



N°d'ordre NNT : 2016LYSEI040

THESE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LYON
opérée au sein de
INSA de Lyon

Ecole Doctorale MEGA ED162
Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique

Spécialité de doctorat : Génie Mécanique

Soutenue publiquement le 02/05/2016, par :
Matthieu Chapron
Ingénieur INSA de Lyon

**Comportement dynamique de train
planétaire / épicycloïdal avec erreurs
d'assemblage, écarts de forme et
structures déformables**
- Optimisation des corrections de dentures -

Devant le jury composé de :

Rémond, Didier Pr. INSA de Lyon

Président

Kahraman, Ahmet Pr. The Ohio State University
Viadero Rueda, Fernando Pr. Universidad de Cantabria
Becquerelle, Samuel Responsable R&T Hispano-Suiza

Rapporteur
Rapporteur
Examineur

Velex, Philippe Pr. INSA de Lyon

Directeur de thèse

Département FEDORA – INSA Lyon - Ecoles Doctorales – Quinquennal 2016-2020

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
CHIMIE	CHIMIE DE LYON http://www.edchimie-lyon.fr Sec : Renée EL MELHEM Bat Blaise Pascal 3 ^e etage secretariat@edchimie-lyon.fr Insa : R. GOURDON	M. Stéphane DANIELE Institut de Recherches sur la Catalyse et l'Environnement de Lyon IRCELYON-UMR 5256 Équipe CDFA 2 avenue Albert Einstein 69626 Villeurbanne cedex directeur@edchimie-lyon.fr
E.E.A.	ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE http://edeea.ec-lyon.fr Sec : M.C. HAVGOUDOUKIAN Ecole-Doctorale.eea@ec-lyon.fr	M. Gérard SCORLETTI Ecole Centrale de Lyon 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 60.97 Fax : 04 78 43 37 17 Gerard.scorletti@ec-lyon.fr
E2M2	EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION http://e2m2.universite-lyon.fr Sec : Safia AIT CHALAL Bat Darwin - UCB Lyon 1 04.72.43.28.91 Insa : H. CHARLES Safia_ait-chalal@univ-lyon1.fr	Mme Gudrun BORNETTE CNRS UMR 5023 LEHNA Université Claude Bernard Lyon 1 Bât Forel 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 06.07.53.89.13 e2m2@univ-lyon1.fr
EDISS	INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE http://www.ediss-lyon.fr Sec : Safia AIT CHALAL Hôpital Louis Pradel - Bron 04 72 68 49 09 Insa : M. LAGARDE Safia_ait-chalal@univ-lyon1.fr	Mme Emmanuelle CANET-SOULAS INSERM U1060, CarMeN lab, Univ. Lyon 1 Bâtiment IMBL 11 avenue Jean Capelle INSA de Lyon 69621 Villeurbanne Tél : 04.72.68.49.09 Fax :04 72 68 49 16 Emmanuelle.canet@univ-lyon1.fr
INFOMATHS	INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUES http://infomaths.univ-lyon1.fr Sec :Renée EL MELHEM Bat Blaise Pascal 3 ^e etage infomaths@univ-lyon1.fr	Mme Sylvie CALABRETTO LIRIS – INSA de Lyon Bat Blaise Pascal 7 avenue Jean Capelle 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 43. 80. 46 Fax 04 72 43 16 87 Sylvie.calabretto@insa-lyon.fr
Matériaux	MATERIAUX DE LYON http://ed34.universite-lyon.fr Sec : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Saint Exupéry Ed.materiaux@insa-lyon.fr	M. Jean-Yves BUFFIERE INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Saint Exupéry 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 71.70 Fax 04 72 43 85 28 Ed.materiaux@insa-lyon.fr
MEGA	MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE http://mega.universite-lyon.fr Sec : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Saint Exupéry mega@insa-lyon.fr	M. Philippe BOISSE INSA de Lyon Laboratoire LAMCOS Bâtiment Jacquard 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72 .43.71.70 Fax : 04 72 43 72 37 Philippe.boisse@insa-lyon.fr
ScSo	ScSo* http://recherche.univ-lyon2.fr/scso/ Sec : Viviane POLSINELLI Brigitte DUBOIS Insa : J.Y. TOUSSAINT viviane.polsinelli@univ-lyon2.fr	Mme Isabelle VON BUELTZINGLOEWEN Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.77.23.86 Fax : 04.37.28.04.48

*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie

Avant-propos

Ce travail de recherche n'aurait pu être mené à bien sans le concours de la société Hispano-Suiza du groupe Safran et le Laboratoire de Mécanique des contacts et des Structures (LaMCoS, UMR CNRS 5259) de l'INSA de Lyon, et le soutien de l'Agence National pour la Recherche et la Technologie via une Convention Industrielle de Formation par la Recherche (ANRT, # 2012/1219).

A cette occasion je suis reconnaissant envers David Dureisseix, directeur du laboratoire, pour m'avoir accueilli au sein son unité de recherche.

Je souhaite par là même témoigner ma vive gratitude à Samuel Becquerelle, responsable R&T chez Hispano-Suiza, pour m'avoir offert l'opportunité de réaliser ce projet de recherche, pour son soutien et sa compréhension.

Je tiens tout particulièrement à remercier Philippe Vex, professeur à l'INSA de Lyon, pour la confiance qu'il m'a accordée, pour avoir partagé son expérience, sa rigueur et parfois un peu de son indulgence. C'est avec un réel honneur et plaisir que j'ai accompli ces travaux de recherche dont il a été le maître à penser, et rien n'aurait été possible sans sa présence constante à mes côtés.

Je remercie ???, professeur à l'INSA de Lyon, pour avoir pris le temps d'examiner ce manuscrit et m'avoir fait l'honneur de présider le jury.

Mes remerciements s'adressent également à Ahmet Kahraman, professeur à The Ohio State University, et Fernando Viadero Rueda, professeur à l'Universidad de Cantabria, pour avoir accepté de rapporter ces travaux de thèse, leurs relectures attentives du manuscrit et leurs appréciations argumentées. C'est pour moi l'opportunité d'exprimer particulièrement toute ma gratitude à Ahmet Kahraman pour son accueil chaleureux et pour m'avoir initié, il y a quelques années de cela, aux problématiques liées à la transmission de puissance.

Je remercie très vivement Jérôme Bruyère, maître de conférences à l'INSA de Lyon, pour ses conseils lors de nos nombreuses discussions et sa constante disponibilité.

Je tiens à saluer ici toutes les personnes ayant agrémenté ces trois ans de moments agréables, tant au laboratoire qu'en dehors: Romain, Fabrice, Jérôme, Pierre, Arnaud, Marion et Grégoire.

A mon successeur Stéphane, je lui souhaite de prendre autant de plaisir que moi à réaliser sa thèse de doctorat et de réussir les challenges qui lui sont aujourd'hui proposés.

A mes compagnons de labeur du 13 avenue Viviani, je souhaiterais leur exprimer ma profonde reconnaissance pour les moments de détente qu'ils ont su créer autour du bac de blanc.

Un clin d'œil amical à mes beta-lectrices, Annick et Nina, pour le chantier qu'elles ont débroussaillé et su embellir.

Mes sincères remerciements à mon entraîneur et ami Laurent Maertens, pour sa compréhension et son soutien journalier, sans quoi la poursuite de ma double carrière n'aurait pu être possible.

A titre plus personnel, je tiens à exprimer à ma famille et plus particulièrement à Pénélope toute ma chaleureuse reconnaissance pour leur accompagnement, leur présence à mes côtés, leur compréhension, mais surtout leur soutien indéfectible qui a fait de cette aventure une réussite.

Résumé

Ces travaux de thèse sont le fruit de la collaboration entre la société Hispano-Suiza et le Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures de l'INSA de Lyon. Dans le cadre du développement de nouveaux systèmes de propulsion, l'implantation d'un train planétaire / épicycloïdal entre la turbine et l'hélice semble être une voie intéressante pour atteindre les performances souhaitées en terme de rendement. L'augmentation des puissances transmises et la réduction des masses embarquées dans les applications aéronautiques tendent à rendre les composants de plus en plus déformables. Lors de ces travaux de recherche, un modèle dynamique en régime permanent de trains planétaires a été développé, incorporant les effets des erreurs de montage, des écarts de forme et des sous-ensembles flexibles. Une approche à paramètres concentrés est utilisée, intégrant notamment des éléments spécifiques d'engrenage à corps rigides et des éléments d'arbre. Pour les éléments d'engrenage, le formalisme des fines tranches juxtaposées est employé pour représenter les dentures. Une raideur élémentaire et un écart normal sont attribués à chacune des tranches et sont réactualisés à chaque pas de temps en fonction de la cinématique des composants et des déviations du profil des dentures. Les déformations de la couronne sont introduites à l'aide d'un anneau discret composé de poutres droites couplé aux éléments d'engrenage. Les dentures double-hélice sont modélisées par deux éléments d'engrenage d'angles d'hélice opposés liés par une poutre de Timoshenko. Dans ce cas, les hélices en vis-à-vis peuvent être décalées afin de réduire les excitations. Finalement, les équations du mouvement sont résolues pas à pas dans le temps par un schéma de Newmark combiné à un algorithme de contact normal, permettant de prendre en compte les pertes de contact partielles ou complètes.

Dans un premier temps, un certain nombre d'éléments de validation est présenté et comparé à des résultats tirés de la littérature. Afin d'asseoir notre modélisation, l'influence des erreurs de positionnement des satellites, du décalage des hélices, des erreurs de pas et des déformations de la couronne sur les distributions de charge est abordée pour différentes configurations de train planétaire.

Dans un deuxième temps, l'optimisation des corrections de denture dans le but de réduire les vibrations est investiguée. Les corrections de profil sont introduites sur les engrènements de façon (i) linéaire et symétrique en tête de dents et (ii) identique pour tous les satellites mais (iii) différente selon le flanc actif. Dans ce contexte, les corrections sont tout d'abord optimisées vis-à-vis des efforts dynamiques d'engrènement à l'aide d'un algorithme génétique. Puis, leurs performances sont analysées en fonction du couple transmis et de la vitesse de rotation pour des dentures simple et double-hélice avec une couronne rigide ou flexible. Par la suite, un critère « équivalent » est dérivé, vérifié et utilisé pour étudier l'influence du décalage des hélices et d'une correction longitudinale parabolique sur ces corrections de profil optimales. Enfin, une sous-structure du porte-couronne est introduite et son impact sur les distributions de charge est exploré.

Abstract

This research work was conducted at the Contact and Structural Mechanics Laboratory (LaMCoS) of INSA Lyon (UMR CNRS 5259) in partnership with Hispano-Suiza (SAFRAN group). In the context of new turbo jet engine developments, a promising technological solution consists in inserting a planetary / epicyclic gear train between the turbine and the propeller which, in theory, can improve the system performance, especially in terms of efficiency. Increasing power densities and mass reduction constraints lead to more compliant structures which need to be analyzed from a dynamic viewpoint. The present work deals therefore with the dynamic modelling of planetary / epicyclic gears and the effects of assembly errors, tooth shape deviations and deformable structural components. A lumped parameter approach has been favored which combines rigid-body gear elements, beam and lumped parameters elements. A thin-slice model has been used to simulate the time-varying elastic properties of gear teeth with an elemental stiffness and a normal deviation functions attributed to every discrete cell on the contact lines (thin slice) and updated at each time step with respect to the meshing course and the instant positions of the teeth. Ring-gear deformations are introduced via a model of elastic annulus discretized into straight beam elements and connected to the gear elements. Double-helical gears are simulated by linking two gear elements of opposite hands by Timoshenko beam elements. The possibility of helix stagger is implemented by shifting the helix positions in the base plane. Finally, the equations of motion are solved step by step in time by combining a Newmark scheme and a normal contact algorithm which makes it possible to account for partial and total instant contact losses.

A number of comparisons with benchmark results from the literature are presented which prove that the proposed theoretical and numerical developments are sound and can actually be used to simulate the influence of planet position errors, helix stagger, pitch errors and ring-gear deformations.

The optimization of tooth shape modifications, i.e. profile and lead modifications, re dynamic mesh forces in planetary gears is tackled. Using a genetic algorithm, optimum profile modifications are derived and compared with some analytical results in the literature. Their performance over a range of loads and speeds is assessed for helical and double helical gears with rigid and flexible ring-gears. A quasi-static “equivalent” criterion based on local transmission errors is presented and commented upon. Having proved its relevance, a number of results are derived concerning the influence of helix stagger and lead crowning superimposed on optimum profile modifications. Finally, a deformable ring-gear support is introduced using a sub-structuring technique and its contribution in terms of tooth load distribution is examined.

Table des matières

INTRODUCTION GENERALE	21
CHAPITRE 1 DYNAMIQUE DES TRAINS PLANETAIRES : APPROCHE BIBLIOGRAPHIQUE 25	
1.1 Les sources d'excitation dans les transmissions par engrenages.....	29
1.1.1 Raideur d'engrènement	29
1.1.2 Erreurs d'assemblage.....	35
1.1.3 Ecart de forme	37
1.1.4 Erreur de transmission.....	39
1.2 Modèles de train planétaire.....	40
1.2.1 Modèle à paramètres concentrés	40
1.2.2 Modèle éléments-finis.....	42
1.2.3 Modèle hybride.....	43
1.3 Méthodes de résolution.....	44
1.4 Essais expérimentaux	46
1.5 Analyse modale	47
1.6 Réponse dynamique.....	48
1.6.1 Déphasage des engrènements	48
1.6.2 Erreurs de fabrication.....	49
1.6.3 Structure flexible	50
1.6.4 Corrections de profil.....	51
Objectifs de la thèse	52
CHAPITRE 2 MODELE DYNAMIQUE DE TRAIN PLANETAIRE / EPICYCLOÏDAL AVEC STRUCTURES DEFORMABLES.....	53
2.1 Définition des engrènements	55
2.2 Etat de référence	58
2.2.1 Déphasage des engrènements	58
2.2.2 Ecart normal à la denture	61
2.2.3 Séparations initiales.....	66
2.2.4 Cinématique de corps rigides	69
2.3 Etat déformé	71
2.3.1 Eléments d'engrenages à corps rigides	71
2.3.2 Elément de palier	79
2.3.3 Structures déformables.....	82
2.3.4 Equations du mouvement et leurs résolutions.....	87
Conclusion.....	89
CHAPITRE 3 ELEMENTS DE VALIDATION.....	91
3.1 Géométrie de trains planétaires	93
3.2 Influence d'erreurs de position des satellites.....	94
3.3 Influence du décalage des hélices	97
3.4 Influence des erreurs de pas sur le solaire	99

3.5 Influence des déformations de la couronne.....	101
3.5.1 Déformée statique.....	102
3.5.2 Analyse modale.....	103
3.5.3 Réponse dynamique.....	110
Conclusion.....	111
CHAPITRE 4 OPTIMISATION DES CORRECTIONS DE DENTURES	113
4.1 Définition des corrections de profil.....	115
4.2 Géométrie de trains planétaires	117
4.3 Optimisation des corrections de profil sur le système complet.....	118
4.3.1 Algorithme génétique	118
4.3.2 Optimisation vis-à-vis des efforts dynamiques	120
4.3.3 Efforts dynamiques en présence des corrections optimisées.....	123
4.3.4 Influence de la variation du couple d'entrée.....	128
4.3.5 Concept d'erreur de transmission locale et critère d'optimisation quasi-statique « équivalent » 137	
4.3.6 Optimisation vis-à-vis des variations des erreurs de transmission locales.....	138
4.3.7 Cas d'une denture droite	140
4.4 Performances des corrections définies par les Courbes Maitresses	142
4.5 Influence du bombé sur l'optimisation des corrections de profil.....	145
4.5.1 Formule analytique des corrections optimales pour des engrenages hélicoïdaux.....	145
4.5.2 Optimisation génétique vis-à-vis des erreurs de transmission locales	149
4.5.3 Efforts dynamiques avec les corrections optimisées.....	150
4.6 Sous-structuration du porte-couronne	151
4.6.1 Test de la sous-structure	151
4.6.2 Efforts d'engrènement	154
Conclusion.....	158
CONCLUSION GENERALE.....	161
RÉFÉRENCES.....	165
ANNEXES.....	175
A - Élément d'arbre	177
B - Schéma de Newmark.....	179
Actes de conférence.....	181
Publications.....	181

Liste des figures

Figure 1-1. Représentation schématique d'un train planétaire.....	27
Figure 1-2. Système géocentrique d'Hipparque.....	28
Figure 1-3. Comparaison de la longueur de contact calculée numériquement et avec la formule analytique ($\mathcal{E}_\alpha = 1.691$ selon [6]).....	29
Figure 1-4. Courbes iso-valeur de l'amplitude normalisée de l'harmonique 1 de la longueur de contact en fonction du rapport de conduite et du rapport de recouvrement selon [6].....	30
Figure 1-5. Comparaison de la raideur de contact calculée avec un modèle éléments-finis et la formulation analytique selon [7].....	30
Figure 1-6. Paramètres géométriques pour le calcul de la raideur de flexion selon [11].....	32
Figure 1-7. Déformée d'une surface (a) sans et (b) avec effets convectifs – [27].....	35
Figure 1-8. Fondation élastique de Pastermark – [27].....	35
Figure 1-9. Schématisation de l'erreur de positionnement.....	36
Figure 1-10. Schématisation de l'erreur d'excentricité.....	36
Figure 1-11. Schématisation de l'erreur d'alignement.....	37
Figure 1-12. Définition de l'erreur de pas selon [28].....	37
Figure 1-13. Schématisation de l'erreur d'angle d'hélice.....	38
Figure 1-14. Correction de profil linéaire en tête de dent (denture droite).....	38
Figure 1-15. Correction longitudinale de type bombé (denture droite).....	39
Figure 1-16. Définition angulaire de l'erreur de transmission tirée de [33].....	40
Figure 1-17. Modèle dynamique à paramètres concentrés selon [CUN74].....	41
Figure 1-18. Modèle locale : discrétisation de la dent en fines tranches (denture hélicoïdale).....	42
Figure 1-19. Déformée du porte-satellite sous cahrgement (a) tangentiel et (b) radial selon [54].....	43
Figure 1-20. Maillage éléments-finis d'un train planétaire selon [61].....	44
Figure 1-21. Stratégie de résolution des équations du mouvement selon [67].....	45
Figure 1-22. Coefficient dynamique des engrènements solaire / satellites au niveau du pied, du primitif et en tête de dent selon [75].....	46
Figure 1-23. (a) Position de l'accéléromètre et (b) analyse spectrale d'un signal d'accéléromètre selon [87].....	47
Figure 1-24. Représentation schématique d'un mode « rotational-axial » selon [93].....	48
Figure 1-25. Réponses des efforts dynamiques pour deux différents cas de déphasage (m) selon [79].....	49
Figure 1-26. Coefficients dynamiques des engrènements intérieurs pour deux épaisseurs de couronne différentes selon [80].....	50
Figure 1-27. Influence des corrections de profil sur les coefficients dynamiques des engrènements (a) extérieurs et (b) intérieurs selon [67].....	51
Figure 2-1. Définition des engrènements et des repères pour un train planétaire.....	57
Figure 2-2. Définition de la fenêtre d'engrènement pour les engrènements extérieurs.....	57
Figure 2-3. Définition de la fenêtre d'engrènement pour les engrènements intérieurs.....	58
Figure 2-4. Définition du déphasage entre les engrènements.....	60
Figure 2-5. Raideurs d'engrènement (a) solaire / satellite j et (b) satellite j / couronne.....	61
Figure 2-6. (a) Flanc actif de la denture discrétisé en cellules et (b) écart normal au profil.....	61
Figure 2-7. Modélisation des erreurs d'assemblage des composants.....	62
Figure 2-8. Diagramme MAAG de correction de profil linéaire non symétrique.....	66
Figure 2-9. Schématisation de l'écart normal induit par un bombé symétrique le long de la ligne de contact.....	66
Figure 2-10. Définition de l'élément d'engrenage (denture extérieure).....	72
Figure 2-11. Représentation plane de la position instantanée du centre de gravité des composants centraux.....	75
Figure 2-12. Représentation plane de la position instantanée du centre de gravité d'un satellite.....	77
Figure 2-13. Représentation plane de l'élément châssis porte-satellite.....	80
Figure 2-14. Couronne flexible discrétisée à l'aide d'éléments de poutre.....	83
Figure 2-15. Point de contact potentiel vis-à-vis des nœuds des éléments de poutre.....	83
Figure 2-16. Définition des nœuds maîtres et internes d'un maillage éléments-finis réglé.....	86
Figure 2-17. Définition des modes statiques et dynamiques d'une poutre libre-libre.....	86
Figure 2-18. Algorithme de résolution des équations de mouvement.....	88
Figure 3-1. Facteur de partage de charge en fonction (a) de l'amplitude de l'erreur ey_1 (couple sur le solaire de 1000 Nm) et (b) du couple sur le solaire ($ey_1 = -70\mu\text{m}$).....	94
Figure 3-2. (a) Coefficient dynamique et (b) facteur d'amplification des engrènements solaire / satellites en fonction de la vitesse de rotation du solaire.....	95
Figure 3-3. Facteur d'amplification pour les engrènements extérieurs pour une distribution d'erreurs (a) radiales, (b) tangentielles et (c) radiales et tangentielles.....	96

Figure 3-4. Coefficient dynamique sur les hélices de (a) gauche et de (b) droite des engrènements extérieurs.....	97
Figure 3-5. Distribution d'erreur de pas cumulée.....	99
Figure 3-6. Coefficient dynamique sur les hélices de (a) gauche et de (b) droite des engrènements extérieurs.....	100
Figure 3-7. Déplacements axiaux des hélices de (a) gauche et de (b) droite des engrènements extérieurs.....	100
Figure 3-8. Analyse spectrale des déplacements axiaux des hélices de (a) gauche et de (b) droite des engrènements extérieurs autour de la première harmonique de la fréquence d'engrènement.....	100
Figure 3-9. Conditions aux limites d'une couronne flexible.....	101
Figure 3-10. Schématisation de la connexion élastique entre les couronnes déformables d'un train planétaire double-hélice.....	101
Figure 3-11. Déformée statique (a) dans le plan médian et (b) axiale pour un train planétaire simple-hélice.....	102
Figure 3-12. Déformée statique (a) dans le plan médian et (b) axiale pour un train planétaire double-hélice – (c) étant un zoom de (b) autour de l'hélice gauche.....	103
Figure 3-13. Déformées modales de la couronne pour les modes (a) #5 (T , 1081 Hz), (b) #6 (R , 1268 Hz) et (c) #10 (PR , 2326 Hz).....	107
Figure 3-14. Coefficient dynamique des engrènements (a) extérieurs et (b) intérieurs – simple hélice.....	110
Figure 3-15. Coefficient dynamique des engrènements (a) extérieurs et (b) intérieurs – double- hélice.....	110
Figure 4-1. Représentation schématique d'une Courbe Maitresse.....	116
Figure 4-2. Définition des corrections de profil linéaires symétriques en tête différentes selon le flanc actif sur une dent d'un satellite.....	116
Figure 4-3. Corrections optimales pour un train planétaire simple et double-hélice – couronne rigide.....	121
Figure 4-4. Evolution de la raideur d'engrènement par unité de longueur en fonction du temps adimensionné par la période d'engrènement T_m (la valeur moyenne a été soustraite pour pouvoir comparer les engrènements extérieurs et intérieurs).....	121
Figure 4-5. Corrections optimales pour un train planétaire simple et double-hélice – couronne flexible.....	122
Figure 4-6. Coefficient dynamique des engrènements (a) extérieurs et (b) intérieurs avec corrections optimales – simple hélice et couronne rigide.....	124
Figure 4-7. Courbes enveloppes du coefficient dynamique des engrènements (a) extérieurs et (b) intérieurs pour toutes les combinaisons de corrections optimales – simple hélice et couronne rigide.....	124
Figure 4-8. Coefficient dynamique des engrènements (a) extérieurs et (b) intérieurs avec corrections optimales – double-hélice et couronne rigide.....	125
Figure 4-9. Courbes enveloppes du coefficient dynamique des engrènements (a) extérieurs et (b) intérieurs pour toutes les combinaisons de corrections optimales – double-hélice et couronne rigide.....	125
Figure 4-10. Coefficient dynamique des engrènements (a) extérieurs et (b) intérieurs avec corrections optimales – simple hélice et couronne flexible.....	126
Figure 4-11. Courbes enveloppes du coefficient dynamique des engrènements (a) extérieurs et (b) intérieurs pour toutes les combinaisons de corrections optimales – simple hélice et couronne flexible.....	126
Figure 4-12. Coefficient dynamique des engrènements (a) extérieurs et (b) intérieurs avec corrections optimales – double-hélice et couronne flexible.....	127
Figure 4-13. Courbes enveloppes du coefficient dynamique des engrènements (a) extérieurs et (b) intérieurs pour toutes les combinaisons de corrections optimales – double-hélice et couronne flexible.....	127
Figure 4-14. Coefficient dynamique sur les engrènements extérieurs pour des corrections (a) longues, (b) moyennes et (c) courtes – simple hélice et couronne rigide.....	129
Figure 4-15. Coefficient dynamique sur les engrènements intérieurs pour des corrections (a) longues, (b) moyennes et (c) courtes – simple hélice et couronne rigide.....	130
Figure 4-16. Coefficient dynamique sur les engrènements extérieurs pour des corrections (a) longues, (b) moyennes et (c) courtes – double-hélice et couronne rigide.....	131
Figure 4-17. Coefficient dynamique sur les engrènements intérieurs pour des corrections (a) longues, (b) moyennes et (c) courtes – double-hélice et couronne rigide.....	132
Figure 4-18. Coefficient dynamique sur les engrènements extérieurs pour des corrections (a) longues, (b) moyennes et (c) courtes – simple hélice et couronne flexible.....	133
Figure 4-19. Coefficient dynamique sur les engrènements intérieurs pour des corrections (a) longues, (b) moyennes et (c) courtes – simple hélice et couronne flexible.....	134
Figure 4-20. Coefficient dynamique sur les engrènements extérieurs pour des corrections (a) longues, (b) moyennes et (c) courtes – double-hélice et couronne flexible.....	135
Figure 4-21. Coefficient dynamique sur les engrènements intérieurs pour des corrections (a) longues, (b) moyennes et (c) courtes – double-hélice et couronne flexible.....	136
Figure 4-22. Corrections optimales vis-à-vis des erreurs de transmission locales – simple et double hélice à couronne rigide.....	139
Figure 4-23. Influence du décalage des hélices sur les corrections optimales – couronne rigide.....	139
Figure 4-24. Corrections optimales pour une denture droite – couronne rigide.....	141
Figure 4-25. Erreurs de transmission sans charge pour les engrènements extérieurs.....	141
Figure 4-26. Erreurs de transmission sans charge pour les engrènements intérieurs.....	141

Figure 4-27. Courbes iso-valeur de MAX(R) pour des trains planétaires (a) simple et (b) double-hélice non décalé – couronne rigide	143
Figure 4-28. Courbes iso-valeur de MEAN(R) pour des trains planétaires (a) simple et (b) double-hélice non décalé – couronne rigide	143
Figure 4-29. Courbes iso-valeur de RMS(TEs) pour des trains planétaires (a) simple et (b) double-hélice non décalé – couronne rigide	143
Figure 4-30. Courbes iso-valeur de MAX(R) pour des trains planétaires double-hélice décalés de (a) 25% et (b) 50% – couronne rigide	144
Figure 4-31. Courbes iso-valeur de MEAN(R) pour des trains planétaires double-hélice décalés de (a) 25% et (b) 50% – couronne rigide	144
Figure 4-32. Courbes iso-valeur de RMS(TEs) pour des trains planétaires double-hélice décalés de (a) 25% et (b) 50% – couronne rigide	144
Figure 4-33. Courbe Maitresse superposé aux iso-courbes du RMS(TEs*) ($\mathcal{E}_\alpha = 1.2$, $\mathcal{E}_\beta = 0.64$ et $B^* = 0.19$) – [123].....	148
Figure 4-34. Courbes Maitresses en fonction du bombé ($\mathcal{E}_\alpha = 1.40$, $\mathcal{E}_\beta = 1.10$, $B^* = 0.44$) – [123]	148
Figure 4-35 ; Courbe maitresses obtenues avec une raideur linéique constante et variable, superposées aux iso-courbes du RMS(TEs*) ($\mathcal{E}_\alpha = 1.60$, $\mathcal{E}_\beta = 1.60$, $B^* = 0.53$) – [123]	148
Figure 4-36. Influence du bombé sur les corrections de profil optimales – simple hélice et couronne rigide.....	149
Figure 4-37. Courbes enveloppes du coefficient dynamique des engrènements (a) extérieurs et (b) intérieurs pour toutes les combinaisons de corrections optimales	150
Figure 4-38. Géométrie du porte-couronne	151
Figure 4-39. Déformée statique de la sous-structure. Comparaison entre les solutions analytique et éléments-finis (a) dans le plan médian et (b) vue iso.....	152
Figure 4-40. Coefficient dynamique des engrènements (a) extérieurs et (b) intérieurs avec sous-structure – simple hélice et couronne flexible ($h_r = 20$ mm)	155
Figure 4-41. Coefficient dynamique des engrènements (a) extérieurs et (b) intérieurs avec sous-structure – simple hélice et couronne flexible ($h_r = 10$ mm)	155
Figure 4-42. Distribution de charge sur les engrènements (a) extérieurs et (b) intérieurs sans corrections - une sous-structure 300 modes et $h_r = 10$ mm	156
Figure 4-43. Distribution de charge sur les engrènements (a) extérieurs et (b) intérieurs avec corrections - sous-structure 300 modes et $h_r = 10$ mm	156
Figure 4-44. Coefficient dynamique des engrènements (a) extérieurs et (b) intérieurs avec une distribution de raideurs – simple hélice et couronne flexible ($h_r = 10$ mm)	157
Figure 4-45. Coefficient dynamique des engrènements (a) extérieurs et (b) intérieurs avec la sous-structure (40 modes) – simple hélice et couronne flexible ($h_r = 10$ mm)	157
Figure 4-46. Coefficient dynamique des engrènements (a) extérieurs et (b) intérieurs avec la sous-structure (300 modes) – simple hélice et couronne flexible ($h_r = 10$ mm)	157

Liste des tableaux

Table 3-1. Géométrie des trains planétaires.....	93
Table 3-2. Pourcentages d'énergie de déformation stockée dans les engrènements et les arbres pour différents modes	98
Table 3-3. Déflexions de denture engendrées par les déplacements modaux pour un décalage des hélices de (a) 0% et (b) 50% (A, B, C et D étant des constantes).....	98
Table 3-4. Déformée modale des modes #2 et #3	104
Table 3-5. Fréquences propres et typologie des modes selon [93]	105
Table 3-6. Pourcentage d'énergies de déformation stockées dans les engrènements.....	106
Table 3-7. Déformée modale des modes #5, #6 et #10	108
Table 3-8. Fréquences propres et typologie des modes selon [94]	109
Table 3-9. Pourcentage d'énergies de déformation stockées dans les engrènements.....	109
Table 4-1. Géométrie des trains planétaires.....	117
Table 4-2. Algorithme génétique.....	119
Table 4-3. Corrections optimales pour un train planétaire simple et double-hélice – couronne rigide.....	120
Table 4-4. Corrections optimales pour un train planétaire simple et double-hélice – couronne flexible.....	122
Table 4-5. Fréquences propres de la sous-structure. Comparaison entre les solutions analytique et éléments-finis.....	153
Table 4-6. Correction surfacique	154

Nomenclature

Repères

R_j	$= (x_j \ y_j \ z_0)$ repère attaché à la ligne des centres solaire / satellite j
R_R	$= (x_R \ y_R \ z_0)$ repère physique attaché à la couronne

Engrènements

M	Point de contact potentiel
N_n	Dent spécifique de la couronne
X_{N_n} et Y_{N_n}	Coordonnées de N_n dans R_R
Δ	Déflexion de la denture
δ	Approche normale
δe	Séparation initiale
\mathbf{v}	Vecteur de structure
$x, y, z, \phi, \psi, \theta$	Degrés de liberté attachés à un nœud
r_b	Rayon de base
β_b	Angle d'hélice au rayon de base
ε_s	$= + / -1$ pour un sens de rotation du solaire anti-horaire / horaire
ε	$= + / -1$ pour un angle d'hélice sur le solaire à droite / gauche
α	Angle de pression apparent
Φ	Position angulaire des satellites
ρ et γ	Angles de projection
η_k	Coordonnée d'une cellule le long d'une ligne de contact
p	Coordonnée d'une ligne de contact dans le plan d'action
$\mathbf{I}_j^{(s)}$	Vecteur directeur de la ligne d'action
Ω_C^0	Vitesse de rotation du porte-satellites dans le repère Galiléen
θ_C	Angle instantané entre le porte-satellites et la couronne
\hat{k}	Raideur élémentaire attachée à une cellule
$e(M)$	Déviations normale à un point de contact M
A	Amplitude de la correction de profil
L	Longueur de la correction de profil

ε_α	Rapport de conduite apparent
ε_β	Rapport de recouvrement
p_{ba}	Pas de base apparent
R	$= \max(F_{\text{dyn}} / F_{\text{stat}})$ coefficient dynamique

Matrices et vecteurs

\mathbf{M}	Matrice de masse
$2\Omega_C^0 \mathbf{C}_{\text{gyro}}$	Matrice des effets gyroscopiques
\mathbf{C}	Matrice d'amortissement
\mathbf{K}_S	Matrice de rigidité des supports / des roulements
\mathbf{K}_{mesh}	Matrice de rigidité des engrènements
$\Omega_C^{0,2} \mathbf{C}_{\text{centri}}$	Matrice des effets centrifuges
\mathbf{F}_0	Vecteur des efforts extérieurs
\mathbf{F}_Ω	Vecteur d'excitation dû à l'accélération du porte-satellites
$\mathbf{F}_{\delta e}$	Vecteur d'excitation dû aux erreurs
\mathbf{x}	Vecteur des degrés de liberté

Indices

g	Indice générique pouvant faire référence au solaire (=S), à la couronne (=R), une dent de la couronne (=N _n), ou à un satellite j (=j)
k	Fait référence à une cellule dans le plan d'action
*	Fait référence à un engrènement couronne / satellite j

Exposants

\dot{A}	Dérivée par rapport au de A
\ddot{A}	Dérivée seconde par rapport au temps de A
T	Transposée d'un vecteur ou d'une matrice

Introduction générale

L'utilisation de roues dentées remonte aux machines de guerre conçues par Archimède, ingénieur à la cour du roi Hiéron, afin de défendre Syracuse de l'envahisseur romain en 214 av. J. -C.. L'utilisation des rouages se démocratise au Moyen Age pour moudre le grain en démultipliant le mouvement des ailes du moulin par exemple. Aujourd'hui largement utilisés dans le milieu industriel, les engrenages sont une des solutions technologiques parmi les plus courantes permettant de transmettre de la puissance entre composants en rotation. L'essor même des transmissions par engrenages a lieu lors de la révolution industrielle. A cette époque, l'intérêt commun se porte majoritairement sur la qualité, la fabrication et la résistance des roues.

Aujourd'hui, le développement et l'optimisation de ces mécanismes reste d'actualité et la tendance à l'utilisation de moteurs et actionneurs électriques ouvre de nouvelles perspectives et thématiques telles que le confort acoustique, le rendement, la fatigue, l'optimisation des géométries et l'encombrement. La société Hispano-suiza est actuellement un des leaders mondiaux de la transmission de puissance pour applications aéronautiques. Dans le cadre du développement de futurs propulseurs d'avion à haut rendement, les réducteurs planétaires sont une voie prometteuse pour atteindre les performances souhaitées. Il apparaît donc primordial de s'intéresser aux phénomènes dynamiques mis en jeu dans ce type de systèmes de réduction. C'est cet enjeu qui est à l'origine de la collaboration avec le Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures de l'INSA de Lyon, qui a conduit aux travaux de recherche présentés dans ce mémoire de doctorat.

Le manuscrit est organisé de la façon suivante :

Le Chapitre 1 présente les différents phénomènes impliqués dans le comportement dynamique de trains planétaires et leur modélisation.

Le Chapitre 2 présente tout d'abord les choix de modélisation afin de répondre à la problématique industrielle. Dans un deuxième temps, les équations du mouvement sont détaillées et les méthodes de résolution mises en œuvre sont présentées.

Le Chapitre 3 propose un certain nombre d'éléments de validation en s'appuyant sur des résultats numériques et / ou expérimentaux tirés de la littérature. Dans un premier temps, l'influence en régimes quasi-statique et dynamique des erreurs de positionnement de satellites sur la répartition de charge est abordée, puis l'effet du décalage des hélices dans les dentures double-hélice est traité. Ensuite, la répartition de charge entre les deux hélices en présence d'erreurs de pas est analysée, et enfin l'impact des déformations de la couronne sur la réponse modale et les efforts d'engrènement sont étudiés.

Le Chapitre 4 est consacré à l'optimisation des corrections de denture dans les trains planétaires et vise à proposer une approche systématique originale permettant de définir leur géométrie. Plusieurs lignes directrices sont ainsi proposées afin d'orienter les choix de conception dès les phases d'avant-projet. Finalement, les influences des déformations de couronne, du décalage entre hélices, du bombé et de sous-structures déformables sur les corrections de profil optimales sont analysées.

Chapitre 1

Dynamique des trains planétaires : Approche bibliographique

Le terme train planétaire / épicycloïdal décrit un agencement particulier de roues dentées, où plusieurs engrenages extérieurs (satellites) engrènent avec un pignon central commun (solaire) et un unique engrenage intérieur (couronne), comme l'illustre la Figure 1-1. Les satellites sont supportés par un composant appelé porte-satellites. Le terme différentiel peut être employé car ce mécanisme possède trois éléments de connexion, le solaire, le porte-satellite et la couronne. Les chemins de puissance les plus couramment utilisés consistent à rentrer par le solaire et sortir par la couronne (porte-satellites fixe) ou sortir par le porte-satellites (couronne fixe).

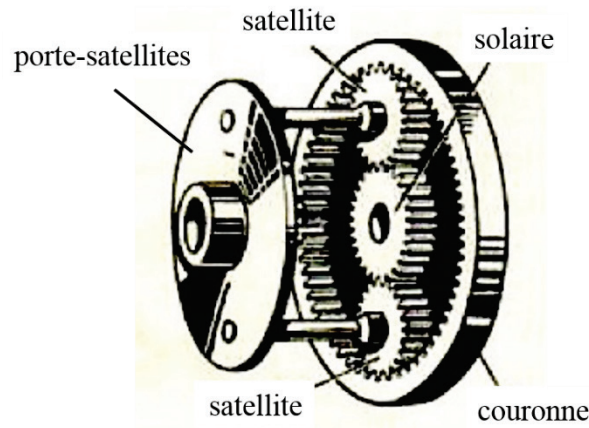


Figure 1-1. Représentation schématique d'un train planétaire

L'origine du nom train épicycloïdal provient de la trajectoire d'un point du cercle primitif d'un satellite décrivant une épicycloïde dans le repère fixe (porte-satellite tournant). L'appellation train planétaire, quant à elle vient du mouvement des composants analogues à ceux des planètes dans le système solaire. Le mécanisme de l'Anticythère est le premier cas de train épicycloïdal recensé à l'heure actuelle [1], il date du 1^{er} siècle av. J. -C. [2], et l'identité de son concepteur demeure un sujet de controverse. Ce mécanisme est un calculateur analogique, permettant de prédire et d'afficher les éclipses solaires et lunaires (heure et couleur). D'après les recherches d'Evans et al [3], la machine Anticythère permettrait également d'afficher les trajectoires des planètes connues à l'époque, Mercure, Venus, Mars, Jupiter et Saturne (la terre n'étant pas considérée comme une planète dans le système géocentrique). Le système d'Hipparque pour décrire le mouvement des planètes s'appuie sur les concepts d'épicycle et déferent (Figure 1-2) et les orbites des planètes dessinent des épitrochoïdes. Suit ensuite une période d'oubli et c'est seulement au 14^{ème} siècle que réapparaît l'utilisation d'un train épicycloïdal dans l'horloge astronomique imaginée par Richard de Wallingford (abbé de l'abbaye de Saint-Alban) [4]. A l'époque contemporaine, Mathias Buttet et ses collègues miniaturisent le mécanisme d'Anticythère et l'incorporent dans une montre bracelet dévoilée en 2011 par la manufacture Hublot.

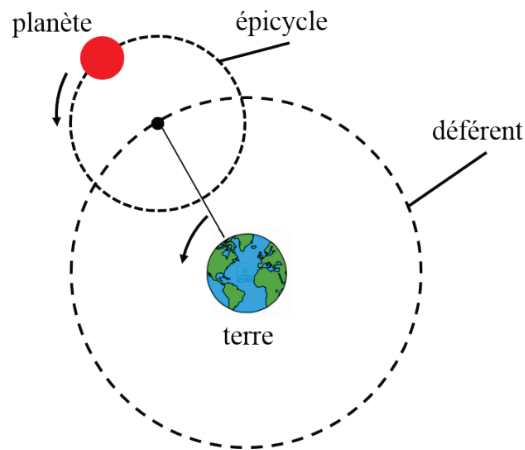


Figure 1-2. Système géocentrique d'Hipparque

Les trains planétaires ont été et sont toujours largement utilisés dans l'industrie mécanique. James Watt a utilisé cet agencement d'engrenages dans l'une de ses machines à vapeur dès 1781. Lanchester en 1895 est le premier à introduire des trains planétaires en série pour les boîtes de transmission automatiques dans les applications automobiles. Dans le domaine aéronautique, le dernier étage de réduction situé sous le rotor principal d'un hélicoptère est un train planétaire et comme déjà mentionné dans l'Introduction, un réducteur planétaire entre la turbine et l'hélice servant à la propulsion des avions (moyens courriers) semble être une piste prometteuse pour les futurs systèmes de propulsion (Pratt & Whitney). On trouve également des systèmes planétaires dans des applications plus surprenantes telles que les tondeuses à gazon (Husqvarna), les transmissions insérées dans le moyeu d'une roue de vélo (Nuseti) et les échappements tourbillon dans les montres (LVMH Swiss Manufactures SA [5]).

Les trains planétaires / épicycloïdaux présentent l'avantage de pouvoir transmettre des puissances importantes en distribuant la puissance sur plusieurs branches, réduisant ainsi la taille des pignons et donc l'encombrement. Une conséquence de la diminution de la taille des engrenages et de la charge transmise (par chacun des satellites) est une réduction des pertes de puissance. De par son architecture, les arbres d'entrée et de sorties sont coaxiaux et les efforts radiaux sont automatiquement compensés (dans le cas où les satellites sont équi-répartis). Enfin, un autre intérêt réside dans le fait que différents rapports de vitesses soient possibles en fonction de l'organe immobilisé.

Il existe, en contrepartie, un certain nombre d'inconvénients. Tout d'abord, l'équi-répartition des charges sur les satellites est théorique et dépend de la présence inévitable d'erreurs de montage. De plus, toute défaillance survenant dans ce type de système engendre des dégâts importants en raison de sa compacité. Enfin le bruit rayonné par la transmission est généralement plus important que des trains d'engrenages simple étage suite à la multiplication du nombre d'engrènements.

Les sections suivantes présentent un état de l'art des différentes modélisations de trains planétaires et des sources d'excitation qui leur sont associées.

1.1 Les sources d'excitation dans les transmissions par engrenages

1.1.1 Raideur d'engrènement

Une des sources principales d'excitation dans les transmissions mécaniques provient directement du mécanisme de transfert de rotation entre deux axes liés par des engrenages. Par conception, les longueurs de contact et par conséquent, les raideurs d'engrènement varient au cours du temps. Maatar et Velez [6] ont développé, pour des dentures cylindriques droites et hélicoïdales, une formulation analytique exprimant les variations de la longueur de contact à l'aide de séries de Fourier (sans l'influence de corrections de forme), Figure 1-3.

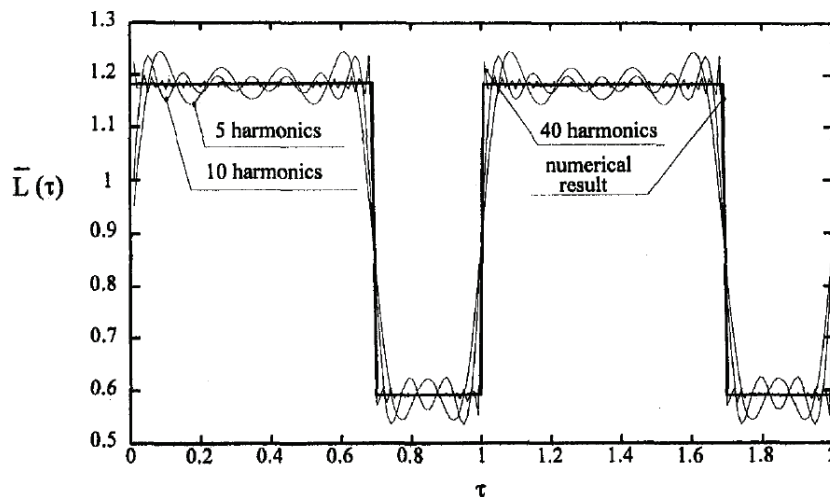


Figure 1-3. Comparaison de la longueur de contact calculée numériquement et avec la formule analytique ($\varepsilon_\alpha = 1.691$ selon [6])

En considérant un modèle simplifié de raideur d'engrènement avec une raideur d'engrènement par unité de longueur de contact constante (comme supposé dans le cadre de la norme ISO 6336 par exemple), cette étude conduit à la conclusion que l'excitation associée à la raideur variable d'engrènement n'est, en première approximation, pilotée que par deux paramètres liés à la géométrie de l'engrenage : les rapports de conduite et de recouvrement. L'analyse des amplitudes pour différents harmoniques révèle qu'avec un rapport de conduite et / ou un rapport de recouvrement entier, il est possible de réduire considérablement cette source d'excitation (variation de la longueur de contact dans ce cas), Figure 1-4.

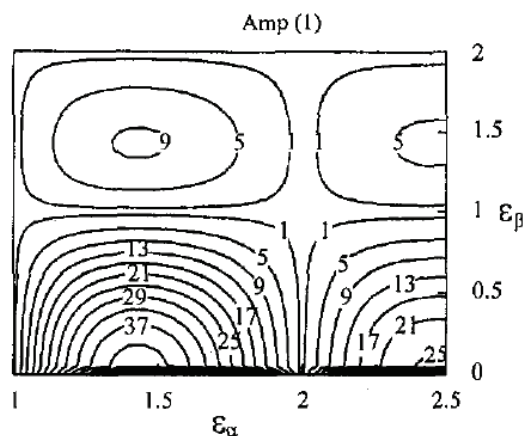


Figure 1-4. Courbes iso-valeur de l'amplitude normalisée de l'harmonique 1 de la longueur de contact en fonction du rapport de conduite et du rapport de recouvrement selon [6].

L'hypothèse d'une raideur linéique constante est bien sûr sujette à caution mais il est possible d'étendre cette approche à des modèles de raideurs plus réalistes comme démontré par Gu et al [7] qui ont pu étendre cette formulation analytique en approximant la variation de raideur linéique entre l'engagement et le déengagement par une parabole symétrique. Un exemple de raideur d'engrènement calculée avec cette formule analytique est présenté sur la Figure 1-5. Les conclusions sur l'analyse des amplitudes restent globalement inchangées à la nuance près qu'un rapport de conduite apparent égal à 2 n'élimine plus totalement les excitations paramétriques d'engrènement. Selon les auteurs, ce type de formulation peut être utilisé comme donnée d'entrée pour des modèles dynamiques globaux (section 1.2.1).

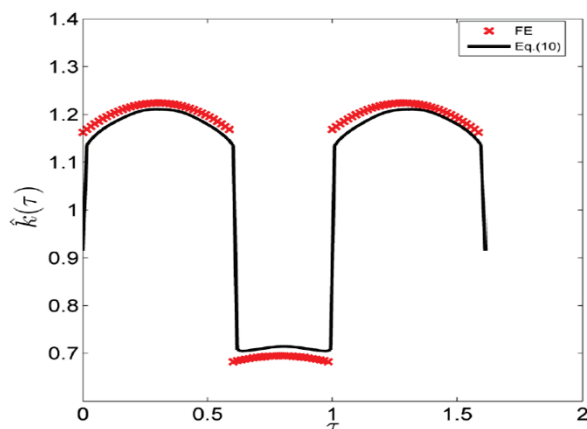


Figure 1-5. Comparaison de la raideur de contact calculée avec un modèle éléments-finis et la formulation analytique selon [7]

Les formulations précédentes considèrent une fonction raideur d'engrènement globale liant le pignon et la roue, sans tenir compte de pertes de contact, ni des déformations élastiques du corps de l'engrenage ou de l'environnement, ni de corrections de denture. En réalité, la liaison élastique entre un pignon et une roue est tridimensionnelle et répartie sur plusieurs aires de contact (une ou plusieurs dents et sur la largeur de denture). Dans ce contexte, Houser et al [8] ont considéré les dents comme des plaques d'épaisseur variable et ont résolu le problème de contact à l'aide d'un algorithme de Simplex. Velez et Maatar [9] ont proposé de découper en fines tranches les dents et d'affecter une raideur linéique par tranche (Figure 1-18). A l'aide d'un algorithme de contact, les petits éléments de raideur sont activés ou désactivés en fonction des déformées du pignon et de la roue. L'élément de raideur linéique attaché à une tranche est généralement divisé en trois contributions distinctes provenant de (a) la flexion de la dent, (b) le pivotement de la base de la dent et (c) du contact.

(a) raideur de flexion

Le calcul de la composante de raideur liée à la flexion de la dent est réalisé en approximant la denture par une poutre encastree-libre de section variable soumise à un chargement au point de contact dans la direction de la ligne d'action, Weber [10], Weber et Banascheck [11], Lin et al [12]. La raideur est ensuite déduite de l'égalité entre le travail généré par la force et l'énergie de déformation. Le déplacement en fonction de l'effort appliqué est exprimé sous la forme (les paramètres sont définis sur la Figure 1-6) :

$$\delta_b = \frac{F \cos^2 \alpha_u}{bE} \left[10.92 \int_0^{u_w} \frac{(u_w - y)^2}{d(y)^3} dy + 3.1(1 + 0.294 \operatorname{tg}^2 \alpha_u) \int_0^{u_w} \frac{dy}{d(y)} \right]$$

avec :

δ_b : déformation de flexion dans la direction de la charge

α_u : angle de pression instantané

u_w et $d(y)$ sont définis à la Figure 1-6

b : largeur de denture

E : module de Young

Pour les autres paramètres, voir la Figure 1-6.

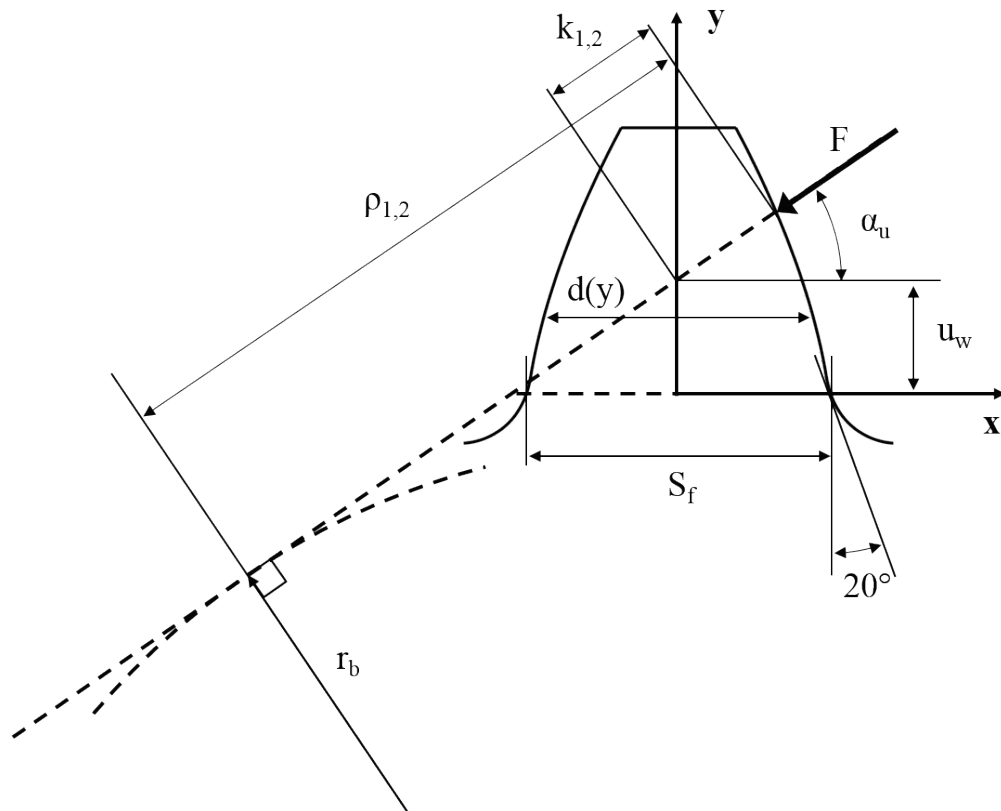


Figure 1-6. Paramètres géométriques pour le calcul de la raideur de flexion selon [11]

(b) raideur de la fondation

Dans le calcul de la composante de flexion précédent, la dent est considérée comme encastree sur un support rigide. Afin de prendre en compte l'élasticité du support de la dent, Weber [10], Weber et Banascheck [11], O'Donnell [13, 14], Attia [15] et Cornell [16] considèrent un demi-plan élastique soumis à un torseur d'effort induit par le chargement à la denture au pied de la dent. La charge et le déplacement supplémentaire généré sont liés par l'équation :

$$\delta_f = \frac{F \cos^2 \alpha_u}{bE} \left[L \left(\frac{u_w}{S_f} \right)^2 + M \left(\frac{u_w}{S_f} \right) + P (1 + Q \tan^2 \alpha_u) \right]$$

avec :

δ_f : déformation de la base de la dent dans la direction d'application de la charge

S_f : épaisseur de la dent à la section d'encastrement (Figure 1-6)

Les constantes L, M, P et Q varient légèrement selon les auteurs (pour $\nu = 3$) :

	L	M	P	Q
Weber [11] - Attia [15]	5.2	1	1.4	0.294 – 0.32
Cornell [16] et Vogt [17]	2.306	1.4 (contraintes planes) 1.14 (déformations planes)	1.534	0.32
Ishikawa [18]	7.639	0	0	0

Une approche plus précise a été proposée par Sainsot et al. [19] qui considèrent le corps d'engrenage comme un anneau élastique soumis sur sa face externe au chargement induit par l'effort sur la denture (identique au cas précédent) et bloquent les déplacements au niveau de l'alésage sur l'arbre. Les auteurs proposent des formules obtenues par régression numérique permettant le calcul rapide des coefficients L, M, P et Q sous la forme

$$X(h, \theta_f) = A_i / \theta_f^2 + B_i h^2 + C_i h / \theta_f + D_i / \theta_f + E_i h + F_i$$

Où X est un paramètre générique pouvant être L, M, P ou Q, et h le rapport entre le rayon extérieur et intérieur de l'anneau élastique. Les valeurs numériques des constantes dans sont données dans le tableau ci-dessous.

	A _i	B _i	C _i	D _i	E _i	F _i
L(h, θ_f)	-5.574E-5	-1.9986E-3	-2.3015E-4	4.7702E-3	0.0271	6.8045
M(h, θ_f)	60.111E-5	28.100E-3	-83.431E-4	-9.9256E-3	0.1624	0.9086
P(h, θ_f)	-50.952E-5	185.50E-3	0.0538E-4	53.300E-3	0.2895	0.9236
Q(h, θ_f)	-6.2042E-5	9.0889E-3	-4.0964E-4	7.8297E-3	-0.1472	0.6904

D'autres techniques telles que les méthodes des éléments finis, différences finis et éléments frontières [20], [21], [22] ont été employées mais les temps de calcul étant importants, ces approches sont mal adaptées pour résoudre des problèmes dynamiques.

(c) raideur de contact

La raideur de contact est souvent déduite de la théorie d'Hertz. Parmi les travaux les plus significatifs, citons la formulation de Weber [10] qui simule le contact entre deux dentures droites par un contact Hertzien linéique et approxime les rayons des cylindres par les rayons de courbure instantanés des profils en développante de cercle. En supposant que les déplacements de contact

s'annulent sur la fibre neutre de la dent, il vient alors la relation suivante entre le déplacement et l'effort:

$$\delta_c = 4 \frac{F(1-\nu)}{b\pi E} \left[\ln \frac{2\sqrt{k_1 k_2}}{a} - \frac{\nu}{2(1-\nu)} \right]$$

avec :

δ_c : déformation de contact dans la direction de la charge

F : charge sur la dent

b : largeur de denture

k_1, k_2 : distance entre le point d'application de la charge et la ligne médiane de la dent du pignon et de la roue respectivement

$$a = \sqrt{8 \frac{F}{b} \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \frac{1-\nu^2}{\pi E}} : \text{demi largeur de contact (dans la direction du profil)}$$

E, ν : module de Young et coefficient de poisson

ρ_1, ρ_2 : rayons de courbure au point d'application de la charge

Les résultats de Lundberg [23] sont également fréquemment utilisés. L'auteur considère un massif élastique semi-infini (tridimensionnel) soumis à une bande de pression semi-elliptique (distribution Hertzienne) dans un sens et constant dans la direction perpendiculaire. Une raideur de contact peut être déduite à partir du déplacement normal au centre de la zone chargée. Notons également la formule semi-empirique obtenue pour des roulements à rouleaux cylindriques par Palmgren [24].

Ces approches donnent souvent satisfaction mais ont l'inconvénient de négliger les effets élastiques convectifs, c'est-à-dire qu'une charge ponctuelle va déformer une raideur élémentaire seulement et n'influe pas sur le reste de la surface (Figure 1-7). Dans ce contexte, à la suite des travaux de Seager [25], Schmidt et al. [26], Ajmi et Vexel [27] proposent d'utiliser une fondation de Pasternak incluant le couplage élastique entre les points voisins par le biais d'éléments de flexion et de cisaillement, comme le montre la Figure 1-8.

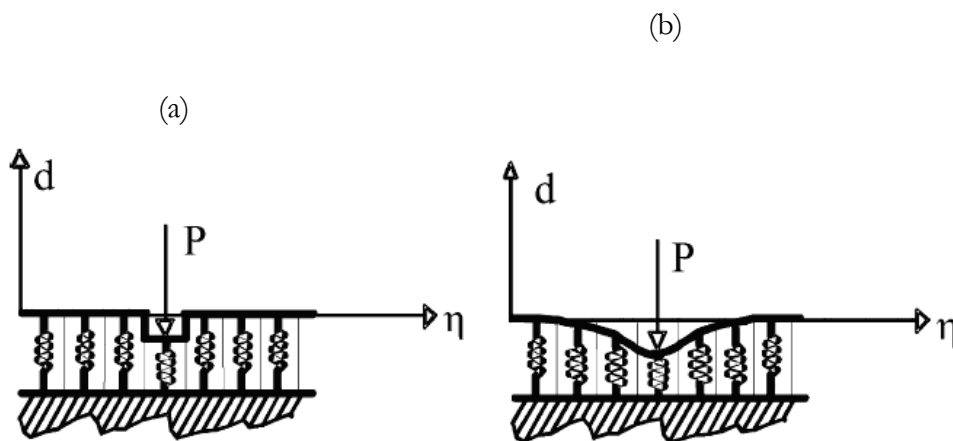


Figure 1-7. Déformée d'une surface (a) sans et (b) avec effets convectifs – [27]

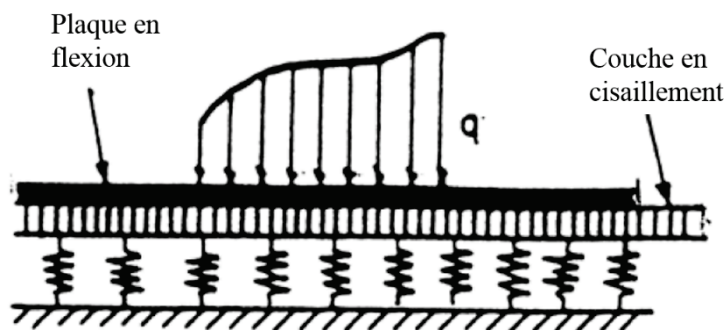


Figure 1-8. Fondation élastique de Pasternak – [27]

1.1.2 Erreurs d'assemblage

Une autre source d'excitation dans les transmissions par engrenages provient directement du processus de fabrication et des tolérances associées. Les déviations par rapport aux côtes nominales engendrent un certain nombre d'erreurs que l'on peut « classer » en deux catégories, les erreurs d'assemblage et les écarts de forme.

Dans la première catégorie, on peut recenser les erreurs de position, c'est-à-dire que le positionnement dans le plan médian des engrenages n'est pas celui escompté. L'erreur de position peut être scindée en deux contributions, une radiale et une tangentielle, comme le montre la Figure 1-9.

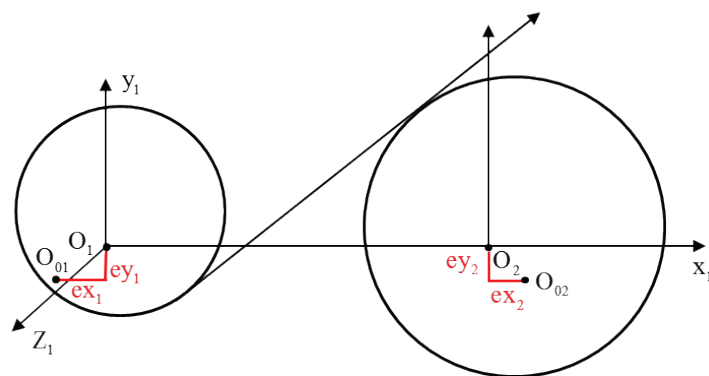


Figure 1-9. Schématisation de l'erreur de positionnement

Par ailleurs, les axes de rotation des engrenages ne coïncident pas toujours avec leurs axes principaux d'inertie polaire. Pour une représentation plane comme dans la Figure 1-10, les centres de rotation et les centres d'inertie ne coïncident pas. Ces erreurs d'excentricité se manifestent par du faux-rond sur la métrologie des dentures et génèrent des balourds susceptibles d'être des sources d'excitation puissantes particulièrement pour la flexion des lignes d'arbre supportant les engrenages. Une erreur d'excentricité est définie par une amplitude et un angle de calage comme explicité sur la Figure 1-10.

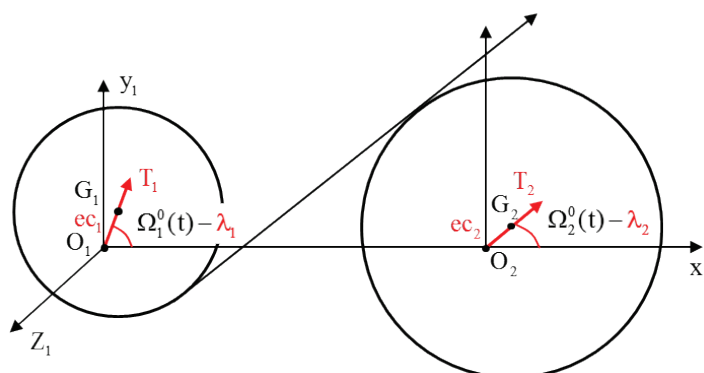


Figure 1-10. Schématisation de l'erreur d'excentricité

Enfin, les axes de rotation du pignon et de la roue ne sont pas nécessairement parallèles. L'erreur de positionnement de l'axe de rotation par rapport à sa position théorique est appelée erreur d'alignement ou désalignement. Il est généralement caractérisé par deux angles de rotation, souvent nommés déviation et inclinaison qui caractérisent les écarts d'alignement dans deux plans perpendiculaires (Figure 1-11) :

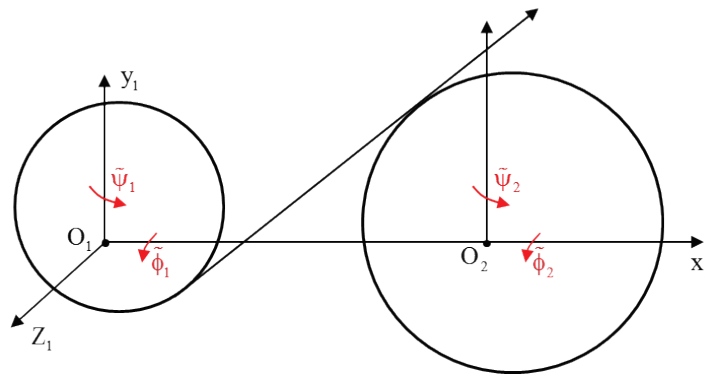


Figure 1-11. Schématisation de l'erreur d'alignement

1.1.3 Ecarts de forme

Lors du taillage des dentures, la course et la géométrie de l'outil s'écartent inévitablement de leurs valeurs théoriques générant ainsi des déviations du profil taillé par rapport au profil théorique en développante de cercle. Ces déviations mesurées selon la normale au profil théorique sont appelées écarts de forme. Les normes (ISO par exemple) s'attachent notamment à identifier, classer et qualifier de nombreux écarts de forme. Deux types d'écart de forme sont présentés par la suite car leurs conséquences directes sur le bon fonctionnement de l'engrènement sont importantes.

L'erreur de division ou de pas caractérise la déviation par rapport à l'écart nominal entre deux dents (le pas). Cette erreur peut être mesurée individuellement (dent à dent) ou cumulée sur un ensemble de dents, Figure 1-12. La norme ISO donne les valeurs limites permettant de classer les engrenages par classe de qualité en fonction des amplitudes mesurées (métrologie). L'erreur de division a pour effet de surcharger ou décharger les dents si celles-ci rentrent prématurément ou en retard dans le contact.

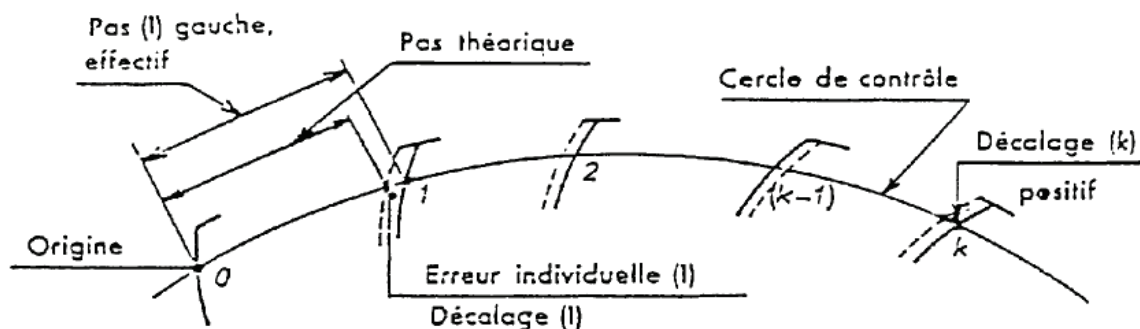


Figure 1-12. Définition de l'erreur de pas selon [28]

L'erreur d'angle d'hélice ou de distorsion influence la distribution de charge le long de la largeur de denture et décentre le lieu de contact entre les dents vers un bord. L'erreur d'hélice peut être vue comme un pivotement local d'une dent dont la modélisation est schématisée sur la Figure 1-13.

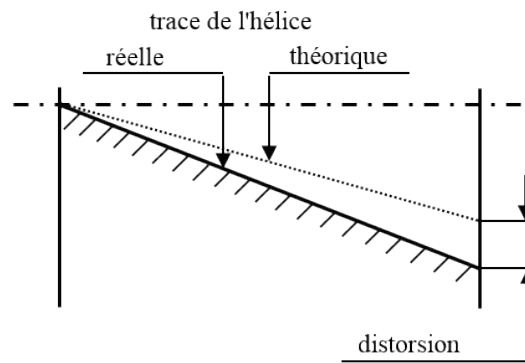


Figure 1-13. Schématisation de l'erreur d'angle d'hélice

L'ensemble des déviations et des erreurs présentés jusqu'à ce point sont involontaires et leurs conséquences sont négatives en termes de fonctionnement de la transmission. Mais il est possible, et c'est très fréquemment le cas dans l'industrie, d'introduire des écarts de forme volontaires pour améliorer le comportement d'un réducteur en fonctionnement. Dans ce cas, ce type de déviation est appelé correction, et peut être appliqué le long du profil et / ou le long de l'hélice. Les corrections de profil peuvent prendre différentes formes (linéaire, parabolique, ...) et être introduites en tête et / ou en pied de dent, Figure 1-14.

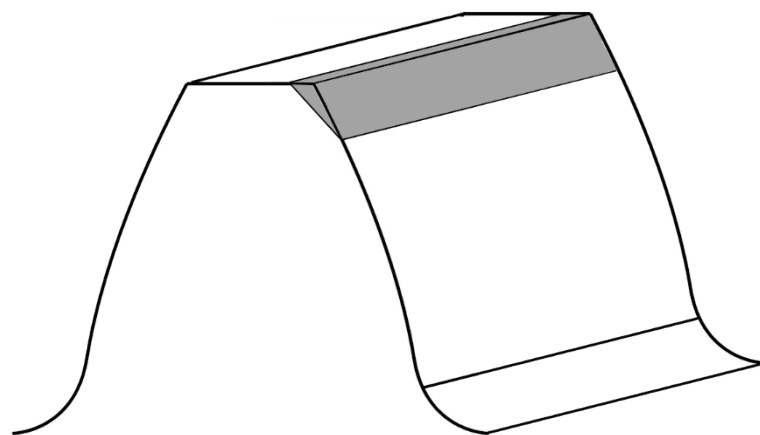


Figure 1-14. Correction de profil linéaire en tête de dent (denture droite)

Concernant les corrections longitudinales (le long de l'hélice), les formes les plus utilisées sont le bombé (Figure 1-15), les chanfreins et la correction d'hélice.

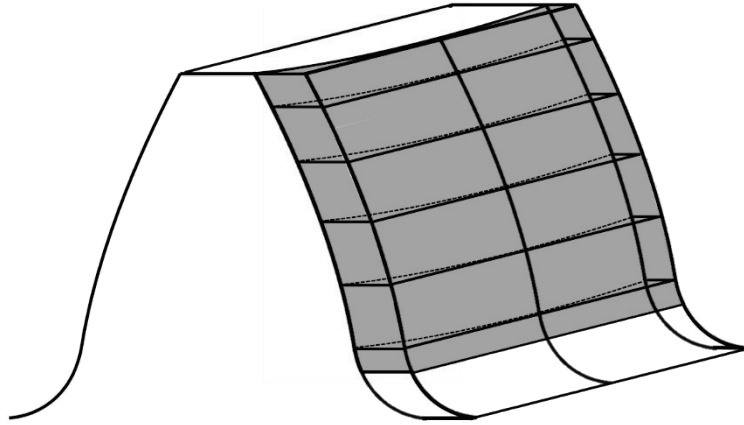


Figure 1-15. Correction longitudinale de type bombé (denture droite)

1.1.4 Erreur de transmission

D'un point de vue pratique, l'ensemble de ces déviations du profil théorique et de ces erreurs perturbent le transfert du mouvement entre l'organe menant et l'organe mené. En 1958, Harris [29] fut le premier à mettre en évidence le fait que la déviation de position angulaire de l'organe mené par rapport à la position qu'il aurait dû avoir en l'absence d'erreur (définition de l'erreur de transmission) était intimement liée aux excitations et aux amplitudes efforts dynamiques. Par la suite, le concept d'erreur de transmission se précisa en considérant une composante à vide (ou erreur cinématique dénommée par la suite par l'acronyme NLTE pour No Load Transmission Error) qui mesure la déviation engendrée uniquement par les erreurs, et une composante sous charge (TEs dans ce qui suit pour quasi-Static Transmission Error) qui superpose la déflexion de la denture à l'effet des erreurs. On peut également définir une erreur de transmission dynamique qui étend la définition de TEs à des vitesses de rotation quelconque. Ces erreurs de transmission peuvent être calculées de façon angulaire, Figure 1-16, ou projetées sur le plan d'action (où elles s'expriment alors comme des longueurs). Il a été démontré par Vexel et Ajmi [30, 31] que le concept d'erreur de transmission est un indicateur pertinent du niveau vibratoire et des amplifications dynamiques pour les engrènements simples tant qu'aucune perte de contact n'apparaît. Vexel et al [32] ont introduit le concept d'erreur de transmission locale (spécifique à un étage de réduction dans le cas du multi-engrènement) et étendu la formulation pour les trains en cascade ou planétaires.

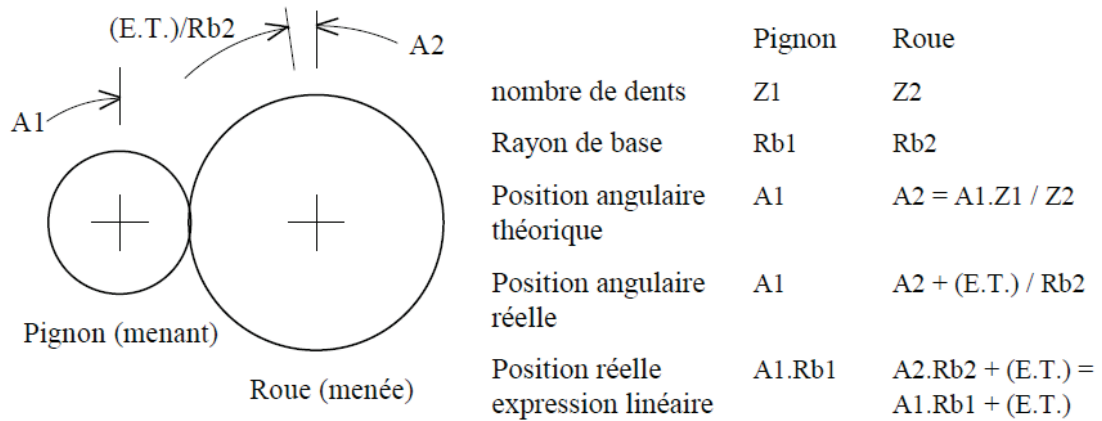


Figure 1-16. Définition angulaire de l'erreur de transmission tirée de [33]

1.2 Modèles de train planétaire

Au-delà des sources d'excitation, il est nécessaire d'examiner les différents types de modélisation quasi-statique ou dynamique des trains planétaires rencontrés dans la littérature. Les modèles peuvent être classés en trois catégories, (a) les modèles à paramètres concentrés, (b) les modèles continus généralement basés sur l'utilisation d'éléments-finis et enfin, (c) les modèles hybrides comme décrit par Cooley et Parker dans leur récente revue de la littérature [34].

1.2.1 Modèle à paramètres concentrés

Les modèles à paramètres concentrés sont des modèles simplifiés combinant masses, inerties, raideurs et amortisseurs afin de caractériser les différents composants et liaisons du système de transmission. Le principal intérêt de ce type de modélisation est de réduire le nombre de degrés de liberté afin d'autoriser des études paramétriques. De façon générale, le corps des engrenages est considéré comme rigide, ce qui permet d'affecter au maximum six degrés de liberté par composant, et de transférer les déformations élastiques à la denture.

Deux modèles d'interface (engrènement) se distinguent dans la littérature. Le premier que l'on peut décrire comme « global » utilise l'erreur de transmission quasi-statique sous charge et la raideur d'engrènement, calculées préalablement par un autre logiciel (statique), pour simuler l'excitation générée par l'engrènement. Cette méthode est aujourd'hui la plus largement employée [35, 36, 37, 38, 39, 40] et permet dans une certaine mesure d'introduire l'influence des corrections de denture et des erreurs de fabrication, ainsi que d'étudier les réponses modales et les efforts d'engrènement. L'un des premiers modèles à paramètres concentrés est développé par Cunliffe et al [41] (Figure 1-17) composé de 13 degrés de liberté, et analyse la réponse modale d'un train planétaire à 3 satellites. Jarchow and Vonderschmidt [42] ont proposé un modèle simplifié afin de prédire les efforts dynamiques à l'engrènement en présence d'écarts au profil de dentures. En utilisant un modèle bidimensionnel (2D), Botman [43] analyse la réponse modale d'un train planétaire et l'influence de la rotation du porte-satellites ainsi que de la raideur des roulements. L'auteur montre le rôle prépondérant des modes « axisymétriques ». Les travaux ont été par la suite étendus par Ma

et Botman [44] aux contributions du mésalignement et des erreurs de fabrication sur les efforts d'engrènement. Plus récemment, August et Kasuba [45] ont étudié l'effet d'un montage sur support souple du solaire sur les efforts à la denture avec un modèle à 9 degrés de liberté.

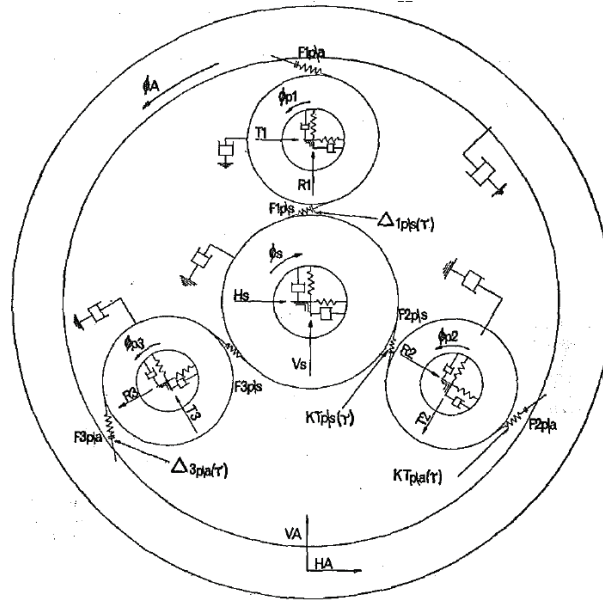


Figure 1-17. Modèle dynamique à paramètres concentrés selon [CUN74]

Le fait d'introduire les excitations par le biais de l'erreur de transmission sous-entend que les conditions de contact à la denture en dynamique sont similaires à celles obtenues en quasi-statique, ce qui n'est pas nécessairement le cas lorsque l'on a des pertes de contact partielles. De ce fait, afin d'éviter que l'excitation principale du système soit une donnée d'entrée (préalablement calculée) du modèle dynamique, un deuxième modèle d'interface, que l'on nommera « local » est apparu. Ce modèle local est généralement basé sur la représentation de la denture comme une juxtaposition de fines tranches de denture droite (Valex et al. [9, 46, 47]), Figure 1-18. A chacune des tranches est affectés un petit élément de raideur ainsi qu'une déviation normale au profil qui sont réactualisés au cours de l'engrènement. Un algorithme de contact peut ainsi être couplé afin de définir sur quelle portion de denture le contact temporairement ou constamment perdu donnant lieu à la distribution de charge instantanée.

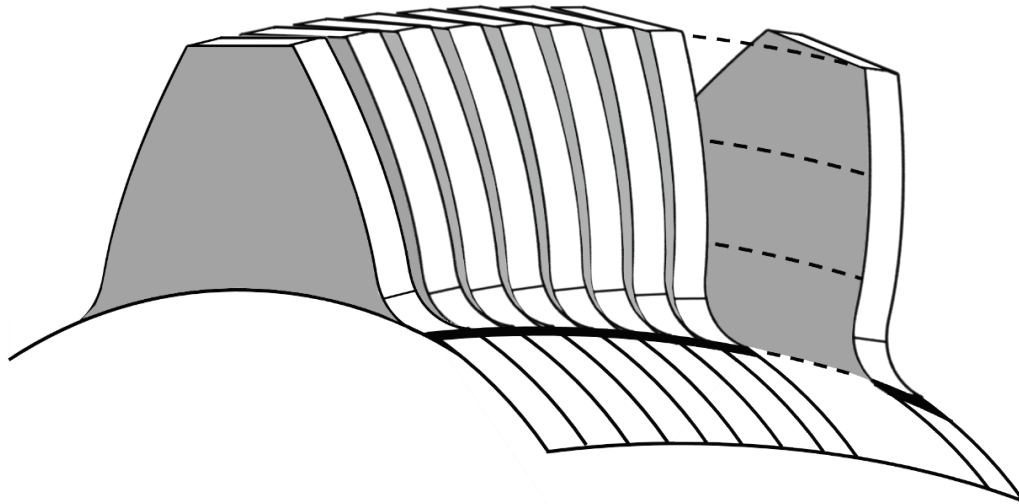


Figure 1-18. Modèle locale : discrétisation de la dent en fines tranches (denture hélicoïdale)

Les modèles à paramètres concentrés permettent également d'étudier simplement les dentures double-hélice [48, 49, 50, 51], en liant deux éléments d'engrenage dont les angles d'hélice sont de sens opposés avec un élément de poutre..

1.2.2 Modèle éléments-finis

Comme nous l'avons vu, les modèles simplifiés permettent rapidement d'obtenir les efforts dynamiques et les vibrations sous l'influence des corrections et de diverses erreurs. Cependant, ces modèles ne permettent pas de prendre en compte l'élasticité de certains composants (comme la couronne par exemple) et d'avoir accès aux contraintes, afin d'évaluer les risques de défaillances. Dans ce cadre, les modèles éléments-finis sont mieux adaptés mais le temps de calcul limite les études paramétriques et l'analyse au comportement statique. Pour contourner le problème, certaines études [52, 53] décomposent le problème et n'étudient qu'un composant du train planétaire. Chiang et Badgley [52] s'intéressent au bruit rayonné par la couronne dans une application hélicoptère en lui appliquant des efforts représentatifs de l'engrènement. Stockton [53] met en relation les différents modes excités de la structure, comme le solaire, et les excitations liées à l'engrènement. L'auteur conclut sur la nécessité de prendre en compte dans les modèles numériques ces interactions. Une approche alternative consiste à déterminer avec un modèle éléments-finis la souplesse d'un composant, tel que le porte-satellites, puis de l'introduire sous forme de conditions aux limites d'un modèle simplifié [54], Figure 1-19. Hidaka et al [55] comparent des signaux expérimentaux de contraintes avec ceux obtenus avec un modèle éléments-finis bidimensionnel complet. Ils montrent que les déformations de la couronne changent significativement le chargement des dentures et tendent à rapprocher les dents, pouvant augmenter le rapport de conduite et le risque d'interférences. Helsen et al [56, 57, 58] rapportent des modes spécifiques dus à la souplesse du porte-satellites et de la couronne dans leurs analyses modales d'une transmission d'éolienne à l'aide d'un modèle éléments-finis multi-corps.

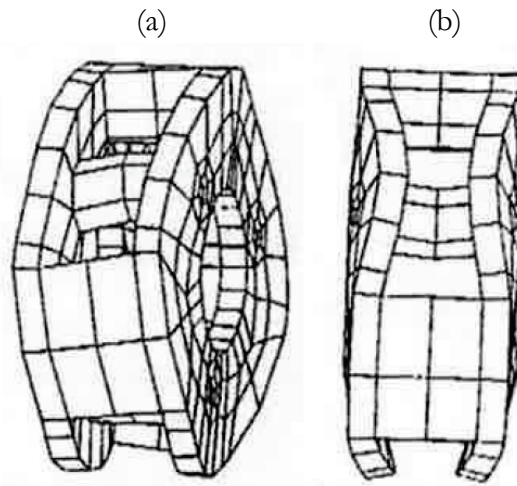


Figure 1-19. Déformée du porte-satellite sous charge (a) tangentielle et (b) radiale selon [54]

1.2.3 Modèle hybride

Du fait du grand nombre de degrés de liberté, les modèles éléments-finis sont souvent utilisés dans l'industrie pour analyser la réponse modale de l'ensemble de la transmission, mais découplent les problèmes de contacts et de structures. Afin de combiner des temps de calcul raisonnables, et une description fine des contacts et de son environnement, des modèles « hybrides » sont apparus ces dernières années.

Vijayakar [59] combinent un modèle éléments-finis avec un modèle de contact, évitant de raffiner le maillage au niveau des flancs actifs des dentures, pour des engrenages hypoides, afin de déterminer les contraintes et les portées. Par la suite, cette méthode est utilisée pour les engrenages cylindriques à denture droite [60], puis étendue aux trains planétaires [61, 62] (Figure 1-20). Dans ces études, les courbes de réponses avec sauts d'amplitude prédites par les modèles sont comparées à celles obtenues avec des modèles simplifiés (souvent torsionnels). Un bon accord entre les différentes modélisations est observé. Ce modèle est finalement enrichi des erreurs d'assemblage et a été utilisé dans de nombreuses comparaisons avec des résultats expérimentaux [63, 64, 65] se consacrant à l'état de contraintes dans un train planétaire et la répartition des charges entre les différents satellites en présence d'erreurs de montage. Avec une philosophie similaire, Iglesias et al [66] réalisent un modèle dynamique de train planétaire bidimensionnel. Après avoir comparé les raideurs d'engrènement obtenues avec des données trouvées dans la littérature, les auteurs s'intéressent aux effets convectifs (dent à dent) et au montage flottant du solaire sur l'erreur de transmission. Aboulseiman et Vexlex [67, 68] quant eux, couplent dans une étude numérique des sous-structures élément-finis de couronne, puis de porte-satellite, avec un modèle à paramètres concentrés. L'idée étant de séparer les composants ayant un comportement linéaire (sous-structures) des possibles non-linéarités (contacts).

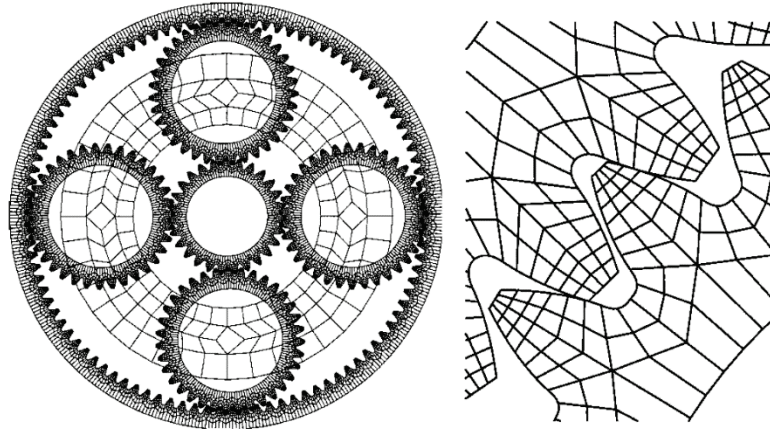


Figure 1-20. Maillage éléments-finis d'un train planétaire selon [61]

1.3 Méthodes de résolution

Les différents modèles précités permettent d'établir les équations du mouvement d'un train planétaire. En ce qui concerne leurs résolutions, différentes approches existent se distinguant suivant le domaine de résolution, temporel ou fréquentiel, employé. Dans le domaine temporel, un schéma de Newmark [9, 68] et de Runge-Kutta [69], est très souvent employé. Des méthodes spectrales itératives ont été utilisées par Perret-Liaudet et al [70, 71], Raclot et Vexex [RAC99] pour des transmissions simple ou multi-engrènements tandis que Kahraman et al [49] utilisent une méthode de balance harmonique.

La prise en compte des pertes de contact entre les dentures, engendrées par les erreurs et / ou les amplitudes importantes des vibrations à l'approche des vitesses critiques, peut être implémentée dans les modèles dynamiques à l'aide d'algorithme de contact [9, 39, 66, 69]. Ce type d'algorithme réactualise la matrice de rigidité liée à l'engrènement et peut s'écrire sous la forme (Figure 1-21):

$$k_{\text{engrènement}}^{\text{actualisée}} = k_{\text{engrènement}} \cdot \Delta_{\text{denture}} \cdot H(\Delta_{\text{denture}}) \quad \text{et} \quad \begin{cases} H = 1 \\ H = 0 \end{cases} \quad \text{pour} \quad \begin{cases} \Delta_{\text{denture}} > 0 \\ \Delta_{\text{denture}} < 0 \end{cases}$$

avec H la fonction unitaire Heaviside.

Une autre approche pour gérer le contact est l'algorithme de Simplex mis au point par Conry et Seireg [73], [74], puis réutilisée par Houser et al [8].

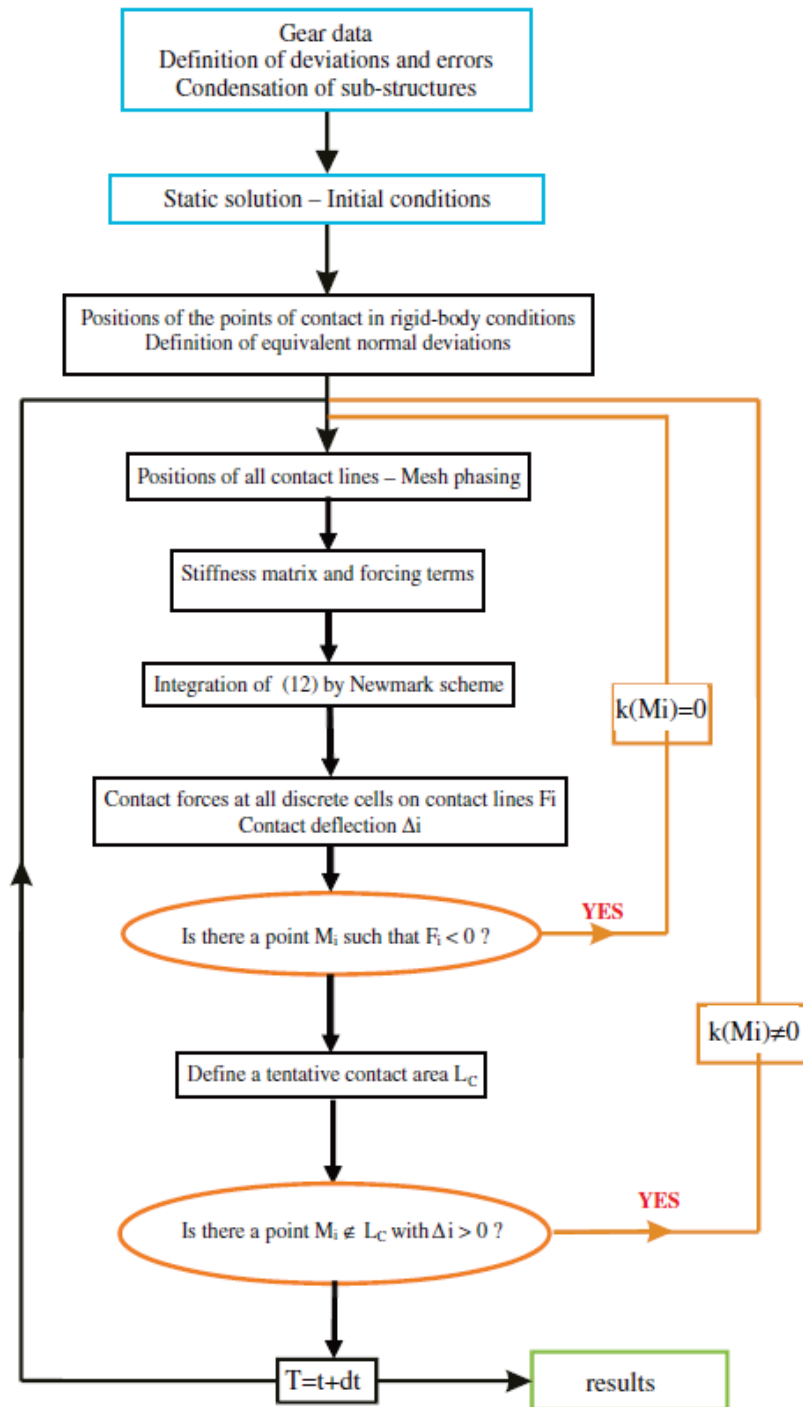


Figure 1-21. Stratégie de résolution des équations du mouvement selon [67]

1.4 Essais expérimentaux

Un nombre limité de résultats expérimentaux ont été publiés mais ils servent dans la majorité des cas à recalculer ou confirmer les prédictions des modèles numériques. Les parties fixes sont souvent instrumentées, pour des raisons de commodité, telles que le carter ou la couronne. Cunliffe et al [41] comparent les fréquences propres mesurées et calculées pour un système à trois satellites. Hidaka, Terauchi et al [75, 76, 55, 77, 78, 79, 80] réalisent de nombreux essais sur un train planétaire à denture droite avec trois satellites. Ce dernier est largement équipé d'accéléromètres et de jauges de déformations en pied de dent leur permettant de remonter aux efforts à la denture (Figure 1-22). Les auteurs analysent notamment l'influence de l'indexation et du montage sur supports souples des composants. Des déformations importantes de la couronne sont mises en avant et confirmées par Velez et al [81] pour un train planétaire double-hélice. Plus récemment, Ericson et Parker [82, 83, 84] instrumentent plusieurs composants d'accéléromètres et comparent la réponse modale avec les prédictions de leurs modèles.

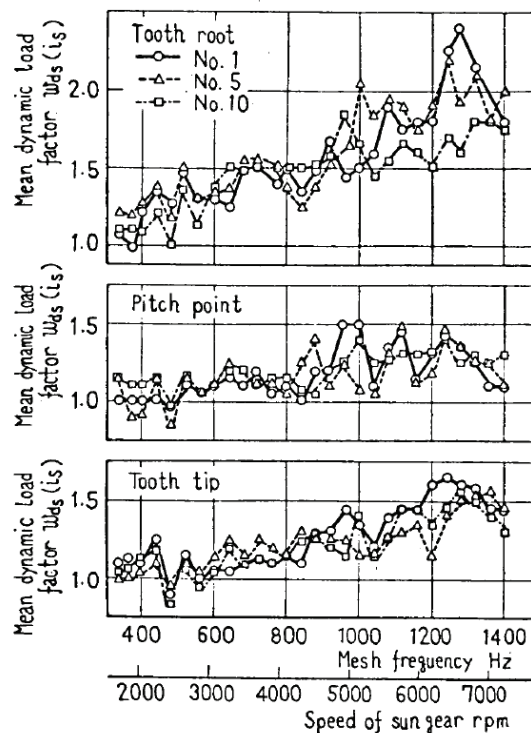


Figure 1-22. Coefficient dynamique des engrènements solaire / satellites au niveau du pied, du primitif et en tête de dent selon [75]

McFadden et Smith [MCF85, MCF86] mettent en évidence des bandes latérales asymétriques dans le spectre d'un accéléromètre attaché au carter. Les auteurs montrent que l'analyse spectrale du déplacement torsionnel d'un composant est dominée par les harmoniques de la fréquence d'engrènement et que des bandes latérales symétriques apparaissent du fait de la présence d'excentricités sur les arbres. Dans une certaine continuité, Inalpolat et Kahraman [87] étudient le spectre d'un accéléromètre positionné sur la couronne et explicitent les mécanismes de bandes latérales induites par les erreurs de fabrication, Figure 1-23.

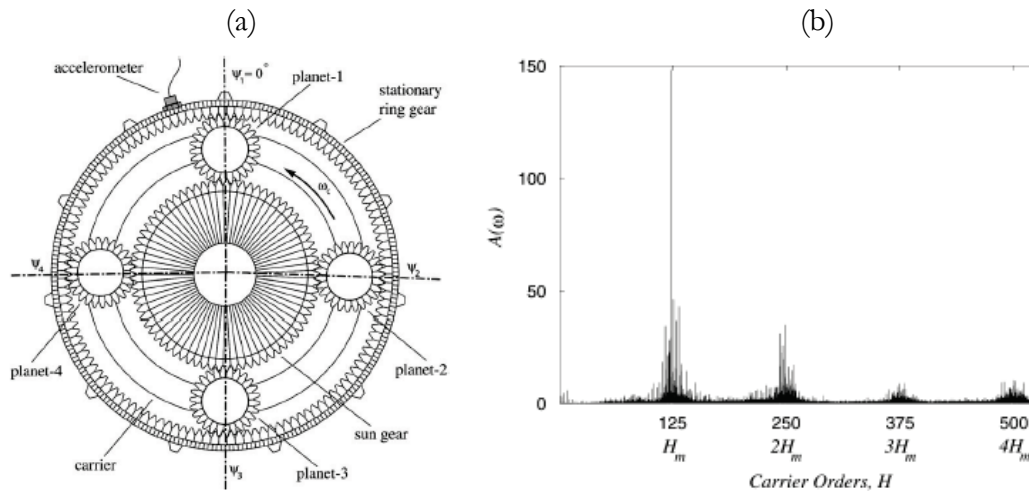


Figure 1-23. (a) Position de l'accéléromètre et (b) analyse spectrale d'un signal d'accéléromètre selon [87]

Karray et al [88] développent un banc en boucle fermée et instrumentent d'accéléromètre les couronnes fixé au bâti. L'analyse spectrale des signaux met en évidence des bandes latérales induites par le passage des satellites et des erreurs de fabrication. Puis, les auteurs [89] comparent les réponses modales du banc d'essais et d'un modèle simplifié similaire à [38], un bon accord est observé.

1.5 Analyse modale

L'analyse modale des trains planétaires a concentré beaucoup d'attention dans le but de pouvoir prédire les possibles vitesses critiques du système. Cunliff et al [41] mettent en évidence deux types de mode, à hautes et basses fréquences qu'ils nomment respectivement « tooth modes » et « bearing modes ». Botman [43] quant à lui observe également deux types de mode dénommés « axisymétrique » et « non-axisymétrique ». Kahraman [36] remarque l'existence d'un troisième type de mode qu'il appelle « counter-phase mode » pour un train planétaire à 4 satellites. Il poursuit son analyse avec plusieurs trains planétaires en série dans [90]. Parker et al [38, 92] formalisent la classification de l'ensemble des modes avec un modèle torsionnel d'un simple train planétaire à denture droite (modèle plan). Deux modes pour les composants centraux émergent, les modes dits de translation et de rotation, et un troisième pour les satellites n'apparaissant qu'en présence de 4 satellites. Eritenel et Parker [93] étendent la classification aux dentures hélicoïdales avec un modèle tridimensionnel (Figure 1-24). Wu et Parker [94] incorporent par la suite l'influence des déformations de la couronne. Dans ce contexte, un quatrième mode naît, caractérisé par des modes d'anneau pur. Cooley et Parker [95] introduisent les effets gyroscopiques présents à hautes vitesses pour une configuration épicycloïdale. Ils observent que les fréquences propres dépendent désormais de la vitesse de rotation et qu'un déphasage entre les réponses peut apparaître. On peut également noter les travaux de Sondkar et Kahraman [49] qui ont investigué l'influence du décalage des hélices sur la réponse modale d'un train planétaire double-hélice.

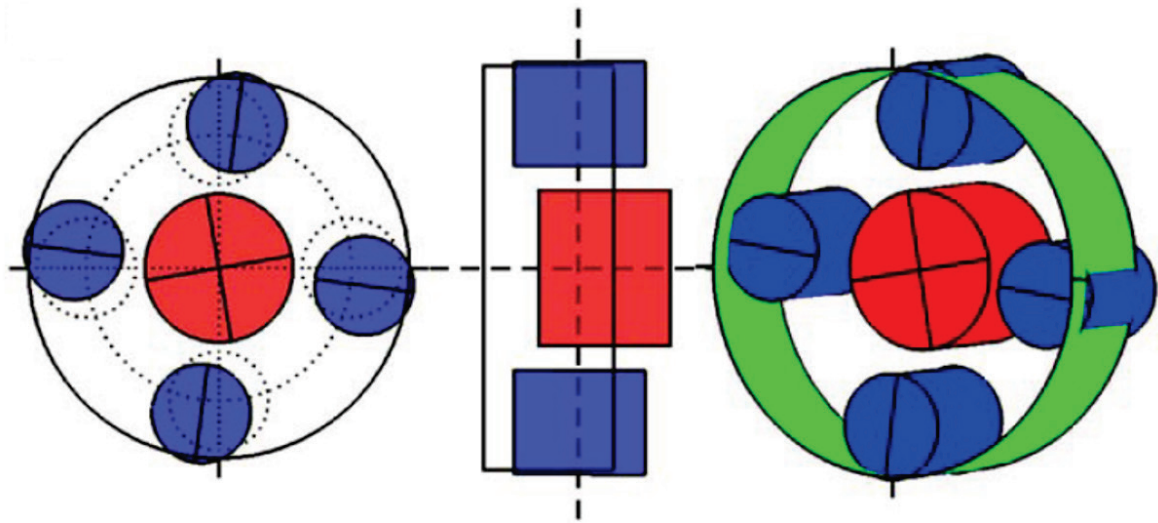


Figure 1-24. Représentation schématique d'un mode « rotational-axial » selon [93]

1.6 Réponse dynamique

1.6.1 Déphasage des engrenements

Le déphasage des engrenements est la position relative des lignes de contact dans leurs plans d'action. En ayant à un instant donné des positions différentes, les excitations qui en découlent sont ainsi déphasées permettant de réduire le niveau de vibration. Cette méthode s'apparente à un choix astucieux du nombre de dents des différents composants et est aujourd'hui largement exploitée dans le milieu industriel. Toda et Botman [96] montrent qu'en utilisant cette technique, qu'ils nomment « indexation », il est possible de réduire nettement les vibrations d'un train planétaire. Hidaka et al [79] observent expérimentalement ces mêmes effets et minimisent l'influence des erreurs de fabrication, Figure 1-25. Seager [97] formalise mathématiquement ce phénomène avec un modèle dont les excitations sont liées aux erreurs de transmission. Kahraman [98] étend l'analyse avec un modèle tridimensionnel. Finalement, Parker et al [99, 100] proposent une explication physique de la compensation des excitations en exprimant les efforts d'engrènement à l'aide de séries de Fourier. En outre, ils proposent un certain nombre de pratiques pour y parvenir.

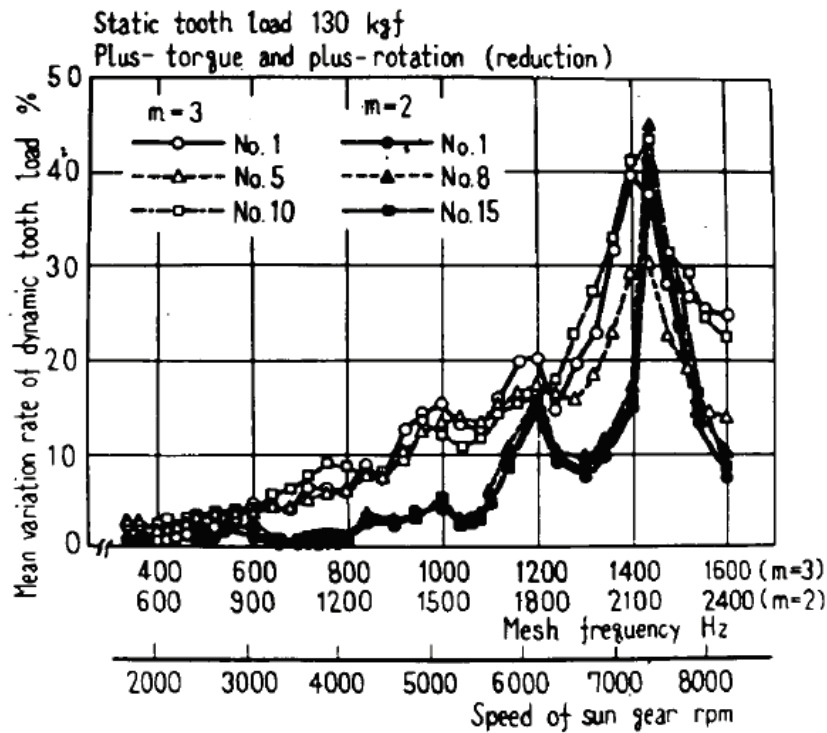


Figure 1-25. Réponses des efforts dynamiques pour deux différents cas de déphasage (m) selon [79]

1.6.2 Erreurs de fabrication

Du fait des tolérances de fabrication associées aux composants, la présence d'erreurs est inévitable. Parmi les erreurs possibles, les erreurs de position des satellites ont reçu une attention toute particulière du fait que ces dernières peuvent altérer considérablement les conditions de contact. Hidaka et al. [75], Botman et al. [44] ont étudié expérimentalement et numériquement ce phénomène, et confirment qu'un montage "flottant" (généralement sur le solaire) peut atténuer l'effet des erreurs de positionnement.

Kahraman et al. [101, 102, 103, 64, 104] et Singh [105, 106] ont produit la plus large partie de la récente littérature sur le sujet comprenant divers études numériques (modèle simplifié et modèle éléments-finis) mais aussi expérimentales en régime quasi-statique avec différents nombres de satellites. Les auteurs proposent des formules approchées permettant de prédire le déséquilibre dans la répartition de charge entre les différents satellites. De ces travaux, il ressort que l'erreur de positionnement radiale n'a aucune influence sur la charge moyenne supportée par les satellites, à l'inverse de la composante tangentielle. Dans la continuité, Gu et Vexé [107] introduisent ces erreurs de position dans un modèle dynamique à paramètres concentrés. Les simulations montrent que les erreurs de position ont peu d'effet sur l'amplification dynamique des efforts et qu'en assouplissant les supports des composants la répartition de charge s'améliore grandement. Iglesias et al [108] confirment numériquement sur un train planétaire à denture droite l'influence de la composante tangentielle et du montage flottant du solaire sur la répartition de charge en quasi-statique. La majorité des études expérimentales prédisent la répartition de charge au travers de mesures de contraintes en pied de dent sur les organes fixes, généralement la couronne [75, 103, 64]. L'instrumentation directe des satellites est rarement réalisée à l'exception de [109].

Concernant les autres erreurs communément rencontrées, Bodas et Kahraman [101] étudient l'influence des excentricités et des erreurs de pas sur la répartition de charge. Cheon et Parker [110] analysent leurs impacts sur les efforts au palier et sur le niveau de contraintes dans un train planétaire. Inalpolat et Kahraman [87, 40] s'intéressent numériquement et expérimentalement aux vibrations induites par les excentricités, et notent des modulations d'amplitude et de fréquence suivant les cas étudiés. Gu et Valex [111] étendent leurs travaux en introduisant les erreurs d'excentricité dans leur modèle dynamique. Les modulations d'amplitude sur les efforts d'engrènement sont confirmées. Les auteurs trouvent que les excentricités dans les trains planétaires ont une influence plus importante que dans les transmissions conventionnelles, et que les effets centrifuges induits par la rotation du porte-satellites peuvent altérer la répartition de charge entre les satellites.

1.6.3 Structure flexible

Pour des raisons économiques les épaisseurs de voile, de couronne... tendent à diminuer, rendant les composants souples et déformables. Kantz [112] rapporte que le solaire peut se déformer, Valex et al. [81] montrent expérimentalement que les déformations de la couronne ne peuvent être négligées. Kahraman et al. [63] utilisent un modèle couplant éléments-finis et modèle de contact pour étudier les contraintes dans la couronne. L'analyse montre que les contraintes dans la couronne augmentent lorsque son épaisseur diminue. En revanche, Hidaka, Terauchi et al. [76, 55, 80] mettent expérimentalement en évidence l'aptitude de ces déformations à compenser les surcharges générées par les erreurs de fabrication (Figure 1-26).

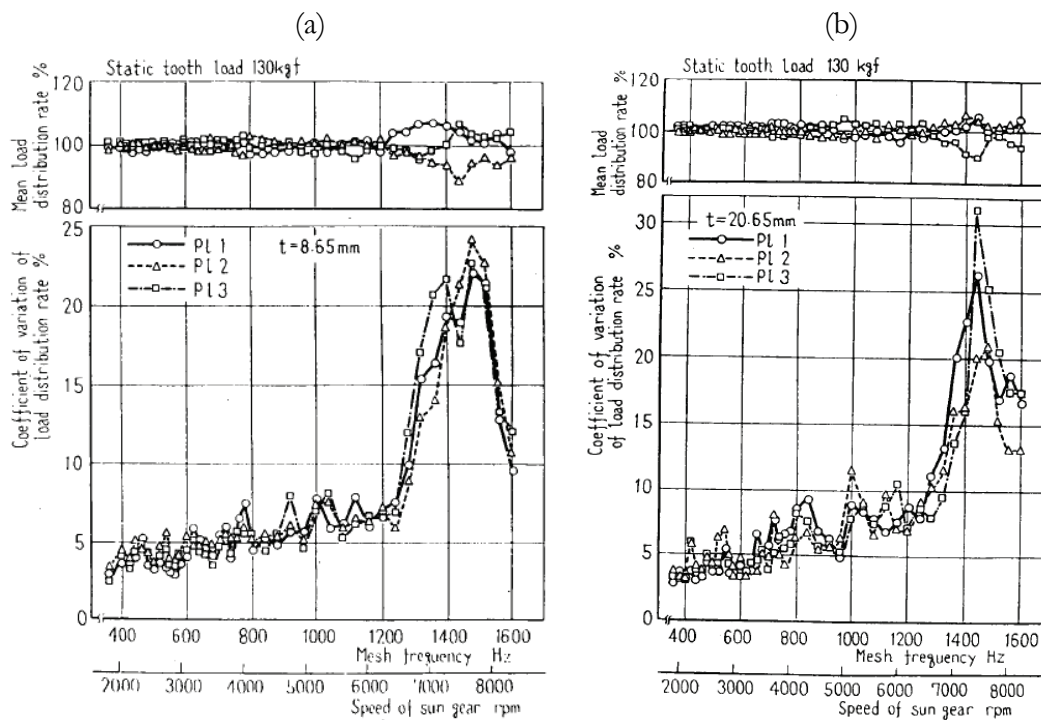


Figure 1-26. Coefficients dynamiques des engrènements intérieurs pour deux épaisseurs de couronne différentes selon [80]

Abousleiman et Velez [67, 68] montrent avec leur modèle hybride une forte influence des déformations de la couronne sur les efforts dynamiques pour les engrènements intérieurs. Parker et al. [PAR00b, AMB07] étudient la réponse dynamique des efforts d'engrènement. Dans une certaine continuité, Wu et Parker [113, 94] développent une formulation analytique d'un anneau déformable et de ses conditions de support puis l'incorporent dans un modèle à paramètres concentrés de train planétaire. Les auteurs opèrent ainsi une analyse modale et re-classifient les modes propres de train planétaire. Enfin Helsen et al. [56, 57, 114] modélisent une transmission d'éolienne avec plusieurs trains planétaires et composants souples à l'aide d'une méthode élément-finis multi-corps.

1.6.4 Corrections de profil

Les corrections de profil sont généralement appliquées afin de compenser la déflexion de la denture lorsque celle-ci est mise sous charge, évitant ainsi les contacts en coin à l'engagement et au déengagement d'une dent. Elles ont également pour effet de réduire les vibrations et de diminuer le bruit rayonné.

L'influence des corrections de profil a été largement introduite dans les modèles majoritairement globaux [38, 39]. Litvin et al. [115] ont proposé une correction surfacique pour minimiser l'erreur de transmission et améliorer la répartition de charge entre les satellites. Vecchiato [116] a étendu l'analyse en introduisant du mésalignement. Abousleiman et Velez [67, 68] ont montré l'importante influence des corrections sur la réponse dynamique des efforts d'engrènement (Figure 1-27). Dans cette étude, les corrections permettent même d'annuler la présence de vitesses critiques, mais aucune méthodologie d'optimisation des corrections n'a été développée.

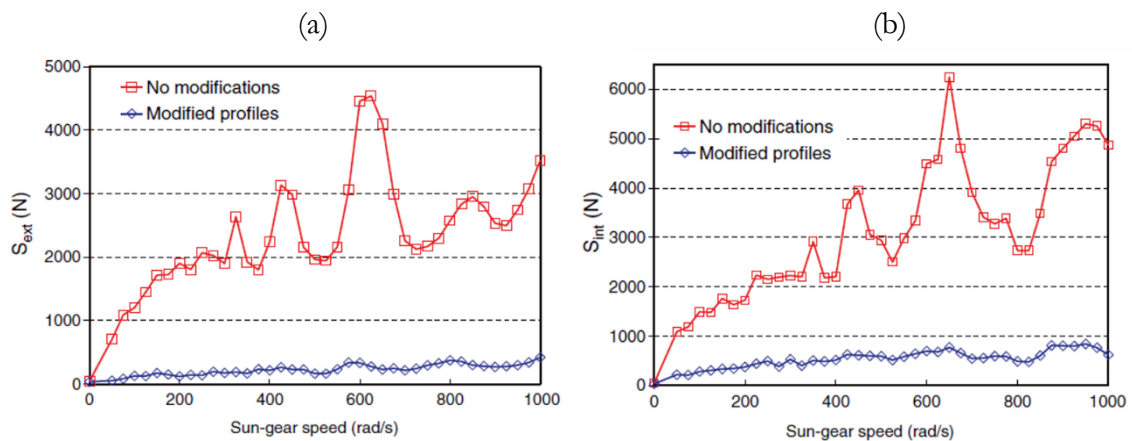


Figure 1-27 . Influence des corrections de profil sur les coefficients dynamiques des engrènements (a) extérieurs et (b) intérieurs selon [67]

Dans l'industrie, les corrections de denture sont généralement déterminées en isolant un engrenement du reste du système. Suivant cette méthodologie, Carbonneli et al. [71] ont conduit une optimisation robuste des corrections de denture d'une chaîne de transmission de camion (engrenements en cascade) vis-à-vis des fluctuations de l'erreur de transmission. Ces dernières ont été appliquées et les essais expérimentaux indiquent une diminution de 1dB du bruit rayonné par la transmission [117]. Concernant les trains planétaires à denture droite, Bahk et Parker [118] ont développé une formulation analytique leur permettant d'étudier l'influence des corrections de profil à partir d'une méthode de perturbations. Ces derniers analysent l'influence des corrections optimisées par rapport aux fluctuations des erreurs de transmissions en isolant les différents engrenements. Les auteurs concluent que les corrections testées ne sont pas nécessairement optimales vis-à-vis du système complet et des efforts d'engrenement.

Objectifs de la thèse

Dans le but de dimensionner de futurs réducteurs, la société Hispano-Suiza (groupe Safran) souhaite se munir d'un outil de simulation permettant de prédire les distributions de charge instantanées sur les différents contacts extérieurs et intérieurs. Comme l'a montré la revue de la littérature, les erreurs de fabrication, d'assemblage et toutes les déviations du profil théorique de la denture ont une très grande influence sur les distributions de charge et devront par conséquent être prises en compte. De plus, pour des questions de poids, l'épaisseur de la couronne tend à diminuer dans les applications aéronautiques ce qui la rend déformable, impactant les efforts d'engrenement entre les satellites et la couronne. En outre, l'importance des déphasages entre les différents engrenements a été mise en lumière sur l'aspect prédictif. Le modèle devra également incorporer différents types de dentures telles que droite, à haut rapport de conduite, hélicoïdale ou double-hélice pour un nombre de satellites quelconque distribués angulairement de façon indifférentes.

Chapitre 2

Modèle dynamique de train planétaire / épicycloïdal avec structures déformables

Il a été choisi de privilégier des modèles de trains planétaires à paramètres concentrés en vue de simuler leur comportement dynamique en régimes permanent et transitoire tout en gardant la possibilité d'entreprendre des analyses locales sur la rôle d'erreurs de forme ou de position sur le chargement instantané sur les contacts entre dentures. Ces modèles composés d'éléments simples, masses et raideurs, permettent d'éviter les temps de calcul prohibitifs rencontrés avec des modèles de type éléments-finis, et autorisent ainsi des études paramétriques conséquentes. Classiquement, la déformée dynamique des composants (Etat déformée) est superposée aux rotations de corps rigides (Etat de référence). Dans un premier temps, l'Etat de référence est traité, puis l'Etat déformé des différents éléments, tel que les engrenages, le châssis porte-satellites, les paliers, les arbres et les structures déformables, sont développés. Enfin, les équations du mouvement sont déduites et les stratégies de résolution sont présentées.

2.1 Définition des engrenements

En préambule au développement du modèle dynamique de train planétaire, cette section s'attache à définir les différentes zones de contact potentielles entre les dentures. Une hypothèse généralement employée consiste à restreindre les contacts dans le plan tangent aux cylindres de base des engrenages appelé plan d'action. Le vecteur unitaire \mathbf{I} représentant la direction de la ligne d'action pour un engrenement, direction dans laquelle la charge est transmise (Figure 2-1), dans le repère attaché au satellite 1 ($\mathcal{R}_1(\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{y}_1 \quad \mathbf{z})$) s'écrit pour les engrenements extérieurs et intérieurs:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_j &= \sin \rho_S \mathbf{x}_1 + \varepsilon_S \cos \rho_S \mathbf{y}_1 & \text{avec} & & \rho_S &= \alpha_{Sj} - \varepsilon_S \Phi_j \\ \mathbf{I}_j^* &= \sin \rho_R \mathbf{x}_1 - \varepsilon_S \cos \rho_R \mathbf{y}_1 & & & \rho_R &= \alpha_{Rj} + \varepsilon_S \Phi_j \end{aligned} \quad (2-1)$$

avec $\varepsilon_S = +1 / -1$ pour un sens de rotation antihoraire / horaire du solaire et α_{gj} l'angle de pression apparent pour l'engrenement entre g (=S / R pour solaire / couronne) et le satellite j. L'exposant (*) fait référence aux engrenements intérieurs (couronne / satellites). Φ_j est la position angulaire du satellite j définie par :

$$\Phi_j = \frac{2\pi}{N_{\text{sat}}}(j-1) \quad (2-2)$$

En considérant l'expression du même vecteur \mathbf{I} dans un repère local attaché au satellite j ($\mathcal{R}_j(\mathbf{x}_j \quad \mathbf{y}_j \quad \mathbf{z})$), il vient :

$$\mathbf{I}_j = \sin \alpha_{Sj} \mathbf{x}_j + \varepsilon_S \cos \alpha_{Sj} \mathbf{y}_j \quad (2-3)$$

$$\mathbf{I}_j^* = \sin \alpha_{Rj} \mathbf{x}_j - \varepsilon_S \cos \alpha_{Rj} \mathbf{y}_j \quad (2-4)$$

La zone active du plan d'action, c'est-à-dire le lieu où se font les contacts théoriques entre dentures, est délimitée par intersections entre les cylindres de tête des roues menante et menée (engagement et dégagement d'une paire de dents) avec le plan de base. Ces zones actives ou « fenêtres d'engrènement » (en pointillé sur les Figure 2-2 et Figure 2-3) sont délimitées par (Figure 2-1, R_C étant l'entraxe):

$$\mathbf{L}_{S_j} \mathbf{S}_j = R_C \sin \alpha_{S_j} \mathbf{I}_j - \sqrt{R a_j^2 - R b_j^2} \mathbf{I}_j \quad (2-5)$$

$$\mathbf{L}_{S_j} \mathbf{E}_j = \sqrt{R a_s^2 - R b_s^2} \mathbf{I}_j \quad (2-6)$$

$$\mathbf{L}_j^* \mathbf{S}_j^* = \sqrt{R a_j^2 - R b_j^2} \mathbf{I}_j^* - R_C \sin \alpha_{R_j} \mathbf{I}_j^* \quad (2-7)$$

$$\mathbf{L}_j^* \mathbf{E}_j^* = \sqrt{R a_j^2 - R b_j^2} \mathbf{I}_j^* \quad (2-8)$$

Le vecteur normal unitaire sortant par rapport à la roue menante (solaire et satellites pour les engrènements extérieurs et intérieurs respectivement) et les vecteurs directeurs des lignes de contact sont liés par :

$$\mathbf{n}_s = \cos \beta_b \mathbf{I}_j + \varepsilon_s \varepsilon \sin \beta_b \mathbf{z} \quad (2-9)$$

$$\mathbf{n}_j^* = \cos \beta_b \mathbf{I}_j^* - \varepsilon_s \varepsilon \sin \beta_b \mathbf{z} \quad (2-10)$$

et

$$\boldsymbol{\eta} = \varepsilon_s \varepsilon \sin \beta_b \mathbf{I}_j + \cos \beta_b \mathbf{z} \quad (2-11)$$

$$\boldsymbol{\eta}^* = \varepsilon_s \varepsilon \sin \beta_b \mathbf{I}_j^* + \cos \beta_b \mathbf{z} \quad (2-12)$$

avec $\varepsilon = +1 / -1$ les sens de l'hélice sur le solaire à gauche / droite respectivement (hélice de gauche dans le cas d'une denture double-hélice).

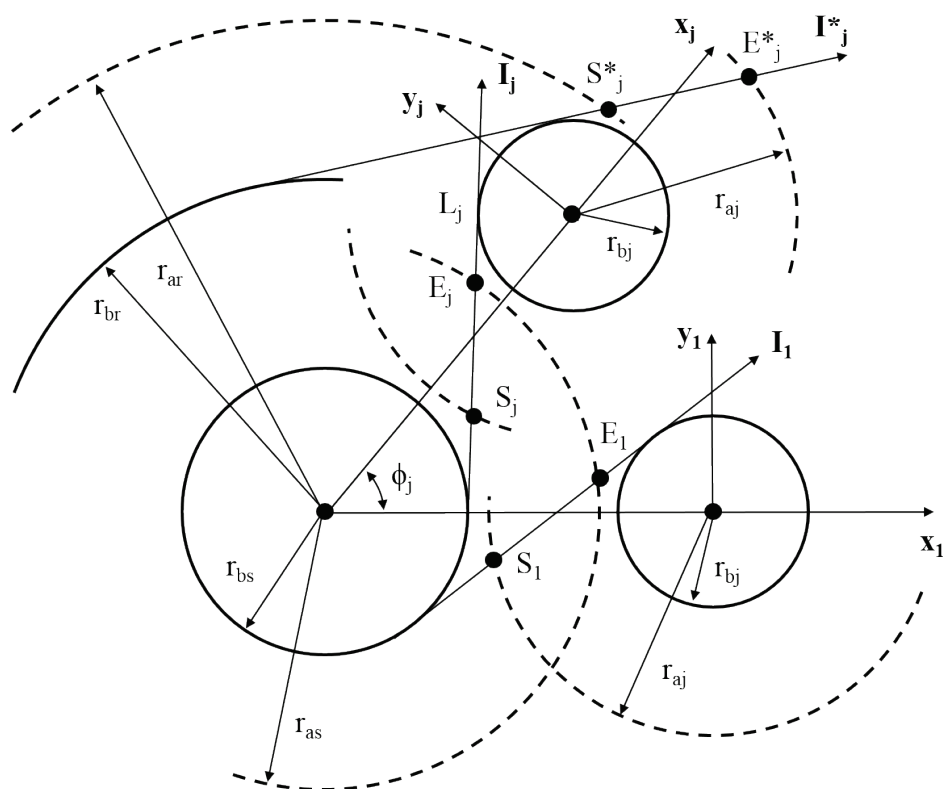


Figure 2-1. Définition des engrenements et des repères pour un train planétaire

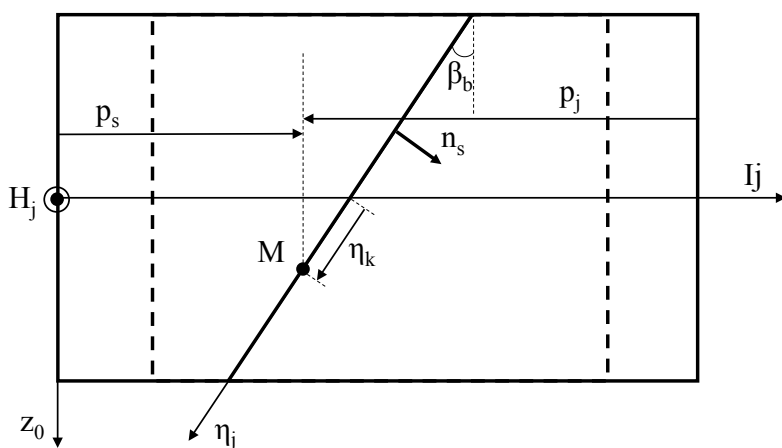


Figure 2-2. Définition de la fenêtre d'engrènement pour les engrenements extérieurs

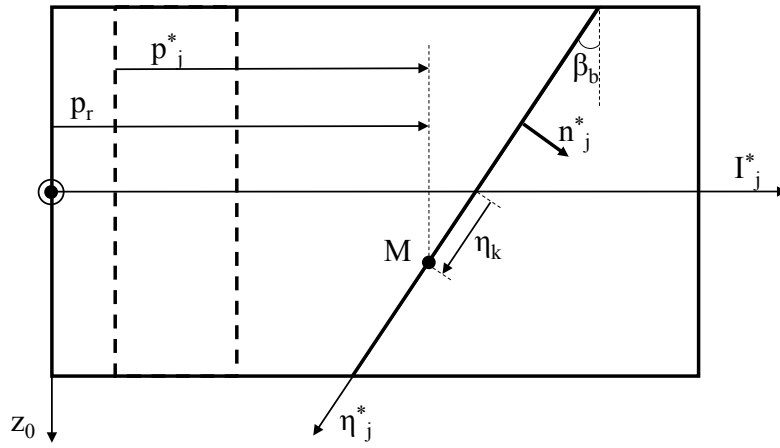


Figure 2-3. Définition de la fenêtre d'engrènement pour les engrènements intérieurs

2.2 Etat de référence

2.2.1 Déphasage des engrènements

De par l'architecture du système, le nombre de dents des différents composants doit répondre à certaines contraintes de sorte qu'il soit possible de monter le train planétaire [28]. Il en résulte que les engrènements, aussi bien extérieurs qu'intérieurs, sont fréquemment déphasés ce qui par ailleurs permet de réduire les excitations sur les organes centraux soumis à plusieurs engrènements. La méthodologie développée dans [47] est utilisée pour calculer le déphasage des engrènements, c'est-à-dire les positions relatives des différentes lignes de contact sur les plans d'action (Figure 2-4). A partir d'une (a) d'une position initiale choisie arbitrairement, telle qu'une ligne de contact soit en train de rentrer dans une fenêtre d'engrènement, il est possible de (b) déterminer la position de toutes les autres lignes de contact dans leur propre fenêtre d'engrènement à partir de considérations géométriques et en utilisant certaines des propriétés des développantes de cercle.

Engrenements extérieurs :

En imposant la condition (a) sur le plan de base du soleil/satellite 1 (conventionnel), le déphasage des engrènements entre le soleil et le satellite j par rapport à l'engrènement soleil / satellite 1 peut s'écrire (Figure 2-4) :

$$\Delta_{Sj}^{S1} = \left\| \frac{\mathbf{S}_j \mathbf{M}_j}{\mathbf{p}_{ba}} \right\| \quad (2-13)$$

avec (N un entier naturel):

$$\begin{aligned}
 S_j M_j &= L_{S1} M_j - L_{S1} S_j \\
 &= L_{S1} S_1 + S_1 M_j - \text{curv}(L_{S1} L_{Sj}) - L_{Sj} S_j \\
 &= S_1 M_j - \text{curv}(L_{S1} L_{Sj}) \\
 &= \varepsilon_s N p_{ba} - \varepsilon_s r_{bs} \Phi_j
 \end{aligned} \tag{2-14}$$

Engrenements intérieurs :

Le déphasage des engrenements couronne / satellite j par rapport à l'engrènement solaire / satellite 1 en est déduit par (Figure 2-4) :

$$\Delta_{Rj}^{S1} = \left\| \frac{S_j^* M_j^*}{p_{ba}} \right\| = \Delta_{Sj}^{S1} + \left\| \frac{S_{bj}^* - S_j S_j^*}{p_{ba}} \right\| \tag{2-15}$$

car :

$$\begin{aligned}
 S_j^* M_j^* &= L_{S1} A + A M_j^* - L_{S1} S_j - S_j S_j^* \\
 &= L_{S1} M_j + M_j A + s_{bj}^* - L_{S1} S_j - S_j S_j^* \\
 &= S_j M_j + \varepsilon_s N p_{ba} + s_{bj}^* - S_j S_j^*
 \end{aligned} \tag{2-16}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 S_j S_j^* &= S_j L_j + \text{curv}(L_j L_j^*) + L_j^* S_j^* \\
 &= S_j L_j + r_{bj} (\alpha_{Sj} + \alpha_{Rj}) + L_{Rj} S_j^* - L_{Rj} L_j^*
 \end{aligned} \tag{2-17}$$

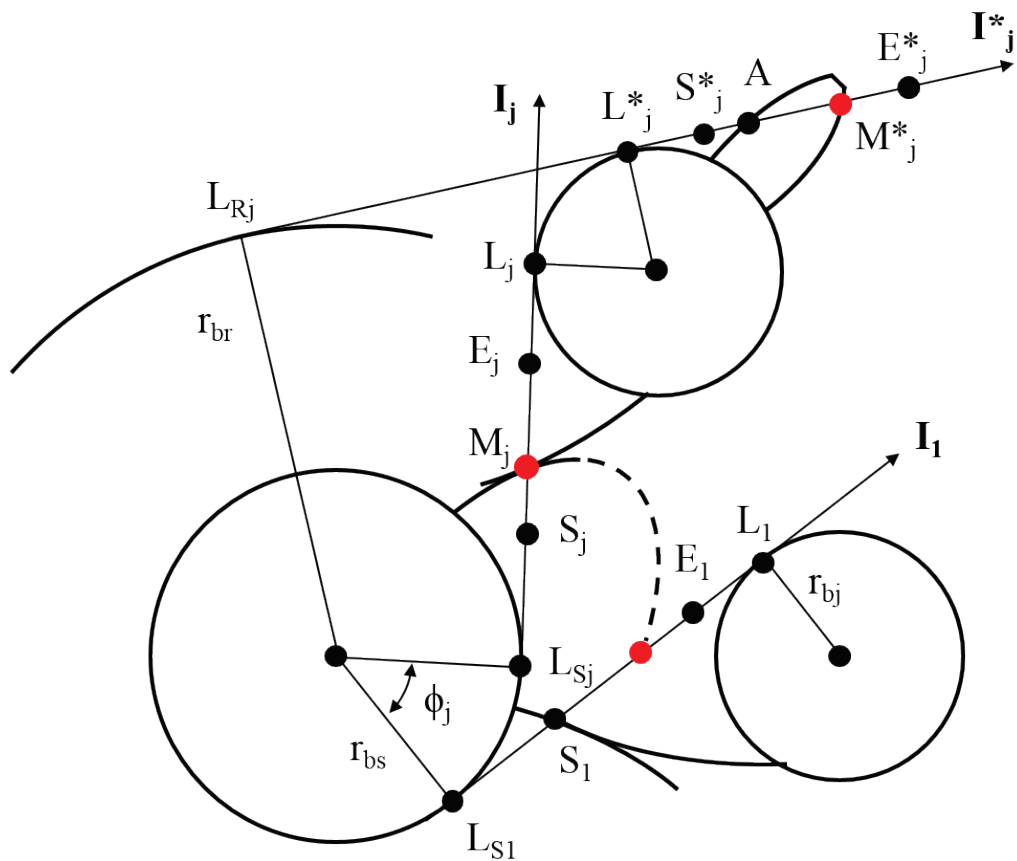
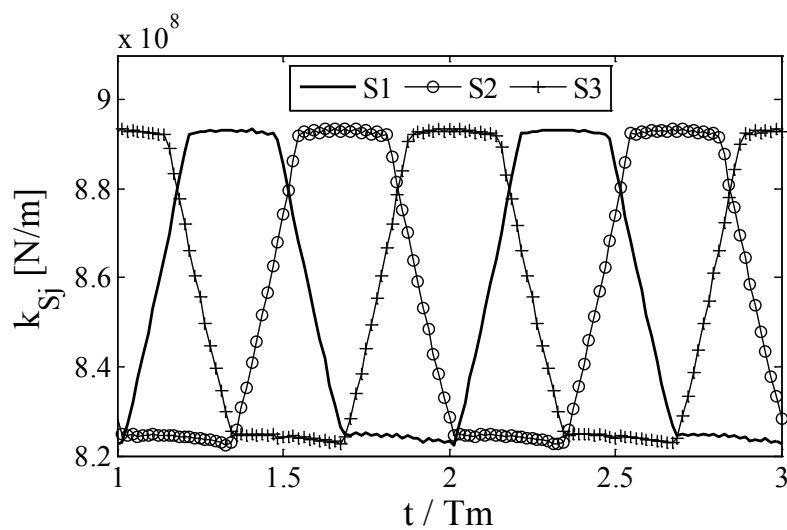


Figure 2-4. Définition du déphasage entre les engrenements

Les Figure 2-5a et b présentent les signaux temporels des raideurs des engrenements extérieurs et intérieurs et illustrent le phénomène de déphasage entre les différents engrenements.

(a)



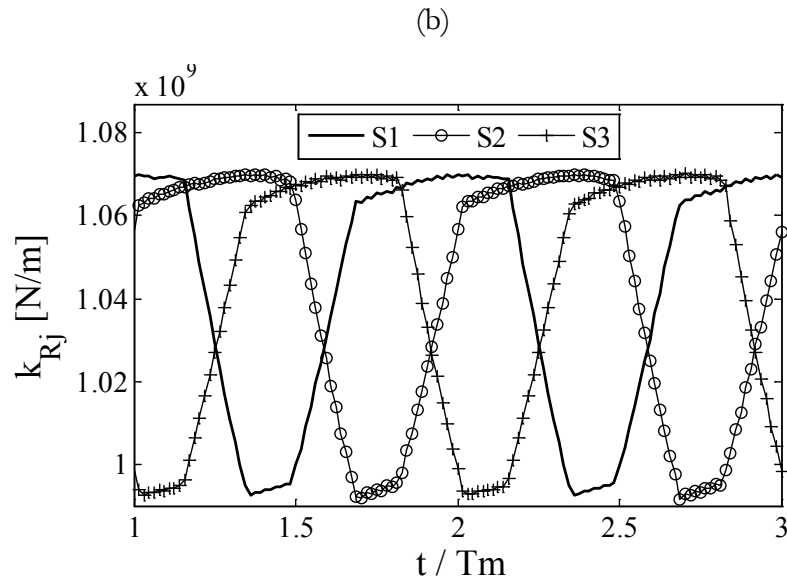


Figure 2-5. Raideurs d'engrènement (a) solaire / satellite j et (b) satellite j / couronne

2.2.2 Ecart normal à la denture

La présence de déviations par rapport au profil de denture théorique en développante de cercle est inévitable, notamment à cause du processus de fabrication. Ces déviations sont une source non négligeable d'excitations dans les transmissions par engrenages, responsables en particulier de mauvaises répartitions des charges et de surcharges locales sur les dents. Afin de simuler ce phénomène, les flancs actifs de dents sont discrétisés en cellules (Figure 2-6a) et un écart normal équivalent est affecté au centre de chacune de cellules. Cet écart provient de la superposition des contributions individuelles des différentes erreurs sur le pignon et la roue, (Figure 2-6b).

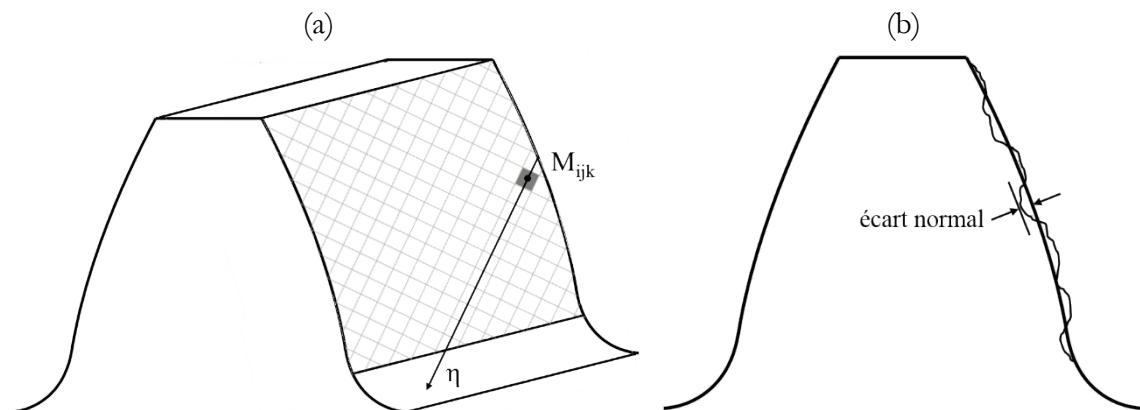


Figure 2-6. (a) Flanc actif de la denture discrétisé en cellules et (b) écart normal au profil

2.2.2.1 Erreurs d'assemblage

Dans les conditions de contact entre corps rigides, les erreurs d'assemblages et de montage peuvent être modélisées par des torseurs de petits déplacements au centre du composant, caractérisant la déviation de position par rapport à une configuration sans erreur à un instant donné [9, 107, 111]. Trois types d'erreurs d'assemblage sont traités dans cette étude : les erreurs de positionnement et l'excentricité qui apparaissent dans la résultante du torseur (vecteur de translations), et le désalignement introduit à l'aide de deux rotations infinitésimales (moment du torseur), Figure 2-7. Du fait de la présence de ces erreurs, les contacts peuvent devenir partiels voire être totalement perdus. Un petit angle de rotation rigide supplémentaire (autour de l'axe de rotation \mathbf{z}) a été rajouté afin de pouvoir fermer la chaîne cinématique, c'est-à-dire, assurer la continuité des contacts entre l'organe moteur et récepteur. Les torseurs de déplacements infinitésimaux sont de la forme :

Pour les composants centraux :

$$\left\{ \mathbf{S}_g^{\sigma} (\mathbf{O}_g) \right\} = \begin{cases} \omega_g^{\sigma} = \tilde{\phi}_g \mathbf{x}_1 + \tilde{\psi}_g \mathbf{y}_1 + \phi_g \mathbf{z} \\ \mathbf{u}_g^{\sigma} (\mathbf{O}_g) = e x_g \mathbf{x}_1 + e y_g \mathbf{y}_1 + e c_g \mathbf{T}_g \end{cases} \quad (2-18)$$

Pour les satellites :

$$\left\{ \mathbf{S}_j^c (\mathbf{O}_j) \right\} = \begin{cases} \omega_j^c = \tilde{\phi}_j \mathbf{x}_j + \tilde{\psi}_j \mathbf{y}_j + \phi_j \mathbf{z} \\ \mathbf{u}_j^c (\mathbf{O}_j) = e x_j \mathbf{x}_j + e y_j \mathbf{y}_j + e c_j \mathbf{T}_j \end{cases} \quad (2-19)$$

avec un indice générique pour les composants centraux tel que \mathbf{S} représente le solaire, \mathbf{R} : la couronne et \mathbf{C} : le porte-satellites. A noter que les déplacements infinitésimaux des composants centraux sont exprimés dans le repère \mathcal{R}_1 attaché au satellite 1 (arbitraire).

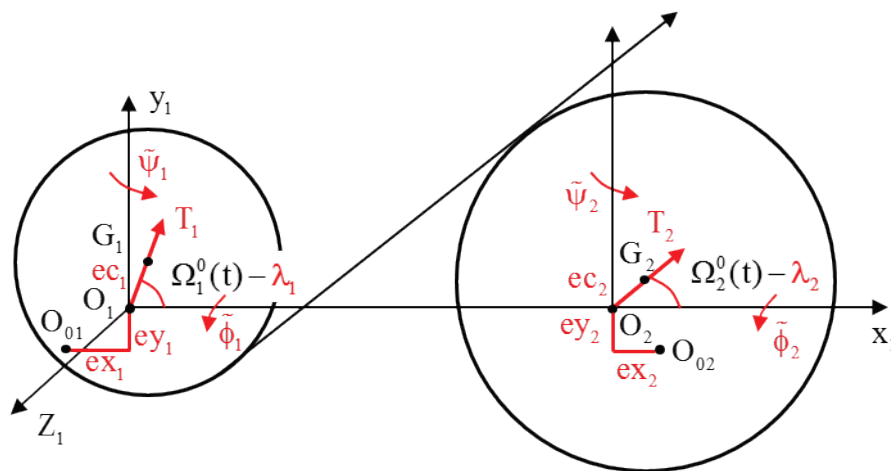


Figure 2-7. Modélisation des erreurs d'assemblage des composants

Le porte-satellites servant de support aux satellites, un couplage fort existe donc entre les deux composants. Une erreur d'assemblage introduite sur le porte-satellite se répercute nécessairement sur la denture des satellites. La théorie des torseurs permet d'exprimer ce couplage comme suit :

$$\{S_j^{\sigma}(O_j)\} = \{S_j^C(O_j)\} + \{S_C^{\sigma}(O_j)\} \quad (2-20)$$

Dans les conditions de corps rigides et en s'appuyant sur la propriété du transport du moment d'un torseur, le calcul de l'écart normal, compté positif dans la direction de la normale sortante à la denture, engendré par les petits déplacements (exceptés les angles de rotation additionnels) donne :

Engrènements extérieurs :

(a) *Pour le solaire :*

$$u_{S,ass}^{\sigma}(M_{jik}).n_s = \begin{matrix} T \\ \left\{ \begin{array}{l} \sin \rho_s \cos \beta_b \\ \varepsilon_s \cos \rho_s \cos \beta_b \\ \sin \sigma_s \cos \beta_b \\ \varepsilon_{r_b} \sin \beta_b \sin \rho_s - (p_s \varepsilon_s \varepsilon \sin \beta_b + \eta + \Gamma L \cos \beta_b) \varepsilon_s \cos \rho_s \\ \varepsilon_s \varepsilon_{r_b} \sin \beta_b \cos \rho_s + (p_s \varepsilon_s \varepsilon \sin \beta_b + \eta + \Gamma L \cos \beta_b) \sin \rho_s \end{array} \right. \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} ex_s \\ ey_s \\ ec_s \\ \tilde{\phi}_s \\ \tilde{\psi}_s \end{array} \right\} \quad (2-21)$$

(b) *Pour les satellites :*

$$u_{j,ass}^C(M_{jik}).n_j = \begin{matrix} T \\ \left\{ \begin{array}{l} -\sin \alpha_{sj} \cos \beta_b \\ -\varepsilon_s \cos \alpha_{sj} \cos \beta_b \\ -\sin \sigma_j \cos \beta_b \\ \varepsilon_{r_b} \sin \beta_b \sin \alpha_{sj} - (p_j \varepsilon_s \varepsilon \sin \beta_b - \eta - \Gamma L \cos \beta_b) \varepsilon_s \cos \alpha_{sj} \\ \varepsilon_s \varepsilon_{r_b} \sin \beta_b \cos \alpha_{sj} + (p_j \varepsilon_s \varepsilon \sin \beta_b - \eta - \Gamma L \cos \beta_b) \sin \alpha_{sj} \end{array} \right. \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} ex_j \\ ey_j \\ ec_j \\ \tilde{\phi}_j \\ \tilde{\psi}_j \end{array} \right\} \quad (2-22)$$

(c) Pour le porte-satellites :

$$\mathbf{u}_{C,ass}^{\bar{}}(\mathbf{M}_{jik}).\mathbf{n}_j = \begin{matrix} \text{T} \\ \left\{ \begin{array}{l} -\sin \rho_S \cos \beta_b \\ -\varepsilon_S \cos \rho_S \cos \beta_b \\ -\sin \sigma_C \cos \beta_b \\ +R_C \varepsilon_S \varepsilon \sin \beta_b \sin \Phi_j + \varepsilon_{r_{bj}} \sin \beta_b \sin \rho_S - (p_j \varepsilon_S \varepsilon \sin \beta_b - \eta - \Gamma L \cos \beta_b) \varepsilon_S \cos \rho_S \\ -R_C \varepsilon_S \varepsilon \sin \beta_b \cos \Phi_j + \varepsilon_S \varepsilon_{r_{bj}} \sin \beta_b \cos \rho_S + (p_j \varepsilon_S \varepsilon \sin \beta_b - \eta - \Gamma L \cos \beta_b) \sin \rho_S \end{array} \right. \end{matrix} \left. \begin{array}{l} \mathbf{ex}_C \\ \mathbf{ey}_C \\ \mathbf{ec}_C \\ \tilde{\phi}_C \\ \tilde{\psi}_C \end{array} \right\} \quad (2-23)$$

Engrènements intérieurs :

(a) Pour la couronne :

$$\mathbf{u}_{R,ass}^{\bar{}}(\mathbf{M}_{jik}).\mathbf{n}_R = \begin{matrix} \text{T} \\ \left\{ \begin{array}{l} -\sin \rho_R \cos \beta_b \\ +\varepsilon_S \cos \rho_R \cos \beta_b \\ -\sin \sigma_R \cos \beta_b \\ \varepsilon_{r_{bR}} \sin \beta_b \sin \rho_R - (p_R \varepsilon_S \varepsilon \sin \beta_b + \eta + \Gamma L \cos \beta_b) \varepsilon_S \cos \rho_R \\ -\varepsilon_S \varepsilon_{r_{bR}} \sin \beta_b \cos \rho_R - (p_R \varepsilon_S \varepsilon \sin \beta_b + \eta + \Gamma L \cos \beta_b) \sin \rho_R \end{array} \right. \end{matrix} \left. \begin{array}{l} \mathbf{ex}_R \\ \mathbf{ey}_R \\ \mathbf{ec}_R \\ \tilde{\phi}_R \\ \tilde{\psi}_R \end{array} \right\} \quad (2-24)$$

(b) Pour les satellites :

$$\mathbf{u}_{j,ass}^C(\mathbf{M}_{jik}).\mathbf{n}_j^* = \begin{matrix} \text{T} \\ \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha_{Rj} \cos \beta_b \\ -\varepsilon_S \cos \alpha_{Rj} \cos \beta_b \\ \sin \sigma_j^* \cos \beta_b \\ -\varepsilon_{r_{bj}} \sin \beta_b \sin \alpha_{Rj} + (p_j^* \varepsilon_S \varepsilon \sin \beta_b + \eta + \Gamma L \cos \beta_b) \varepsilon_S \cos \alpha_{Rj} \\ \varepsilon_S \varepsilon_{r_{bj}} \sin \beta_b \cos \alpha_{Rj} + (p_j^* \varepsilon_S \varepsilon \sin \beta_b + \eta + \Gamma L \cos \beta_b) \sin \alpha_{Rj} \end{array} \right. \end{matrix} \left. \begin{array}{l} \mathbf{ex}_j \\ \mathbf{ey}_j \\ \mathbf{ec}_j \\ \tilde{\phi}_j \\ \tilde{\psi}_j \end{array} \right\} \quad (2-25)$$

(c) Pour le porte-satellites :

$$\mathbf{u}_{C,ass}^{\bar{m}}(\mathbf{M}_{jik}) \cdot \mathbf{n}_j^* = \begin{cases} \sin \rho_R \cos \beta_b \\ -\varepsilon_S \cos \rho_R \cos \beta_b \\ \sin \sigma_C^* \cos \beta_b \\ -R_C \varepsilon_S \varepsilon \sin \beta_b \sin \Phi_j - \varepsilon_{Rj} \sin \beta_b \sin \rho_R + (p_j^* \varepsilon_S \varepsilon \sin \beta_b + \eta + \Gamma L \cos \beta_b) \varepsilon_S \cos \rho_R \\ R_C \varepsilon_S \varepsilon \sin \beta_b \cos \Phi_j + \varepsilon_S \varepsilon_{Rj} \sin \beta_b \cos \rho_R + (p_j^* \varepsilon_S \varepsilon \sin \beta_b + \eta + \Gamma L \cos \beta_b) \sin \rho_R \end{cases} \begin{cases} \mathbf{ex}_C \\ \mathbf{ey}_C \\ \mathbf{ec}_C \\ \tilde{\Phi}_C \\ \tilde{\Psi}_C \end{cases} \quad (2-26)$$

avec :

l'exposant T : l'opérateur de transposition d'un vecteur

Γ valant 0 ou 1 pour une denture simple ou double-hélice

L : longueur égale à la somme des largeurs de denture et de gorge (double-hélice)

et les angles de projection suivants :

$$\begin{aligned} \sigma_S &= \alpha_{sj} - \varepsilon_S \Phi_j + \varepsilon_S \gamma_S & \sigma_R &= \alpha_{Rj} + \varepsilon_S \Phi_j - \varepsilon_S \gamma_R \\ \sigma_j &= \alpha_{sj} + \varepsilon_S \gamma_j & \sigma_j^* &= \alpha_{Rj} - \varepsilon_S \gamma_j & \text{et} & \gamma_g &= \Omega_g \cdot t + \lambda_g \\ \sigma_C &= \alpha_{sj} - \varepsilon_S \Phi_j + \varepsilon_S \lambda_C & \sigma_C^* &= \alpha_{Rj} + \varepsilon_S \Phi_j - \varepsilon_S \lambda_C \end{aligned}$$

2.2.2.2 Ecart de forme

Une autre source de déviation du profil théorique est directement liée au taillage de la denture. Henriot [28] s'est attaché à classer et caractériser ces différentes erreurs de profil, comme les erreurs de pas individuelles ou cumulées, de distorsion, d'hélice... etc. Ces écarts inhérents au processus de fabrication sont préjudiciables au bon fonctionnement de la transmission.

En revanche, des écarts de forme volontaires peuvent être introduits de façon à améliorer le comportement vibratoire, ce sont les corrections de denture. Deux grandes classes de correction sont généralement utilisées dans l'industrie. La première concerne les modifications le long du profil par enlèvement de matière en pied et / ou en tête de dent, afin en particulier d'éviter les chocs à l'engagement et à la retraite d'une dent. La Figure 2-8 représente un exemple de diagramme de correction de profil linéaire rapporté sur la ligne d'action ou la variable temporelle connu sous le nom de diagramme MAAG.

Un second type de modifications est souvent réalisé le long de l'hélice afin de recentrer le chargement vers le milieu de denture et d'éviter les effets de bords. Un exemple de distribution d'écart normal correspondant selon la largeur de denture est schématisé sur la Figure 2-9.

L'écart normal équivalent affecté à une cellule de discrétisation sur les flancs de denture résulte donc de la superposition de chacune des contributions (erreurs d'assemblage et écarts de forme), soit:

$$\mathbf{u}_{g/j}^{\text{e}/C}(\mathbf{M}_{jik}) \cdot \mathbf{n}^{(*)} = \mathbf{u}_{g/j,\text{ass}}^{\text{e}/C}(\mathbf{M}_{jik}) + \mathbf{e}_{g/j,f}(\mathbf{M}_{jik}) \quad (2-27)$$

avec $\mathbf{e}_f(\mathbf{M})$ la superposition de toutes les déviations normales à la denture telles que corrections de profil, corrections longitudinales, erreurs de pas... etc.

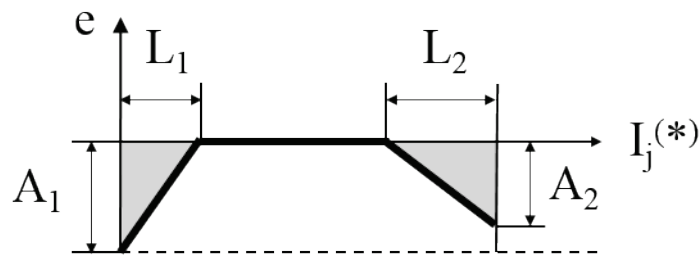


Figure 2-8. Diagramme MAAG de correction de profil linéaire non symétrique

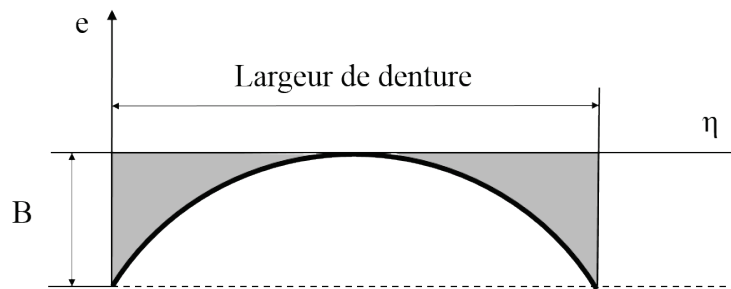


Figure 2-9. Schématisation de l'écart normal induit par un bombé symétrique le long de la ligne de contact

2.2.3 Séparations initiales

Comme précédemment évoqué, à ce stade les différents contacts entre dentures peuvent potentiellement être perdus du fait de l'introduction d'erreurs. Afin d'assurer la transmission de puissance, un certain nombre de conditions de contact dans les conditions de corps rigides doivent être imposées [107] et [111] :

- (a) qu'il y ait au moins une cellule en contact pour chaque engrènement solaire / satellite j et,
 (b) qu'il y ait au moins une cellule en contact pour l'ensemble des engrènements couronne / satellites,

Il s'agit alors de rechercher les combinaisons de rotations de corps rigides infinitésimales sur le porte-satellites, les satellites et la couronne (le solaire n'est pas concerné puisque c'est l'organe par lequel l'entrée de puissance est réalisée) permettant de rétablir les contacts minimaux décrits ci-dessus.

Le rapprochement (lorsqu'il est positif, dans le cas contraire il s'agira d'un éloignement) des corps considérés comme rigides engendré par les erreurs et les écarts de forme s'écrit alors:

Engrènements extérieurs :

$$\begin{aligned}
 \delta_S^j(\mathbf{M}_{jik}) \cdot \mathbf{n}_S &= \left[\mathbf{u}_S^{\overline{\sigma}}(\mathbf{M}_{jik}) - \mathbf{u}_j^C(\mathbf{M}_{jik}) - \mathbf{u}_C^{\overline{\sigma}}(\mathbf{M}_{jik}) \right] \cdot \mathbf{n}_S \\
 &= \mathbf{U}_{jik} + \left[\varphi_j \mathbf{z} \times \mathbf{G}_j \mathbf{M}_{jik} - \zeta \varphi_C \mathbf{z} \times \mathbf{G}_C \mathbf{M}_{jik} \right] \cdot \mathbf{n}_S \\
 &= \mathbf{U}_{jik} + \left[-\zeta \varphi_C \mathbf{z} \times \mathbf{G}_C \mathbf{G}_j - (\varphi_j + \zeta \varphi_C) \mathbf{z} \times \mathbf{G}_j \mathbf{M}_{jik} \right] \cdot \mathbf{n}_S
 \end{aligned} \tag{2-28}$$

avec :

$$\mathbf{U}_{jik} = \left[\mathbf{u}_{S,ass}^{\overline{\sigma}}(\mathbf{M}_{jik}) + \mathbf{e}_{S,f}(\mathbf{M}_{jik}) - \mathbf{u}_{j,ass}^C(\mathbf{M}_{jik}) - \mathbf{e}_{j,f}(\mathbf{M}_{jik}) - \mathbf{u}_{C,ass}^{\overline{\sigma}}(\mathbf{M}_{jik}) \right] \cdot \mathbf{n}_S \tag{2-29}$$

Engrènements intérieurs :

$$\begin{aligned}
 \delta_j^R(\mathbf{M}_{jik}) \cdot \mathbf{n}_j^* &= \left[\mathbf{u}_j^C(\mathbf{M}_{jik}) + \mathbf{u}_C^{\overline{\sigma}}(\mathbf{M}_{jik}) - \mathbf{u}_R^{\overline{\sigma}}(\mathbf{M}_{jik}) \right] \cdot \mathbf{n}_j^* \\
 &= \mathbf{U}_{jik}^* + \left[\begin{array}{l} \varphi_j \mathbf{z} \times \mathbf{G}_j \mathbf{M}_{jik} + \zeta \varphi_C \mathbf{z} \times \mathbf{G}_C \mathbf{M}_{jik} \\ -(1-\zeta) \varphi_R \mathbf{z} \times \mathbf{G}_R \mathbf{M}_{jik} \end{array} \right] \cdot \mathbf{n}_j^* \\
 &= \mathbf{U}_{jik}^* + \left[\begin{array}{l} (\varphi_j + \zeta \varphi_C) \mathbf{z} \times \mathbf{G}_j \mathbf{M}_{jik} + \zeta \varphi_C \mathbf{z} \times \mathbf{G}_C \mathbf{G}_j \\ -(1-\zeta) \varphi_R \mathbf{z} \times \mathbf{G}_R \mathbf{M}_{jik} \end{array} \right] \cdot \mathbf{n}_j^*
 \end{aligned} \tag{2-30}$$

avec :

$$\mathbf{U}_{jik}^* = \left[\mathbf{u}_{j,ass}^C(\mathbf{M}_{jik}) + \mathbf{e}_{j,f}(\mathbf{M}_{jik}) + \mathbf{u}_{C,ass}^{\overline{\sigma}}(\mathbf{M}_{jik}) - \mathbf{u}_{R,ass}^{\overline{\sigma}}(\mathbf{M}_{jik}) - \mathbf{e}_{R,f}(\mathbf{M}_{jik}) \right] \cdot \mathbf{n}_j^* \tag{2-31}$$

En assurant le contact là où l'écart normal équivalent est maximum la condition (a) peut s'écrire (l'exposant « ' » est associé au point de contact):

$$\delta_S^j(M'_{jik}).\mathbf{n}_S = 0 = \max_{ik}^j(U_{jik}) + \left[-\zeta\varphi_C \mathbf{z} \times \mathbf{G}_C \mathbf{G}_j - (\varphi_j + \zeta\varphi_C) \mathbf{z} \times \mathbf{G}_j M'_{jik} \right] \cdot \mathbf{n}_S \quad (2-32)$$

et la combinaison de rotations le permettant est donc:

$$(\varphi_j + \zeta\varphi_C) = \frac{\max_{ik}^j(U_{jik}) - \zeta\varphi_C \mathbf{z} \times \mathbf{G}_C \mathbf{G}_j \cdot \mathbf{n}_S}{\mathbf{z} \times \mathbf{G}_j M'_{jik} \cdot \mathbf{n}_S} \quad (2-33)$$

En réinjectant la combinaison de rotations $(\varphi_j + \zeta\varphi_C)$ dans le rapprochement des corps pour les engrènements intérieurs on a :

$$\delta_j^R(M_{jik}).\mathbf{n}_j^* = U_{jik}^{**} + \zeta\varphi_C (\mathbf{z} \times \mathbf{G}_C \mathbf{G}_j \cdot \mathbf{n}_j^* - \mathbf{z} \times \mathbf{G}_C \mathbf{G}_j \cdot \mathbf{n}_S) + (\zeta - 1)\varphi_R \mathbf{z} \times \mathbf{G}_R M_{jik} \cdot \mathbf{n}_j^* \quad (2-34)$$

avec :

$$U_{jik}^{**} = U_{jik}^* + \max_{ik}^j(U_{jik}) \quad (2-35)$$

Suivant la même méthodologie, la condition (b) s'exprime sous la forme :

$$\begin{aligned} \delta_j^R(M'_{jik}).\mathbf{n}_j^* &= 0 \\ &= \max_{jik}(U_{jik}^{**}) + \zeta\varphi_C (\mathbf{z} \times \mathbf{G}_C \mathbf{G}_j \cdot \mathbf{n}_j^* - \mathbf{z} \times \mathbf{G}_C \mathbf{G}_j \cdot \mathbf{n}_S) \\ &\quad + (\zeta - 1)\varphi_R \mathbf{z} \times \mathbf{G}_R M'_{jik} \cdot \mathbf{n}_j^* \end{aligned} \quad (2-36)$$

et le petit angle rétablissant le contact sur les engrènements couronne / satellites est :

Pour un train planétaire ($\zeta = 0$ et $\varphi_C = 0$) :

$$\varphi_R = \frac{\max_{jik} (U_{jik}^{**})}{\mathbf{z} \times \mathbf{G}_R \mathbf{M}'_{jik} \cdot \mathbf{n}_j^*} = \frac{\max_{jik} (U_{jik}^{**})}{-\varepsilon_s r_{br} \cos \beta_b} \quad (2-37)$$

Pour un train épicycloïdal ($\zeta = 1$ et $\varphi_R = 0$) :

$$\varphi_C = \frac{\max_{jik} (U_{jik}^{**})}{\mathbf{z} \times \mathbf{G}_C \mathbf{G}_j \cdot \mathbf{n}_j^* - \mathbf{z} \times \mathbf{G}_C \mathbf{G}_j \cdot \mathbf{n}_s} = \frac{\max_{jik} (U_{jik}^{**})}{\varepsilon_s R_C \cos \beta_b (\cos \alpha_{Sj} + \cos \alpha_{Rj})} \quad (2-38)$$

Connaissant le jeu de rotations élémentaires (φ_j φ_C φ_R) à appliquer afin de rétablir les contacts, il est possible de connaître la nouvelle distribution d'écart normal, appelés séparations initiales, sur toutes les cellules des engrènements à un instant donné:

Engrènements extérieurs :

$$\delta e_S^j (\mathbf{M}_{jik}) \cdot \mathbf{n}_s = \max_{ik}^j (U_{jik}) - U_{jik} \quad (2-39)$$

Engrènements intérieurs :

$$\delta e_j^R (\mathbf{M}_{jik}) \cdot \mathbf{n}_j^* = \max_{jik} (U_{jik}^{**}) - U_{jik}^{**} \quad (2-40)$$

Il doit être noté que dans le cas d'une denture double-hélice, la recherche des points de contact dans les conditions de corps rigides (recherche des maxima) doit être réalisée simultanément sur les deux hélices.

2.2.4 Cinématique de corps rigides

Les positions des points de contact dans les conditions de corps rigides étant connues (cellules où la séparation initiale est nulle), la cinématique des différents composants est déterminée en imposant une vitesse relative normale nulle aux points de contact \mathbf{M}' .

Pour les engrènements extérieurs :

$$\mathbf{V}_S^j(\mathbf{M}'_{jik}) \cdot \mathbf{n}_s = 0 \quad (2-41)$$

Pour les engrènements intérieurs :

$$\mathbf{V}_j^R(\mathbf{M}'_{jik}) \cdot \mathbf{n}_j^* = 0 \quad (2-42)$$

A partir de ces deux équations, les vitesses et accélérations des différents composants sont déduites et s'écrivent:

Vitesses :

$$\Omega_C^0 = (1 - \zeta) \cdot \left[\left(\frac{r_{bS}}{r_{bS} + r_{bR}} \right) \cdot \Omega_S^0 - \left(\frac{1}{r_{bS} + r_{bR}} \right) \cdot \left(\frac{\dot{E}_{\max R} - \dot{E}_{\max S}(j)}{\cos \beta_b} \right) \right] \quad (2-43)$$

$$\Omega_S^{\mathfrak{S}} = \Omega_S^0 - \Omega_C^0 \quad (2-44)$$

$$\Omega_j^{\mathfrak{S}}(j) = \left(\frac{-r_{bS}}{r_{bj}} \right) \cdot \Omega_S^{\mathfrak{S}} - \left(\frac{\dot{E}_{\max S}(j)}{r_{bj} \cdot \cos \beta_b} \right) \quad (2-45)$$

$$\Omega_R^{\mathfrak{S}} = \left(\frac{-r_{bS}}{r_{bR}} \right) \cdot \Omega_S^{\mathfrak{S}} + \left(\frac{\dot{E}_{\max R} - \dot{E}_{\max S}(j)}{r_{bR} \cdot \cos \beta_b} \right) \quad (2-46)$$

Accélérations :

$$\dot{\Omega}_C^0 = (1 - \zeta) \cdot \left[- \left(\frac{1}{r_{bS} + r_{bR}} \right) \cdot \left(\frac{\ddot{E}_{\max R} - \ddot{E}_{\max S}(j)}{\cos \beta_b} \right) \right] \quad (2-47)$$

$$\dot{\Omega}_S^{\mathfrak{S}} = -\dot{\Omega}_C^0 \quad (2-48)$$

$$\dot{\Omega}_j^{\mathfrak{S}}(j) = \left(\frac{-r_{bS}}{r_{bj}} \right) \cdot \dot{\Omega}_S^{\mathfrak{S}} - \left(\frac{\ddot{E}_{\max S}(j)}{r_{bj} \cdot \cos \beta_b} \right) \quad (2-49)$$

$$\dot{\Omega}_R^{\mathfrak{S}} = \left(\frac{-r_{bS}}{r_{bR}} \right) \cdot \dot{\Omega}_S^{\mathfrak{S}} + \left(\frac{\ddot{E}_{\max R} - \ddot{E}_{\max S}(j)}{r_{bR} \cdot \cos \beta_b} \right) \quad (2-50)$$

avec : $E_{\max S}(j) = \max_{ik}^j (U_{jik})$, $E_{\max R} = \max_{jik} (U_{jik}^{**})$ et $\dot{\bullet} / \ddot{\bullet}$ est la dérivée première / seconde par rapport au temps de l'entité générique \bullet . Les exposants 0 et \mathfrak{S} font références au repère galiléen (fixe) et inertiel (tournant) respectivement.

A ce stade, l'état de référence est complètement défini, c'est-à-dire que la position des points de contact et les séparations initiales, ainsi que la cinématique de corps rigides de chacun des composants sont connues à chaque instant. A cet état de référence sera ensuite superposé l'état déformé des différents mobiles.

2.3 Etat déformé

2.3.1 Eléments d'engrenages à corps rigides

2.3.1.1 Matrice de raideur et termes excitateurs liés à l'engrènement

Le modèle d'engrenage avec lignes de contact discrétisées développé par Velez et Maatar [9] sert de référence pour chacun des engrènements du train planétaire. Un certain nombre d'hypothèses sont faites afin de modéliser une liaison par engrenages :

- (a) le corps des engrenages est supposé rigide,
- (b) les contacts entre dentures sont supposés linéiques et demeurent dans les plans d'action théoriques,
- (c) la normale extérieure aux flancs de denture est supposée invariante,
- (d) la lubrification est considérée comme élasto-hydrodynamique à film complet, permettant de négliger la contribution tangentielle des efforts transmis au profit de la composante normale.

Sous ces hypothèses, une approche basée sur la mécanique des solides indéformables peut être utilisée, et la déformée dynamique d'un pignon peut être représentée en utilisant un torseur de déplacements infinitésimaux (Etat déformé) composé de 3 rotations et de 3 translations attachées au centre de gravité du pignon, soit:

Pour les composants centraux :

$$\left\{ \mathbf{S}_g^{\mathfrak{R}_1} (\mathbf{O}_g) \right\} = \begin{cases} \boldsymbol{\omega}_g^{\mathfrak{R}_1} = \phi_g \mathbf{x}_1 + \psi_g \mathbf{y}_1 + \theta_g \mathbf{z} \\ \mathbf{u}_g^{\mathfrak{R}_1} (\mathbf{O}_g) = x_g \mathbf{x}_1 + y_g \mathbf{y}_1 + z_g \mathbf{z} \end{cases} \quad (2-51)$$

Pour les satellites :

$$\left\{ \mathbf{S}_j^{\mathfrak{R}_j} (\mathbf{O}_j) \right\} = \begin{cases} \boldsymbol{\omega}_j^{\mathfrak{R}_j} = \phi_j \mathbf{x}_j + \psi_j \mathbf{y}_j + \theta_j \mathbf{z} \\ \mathbf{u}_j^{\mathfrak{R}_j} (\mathbf{O}_j) = x_j \mathbf{x}_j + y_j \mathbf{y}_j + z_j \mathbf{z} \end{cases} \quad (2-52)$$

L'engrènement est ensuite simulé en faisant évoluer les lignes de contact dans le plan d'action en fonction de la cinématique de corps rigides des composants actualisée pas à pas dans le temps (en fonction des erreurs 2.2.4). La liaison élastique entre les cylindres de base (raideur d'engrènement) est également fortement dépendante des erreurs, et en complément de la séparation initiale, un petit élément de raideur est associé à chacune des cellules (Figure 2-10).

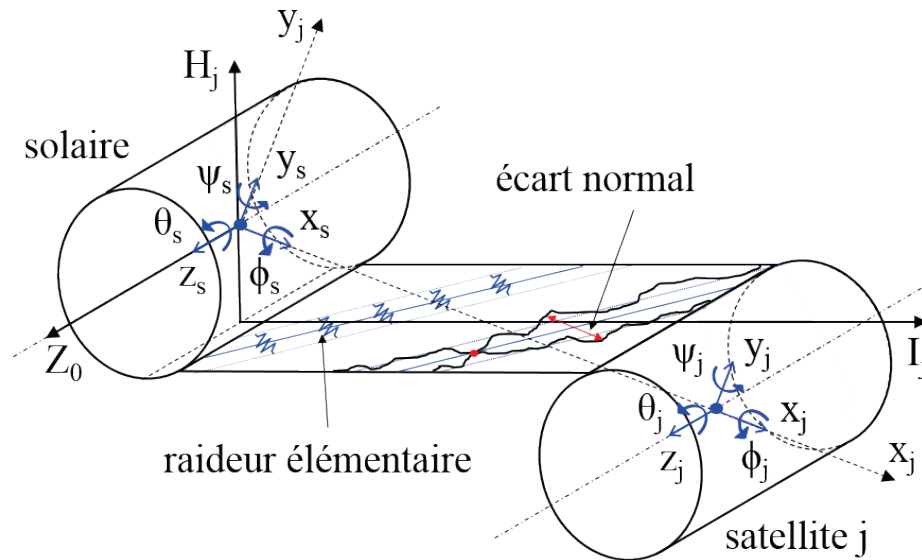


Figure 2-10. Définition de l'élément d'engrenage (denture extérieure)

La déflexion normale à la denture en un point de contact potentiel M (une cellule), peut être vue comme la différence entre le rapprochement (ou l'éloignement) engendré par les déplacements infinitésimaux (degrés de liberté) et la séparation initiale qu'il a fallu couvrir avant que le contact ne s'établisse, soit:

$$\Delta(M_{jik}) = \delta(M_{jik}) - \delta e(M_{jik}) \quad (2-53)$$

En utilisant la propriété du transport du moment d'un torseur, le rapprochement normal des corps en un point de contact M s'écrit :

Engrenements extérieurs :

$$\begin{aligned} \delta_s^j(M_{jik}) \cdot \mathbf{n}_s &= \left[\mathbf{u}_S^{\mathfrak{R}_1}(M_{jik}) - \mathbf{u}_j^{\mathfrak{R}_j}(M_{jik}) \right] \cdot \mathbf{n}_s \\ &= \left[\mathbf{u}_S^{\mathfrak{R}_1}(O_S) + O_S M_{jik} \times \omega_S^{\mathfrak{R}_1} - \mathbf{u}_j^{\mathfrak{R}_j}(O_j) - O_j M_{jik} \times \omega_j^{\mathfrak{R}_j} \right] \cdot \mathbf{n}_s \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{n}_s \\ M_{jik} O_S \times \mathbf{n}_s \\ -\mathbf{n}_s \\ -M_{jik} O_j \times \mathbf{n}_s \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_S^{\mathfrak{R}_1}(O_S) \\ \omega_S^{\mathfrak{R}_1} \\ \mathbf{u}_j^{\mathfrak{R}_j}(O_j) \\ \omega_j^{\mathfrak{R}_j} \end{bmatrix} = {}^T V_{Sj} X_{Sj} \end{aligned} \quad (2-54)$$

Engrenements intérieurs :

$$\begin{aligned}
 \delta_j^R(\mathbf{M}_{jik}) \cdot \mathbf{n}_j^* &= \left[\mathbf{u}_j^{\mathfrak{R}_j}(\mathbf{M}_{jik}) - \mathbf{u}_R^{\mathfrak{R}_1}(\mathbf{M}_{jik}) \right] \cdot \mathbf{n}_j^* \\
 &= \left[\mathbf{u}_j^{\mathfrak{R}_j}(\mathbf{O}_j) + \mathbf{O}_j \mathbf{M}_{jik} \times \boldsymbol{\omega}_j^{\mathfrak{R}_j} - \mathbf{u}_R^{\mathfrak{R}_1}(\mathbf{O}_R) - \mathbf{O}_R \mathbf{M}_{jik} \times \boldsymbol{\omega}_R^{\mathfrak{R}_1} \right] \cdot \mathbf{n}_j^* \\
 &= \begin{bmatrix} -\mathbf{n}_j^* \\ -\mathbf{M}_{jik} \mathbf{O}_R \times \mathbf{n}_j^* \\ \mathbf{n}_j^* \\ \mathbf{M}_{jik} \mathbf{O}_j \times \mathbf{n}_j^* \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_R^{\mathfrak{R}_1}(\mathbf{O}_R) \\ \boldsymbol{\omega}_R^{\mathfrak{R}_1} \\ \mathbf{u}_j^{\mathfrak{R}_j}(\mathbf{O}_j) \\ \boldsymbol{\omega}_j^{\mathfrak{R}_j} \end{bmatrix} = {}^T \mathbf{V}_{Rj} \mathbf{X}_{Rj}
 \end{aligned} \tag{2-55}$$

avec les vecteurs de structure \mathbf{V}_{gj} :

$$\mathbf{V}_{sj}(\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} \left. \begin{array}{c} \cos\beta_b \sin\rho_s \\ \varepsilon_s \cos\beta_b \cos\rho_s \\ -\varepsilon_s \varepsilon \sin\beta_b \\ \varepsilon \sin\beta_b \sin\rho_s r_{bs} - \varepsilon_s \cos\rho_s (\eta_k + p_s \varepsilon_s \varepsilon \sin\beta_b) \\ \varepsilon_s \varepsilon \sin\beta_b \cos\rho_s r_{bs} + \sin\rho_s (\eta_k + p_s \varepsilon_s \varepsilon \sin\beta_b) \\ \varepsilon_s r_{bs} \cos\beta_b \end{array} \right\}_{R_1} \\ \left. \begin{array}{c} -\cos\beta_b \sin\alpha_{sj} \\ -\varepsilon_s \cos\beta_b \cos\alpha_{sj} \\ \varepsilon_s \varepsilon \sin\beta_b \\ \varepsilon \sin\beta_b \sin\alpha_{sj} r_{bj} + \varepsilon_s \cos\alpha_{sj} (\eta_k - p_j \varepsilon_s \varepsilon \sin\beta_b) \\ \varepsilon_s \varepsilon \sin\beta_b \cos\alpha_{sj} r_{bj} - \sin\alpha_{sj} (\eta_k - p_j \varepsilon_s \varepsilon \sin\beta_b) \\ \varepsilon_s r_{bj} \cos\beta_b \end{array} \right\}_{R_j} \end{bmatrix} \tag{2-56}$$

$$\mathbf{V}_{Rj}(\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} \left. \begin{array}{c} -\cos\beta_b \sin\rho_R \\ \varepsilon_s \cos\beta_b \cos\rho_R \\ \varepsilon_s \varepsilon \sin\beta_b \\ \varepsilon \sin\beta_b \sin\rho_R r_{bR} + \varepsilon_s \cos\rho_R (-\eta_k - p_R \varepsilon_s \varepsilon \sin\beta_b) \\ -\varepsilon_s \varepsilon \sin\beta_b \cos\rho_R r_{bR} + \sin\rho_R (-\eta_k - p_R \varepsilon_s \varepsilon \sin\beta_b) \\ \varepsilon_s r_{bR} \cos\beta_b \end{array} \right\}_{R_1} \\ \left. \begin{array}{c} \cos\beta_b \sin\alpha_{Rj} \\ -\varepsilon_s \cos\beta_b \cos\alpha_{Rj} \\ -\varepsilon_s \varepsilon \sin\beta_b \\ -\varepsilon \sin\beta_b \sin\alpha_{Rj} r_{bj} + \varepsilon_s \cos\alpha_{Rj} (\eta_k + p_j^* \varepsilon_s \varepsilon \sin\beta_b) \\ \varepsilon_s \varepsilon \sin\beta_b \cos\alpha_{Rj} r_{bj} + \sin\alpha_{Rj} (\eta_k + p_j^* \varepsilon_s \varepsilon \sin\beta_b) \\ -\varepsilon_s r_{bj} \cos\beta_b \end{array} \right\}_{R_j} \end{bmatrix} \tag{2-57}$$

et le vecteur de degrés de liberté X_{gj} :

$$X_{gj} = {}^T \langle x_g \quad y_g \quad z_g \quad \phi_g \quad \psi_g \quad \theta_g \quad x_j \quad y_j \quad z_j \quad \phi_j \quad \psi_j \quad \theta_j \rangle \quad (2-58)$$

On peut remarquer que seules les composantes du vecteur de structure relatives aux degrés de rotations ϕ et ψ (relatifs aux moments de basculement) sont dépendantes de la position du point de contact M.

En nommant $k(M)$, l'élément de raideur discret attaché à une cellule k (indice), l'énergie de déformation emmagasinée dans une cellule est donc :

$$E_d = \frac{1}{2} k(M) \Delta(M)^2 = \frac{1}{2} k(M) \left({}^T V X - \delta e(M) \right)^2 \quad (2-59)$$

En analysant la formulation de la déflexion à la denture ($\Delta(M)$), on s'aperçoit que cette dernière peut être négative correspondant alors à un décollement entre les dentures (perte de contact). Afin de rendre compte de pertes de contact, un algorithme de contact normal unilatéral est implémenté, vérifiant que chacune des raideurs travaille en compression et réactualisant la distribution d'éléments de raideur selon l'algorithme ci-dessous:

$$\text{A chaque pas de temps } t : \quad \text{si} \quad \begin{cases} \Delta(M) > 0 \\ \Delta(M) < 0 \end{cases} \quad \text{alors} \quad k(M) = \begin{cases} \hat{k}(M) \\ 0 \end{cases} \quad (2-60)$$

avec $\hat{k}(M)$ la raideur d'engrènement linéique dépendante de la position du point de contact et de la charge instantanée, calculée à l'aide de la formulation de Weber-Banascheck [11] (raideur de flexion, de pivotement et de contact).

En sommant à chaque instant les contributions individuelles de chacune des cellules dans la fenêtre d'engrènement du plan d'action, une matrice de rigidité d'engrènement et un terme d'excitation instantanés sont déduits sous la forme :

$$K_{\text{mesh}}(t, X) = \sum_{gjk} k(M) V_{gj} {}^T V_{gj} \quad (2-61)$$

$$F_{\delta e}(t, X) = \sum_{gjk} k(M) \delta e(M) {}^T V_{gj} \quad (2-62)$$

On peut noter que ces deux termes sont dépendants du temps et des degrés de liberté constituant ainsi une excitation paramétrique dans les équations du mouvement, responsable d'un éventuel comportement instable (équations de Matthieu-Hill).

2.3.1.2 Matrices de masse, des effets gyroscopique et centrifuge, et terme d'excitation dû à l'accélération du porte-satellites

Considérant un composant central, les vecteurs de position et d'accélération (en négligeant les termes en $\dot{\Omega}_C^0$) du centre de gravité sont (Figure 2-11) :

$$O_0G_g = x_g \mathbf{x}_1 + y_g \mathbf{y}_1 + z_g \mathbf{z} + e x_g \mathbf{x}_1 + e y_g \mathbf{y}_1 + e c_g \mathbf{T}_g \quad (2-63)$$

$$J_g^0(G_g) \cong \left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}_g - 2\Omega_C^0 \dot{y}_g - (\Omega_C^0)^2 x_g - e c_g (\Omega_C^0)^2 \cos \lambda_g + e x_g (\Omega_C^0)^2 \\ \ddot{y}_g + 2\Omega_C^0 \dot{x}_g - (\Omega_C^0)^2 y_g - e c_g (\Omega_C^0)^2 \sin \lambda_g + e y_g (\Omega_C^0)^2 \\ \ddot{z}_g \end{array} \right\}_{\mathfrak{R}_1} \quad (2-64)$$

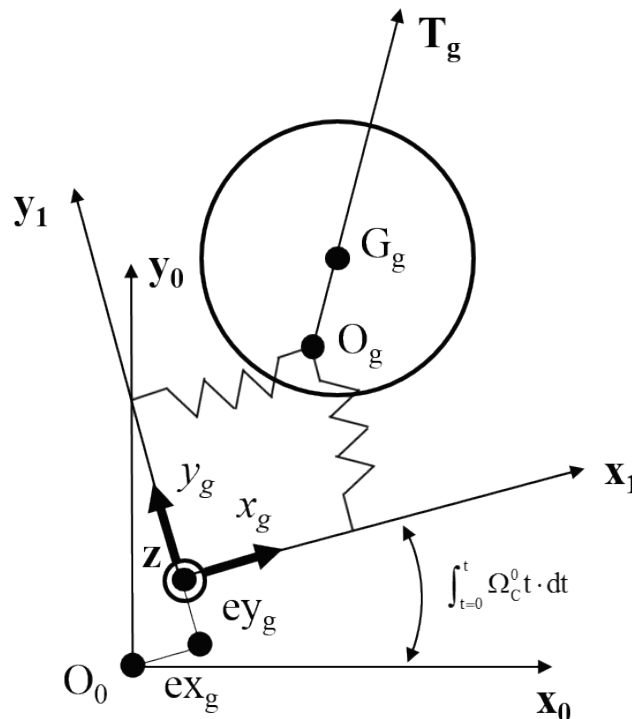


Figure 2-11. Représentation plane de la position instantanée du centre de gravité des composants centraux

Les vecteurs de rotation et d'accélération angulaire (en négligeant les termes en $\dot{\Omega}_C^0$) sont :

$$\omega_g^{\mathfrak{R}_1} = \phi_g \mathbf{x}_1 + \psi_g \mathbf{y}_1 + \left(\theta_g + \int \Omega_g^0 dt \right) \mathbf{z} \quad (2-65)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} (\omega_g^{\mathfrak{R}_1}) \cong \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\phi}_g - 2\Omega_C^0 \dot{\psi}_g - (\Omega_C^0)^2 \phi_g \\ \ddot{\psi}_g - 2\Omega_C^0 \dot{\phi}_g - (\Omega_C^0)^2 \psi_g \\ \ddot{\theta}_g + \dot{\Omega}_g^0 \end{array} \right\}_{\mathfrak{R}_1} \quad (2-66)$$

Selon le principe fondamental de la dynamique, la résultante et le moment dynamique, sous une forme matricielle, sont:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{l} \Sigma_g^0 \\ \delta_g^0(O_g) \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{cccccc} m_g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_g e c_g \sin \lambda_g & I_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_g e c_g \cos \lambda_g & 0 & I_t & 0 \\ -m_g e c_g \sin \lambda_g & m_g e c_g \cos \lambda_g & 0 & 0 & 0 & I_G \end{array} \right] \ddot{X}_g \\ &+ 2\Omega_C^0 \left[\begin{array}{cccccc} 0 & -m_g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \dot{X}_g \\ &- (\Omega_C^0)^2 \left[\begin{array}{cccccc} m_g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_t & -\Delta I \dot{\Omega}_g^0 / \Omega_C^{02} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta I \dot{\Omega}_g^0 / \Omega_C^{02} & I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] X_g \\ &- \left\{ \begin{array}{l} m_g \Omega_g^{02} e c_g \cos \lambda_g + m_g \Omega_C^{02} e x_g \\ m_g \Omega_C^{02} e c_g \sin \lambda_g + m_g \Omega_C^{02} e y_g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I_G \dot{\Omega}_g^0 \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (2-67)$$

avec \mathbf{X}_g le vecteur de degrés de liberté du composant central g et $\Delta I = I_t - I_G$ la différence entre le moment d'inertie transverse et le moment d'inertie polaire.

Pour les satellites, les vecteurs de position et de rotation sont (Figure 2-12):

$$\mathbf{O}_0\mathbf{G}_j = e_{x_c}\mathbf{x}_1 + e_{y_c}\mathbf{y}_1 + e_{z_c}\mathbf{z}_c + (\mathbf{R}_c + x_j + e_{x_j})\mathbf{x}_j + (y_j + e_{y_j})\mathbf{y}_j + z_j\mathbf{z} + e_{z_j}\mathbf{T}_j \quad (2-68)$$

$$\omega_g^{s_1} = \phi_g \mathbf{x}_1 + \psi_g \mathbf{y}_1 + \left(\theta_g + \int \Omega_g^0 dt \right) \mathbf{z} \quad (2-69)$$

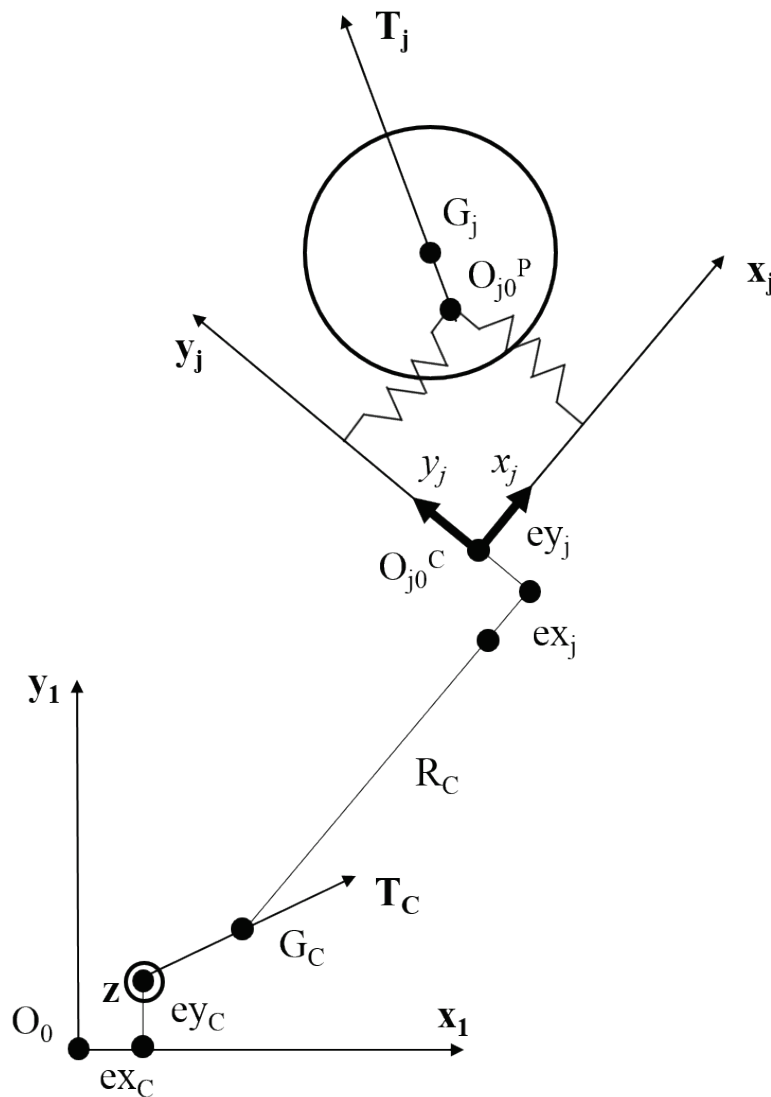


Figure 2-12. Représentation plane de la position instantanée du centre de gravité d'un satellite

Finalement, la résultante et le moment dynamique donnent :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \Sigma_j^0 \\ \delta_j^0(O_j) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_j e c_j \sin \lambda_j & I_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_j e c_j \cos \lambda_j & 0 & I_t & 0 \\ -m_j e c_j \sin \lambda_j & m_j e c_j \cos \lambda_j & 0 & 0 & 0 & I_G \end{bmatrix} \ddot{X}_j \\
 +2\Omega_C^0 & \begin{bmatrix} 0 & -m_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{X}_j \\
 -(\Omega_C^0)^2 & \begin{bmatrix} m_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_t & -\Delta I \dot{\Omega}_j^0 / \Omega_C^{02} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta I \dot{\Omega}_j^0 / \Omega_C^{02} & I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X_j \\
 - & \left. \begin{array}{l} m_j \Omega_j^{02} e c_j \cos \lambda_j + m_j \Omega_C^{02} (R_C + e x_j + e x_C \cos \Phi_j + e y_C \sin \Phi_j + e c_C \cos(\lambda - \Phi_j)) \\ m_j \Omega_j^{02} e c_j \sin \lambda_j + m_j \Omega_C^{02} (e y_j - e x_C \sin \Phi_j + e y_C \cos \Phi_j + e c_C \sin(\lambda - \Phi_j)) - m_j \dot{\Omega}_C^0 R_C \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I_G \dot{\Omega}_g^0 \end{array} \right\}
 \end{aligned}
 \tag{2-70}$$

avec X_j le vecteur de degrés de liberté du satellite j .

2.3.2 Élément de palier

Un modèle simplifié de palier est utilisé en ne conservant que les éléments de raideur directe (pas de couplage) pouvant-être potentiellement anisotrope. En ce qui concerne les composants centraux (solaire, porte-satellites et couronne) la matrice élémentaire de raideur du support s'écrit donc :

$$\mathbf{K}_{bg} = \text{diag} \left(\left\langle k_{xx} \quad k_{yy} \quad k_{zz} \quad k_{\phi\phi} \quad k_{\psi\psi} \quad k_{\theta\theta} \right\rangle \right) \quad (2-71)$$

L'élément de châssis porte-satellites développé dans [107] est étendu aux 6 degrés de liberté (Figure 2-13). Ce dernier est fondé sur l'hypothèse de corps rigides pour le porte-satellites et les satellites. Le formalisme des torseurs de petits déplacements peut donc être une nouvelle fois utilisé. Dans ce contexte, les torseurs de petits déplacements en \mathcal{O}_j^C (point \mathcal{O}_j appartenant à l'axe du satellite) et \mathcal{O}_j^P (point \mathcal{O}_j appartenant au satellite) s'écrivent ainsi :

Pour le satellite :

$$\left\{ \mathbf{S}_j^{\mathfrak{R}_j} (\mathcal{O}_j^P) \right\} = \begin{cases} \omega_j^{\mathfrak{R}_j} = \phi_j \mathbf{x}_j + \psi_j \mathbf{y}_j + \theta_j \mathbf{z} \\ \mathbf{u}_j^{\mathfrak{R}_j} (\mathcal{O}_j^P) = x_j \mathbf{x}_j + y_j \mathbf{y}_j + z_j \mathbf{z} \end{cases} \quad (2-72)$$

Pour le porte-satellites :

$$\left\{ \mathbf{S}_C^{\mathfrak{R}_1} (\mathcal{O}_j^C) \right\} = \begin{cases} \omega_C^{\mathfrak{R}_1} = \phi_C \mathbf{x}_1 + \psi_C \mathbf{y}_1 + \theta_C \mathbf{z} \\ \mathbf{u}_C^{\mathfrak{R}_1} (\mathcal{O}_j^C) = \mathbf{u}_C^{\mathfrak{R}_1} (\mathcal{O}_C) + \mathbf{O}_j^C \mathbf{O}_C \times \omega_C^{\mathfrak{R}_1} \end{cases} \quad (2-73)$$

avec :

$$\mathbf{u}_C^{\mathfrak{R}_1} (\mathcal{O}_j^C) = \left\{ \begin{array}{l} x_C \cos \Phi_j + y_C \sin \Phi_j - \Gamma (-\phi_C \sin \Phi_j + \psi_C \cos \Phi_j) \\ -x_C \sin \Phi_j + y_C \cos \Phi_j + R_C \theta_C + \Gamma (\phi_C \cos \Phi_j + \psi_C \sin \Phi_j) \\ z_C + R_C (\phi_C \sin \Phi_j - \psi_C \cos \Phi_j) \end{array} \right\}_{\mathfrak{R}_j} \quad (2-74)$$

et Γ valant 0 si le porte-satellites est monté de façon équilibrée ou la longueur du bras de levier si celui-ci est monté en porte-à-faux.

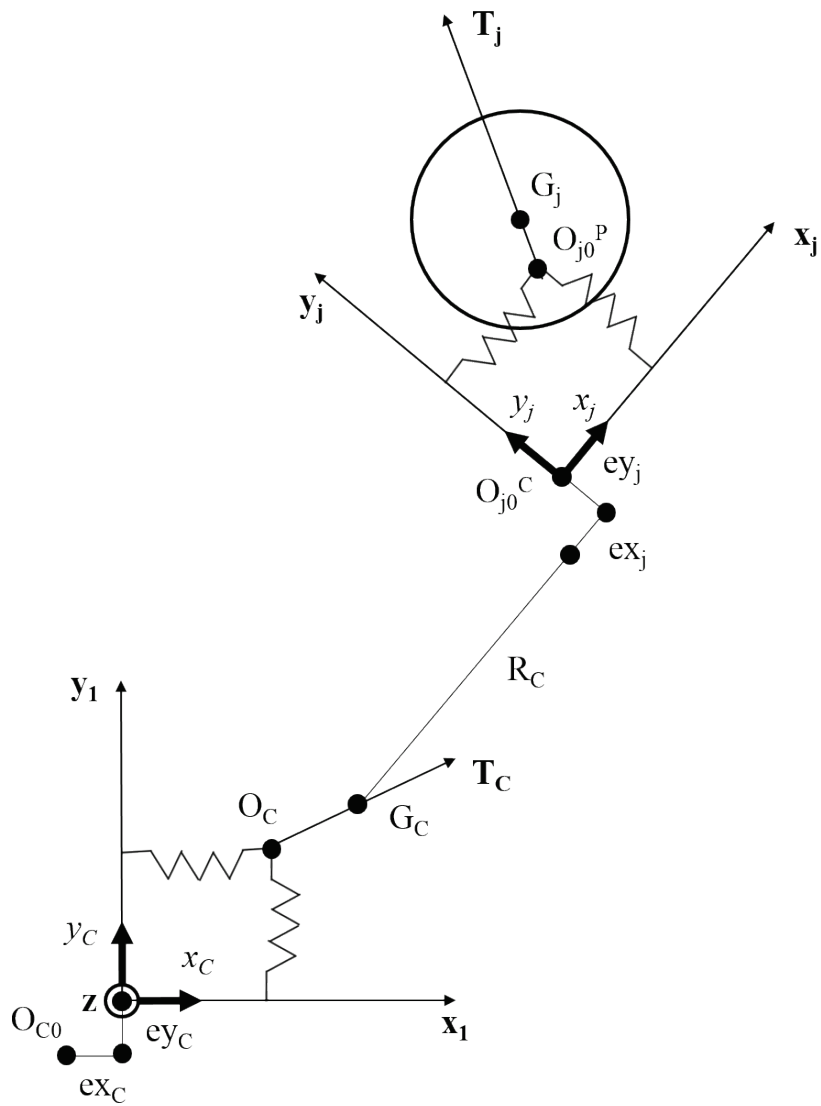


Figure 2-13. Représentation plane de l'élément châssis porte-satellite.

L'énergie de déformation dans la liaison élastique (linéaire) entre les points O_j^C et O_j^P générée par les déplacements du satellite et du porte-satellites est:

$$E_d = \frac{1}{2} \sum_{d=1}^6 k_{dd} \Delta_d^2 \quad (2-75)$$

avec d l'indice des degrés de liberté (3 translations et 3 rotations) et Δ_d les écrasements (rapprochement des corps) générés par les déplacements projetés dans chacune des directions. Ces termes peuvent s'exprimer sous forme vectorielle comme suit :

$$\Delta_d = \mathbf{V}_d^T \mathbf{X}_{Cj} \quad (2-76)$$

avec \mathbf{X}_{Cj} vecteur des degrés de liberté du porte-satellites et du satellite, et \mathbf{V}_d des vecteurs de projection, qui après développement s'expriment comme :

Pour les translations :

$$\mathbf{V}_x = \begin{Bmatrix} \cos \Phi_j \\ \sin \Phi_j \\ 0 \\ \Gamma \sin \Phi_j \\ -\Gamma \cos \Phi_j \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{V}_y = \begin{Bmatrix} -\sin \Phi_j \\ \cos \Phi_j \\ 0 \\ \Gamma \cos \Phi_j \\ \Gamma \sin \Phi_j \\ R_c \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{V}_z = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ R_c \sin \Phi_j \\ -R_c \cos \Phi_j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2-77)$$

Pour les rotations :

$$\mathbf{V}_\phi = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cos \Phi_j \\ \sin \Phi_j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{V}_\psi = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\sin \Phi_j \\ \cos \Phi_j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{V}_\theta = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad (2-78)$$

Finalement, l'énergie de déformation dans la liaison élastique est de la forme :

$$\mathbf{E}_d = \frac{1}{2} {}^T \mathbf{X}_{Cj} \left[\sum_{d=1}^6 \mathbf{k}_{dd} \mathbf{V}_d {}^T \mathbf{V}_d \right] \mathbf{X}_{Cj} = \frac{1}{2} {}^T \mathbf{X}_{Cj} \left[\mathbf{K}_{bj} \right] \mathbf{X}_{Cj} \quad (2-79)$$

où \mathbf{K}_{bj} est la matrice de rigidité élémentaire du support d'un satellite.

2.3.3 Structures déformables

2.3.3.1 Couronne flexible

Dans un contexte industriel tel que l'aéronautique, où le gain de masse est un objectif primordial, l'épaisseur de la couronne est généralement réduite et ses déformations ne peuvent plus être négligées. L'approche précédemment utilisée avec des engrenages à corps rigides ne peut donc plus être appliquée. Un des modèles les plus simples consiste à assimiler la couronne à un anneau élastique (l'influence des dents étant négligée à ce stade) discrétisée à l'aide d'éléments de poutre de Timoshenko (droite de section constante et effets centrifuges négligés, **Annexe A**) avec un nœud positionné dans le plan médian de chacune des dents et sur le rayon neutre de l'anneau, [67] (Figure 2-14 et Figure 2-15).

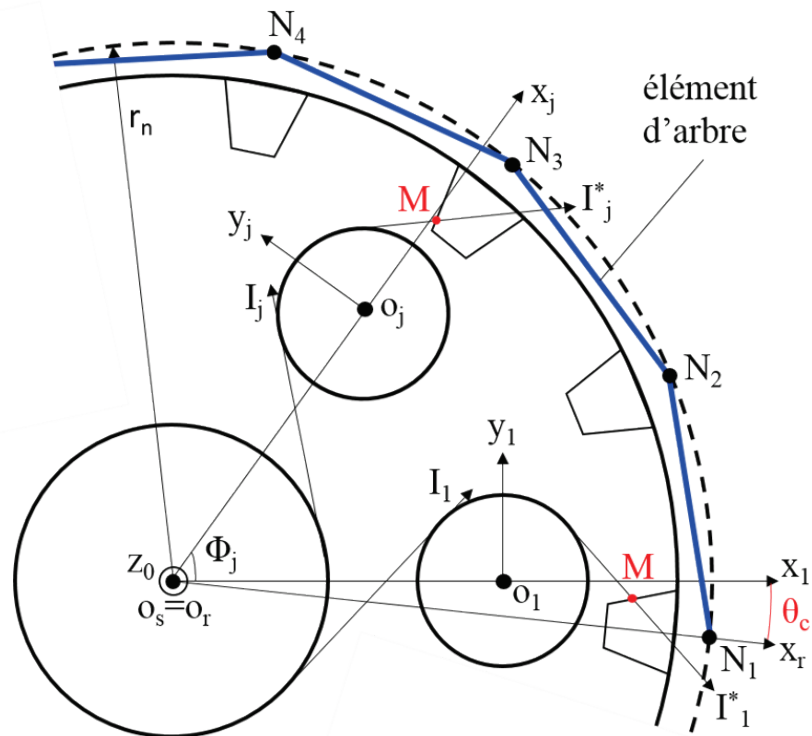


Figure 2-14. Couronne flexible discrétisée à l'aide d'éléments de poutre

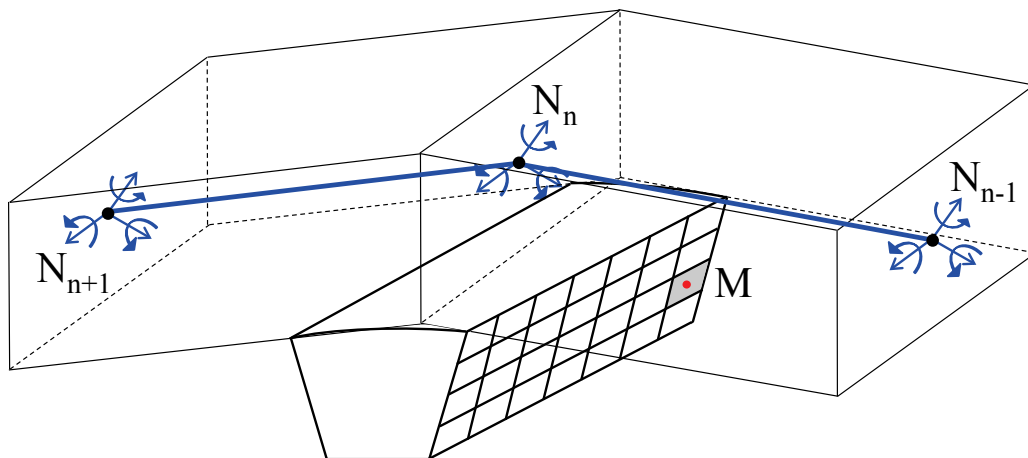


Figure 2-15. Point de contact potentiel vis-à-vis des nœuds des éléments de poutre

Ainsi, à chaque ligne de contact traversant le plan d'engrènement est associé un nœud spécifique (N_n) de la couronne avec 6 degrés de liberté exprimés dans le repère attaché à la couronne $\mathcal{R}_R(\mathbf{x}_R \ \mathbf{y}_R \ \mathbf{z})$. Sous l'hypothèse d'une dent rigide, il est possible de calculer le rapprochement des corps en un point M dans la fenêtre d'engrènement induit par les déplacements du nœud N_n et du satellite par :

$$\delta_{N_j}(M_{j_{ik}}) = {}^T V_{N_j}(M_{j_{ik}}) X_{N_j} \quad (2-80)$$

où le vecteur X est le vecteur des degrés de liberté du nœud N_n et du satellite, et V un vecteur de structure spécifique au nœud N_n de la couronne :

$$X_{N_j} = {}^T \langle x_n \quad y_n \quad z_n \quad \phi_n \quad \psi_n \quad \theta_n \quad x_j \quad y_j \quad z_j \quad \phi_j \quad \psi_j \quad \theta_j \rangle \quad (2-81)$$

$$V_{N_j} = \left[\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} \cos \beta_b \sin \alpha_{R_j} \\ -\varepsilon_s \cos \beta_b \cos \alpha_{R_j} \\ -\varepsilon_s \varepsilon \sin \beta_b \\ -r_{bj} \varepsilon \sin \beta_b \sin \alpha_{R_j} + (p_j^* \varepsilon_s \varepsilon \sin \beta_b + \eta_k) \varepsilon_s \cos \alpha_{R_j} \\ r_{bj} \varepsilon_s \varepsilon \sin \beta_b \cos \alpha_{R_j} + (p_j^* \varepsilon_s \varepsilon \sin \beta_b + \eta_k) \sin \alpha_{R_j} \\ -r_{bj} \varepsilon_s \cos \beta_b \end{array} \right\}_{\mathfrak{R}_j} \\ \left\{ \begin{array}{c} -\cos \beta_b \sin \gamma_{R_j} \\ \varepsilon_s \cos \beta_b \cos \gamma_{R_j} \\ \varepsilon_s \varepsilon \sin \beta_b \\ r_{bR} \varepsilon \sin \beta_b \sin \gamma_{R_j} - (p_r \varepsilon_s \varepsilon \sin \beta_b + \eta_k) \varepsilon_s \cos \gamma_{R_j} - Y_{N_n} \varepsilon_s \varepsilon \sin \beta_b \\ -r_{bR} \varepsilon_s \varepsilon \sin \beta_b \cos \gamma_{R_j} - (p_r \varepsilon_s \varepsilon \sin \beta_b + \eta_k) \sin \gamma_{R_j} + X_{N_n} \varepsilon_s \varepsilon \sin \beta_b \\ r_{bR} \varepsilon_s \cos \beta_b - X_{N_n} \varepsilon_s \cos \beta_b \cos \gamma_{R_j} - Y_{N_n} \cos \beta_b \sin \gamma_{R_j} \end{array} \right\}_{\mathfrak{R}_R} \end{array} \right] \quad (2-82)$$

avec :

X_{N_n} et Y_{N_n} : les coordonnées de N_n dans le repère attaché à la couronne $\mathfrak{R}_R(x_r \quad y_r \quad z)$

$\gamma_{R_j} = \alpha_{R_j} + \varepsilon_s \Phi_j + \theta_C$: un angle de projection

θ_C : l'angle instantané entre les repères \mathfrak{R}_R et \mathfrak{R}_1 attachés à la couronne et au satellite 1 (Figure 2-14).

De cette manière, les calculs de la matrice de raideur d'engrènement et du terme excitateur (séparations initiales) restent identiques en adaptant le vecteur structure utilisé (maintenant spécifique à un nœud de la couronne) lors de la sommation sur les lignes de contact (indice i). D'autre part, la vitesse de rotation de la couronne étant relativement faible, les effets centrifuges et gyroscopiques peuvent être raisonnablement écartés dans cette formulation.

Dans le cas d'une couronne déformable, les conditions aux limites des nœuds N_n peuvent être représentées à l'aide d'éléments de raideurs linéaires en translation dans les 3 directions (fixes dans le repère attaché à la couronne). Une attention particulière doit être donnée au nombre et au positionnement des raideurs de supports sur la couronne afin d'éviter les mouvements de corps rigide.

2.3.3.2 Sous-structures

Le paragraphe précédent présente une façon d'introduire les déformations de la couronne dans le modèle dynamique de train planétaire, mais la détermination réaliste des conditions de support (choix de l'amplitude des raideurs, du nombre et de leur positionnement respectif) reste un défi. Pour remédier à cette situation, il est possible de les introduire sous la forme d'une sous-structure. Les techniques de sous-structuration sont aujourd'hui largement utilisées dans le milieu industriel notamment pour réduire la taille importante des modèles éléments-finis. L'analyse des différentes méthodes de sous-structuration dépasse le cadre de ces travaux. C'est pourquoi, seules les grandes lignes de la méthode de Herting [119] sont données par la suite.

L'objectif premier des méthodes de sous-structuration est de condenser le comportement dynamique d'une structure en certains nœuds spécifiques appelés nœuds « maîtres », constituant une « sous-structure » pouvant être connectée à un modèle plus large (Figure 2-16). Les nœuds restants du maillage éléments-finis sont labélisés comme « internes ». De ce fait, la sous-structuration s'accompagne généralement d'une réduction du nombre de degrés de liberté. L'approximation des déplacements des nœuds « internes » se fait à l'aide de fonctions de forme dûment choisies. Dans la méthode de Herting, une base modale tronquée constituée de modes statiques $\phi_{statique}$ et de modes dynamiques $\phi_{dynamique}$, est utilisée (q étant les déplacements modaux) :

$$X = \begin{Bmatrix} X_{maitre} \\ X_{interne} \end{Bmatrix} = \phi \begin{Bmatrix} X_{maitre} \\ q \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \phi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \phi_{statique} & \phi_{dynamique} \end{bmatrix}$$

Et les matrices réduites sont :

$$M_{réduit} = \phi^T M \phi \quad \text{et} \quad K_{réduit} = \phi^T K \phi$$

Afin d'illustrer le propos, le cas d'une poutre en flexion libre-libre de section constante est pris comme exemple. La poutre est sous-structurée à l'aide de deux nœuds maîtres comme illustré sur la Figure 2-17. Les modes statiques sont les champs de déplacements élastiques générés aux nœuds maîtres en imposant un déplacement unitaire sur un degré de liberté et en conservant les autres à zéro. Les modes dynamiques résultent de l'analyse modale de la sous-structure. La méthode de Herting est dite à interface libre car les nœuds maîtres ne sont pas contraints pendant l'analyse modale, à la différence de la méthode de Craig et Bampton [120] (les modes de corps rigides sont écartés). Suivant les cas étudiés, les modes dynamiques peuvent être choisis de façons différentes, base modale tronquée à N modes, sur une plage de fréquences donnée... Lorsque la dynamique de réducteur à engrenages est l'objet d'étude, l'excitation principale du système est la fréquence d'engrènement (pouvant atteindre la dizaine de kilohertz) et ses harmoniques. Ce constat peut donc entraîner un nombre très important de modes compromettant la réduction de la taille du modèle.

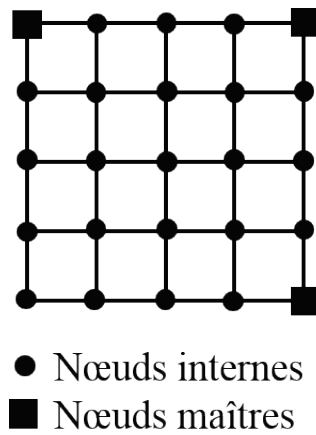


Figure 2-16. Définition des nœuds maîtres et internes d'un maillage éléments-finis réglé

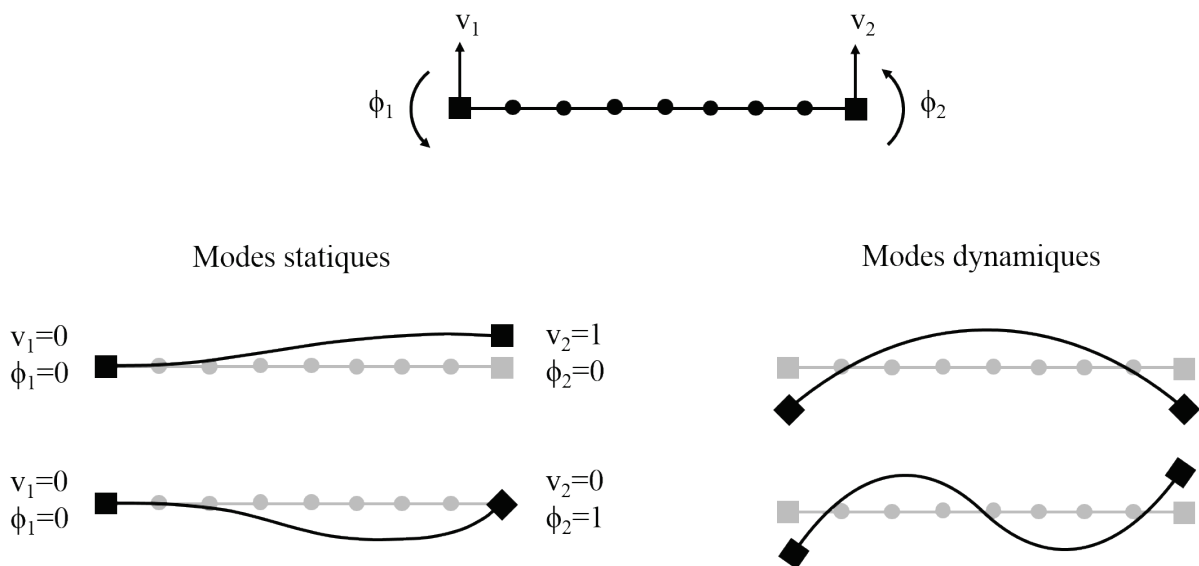


Figure 2-17. Définition des modes statiques et dynamiques d'une poutre libre-libre

2.3.4 Equations du mouvement et leurs résolutions

Un certain nombre d'éléments ont été développés, tel que des engrenages rigides, une couronne flexible, un châssis porte-satellites ou des sous-structures déformables. Les contributions aux énergies de déformation et cinétique sont sommées et l'application des équations de Lagrange conduit finalement à un système différentiel non-linéaire à excitations paramétriques prenant la forme suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + (2\Omega_C^0 \mathbf{C}_{\text{gyro}} + \mathbf{C})\dot{\mathbf{X}} + (\mathbf{K}_s + \mathbf{K}_{\text{ring}} + \mathbf{K}_{\text{mesh}}(t, \mathbf{X}) + \Omega_C^{0,2} \mathbf{K}_{\text{centri}})\mathbf{X} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_\Omega(t) + \mathbf{F}_{\text{de}}(t, \mathbf{X}) \quad (2-83)$$

avec :

\mathbf{X} : le vecteur des degrés de liberté complet

$2\Omega_C^0 \mathbf{C}_{\text{gyro}}$, $\Omega_C^{0,2} \mathbf{K}_{\text{centri}}$, $\mathbf{F}_\Omega(t)$: les matrices des effets gyroscopiques et centrifuges, ainsi qu'un terme excitateur du fait de l'irrégularité de la vitesse de rotation du porte-satellites. Ces termes n'apparaissent que dans une configuration de train épicycloïdal (couronne fixe) car les degrés de liberté sont exprimés dans le repère attaché au porte-satellites (à l'exception des degrés de liberté de la couronne lorsque celle-ci est flexible).

\mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{F}_0 : les matrices complètes de masse, d'amortissement (Rayleigh, choisi proportionnel à la matrice masse) et le vecteur de chargement statique (couples d'entrée et de sortie)

\mathbf{K}_s , \mathbf{K}_{ring} : la matrice des éléments de support (arbres, paliers, sous-structures...) et la matrice de rigidité de la couronne déformable.

$\mathbf{K}_{\text{mesh}}(t, \mathbf{X})$, $\mathbf{F}_{\text{de}}(t, \mathbf{X})$: la matrice de rigidité des engrènements et le vecteur d'excitation induit par les erreurs. Ces deux termes sont dépendants du temps et possiblement non-linéaires.

Afin d'obtenir les distributions de charge pas à pas dans le temps, le système différentiel est intégré avec un schéma pas à pas dans le temps de Newmark implicite inconditionnellement stable et convergent (**Annexe B**). A chaque pas de temps de la résolution un algorithme de contact normal unilatéral est couplé vérifiant que tous les efforts sur les flancs de denture sont compressifs. La Figure 2-18 explicite la procédure de résolution.

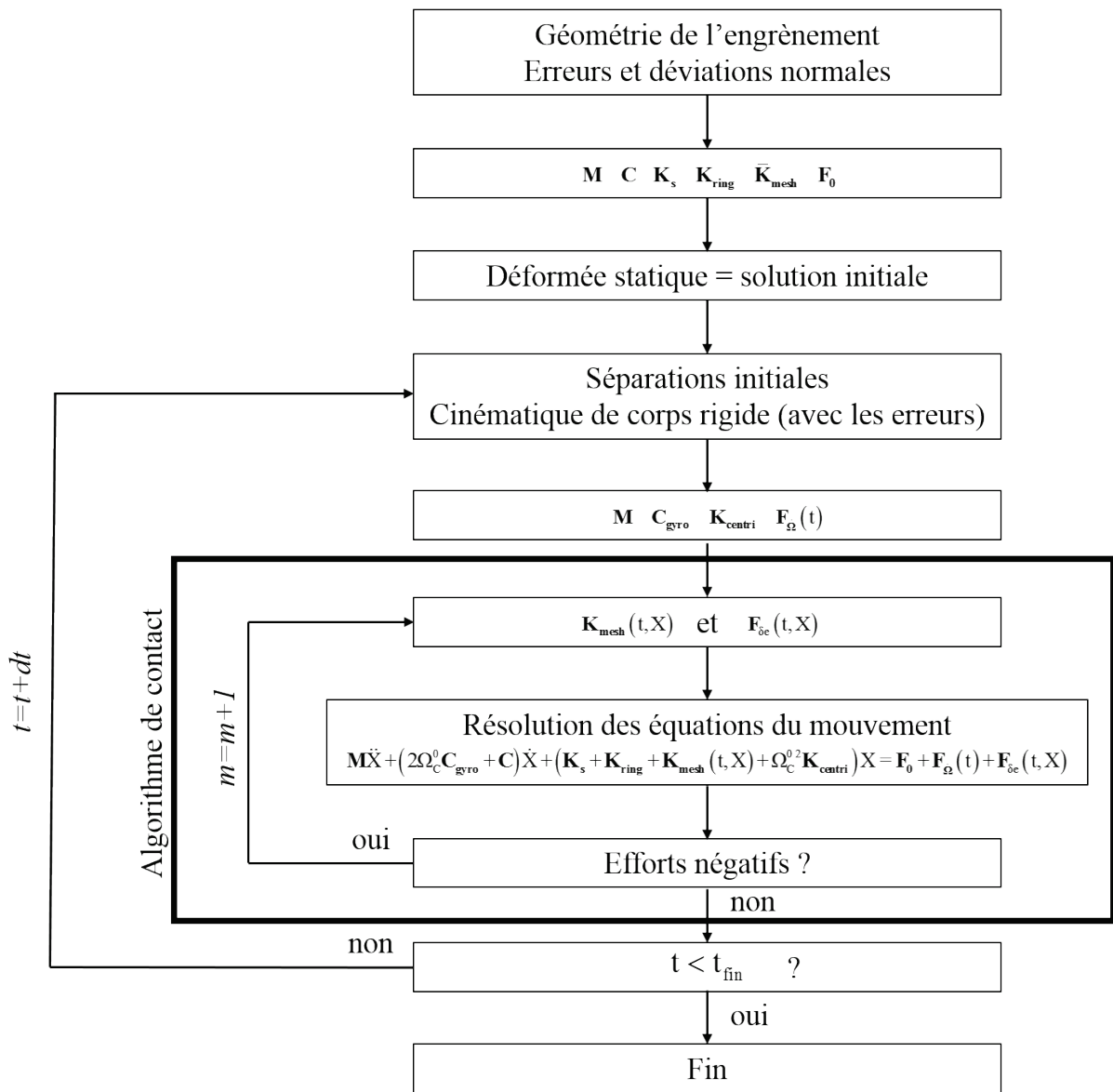


Figure 2-18. Algorithme de résolution des équations de mouvement

Conclusion

Dans ce chapitre, un modèle dynamique tridimensionnel de train planétaire a été développé à l'aide d'éléments spécifiques d'engrenages extérieurs et intérieurs, de châssis porte-satellites, de poutres et de sous-structures.

Le modèle permet de prendre en compte différents types de dentures, tels que droite, à haut rapport de conduite, hélicoïdale et double-hélice, dans des configurations où la couronne est fixe ou tournante. Le modèle n'est pas contraint par le nombre de satellites et les déphasages des engrènements sont implémentés de façon réaliste. Le calcul de la raideur d'engrènement est réalisé en utilisant la formulation de Weber-Banaschek [11] afin de prédire au mieux les vitesses critiques. Les déformations de la couronne sont introduites à l'aide d'un anneau discrétisé par des éléments de poutre droite. Les erreurs d'assemblage et de fabrication ainsi que les corrections de dentures, à la fois sur le profil et le long de l'hélice, sont introduites dans le but d'obtenir des distributions de charge correctes. Enfin des sous-structures déformables peuvent être ajoutées pour modéliser au plus juste les conditions de support de la couronne et des satellites.

La simulation de l'engrènement est réalisée pas à pas dans le temps en fonction de la cinématique instantanée des composants. Les équations du mouvement sont résolues avec un schéma de Newmark, couplé à un algorithme de contact permettant de prendre en compte les pertes de contact partielles ou totales.

Chapitre 3

Eléments de validation

Ce chapitre a pour objectif de valider les choix de modélisation effectués dans le chapitre précédent. Les résultats numériques obtenus avec le modèle dynamique développé dans le cadre de ces travaux sont comparés ceux obtenus dans différentes études, numériques et / ou expérimentales, extraites de la littérature. On s'attachera plus particulièrement

- (a) à l'influence d'erreurs de positionnement des satellites sur la répartition de charge,
- (b) au rôle du décalage d'hélices sur le comportement dynamique d'engrenages double-hélice,
- (c) à l'impact d'erreurs de pas sur le partage de charge entre les hélices (double-hélice) sont analysés et enfin,
- (d) à la réponse modale de trains planétaires,
- (e) aux contributions éventuelles des déformations de couronne sur les efforts dynamiques d'engrènement.

3.1 Géométrie de trains planétaires

Dans ce chapitre, un train planétaire à denture hélicoïdale à quatre satellites est considéré comme cas de référence ; ses principales caractéristiques sont listées dans la Table 3-1. L'entrée de puissance est réalisée via le solaire tandis que le porte-satellites est fixe. Les satellites sont équi-répartis et les engrènements sont déphasés. Le couple d'entrée (solaire) par hélice est de 1000 Nm. Dans ce chapitre, la couronne est considérée comme rigide à l'exception de la dernière section où l'influence de sa déformabilité sera abordée.

Table 3-1. Géométrie des trains planétaires

	Solaire	Satellites	Couronne
Nombre de dents	72	26	124
Module normal [mm]	1.81	1.81	1.81
Angle de pression [°]	23.04	23.04	23.04
Angle d'hélice [°]		20	
Rayon de base [mm]	63.1	22.8	108.8
Entraxe [mm]		92.12	
Largeur active/hélice [mm]		25	25

3.2 Influence d'erreurs de position des satellites

Cette section s'intéresse à l'influence d'erreurs de positionnement des satellites sur le partage de charge entre les satellites. Dans un premiers temps, une erreur de positionnement tangentielle sur le satellite 1 est introduite (ey_1) et le solaire est monté « flottant » (raideurs de support faibles). Le facteur de partage de charge quasi-statique L_j (obtenu pour une vitesse faible) est défini comme $L_j = \text{moy}(F_{\text{stat}}) \cdot r_{\text{bs}} / C_s$ et sera calculé en fonction de l'erreur tangentielle de position d'un satellite variant entre -70 et 70 microns. Les résultats sont représentés et comparés aux données expérimentales de [104] sur la Figure 3-1a. On peut observer (a) une très bonne corrélation entre les résultats numériques et expérimentaux, (b) qu'une erreur positive (au sens de [104]) génère une surcharge sur les dentures et (c) que l'introduction d'un montage « flottant » sur le solaire permet aux satellites diamétralement opposés de partager la même charge quasi-statique. La Figure 3-1b montre le partage de charge en fonction du couple d'entrée pour une valeur d'erreur de positionnement tangentielle de $-70\mu\text{m}$. Il apparaît que plus la charge augmente plus le déséquilibre engendré par l'erreur tangentielle tend à diminuer. On note également, qu'à faible couple, il est possible que le contact soit perdu sur certains satellites et, par conséquent, que la puissance transmise soit partagée par un nombre réduit de satellites (2 dans ce cas) induisant ainsi des surcharges importantes sur les contacts de dentures sources probables d'avaries.

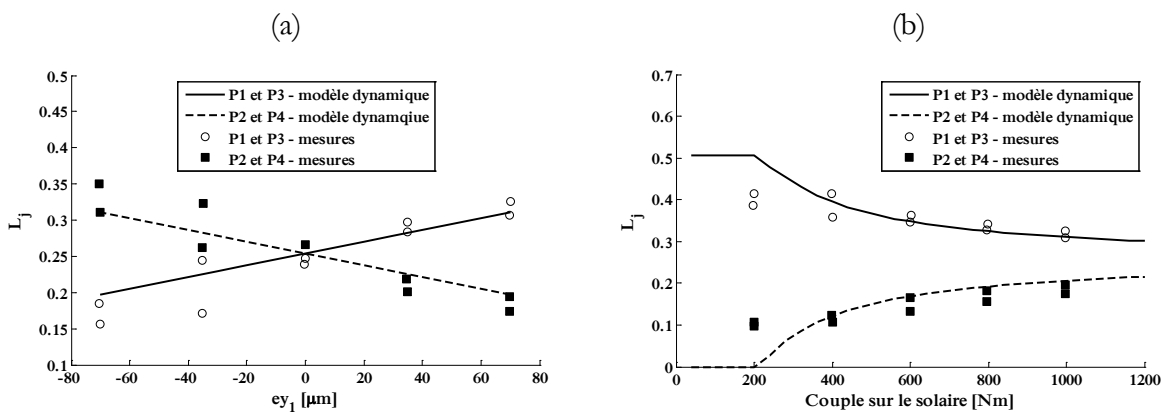


Figure 3-1. Facteur de partage de charge en fonction (a) de l'amplitude de l'erreur ey_1 (couple sur le solaire de 1000 Nm) et (b) du couple sur le solaire ($ey_1 = -70\mu\text{m}$)

Dans ce qui suit, une distribution d'erreurs de positionnement répartie sur les différents satellites est étudiée. Les Figure 3-2a et b présentent le coefficient dynamique $R = F_{\text{dyn}}^{\text{max}} / F_{\text{stat}}^{\text{théorique}}$ et le facteur d'amplification $D = F_{\text{dyn}}^{\text{max}} / F_{\text{stat}}^{\text{erreurs}}$ pour les engrènements solaire / satellites en fonction de la vitesse de rotation du solaire pour la distribution d'erreurs tangentielles suivante $ey = 46, -22, 14, -2 \mu\text{m}$ pour les satellites 1 à 4 respectivement. Les courbes montrent que les erreurs tangentielles changent significativement le partage de charge en statique mais que leur effet sur les amplifications dynamiques est plus nuancé.

Dans le but de mettre en évidence l'impact des tolérances de fabrication, des simulations numériques sont réalisées en considérant des distributions d'erreurs de position radiales et / ou tangentielles aléatoirement tirées dans une distribution normale de $60 \mu\text{m}$ d'écart type (moyenne nulle). Les courbes enveloppes (maximum et minimum) du facteur d'amplification pour les engrènements extérieurs sont représentées sur les Figure 3-3a, b et c. Les résultats montrent une nouvelle fois que les erreurs tangentielles ont une influence non négligeable sur la répartition de charge (statique et dynamique), tandis que les composantes radiales n'ont aucun effet, [103] [107]. En outre, on peut noter qu'aucun couplage n'apparaît entre les erreurs de positionnement radiales et tangentielles (Figure 3-3c).

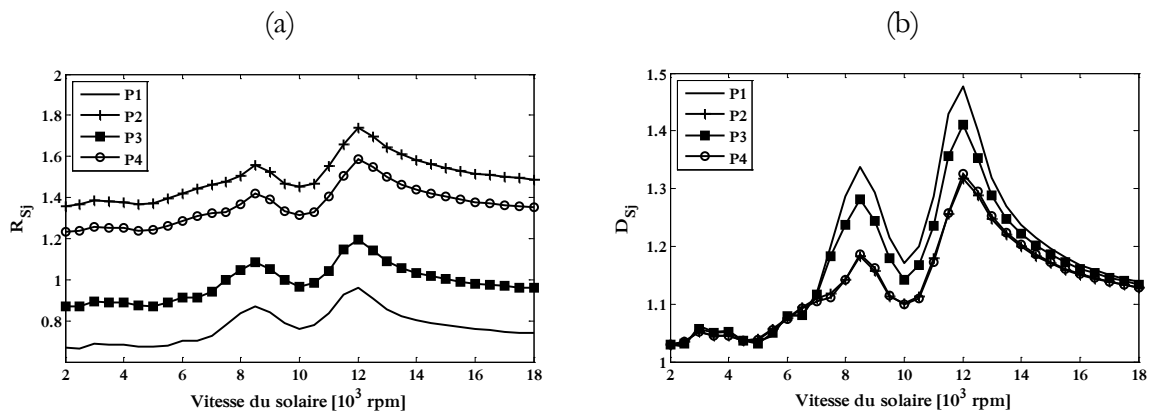


Figure 3-2. (a) Coefficient dynamique et (b) facteur d'amplification des engrènements solaire / satellites en fonction de la vitesse de rotation du solaire

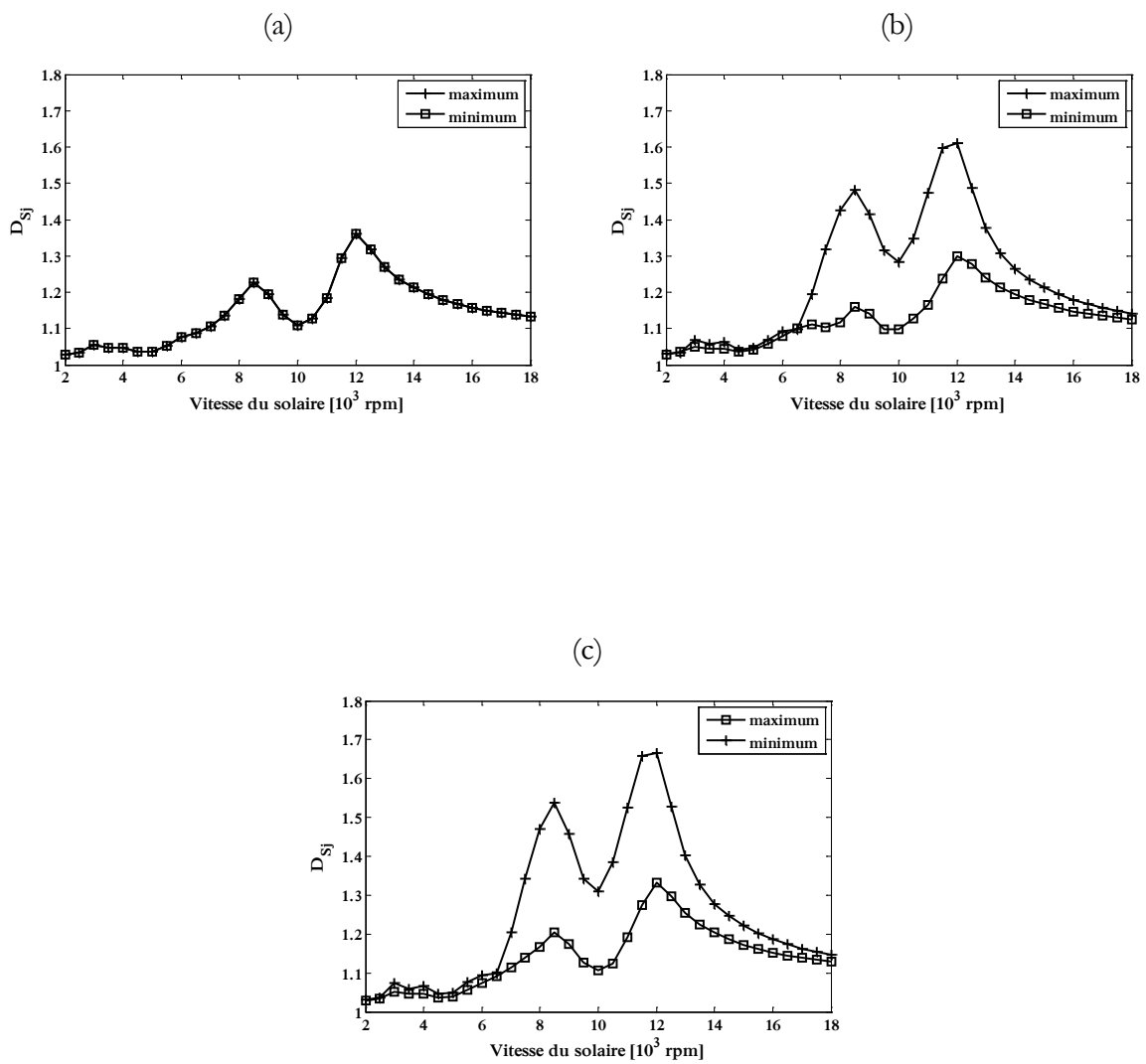


Figure 3-3. Facteur d'amplification pour les engrènements extérieurs pour une distribution d'erreurs (a) radiales, (b) tangentielles et (c) radiales et tangentielles

3.3 Influence du décalage des hélices

Une configuration qui semble particulièrement intéressante pour les engrenages double-hélice consiste à décaler les hélices se trouvant en vis-à-vis. En décalant une hélice de 50% du pas de base apparent dans le plan d'action il est possible (théoriquement) d'annuler toutes variations de la raideur d'engrènement globale (cumul des deux hélices) et par conséquent d'annihiler une des principales sources d'excitation dans la transmission mécanique. Les Figure 3-4a et b montrent les coefficients dynamiques pour chacune des hélices des engrènements extérieurs. On peut noter une parfaite répartition de la charge entre les deux hélices et le fait de décaler les hélices améliore la réponse dynamique sur une large plage de vitesses (jusqu'à 10 000 t/mn sur le solaire dans ce cas). Les simulations révèlent, en outre, que les amplifications dynamiques et la position des vitesses critiques sont fortement influencées par le décalage des hélices comme il a été mis en évidence dans [49].

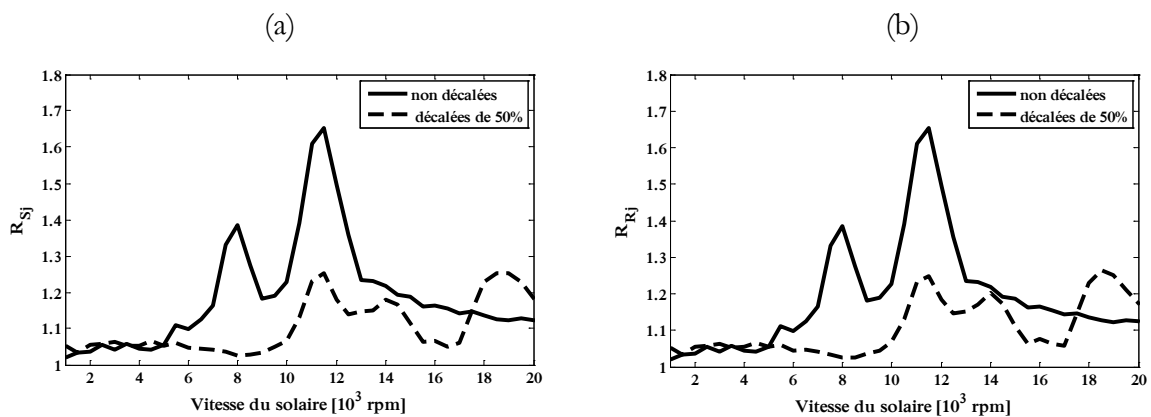


Figure 3-4. Coefficient dynamique sur les hélices de (a) gauche et de (b) droite des engrènements extérieurs

Le changement de position des vitesses critiques peut être également appréhendé en s'intéressant aux modes propres du système obtenus avec une matrice de raideur d'engrènement moyenne. En considérant les énergies de déformation stockées dans les engrènements et dans les arbres (couplant les deux hélices d'un même composant), Table 3-2, on s'aperçoit que les modes excités lorsque les hélices ne sont pas décalées sont ceux ayant des pourcentages élevés dans les engrènements uniquement, tandis que lorsque les hélices sont déphasées de 50% ce sont les modes ayant à la fois des pourcentages importants dans les engrènements et dans le corps de l'engrenage (arbres). Tant que les excitations sont en phase (hélices non décalées) ces derniers types de modes ne peuvent être excités. En ré-injectant les déplacements modaux dans les déflexions normales à la denture, deux types de comportements peuvent être observés, Table 3-3. Pour le cas non décalé, les hélices se déplacent en phase. A l'inverse, lorsque les hélices sont décalées de 50%, elles évoluent en opposition de phase, déformant ainsi l'élément d'arbre.

Table 3-2. Pourcentages d'énergie de déformation stockée dans les engrènements et les arbres pour différents modes

F ₀	Engrènements		Arbres			Vitesse Sol
	Sol / Sat	Cour / Sat	Solaire	Couronne	Satellites	
[Hz]	[%]	[%]	[%]	[%]	[%]	[rpm]
51559	11.04	10.3	0.2	0.1	0.8	7236
81217	11.5	12.6	0.3	0.1	0.1	10771
81489	2	2	5.2	2	7.3	10807
106769	7.7	5	2	7.2	17	14160
137489	2	0	65	14	0.5	18235

Table 3-3. Déflexions de denture engendrées par les déplacements modaux pour un décalage des hélices de (a) 0% et (b) 50% (A, B, C et D étant des constantes)

(a)

		Gauche	Droite			Gauche	Droite
Engrènements	Sol / Sat 1	A	A	Cour / Sat 1	C	C	
	Sol / Sat 2	B	B	Cour / Sat 2	D	D	
	Sol / Sat 3	-A	-A	Cour / Sat 3	-C	-C	
	Sol / Sat 4	-B	-B	Cour / Sat 4	-D	-D	

(b)

		Gauche	Droite			Gauche	Droite
Engrènements	Sol / Sat 1	A	-A	Cour / Sat 1	C	-C	
	Sol / Sat 2	-B	B	Cour / Sat 2	-D	D	
	Sol / Sat 3	-A	A	Cour / Sat 3	-C	C	
	Sol / Sat 4	B	-B	Cour / Sat 4	D	-D	

3.4 Influence des erreurs de pas sur le solaire

Considérant une denture double-hélice, une distribution d'erreurs de pas simplifiée (distribution sinusoïdale, Figure 3-5) d'amplitude crête à crête $50\mu\text{m}$ est introduite sur l'une des hélices (l'autre demeurant sans erreur). Les deux hélices sont théoriquement en phase (en l'absence d'erreur) et les simulations sont réalisées à faible vitesse (fonctionnement quasi-statique).

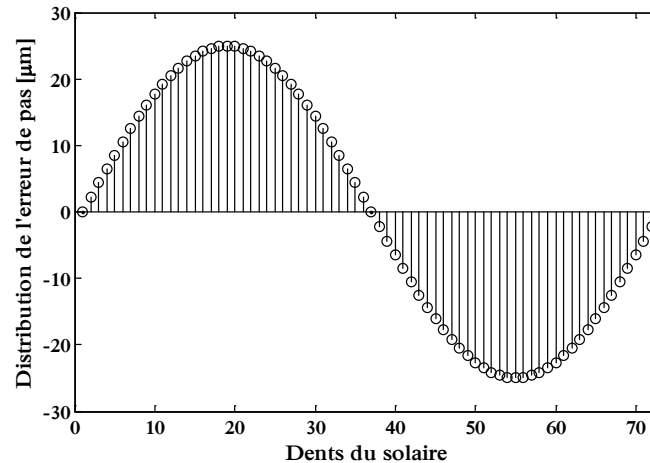


Figure 3-5. Distribution d'erreur de pas cumulée

Les Figure 3-6a et b représentent le coefficient dynamique obtenu sur chacune des hélices à faible vitesse (1 rpm). On peut clairement observer une répartition de charge asymétrique entre les deux hélices. Au début de la simulation, le maximum des coefficients dynamiques est localisé sur le satellite 4 (hélice avec l'erreur) coïncidant avec la position du maximum de la distribution de l'erreur de pas. A cet instant même, on peut noter que l'hélice sans erreur (satellite 4) est soumise à un chargement minimum de façon symétrique par rapport à 1 (valeur moyenne), montrant que l'équilibre des charges est assuré (quasi-statique). Ensuite, la situation évolue périodiquement avec la rotation du solaire, le maximum passant d'un satellite à l'autre au fur et à mesure que le maximum de l'erreur passe dans les différents contacts. Comme attendu, la Figure 3-7 montre que le déséquilibre dans la répartition de charge entre les deux hélices génère une vibration axiale, où un mouvement de corps rigide en translation à la fréquence de rotation du solaire est superposé au champ de déplacements élastiques. L'analyse spectrale des signaux des coefficients dynamiques, Figure 3-8, établit de façon évidente une modulation d'amplitude à la fréquence de rotation de l'erreur (du solaire ici), rejoignant ainsi les conclusions d'Inalpolat et Kahraman dans [87, 40] sur l'influence d'excentricités.

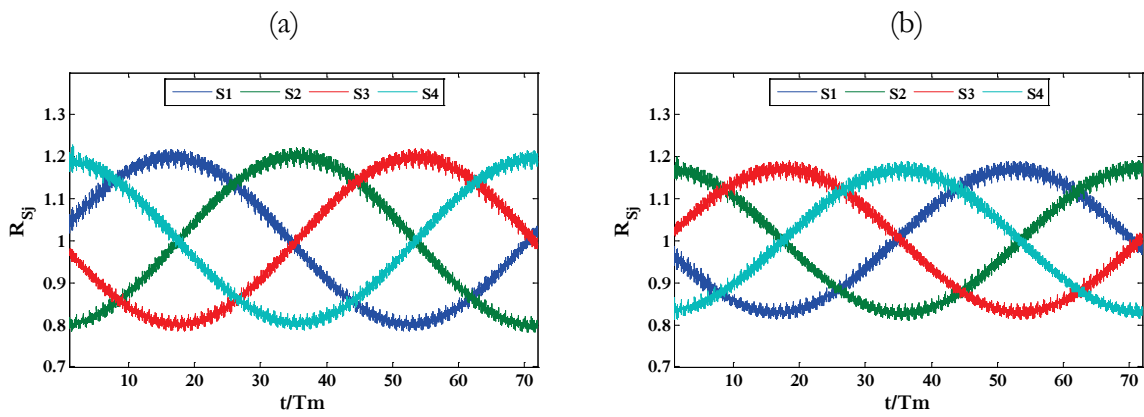


Figure 3-6. Coefficient dynamique sur les hélices de (a) gauche et de (b) droite des engrènements extérieurs

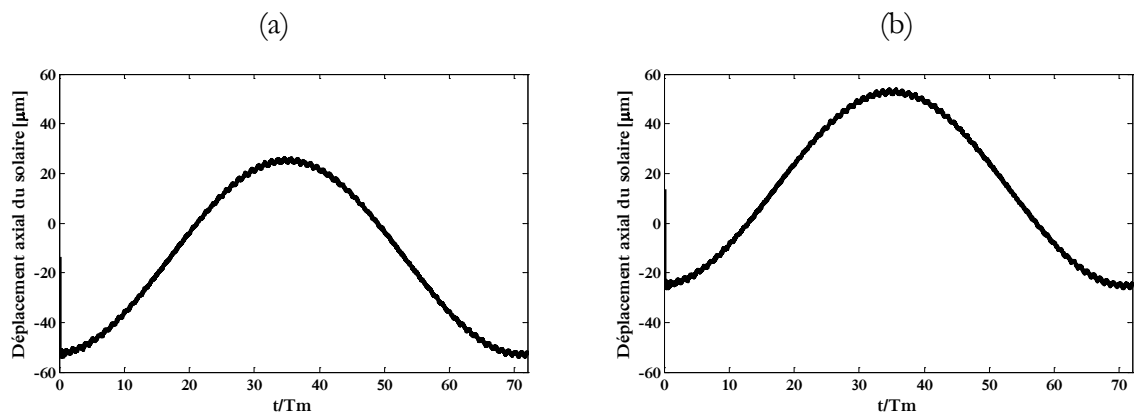


Figure 3-7. Déplacements axiaux des hélices de (a) gauche et de (b) droite des engrènements extérieurs

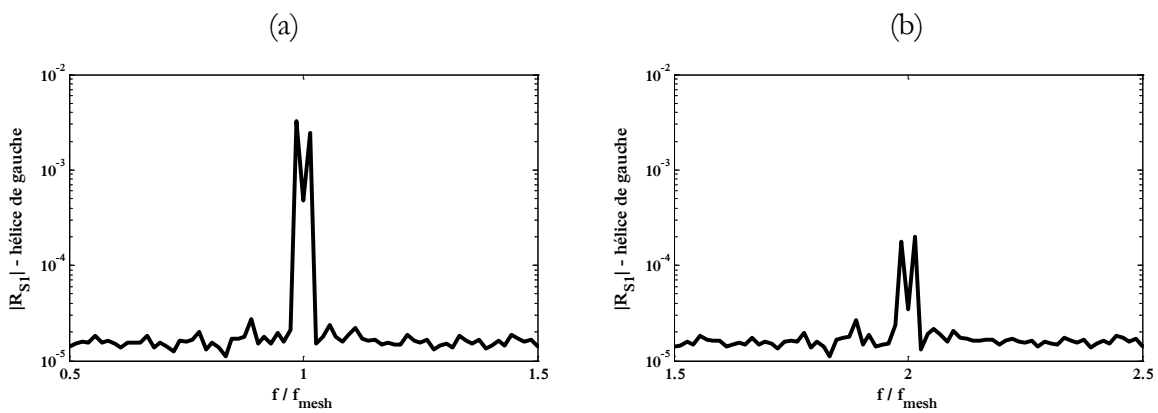


Figure 3-8. Analyse spectrale des déplacements axiaux des hélices de (a) gauche et de (b) droite des engrènements extérieurs autour de la première harmonique de la fréquence d'engrènement

3.5 Influence des déformations de la couronne

Cette section se consacre à l'influence des déformations de la couronne sur le comportement dynamique du train planétaire. Servant de référence pour le chapitre suivant, les géométries des trains planétaires simple et double hélice (non décalé) définies à la section 4.2 sont utilisées. La couronne étant déformable les conditions de support de cette dernière sont représentées à l'aide d'une distribution d'éléments de raideur (10^6 N/m sur les trois translations de chacun des nœuds, Figure 3-9) sur le pourtour de la couronne. Dans le cas d'une denture double-hélice, les nœuds de l'élément de couronne à gauche sont liés avec leurs homologues de l'élément de droite à l'aide d'une liaison élastique (10^6 N/m et 10^6 Nm/rad pour les translations et les rotations respectivement, les termes de couplage étant ignorés), Figure 3-10.

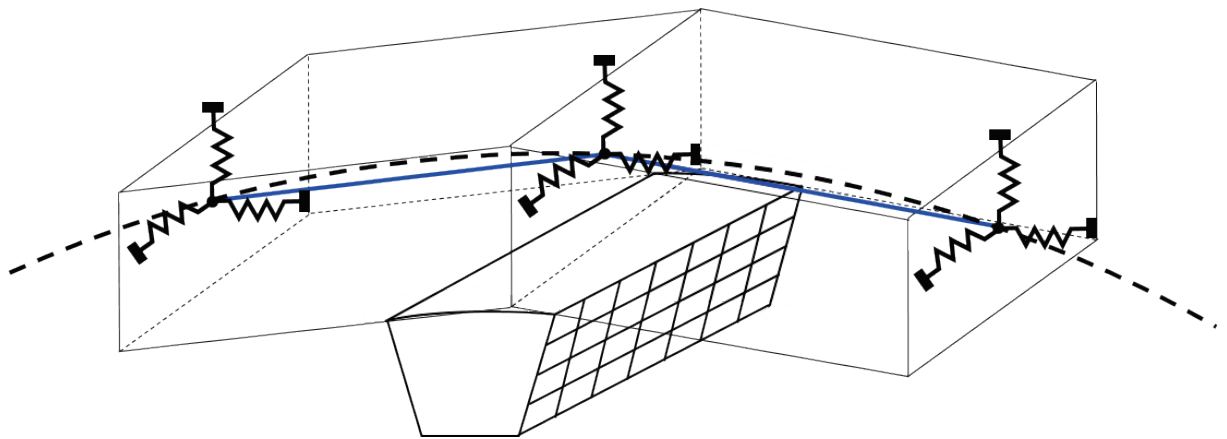


Figure 3-9. Conditions aux limites d'une couronne flexible

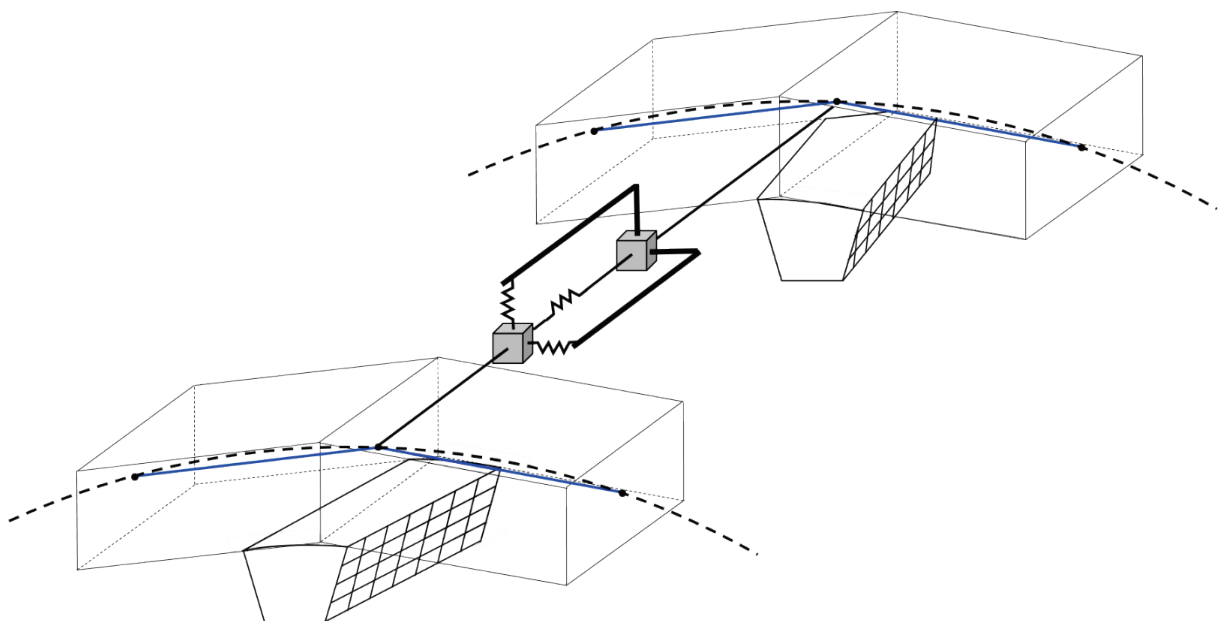


Figure 3-10. Schématisation de la connexion élastique entre les couronnes déformables d'un train planétaire double-hélice

3.5.1 Déformée statique

Dans un premier temps, on s'intéresse à la déformée statique du train planétaire obtenue avec la matrice de raideur d'engrènement moyenne. Les Figure 3-11a et b montrent dans le cas d'une denture simple hélice la déformée statique dans deux plans perpendiculaires obtenue avec une couronne déformable (pour des questions de clarté, les angles de torsion sont négligés). On peut noter que la couronne prend une forme triangulaire, caractéristique de la présence de trois satellites, et que le maximum de la déflexion radiale est localisé dans l'axe de la ligne d'action (pour une rotation anti-horaire du solaire sur la Figure 3-11a). En ce qui concerne les satellites, ces derniers se traduisent uniquement perpendiculairement à la ligne des centres du fait de charges égales provenant à la fois du solaire et de la couronne. Le solaire et la couronne quant à eux bougent axialement, de façon identique mais opposée due aux efforts axiaux générés par l'angle d'hélice.

La Figure 3-12 présente la déformée statique pour une denture double-hélice. Des conclusions similaires peuvent être formulées à l'exception des déplacements axiaux du solaire qui s'annulent du fait de l'angle opposé entre les deux hélices. On peut également noter que les déformations hors-plan (médian) et les déplacements axiaux (globaux) de la couronne sont moins importants en raison de la connexion (élastique) liant les deux couronnes.

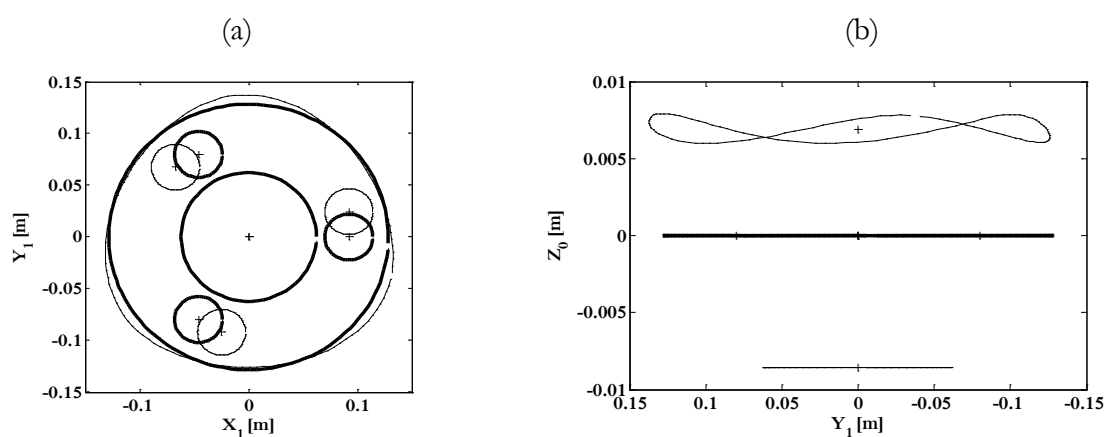
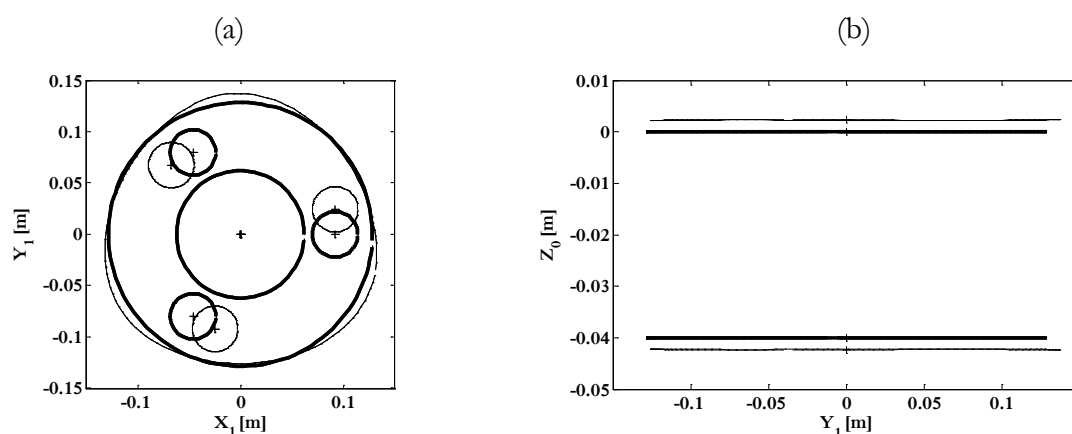


Figure 3-11. Déformée statique (a) dans le plan médian et (b) axiale pour un train planétaire simple-hélice



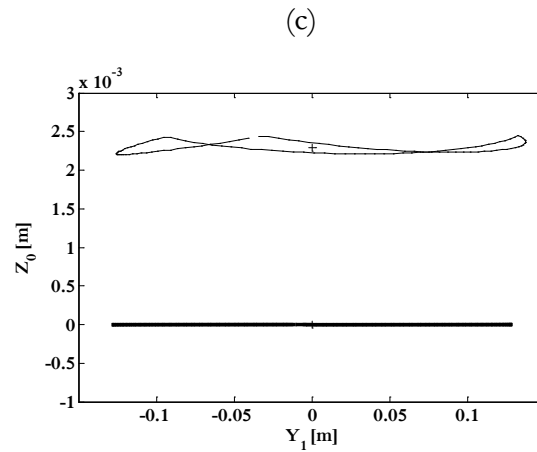


Figure 3-12. Déformée statique (a) dans le plan médian et (b) axiale pour un train planétaire double-hélice – (c) étant un zoom de (b) autour de l'hélice gauche

3.5.2 Analyse modale

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à la réponse modale d'un train planétaire simple hélice avec une couronne rigide puis déformable. Les modes et valeurs propres sont obtenus en considérant le système à l'arrêt avec une matrice raideur moyennés sur une période d'engrènement soit la solution du système :

$$-\omega^2 \mathbf{M} \mathbf{X} + (\bar{\mathbf{K}}_{\text{mesh}} + \mathbf{K}_s) \mathbf{X} = \mathbf{0}$$

Le Table 3-5 recense les 36 fréquences propres possibles du système avec une couronne rigide et le type de mode associé selon la classification proposée par Eritenel et Parker [93]. Les auteurs définissent trois types de modes, référencés comme « Rotational-Axial mode », R-A, « Translational-Tilting mode », T-T, et « Planet mode », P. Dans le cas présent, les modes P sont exclus car ces derniers n'apparaissent que lorsque le nombre de satellites est supérieur ou égal à 4. Les modes R-A sont caractérisés par des déplacements axiaux et de torsion non-nuls pour les composants centraux (solaire, couronne et porte-satellites). Les satellites quant à eux se déplacent de façon identique. En ce qui concerne les modes T-T, les composants centraux subissent des déplacements transversaux et basculent, tandis que les satellites bougent selon leurs six degrés de liberté propres. Afin d'illustrer ces deux types de modes, les déformées modales à 826 (#2) et 857 (#3) Hz sont présentées dans le Table 3-4. L'analyse des modes et des fréquences propres du train planétaire confirme la présence de ces deux types de modes, et leur multiplicité respective est de 1 et 2 (R-A et T-T). On peut, de plus, observer que les nombres totaux de modes R-A et T-T sont 12 et 24 respectivement en accord avec les conclusions de [93] et que certaines fréquences propres sont triples, comme celles à 2524 et 2651 Hz, car la rigidité en translation des supports de chacun des composants est identique dans les trois directions de l'espace. Il a été vérifié qu'en passant toutes les raideurs axiales de 10^8 à 10^6 N/m, les fréquences correspondantes aux modes R-A se différencient des celles des modes T-T.

La réponse modale nous renseigne sur les vitesses potentiellement critiques pour le système, mais un traitement plus fin peut être réalisé à partir de la distribution d'énergie de déformation emmagasinée dans les engrènements. Le Table 3-6 recense les pourcentages d'énergie de

déformation stockée dans chacun des engrènements pour une sélection de modes ainsi que les vitesses de rotation du solaire susceptibles d'exciter ces modes via la fondamentale de la fréquence d'engrènement (équivalent au diagramme de Campbell). Il ressort qu'un des modes de cette sélection avec une fréquence aux environs de 17 000 Hz (c'est-à-dire à la fréquence d'engrènement obtenue pour une vitesse de rotation du solaire proche de 14 000 t/mn), correspond bien avec le pic de réponse (coefficients dynamiques des efforts d'engrènement) sur la Figure 3-14, justifiant ainsi l'approche utilisée dans ces travaux.

Table 3-4. Déformée modale des modes #2 et #3

Dép. modaux		#2 - R-A	#3 - T-T
Porte-Sat.	x	1,60E-13	8,07E-08
	y	-1,56E-13	3,97E-07
	z	4,10E-08	6,64E-15
	ϕ	-4,72E-13	-1,89E-10
	ψ	-1,05E-12	-1,08E-09
	θ	-1,47E-07	-1,57E-13
Couronne	x	-8,38E-08	-7,58E-03
	y	9,05E-08	1,94E-02
	z	-1,18E-01	3,01E-08
	ϕ	1,22E-06	-3,35E-04
	ψ	-3,74E-06	-1,84E-02
	θ	-1,75E-01	-1,39E-07
Solaire	x	-5,23E-10	-6,68E-03
	y	-9,33E-11	-1,36E-02
	z	6,35E-03	9,91E-09
	ϕ	2,11E-07	2,52E-04
	ψ	2,06E-06	4,19E-03
	θ	-2,94E-01	-3,19E-07
Satellite 1	x	2,58E-04	4,25E-04
	y	-5,31E-03	2,67E-03
	z	1,37E-04	2,25E-04
	ϕ	2,33E-04	-9,49E-05
	ψ	-2,66E-03	1,35E-03
	θ	5,38E-01	8,15E-01
Satellite 2	x	2,58E-04	-2,27E-04
	y	-5,31E-03	-1,43E-03
	z	1,37E-04	-1,21E-04
	ϕ	2,32E-04	5,04E-05
	ψ	-2,66E-03	-7,23E-04
	θ	5,38E-01	-4,38E-01
Satellite 3	x	2,58E-04	-1,97E-04
	y	-5,31E-03	-1,24E-03
	z	1,37E-04	-1,04E-04
	ϕ	2,33E-04	4,40E-05
	ψ	-2,66E-03	-6,25E-04
	θ	5,38E-01	-3,78E-01

Table 3-5. Fréquences propres et typologie des modes selon [93]

Mode #	Fréquence propre [Hz]	Type de mode selon [93]
1	542	R-A
2	826	R-A
3	857	T-T
4	857	T-T
5	933	R-A
6	937	T-T
7	937	T-T
8	1172	T-T
9	1172	T-T
10	1288	R-A
11	2524	T-T
12	2524	T-T
13	2524	R-A
14	2651	R-A
15	2651	T-T
16	2651	T-T
17	2919	T-T
18	2919	T-T
19	10851	T-T
20	10851	T-T
21	11636	R-A
22	17207	R-A
23	17207	T-T
24	17686	T-T
25	24632	T-T
26	24632	T-T
27	24632	R-A
28	25339	R-A
29	25339	T-T
30	25362	T-T
31	90129	R-A
32	90129	T-T
33	90129	T-T
34	1136661	R-A
35	1588638	T-T
36	1588638	T-T

Table 3-6. Pourcentage d'énergies de déformation stockées dans les engrènements

Fréquence propre [Hz]	Vit. Solaire [rpm]	Solaire			Couronne		
		Satellite 1	Satellite 2	Satellite 3	Satellite 1	Satellite 2	Satellite 3
10851	8919	18%	2%	33%	12%	1%	22%
10851	8919	17%	33%	3%	11%	22%	2%
11636	9564	16%	16%	16%	14%	14%	14%
17207	14143	5%	27%	9%	7%	39%	12%
17207	14143	22%	0%	19%	32%	0%	27%
17686	14537	16%	16%	16%	17%	17%	17%

Les analyses sont maintenant étendues aux modes de vibration du train planétaire avec une couronne déformable et les résultats numériques sont comparés à ceux obtenus par Wu et Parker [94]. Dans [94], la réponse modale du système est analysée à partir d'un modèle plan. Afin de faciliter les comparaisons avec les résultats de ces auteurs, le modèle tridimensionnel initial est simplifié en introduisant des raideurs de support axiales et de basculement volontairement surdimensionnées (10^{12} N/m ou Nm/rad) et se rapprocher ainsi de conditions bidimensionnelles. La classification des modes fait ressortir pour un système à trois satellites, trois types de modes dénommés « Rotational mode », R, « Translational mode », T, et « Purely Ring mode », PR. Les modes R et T sont les pendants des modes R-A et T-T précédemment explicités dans le cas de couronnes rigides en ne conservant que les déplacements dans le plan. De plus, pour ces types de modes la couronne se déforme de façon spécifique, telle que seuls des modes d'anneau à kN et $kN \pm 1$ (k un entier naturel et N le nombre de satellites) diamètres nodaux (selon [113]) émergent pour les modes R et T respectivement. Concernant les modes de type PR, tous les composants sont fixes et seule la couronne se déforme avec des modes d'anneau à kN diamètres nodaux. Un exemple de déformée modale pour ces trois types de modes est présenté sur la Figure 3-13 et dans le Table 3-7

Le Table 3-8 liste les 20 premières fréquences propres du train planétaire à couronne déformable. On remarque effectivement que seuls les trois types de modes apparaissent avec des multiplicités de 1, 2 et 1 pour les modes R, T et PR respectivement. En outre, le nombre de diamètres nodaux correspond à la description faite dans [94]. L'évaluation des pourcentages d'énergies de déformation dans les engrènements, Table 3-9, indique l'existence de deux vitesses critiques vers 12 000 / 12 500 et 15 100 t/mn sur le solaire. Par confrontation avec les réponses des coefficients dynamiques (Figure 3-14), on observe un léger décalage avec la position des pics provenant certainement du fait que le modèle a été réduit à un modèle plan. Par rapport au cas avec une couronne rigide, les pourcentages d'énergies de déformation dans les engrènements sont plus faibles car une partie non-négligeable des déformations est maintenant localisée dans le corps de la couronne.

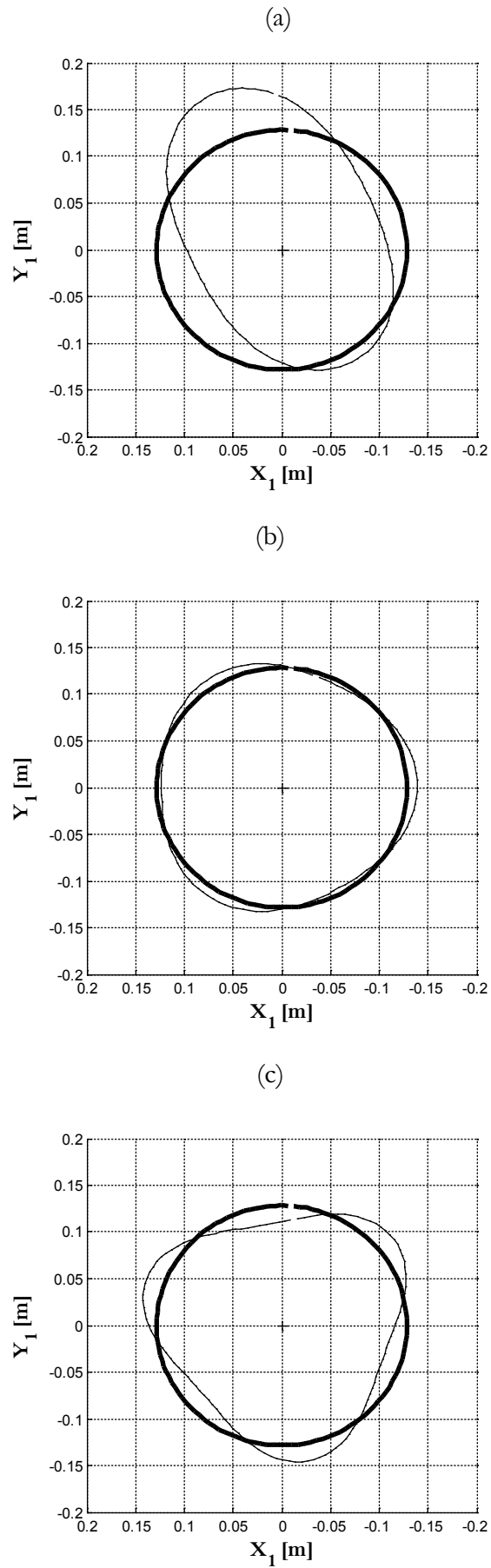


Figure 3-13. Déformées modales de la couronne pour les modes (a) #5 (Γ , 1081 Hz), (b) #6 (R, 1268 Hz) et (c) #10 (PR, 2326 Hz)

Table 3-7. Déformée modale des modes #5, #6 et #10

Dép. modaux		Mode		
		#5 - T	#6 - R	#10 - PR
Porte-Sat.	x	6,95E-07	2,85E-08	9,99E-09
	y	-2,09E-07	4,39E-09	9,50E-09
	z	-7,63E-11	2,70E-08	2,67E-09
	ϕ	4,43E-09	1,08E-10	-1,18E-11
	ψ	-1,23E-09	2,87E-11	-8,04E-11
	θ	4,15E-10	-2,71E-07	3,32E-09
Couronne (dép. moyen)	x	7,30E-03	8,40E-05	4,97E-07
	y	9,29E-04	6,05E-05	-1,51E-06
	z	3,81E-12	-2,23E-09	-2,93E-12
	ϕ	1,50E-03	2,60E-04	-5,34E-06
	ψ	-6,25E-04	5,87E-05	-2,84E-06
	θ	2,89E-04	-7,36E-02	-1,01E-05
Solaire	x	7,05E-03	1,50E-04	3,96E-06
	y	-6,56E-03	-3,86E-05	6,36E-06
	z	-4,00E-10	2,51E-07	-2,30E-09
	ϕ	4,04E-09	1,78E-10	8,68E-12
	ψ	-1,48E-09	2,91E-11	5,40E-11
	θ	4,60E-04	-2,10E-01	5,72E-04
Satellite 1	x	6,68E-05	2,20E-04	1,29E-04
	y	-1,57E-03	-9,78E-03	1,92E-04
	z	2,95E-09	3,60E-08	4,26E-09
	ϕ	4,49E-09	4,66E-10	-1,26E-11
	ψ	-1,96E-09	-4,16E-09	-5,44E-11
	θ	7,41E-02	1,66E-01	8,67E-03
Satellite 2	x	1,31E-04	2,18E-04	3,78E-05
	y	-3,15E-03	-9,99E-03	7,57E-05
	z	6,05E-09	3,59E-08	3,13E-09
	ϕ	-3,16E-09	3,35E-10	-6,41E-11
	ψ	-4,67E-09	-4,39E-09	6,05E-11
	θ	1,48E-01	1,65E-01	2,53E-03
Satellite 3	x	-2,00E-04	2,21E-04	5,17E-05
	y	4,76E-03	-9,66E-03	9,34E-05
	z	-9,31E-09	3,60E-08	3,30E-09
	ϕ	-1,34E-09	2,73E-10	7,50E-11
	ψ	6,66E-09	-4,06E-09	4,25E-11
	θ	-2,24E-01	1,67E-01	3,47E-03

Table 3-8. Fréquences propres et typologie des modes selon [94]

Mode #	Fréquence propre [Hz]	Type de mode selon [94]	Diamètres nodaux
1	716	R	0
2	909	T	1
3	909	T	1
4	1080	T	2
5	1081	T	2
6	1268	R	3
7	1330	T	2
8	1332	T	2
9	2317	R	3
10	2326	PR	3
11	2552	T	2
12	2552	T	2
13	2568	R	3
14	4063	T	4
15	4072	T	4
16	6275	T	5
17	6306	T	5
18	6407	R	0
19	8584	PR	6
20	9174	PR	6

Table 3-9. Pourcentage d'énergies de déformation stockées dans les engrèvements

Fréquence propre [Hz]	Vit. Solaire [rpm]	Solaire			Couronne		
		Satellite 1	Satellite 2	Satellite 3	Satellite 1	Satellite 2	Satellite 3
10664	8765	17%	2%	6%	14%	2%	5%
10762	8845	0%	15%	11%	0%	12%	8%
11669	9591	6%	8%	11%	7%	8%	10%
12464	10244	4%	10%	1%	1%	2%	0%
12557	10321	9%	1%	10%	1%	0%	1%
13822	11361	8%	10%	7%	1%	1%	1%
14232	11698	11%	15%	1%	0%	1%	0%
14277	11735	5%	1%	16%	0%	0%	1%
15239	12526	8%	3%	0%	2%	1%	0%
15326	12597	1%	2%	8%	0%	1%	3%
16649	13684	14%	12%	15%	7%	6%	8%
18252	15002	5%	1%	4%	16%	1%	11%
18435	15152	0%	6%	3%	1%	21%	11%

3.5.3 Réponse dynamique

Les efforts d'engrènement dynamiques (coefficient dynamique) avec couronne déformable sont représentés sur les Figure 3-14 et Figure 3-15, pour une configuration simple et double-hélice respectivement, et sont comparées aux résultats obtenus avec une couronne rigidifiée (en imposant un module de Young égal à $2.1 \cdot 10^{15}$ Pa). Les courbes montrent que, pour les deux systèmes, les déformations de la couronne ont une forte influence sur la réponse dynamique des engrènements intérieurs, tandis que pour les engrènements extérieurs, l'effet demeure faible. On peut également noter que les vitesses critiques se décalent vers les plus faibles vitesses de rotation (comportement typique de systèmes moins rigides) et qu'un mode peut se dissocier en deux modes distincts caractérisés par des amplifications moins importantes. L'ensemble des observations tirées des simulations numériques de cette section rejoignent les conclusions mises en avant dans [67].

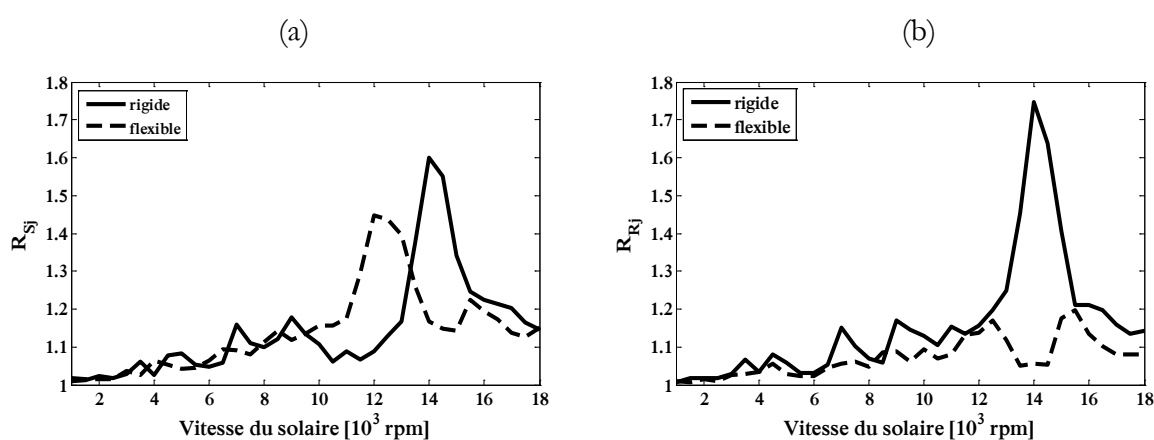


Figure 3-14. Coefficient dynamique des engrènements (a) extérieurs et (b) intérieurs – simple hélice

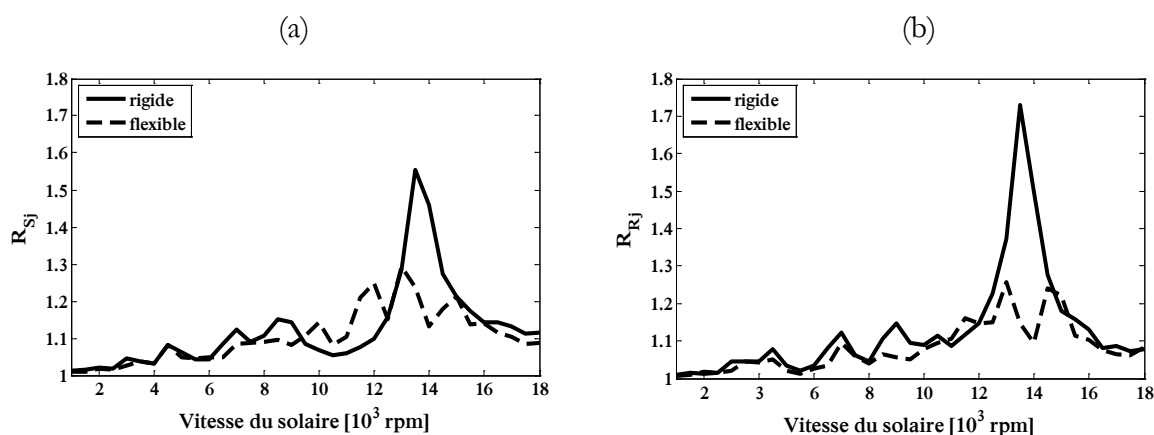


Figure 3-15. Coefficient dynamique des engrènements (a) extérieurs et (b) intérieurs – double-hélice

Conclusion

Dans le but de valider les éléments de modélisation présentés au chapitre précédent, un certain nombre de simulations numériques ont été réalisées avec des géométries très variées : simple, double-hélice décalées ou non, couronne déformable, différent nombre de satellites etc.

Les différentes comparaisons proposées avec les résultats issus de la littérature (expérimentaux ou numériques) soulignent la capacité du modèle à reproduire correctement les phénomènes liés aux erreurs de dentures et de positions, aux déformations de la couronne, aux déphasages des engrenements, et permettent ainsi de valider les stratégies de modélisation retenues.

Dans un premiers temps, l'étude confirme que les erreurs de positionnement tangentielles sont critiques vis-à-vis de la répartition de charge entre les différents satellites, mais qu'un support relativement souple du solaire permet de compenser assez largement ce déséquilibre. En ce qui concerne l'intérêt éventuel d'un décalage d'hélice dans des dentures double-hélice, il ressort que la réponse en termes d'efforts dynamiques sur les dentures peut être substantiellement améliorée sur une large plage de vitesses de rotation. En contrepartie, des modes supplémentaires de corps d'engrenages sont susceptibles d'être excités. La présence d'erreurs de pas peut induire des vibrations axiales particulièrement lorsque les distributions d'erreurs entre hélices sont différentes ; ces vibrations agissent dans les directions de plus grande souplesse et peuvent exciter des modes de plaque du carter. Enfin, l'effet des déformations de la couronne sur les efforts dynamiques aux engrenements a été analysé. On remarque de façon intéressante que ces déformations réduisent notablement les amplifications dynamiques sur les engrenements intérieurs, mais que les vitesses critiques ont tendance à se décaler. En revanche, l'intérêt que l'on pourrait avoir à assouplir la couronne est contrebalancé par les sur-contraintes générées en son sein [65].

Chapitre 4

Optimisation des corrections de dentures

Pour des réducteurs industriels destinés à transmettre des puissances significatives, les dentures sont généralement corrigées afin de compenser les déformations élastiques susceptibles de déplacer les positions des contacts entre dents hors des plans d'actions théoriques et de conduire ainsi à des chocs à l'engagement entre profils non conjugués. Ces corrections sont également utilisées afin de réduire les efforts dynamiques sur les dentures et le bruit généré par l'engrènement. La majorité des travaux dans la littérature traitent des corrections de profil dans des réducteurs simple étage et portent sur l'optimisation vis-à-vis des fluctuations d'erreurs de transmission, des efforts et contraintes maximaux, des pertes de puissance par frottement sur les flancs de denture, etc. Une attention particulière a été portée à la minimisation des variations temporelles de l'erreur de transmission quasi-statique sous charge qui apparaît comme un indicateur pertinent des niveaux d'excitation par l'engrènement et par conséquent des efforts dynamiques sur les dents. En ce qui concerne les réducteurs à plusieurs engrènements, il existe relativement peu d'études relatives aux erreurs de transmission dont le concept en termes de définition, de pertinence par rapport aux effets dynamiques, ... demeure, à nos yeux, une question ouverte.

Dans ce chapitre, nous proposons tout d'abord une approche directement basée sur la minimisation des efforts dynamiques calculés pour le système complet. Dans un deuxième temps, l'influence des déformations de la couronne est analysée puis les performances des corrections optimales obtenues sont examinées pour des vitesses et charges variables. Un critère quasi-statique représentatif des efforts d'engrènement dynamiques, basé sur le concept d'erreurs de transmission locales, est ensuite présenté et validé. Ce critère est appliqué afin de caractériser l'intérêt éventuel d'hélices décalées pour des engrenages double hélice ou à chevrons ainsi que l'apport de combinaisons de corrections de profil et longitudinales (bombés). Enfin, la dernière partie de ce chapitre aborde l'impact des conditions de support de couronne sur le chargement des dentures en considérant différentes modélisations de porte-couronne.

4.1 Définition des corrections de profil

Une multitude de morphologie de corrections de profil peut être définie (linéaires, paraboliques, en puissance, etc.) et la littérature sur ce sujet est riche. Parmi les formes les plus usitées, nous nous intéresserons dans ce mémoire aux corrections linéaires symétriques en tête de dent (identiques sur la roue menante et menée) qui présentent l'avantage de la simplicité et de ne nécessiter que deux paramètres géométriques (une amplitude A et une longueur L) pour les caractériser. D'un point de vue pratique, des corrections portées uniquement en sommet de dents évitent d'avoir à creuser les pieds de dents et de fragiliser l'engrènement (la contrainte en pied de dent étant un des critères majeurs de dimensionnement). Dans ce contexte, Bruyère et al [120, 121, 122] ont proposé, pour différentes formulations de la raideur d'engrènement, des formules analytiques permettant d'estimer les corrections minimisant ou réduisant fortement les amplitudes de fluctuations des erreurs de transmissions. Les auteurs ont ainsi introduit le concept de Courbe Maitresse (Figure 4-1) qui représente la famille de corrections de profil linéaires symétriques optimale vis-à-vis des efforts dynamiques d'engrènement [122].

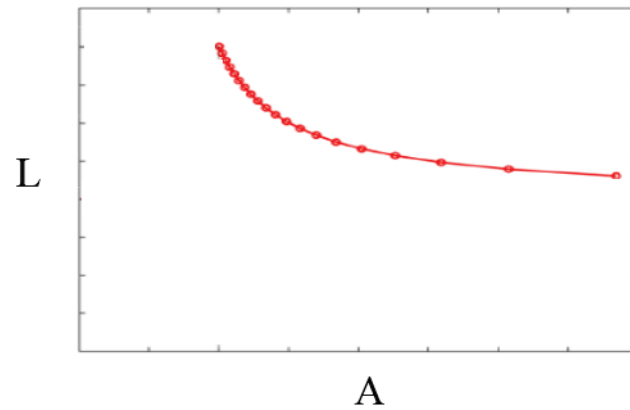


Figure 4-1. Représentation schématique d'une Courbe Maître

Dans le cas d'un train planétaire, aucune méthodologie comparable n'a été développée pour dimensionner les corrections de profil qui sont généralement optimisées en isolant un engrènement extérieur ou intérieur du reste du système.

Dans la suite de ce chapitre, les corrections sont introduites de la façon suivante (Figure 4-2) :

- linéaires et symétriques en tête,
- identiques pour tous les satellites mais différentes selon les flancs actifs afin de différencier les engrènements intérieurs et extérieurs.

Ce choix de géométrie conduit donc à l'optimisation d'un quadruplet de paramètres, c'est-à-dire une correction spécifique pour les engrènements extérieurs (deux paramètres : amplitude en tête et longueur corrigée) et une autre pour les engrènements intérieurs (deux autres paramètres).

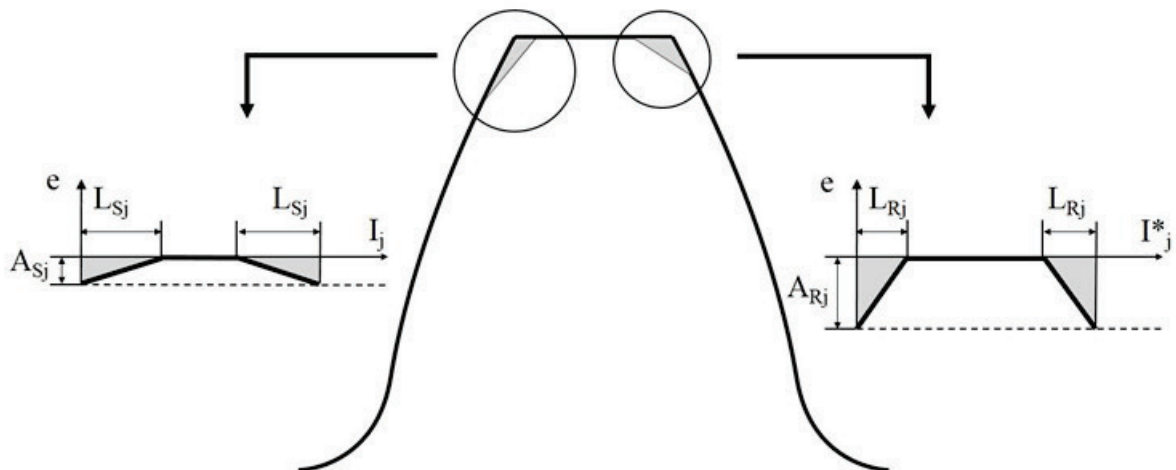


Figure 4-2. Définition des corrections de profil linéaires symétriques en tête différentes selon le flanc actif sur une dent d'un satellite

4.2 Géométrie de trains planétaires

Le système utilisé dans cette étude est un train planétaire à trois satellites avec une denture hélicoïdale issu de la littérature, [103], et dont les données géométriques sont synthétisées dans la Table 4-1. Une extension à des dentures double-hélice sera également étudiée et déduite en dupliquant la première hélice avec un sens opposé. On note sur les Figure 2-5a et b que les engrènements extérieurs et intérieurs sont déphasés comme c'est souvent le cas dans l'industrie afin d'éviter les excitations synchrones sur un organe central soumis à plusieurs engrènements simultanés. L'entrée de puissance se situe sur le solaire et le porte-satellites est fixe. Un couple nominal de 2 500 Nm est imposé par hélice sur le solaire qui induit une déflexion statique moyenne de référence par hélice de 22.9 et 18.7 microns pour les engrènements extérieurs et intérieurs respectivement (en se basant sur une raideur d'engrènement linéique constante déterminée selon la norme ISO 6336). Dans ce qui suit, la couronne sera généralement considérée comme rigide mais ses déformations seront être prises en compte dans un deuxième temps. Le cas échéant cette condition sera explicitement spécifiée.

Table 4-1. Géométrie des trains planétaires

	Solaire	Satellites	Couronne
Nombre de dents	73	26	125
Module normal [mm]	1.81	1.81	1.81
Angle de pression [°]	23.04	23.04	23.04
Angle d'hélice [°]		13.12	
Rayon de base [mm]	63.1	22.8	108.8
Entraxe [mm]		92.12	
Largeur active/hélice [mm]		30	30

4.3 Optimisation des corrections de profil sur le système complet

Abousleiman et Vexé [67] ont montré que l'introduction de corrections de profil dans les trains planétaires avait une influence notable sur les efforts dynamiques d'engrènement. En revanche, aucune approche systématique dans la définition des corrections de profil optimales n'avait été proposée par les auteurs. Ce paragraphe s'attache donc à proposer un certain nombre de lignes directrices relatives à la définition de corrections de profil susceptibles d'être utiles aux concepteurs de systèmes de réduction. L'espace de recherche dans les conditions précédemment citées est vaste (4 paramètres) et un balayage systématique sur l'ensemble des paramètres serait excessivement long. Pour pallier à ce problème, un algorithme d'optimisation de type heuristique, basé sur le principe des algorithmes génétiques, a été utilisé.

4.3.1 Algorithme génétique

L'objectif de ce paragraphe n'est pas de donner une vision exhaustive des algorithmes génétiques, mais de présenter leurs principes généraux. L'algorithme proposé par la suite sera une déclinaison particulière adaptée à la problématique de l'optimisation des corrections de profil dans les trains planétaires. Le développement de ce type d'algorithmes est, en soi, un sujet de recherche à part entière, il ne sera pas abordé dans ce qui suit.

Les algorithmes génétiques sont des algorithmes d'optimisation évolutionnaire, imitant le processus de sélection naturelle, dont le principe peut être décrit comme suit (Table 4-2) :

(a) une population initiale d'individus distribués dans l'ensemble de l'espace de recherche (ici des quadruplets de paramètres définissant les corrections de profil) est générée et évaluée suivant un critère,

(b) puis à l'aide de différents opérateurs, une nouvelle population est créée à partir de la précédente afin d'être évaluée à son tour,

(c) et le processus est reproduit jusqu'à convergence.

Le problème a été, dans un premier temps, initialisé de différentes manières : a) aléatoirement dans tout l'espace des corrections ou b) avec des individus distribués aléatoirement sur la Courbe Maitresse obtenue analytiquement en supposant que la raideur d'engrènement linéique est constante [120]. Il a été vérifié que ces deux stratégies d'initialisation conduisaient à des solutions identiques avec, toutefois, un avantage en termes de rapidité de convergence pour la seconde méthode.

En ce qui concerne la génération itérative des populations d'individus, trois opérateurs sont utilisés. Le premier est un opérateur de sélection qui, afin d'améliorer continuellement la qualité des individus, reconduit la meilleure moitié de la population d'une génération à l'autre. Cette moitié de population sélectionnée sert de vivier à la création d'une nouvelle moitié de population d'individus. Pour ce faire, un opérateur de croisement est employé, il combine les gènes (un des quatre paramètres caractérisant un individu) de deux individus « parents » tirés aléatoirement pour former deux individus « enfants ». Enfin, dans le but de conserver de la diversité entre les individus, un opérateur de mutation est introduit afin de permettre à un gène de « dégénérer » aléatoirement mais avec une faible probabilité.

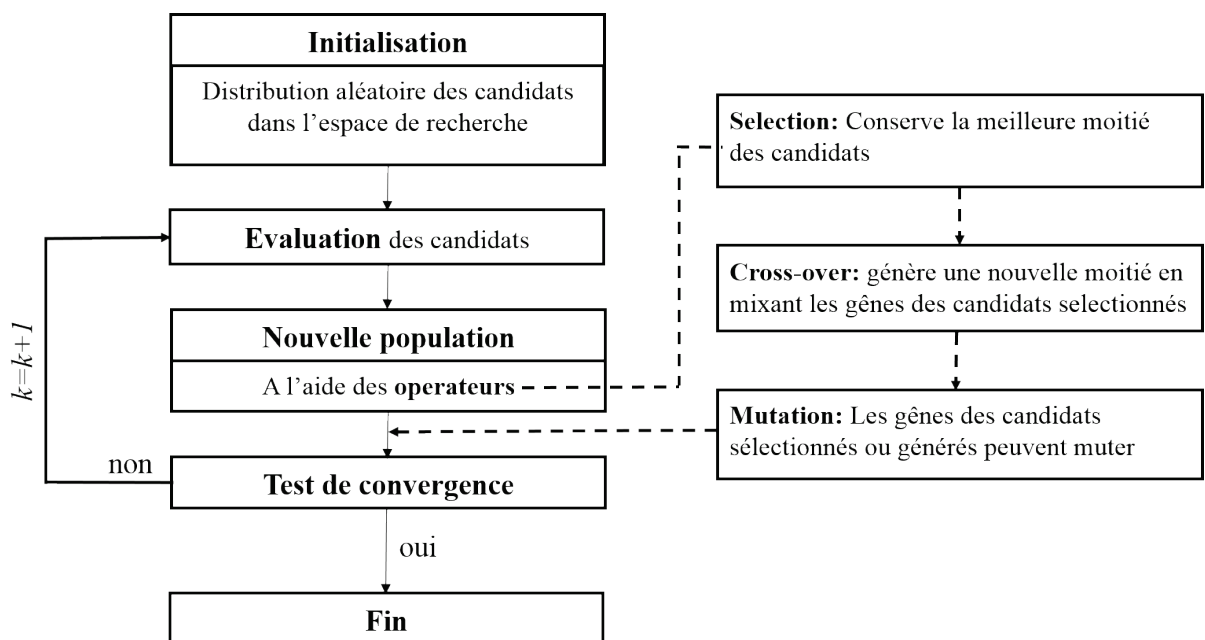
Afin d'évaluer la qualité des différents individus, il est nécessaire de fixer une fonction objective qui, dans ce qui suit, est choisie comme étant la moyenne des coefficients dynamiques des engrènements extérieurs et intérieurs sur une plage de vitesses de rotation donnée, notée par la suite $MEAN(R)$ et telle que:

$$MEAN(R) = \text{Mean} \left[\overline{R_{Sj}}; \overline{R_{Rj}} \right]$$

avec \overline{R} le coefficient dynamique ($R = \max(F_{\text{dyn}}) / F_{\text{stat}}$) moyenné sur la plage de vitesses 10 000 à 16 000 rpm (plage où les vitesses critiques principales du système sans corrections ont été trouvées).

De façon à éviter l'agglomération des solutions au voisinage d'un optimum absolu, l'espace des corrections est divisé en trois sous-domaines représentatifs de corrections dites « longues », « moyennes » et « courtes » selon la terminologie en usage et les populations sont constituées de dix individus par sous-domaine. Les résultats seront comparés aux corrections optimales pour un train simple étage (un étage isolé) définies par la Courbe Maitresse [122].

Table 4-2. Algorithme génétique



4.3.2 Optimisation vis-à-vis des efforts dynamiques

Dans cette section, l'algorithme génétique est employé pour rechercher les corrections minimisant la réponse dynamique des efforts d'engrènement. Les solutions optimales pour un train simple et double-hélice avec couronne rigide sont représentées sur la Figure 4-3 dans le plan longueur de correction en fonction de l'amplitude corrigée en sommet de dent pour les engrènements extérieurs et intérieurs, les valeurs numériques correspondantes sont compilées dans la Table 4-3. D'après cette figure, un certain nombre de conclusions, indépendantes du type de denture (simple / double- hélice), peuvent être tirées. Il apparaît que pour les engrènements extérieurs les corrections optimales se trouvent sur la Courbe Maitresse. Concernant les engrènements intérieurs, les solutions sont localisées au voisinage de la Courbe Maitresse avec, toutefois, un léger décalage vers les plus fortes amplitudes de correction. Il est à noter que cette Courbe Maitresse a été développée pour des engrenages extérieurs uniquement, ce qui pourrait expliquer l'écart observé. En effet, la théorie dont découle le concept de Courbe Maitresse est basée sur l'hypothèse d'une variation parabolique et symétrique de la raideur d'engrènement linéique entre l'engagement et le déengagement d'une paire de dents. Comme représenté sur la Figure 4-4, cette hypothèse n'est vérifiée que pour les engrènements extérieurs. La variation de raideur, largement asymétrique pour les engrènements intérieurs, serait susceptible d'expliquer pour partie les déviations sur les positions des corrections optimales.

Dans le chapitre précédent, l'importance des déformations de la couronne sur l'amplification dynamique des efforts d'engrènement, notamment pour les engrènements intérieurs, a été soulignée (paragraphe 3.5). Les résultats sur la Figure 4-5 portent sur l'influence de ces déformations sur l'optimisation des corrections de profil pour des trains planétaires simple et double-hélice. On constate, que là aussi, les corrections optimales déterminées par l'algorithme génétique semblent s'aligner le long d'une courbe proche de la Courbe Maitresse avec un léger décalage vers les amplitudes en sommet de dent plus importantes. Cette tendance peut sans doute s'expliquer par le fait que les amplitudes des corrections doivent être un peu plus importantes pour compenser les déformations de la couronne. Ce phénomène apparaît plus marqué pour le train simple hélice du fait de déformations hors-plan plus importantes (Figure 3-11b et Figure 3-12c).

Table 4-3. Corrections optimales pour un train planétaire simple et double-hélice – couronne rigide

		Couronne rigide			
		Simple - hélice		Double - hélice	
		Extérieurs	Intérieurs	Extérieurs	Intérieurs
Longue	A [μm]	33.98	31.42	22.08	20.73
	L [mm]	1.76	2.79	2.24	3.21
Moyenne	A [μm]	54.08	50.46	30.30	36.22
	L [mm]	1.44	2.34	1.89	2.42
Courte	A [μm]	71.92	79.70	49.17	64.43
	L [mm]	1.45	2.01	1.62	2.09

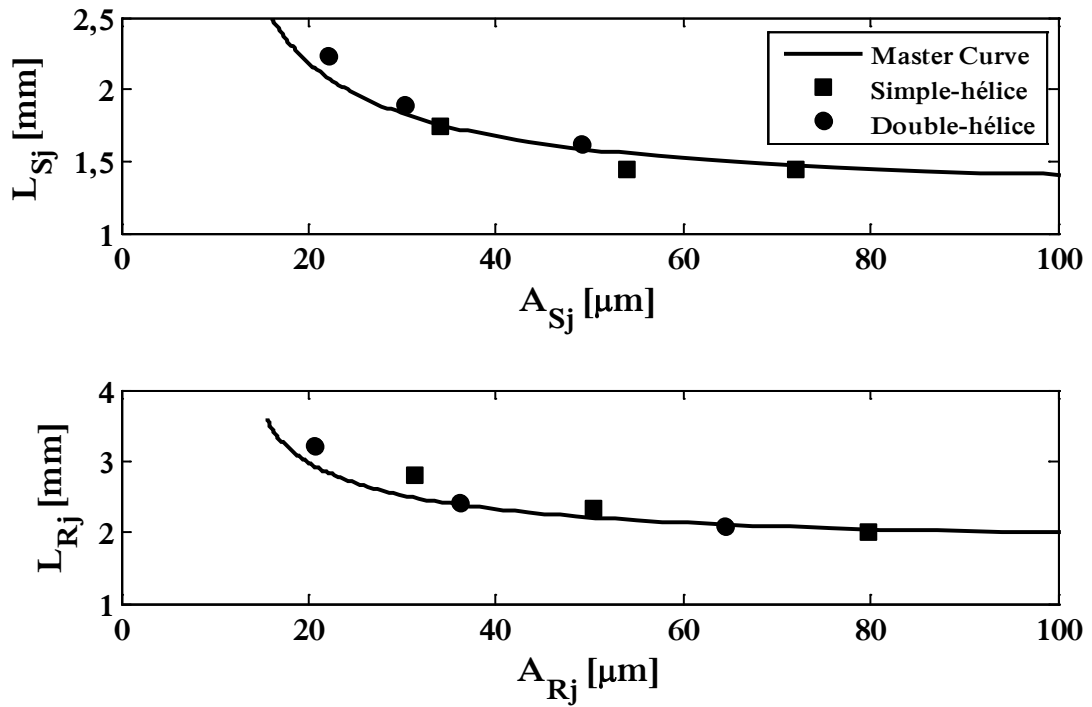


Figure 4-3. Corrections optimales pour un train planétaire simple et double-hélice – couronne rigide

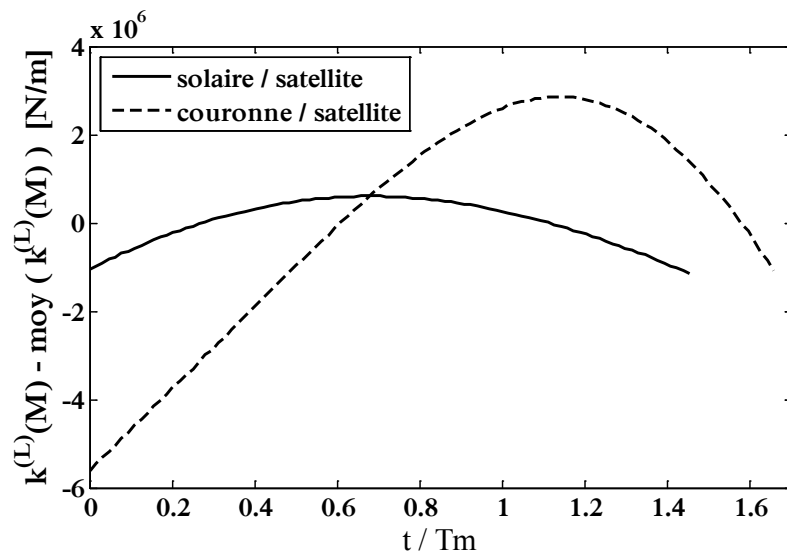


Figure 4-4. Evolution de la raideur d'engrènement par unité de longueur en fonction du temps adimensionné par la période d'engrènement T_m (la valeur moyenne a été soustraite pour pouvoir comparer les engrènements extérieurs et intérieurs)

Table 4-4. Corrections optimales pour un train planétaire simple et double-hélice – couronne flexible

		Couronne flexible			
		Simple - hélice		Double - hélice	
		Extérieurs	Intérieurs	Extérieurs	Intérieurs
Longue	A [μm]	27.86	22.51	24.22	20.21
	L [mm]	2.12	3.40	2.15	3.25
Moyenne	A [μm]	42.78	29.98	40.13	27.67
	L [mm]	1.76	2.86	1.60	2.64
Courte	A [μm]	54.68	60.67	48.56	53.02
	L [mm]	1.58	2.21	1.60	2.06

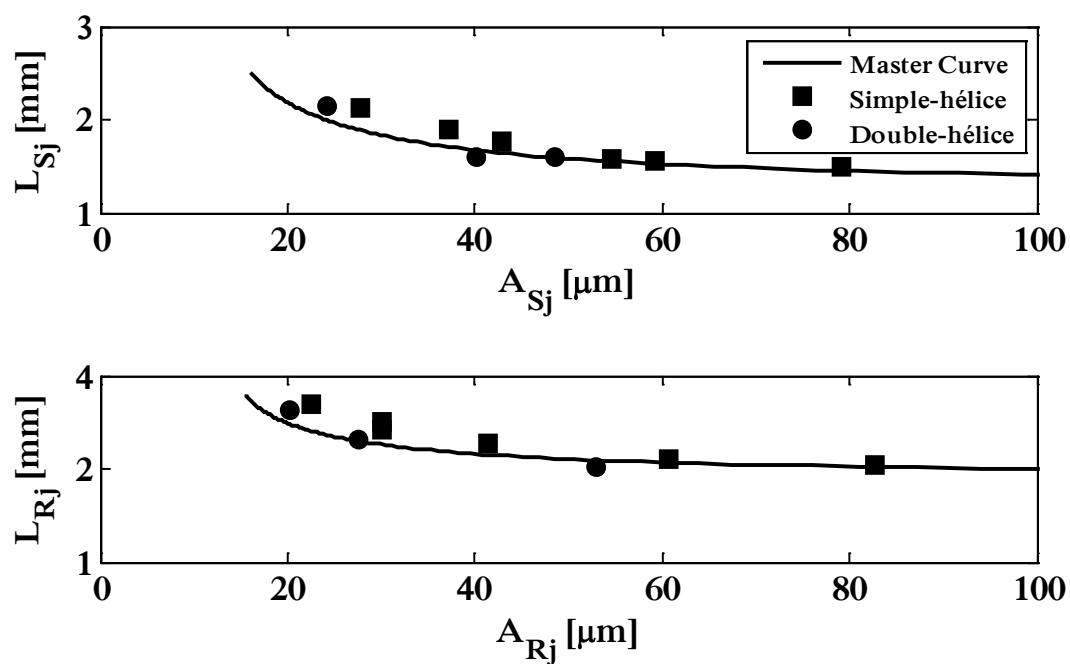


Figure 4-5. Corrections optimales pour un train planétaire simple et double-hélice – couronne flexible

4.3.3 Efforts dynamiques en présence des corrections optimisées

Les simulations numériques montrent qu'indépendamment du type de denture (simple / double-hélice) et de la rigidité de la couronne, les corrections optimales minimisant les coefficients dynamiques sur une plage restreinte de vitesses (capturant les principales vitesses critiques) se situent à proximité des Courbe Maitresses. Dans ce paragraphe, nous nous intéresserons aux niveaux d'efforts dynamiques sur une plage de vitesses plus large pour des dentures corrigées avec les valeurs issues de l'optimisation détaillées dans les Table 4-3 et Table 4-4. Les Figure 4-6, Figure 4-8, Figure 4-10 et Figure 4-12 présentent les coefficients dynamiques obtenus pour les configurations simple- et double-hélice avec une couronne rigide et flexible. Les résultats montrent que pour tous les cas présentés les pics principaux dans les courbes de réponse ont été très fortement réduits, prouvant ainsi l'efficacité de ces corrections à réduire les amplifications dynamiques des efforts d'engrènement au-delà de la plage de vitesses retenu pour l'optimisation.

Dans ce qui précède, les efforts dynamiques ont été calculés en considérant le même type de corrections (longue, moyenne ou courte) sur l'ensemble des engrènements extérieurs et intérieurs. Nous nous proposons d'examiner les différences éventuelles apportées par l'utilisation de corrections optimales de différentes natures comme décrit dans les Table 4-3 et Table 4-4. Les Figure 4-7, Figure 4-9, Figure 4-11 et Figure 4-13 représentent, pour les différents cas de train planétaire étudiés, les courbes enveloppes des coefficients dynamiques en fonction de la vitesse de rotation. Une nouvelle fois, les amplifications aux vitesses critiques ont complètement disparu et une même efficacité d'atténuation dynamique est obtenue en mixant les différents types de corrections optimales.

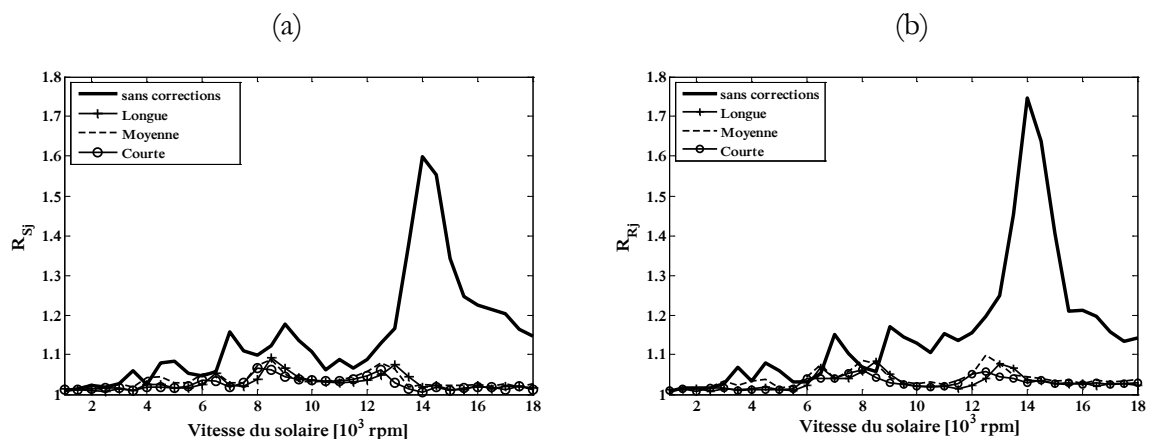


Figure 4-6. Coefficient dynamique des engrènements (a) extérieurs et (b) intérieurs avec corrections optimales – simple hélice et couronne rigide

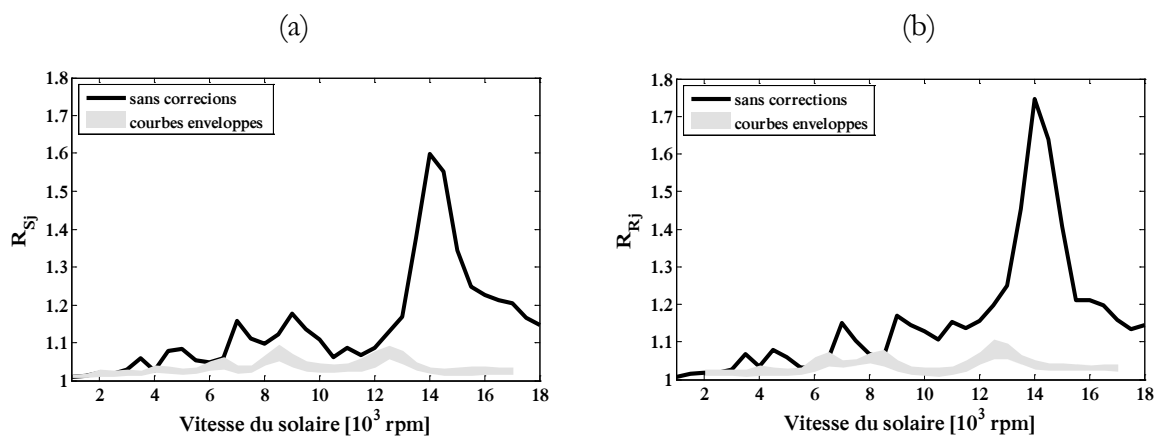


Figure 4-7. Courbes enveloppes du coefficient dynamique des engrènements (a) extérieurs et (b) intérieurs pour toutes les combinaisons de corrections optimales – simple hélice et couronne rigide

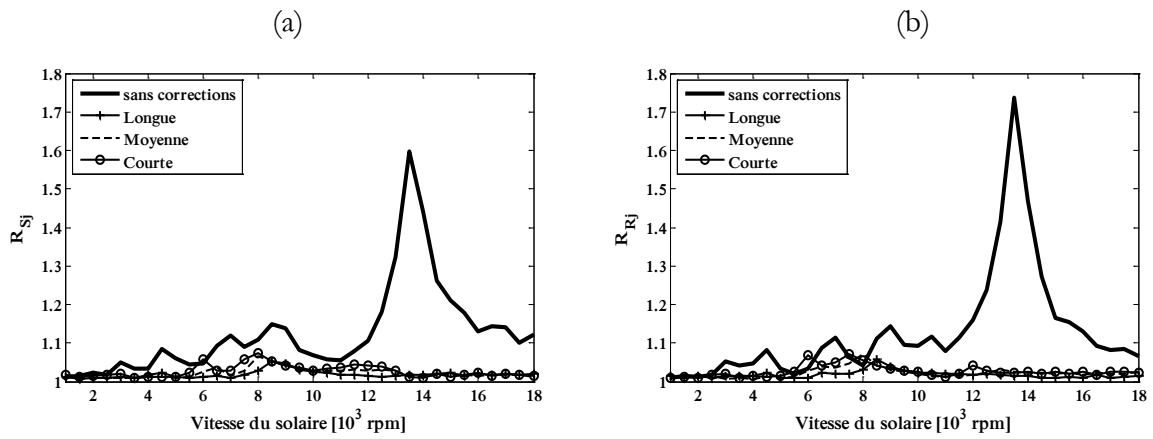


Figure 4-8. Coefficient dynamique des engrènements (a) extérieurs et (b) intérieurs avec corrections optimales – double-hélice et couronne rigide

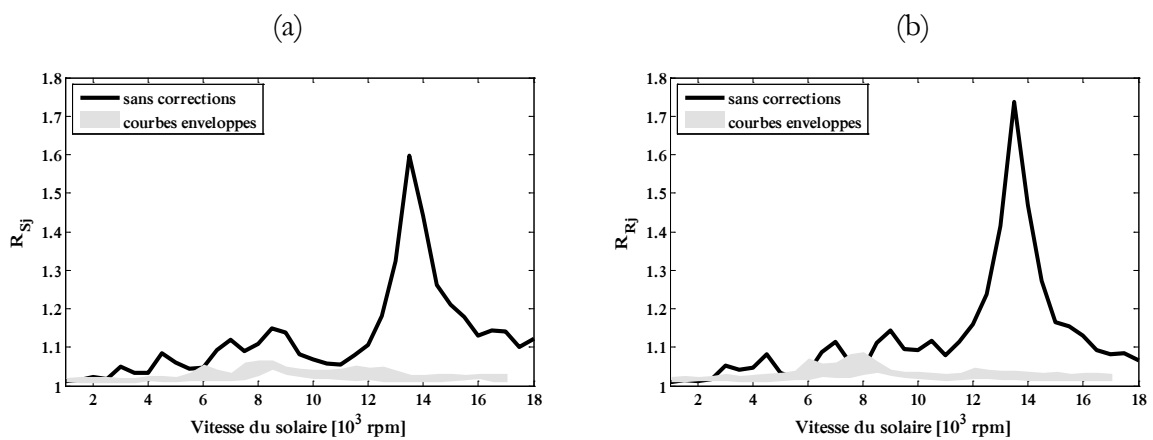


Figure 4-9. Courbes enveloppes du coefficient dynamique des engrènements (a) extérieurs et (b) intérieurs pour toutes les combinaisons de corrections optimales – double-hélice et couronne rigide

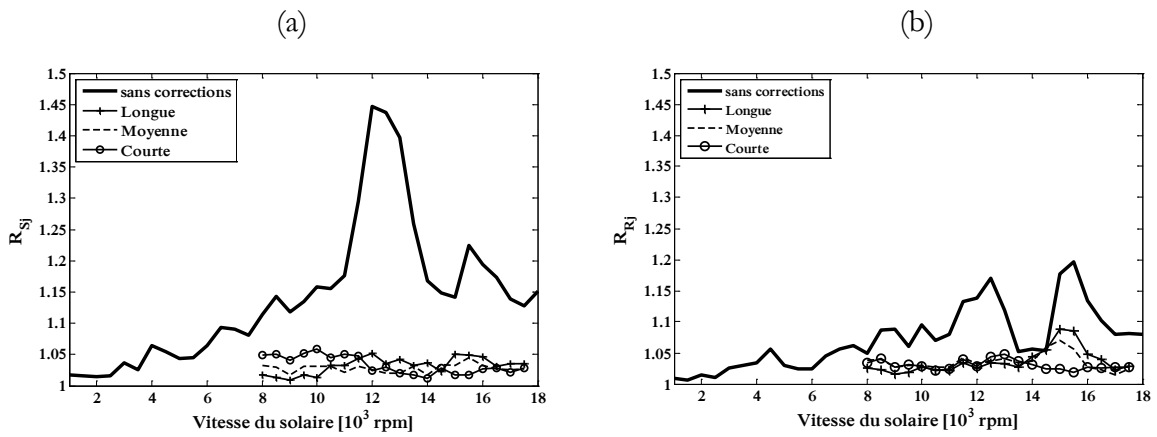


Figure 4-10. Coefficient dynamique des engrènements (a) extérieurs et (b) intérieurs avec corrections optimales – simple hélice et couronne flexible

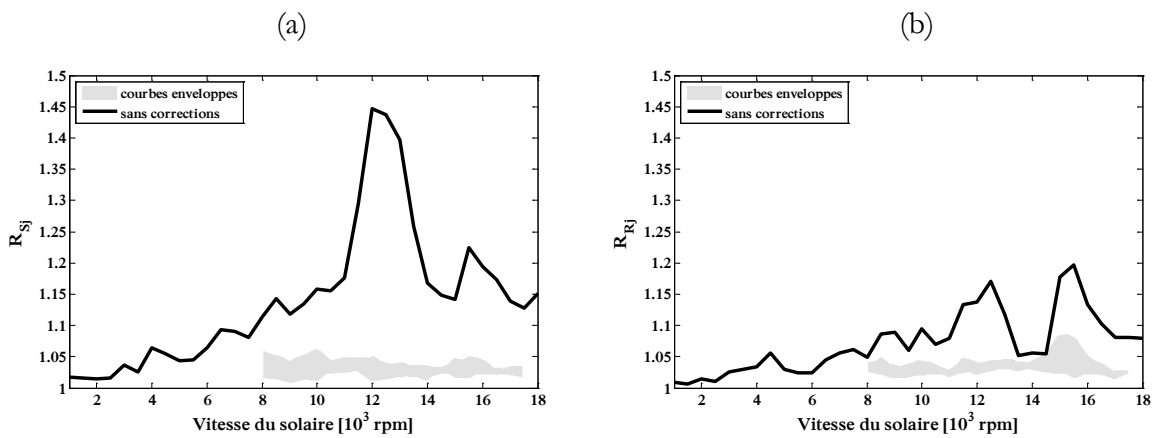


Figure 4-11. Courbes enveloppes du coefficient dynamique des engrènements (a) extérieurs et (b) intérieurs pour toutes les combinaisons de corrections optimales – simple hélice et couronne flexible

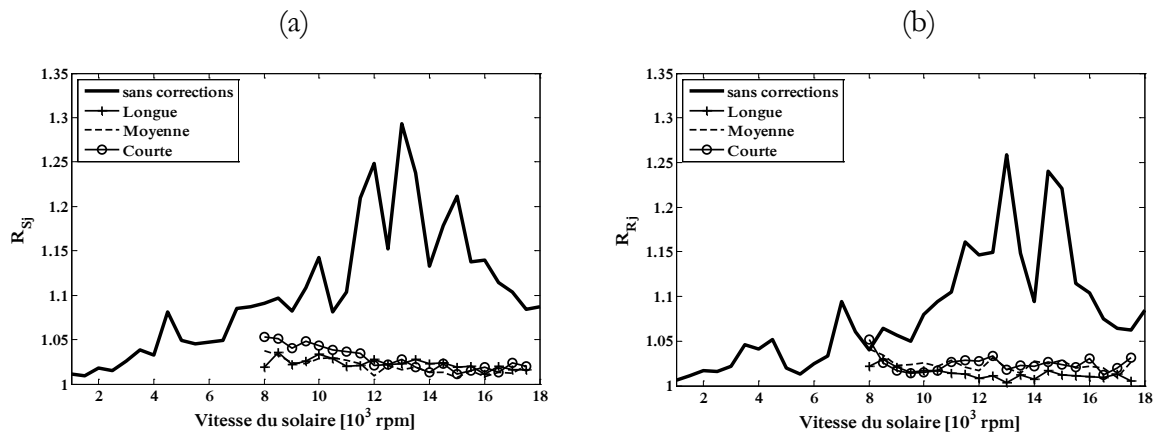


Figure 4-12. Coefficient dynamique des engrènements (a) extérieurs et (b) intérieurs avec corrections optimales – double-hélice et couronne flexible

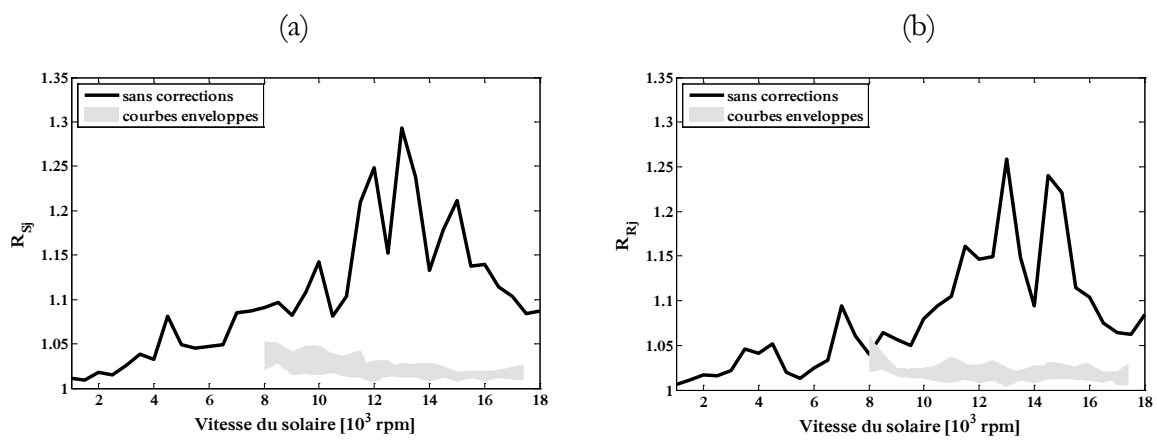


Figure 4-13. Courbes enveloppes du coefficient dynamique des engrènements (a) extérieurs et (b) intérieurs pour toutes les combinaisons de corrections optimales – double-hélice et couronne flexible

4.3.4 Influence de la variation du couple d'entrée

Les corrections de profil dans les trains planétaires ont été optimisées à un couple donné, dit « couple nominal ». Dans la majorité des applications, notamment dans le domaine de l'aéronautique, les systèmes de réduction fonctionnent à régimes variables. Dans ce contexte, il paraît donc pertinent d'analyser l'influence de changement du couple d'entrée sur les performances des corrections optimisées. Dans ce qui suit, le couple demeure constant mais sa valeur évolue sur une plage de + / - 50% par rapport à sa valeur nominale. Les iso-courbes de coefficients dynamiques obtenues dans ces conditions sont portées Figure 4-14 à Figure 4-21 pour les configurations simple et double-hélice avec couronne rigide ou déformable. Une conclusion unique émerge clairement de ces séries de résultats, les corrections « longues » sont plus sensibles aux variations de charge que les corrections « courtes ». La sensibilité est plus marquée aux couples inférieurs au « couple nominal » en accord avec les tendances qualitatives que l'on peut extrapoler à partir des Courbes Maitresses [122].

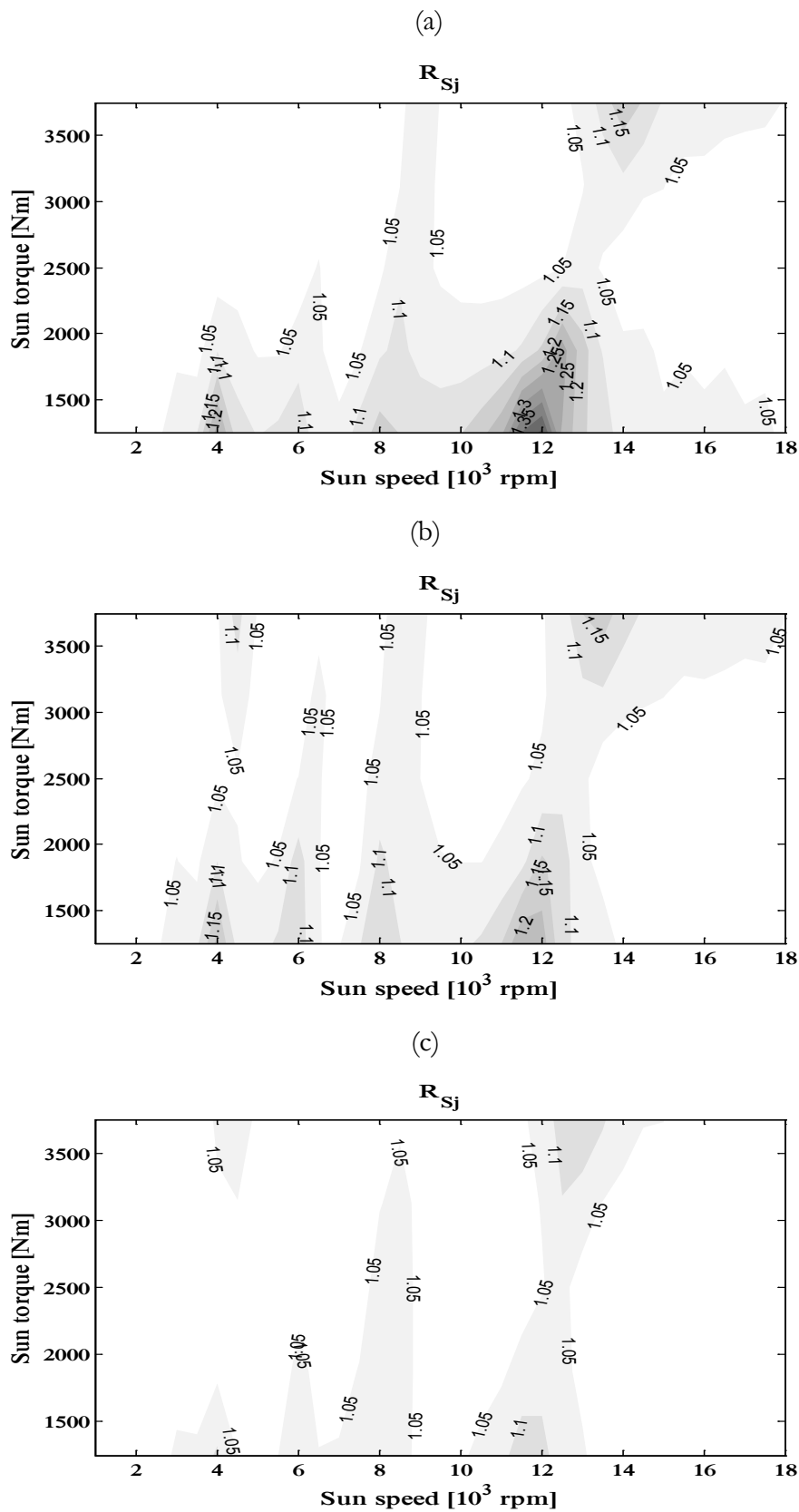


Figure 4-14. Coefficient dynamique sur les engrèments extérieurs pour des corrections (a) longues, (b) moyennes et (c) courtes – simple hélice et couronne rigide

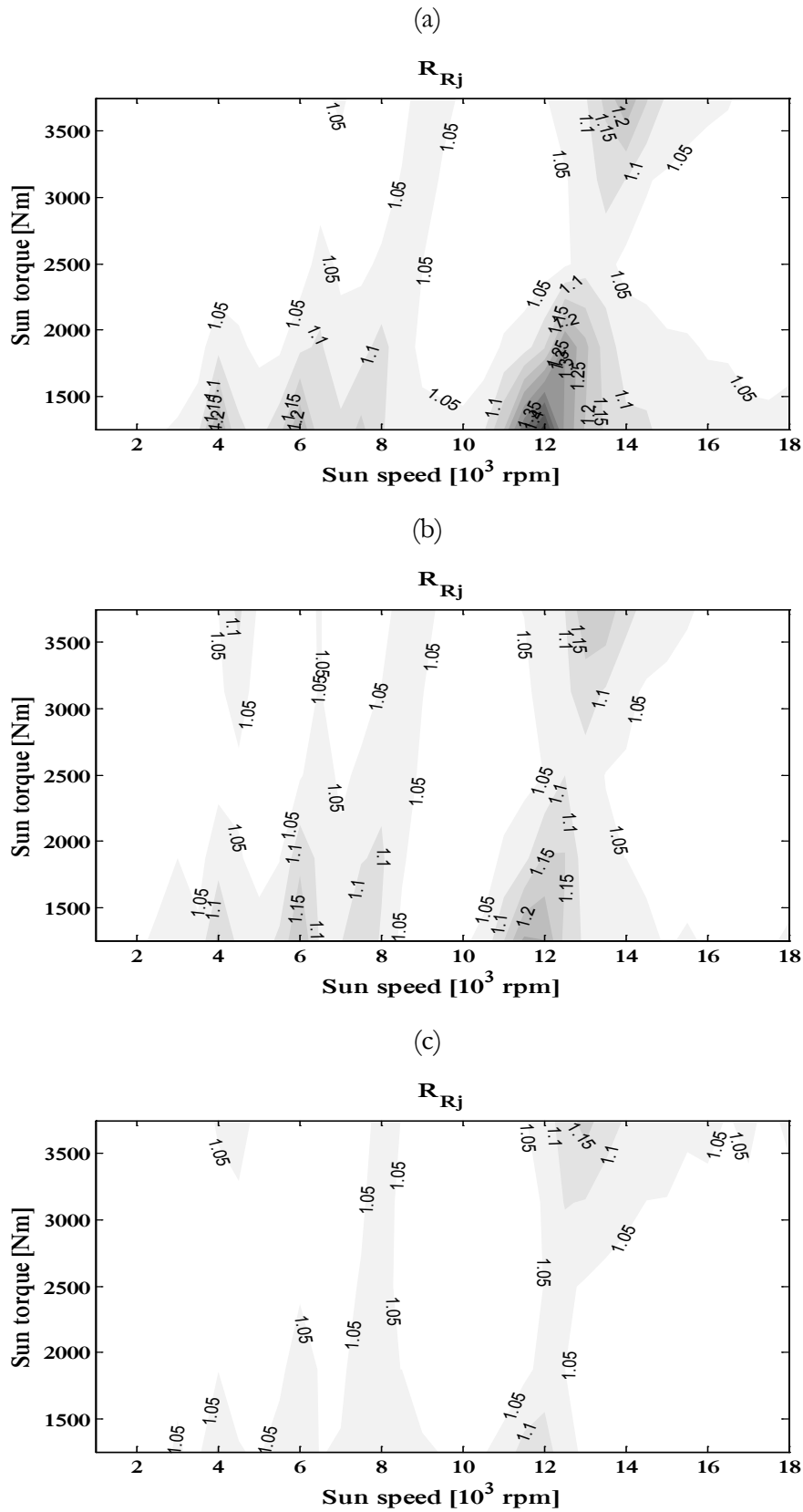


Figure 4-15. Coefficient dynamique sur les engrenements intérieurs pour des corrections (a) longues, (b) moyennes et (c) courtes – simple hélice et couronne rigide

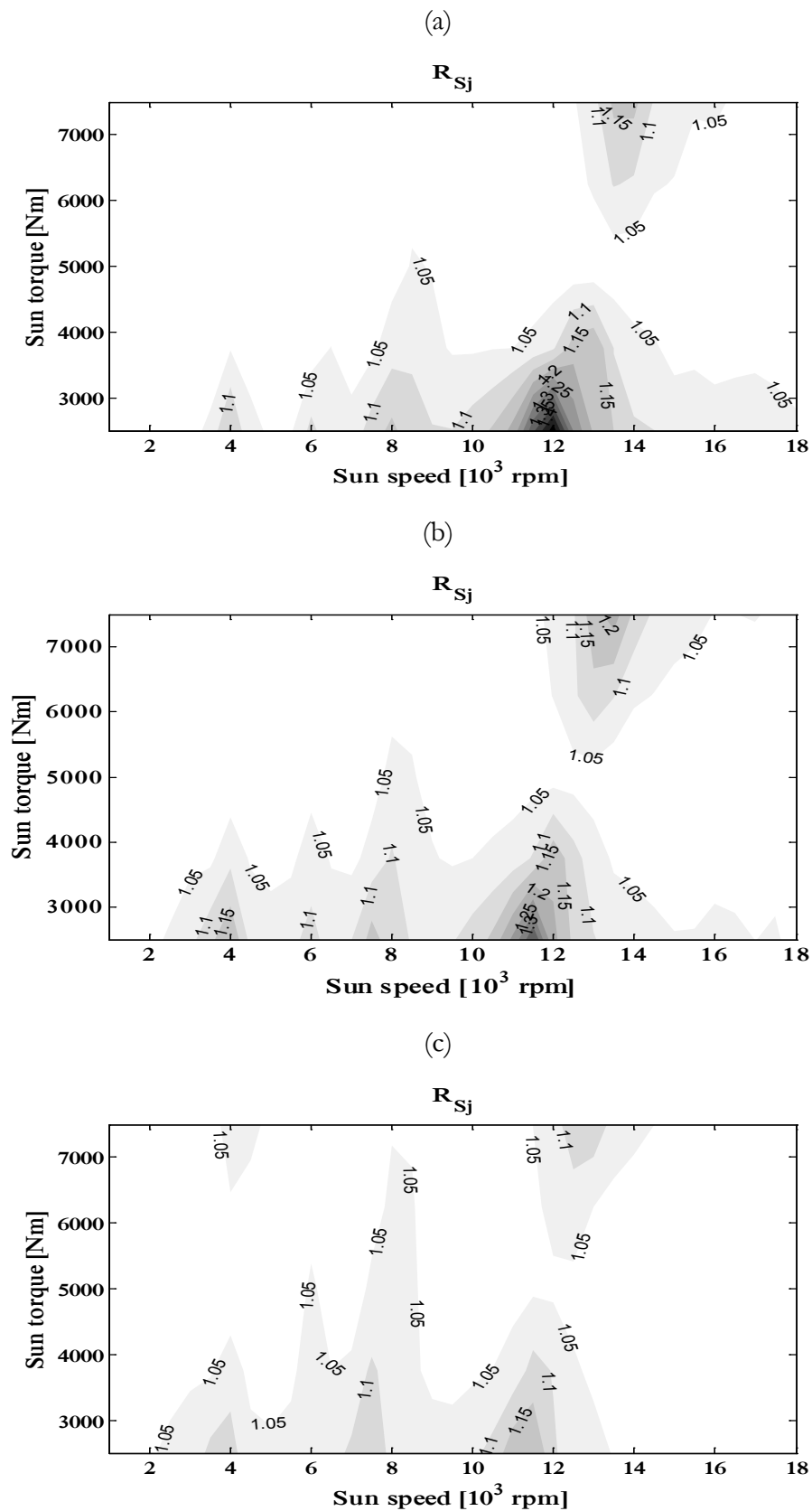


Figure 4-16. Coefficient dynamique sur les engrègements extérieurs pour des corrections (a) longues, (b) moyennes et (c) courtes – double-hélice et couronne rigide

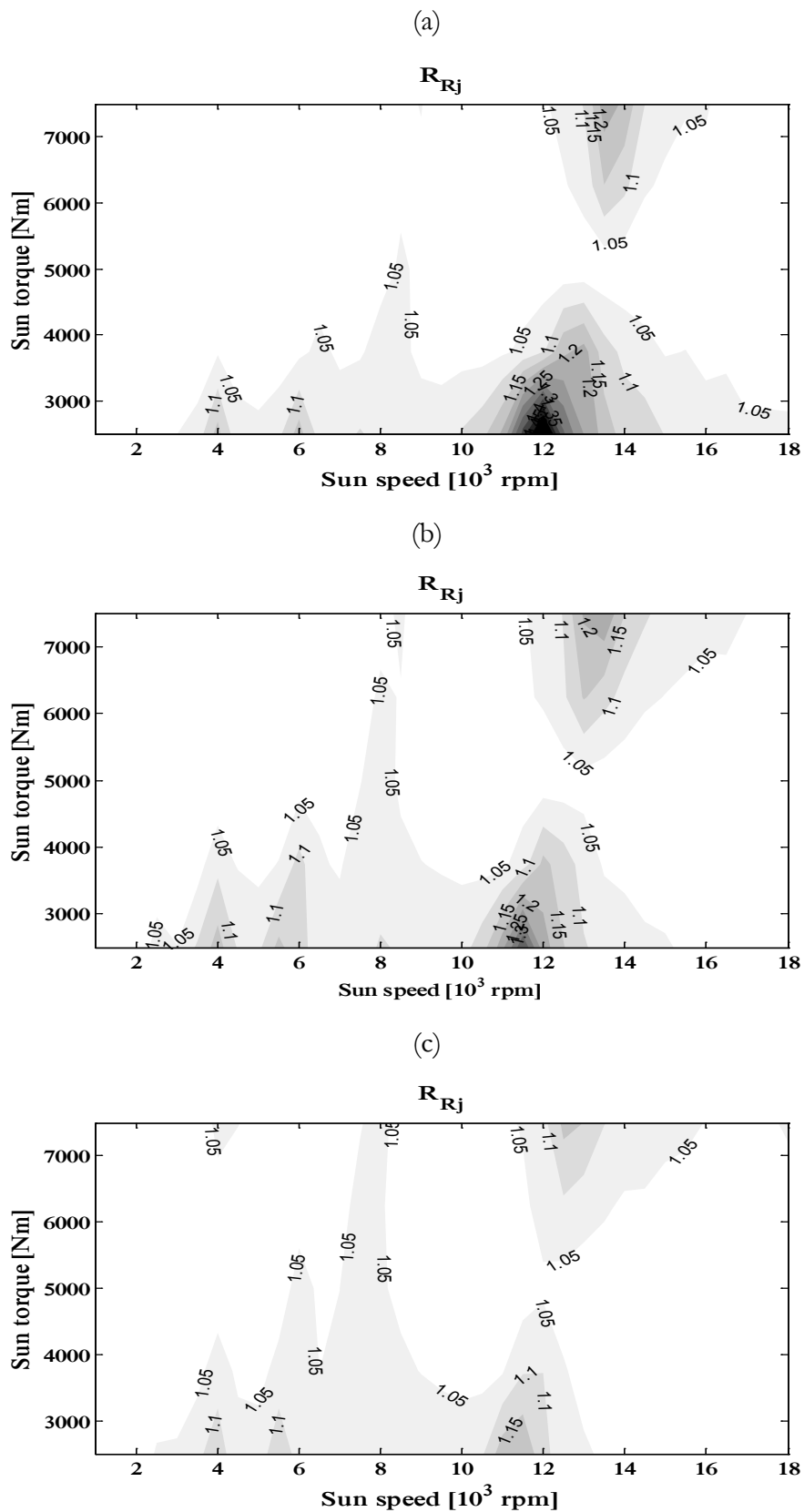


Figure 4-17. Coefficient dynamique sur les engrenements intérieurs pour des corrections (a) longues, (b) moyennes et (c) courtes – double-hélice et couronne rigide

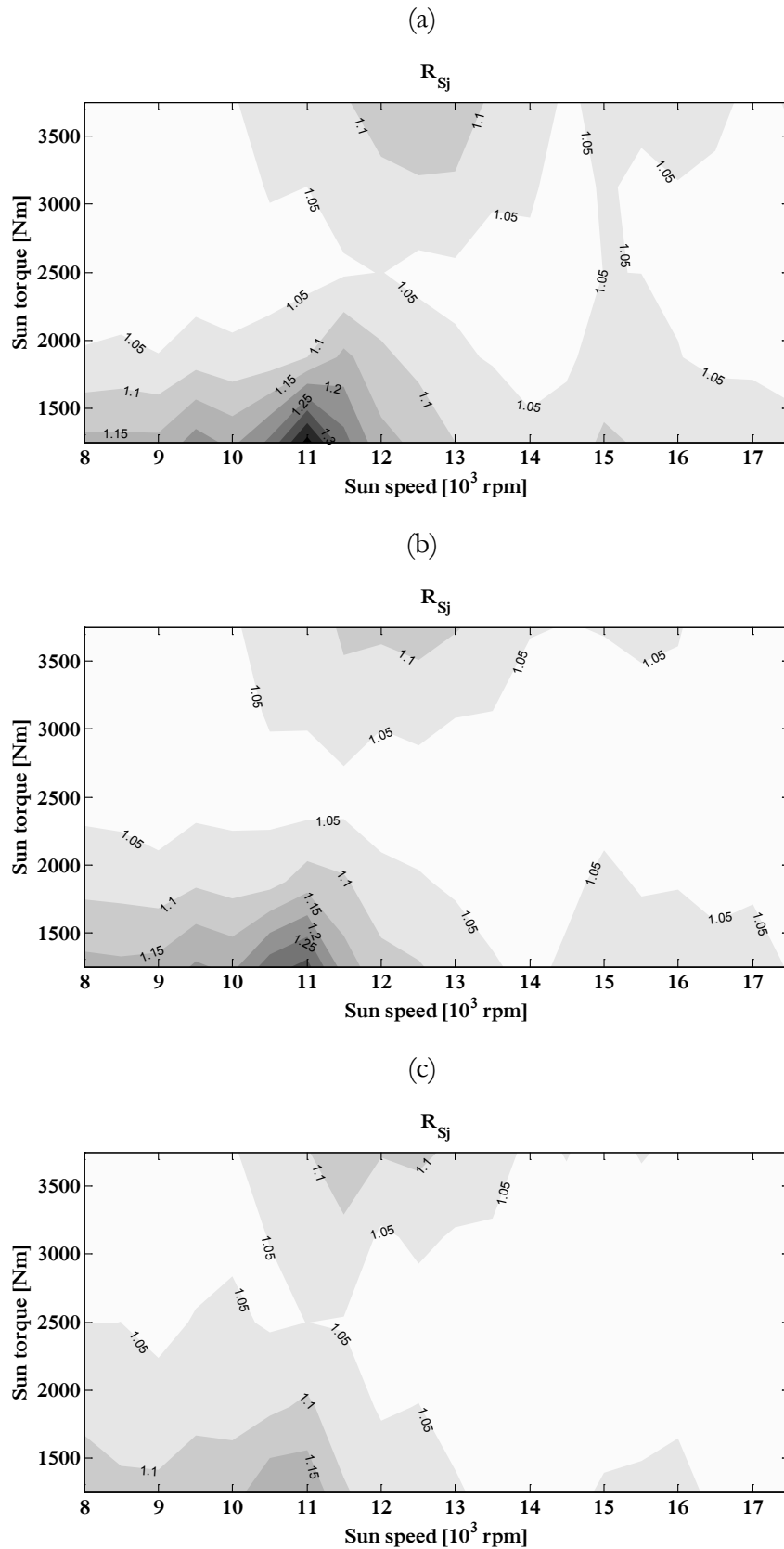


Figure 4-18. Coefficient dynamique sur les engrenements extérieurs pour des corrections (a) longues, (b) moyennes et (c) courtes – simple hélice et couronne flexible

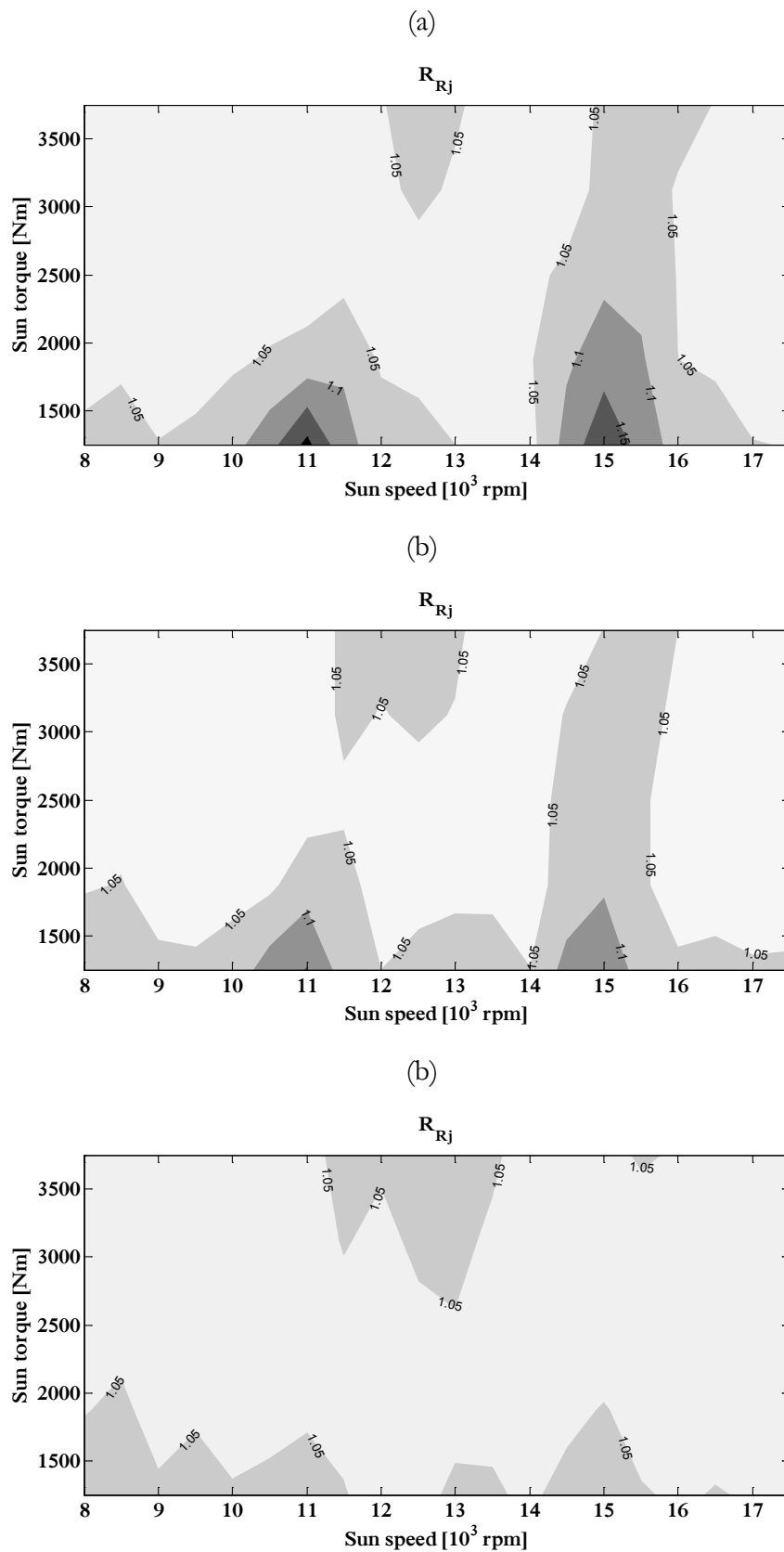


Figure 4-19. Coefficient dynamique sur les engrenements intérieurs pour des corrections (a) longues, (b) moyennes et (c) courtes – simple hélice et couronne flexible

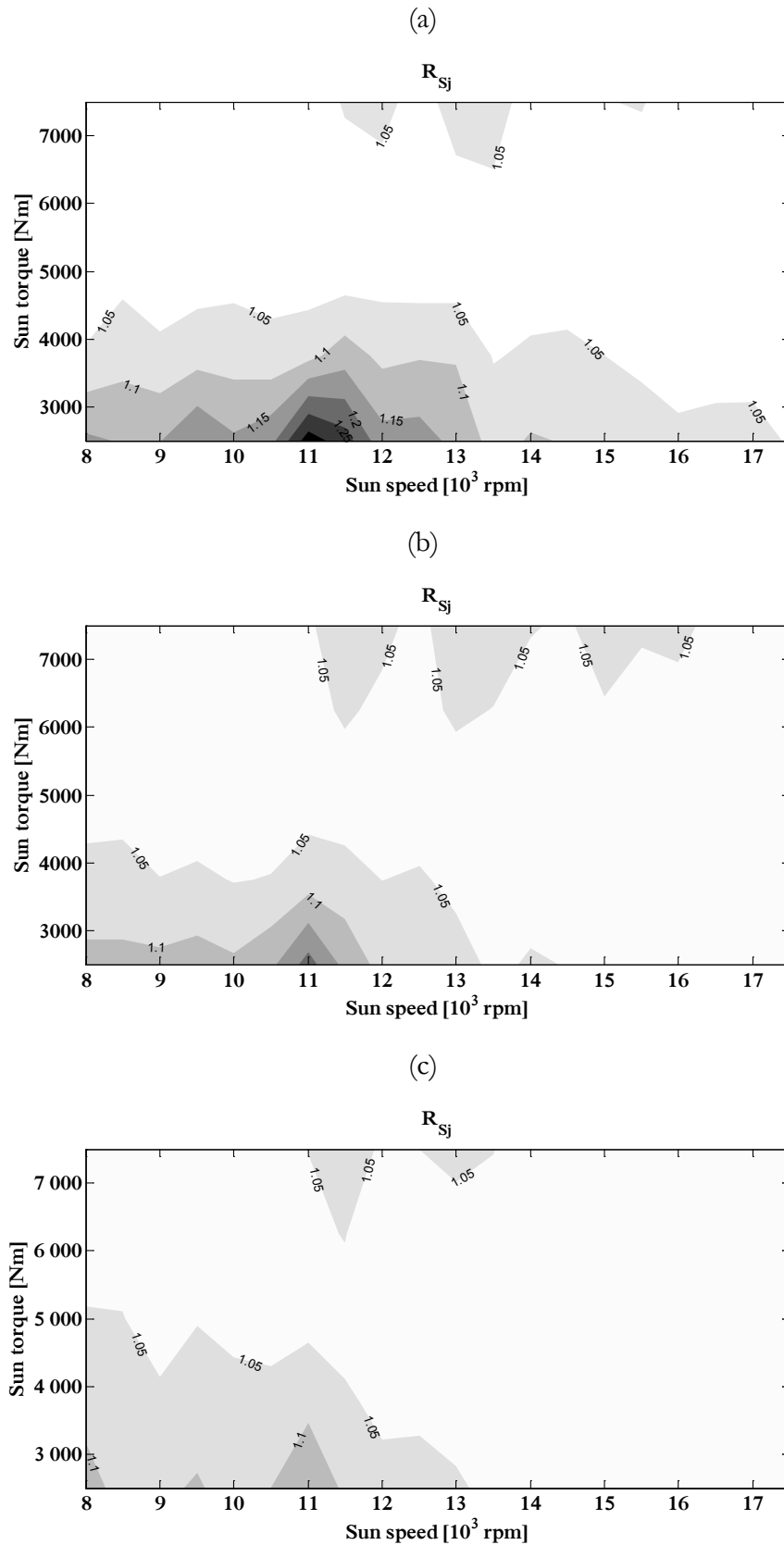


Figure 4-20. Coefficient dynamique sur les engrenements extérieurs pour des corrections (a) longues, (b) moyennes et (c) courtes – double-hélice et couronne flexible

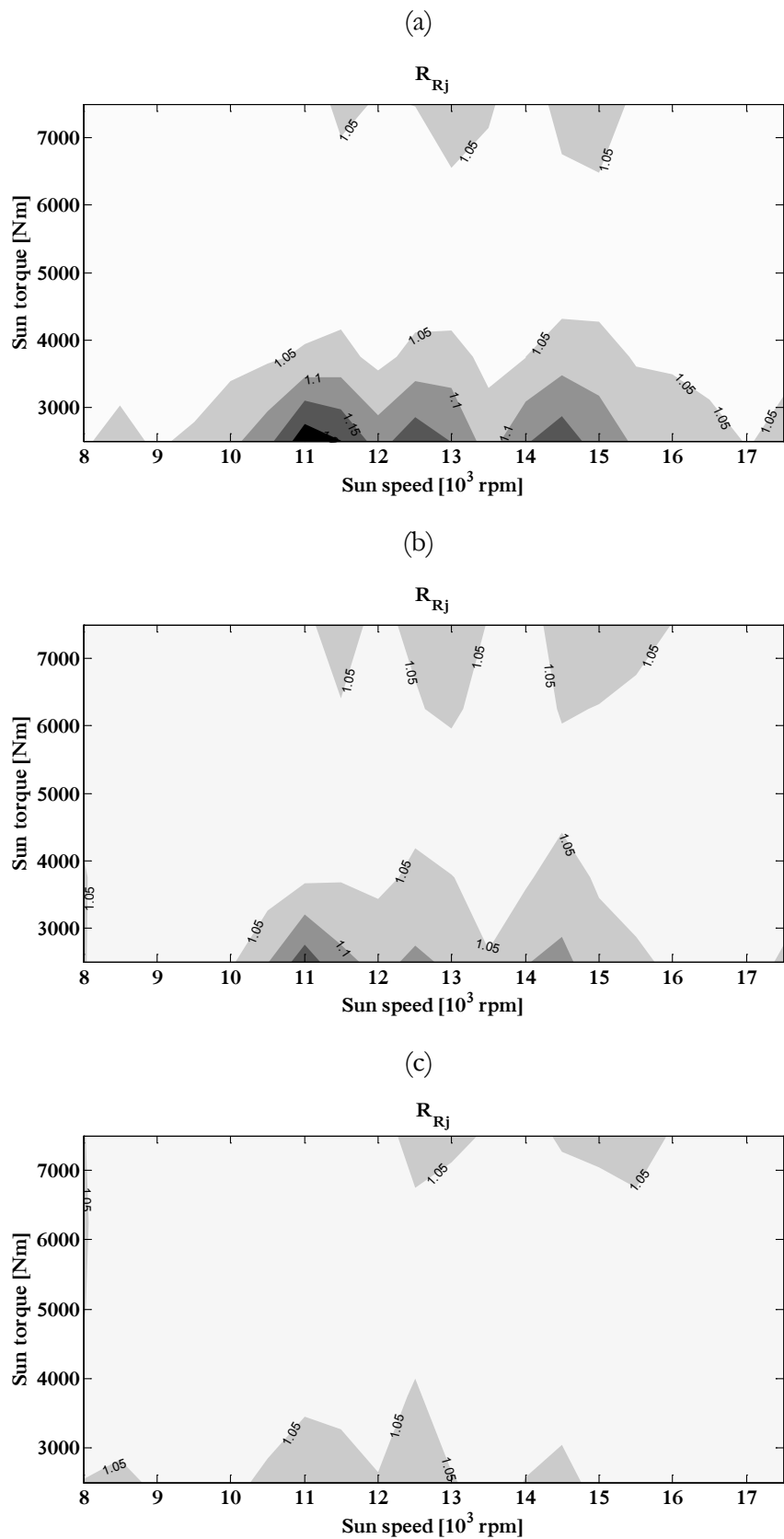


Figure 4-21. Coefficient dynamique sur les engrenements intérieurs pour des corrections (a) longues, (b) moyennes et (c) courtes – double-hélice et couronne flexible

4.3.5 Concept d'erreur de transmission locale et critère d'optimisation quasi-statique « équivalent »

Les corrections optimales présentées jusqu'ici ont été déduites de la minimisation des efforts dynamiques. Cette façon de procéder reste relativement coûteuse en temps de calcul car il est nécessaire de balayer une plage de vitesses et, pour chacune des vitesses, d'effectuer un nombre d'itérations temporelles élevé afin, en particulier, d'éliminer les transitoires numériques engendrés par les conditions initiales (déformée statique sans vitesse, ni accélération). Par analogie avec ce qui a été réalisé pour les réducteurs simple étage, il apparaît intéressant de définir pour les réducteurs à plusieurs engrènements un critère d'optimisation quasi-statique représentatif des effets dynamiques qui permettrait ainsi de s'affranchir des contraintes et lourdeurs des simulations dynamiques. Par analogie avec un couple pignon-roue classique, il est possible de définir une erreur de transmission quasi-statique globale liant l'entrée et la sortie de mouvement sous la forme :

$$TE_S = {}^T \mathbf{W} (\mathbf{X}_S + \mathbf{X}_R)$$

avec \mathbf{W} un vecteur de projection ayant comme composantes non nulles celles correspondant aux degrés de liberté associés à la définition de l'erreur de transmission. En se basant sur les méthodologies expérimentales, seules les composantes en relation avec les degrés de torsion sont non nulles.

\mathbf{X}_S et \mathbf{X}_R sont respectivement la solution quasi-statique des équations du mouvement et un terme correspondant aux rotations de corps rigides induites par les erreurs de forme et de position des mobiles (erreur de transmission à vide).

A l'évidence, la notion d'erreur de transmission globale peut difficilement être représentative des phénomènes localisés aux engrènements, il semble donc judicieux d'introduire le concept d'erreur de transmission locale $TE_S^{(L)}$ spécifique à un engrènement (L), soit ici :

$$TE_S^{(L)} = {}^T \mathbf{W}^{(L)} (\mathbf{X}_S + \mathbf{X}_R)$$

avec $\mathbf{W}^{(L)}$ le vecteur de projection avec des composantes non nulles sur les degrés de liberté de torsion des organes menant et mené de l'engrènement (L).

Sous les hypothèses que :

- (a) les corps des engrenages soient rigides,
- (b) les frottements à la denture soient négligeables,

- (c) la normale à la denture ne dépende pas de la position du point de contact,
- (d) les variations des moments de basculement soient négligeables (prise en compte de leurs valeurs moyennes uniquement),
- (d) l'effet d'excentricités et de désalignements soient négligeable et
- (e) les conditions de contact en dynamique demeurent proches de celles en régime quasi-statique

il a été démontré (le détail peut être trouvé dans [32]) que pour minimiser les efforts dynamiques dans un train à plusieurs engrènements il est nécessaire et suffisant de minimiser la somme des variations des erreurs de transmissions locales, soit :

$$\text{Minimiser } \sum_L RMS(TE_s^{(L)})$$

Sur cette base, on se propose donc de minimiser la moyenne des RMS des erreurs de transmissions locales, critère dénommé RMS(TEs) :

$$RMS(TEs) = Mean \left[RMS(TE_s^{(L)}) \right]$$

4.3.6 Optimisation vis-à-vis des variations des erreurs de transmission locales

Compte tenu de l'éclairage offert par la section précédente, les corrections sont maintenant optimisées vis-à-vis des fluctuations des erreurs de transmission locales selon le critère RMS(TEs). Les solutions optimales trouvées à l'aide de l'algorithme génétique sont présentées sur la Figure 4-22 pour les trains planétaires simple et double-hélice (couronne rigide). Dans les deux cas, les corrections optimisées sont disposées le long de la Courbe Maitresse, attestant la validité de la théorie précédemment exposée.

Une solution technologique qui apparait intéressante d'un point de vue industriel réside dans le fait de décaler les hélices afin de réduire les excitations globales du système et par conséquent les efforts dynamiques (section 3.3). Deux configurations en double-hélice sont étudiées en décalant les hélices dans le plan de base de 25% et 50% du pas de base apparent. Les corrections optimales sont affichées sur la Figure 4-23. Il apparaît que le décalage des hélices n'a aucune influence sur les corrections optimales et que la formulation développée dans [32] reste valide. Le décalage des hélices n'engendre qu'un déphasage des raideurs d'engrènement et des erreurs de transmission locales mais ne change pas fondamentalement leurs variations. Les performances de ces corrections optimisées sont présentées à la section suivante.

En résumé, il a été montré qu'indépendamment du type de denture (simple ou double-hélice) les corrections optimales se trouvent globalement sur les Courbes Maitresses. Tandis que les déformations de la couronne ont pour effet de décaler légèrement les corrections vers des

profondeurs de correction plus importantes, le décalage des hélices n'a quant à lui aucune influence. Il apparaît donc nécessaire de s'intéresser plus attentivement aux performances des corrections situées sur ces Courbes Maitresses et à leurs combinaisons (traité à la section 4.4).

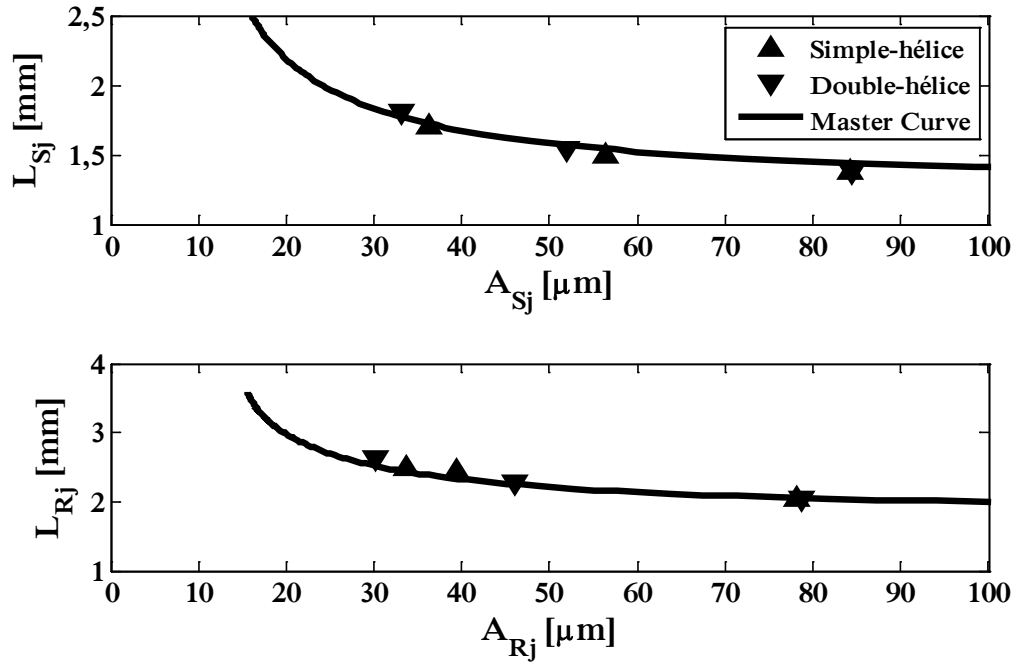


Figure 4-22. Corrections optimales vis-à-vis des erreurs de transmission locales – simple et double hélice à couronne rigide

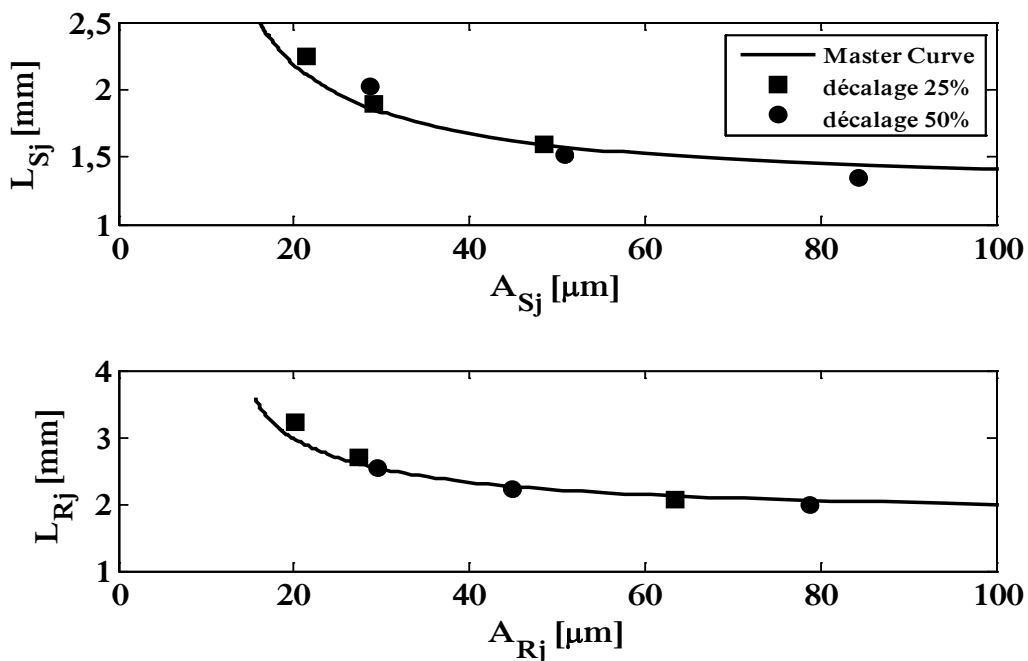


Figure 4-23. Influence du décalage des hélices sur les corrections optimales – couronne rigide

4.3.7 Cas d'une denture droite

Les hypothèses qui ont servi à construire le critère basé sur les erreurs de transmission locales sous-entendent que le problème d'un engrènement isolé (L) soit « équivalent » au problème correspondant à un simple étage (0), c'est-à-dire que les distributions d'efforts de contact sur les flancs de denture et de raideurs d'engrènement pour les deux problèmes soient proches. Ces conditions impliquent d'appliquer des torseurs d'efforts extérieurs représentatifs des actions mécaniques exercées par l'environnement sur un engrènement isolé. Dans ce contexte et en utilisant la définition de l'erreur de transmission locale introduite précédemment, on obtient la relation suivante entre les erreurs de transmission locale (L) et pour un seul engrènement (0) (les détails des développements théoriques peuvent être trouvés dans [32]) :

$$TE_S^{(L)} = TE_S^{(0)} + (NLTE^{(L)} - NLTE^{(0)}) + const.$$

avec $NLTE^{(*)} = {}^T \mathbf{W}^{(*)} \mathbf{X}_R^{(*)}$ l'erreur de transmission sans charge.

D'après [32], les variations temporelles de l'erreur de transmission $TE_S^{(L)}$ sont représentatives de l'amplification dynamique des efforts d'engrènement et le critère d'optimisation RMS(TEs) pour un train planétaire ne sera efficace que si $NLTE^{(L)} = NLTE^{(0)}$. La cinématique de corps rigide dans un train planétaire étant complexe et dépendante des interactions entre engrènements (2.2.4), cette dernière condition est généralement satisfaite pour une denture hélicoïdale corrigée mais ne l'est pas nécessairement pour une denture droite. La Figure 4-24 montre les corrections optimales obtenues par l'algorithme génétique pour une denture droite dérivée de la géométrie présentée dans Table 4-1 (l'entraxe de fonctionnement a été modifié par l'entraxe de taillage). On peut noter un très bon accord entre les corrections optimisées et la Courbe Maitresse pour les engrènements extérieurs du fait que les erreurs de transmission sans charge $NLTE^{(L)}$ et $NLTE^{(0)}$ sont similaires (simplement déphasées dans le temps, Figure 4-25). En revanche pour les engrènements intérieurs on observe un décalage des corrections vers une amplitude plus faible (corrections longues) certainement causé par des signaux de $NLTE$ plus complexes (Figure 4-26).

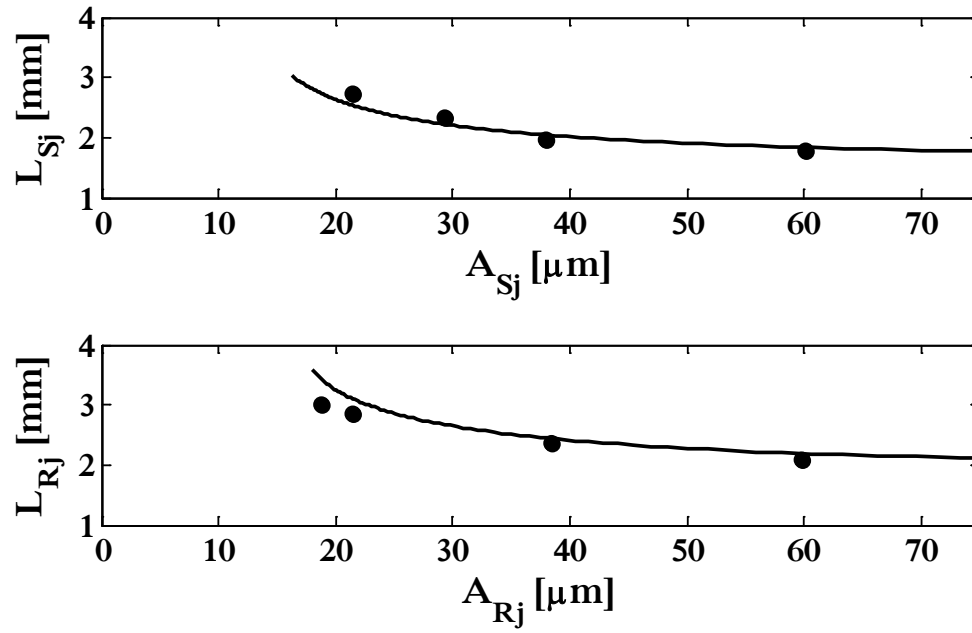


Figure 4-24. Corrections optimales pour une denture droite – couronne rigide

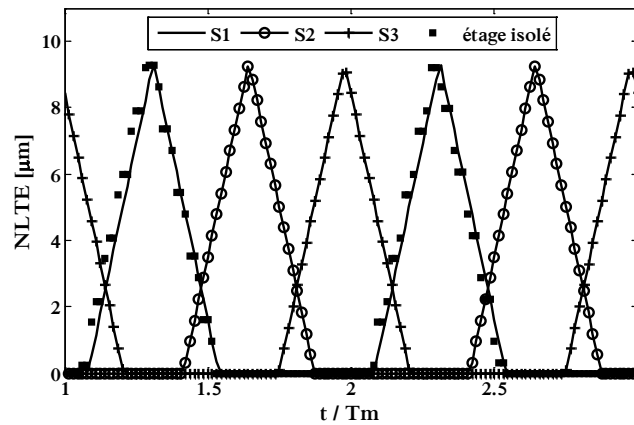


Figure 4-25. Erreurs de transmission sans charge pour les engrènements extérieurs

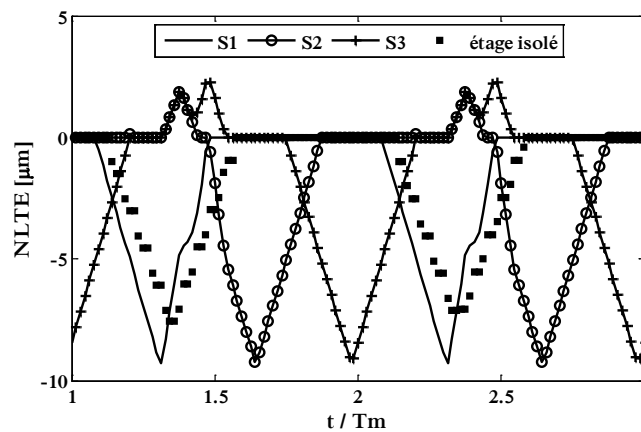


Figure 4-26. Erreurs de transmission sans charge pour les engrènements intérieurs

4.4 Performances des corrections définies par les Courbes Maitresses

Dans cette section, les performances vis-à-vis des efforts dynamiques et des variations des erreurs de transmission locales sont analysées en combinant les corrections définies à l'aide de deux Courbes Maitresses (une pour les engrènements extérieurs et une autre pour les engrènements intérieurs). Les systèmes étudiés sont des trains planétaires simple et double-hélice.

Les Figure 4-27 à Figure 4-32 présentent les courbes iso-valeurs (fonction des longueurs de corrections des engrènements extérieurs et intérieurs) correspondantes aux trois critères suivants :

- (i) MAX(R) : le maximum du maximum des coefficients dynamiques des engrènements extérieurs et intérieurs
- (ii) MEAN(R)
- (iii) RMS(TEs)

Les résultats (Figure 4-27 à Figure 4-29) montrent tout d'abord que toutes les combinaisons de corrections n'ont pas la même efficacité en termes de réduction d'amplifications dynamiques des efforts d'engrènement. On note, cependant, que les coefficients dynamiques demeurent modérés et n'excèdent pas 1.15 (pour les deux systèmes) pour toutes les combinaisons de corrections considérées, signifiant que toutes les vitesses critiques ont, de fait, disparu sur la plage de vitesses d'analyse (1 000 à 18 000 t/mn sur la solaire dans ce cas). De plus, on peut remarquer que les trois critères conduisent globalement aux mêmes « meilleures » corrections, prouvant encore une fois l'intérêt de l'approche basée sur les erreurs de transmission locales. Enfin, il apparaît que les iso-courbes sont quasiment similaires pour les dentures simple et double-hélice tant que la symétrie (entre les hélices gauche et droite) du système est conservée.

L'influence du décalage d'hélice est abordée sur les Figure 4-30 à Figure 4-32. Les courbes de niveau confirment une nouvelle fois que les corrections définies à partir des Courbes Maitresses sont performantes par rapport au paramètre efforts dynamiques sur les dentures. En revanche, on peut observer que les meilleures corrections ne sont pas nécessairement les mêmes suivant le décalage entre les hélices.

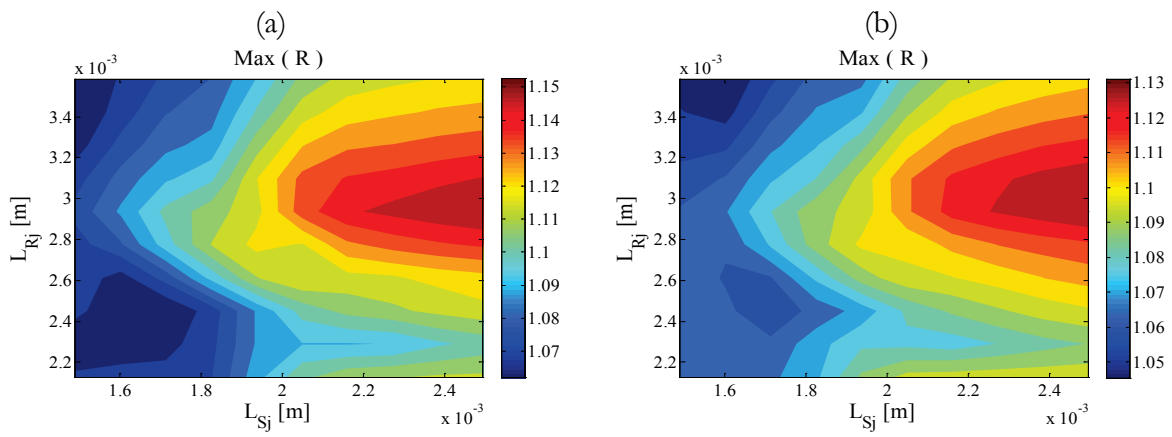


Figure 4-27. Courbes iso-valeur de MAX(R) pour des trains planétaires (a) simple et (b) double-hélice non décalé – couronne rigide

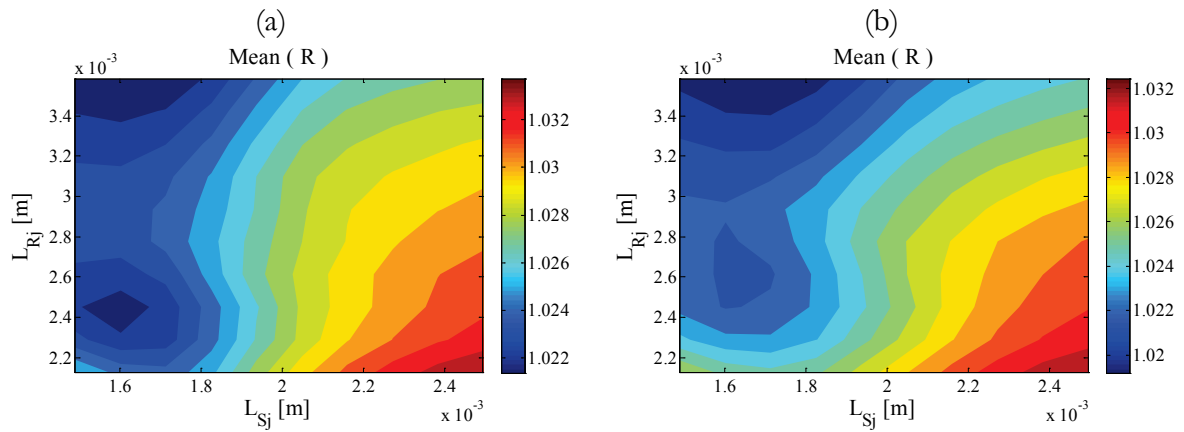


Figure 4-28. Courbes iso-valeur de MEAN(R) pour des trains planétaires (a) simple et (b) double-hélice non décalé – couronne rigide

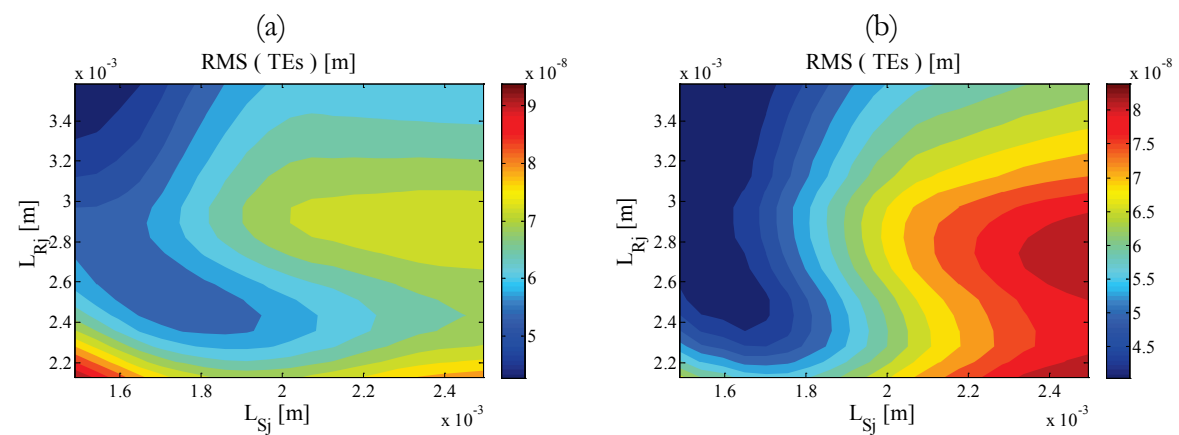


Figure 4-29. Courbes iso-valeur de RMS(TEs) pour des trains planétaires (a) simple et (b) double-hélice non décalé – couronne rigide

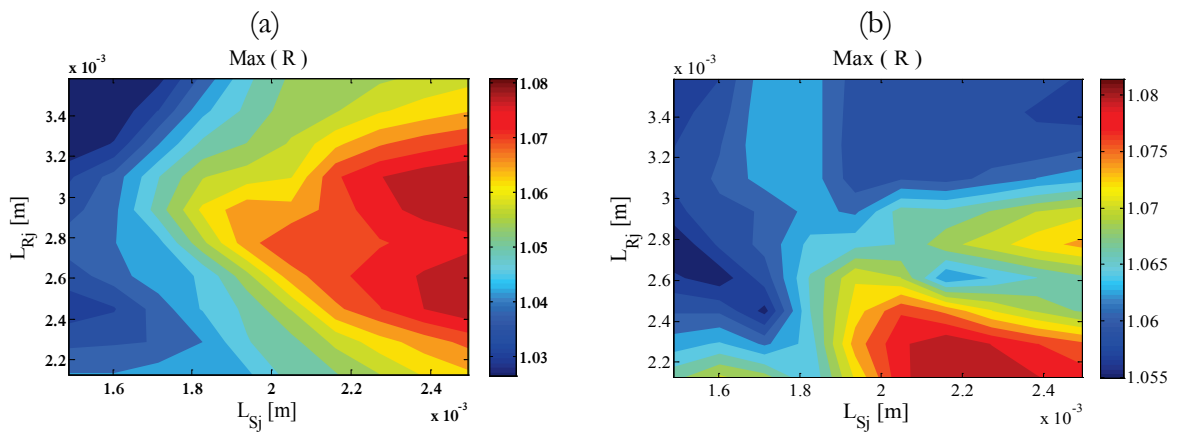


Figure 4-30. Courbes iso-valeur de MAX(R) pour des trains planétaires double-hélice décalés de (a) 25% et (b) 50% – couronne rigide

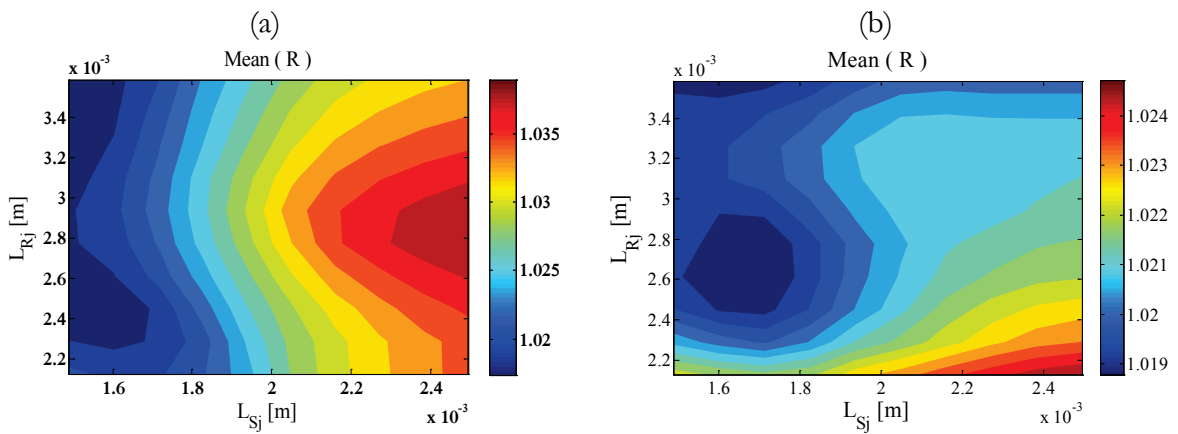


Figure 4-31. Courbes iso-valeur de MEAN(R) pour des trains planétaires double-hélice décalés de (a) 25% et (b) 50% – couronne rigide

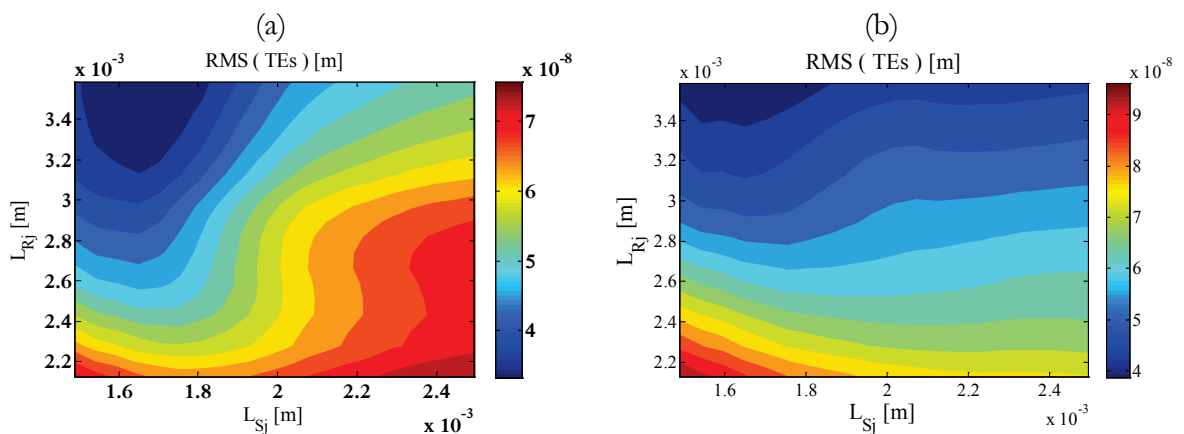


Figure 4-32. Courbes iso-valeur de RMS(TEs) pour des trains planétaires double-hélice décalés de (a) 25% et (b) 50% – couronne rigide

4.5 Influence du bombé sur l'optimisation des corrections de profil

D'un point de vue pratique, les dentures sont fréquemment corrigées le long de l'hélice dans le but d'obtenir un chargement centré sur la largeur de denture, de compenser les erreurs d'alignement et éviter des portées en coin. Un bombé parabolique constitue une solution technologique fréquemment utilisée dans un contexte industriel. Dans ces conditions, la superposition de corrections de profil (linéaires symétriques en tête) et d'une correction longitudinale conduit à une modification surfacique paramétrée par trois constantes, A , L (amplitude et longueur de correction selon le profil) et B , l'amplitude du bombé longitudinal (Figure 2-9).

4.5.1 Formule analytique des corrections optimales pour des engrenages hélicoïdaux

Les travaux sur la Courbe Maitresse ont été étendus par les auteurs dans le cas où une correction longitudinale parabolique (d'amplitude B) est superposée aux corrections de profil linéaires et symétriques en tête (A , L), [123]. Le bombé est introduit sur une des roues (menante / menée au choix) de façon centrée sur la largeur de denture. Les hypothèses du modèle sont identiques à celles formulées pour l'analyse analytique des corrections de profil optimales dans la section 4.3.5, sauf pour la raideur d'engrènement linéique qui est considérée comme constante. Sous réserve que l'amplitude du bombé B soit inférieure à la déflexion statique moyenne δ_{m0} ($B^* = B/\delta_{m0} < 1$) et que le rapport de recouvrement soit suffisamment important ($\varepsilon_p > 0.8$), il est possible de montrer que la réduction de longueur de contact due aux corrections de profil peut être exprimée par un paramètre adimensionnel λ exprimé sous la forme [120]:

$$\lambda = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\Gamma(1 - \Gamma - 1/A^*)}}{2}$$

avec Γ longueur de correction de profil adimensionnée ($L = \Gamma \varepsilon_\alpha p_{ba}$ avec p_{ba} le pas de base apparent), A la profondeur de correction et $(\bullet)^* = (\bullet)/\delta_{m0}$ soit l'adimensionnement par rapport à la déflexion statique moyenne.

La paramètre de réduction de longueur effective de contact sur la plan d'action est défini de sorte que le rapport de conduite effectif s'exprime :

$$\varepsilon'_\alpha = \varepsilon_\alpha (1 - 2\lambda).$$

Deux cas de figure sont possibles : a) $\lambda > 0$ lorsqu'il y a réduction de la longueur de contact, et b) $\lambda = 0$ dans le cas contraire.

(a) $\lambda = 0$

Dans ce cas l'amplitude adimensionnée de la correction optimale pour des valeurs adimensionnées de longueur de correction de profil $\Gamma \in]\Gamma_L/2; \Gamma_0]$ et de bombé adimensionnel B^* s'écrit :

$$A^* \cong \frac{1 + 2B^* \eta(\varepsilon_\beta)}{(1 - \Gamma) \cdot [1 - \text{Sinc}(\varepsilon_\alpha (1 - \Gamma)) \text{Sinc}(\varepsilon_\alpha \Gamma) / \text{Sinc}(\varepsilon_\alpha)]}$$

avec :

$$\eta(\varepsilon_\beta) = \frac{1}{\pi^2 \varepsilon_\beta^2} - \frac{\cot(\pi \varepsilon_\beta)}{\pi \varepsilon_\beta} - \frac{1}{3}$$

Où

$\Gamma_L/2 = (\varepsilon_\alpha - 1) / (2\varepsilon_\alpha)$ représente la limite inférieure de longueur de correction correspondant à la zone de transition entre une et deux paires de dents en prises (ou à l'asymptote horizontale sur la Figure 4-36)

Γ_0 la longueur de correction du point de jonction $(A_0^*; \Gamma_0)$ entre les deux domaines de correction ($\lambda = 0$ et $\lambda > 0$) (définie au paragraphe suivant)

(b) $\lambda > 0$

Dans ce cas l'amplitude adimensionnée de la correction optimale pour des valeurs adimensionnées de longueur de correction selon le profil $\Gamma \in]\Gamma_0; \Gamma_L]$ et de bombé B^* est la solution du système d'équations suivant:

$$\begin{cases} \lambda = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\Gamma(1 - \Gamma - 1/A^*)}}{2} \\ 2B^* (1 - 2\lambda) \cdot \eta(\varepsilon_\beta) \text{Sinc}(\varepsilon'_\alpha) + \text{Sinc}(\varepsilon_\alpha (1 - \Gamma - \lambda)) \text{Sinc}(\varepsilon_\alpha (\Gamma - \lambda)) = 0 \end{cases}$$

Le point de jonction $(A_0^*; \Gamma_0)$ est défini comme la solution du système d'équations suivant:

$$\begin{cases} A_0^* = \frac{1}{1-\Gamma_0} \\ 2B^* \cdot \eta(\epsilon_\beta) \text{Sinc}(\epsilon_\alpha) + \text{Sinc}(\epsilon_\alpha(1-\Gamma_0)) \text{Sinc}(\epsilon_\alpha \Gamma_0) = 0 \end{cases}$$

Afin d'illustrer le propos, la Figure 4-33 montre les solutions optimales (Courbes Maitresses) pour une géométrie donnée avec la limite entre les domaines avec ou sans réduction de longueur de contact superposées aux iso-courbes du RMS de l'erreur de transmissions.

La définition des corrections optimales (A^*, Γ) dépend désormais de $B^* \eta(\epsilon_\beta)$. Après développements et pour $\epsilon_\beta > 1$, il est possible de définir un bombé adimensionné B_0^* pour lequel aucune correction de profil n'est nécessaire pour minimiser les variations de l'erreur de transmission, comme montré sur la Figure 4-34, et défini par :

$$B_0^* = \frac{-1}{2\eta(\epsilon_\beta)} < 1$$

Les corrections optimales ont été dérivées pour une formulation de la raideur d'engrènement linéique constante (ISO 6336). Afin de correctement prédire les corrections optimales lorsque la raideur d'engrènement linéique dépend de la position du point de contact sur le profil, un décalage en profondeur est réalisé sous la forme [122] (Figure 4-35) :

$$\tilde{A}^* = A^* (1 - \alpha C_f)$$

avec α un facteur de forme lié à l'évolution de la raideur linéique au cours de l'engrènement ($\alpha \approx 0.3$) et C_f un facteur de correction. Lorsque $\lambda > 0$ l'approximation locale proposée dans [122] est utilisée :

$$C_f = 6\Gamma(-5\Gamma + 2\Gamma_L) + 6(3\Gamma - \Gamma_L) - 1$$

Enfin, quand il n'y a pas de réduction de longueur de contact ($\lambda = 0$), le facteur de correction s'exprime de la façon suivante:

$$\begin{cases} \Gamma_1 = \text{Min}[\Gamma_0; \Gamma_L] \\ C_f = 6\Gamma_0(-5\Gamma_1 + 2\Gamma_L) + 6(3\Gamma_1 - \Gamma_L) - 1 \end{cases}$$

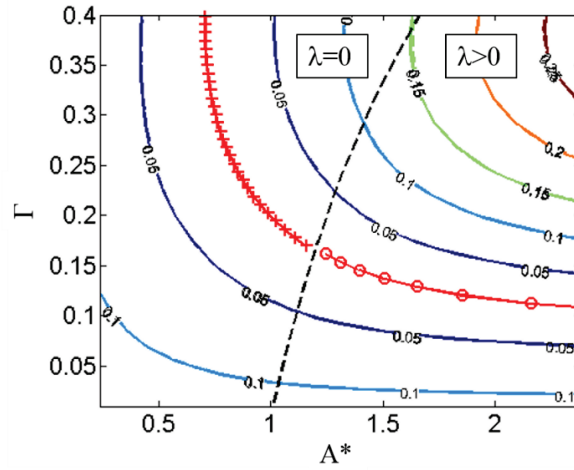


Figure 4-33. Courbe Maitresse superposé aux iso-courbes du RMS(TEs*) ($\epsilon_\alpha = 1.2$, $\epsilon_\beta = 0.64$ et $B^* = 0.19$) – [123]

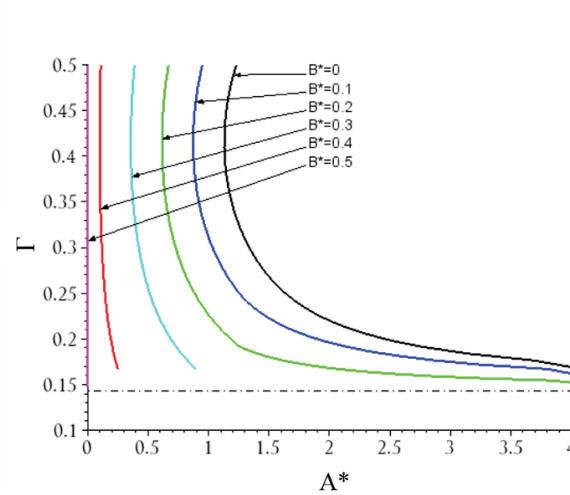


Figure 4-34. Courbes Maitresses en fonction du bombé ($\epsilon_\alpha = 1.40$, $\epsilon_\beta = 1.10$, $B^* = 0.44$) – [123]

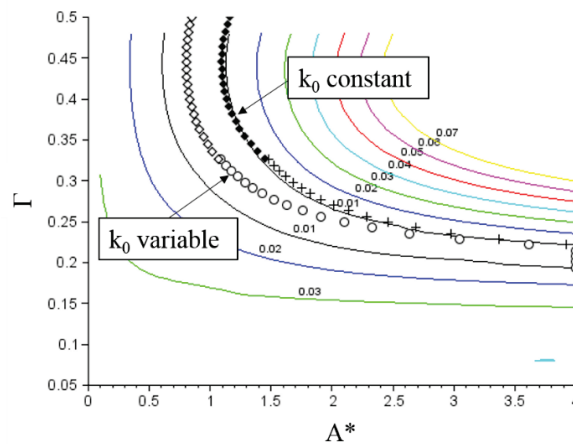


Figure 4-35 ; Courbe maitresses obtenues avec une raideur linéique constante et variable, superposées aux iso-courbes du RMS(TEs*) ($\epsilon_\alpha = 1.60$, $\epsilon_\beta = 1.60$, $B^* = 0.53$) – [123]

4.5.2 Optimisation génétique vis-à-vis des erreurs de transmission locales

Dans ce qui suit, les corrections de profil sont optimisées dans le domaine $\lambda > 0$ en calculant par simulation numérique les erreurs de transmission locales puis en appliquant l'algorithme génétique pour trois bombés différents correspondant à des bombés adimensionnés B^* de 25, 50 et 80% ($B_0^* = 78.8\%$ dans le cas exposé). Les solutions optimales obtenues sont ensuite comparées à celles fournies par les Courbes Maitresses définies à la section précédente sur la Figure 4-36. Pour les bombés adimensionnés de 25 et 50% les corrections optimales sont très proches des solutions analytiques développées pour les engrenages extérieurs, confirmant une nouvelle fois la pertinence du concept d'erreur de transmission locale. En ce qui concerne le cas $B^* = 80\%$, les solutions se positionnent le long de l'axe des ordonnées signifiant qu'aucune correction de profil n'est nécessaire pour minimiser les variations des erreurs de transmission locales. Ce constat corrobore le résultat théorique présenté en 4.5.1 pour des réducteurs simple étage et s'étend au cas de trains planétaires.

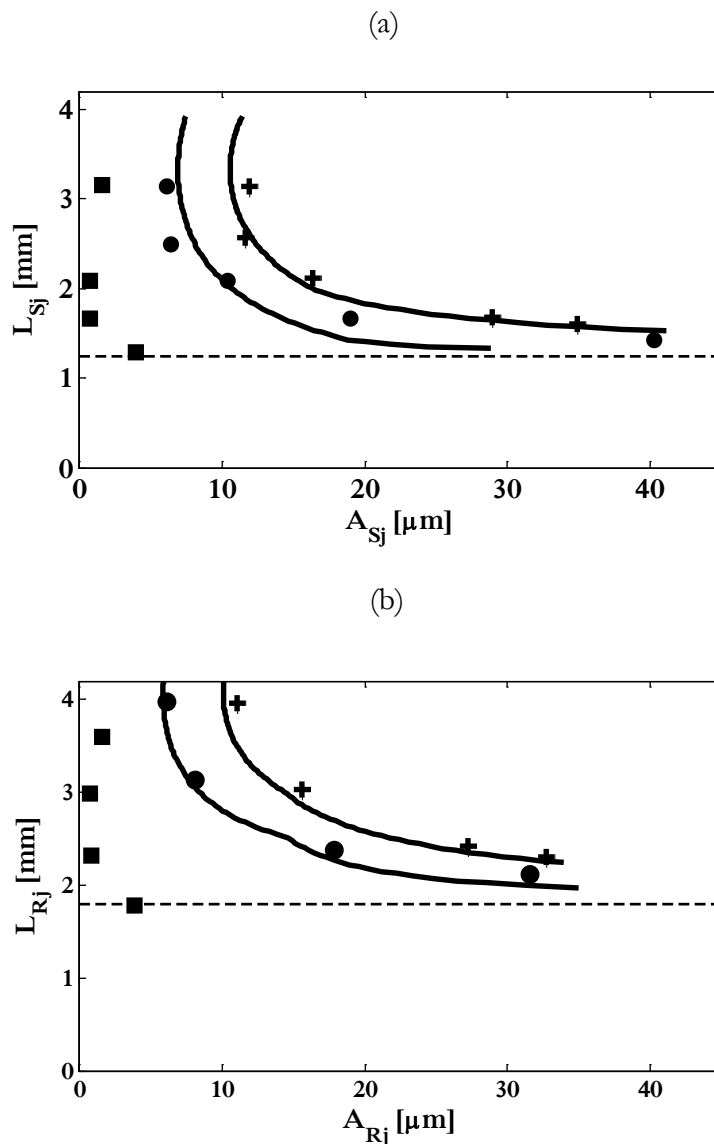


Figure 4-36. Influence du bombé sur les corrections de profil optimales – simple hélice et couronne rigide

4.5.3 Efforts dynamiques avec les corrections optimisées

Précédemment, il a été démontré que certaines combinaisons de corrections longitudinales et de profil peuvent minimiser les variations des erreurs de transmission. Les réponses dynamiques des efforts d'engrèvements pour toutes les combinaisons de corrections surfaciques optimales sont maintenant étudiées. La Figure 4-37 présente les courbes enveloppes obtenues pour les engrèvements (a) extérieurs et (b) intérieurs sur la plage de vitesses de 8 000 à 17 500 t/mn (solaire). Il apparaît une nouvelle fois que les corrections optimales atténuent fortement les amplifications dynamiques. Cependant, on peut noter une dispersion plus importante comparativement aux cas où seules les corrections de profil étaient retenues. De plus, une vitesse critique au voisinage de 14 000 t/mn est toujours visible sur la courbe de réponse. Ce pic semble dû aux modifications de surface de dentures insuffisantes pour éviter des engagements avec chocs et des surcharges dynamiques obtenus ici pour des conditions proches de $\lambda=0$.

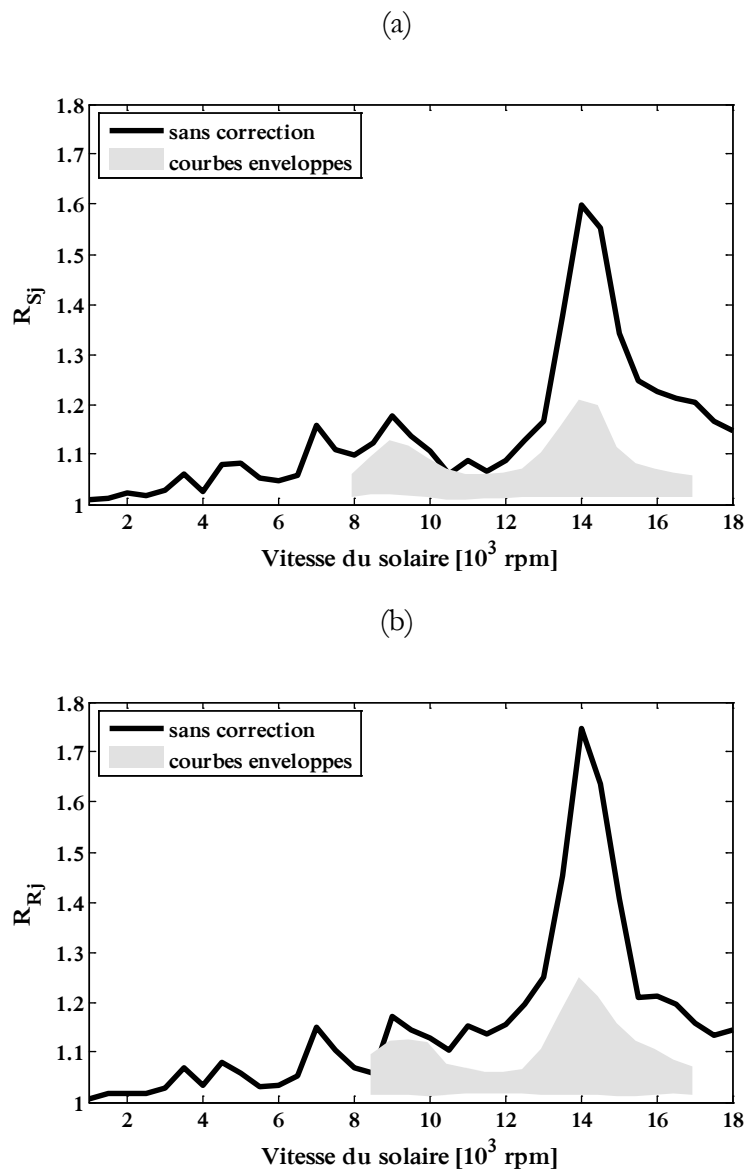


Figure 4-37. Courbes enveloppes du coefficient dynamique des engrèvements (a) extérieurs et (b) intérieurs pour toutes les combinaisons de corrections optimales

4.6 Sous-structuration du porte-couronne

Au paragraphe 3.5, l'influence des déformations de la couronne a été étudiée à l'aide d'une couronne discrétisée en éléments de poutre de Timoshenko. Les conditions aux limites de la couronne ont été appliquées à l'aide de raideurs élémentaires en translation (dans les trois directions Figure 3-9) distribuées sur l'ensemble des nœuds (dents). La représentativité de cette approche est discutable, et cette section vise à modéliser les conditions aux limites de façon plus réaliste par le biais d'une sous-structuration du support de couronne.

4.6.1 Test de la sous-structure

Le composant porte-couronne (Figure 4-38) est donc sous-structuré en utilisant la méthode de Herting [119]. Dans un premier temps, la matrice de rigidité obtenue par cette technique est validée en comparant la déformée statique de la sous-structure obtenue avec la matrice réduite et celle calculée directement avec Ansys® par la méthode des éléments-finis. Le cas présenté sur la Figure 4-39 est obtenu en appliquant les efforts d'engrènement statiques. Par souci de visibilité, les angles de rotation ne sont pas représentés. Un très bon accord est observé entre la solution obtenue par éléments-finis et la solution analytique tant pour les déformations dans le plan que hors du plan médian. On peut noter un déplacement plus important (localement) aux nœuds où les efforts concentrés sont appliqués. Dans un deuxième temps, la matrice de masse est testée en comparant les fréquences propres de la sous-structure obtenues après sous-structuration et par le modèle éléments finis complet. Lors de la réduction, la base modale employée est tronquée à un certain nombre de modes, ici 40 et 300 modes (correspondant respectivement à des fréquences de 3 et 10 kHz). Le Table 4-5 recense les premières fréquences propres. On peut remarquer que la prédiction à partir des matrices réduites est très bonne avec une erreur relative inférieure à 0.05% jusqu'au N^{ème} mode utilisé pour la réduction. Le nombre de modes sélectionné pour la réduction semble donc avoir une importance particulière et sera analysé plus en détail par la suite.

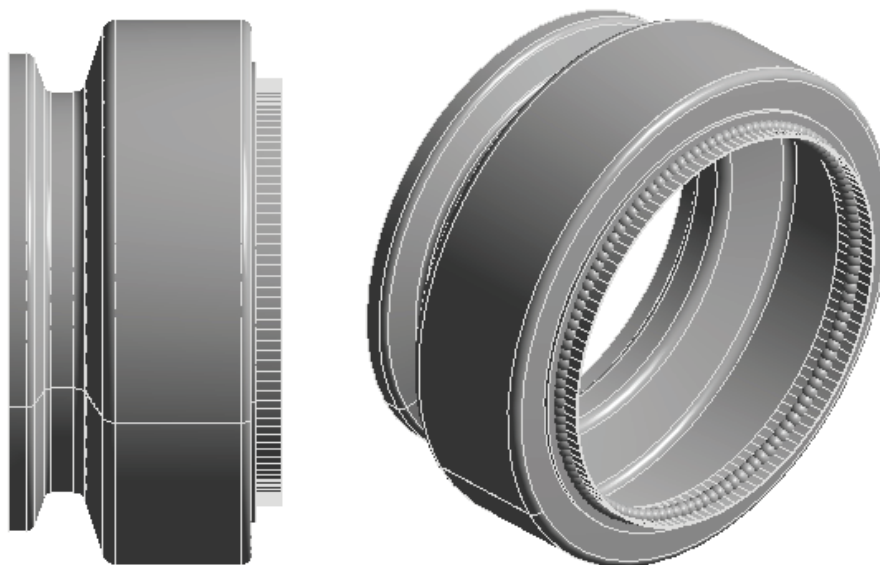
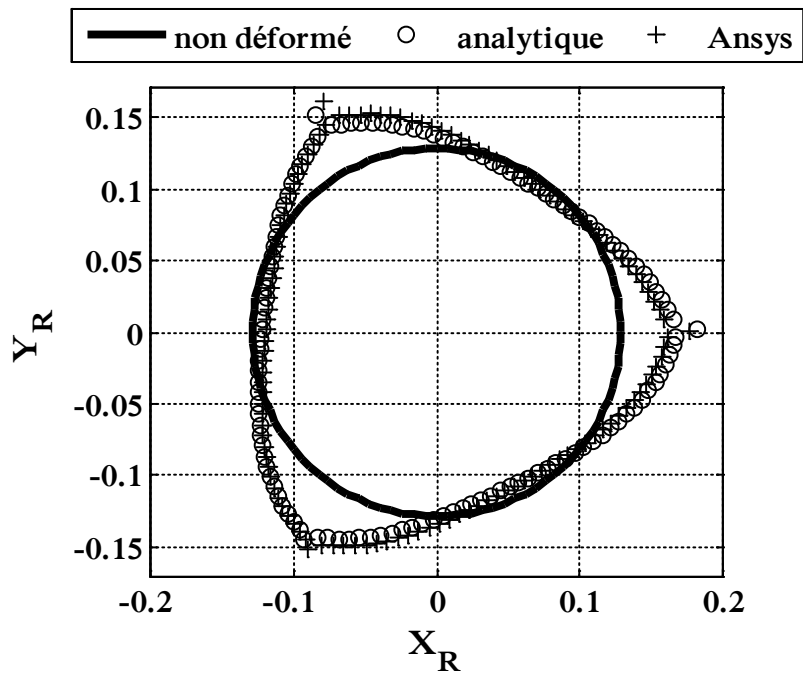


Figure 4-38. Géométrie du porte-couronne

(a)



(b)

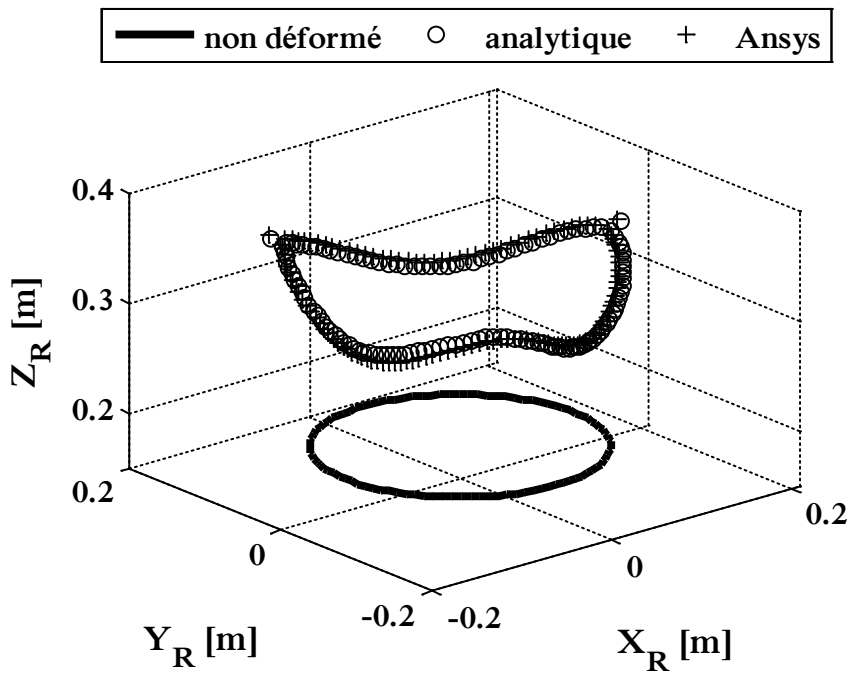


Figure 4-39. Déformée statique de la sous-structure. Comparaison entre les solutions analytique et éléments-finis (a) dans le plan médian et (b) vue iso

Table 4-5. Fréquences propres de la sous-structure. Comparaison entre les solutions analytique et éléments-finis

#mode	Anslys®	Analytique 40 modes	Err. Relat.	Analytique 300 modes	Err. Relat.
	[Hz]	[Hz]	[%]	[Hz]	[%]
1	322	322	-6,04E-04	322	-6,04E-04
2	323	323	-9,08E-04	323	-9,08E-04
3	410	410	-5,40E-05	410	-5,40E-05
4	1009	1009	2,47E-03	1009	2,47E-03
5	1009	1009	1,31E-03	1009	1,31E-03
6	1076	1076	-2,85E-03	1076	-2,85E-03
7	1078	1078	-1,59E-03	1078	-1,59E-03
8	1175	1175	4,11E-03	1175	4,11E-03
9	1278	1278	2,80E-03	1278	2,80E-03
10	1282	1282	2,90E-03	1282	2,90E-03
11	1774	1774	-1,43E-03	1774	-1,43E-03
12	1776	1776	-7,14E-04	1776	-7,14E-04
13	2003	2003	-5,32E-04	2003	-5,32E-04
14	2005	2005	-1,41E-03	2005	-1,41E-03
15	2014	2014	9,67E-04	2014	9,67E-04
16	2016	2016	-2,43E-03	2016	-2,43E-03
17	2061	2061	-1,44E-03	2061	-1,44E-03
18	2064	2064	2,40E-03	2064	2,40E-03
19	2090	2090	5,51E-05	2090	5,51E-05
20	2092	2092	8,80E-04	2092	8,80E-04
21	2182	2182	6,12E-05	2182	6,12E-05
22	2184	2184	1,98E-03	2184	1,98E-03
23	2230	2230	1,50E-03	2230	1,50E-03
24	2230	2230	2,13E-03	2230	2,13E-03
25	2358	2358	2,59E-04	2358	2,59E-04
26	2364	2364	1,98E-03	2364	1,98E-03
27	2426	2426	1,17E-03	2426	1,17E-03
28	2427	2427	6,42E-04	2427	6,42E-04
29	2461	2461	-1,75E-03	2461	-1,75E-03
30	2467	2467	-1,40E-03	2467	-1,40E-03
31	2589	2588	-5,19E-04	2588	-5,19E-04
32	2593	2593	-3,30E-06	2593	-3,30E-06
33	2608	2608	-1,76E-04	2608	-1,76E-04
34	2609	2609	4,57E-04	2609	4,57E-04
35	2666	2666	-8,60E-04	2666	-8,60E-04

4.6.2 Efforts d'engrènement

La sous-structure du porte-couronne est maintenant introduite comme condition de support de la couronne dans le modèle dynamique de train planétaire. Les Figure 4-40 et Figure 4-41 comparent les réponses dynamiques en termes d'efforts d'engrènement obtenues avec une distribution de raideurs et des sous-structures (40 et 300 modes) pour des épaisseurs de couronne h_r de 10 et 20 mm respectivement. On peut noter que pour une épaisseur de couronne de 10 mm, Le modèle utilisé pour introduire les conditions aux limites a une influence non-négligeable sur les amplitudes des efforts à l'engrènement, notamment pour les engrènements intérieurs. On peut remarquer qu'avec la distribution de raideurs, deux pics sont prédits entre 13 000 et 17 000 t/mn, tandis qu'avec la sous-structure une seule vitesse critique par ailleurs sensible à la réduction modale émerge aux alentours de 15 000 t/mn. A l'inverse, aucune influence notable n'est observée pour une épaisseur de couronne de 20 mm. Dans ce cas précis, la couronne ne se déforme probablement pas suffisamment pour que ses conditions de support aient un effet significatif sur les efforts aux dents. Une attention particulière doit donc être portée à la modélisation de l'environnement du réducteur selon les souplesses mises en jeux par les géométries employées.

Les courbes de réponse précédentes ont été obtenues en l'absence de correction de forme des dents. Les Figure 4-42a et b représentent les distributions d'efforts de contact sur un flanc de denture calculées à 1 000 rpm avec un support flexible de couronne sous-structuré (300 modes et $h_r = 10$ mm). La prise de charge à l'engagement et le déchargement au moment où la paire de dents quitte la fenêtre d'engrènement sont caractérisés par des variations soudaines proches des conditions rencontrées en cas de chocs. On observe, par ailleurs, que les déformations de la couronne génèrent localement un désalignement avec une charge principalement portée sur le bord de la denture, notamment pour les engrènements intérieurs. Les corrections de forme sont une des solutions permettant de rétablir des conditions de contact satisfaisantes et ; à titre d'illustration, une des corrections surfaciques optimales (avec bombé longitudinal) déterminée à la section 4.5.2 a été testée. Le bombé étant relativement faible, cette correction ne recentrait pas suffisamment la charge au milieu de la denture pour les engrènements intérieurs. Par conséquent, une amplitude de bombé de 20 μm a été préférée. Les paramètres de la correction surfacique sont définis dans le Table 4-6 et les nouvelles distributions de charge sont présentées sur les Figure 4-43a et b.

Table 4-6. Correction surfacique

		Engrènements	
		Solaire - Satellites	Satellites - Couronne
A	[μm]	40.20	31.20
L	[mm]	1.42	2.12
B	[μm]	7.82	20.0

Les Figure 4-44 à Figure 4-46 montrent les réponses dynamiques obtenues avec cette correction surfacique. On observe pour les trois types de conditions de support de la couronne une nette réduction des amplitudes pour les engrènements extérieurs. En revanche, pour les engrènements intérieurs le constat est plus mitigé, mais le niveau global de la réponse reste faible compte tenu des déformations de la couronne. On s'aperçoit que compte tenu de l'influence significative des conditions aux limites de la couronne sur les distributions de charge, certains ajustements doivent être opérés vis-à-vis des corrections définies par les Courbes Maitresse.

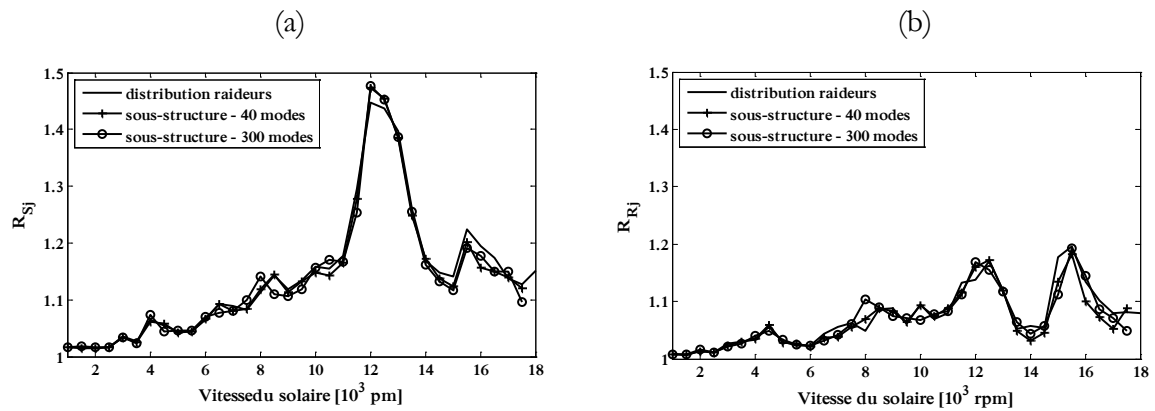


Figure 4-40. Coefficient dynamique des engrenements (a) extérieurs et (b) intérieurs avec sous-structure – simple hélice et couronne flexible ($h_r = 20$ mm)

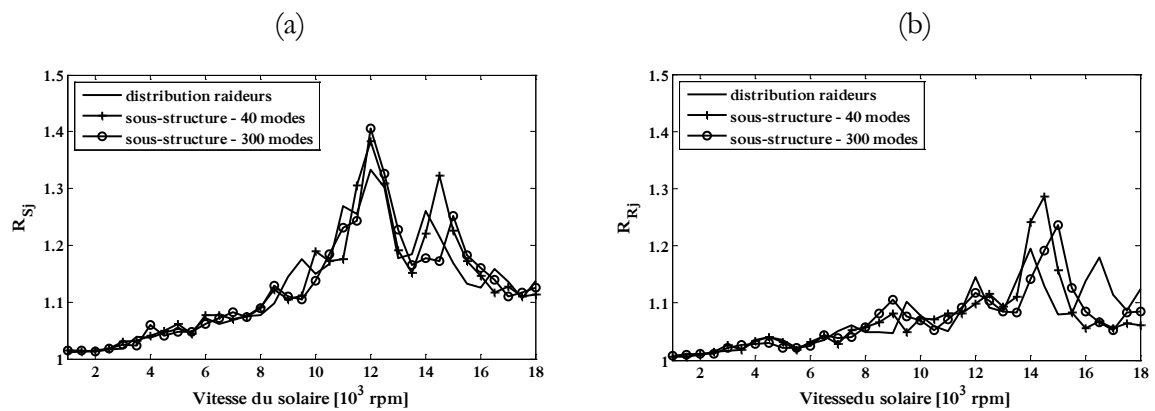


Figure 4-41. Coefficient dynamique des engrenements (a) extérieurs et (b) intérieurs avec sous-structure – simple hélice et couronne flexible ($h_r = 10$ mm)

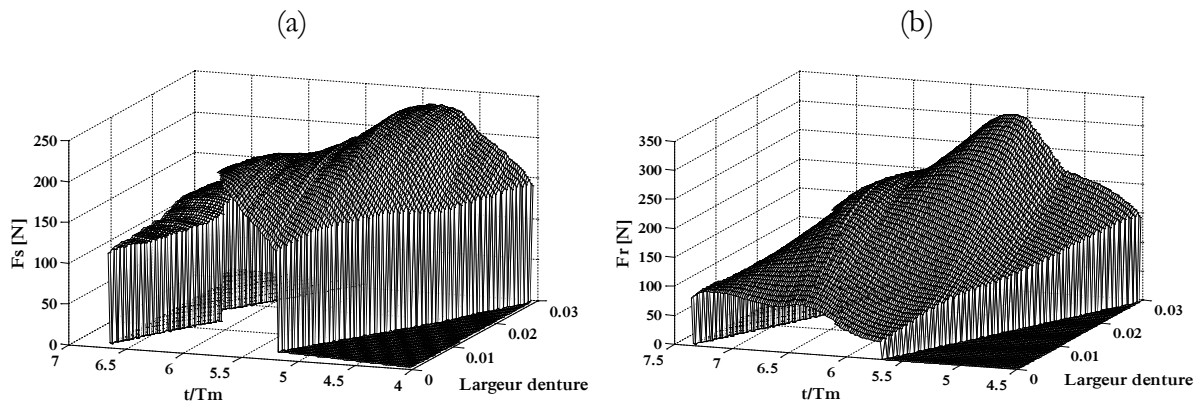


Figure 4-42. Distribution de charge sur les engrenements (a) extérieurs et (b) intérieurs sans corrections - une sous-structure 300 modes et $h_r = 10$ mm

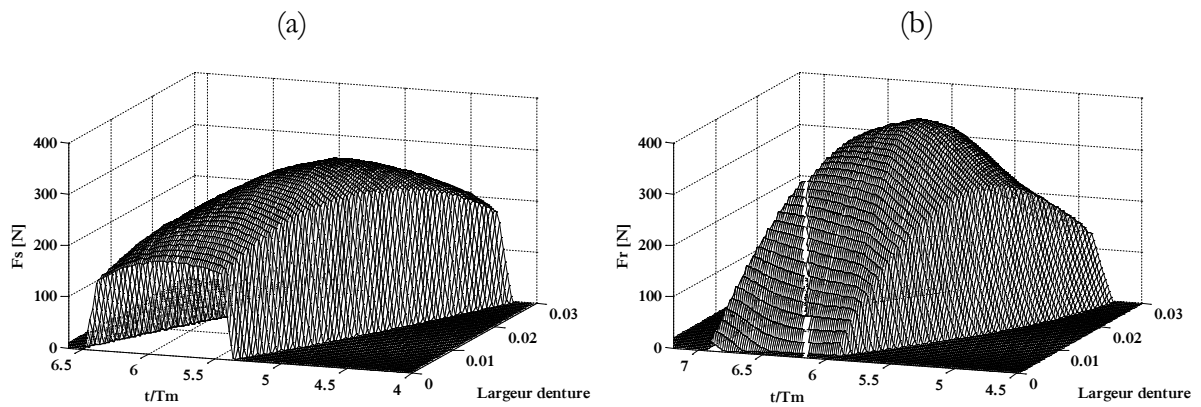


Figure 4-43. Distribution de charge sur les engrenements (a) extérieurs et (b) intérieurs avec corrections - sous-structure 300 modes et $h_r = 10$ mm

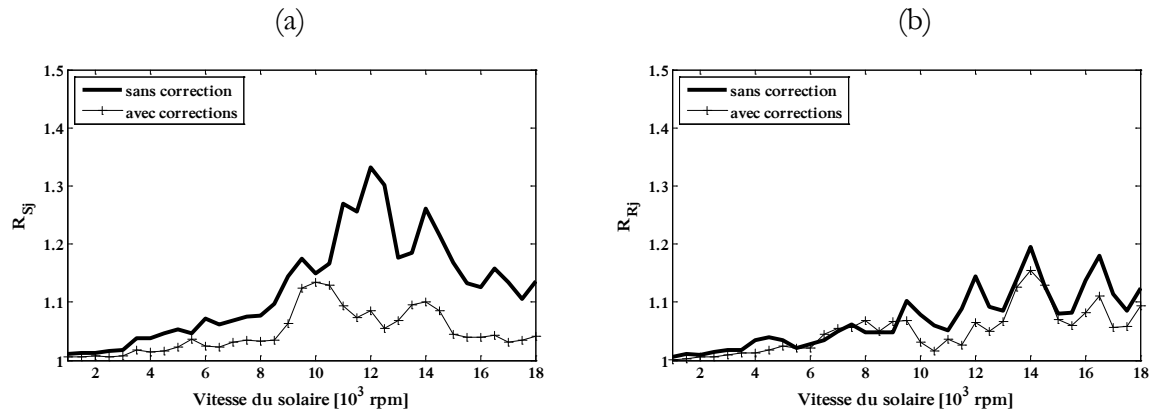


Figure 4-44. Coefficient dynamique des engrènements (a) extérieurs et (b) intérieurs avec une distribution de raideurs – simple hélice et couronne flexible ($h_r = 10$ mm)

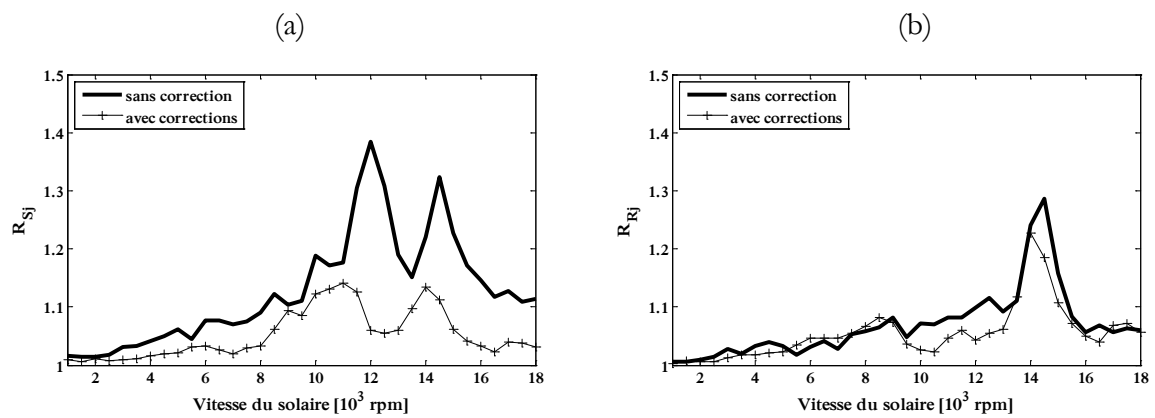


Figure 4-45. Coefficient dynamique des engrènements (a) extérieurs et (b) intérieurs avec la sous-structure (40 modes) – simple hélice et couronne flexible ($h_r = 10$ mm)

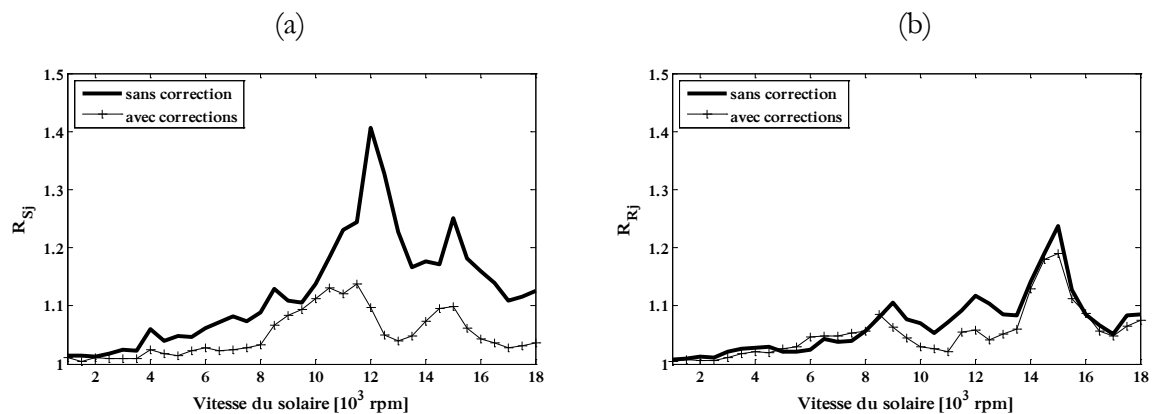


Figure 4-46. Coefficient dynamique des engrènements (a) extérieurs et (b) intérieurs avec la sous-structure (300 modes) – simple hélice et couronne flexible ($h_r = 10$ mm)

Conclusion

Ce chapitre est dédié à l'optimisation des corrections de dentures dans les trains planétaires et tente de proposer des recommandations pour la conception de futurs réducteurs. Les corrections de profil sont linéaires, introduites de façon symétrique en tête de dent sur les roues menante et menée, identiques sur tous les satellites mais différentes selon les flancs actifs. Ces corrections ont été optimisées à l'aide d'un algorithme génétique afin de réduire les efforts dynamiques d'engrènement sur un large intervalle de vitesses. L'ensemble des simulations numériques présenté permet de dresser un certain nombre de conclusions :

(a) Il n'existe pas une seule correction « optimale » mais un ensemble de corrections satisfaisant les critères d'optimisation.

(b) Ces corrections optimales vis-à-vis des efforts dynamiques dessinent une courbe proche ou identique à celle décrite par les optimums dérivés pour un train simple étage (concept de Courbe Maitresse [122]).

(c) Les corrections fournies par les Courbes Maitresses peuvent être combinées entre elles et offrent une forte réduction des amplifications dynamiques sur une large plage de vitesses.

(d) Les corrections dites « courtes » apparaissent comme mieux adaptées pour les applications où la charge nominale est susceptible de varier.

(e) Un critère équivalent à la minimisation des efforts dynamiques peut être utilisé à partir du concept d'erreur de transmission locale (spécifique à un étage). Il permet de réduire l'analyse au régime quasi-statique et par là même le temps de calcul pour des résultats satisfaisants.

(f) D'après ce critère équivalent, une optimisation étage par étage des corrections de denture est effective tant que les conditions de contact entre les dentures sont identiques (entre les problèmes complet et isolé).

(g) L'approche basée sur les erreurs de transmission locales doit être utilisée avec précautions dans le cas de dentures droites, en particulier lorsque les erreurs de transmission sans charge (erreurs cinématiques) deviennent interdépendantes. Par ailleurs, on retrouve également la limitation habituelle en présence de pertes de contact et de chocs déjà notée dans le cas d'engrenages simple étages.

(h) Pour les dentures double-hélices, le décalage qui peut être introduit entre les hélices n'a aucune influence sur la définition des corrections optimales.

(i) L'introduction d'une correction longitudinale parabolique modifie substantiellement les corrections de profil optimales, mais des formules analytiques permettent de les prédire de manière approchée [123].

(j) La souplesse de la couronne change notablement les réponses dynamiques mais l'impact sur l'optimisation des corrections est plus restreint. Il semble qu'il faille corriger les dentures de façon un peu plus importante (en amplitude) afin de compenser les déformations de la couronne.

(k) Les conditions de support de la couronne jouent un rôle non négligeable sur les distributions de charge pour des couronnes très souples. L'introduction de ces conditions de support par l'intermédiaire de sous-structures apparaît comme une voie intéressante, mais le choix des modes conservés dans la réduction influe notablement sur la qualité de la réponse dynamique.

(1) Enfin, les corrections proposées par les Courbes Maitresses apparaissent comme un point de départ intéressant dans le développement de systèmes de transmission, mais peuvent faire l'objet d'adaptations lorsque l'environnement du réducteur est relativement souple. Une atténuation significative des amplifications dynamiques est tout de même obtenue.

Conclusion générale

Lors de ces travaux de recherche, un modèle dynamique tridimensionnel de train planétaire / épicycloïdal a été développé en utilisant une approche à paramètres concentrés permettant de déterminer les distributions de charge instantanées dans les différents contacts. Il autorise la simulation de différentes configurations de chemin de puissance pour un nombre quelconque de satellites distribués angulairement dans le respect des contraintes de montage. Le modèle rend ainsi compte des déphasages réels entre les excitations induites par les engrènements. L'ensemble des dentures en développante de cercle peuvent être simulées, notamment celles à haut rapport de conduite ou double-hélice décalées qui apparaissent prometteuses pour l'industrie. Les déviations par rapport au flanc théorique peuvent être introduites à l'aide d'une représentation en fines tranches de la denture. Les erreurs conventionnelles d'assemblage sont également implémentées. Les déformations de la couronne sont incorporées à l'aide d'un anneau discret constitué d'éléments de poutre classiques. Les conditions de support de celui-ci peuvent être intégrées de façon réaliste grâce à une sous-structure éléments-finis. Enfin, les équations du mouvement sont résolues pas à pas dans le temps avec un schéma de Newmark couplé à un algorithme de contact permettant de prendre en compte des pertes de contact, partielles ou totales, entre les dentures.

Après avoir démontré les capacités du modèle en le confrontant à des résultats numériques ou expérimentaux trouvés dans la littérature, ce dernier est utilisé afin de définir, pour différents types de denture, les corrections de profil optimales vis-à-vis des efforts dynamiques d'engrènement. Le problème d'optimisation est résolu à l'aide d'un algorithme génétique permettant de rechercher efficacement l'optimum absolu. Dans un premier temps, l'optimisation est conduite sur des dentures simple et double-hélice, puis les déformations de la couronne sont introduites. Les performances des solutions optimales sont vérifiées et analysées en fonction des variations de la vitesse et du couple. Dans un second temps, un critère d'optimisation quasi-statique « équivalent » est introduit, basé sur le concept d'erreur de transmission locale spécifique à un engrènement isolé, permettant de réduire les temps de calcul. Ce critère est ensuite employé pour étudier l'effet du décalage des hélices et du bombé sur les corrections de profil optimales. L'ensemble des simulations montre que les corrections optimales se trouvent dans une zone restreinte et proche de la Master Curve. Par conséquent les performances de celle-ci sont examinées en détails. Finalement, l'impact de l'environnement du réducteur (la rigidité du porte-couronne dans ce cas) sur le chargement aux dentures est étudié. Il en ressort que les choix de modélisation de l'environnement peuvent avoir une conséquence significative sur les distributions, et donc sur l'optimisation des corrections de denture. Dans le cadre de ces travaux, les corrections ont été optimisées de façon déterministe vis-à-vis du comportement vibratoire. L'industrie faisant face à de nombreux défis, une approche robuste et multi-objectifs (contraintes, pertes, fatigue, etc...) apparaît comme une suite logique de cette étude.

Le modèle dynamique présenté possède néanmoins un certain nombre de limitations pouvant donner lieu à des travaux futurs. Compte tenu des géométries de porte-satellites de plus en plus souples utilisées dans l'aéronautique, il apparaît nécessaire d'introduire une sous-structure de cet organe. La dite sous-structure servant de conditions de support aux satellites permettrait une représentation plus précise du mésalignement sous charge. Les puissances transmises augmentant, les effets centrifuges sur les satellites deviennent importants (dans cas où la couronne est fixée) modifiant l'entraxe et donc la position des plans d'engrènement. Ces phénomènes peuvent être introduits en utilisant la méthode développée dans [107]. Dans ces travaux, les modèles de palier sont volontairement restés simples. Ceux-ci matérialisant les conditions aux limites du modèle dynamique, il apparaît nécessaire de raffiner leurs modélisations [124, 125, 126]. De plus, l'amortissement introduit ici de façon globale et ayant une très forte influence sur les amplifications

dynamiques, mériterait une plus grande attention. Les travaux d'Ankouni et al [127] peuvent être étendus aux modèles de trains planétaires afin de prédire plus précisément les efforts d'engrènement. Enfin, le modèle présenté dans ces travaux permet de simuler les erreurs d'assemblage et de fabrication conventionnelles. D'une part, la signature vibratoire de ces erreurs pourrait être examinée à des fins de surveillance. D'autre part, une étude de sensibilité aux tolérances de fabrication combinée à une approche probabiliste serait envisageable afin d'ajuster ces dernières lors des premières étapes de conception.

Références

- [1] Wright, M. T., 2007, "The Antikythera mechanism reconsidered", *Interdisciplinary reviews*, **32(1)**, pp. 27-43.
- [2] Price, D. S., 1974, "Gears from the greeks. The Antikythera mechanism: a calendar computer from circa 80 B. C.", *Transactions of the American Philosophical Society*, **64(7)**, pp. 1-70.
- [3] Evans, J., Carman, C., and Thorndyke, A., 2010, "Solar anomaly and planetary displays in the Antikythera mechanism", *Journal for the History of Astronomy*, **xli**, pp. 1-39.
- [4] Coy, J. J., Townsend, D. P., and Zaretsky, E. V., 1985, "Gearing", NASA Reference Publication 1152, Technical Report 84-C-15.
- [5] Semon, G., "Mouvement de montre a tourbillon pour chronographe", Brevet WO 2013104634 A1, 18-07-2013.
- [6] Maatar, M., and Velex, P., 1996, "An analytical expression for the time-varying contact length in perfect cylindrical gears: some possible applications in gear dynamics", *Journal of Mechanical Design*, **118**, pp. 586-589.
- [7] Gu, X., Velex, P., Sainsot, P., and Bruyère, J., 2015, "Analytical investigations on the mesh stiffness function of solid spur and helical gears", *Journal of Mechanical Design*, **137**.
- [8] Yakubek, D., Busby, H. R., and Houser, D. R., 1985, "Three-dimensional deflection analysis if gear teeth using finite element analysis and a tapered plate approximation", AGMA Paper 85FTM4, October.
- [9] Velex, P., and Maatar, M., 1996, "A mathematical model for analyzing the influence of shape deviations and mounting errors on gear dynamic behaviour", *Journal of Sound and Vibration*, **191**, pp. 629-660.
- [10] Weber, C., 1949, "The deformations of loaded gears and the effects on their load carrying capacity", British Dept. of Scientific and Industrial Research, Sponsored Research (Germany), Report no. 3.
- [11] Weber, C., and Banaschek, K., 1953, "Formänderung und profilrücknahme bei geradund schrägverzahnten antriebstechnik", F. Vieweg und Sohn, Braunschweig, **11**.
- [12] Lin, H. H., Townsend, D. P., and Oswald, F. B., 1989, "Profile modification to minimize spur gear dynamic load", Proceedings of the 5th ASME International Power Transmission and Gearing Conference, Chicago, **1**, pp. 455-465.
- [13] O'Donnell, W. J., 1960, "The additional deflection of a cantilever due to the elasticity of the support", *Journal of Applied Mechanics*, **27**, pp. 461-464.
- [14] O'Donnell, W. J., 1963, "Stresses and deflections in built-in beams", *Journal of Engineering for Industry*, **85**, pp. 265-273.
- [15] Attia, A. Y., 1964, "Deflection of spur gear teeth cut in thin rims", *Journal of Engineering for Industry*, **86**, pp. 333-342.
- [16] Cornell, R. W., 1981, "Compliance and stress sensitivity of spur gear teeth", *Journal of Mechanical Design*, **103**, pp. 447-459.

-
- [17] Vogt, F., 1925, “Über die berechnung der fundament deformation”, *Math and Sciences Classification*, **2**, Norwegian Academy of Sciences, Oslo.
- [18] Ishikawa, J., 1957, “Fundamental investigations on the design of power transmission of spur gears”, *Bulletin of Tokyo Institute of Technology*, Series A, n°3, pp. 197-203.
- [19] Sainsot, P., Velex, P., and Duverger, O., 2004, “Contribution of gear body to tooth deflections – A new bidimensional analytical formula”, *Journal of Mechanical Design*, **126**, pp. 748-752.
- [20] Chabert, G., Dang Tron, T., and Mathis R., 1974, “An evaluation of stresses and deflection of spur gear teeth under strain”, *Journal of Engineering for Industry*, **96**, pp. 85-93.
- [21] Wang, K. L., and Cheng, H. S., 1981, “A numerical solution to the dynamic load, film thickness, and surface temperature in spur gears – Part I: Analysis”, *Journal of Mechanical Design*, **103**, pp. 177-187.
- [22] Sainsot, P., 1989, “Analyse du contact entre dentures des engrenages cylindriques de réducteurs”, Thèse de Doctorat Ingénieur : Institut National des Sciences Appliquées, **295p**.
- [23] Lundberg, G., 1939, “Elastische berührung zweier halbräume”, *Forschung im ingenieurwesen*, **10(5)**, pp. 201-211.
- [24] Palmgren, A., 1959, “Ball and roller bearing engineering”, 3rd edition, Burbank, Philadelphia.
- [25] Seager, D. L., 1967, “Some elastic effects in helical gear teeth”, PhD Dissertation, University of Cambridge 209p.
- [26] Schmidt, G., 1973, “Berechnung der wälzpressung schrägverzahnter stirnräder unter berücksichtigung der lastverteilung”, PhD Dissertation Technische Universität München.
- [27] Ajmi, M., and Velex, P., 2005, “A model for simulating the quasi-static and dynamic behavior of solid wide-faced spur and helical gears”, *Mechanism and machine Theory*, **40**, pp. 173-190.
- [28] Henriot, G., 1979, *Traité théorique et pratique des engrenages*, tome I: Théorie et technologie, 6ème édition, Paris, 622p.
- [29] Harris, S. L., 1958, “Dynamic loads on the teeth of spur gears”, *Proceeding of the Institution of Mechanical Engineers*, **172**, pp. 87-112.
- [30] Velex, P., and Ajmi, M., 2006, “On the modelling of excitations in geared systems by transmission errors”, *Journal of Sound and Vibration*, **290**, pp. 882-909.
- [31] Velex, P., and Ajmi, M., 2007, “Dynamic tooth loads and quasi-static transmission errors in helical gears – Approximate dynamic factor formulae”, *Mechanism and Machine Theory*, **42**, pp. 1512-1526.
- [32] Velex, P., Chapron, M., Fakhfakh, H., Bruyère, J., and Becquerelle, S., 2016, “On transmission errors and profile modifications minimizing dynamic tooth loads in multi-mesh gears”, *Journal of Sound and Vibration*, (submitted).
- [33] Munro, R. G., 1989, “The DC component of gear transmission error”, *Proceedings of the International Power Transmission and Gearing Conference*, Chicago, USA.

- [34] Cooley, C. G., and Parker, R. G., 2014, “A review of planetary and epicyclic gear dynamics and vibrations research”, *Applied Mechanics Reviews*, **66**.
- [35] Ozgüven, H. N., 1991, “A non-linear mathematical model for dynamic analysis of spur gears including shaft and bearing dynamics”, *Journal of Sound and Vibration*, **145(2)**, pp. 239-260.
- [36] Kahraman, A., 1994, “Planetary gear train dynamics”, *Journal of Mechanical Design*, **116(3)**, pp. 713-720.
- [37] Kahraman, A., 1994, “Load sharing characteristics of planetary transmissions”, *Mechanism and Machine Theory*, **29(8)**, pp. 1151-1165.
- [38] Lin, J., and Parker, R. G., 1999, “Analytical characterization of the unique properties of planetary gear free vibration”, *Journal of Vibration and Acoustics*, **121(3)**, pp. 316-321.
- [39] Al-shyyab, A., and Kahraman, A., 2007, “A non-linear dynamic model for planetary gear sets”, Proceedings of IMechE, Part K: *Journal of Multi-body Dynamics*, **221**, pp. 567-576.
- [40] Inalpolat, M., and Kahraman, A., 2010, “A dynamical model to predict modulation sidebands of a planetary gear sets having manufacturing errors”, *Journal of Vibration and Vibration*, **329**, pp. 371-393.
- [41] Cunliffe, F., Smith, J. D., and Welbourn, D. B., 1974, “Dynamic tooth loads in epicyclic gears”, *Journal of Engineering for Industry*, **96**, pp. 578-584.
- [42] Jarchow, F., and Vonderschmidt, R., 1981, “Tooth-forces in planetar gear”, *Proceedings of the International Symposium on Gearing and Power Transmissions*, **11**, pp.327-332.
- [43] Botman, M., 1976, “Epicyclic gear vibrations”, *Journal of Engineering for Industry*, **98(3)**, pp. 811-815.
- [44] Ma, P., and Botman, M., 1985, “Load sharing in a planetary gear stage in the presence of gear errors and misalignment”, *Journal of Mechanism, Transmissions, and Automation in Design*, **107**, pp. 4-10.
- [45] August, R., and Kasuba, R., 1986, “Torsional vibrations and dynamic loads in a basic planetary gear system”, *Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, **108**, pp. 348-353.
- [46] Saada, A., and Vexex, P., 1995, “An extended model for the analysis of the dynamic behavior of planetary trains”, *Journal of Mechanical Design*, **117(2)**, pp. 241-247.
- [47] Vexex, P., and Flamand, L., 1996, “Dynamic response of planetary trains to mesh parametric excitations”, *Journal of Mechanical Design*, **118**, pp. 7-14.
- [48] Ajmi, M., and Vexex, P., 2001, “A model for simulating the quasi-static and dynamic behavior of double-helical gears”, *Proceedings of The JSME International Conference on Motion and Power Transmission*, Fukuoka, JPN.
- [49] Sondkar, P., and Kahraman, A., 2013, “A dynamic model of a double-helical planetary gear set”, *Mechanism and Machine Theory*, **70**, pp. 157-174.
- [50] Kang, M. R., and Kahraman, A., 2015, “An experimental and theoretical study of the dynamic behavior of double-helical gear sets”, *Journal of Sound and Vibration*, **350**, pp. 11-29.

-
- [51] Chapron, M., Vex, P., Bruyère, J., and Becquerelle, S., 2016, "Optimization of profile modifications with regard to dynamic tooth loads in single and double-helical planetary gears with flexible ring-gears", *Journal of Mechanical Design*, **138**(2).
- [52] Chiang, T., and Badgley, R. H., 1973, "Reduction of vibration and noise generated by planetary ring gears in helicopter aircraft transmissions", AGMA Technical Paper, 88 FTM 12, 8 p.
- [53] Stockton, R. J., 1985, "Sun gear travelling wave vibration in a sequential planetary gearbox", ASME paper 85-DET-167, 8p.
- [54] Anthony, G., 1988, "Gear vibration. Investigation of the dynamic behavior of one stage epicyclic gears", *Journal of Mechanical Design*, **38**.
- [55] Hidaka, T., Terauchi, Y., Nohara, M., and Oshita, J., 1977, "Dynamic behavior of planetary gear - 3rd report: Displacement of ring gear in direction of line of action", *Bulletin of the JSME*, **20**, pp. 1663-1672.
- [56] Helsen, J., Vanhollebeke, F., Vandepitte, D., and Desmet, W., 2011, "Insights in wind turbine drive train dynamics gathered by validating advanced models on a newly developed 13.2 mw dynamically controlled test-rig", *Mechatronics*, **21**, pp. 737-752.
- [57] Helsen, J., Vanhollebeke, F., Marrant, B., Vandepitte, D., and Desmet, W., 2011, "Multibody modelling of varying complexity for modal behavior analysis of wind turbine gearboxes", *Renewable Energy*, **36**, pp. 3098-3113.
- [58] Helsen, J., Marrant, B., Vanhollebeke, F., De Cominck, F., Berkman, D., Vandepitte, D., and Desmet, W., 2013, "Assessment of excitation mechanisms and structural flexibility influence in excitation propagation in multi-megawatt wind turbine gearboxes: Experiments and flexible multibody model optimization", *Mechanical Systems and Signal Processing*, **40**, pp. 114-135.
- [59] Vijayakar, S., 1991, "A combined surface integral and finite element solution for a three-dimensional contact problem", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **31**, pp. 525-5.
- [60] Parker, R. G., Vijayakar, S. M., and Imajo, T., 2000, "Non-linear dynamic response of a spur gear pair: modelling and experimental comparisons", *Journal of Sound and Vibration*, **237**(3), pp. 435-455.
- [61] Parker, R. G., Agashe, V., and Vijayakar, S. M., 2000, "Dynamic response of a planetary gear system using a finite element / contact mechanics model", *Journal of Mechanical Design*, **122**(3), pp. 304-310.
- [62] Ambarisha, V. K., and Parker, R. G., 2007, "Nonlinear dynamics of planetary gears using analytical and finite element models", *Journal of Sound and Vibration*, **302**(3), pp. 577-595.
- [63] Kahraman, A., and Vijayakar, S., 2001, "Effect of internal gear flexibility in the quasi-static behavior of a planetary gear set", *Journal of mechanical Design*, **123**, pp. 408-415.
- [64] Singh, A., Kahraman, A., and Ligata, H., 2008, "Internal gear strains and load sharing in planetary transmission: model and experiments", *Journal of Mechanical Design*, **130**.
- [65] Kahraman, A., Ligata, H., and Singh, A., 2010, "Influence of ring gear rim thickness on planetary gear set behavior", *Journal of Mechanical Design*, **132**.

- [66] Iglesias, M., Del Rincon, A. F., De Juan, Diez Ibarbia, A., Garcia, P., and Viadero, F., 2015, “Advanced model for the calculation of meshing forces in spur gear planetary transmissions”, *Meccanica*, **50**, pp. 1869-1894.
- [67] Abousleiman, V., and Vex, P., 2006, “A hybrid finite element/lumped parameter model for quasi-static and dynamic analyses of planetary/epicyclic gear sets”, *Mechanism and Machine Theory*, **41**, pp. 725-748.
- [68] Abousleiman, V., Vex, P., and Becquerelle, S., 2007, “Modeling of spur and helical gear planetary drives with flexible ring gears and planet carriers”, *Journal of Mechanical Design*, **129**, pp. 95-106.
- [69] Eritenel, T., and Parker, R. G., 2012, “Three-dimensional nonlinear vibration of gear pairs”, *Journal of Sound and Vibration*, **331**, pp. 3628-3648.
- [70] Perret-Liaudet, J., 1996, “An original method for computing the response of a parametrically excited forced system”, *Journal of Sound and Vibration*, **196(2)**, pp. 165-177.
- [71] Carbonelli, A., and Perret-Liaudet, J., 2011, “Particle swarm optimization as an efficient computational method in order to minimize vibrations of multimesh gears transmission”, *Advances in Acoustics and Vibration*, **2011**.
- [72] Raclot, J. P., and Vex, P., 1999, “Simulation of the dynamic behavior of single and multi-stage geared systems with shape deviations and mounting errors by using a spectral method”, *Journal of Sound and Vibration*, **220(5)**, pp. 861-903.
- [73] Conry, T. F., and Seireg, A., 1971, “A mathematical programming method for design of elastic bodies in contact”, *Journal of Applied Mechanics*, **38(2)**, pp. 1293-1307.
- [74] Conry, T. F., and Seireg, A., 1973, “A mathematical programming technique for the evolution of load distribution and optimal modifications for gear systems”, *Journal of Engineering for Industry*, **95**, pp. 1115-1122.
- [75] Hidaka, T., and Terauchi, Y., 1976, “Dynamic behavior of planetary gear – 1st report: Load distribution in planetary gear”, *Bulletin of the JSME*, **19**, pp. 690-698.
- [76] Hidaka, T., Terauchi, Y., and Ishioka, K., 1976, “Dynamic behavior of planetary gear - 2nd report: Displacement of sun gear and ring gear”, *Bulletin of the JSME*, **19**, pp. 1563-1570.
- [77] Hidaka, T., Terauchi, Y., and Ishioka, K., 1979, “Dynamic behavior of planetary gear - 4th report: Influence of the transmitted tooth load on the dynamic increment load”, *Bulletin of the JSME*, **22**, pp. 877-884.
- [78] Hidaka, T., Terauchi, Y., and Nagamura, K., 1979, “Dynamic behavior of planetary gear - 5th report: Dynamic increment of torque”, *Bulletin of the JSME*, **22**, pp. 1017-1025.
- [79] Hidaka, T., Terauchi, Y., and Nagamura, K., 1979, “Dynamic behavior of planetary gear - 6th report: Influence of meshing-phase”, *Bulletin of the JSME*, **22**, pp. 1026-1033.
- [80] Hidaka, T., Terauchi, Y., and Nagamura, K., 1979, “Dynamic behavior of planetary gear - 7th report: Influence of the thickness of the ring gear”, *Bulletin of the JSME*, **22**, pp. 1142-1149.

-
- [81] Velex, P., Pichon, V., Randrianarivo, L., and Wittman, R., 1994, "Dynamic behavior of epicyclic train. Experimental and numerical analyses", Proceedings of the International Gearing Conference, pp. 265-269.
- [82] Ericson, T. M., and Parker, R. G., 2013, "Planetary gear modal vibration experiments and correlation against lumped-parameter and finite element models", *Journal of Sound and Vibration*, **332(9)**, pp. 2350-2375.
- [83] Ericson, T. M., and Parker, R. G., 2013, "Natural frequency clusters in planetary gear vibration", *Journal of Vibration and Acoustics*, **135(6)**, p. 061002.
- [84] Ericson, T. M., and Parker, R. G., 2014, "Experimental measurement of the effects of torque on the dynamic behavior and system parameters of planetary gears", *Mechanism and Machine Theory*, **74**, pp. 370-389.
- [85] McFadden, P. D., and Smith, J. D., 1985, "An explanation for the asymmetry of the modulation sidebands about the tooth meshing frequency in epicyclic gear vibration", Proceedings of IMechE, Part C: *Journal of Mechanical Engineering Science*, **199(1)**, pp. 65-70.
- [86] McFadden, P. D., and Smith, J. D., 1986, "Effect of transmission path on measured gear vibration", *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, **108(3)**, pp. 377-378.
- [87] Inalpolat, M., and Kahraman, A., 2009, "A theoretical and experimental investigation of modulation sidebands of planetary gear sets", *Journal of Vibration and Vibration*, **323**, pp. 677-696.
- [88] Karray, M., Chaari, F., Del Rincon, A. F., Viadero, F., and Haddar, M., 2013, "An experimental investigation of the dynamic behavior of planetary gear set", *Design and Modeling of Mechanical Systems, LNME*, pp. 199-206.
- [89] Hammami, A., Del Rincon, A. F., Viadero, F., Chaari, F., and Haddar, M., 2015, "Modal analysis of back-to-back planetary gear: Experiments and correlation against lumped-parameter model", *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, **59(1)**, pp. 125-138.
- [90] Kahraman, A., 2001, "Free torsional vibration characteristics of compound planetary gear sets", *Mechanism and machine Theory*, **36(8)**, pp. 953-971.
- [91] Kahraman, A., 1994, "Natural modes of planetary gear trains", *Journal of Sound and Vibration*, **173(1)**, pp. 125-130.
- [92] Lin, J., and Parker, R. G., 2000, "Structured vibration characteristics of planetary gears with unequally spaced planets", *Journal of Sound and Vibration*, **233(5)**, pp. 921-928.
- [93] Eritenel, T., and Parker, R. G., 2009, "Modal properties of three-dimensional helical planetary gears", *Journal of Sound and Vibration*, **325(1-2)**, pp. 397-420.
- [94] Wu, X., and Parker, R. G., 2008, "Modal properties of planetary gears with an elastic continuum ring gear", *Journal of Applied Mechanics*, **75(3-2)**, p. 031014.
- [95] Cooley, C. G., and Parker, R. G., 2012, "Vibration properties of high-speed planetary gears with gyroscopic effects", *Journal of Vibration and Acoustics*, **134(6)**, p. 061014.
- [96] Toda, A., and Botman, M., 1980, "Planet indexing in planetary gears for minimum vibration", pp. 79-DET-73.

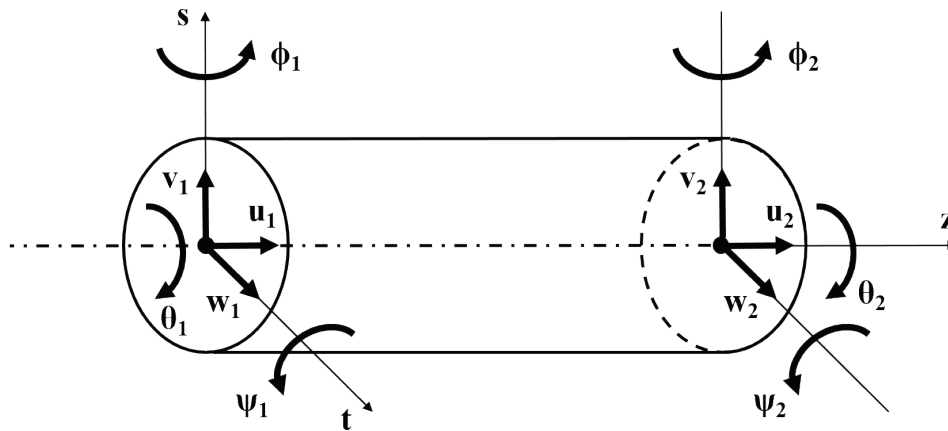
- [97] Seager, D. L., 1975, "Conditions for the neutralization of excitation by the teeth in epicyclic gearing", *Journal of Mechanical Engineering Science*, **17(5)**, pp. 293-298.
- [98] Kahraman, A., and Blakenship, G. W., 1994, "Planet mesh phasing in epicyclic gear sets", International Gearing Conference Newcastle, UK, pp. 99-104.
- [99] Parker, R. G., 2000, "A physical explanation for the effectiveness of planet phasing to suppress planetary gear vibration", *Journal of Sound and Vibration*, **236**, pp. 561-573.
- [100] Ambarisha, V. K., and Parker, R. G., 2006, "Suppression of planet mode response in planetary gear dynamics through mesh phasing", *Journal of Vibration and Acoustics*, **128(2)**, pp. 133-142.
- [101] Bodas, A., and Kahraman, A., 2004, "Influence of carrier and gear manufacturing errors on the static load sharing behavior of planetary gear sets", *JSME International Journal, Series C*, **47(3)**, pp. 908-915.
- [102] Singh, A., 2005, "Application of a system level model to study the planetary load sharing behavior", *Journal of mechanical Design*, **127**, pp. 469-476.
- [103] Ligata, H., Kahraman, A., and Singh, A., 2008, "An experimental study of the influence of manufacturing errors on the planetary gear stresses and planet load sharing", *Journal of Mechanical Design*, **130**.
- [104] Ligata, H., Kahraman, A., and Singh, A., 2009, "A closed-form planet load sharing formulation for planetary gear sets using a translational analogy", *Journal of Mechanical Design*, **131**.
- [105] Singh, A., 2010, "Load sharing behavior in epicyclic gears: physical explanation and generalized formulation", *Mechanism and Machine Theory*, **45**, pp. 511-530.
- [106] Singh, A., 2011, "Epicyclic load sharing map – Development and Validation", *Mechanism and Machine Theory*, **46**, pp. 632-646.
- [107] Gu, X., and Velez, P., 2012, "A dynamic model to study the influence of planet position errors in planetary gears", *Journal of Sound and Vibration*, **331**, pp. 4554-4574.
- [108] Iglesias, M., Del Rincon, A. F., De Juan, A., Garcia, P., Sancibrian, R., and Viadero, F., 2013, "Load sharing in planetary transmission with pin hole position errors", *New Trends in Mechanism and Machine Science, Mechanism and Machine Science*, **7**, pp. 319-327.
- [109] Boguski, B., Kahraman, A., and Nishino, T., 2012, "A new method to measure planet load sharing and sun gear radial orbit of planetary gear sets", *Journal of Mechanical Design*, **134**.
- [110] Cheon, G. J., and Parker, R. G., 2004, "Influence of manufacturing errors on the dynamic characteristics of planetary gear systems", *KSME International Journal*, **18(4)**, pp. 606-621.
- [111] Gu, X., and Velez, P., 2013, "On the dynamic simulation of eccentricity errors in planetary gears", *Mechanism and machine Theory*, **61**, pp. 14-29.
- [112] Kantz, T. L., 1991, "Gear tooth stress measurements of two helicopter planetary stages", Tech. Rep. 91-C-038, NASA Technical Report.

-
- [113] Wu, X., and Parker, R. G., 2006, "Vibration of rings on a general elastic foundation", *Journal of Sound and Vibration*, **295(1-2)**, pp. 194-213.
- [114] Helsen, J., Peeters, P., Vanslambrouck, K., Vanhollebeke, F., and Desmet, W., 2014, "The dynamic behavior induced by different wind turbine gearbox suspension methods assessed by means of the flexible multibody technique", *Renewable Energy*, **69**, pp. 336-346.
- [115] Litvin, F., Vecchiato, D., Demenego, A., Karedes, E., Hansen, B., and Handschuh, R., 2002, "Design of one stage planetary gear train with improved conditions of load distribution and reduced transmission errors", *Journal of Mechanical Design*, **121(4)**, pp. 745-752.
- [116] Vecchiato, D., 2006, "Tooth contact analysis of a misaligned isostatic planetary gear train", *Mechanism and Machine Theory*, **41**, pp. 617-631.
- [117] Carbonelli, A., Rigaud, E., Perret-Liaudet, J., Pelloli, E., and Barday, D., 2013, "Robust optimization of a truck timing gear cascade: numerical and experimental results", Proceedings of the 21ème Congrès Français de Mécanique, Bordeaux, France.
- [118] Bahk, C. J., and Parker, R. G., 2013, "Analytical investigation of tooth profile modification effects on planetary gear dynamics", *Mechanism and Machine Theory*, **70**, pp. 298-319.
- [119] Herting, D. N., 1985, "A general purpose, multi-stage, component modal synthesis method", *Finite Elements in Analysis and Design*, **1**, pp. 153-164.
- [120] Vexlex, P., Bruyère, J., and Houser, D. R., 2011, "Some analytical results on transmission errors in narrow-faced spur and helical gears: Influence of profile modifications", *Journal of Mechanical Design*, **133**.
- [121] Bruyère, J., and Vexlex, P., 2013, "Derivation of optimum profile modifications in narrow-faced spur and helical gears using a perturbation method", *Journal of Mechanical Design*, **135**.
- [122] Bruyère, J., Gu, X., and Vexlex, P., 2014, "On the analytical definition of profile modifications minimizing transmission error variations in narrow-faced spur and helical gears", *Mechanism and Machine Theory*, **92**, pp.257-272.
- [123] Bruyère, J., Gu, X., and Vexlex, P., 2015, "Toward the minimization of transmission error fluctuations with linear symmetric tip reliefs and lead crowning", *LaMCoS report*.
- [124] Lim, T. C., and Singh, R., 1990, "Vibration transmission through rolling element bearings, Part I: Bearing stiffness formulation", *Journal of Sound and Vibration*, **139(2)**, pp. 179-199.
- [125] Lim, T. C., and Singh, R., 1990, "Vibration transmission through rolling element bearings, Part II: System studies", *Journal of Sound and Vibration*, **139(2)**, pp. 201-225.
- [126] Fargère, R., and Vexlex, P., 2013, "Influence of clearances and thermal effects on the dynamic behavior of gear-hydrodynamic journal bearing systems", *Journal of Vibration and Acoustics*, **135**.
- [127] Ankouni, M., Lubrecht, A. A., and Vexlex, P., 2016, "Modelling of damping in lubricated line contacts – Application to spur gear dynamic simulations", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers – Part C*, **0(0)**, pp. 1-11.

Annexes

A - Elément d'arbre

Des éléments de poutre à deux nœuds avec 6 degrés de liberté par nœud sont utilisés, permettant de rendre compte des déflexions de flexion, torsion et traction / compression (FIG).



Les effets dus au cisaillement sur la raideur de flexion sont inclus (poutre de Timoshenko). Les différents déplacements sont découplés et les matrices totales de masse et de raideur de l'élément d'arbre s'écrivent comme :

$$\mathbf{M}_{\text{arbre}} = \mathbf{M}_{\text{tc}} + \mathbf{M}_{\text{tors}} + \mathbf{M}_{\text{fs}} + \mathbf{M}_{\text{ft}}$$

$$\mathbf{K}_{\text{arbre}} = \mathbf{K}_{\text{tc}} + \mathbf{K}_{\text{tors}} + \mathbf{K}_{\text{fs}} + \mathbf{K}_{\text{ft}}$$

avec :

(a) Traction / compression :

$$[\mathbf{M}_{\text{tc}}] = \frac{\rho S L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$[\mathbf{K}_{\text{tc}}] = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

(b) Torsion :

$$[\mathbf{M}_{\text{tors}}] = \frac{I_0 L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$[\mathbf{K}_{\text{tors}}] = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

(c) Flexion :

$$[M_{fs}] = \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ & & 156 & -22L \\ \text{Sym} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} v_1 \\ \psi_1 \\ v_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix}$$

$$[M_{ft}] = \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L & 54 & 13L \\ & 4L^2 & -13L & -3L^2 \\ & & 156 & 22L \\ \text{Sym} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} w_1 \\ \phi_1 \\ w_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}$$

$$[K_{fs}] = \frac{EI_x}{(1+\alpha)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & (4+\alpha)L^2 & -6L & (2-\alpha)L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{Sym} & & & (4+\alpha)L^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} v_1 \\ \psi_1 \\ v_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix}$$

$$[K_{ft}] = \frac{EI_x}{(1+\alpha)L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ & (4+\alpha)L^2 & 6L & (2-\alpha)L^2 \\ & & 12 & 6L \\ \text{Sym} & & & (4+\alpha)L^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} w_1 \\ \phi_1 \\ w_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}$$

B - Schéma de Newmark

Le schéma de Newmark est souvent utilisé pour résoudre les problèmes de dynamique non linéaire. Ce schéma permet d'intégrer pas à pas dans le temps les équations du mouvement, à l'aide d'un développement de Taylor tronqué à l'ordre trois pour les déplacements et à l'ordre deux pour les vitesses. On suppose dans ce schéma que la dérivée de l'accélération est linéaire entre deux pas de temps. Les expressions des déplacements, des vitesses et des accélérations sont les suivantes:

$$\begin{cases} X_{t+\Delta t} = X_t + \Delta t \cdot \dot{X}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{X}_t + \alpha \Delta t^3 \dddot{X}_t \\ \dot{X}_{t+\Delta t} = \dot{X}_t + \Delta t \cdot \ddot{X}_t + \beta \Delta t^2 \dddot{X}_t \\ \ddot{X}_t = \frac{\ddot{X}_{t+\Delta t} - \ddot{X}_t}{\Delta t} \end{cases} \begin{matrix} (a) \\ (b) \\ (c) \end{matrix}$$

Pour certaines combinaisons de valeurs α et β , le schéma de Newmark devient inconditionnellement stable et convergent. Couramment les valeurs de α et β sont 0.25 et 0.5 respectivement, et ont été retenues dans cette étude.

En substituant le terme d'accélération \ddot{X}_t dans (a) et (b) par son approximation (c), la forme conventionnelle du schéma de Newmark donne:

$$\begin{cases} X_{t+\Delta t} = X_t + \Delta t \cdot \dot{X}_t + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) \Delta t^2 \cdot \ddot{X}_t + \alpha \Delta t^2 \cdot \ddot{X}_{t+\Delta t} \\ \dot{X}_{t+\Delta t} = \dot{X}_t + (1 - \beta) \Delta t \cdot \ddot{X}_t + \beta \Delta t \cdot \ddot{X}_{t+\Delta t} \end{cases}$$

Maintenant considérons le système différentiel (équations du mouvement), précédemment développé, à résoudre. En introduisant le schéma de Newmark pour les déplacements et les vitesses, ce dernier devient:

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\mathbf{K}_b + \mathbf{K}_{\text{mesh}}(t, \mathbf{X}_t) + \Omega_c^2 \mathbf{L} \right) + \frac{\beta}{\alpha \Delta t} (2\Omega_c \mathbf{D} + \mathbf{C}) + \frac{1}{\alpha (\Delta t)^2} \mathbf{M} \right\} \mathbf{X}_{t+\Delta t} \\ & + (2\Omega_c \mathbf{D} + \mathbf{C}) \left\{ \frac{\beta}{\alpha \Delta t} \mathbf{X}_t + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right) \dot{\mathbf{X}}_t + \Delta t \left(\frac{\beta}{2\alpha} - 1\right) \ddot{\mathbf{X}}_t \right\} + \mathbf{M} \left\{ \frac{1}{\alpha (\Delta t)^2} \mathbf{X}_t + \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{\mathbf{X}}_t + \frac{1-2\alpha}{2\alpha} \ddot{\mathbf{X}}_t \right\} \\ & = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_{\Omega}(t) + \mathbf{F}_{\text{se}}(t, \mathbf{X}_t) \end{aligned}$$

que l'on peut mettre sous la forme simplifiée:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{X}_t) \mathbf{X}_{t+\Delta t} + \mathbf{B}(\mathbf{X}_t, \dot{\mathbf{X}}_t, \ddot{\mathbf{X}}_t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{X}_t)$$

ou
$$\mathbf{X}_{t+\Delta t} = \text{inv}\{\mathbf{A}(t, \mathbf{X}_t)\} \cdot \{\mathbf{F}(t, \mathbf{X}_t) - \mathbf{B}(\mathbf{X}_t, \dot{\mathbf{X}}_t, \ddot{\mathbf{X}}_t)\}$$

Nous pouvons donc déterminer les déplacements à l'instant $t+\Delta t$, $\mathbf{X}_{t+\Delta t}$, puis en déduire les vitesses et accélérations à l'aide de l'approximation de Newmark:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{X}}_t + (1-\beta)\Delta t \cdot \ddot{\mathbf{X}}_t + \beta\Delta t \cdot \ddot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} \\ \ddot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} = \left\{ \mathbf{X}_{t+\Delta t} - \mathbf{X}_t - \Delta t \cdot \dot{\mathbf{X}}_t - \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\Delta t^2 \cdot \ddot{\mathbf{X}}_t \right\} \cdot \{1/\alpha\Delta t^2\} \end{cases}$$

Contributions scientifiques

Les travaux présentés dans ce manuscrit ont donné lieu à plusieurs publications dans des journaux internationaux et ont été présentés lors de conférences internationales comme suit :

Actes de conférence

Chapron, M., Velex, P., Bruyère, J., and Becquerelle, S., 2015, “On optimum tooth profile modifications to minimize dynamic mesh forces in planetary gears”, *VDI International Conference on Gears*, Munich, Germany.

Chapron, M., Velex, P., Bruyère, J., and Becquerelle, S., Becquerelle, 2015, “Optimization of profile modifications with regard to dynamic tooth loads in planetary gears with flexible ring-gears”, *ASME Power transmission and Gearing conference*, Boston, Massachusetts, USA

Chapron, M., Gu, X., Velex, P., and Becquerelle, S., 2014, “A simplified 3D dynamic model of helical and double-helical planetary gears to study the influence of some usual position and geometrical errors”, *International Gear Conference*, Lyon, France

Publications

Velex, P., Chapron, M., Fakhfakh, H., Bruyère, J., and Becquerelle, S., “On transmission errors and profile modifications minimising dynamic tooth loads in multi-mesh gears”, *Journal of Sound and Vibration*, (submitted).

Chapron, M., Velex, P., Bruyère, J., and Becquerelle, S., 2016, “Optimization of profile modifications with regard to dynamic tooth loads in single and double-helical planetary gears with flexible ring-gears”, *Journal of Mechanical Design*, **138(2)**.



FOLIO ADMINISTRATIF

THESE DE L'UNIVERSITE DE LYON OPEREE AU SEIN DE L'INSA LYON

NOM : Chapron

DATE de SOUTENANCE : 02/05/2016

Prénom : Matthieu

TITRE :

Comportement dynamique de train planétaire / épicycloïdal
avec erreurs d'assemblage, écarts de forme et structures déformables
- Optimisation des corrections de dentures -

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2016LYSEI040

Ecole doctorale : MEGA ED162

Spécialité : Génie Mécanique

RESUME :

Dans le cadre du développement de nouveaux systèmes de propulsion, l'implantation d'un train planétaire / épicycloïdal entre la turbine et l'hélice semble être une voie intéressante pour atteindre les performances souhaitées en terme de rendement. L'augmentation des puissances transmises et la réduction des masses embarquées dans les applications aéronautiques tendent à rendre les composants de plus en plus déformables.

Lors de ces travaux de recherche, un modèle dynamique de trains planétaires a été développé, incorporant les effets des erreurs de montage, des écarts de forme et des sous-ensembles flexibles. Une approche à paramètres concentrés est utilisée, intégrant notamment des éléments spécifiques d'engrenage à corps rigides et des éléments d'arbre. Pour les éléments d'engrenage, le formalisme des fines tranches juxtaposées est employé pour représenter les dentures. Une raideur élémentaire et un écart normal sont attribués à chacune des tranches et sont réactualisés à chaque pas de temps en fonction de la cinématique des composants et des déviations du profil des dentures. Les déformations de la couronne sont introduites à l'aide d'un anneau discret composé de poutres droites couplé aux éléments d'engrenage. Les dentures double-hélice sont modélisées par deux éléments d'engrenage d'angles d'hélice opposés liés par une poutre de Timoshenko. Finalement, les équations du mouvement sont résolues pas à pas dans le temps par un schéma de Newmark combiné à un algorithme de contact normal, permettant de prendre en compte les pertes de contact partielles ou complètes.

Dans un premier temps, un certain nombre d'éléments de validation est présenté et comparé à des résultats tirés de la littérature. Afin d'asseoir notre modélisation, l'influence des erreurs de positionnement des satellites, du décalage des hélices, des erreurs de pas et des déformations de la couronne sur les distributions de charge est abordée pour différentes configurations de train planétaire.

Dans un deuxième temps, l'optimisation des corrections de denture dans le but de réduire les vibrations est investiguée. Les corrections de profil sont introduites sur les engrènements de façon (i) linéaire et symétrique en tête de dents et (ii) identique pour tous les satellites mais (iii) différente selon le flanc actif. Dans ce contexte, les corrections sont tout d'abord optimisées vis-à-vis des efforts dynamiques d'engrènement à l'aide d'un algorithme génétique. Puis, leurs performances sont analysées en fonction du couple transmis et de la vitesse de rotation pour des dentures simple et double-hélice avec une couronne rigide ou flexible. Par la suite, un critère « équivalent » est dérivé, vérifié et utilisé pour étudier l'influence du décalage des hélices et d'une correction longitudinale parabolique sur ces corrections de profil optimales. Enfin, une sous-structure du porte-couronne est introduite et son impact sur les distributions de charge est exploré.

MOTS-CLÉS :

Train planétaire, Train epicycloïdal, Dynamique, Erreur, Sous-structure, Vibration, Optimisation

Planetary gear, Epicyclic gear, Dynamic, Error, Sub-structure, Vibration, Optimization

Laboratoire (s) de recherche :

Laboratoire de Mécanique des Contacts et des structures (LaMCoS)

Directeur de thèse: Philippe VELEX

Président de jury : Didier REMOND

Composition du jury :

Ahmet KAHRAMAN, Fernando VIADERO RUEDA,
Samuel BECQUERELLE, Philippe VELEX