Optimal design of multi-parametric nonlinear systems using a parametric continuation based Genetic Algorithm approach. *Nonlinear Dynamics*, vol. 67, n° 4, 2012, pp. 2759–2777, Springer Netherlands.
- [BAT 07] BATAILLY A., LEGRAND M., CARTRAUD P., PIERRE C., LOMBARD J.-P.  
Study of component mode synthesis methods in a rotor-stator interaction case. *ASME*

- 2007 *IDETC and CIEC* American Society of Mechanical Engineers, 2007, pp. 1235-1242.
- [BAT 08] BATAILLY A.  
Simulation de l'interaction rotor/stator pour des turbo-machines aéronautiques en configuration non-accidentelle. Thèse de doctorat, 2008.
- [BAT 10] BATAILLY A., LEGRAND M., CARTRAUD P., PIERRE C.  
Assessment of reduced models for the detection of modal interaction through rotor stator contacts. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 329, n° 26, 2010, pp. 5546-5562.
- [BAU 01] BAUCHAU O. A., NIKISHKOV Y. G.  
An implicit Floquet analysis for rotorcraft stability evaluation. *Journal of the American Helicopter Society*, vol. 46, n° 3, 2001, pp. 200-209.
- [BAU 04] BAUCHAU O. A., RODRIGUEZ J., CHEN S. Y.  
Coupled rotor-fuselage analysis with finite motions using component mode synthesis. *Journal of the American Helicopter Society*, vol. 49, n° 2, 2004.
- [BEL 00] BELYTSCHKO T., LIU W., MORAN B.  
*Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures Wiley, 2000.
- [BER 00] BERLIOZ A., DUFOUR R., SINHA S.  
Bifurcation in a nonlinear autoparametric system using experimental and numerical investigations. *Nonlinear Dynamics*, vol. 23, n° 2, 2000, pp. 175-187, Kluwer Academic Publishers.
- [BLA 68] BLACK H. F.  
Interaction of a whirling rotor with a vibrating stator across a clearance annulus. *Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 10, n° 1, 1968, pp. 1-12.
- [BON 02] BONELLO P., BRENNAN M., HOLMES R.  
Non-linear modelling of rotor dynamic systems with squeeze film dampers an efficient integrated approach. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 249, n° 4, 2002, pp. 743-773.
- [BOS 73] BOSSAK M., ZIENKIEWICZ O. C.  
Free vibration of initially stressed solids, with particular, reference to centrifugal force effects in rotating machinery. *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, vol. 8, n° 4, 1973, pp. 245-252.
- [BOU 07] BOU-SAÏD B., GRAU G., IORDANOFF I.  
On nonlinear rotor dynamic effects of aerodynamic bearings with simple flexible rotors. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 130, n° 1, 2007.
- [BOV 15] BOVSUNOVSKY A., SURACE C.  
Non-linearities in the vibrations of elastic structures with a closing crack : A state of the art review. *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 62-63, 2015, pp. 129-148.
- [BRO 94] BROWN R. D., ADDISON P., CHAN A.  
Chaos in the unbalance response of journal bearings. *Nonlinear Dynamics*, vol. 5, n° 4, 1994, pp. 421-432.

- [CAM 89] CAMERON T. M., GRIFFIN J. H.  
An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 56, 1989, pp. 149-154.
- [CAR 99] CARDONA A., HUESPE A.  
Evaluation of simple bifurcation points and post-critical path in large finite rotation problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 175, 1999, pp. 137–156.
- [CES 64] CESARI L.  
Functional analysis and Galerkin's method. *Michigan Math. J.*, 1964.
- [CHA 02] CHATELET E., LORNAGE D., JACQUET-RICHARDET G.  
A three dimensional modeling of the dynamic behavior of composite rotors. *International Journal of Rotating Machinery*, vol. 8, n° 3, 2002, pp. 185-192.
- [CHA 05] CHATELET E., D'AMBROSIO F., JACQUET-RICHARDET G.  
Toward global modelling approaches for dynamic analyses of rotating assemblies of turbomachines. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 282, n° 1-2, 2005, pp. 163-178.
- [CHA 14] CHASALEVRIS A., PAPADOPOULOS C.  
A novel semi-analytical method for the dynamics of nonlinear rotor-bearing systems. *Mechanism and Machine Theory*, vol. 72, 2014, pp. 39-59.
- [CHE 98] CHEN C.-L., YAU H.-T.  
Chaos in the imbalance response of a flexible rotor supported by oil film bearings with non-linear suspension. *Nonlinear Dynamics*, vol. 16, n° 1, 1998, pp. 71-90, Kluwer Academic Publishers.
- [CHE 01] CHEN C. K., YAU H. T.  
Bifurcation in a flexible rotor supported by short journal bearings with nonlinear suspension. *Journal of Vibration and Control*, vol. 7, n° 5, 2001, pp. 653-673.
- [CHE 07] CHEN C., DAI L., FU Y.  
Nonlinear response and dynamic stability of a cracked rotor. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 12, n° 6, 2007, pp. 1023-1037.
- [CHE 14] CHEN H., CHEN Y., HOU L., LI Z.  
Bifurcation analysis of rotor-squeeze film damper system with fluid inertia. *Mechanism and Machine Theory*, vol. 81, 2014, pp. 129-139.
- [CHI 93] CHILDS D.  
*Turbomachinery Rotordynamics : Phenomena, Modeling, and Analysis*. Wiley-Interscience publication Wiley, 1993.
- [CHO 87] CHOY F., PADOVAN J.  
Non-linear transient analysis of rotor-casing rub events. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 113, n° 3, 1987, pp. 529-545.
- [CHO 01] CHOI Y. S., BAE C. Y.  
Nonlinear dynamic analysis of partial rotor rub with experimental observations. *Proceedings of the DETC*, 2001, pp. 9–12.

- [CHU 98] CHU F., ZHANG Z.  
Bifurcation and chaos in a rub-impact Jeffcott rotor system. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 210, n° 1, 1998, pp. 1-18.
- [COC 94] COCHELIN B.  
A path-following technique via an asymptotic numerical method. *Computers and Structures*, vol. 53, n° 5, 1994, pp. 1181–1192.
- [COM 08] COMBESCURE D., LAZARUS A.  
Refined finite element modelling for the vibration analysis of large rotating machines : Application to the gas turbine modular helium reactor power conversion unit. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 318, n° 4-5, 2008, pp. 1262-1280.
- [COO 79] COOKSON R., KOSSA S.  
The effectiveness of squeeze-film damper bearings supporting rigid rotors without a centralising spring. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 21, n° 11, 1979, pp. 639-650.
- [COO 80] COOKSON R., KOSSA S.  
The effectiveness of squeeze-film damper bearings supporting flexible rotors without a centralising spring. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 22, n° 5, 1980, pp. 313-324.
- [COU 09] COUDEYRAS N., NACIVET S., SINOUE J.-J.  
Periodic and quasi-periodic solutions for multi-instabilities involved in brake squeal. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 328, n° 4-5, 2009, pp. 520-540.
- [CRA 68] CRAIG R., BAMPTON M.  
Coupling of substructures for dynamic analysis. *AIAA Journal*, vol. 6, 1968, pp. 1313–1319.
- [DAK 14] DAKEL M.-Z., BAGUET S., DUFOUR R.  
Nonlinear dynamics of a support-excited flexible rotor with hydrodynamic journal bearings. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 333, n° 10, 2014, pp. 2774-2799.
- [DAR 04] DARPE A., GUPTA K., CHAWLA A.  
Transient response and breathing behaviour of a cracked Jeffcott rotor. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 272, 2004, pp. 207-243.
- [DET 15] DETROUX T., RENSON L., MASSET L., KERSCHEN G.  
The harmonic balance method for bifurcation analysis of large-scale nonlinear mechanical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 296, 2015, pp. 18–38.
- [DHO 03] DHOOGHE A., GOVAERTS W., KUZNETSOV Y. A.  
MATCONT : A matlab package for numerical bifurcation analysis of ODEs. *ACM TOMS*, vol. 29, 2003, pp. 141–164.
- [DIA 04] DIAS-JR M., MIRANDA U., MESQUITA A., IDEHARA S. J.  
On the simultaneous forward and backward whirling in flexible rotors : numerical analysis and experimental verification. *Australian journal of mechanical engineering*, vol. 1, n° 2, 2004, page 113.

- 
- [DID 12] DIDIER J., SINOUE J.-J., FAVERJON B.  
Study of the non-linear dynamic response of a rotor system with faults and uncertainties. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 331, n° 3, 2012, pp. 671-703.
- [DIM 96] DIMAROGONAS A. D.  
Vibration of cracked structures : A state of the art review. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 55, n° 5, 1996, pp. 831-857.
- [DOE 08] DOEDEL E. J., CHAMPNEYS A. R., DERCOLE F., FAIRGRIEVE T., KUZNETSOV Y., OLDEMAN B., PAFFENROTH R., SANDSTEDT B., WANG X., ZHANG C.  
AUTO-07P : Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations, 2008.
- [DOK 89] DOKAINISH M., SUBBARAJ K.  
A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics-I. Explicit methods. *Computers & Structures*, vol. 32, n° 6, 1989, pp. 1371-1386.
- [DRI 09] DRIOT A., BERLIOZ A., LAMARQUE C.-H.  
Stability and stationary response of a skew Jeffcott rotor with geometric uncertainty. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, vol. 4, n° 2, 2009.
- [DUC 06] DUCHEMIN M., BERLIOZ A., FERRARIS G.  
Dynamic behavior and stability of a rotor under base excitation. *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 128, n° 5, 2006, pp. 576-585.
- [DUF 98] DUFOUR R., BERLIOZ A.  
Parametric instability of a beam due to axial excitations and to boundary conditions. *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 120, n° 2, 1998, pp. 461-467.
- [DUG 83] DUGUNDJI J., WENDELL J.  
Some analysis methods for rotating systems with periodic coefficients. *AIAA Journal*, vol. 21, 1983, pp. 890-897.
- [DUR 15] DURAN C., MANIN L., ANDRIANOELY M.-A., BORDEGARAY C., BATTLE F., DUFOUR R.  
Effect of rotor-stator contact on the mass unbalance response. PENNACCHI P., Ed., *Proceedings of the 9th IFToMM International Conference on Rotor Dynamics*, vol. 21 *Mechanisms and Machine Science*, pp. 1965–1975 Springer International Publishing, 2015.
- [EHR 67] EHRICH F. F., O'CONNOR J. J.  
Stator whirl with rotors in bearing clearance. *Journal of Engineering for Industry*, vol. 89, n° 3, 1967, pp. 381-389.
- [EHR 99] EHRICH F. F.  
*Handbook of Rotordynamics*. Krieger Publishing Company, 3rd edition, 1999.
- [ERI 99] ERIKSSON A., PACOSTE C., ZDUNEK A.  
Numerical analysis of complex instability behaviour using incremental-iterative strategies. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 179, n° 3-4, 1999, pp. 265–305.
-

- [FEL 87] FELIPPA C. A.  
Traversing critical points by penalty springs. *Proceedings of NUMETA'87 Conference, Swansea, Wales, Nijhoff Pubs, Dordrecht, Holland, , 1987.*
- [FER 86] FERRI A. A.  
On the equivalence of the incremental harmonic balance method and the harmonic balance-Newton Raphson method. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 53, 1986, pp. 455-457.
- [FER 05] FERREIRA J., SERPA A.  
Application of the arc-length method in nonlinear frequency response. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 284, n° 1-2, 2005, pp. 133-149.
- [FRÊ 97] FRÊNE J., NICOLAS D., DEGUEURCE B., BERTHE D., GODET M.  
*Hydrodynamic Lubrication : Bearings and Thrust Bearings*, vol. 33. Elsevier, Tribology Series, 1997.
- [FRI 86] FRIEDMANN P. P.  
Numerical methods for determining the stability and response of periodic systems with applications to helicopter rotor dynamics and aeroelasticity. *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 12, n° 1, Part A, 1986, pp. 131-148.
- [FRU 00] FRULLA G.  
Rigid rotor dynamic stability using Floquet theory. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, vol. 19, n° 1, 2000, pp. 139-150.
- [GE 01] GE Z.-M., YANG C.-H., CHEN H.-H., LEE S.-C.  
Non-linear dynamics and chaos control of a physical pendulum with vibrating and rotating support. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 242, n° 2, 2001, pp. 247-264.
- [GEN 88] GENTA G., GUGLIOTTA A.  
A conical element for finite element rotor dynamics. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 120, n° 1, 1988, pp. 175-182.
- [GEN 99] GENTA G.  
*Vibration of Structures and Machines : Practical Aspects*. Springer New York, 1999.
- [GEN 06a] GENDELMAN O. V., STAROSVETSKY Y.  
Quasi-periodic response regimes of linear oscillator coupled to nonlinear energy sink under periodic forcing. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 74, n° 2, 2006, pp. 325-331, ASME.
- [GEN 06b] GENDELMAN O., GOURDON E., LAMARQUE C.  
Quasiperiodic energy pumping in coupled oscillators under periodic forcing. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 294, n° 4-5, 2006, pp. 651-662.
- [GEN 07] GENTA G.  
*Dynamics of Rotating Systems*. Mechanical Engineering Series Springer New York, 2007.
- [GÉR 01] GÉRADIN M., CARDONA A.  
*Flexible Multibody Dynamics : A Finite Element Approach*. Wiley, 2001.

- 
- [GHO 09] GHOSH R., SAHA A., NANDI A., NEOGY S.  
Stability analysis of a flexible spinning and precessing rotor with non-symmetric shaft. *Journal of Vibration and Control*, , 2009.
- [GOU 07] GOURDON E., ALEXANDER N., TAYLOR C., LAMARQUE C., PERNOT S.  
Nonlinear energy pumping under transient forcing with strongly nonlinear coupling : Theoretical and experimental results. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 300, n° 3-5, 2007, pp. 522–551.
- [GOV 00] GOVAERTS W.  
*Numerical Methods for Bifurcations of Dynamical Equilibria*. SIAM, 2000.
- [GRI 83] GRIEWANK A., REDDIEN G.  
The calculation of Hopf points by a direct method. *IMA Journal of Numerical Analysis*, vol. 3, n° 3, 1983, pp. 295-303.
- [GRI 97] GRISIN S.  
Comportement dynamique de rotors parallèles non symétriques liés par engrenage. Thèse de doctorat, INSA-Lyon, 1997.
- [GRO 12a] GROLET A., THOUVEREZ F.  
Free and forced vibration analysis of a nonlinear system with cyclic symmetry : Application to a simplified model. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 331, n° 12, 2012, pp. 2911-2928.
- [GRO 12b] GROLET A., THOUVEREZ F.  
On a new harmonic selection technique for harmonic balance method. *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 30, 2012, pp. 43-60.
- [GU 03] GU Z., ZHI X., MENG G., FANG T.  
Transient response analysis of large-scale rotor-bearing system with strong nonlinear elements by a transfer matrix-newmark formulation itegration method. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 259, n° 3, 2003, pp. 559-570.
- [GUC 83] GUCKENHEIMER J., HOLMES P.  
*Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Applied Mathematical Sciences Springer New York, 1983.
- [GUS 12] GUSKOV M., THOUVEREZ F.  
Harmonic balance based approach for quasi-periodic motions and stability analysis. *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 134, n° 3, 2012, page 031003, American Society of Mechanical Engineers.
- [HAN 13] HAN Q., CHU F.  
Dynamic response of cracked rotor-bearing system under time-dependent base movements. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 332, n° 25, 2013, pp. 6847-6870.
- [HAR 01] HARRIS T. A.  
*Rolling Bearing Analysis*. A Wiley-interscience publication Wiley, 2001.
- [HAR 06] HARSHA S.  
Nonlinear dynamic response of a balanced rotor supported by rolling element bearings
-

- due to radial internal clearance effect. *Mechanism and Machine Theory*, vol. 41, n° 6, 2006, pp. 688-706.
- [HE 02] HE L., CHEN T., WELLS R., LI Y., NING W.  
Analysis of rotor-rotor and stator-stator interferences in multi-stage turbomachines. *Journal of turbomachinery*, vol. 124, 2002, pp. 564-571.
- [HOL 78] HOLMES A. G., ETTLES C. M. M., MAYES I. W.  
The aperiodic behaviour of a rigid shaft in short journal bearings. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 12, n° 4, 1978, pp. 695-702, John Wiley & Sons, Ltd.
- [IBR 09] IBRAHIM S., PATEL B., NATH Y.  
Modified shooting approach to the non-linear periodic forced response of isotropic/composite curved beams. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 44, n° 10, 2009, pp. 1073-1084.
- [INA 01] INAYAT-HUSSAIN J., KANKI H., MUREITHI N. W.  
Stability and bifurcation of a rigid rotor in cavitated squeeze-film dampers without centering springs. *Tribology International*, vol. 34, n° 10, 2001, pp. 689-702.
- [INA 02] INAYAT-HUSSAIN J. I., KANKI H., MUREITHI N. W.  
Chaos in the unbalance response of a rigid rotor in cavitated squeeze-film dampers without centering springs. *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 13, n° 4, 2002, pp. 929-945.
- [INA 03] INAYAT-HUSSAIN J., KANKI H., MUREITHI N.  
On the bifurcations of a rigid rotor response in squeeze-film dampers. *Journal of Fluids and Structures*, vol. 17, n° 3, 2003, pp. 433-459.
- [INA 06] INAYAT-HUSSAIN J. I., MUREITHI N. W.  
Transitions to chaos in squeeze-film dampers. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 11, n° 6, 2006, pp. 721-744.
- [INA 09] INAYAT-HUSSAIN J. I.  
Bifurcations in the response of a flexible rotor in squeeze-film dampers with retainer springs. *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 39, n° 2, 2009, pp. 519-532.
- [ISH 08] ISHIDA Y.  
Cracked rotors : Industrial machine case histories and nonlinear effects shown by simple Jeffcott rotor. *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 22, n° 4, 2008, pp. 805-817.
- [ISM 95] ISMEURT O.  
Contribution à l'étude d'influence du frottement rotor/stator sur le comportement dynamique des machines tournantes. Thèse de doctorat, INSA-Lyon, 1995.
- [JAN 04] JANG G., JEONG S.-W.  
Vibration analysis of a rotating system due to the effect of ball bearing waviness. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 269, n° 3-5, 2004, pp. 709-726.

- 
- [JAU 10] JAUMOUILLÉ V., SINOUE J.-J., PETITJEAN B.  
An adaptive harmonic balance method for predicting the nonlinear dynamic responses of mechanical systems Application to bolted structures. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 329, n° 19, 2010, pp. 4048-4067.
- [JIA 09] JIANG J.  
Determination of the global responses characteristics of a piecewise smooth dynamical system with contact. *Nonlinear Dynamics*, vol. 57, n° 3, 2009, pp. 351-361, Springer Netherlands.
- [JUN 92] JUN O., EUN H., EARMME Y., LEE C.-W.  
Modelling and vibration analysis of a simple rotor with a breathing crack. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 155, n° 2, 1992, pp. 273-290.
- [KAC 11] KACEM N., BAGUET S., HENTZ S., DUFOUR R.  
Computational and quasi-analytical models for non-linear vibrations of resonant MEMS and NEMS sensors. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 46, n° 3, 2011, pp. 532-542.
- [KAR 02] KARPENKO E. V., WIERCIGROCH M., CARTMELL M. P.  
Regular and chaotic dynamics of a discontinuously nonlinear rotor system. *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 13, n° 6, 2002, pp. 1231-1242.
- [KEL 77] KELLER H. B.  
Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems. RABINOWITZ P. H., Ed., *Applications of Bifurcation Theory* Academic Press, New York, 1977, pp. 359-384.
- [KER 09] KERSCHEN G., PEETERS M., GOLINVAL J., VAKAKIS A.  
Nonlinear normal modes, Part I : A useful framework for the structural dynamicist. *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 23, n° 1, 2009, pp. 170-194.
- [KHO 93] KHONSARI M. M., CHANG Y. J.  
Stability boundary of non-linear orbits within clearance circle of journal bearings. *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 115, 1993, pp. 303-307.
- [KIM 90] KIM Y., NOAH S.  
Bifurcation analysis for a modified Jeffcott rotor with bearing clearances. *Nonlinear Dynamics*, vol. 1, n° 3, 1990, pp. 221-241, Kluwer Academic Publishers.
- [KIM 91a] KIM Y.-B., NOAH S.  
Response and bifurcation analysis of a MDOF rotor system with a strong nonlinearity. *Nonlinear Dynamics*, vol. 2, n° 3, 1991, pp. 215-234, Kluwer Academic Publishers.
- [KIM 91b] KIM Y., NOAH S., CHOI Y.  
Periodic response of multi-disk rotors with bearing clearances. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 144, n° 3, 1991, pp. 381-395.
- [KIM 96] KIM Y.-B., NOAH S.  
Quasi-periodic response and stability analysis for a non-linear jeffcott rotor. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 190, n° 2, 1996, pp. 239-253.
-

- [KIM 97] KIM Y., CHOI S.-K.  
A multiple harmonic balance method for the internal resonant vibration of a non-linear jeffcott rotor. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 208, n° 5, 1997, pp. 745-761.
- [KRA 07] KRAUSKOPF B., OSINGA H. M., GALAN-VIOQUE J., Eds. *Numerical Continuation Methods for Dynamical Systems*. Springer Netherlands, 2007.
- [KU 98] KU D.-M.  
Finite element analysis of whirl speed for rotor-bearing systems with internal damping. *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 12, n° 5, 1998, pp. 599-610.
- [KUM 97] KUMAR D., SUJATHA C., GANESAN N.  
Disc flexibility effects in rotor bearing systems. *Computers & Structures*, vol. 62, n° 4, 1997, pp. 715-719.
- [KUZ 04] KUZNETSOV Y. A.  
*Elements of Applied Bifurcation Theory*, vol. 112 *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag New York, 3rd ed. edition, 2004.
- [LAH 11] LAHA S., KAKOTY S.  
Non-linear dynamic analysis of a flexible rotor supported on porous oil journal bearings. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 16, n° 3, 2011, pp. 1617-1631.
- [LAL 98] LALANNE M., FERRARIS G.  
*Rotordynamics Prediction in Engineering*. Rotordynamics prediction in engineering John Wiley, 2nd edition, 1998.
- [LAU 81] LAU S. L., CHEUNG Y. K.  
Amplitude incremental variational principle for nonlinear vibration of elastic systems. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of The Asme*, vol. 48, 1981.
- [LAU 82] LAU S. L., CHEUNG Y. K., WU S. Y.  
A variable parameter incrementation method for dynamic instability of linear and non-linear elastic systems. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of The Asme*, vol. 49, 1982.
- [LAU 83] LAU S. L., CHEUNG Y. K., WU S. Y.  
Incremental harmonic balance method with multiple time scales for aperiodic vibration of nonlinear systems. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of The Asme*, vol. 50, 1983.
- [LAX 09] LAXALDE D., LEGRAND M., PIERRE C.  
Modes non-linéaires appliqués aux problèmes de contact : application à une aube de turbomachine. *Colloque national en calcul des structures*, 2009, pp. Session-dynamique.
- [LAX 11] LAXALDE D., LEGRAND M.  
Nonlinear modal analysis of mechanical systems with frictionless contact interfaces. *Computational Mechanics*, vol. 47, n° 4, 2011, pp. 469-478, Springer.

- 
- [LAZ 10] LAZARUS A., PRABEL B., COMBESURE D.  
A 3D finite element model for the vibration analysis of asymmetric rotating machines. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 329, n° 18, 2010, pp. 3780-3797.
- [LEE 06] LEE A. S., KIM B. O., KIM Y.  
A finite element transient response analysis method of a rotor-bearing system to base shock excitations using the state-space Newmark scheme and comparisons with experiments. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 297, n° 3-5, 2006, pp. 595-615.
- [LEG 12] LEGRAND M., BATAILLY A., MAGNAIN B., CARTRAUD P., PIERRE C.  
Full three-dimensional investigation of structural contact interactions in turbomachines. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 331, n° 11, 2012, pp. 2578-2601.
- [LI 11] LI W., YANG Y., SHENG D., CHEN J.  
A novel nonlinear model of rotor/bearing/seal system and numerical analysis. *Mechanism and Machine Theory*, vol. 46, n° 5, 2011, pp. 618-631.
- [LIA 13] LIAO H., WANG J.  
Maximization of the vibration amplitude and bifurcation analysis of nonlinear systems using the constrained optimization shooting method. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 332, n° 16, 2013, pp. 3781-3793.
- [LIM 90] LIM T., SINGH R.  
Vibration transmission through rolling element bearings, part I : Bearing stiffness formulation. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 139, n° 2, 1990, pp. 179-199.
- [LOP 02] LOPEZ S.  
Post-critical analysis of structures with a nonlinear pre-buckling state in the presence of imperfections. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 191, 2002, pp. 4421-4440.
- [MAP 04] MAPLE R., KING P., ORKWIS P., WOLFF J.  
Adaptive harmonic balance method for nonlinear time-periodic flows. *Journal of Computational Physics*, vol. 193, n° 2, 2004, pp. 620-641.
- [MAY 84] MAYES I. W., DAVIES W. G. R.  
Analysis of the response of a multi-rotor-bearing system containing a transverse crack in a rotor. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, vol. 106, 1984, pp. 139-145.
- [MEN 00] MENG G., GASCH R.  
Stability and stability degree of a cracked flexible rotor supported on journal bearings. *Journal of vibration and acoustics*, vol. 122, n° 2, 2000, pp. 116-125, American Society of Mechanical Engineers.
- [MOO 80] MOORE G., SPENCE A.  
The calculation of turning points of nonlinear equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 17, n° 4, 1980, pp. 567-576.
- [MOO 04] MOORE G.  
Floquet theory as a computational tool. *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 42, n° 6, 2004, pp. 2522-2568, Society for Industrial and Applied Mathematics.
-

- [MOO 08] MOORE G.  
From Hopf to Neimark Sacker bifurcation, a computational algorithm. *Int. J. Comput. Sci. Math.*, vol. 2, n° 1/2, 2008, pp. 132–180, Inderscience Publishers.
- [MUS 96] MUSZYNSKA A.  
Forward and backward precession of a vertical anisotropically supported rotor. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 192, n° 1, 1996, pp. 207-222.
- [MUS 05] MUSZYNSKA A.  
*Rotordynamics*. CRC Press, 2005.
- [NAK 76] NAKHLA M., VLACH J.  
A piecewise harmonic balance technique for determination of periodic response of nonlinear systems. *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, 1976.
- [NAN 01] NANDI A., NEOGY S.  
Modelling of rotors with three-dimensional solid finite elements. *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, vol. 36, n° 4, 2001, pp. 359-371.
- [NAN 03] NANDI A.  
On computation of response of a rotor in deformed configuration using three-dimensional finite elements. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 19, n° 3, 2003, pp. 179–195, John Wiley & Sons, Ltd.
- [NAN 04] NANDI A.  
Reduction of finite element equations for a rotor model on non-isotropic spring support in a rotating frame. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 40, n° 9-10, 2004, pp. 935-952.
- [NAN 05] NANDI A., NEOGY S.  
An efficient scheme for stability analysis of finite element asymmetric rotor models in a rotating frame. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 41, n° 14, 2005, pp. 1343-1364.
- [NAR 98] NARAYANAN S., SEKAR P.  
A frequency domain based numerical-analytical method for non-linear dynamical systems. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 211, n° 3, 1998, pp. 409-424.
- [NAT 89] NATARAJ C., NELSON H. D.  
Periodic solutions in rotor dynamic systems with nonlinear supports : A general approach. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, vol. 111, n° 2, 1989, pp. 189-193.
- [NAY 08] NAYFEH A. H., BALACHANDRAN B.  
*Applied Nonlinear Dynamics : Analytical, Computational and Experimental Methods*. John Wiley & Sons, 2008.
- [NEL 76] NELSON H. D., McVAUGH J. M.  
The dynamics of rotor-bearing systems using finite elements. *Journal of Engineering for Industry*, vol. 98, n° 2, 1976, pp. 593-600.

- 
- [NEL 80] NELSON H. D.  
A finite rotating shaft element using Timoshenko beam theory. *Journal of Mechanical Design*, vol. 102, n° 4, 1980, pp. 793-803.
- [NEW 59] NEWMARK N.  
A method of computation for structural dynamics. *Journal of Eng Mech Division*, , 1959.
- [OCV 52] OCVIRK F. W.  
Short-bearing approximation for full journal bearings. *NT*, , 1952, Citeseer.
- [ONC 01] ONCESCU F., LAKIS A., OSTIGUY G.  
Investigation of the stability and steady-state response of asymmetric rotors, using finite Element formulatio. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 245, n° 2, 2001, pp. 303-328.
- [PAP 89] PAPAECONOMOU N., DIMAROGONAS A.  
Vibration of cracked beams. *Computational Mechanics*, vol. 5, n° 2-3, 1989, pp. 88-94, Springer-Verlag.
- [PAP 08] PAPADOPOULOS C. A.  
The strain energy release approach for modeling cracks in rotors : A state of the art review. *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 22, n° 4, 2008, pp. 763-789.
- [PAR 15] PARENT M.-O.  
Stability prediction of turbojet engine under rotor-to-stator contacts. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2015.
- [PAT 08] PATEL T. H., DARPE A. K.  
Vibration response of a cracked rotor in presence of rotor-stator rub. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 317, n° 3-5, 2008, pp. 841-865.
- [PEE 09] PEETERS M., VIGUIÉ R., SÉRANDOUR G., KERSCHEN G., GOLINVAL J.-C.  
Nonlinear normal modes, Part II : Toward a practical computation using numerical continuation techniques. *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 23, n° 1, 2009, pp. 195-216.
- [PEL 12] PELETAN L.  
Stratégie de modélisation simplifiée et de résolution accélérée en dynamique non linéaire des machines tournantes. Application au contact rotor/stator. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2012.
- [PEL 13] PELETAN L., BAGUET S., TORKHANI M., JACQUET-RICHARDET G.  
A comparison of stability computational methods for periodic solution of nonlinear problems with application to rotordynamics. *Nonlinear Dynamics*, vol. 72, n° 3, 2013, pp. 671–682, Springer Netherlands.
- [PEL 14] PELETAN L., BAGUET S., TORKHANI M., JACQUET-RICHARDET G.  
Quasi-periodic harmonic balance method for rubbing self-induced vibrations in rotor-stator dynamics. *Nonlinear Dynamics*, vol. 78, n° 4, 2014, pp. 2501–2515, Springer Netherlands.
-

- [PES 01] PESHECK E., PIERRE C., SHAW S.  
Accurate reduced-order models for a simple rotor blade model using nonlinear normal modes. *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 33, n° 10-11, 2001, pp. 1085 - 1097.
- [PES 02] PESHECK E., PIERRE C., SHAW S.  
A new Galerkin-based approach for accurate non-linear normal modes through invariant manifolds. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 249, n° 5, 2002, pp. 971 - 993.
- [PET 04] PETROV E., EWINS D.  
State-of-the-art dynamic analysis for non-linear gas turbine structures. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G : Journal of Aerospace Engineering*, vol. 218, n° 3, 2004, pp. 199-211.
- [PET 07] PETROV E. P.  
Direct parametric analysis of resonance regimes for nonlinear vibrations of bladed disks. *J. TurboMach.*, vol. 129(3), 2007, pp. 495-502.
- [PET 15] PETROV E. P.  
Analysis of bifurcations in multiharmonic analysis of nonlinear forced vibrations of gas-turbine engine structures with friction and gaps. *ASME Turbo Expo 2015 : Turbine Technical Conference and Exposition*, n° GT2015-43670, Montreal, Quebec, Canada, June 15-19 2015 page V07BT33A006.
- [PU 02] PU Y., CHEN J., ZOU J., ZHONG P.  
Quasi-periodic vibration of cracked rotor on flexible bearings. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 251, n° 5, 2002, pp. 875-890.
- [QIN 04] QIN W., CHEN G., MENG G.  
Nonlinear responses of a rub-impact overhung rotor. *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 19, n° 5, 2004, pp. 1161-1172.
- [RAG 99] RAGHOTHAMA A., NARAYANAN S.  
Bifurcation and chaos in geared rotor bearing system by incremental harmonic balance method. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 226, n° 3, 1999, pp. 469-492.
- [RAM 12] RAMEZANPOUR R., GHAYOUR M., ZIAEI-RAD S.  
Dynamic behavior of Jeffcott rotors with an arbitrary slant crack orientation on the shaft. *Applied and Computational Mechanics*, vol. 6, n° 1, 2012, pp. 35-52, Západočeská univerzita v Plzni.
- [RAO 83] RAO J.  
*Rotor Dynamics*. Halsted Press, 1983.
- [REZ 14] REZAIEE-PAJAND M., MOGHADDASIE B.  
Stability boundaries of two-parameter non-linear elastic structures. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 51, n° 5, 2014, pp. 1089-1102.
- [ROO 85a] ROOSE D.  
An algorithm for the computation of Hopf bifurcation points in comparison with other methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 12-13, 1985, pp. 517-529.

- [ROO 85b] ROOSE D., HLAVAČEK V.  
A direct method for the computation of Hopf bifurcation points. *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 45, n° 6, 1985, pp. 879-894.
- [ROO 89] ROOSE D., DIER B. D.  
Numerical determination of an emanating branch of Hopf bifurcation points in a two-parameter problem. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, vol. 10, n° 4, 1989, pp. 671-685.
- [ROU 79] ROUCH K., KAO J.-S.  
A tapered beam finite element for rotor dynamics analysis. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 66, n° 1, 1979, pp. 119-140.
- [SAL 02] SALINGER A. G., BOU-RABEE N. M., BURROUGHS E. A., PAWLOWSKI R. P., LEHOUCQ R. B., ROMERO L., WILKES E. D.  
*LOCA 1.0 Library of Continuation Algorithms : Theory and Implementation Manual*. 2002.
- [SEY 09] SEYDEL R.  
*Practical Bifurcation and Stability Analysis*. Interdisciplinary Applied Mathematics Springer, 2009.
- [SHE 08] SHEN J., LIN K., CHEN S., SZE K.  
Bifurcation and route-to-chaos analyses for Mathieu-Duffing oscillator by the incremental harmonic balance method. *Nonlinear Dynamics*, vol. 52, n° 4, 2008, pp. 403-414, Springer Netherlands.
- [SIN 91] SINHA S., WU D.-H.  
An efficient computational scheme for the analysis of periodic systems. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 151, n° 1, 1991, pp. 91-117.
- [SIN 04] SINHA S.  
Dynamic characteristics of a flexible bladed-rotor with Coulomb damping due to tip-rub. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 273, n° 4, 2004, pp. 875-919.
- [SPR 87] SPRINGER W., LAWRENCE K., LAWLEY T.  
The effect of a symmetric discontinuity on adjacent material in a longitudinally vibrating uniform beam. *Experimental Mechanics*, vol. 27, n° 2, 1987, pp. 168-171, Kluwer Academic Publishers.
- [SRE 81] SREENIVASAMURTHY S., RAMAMURTI V.  
Coriolis effect on the vibration of flat rotating low aspect ratio cantilever plates. *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, vol. 16, n° 2, 1981, pp. 97-106.
- [STA 08] STAROSVETSKY Y., GENDELMAN O.  
Attractors of harmonically forced linear oscillator with attached nonlinear energy sink. II : Optimization of a nonlinear vibration absorber. *Nonlinear Dynamics*, vol. 51, n° 1-2, 2008, pp. 47-57, Springer Netherlands.
- [STE 89] STEPHENSON R., ROUCH K., ARORA R.  
Modelling of rotors with axisymmetric solid harmonic elements. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 131, n° 3, 1989, pp. 431-443.

- [STE 93] STEPHENSON R. W., ROUCH K. E.  
Modeling rotating shafts using axisymmetric solid finite elements with matrix reduction. *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 115, n° 4, 1993, pp. 484-489.
- [SUB 89] SUBBARAJ K., DOKAINISH M.  
A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics-II. Implicit methods. *Computers & Structures*, vol. 32, n° 6, 1989, pp. 1387-1401.
- [SUN 97] SUNDARARAJAN P., NOAH S.  
Dynamics of forced nonlinear systems using shooting/arc-length continuation method-Application to rotor systems. *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 119, 1997, pp. 9-19.
- [SUN 98] SUNDARARAJAN P., NOAH S.  
An algorithm for response and stability of large order non-linear systems-Application to rotor systems. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 214, n° 4, 1998, pp. 695-723.
- [TAK 79] TAKAHASHI K.  
A method of stability analysis for non-linear vibration of beams. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 67, n° 1, 1979, pp. 43-54.
- [TIW 00] TIWARI M., GUPTA K., PRAKASH O.  
Effect of radial internal clearance of a ball bearing on the dynamics of a balanced horizontal rotor. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 238, n° 5, 2000, pp. 723-756.
- [VAK 09] VAKAKIS A., GENDELMAN O., BERGMAN L., MCFARLAND D., KERSCHEN G., LEE Y.  
*Nonlinear Targeted Energy Transfer in Mechanical and Structural Systems*, vol. 156 *Solid Mechanics and Its Applications*. Springer, Dordrecht, 2009.
- [VES 90] VEST T. A., DARLOW M. S.  
A modified conical beam element based on finite element analysis : experimental correlations. *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 112, n° 3, 1990, pp. 350-354.
- [VIL 05] VILLA C., SINOU J.-J., THOUVEREZ F.  
The invariant manifold approach applied to nonlinear dynamics of a rotor-bearing system. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, vol. 24, n° 4, 2005, pp. 676-689, Elsevier.
- [VIL 08] VILLA C., SINOU J.-J., THOUVEREZ F.  
Stability and vibration analysis of a complex flexible rotor bearing system. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 13, n° 4, 2008, pp. 804-821.
- [VON 01] VON GROLL G., EWINS D. J.  
The harmonic balance method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 241, n° 2, 2001, pp. 223-233.
- [WAG 10] WAGNER M. B., YOUNAN A., ALLAIRE P., COGILL R.  
Model reduction methods for rotor dynamic analysis : A survey and review. *International Journal of Rotating Machinery*, vol. 2010, 2010, pp. 273716-1 - 273716-17.

- [WIG 03] WIGGINS S.  
*Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, vol. 2. Springer Science & Business Media, 2003.
- [WIL 65] WILSON E. L.  
Structural analysis of axisymmetric solids. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, vol. 3, n° 12, 1965, pp. 2269-2274.
- [WRI 90] WRIGGERS P., SIMO J. C.  
A general procedure for the direct computation of turning and bifurcation points. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 30, 1990, pp. 155-176.
- [YAM 01] YAMAMOTO T., ISHIDA Y.  
*Linear and Nonlinear Rotordynamics : A Modern Treatment with Applications*. A Wiley-Interscience publication Wiley, 2001.
- [ZHA 94] ZHAO J. Y., LINNETT I. W., MCLEAN L. J.  
Subharmonic and quasi-periodic motions of an eccentric squeeze film damper-mounted rigid rotor. *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 116, n° 3, 1994, pp. 357-363.
- [ZHA 05] ZHAO S., XU H., MENG G., ZHU J.  
Stability and response analysis of symmetrical single-disk flexible rotor-bearing system. *Tribology International*, vol. 38, n° 8, 2005, pp. 749-756.
- [ZHA 06] ZHANG W., MENG G.  
Stability, bifurcation and chaos of a high-speed rub-impact rotor system in {MEMS}. *Sensors and Actuators A : Physical*, vol. 127, n° 1, 2006, pp. 163-178.
- [ZHE 99] ZHENG T., HASEBE N.  
An efficient analysis of high-order dynamical system with local nonlinearity. *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 121, n° 3, 1999, pp. 408-416.
- [ZHO 15] ZHOU B., THOUVEREZ F., LENOIR D.  
A variable-coefficient harmonic balance method for the prediction of quasi-periodic response in nonlinear systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 64-65, 2015, pp. 233 - 244.
- [ZHU 02] ZHU C., ROBB D., EWINS D.  
Analysis of the multiple-solution response of a flexible rotor supported on non-linear squeeze film dampers. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 252, n° 3, 2002, pp. 389-408.
- [ZIE 00] ZIENKIEWICZ O., TAYLOR R. L.  
*The Finite Element Method : The basis*, vol. 1. Butterworth-Heinemann, 5th edition, 2000.





FOLIO ADMINISTRATIF  
THÈSE DE L'UNIVERSITE DE LYON OPEREE AU SEIN DE L'INSA LYON

NOM : XIE

DATE de SOUTENANCE : 03/03/2016

Prénoms : Lihan

TITRE : Suivi numérique des bifurcations pour l'analyse paramétrique de la dynamique non-linéaire des rotors

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2016LYSEI018

École doctorale : MEGA

Spécialité : Mécanique - Génie Mécanique - Génie Civil

**RÉSUMÉ :**

Au cœur des moyens de transport, de transformation d'énergie, et de biens d'équipements, les machines tournantes peuvent avoir des comportements dynamiques complexes dus à de multiples sources de non linéarités liées aux paliers hydrodynamiques, à la présence de fissures, aux touches rotor-stator, ... Des phénomènes comme les décalages fréquentiels et donc de vitesses critiques, les cycles d'hystérésis avec sauts d'amplitudes, le changement brutal du contenu fréquentiel des réponses, sont des expressions de ces comportements. Résoudre les équations du mouvement induites par des modélisations avec des éléments finis de type poutre ou volumique, pour calculer les réponses à des sollicitations diverses (comme le balourd ou le poids propre), est réalisable avec des méthodes d'intégration pas à pas dans le temps mais au prix de temps de calcul prohibitifs. Cela devient particulièrement préjudiciable au stade du pré-dimensionnement où il est nécessaire de réaliser rapidement des études paramétriques.

Aussi une alternative intéressante est de mettre en œuvre une méthode numérique, à la fois générale et efficace pour analyser la réponse non linéaire des rotors en régime stationnaire. La démarche proposée combine, dans un premier temps, la méthode de la balance harmonique (HBM) et la technique de bascule Temps-Fréquence (AFT) afin d'obtenir rapidement dans le domaine fréquentiel les réponses périodiques des rotors à grand nombre de degrés de liberté apportés par les éléments finis volumiques. Puis, l'association à la méthode de continuation par pseudo-longueur d'arc aboutit à établir continûment l'ensemble des solutions d'équilibre dynamique sur la plage de vitesse de rotation. Enfin la stabilité dynamique locale de la solution périodique est analysée grâce à des indicateurs de bifurcation basés sur l'évolution des exposants de Floquet. Ainsi sont détectées les bifurcations de branches de solutions périodiques de type point limite, point de branchement et notamment Neimark-Sacker. Leur localisation est déterminée précisément en résolvant un système augmenté constitué de l'équation du mouvement et d'une équation supplémentaire caractérisant le type de bifurcation considéré. En déclarant un paramètre du système (coefficient de frottement, jeu rotor/stator, amplitude de l'excitation,...) comme nouvelle variable, l'utilisation de la technique de continuation conjointement avec le système augmenté détermine directement le cheminement des bifurcations en fonction de ce paramètre sur la nappe des réponses non linéaires. Les suivis de bifurcations délimitent les zones de fonctionnement spécifiques, extraient efficacement l'essentiel du comportement dynamique et offrent ainsi une nouvelle approche pour dimensionner de façon efficace les systèmes notamment en rotation. Nombre des développements réalisés sont implantés dans le code de calcul Cast3M.

La thèse a été réalisée au Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures, UMR CNRS 5259, INSA Lyon, Institut Carnot Ingénierie@Lyon et au laboratoire d'Etudes de Dynamique (DEN/DANS/DM2S/SEMT/DYN) du CEA Saclay.

**MOTS-CLÉS :** suivi des bifurcations, Neimark-Sacker, réponse non linéaire des rotors, dynamique des machines tournantes, modélisation avec EF volumiques, contact rotor-stator, méthode de la balance harmonique, méthode continuation, méthode de Floquet, matrice de monodromie.

Laboratoire(s) de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures  
UMR CNRS 5259 - INSA de Lyon  
18-20 rue des Sciences  
69621 Villeurbanne Cedex FRANCE

Directeur de thèse : M. Régis DUFOUR

Président du jury : M. David DUREISSEIX

Composition du jury : D. Dureisseix	G. Kerschen
M. Legrand	R. Dufour
S. Baguet	B. Prabel