

# THÈSE

## MODÉLISATION DU COMPORTEMENT MÉCANIQUE LORS DU PROCÉDÉ DE MISE EN FORME ET PYROLYSE DES INTERLOCKS CMC

Présentée devant

**l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon**

pour obtenir

**le GRADE DE DOCTEUR**

École doctorale :

**Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique**

Spécialité :

**MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL**

par

**Sylvain MATHIEU**

**Ingénieur**

Thèse soutenue le 9 décembre 2014 devant la Commission d'examen

### Jury

J.-M. BERGHEAU	Professeur (ENI de Saint-Étienne)	Examineur
C. BINETRUY	Professeur (École Centrale de Nantes)	Rapporteur
P. BOISSE	Professeur (INSA de Lyon)	Directeur de thèse
F. BOUILLON	Ingénieur (Herakles)	Examineur
F. DUPÉ	Ingénieur (Herakles)	Examineur
A. GRAVOUIL	Professeur (INSA de Lyon)	Examineur
N. HAMILA	Maitre de Conférences (INSA de Lyon)	Examineur
L. ORGÉAS	Directeur de recherche (CNRS - Univ. Grenoble Alpes)	Rapporteur

LaMCoS - UMR CNRS 5514 - INSA de Lyon  
20, avenue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex (FRANCE)



## INSA Direction de la Recherche - Écoles Doctorales - Quinquennal 2011-2015

SIGLE	ÉCOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNÉES DU RESPONSABLE
<b>CHIMIE</b>	<b>CHIMIE DE LYON</b> <a href="http://www.edchimie-lyon.fr">http://www.edchimie-lyon.fr</a> Sec. : Renée EL MELHEM Bâtiment Blaise Pascal 3 <sup>ème</sup> étage 04.72.43.80.46 Insa : R. GOURDON <a href="mailto:secretariat@edchimie-lyon.fr">secretariat@edchimie-lyon.fr</a>	<b>M. Jean Marc LANCELIN</b> Université de Lyon - Collège Doctoral Bâtiment ESCPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél. : 04.72.43.13.95 <a href="mailto:directeur@edchimie-lyon.fr">directeur@edchimie-lyon.fr</a>
<b>E.E.A.</b>	<b>ÉLECTRONIQUE, ÉLECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</b> <a href="http://eedea.ec-lyon.fr">http://eedea.ec-lyon.fr</a>  Sec. : M.C. HAVGOUDOUKIAN <a href="mailto:eea@ec-lyon.fr">eea@ec-lyon.fr</a>	<b>M. Gérard SCORLETTI</b> École Centrale de Lyon 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél. : 04.72.18 60.97 Fax : 04.78.43.37.17 <a href="mailto:Gerard.scorletti@ec-lyon.fr">Gerard.scorletti@ec-lyon.fr</a>
<b>E2M2</b>	<b>EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODÉLISATION</b> <a href="http://e2m2.universite-lyon.fr">http://e2m2.universite-lyon.fr</a> Sec. : Safia AIT CHALAL Bâtiment Atrium- UCB Lyon 1 Tél. : 04.72.44.83.62 Insa : S. REVERCHON <a href="mailto:Safia.ait-chalal@univ-lyon1.fr">Safia.ait-chalal@univ-lyon1.fr</a>	<b>Mme Gudrun BORNETTE</b> CNRS UMR 5023 LEHNA Université Claude Bernard Lyon 1 Bâtiment Forel 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 06.07.53.89.13 <a href="mailto:e2m2@univ-lyon1.fr">e2m2@univ-lyon1.fr</a>
<b>EDISS</b>	<b>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES- SANTÉ</b> <a href="http://www.ediss-lyon.fr">http://www.ediss-lyon.fr</a> Sec. : Safia AIT CHALAL Bâtiment Atrium - UCB Lyon 1 Tél. : 04.72.44.83.62 Insa : <a href="mailto:Safia.ait-chalal@univ-lyon1.fr">Safia.ait-chalal@univ-lyon1.fr</a>	<b>Mme Emmanuelle CANET-SOULAS</b>  INSERM U1060, CarMeN lab, Univ. Lyon 1 Bâtiment IMBL 11 avenue Jean Capelle INSA de Lyon 69621 VILLEURBANNE Tél. : 04.72.68.49.09 Fax : 04.72.68.49.16 <a href="mailto:Emmanuelle.canet@univ-lyon1.fr">Emmanuelle.canet@univ-lyon1.fr</a>
<b>INFOMATHS</b>	<b>INFORMATIQUE ET MATHÉMATIQUES</b> <a href="http://infomaths.univ-lyon1.fr">http://infomaths.univ-lyon1.fr</a> Sec. : Renée EL MELHEM Bâtiment Blaise Pascal 3 <sup>ème</sup> étage <a href="mailto:infomaths@univ-lyon1.fr">infomaths@univ-lyon1.fr</a>	<b>Mme Sylvie CALABRETTO</b> LIRIS - INSA de Lyon Bat Blaise Pascal 7 avenue Jean Capelle 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél. : 04.72.43.80.46 Fax : 04.72.43.16.87 <a href="mailto:Sylvie.calabretto@insa-lyon.fr">Sylvie.calabretto@insa-lyon.fr</a>
<b>Matériaux</b>	<b>MATÉRIAUX DE LYON</b> <a href="http://ed34.universite-lyon.fr">http://ed34.universite-lyon.fr</a>  Sec. : M. LABOUNE PM : 71.70 Fax : 87.12 Bâtiment Saint-Exupéry <a href="mailto:Ed.materiaux@insa-lyon.fr">Ed.materiaux@insa-lyon.fr</a>	<b>M. Jean-Yves BUFFIERE</b> INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Saint-Exupéry 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél. : 04.72.43.71.70 Fax : 04.72.43.85.28 <a href="mailto:Ed.materiaux@insa-lyon.fr">Ed.materiaux@insa-lyon.fr</a>
<b>MEGA</b>	<b>MÉCANIQUE, ÉNERGÉTIQUE, GÉNIE CIVIL, ACOUSTIQUE</b> <a href="http://edmega.universite-lyon.fr/">http://edmega.universite-lyon.fr/</a>  Sec. : M. LABOUNE PM : 71.70 Fax : 87.12 Bâtiment Saint-Exupéry <a href="mailto:mega@insa-lyon.fr">mega@insa-lyon.fr</a>	<b>M. Philippe BOISSE</b> INSA de Lyon Laboratoire LAMCOS Bâtiment Jacquard 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél. : 04.72.43.71.70 Fax : 04.72.43.72.37 <a href="mailto:Philippe.boisse@insa-lyon.fr">Philippe.boisse@insa-lyon.fr</a>
<b>ScSo</b>	<b>ScSo*</b> <a href="http://recherche.univ-lyon2.fr/scso/">http://recherche.univ-lyon2.fr/scso/</a> Sec. : Viviane POLSINELLI Sec. : Brigitte DUBOIS Insa : J.Y. TOUSSAINT <a href="mailto:viviane.polsinelli@univ-lyon2.fr">viviane.polsinelli@univ-lyon2.fr</a>	<b>Mme Isabelle VON BUELTZINGLOEWEN</b> Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél. : 04.78.77.23.86 Fax : 04.37.28.04.48 <a href="mailto:isavonb@gmail.com">isavonb@gmail.com</a>

\* ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie





# Modélisation du comportement mécanique lors du procédé de mise en forme et pyrolyse des interlocks CMC

La simulation des procédés de production des composites à renforts tissés est un enjeu majeur pour les industries de pointe, où leur utilisation s'intensifie. La maîtrise des procédés d'obtention des composites à matrice et fibres en céramique, notamment les étapes de mise en forme et de pyrolyse, s'avère primordiale. La connaissance et la simulation du comportement mécanique aux différentes étapes est nécessaire pour optimiser les performances des pièces finales.

Deux approches de modélisation macroscopique des renforts tissés épais de composite sont détaillées : une approche continue classique et une approche semi-discrète. Pour cela, une loi de comportement hyperélastique initialement orthotrope est développée. Cette loi est basée sur l'observation phénoménologique des modes de déformation privilégiés, à partir desquels sont proposés des invariants physiques de la transformation. L'identification des paramètres matériaux nécessaires est décrite. Une version modifiée de cette loi, sans contribution en tension, est implémentée dans un élément semi-discrét, où le travail en tension est alors pris en compte par des barres discrétisant le tissage réel.

Les importantes différences de rigidités entre sollicitations en tension et en cisaillements font des renforts tissés épais des matériaux fortement anisotropes. Leur modélisation numérique met en évidence des phénomènes parasites ou des limitations liés à cette spécificité. Le phénomène de verrouillage en tension est tout d'abord mis en évidence. Une solution basée sur une formulation éléments finis *enhanced assumed strain* est proposée pour des éléments continus classiques ou semi-discrètes. Puis des problèmes liés aux simulations numériques dominées par la flexion sont soulevés : l'*hourglassing* transverse et l'absence de résistance locale à la courbure. Dans le cas de l'*hourglassing* transverse, deux méthodes de rigidification de ces modes de déplacement sont proposées : par moyennage des dilatations dans l'élément ou par ajout d'une rigidité matérielle tangente supplémentaire. Pour l'introduction d'une résistance à la courbure, une méthode basée sur l'utilisation purement numérique de plaques *rotation free* est proposée. Celles-ci permettent le calcul de la courbure induisant, par l'intermédiaire d'un moment de flexion, des efforts internes supplémentaires.

Finalement, la modélisation du retour élastique après pyrolyse de la matrice organique à précurseurs céramique est réalisée. Le comportement de la matrice pyrolysée est identifié expérimentalement à l'aide d'une loi hyperélastique isotrope transverse. L'addition de cette loi, qui prend comme référence la préforme déformée, à la loi de comportement initiale du renfort tissé permet de visualiser les déformations obtenues en fin de pyrolyse. Cette modélisation est comparée à des résultats expérimentaux.

**MOTS CLÉS :** renforts tissés, composites, céramique, modélisation macroscopique, mise en forme, hyperélasticité, éléments finis, verrouillage, stabilisation, rigidité de flexion, pyrolyse

# Mechanical behavior modeling of CMC interlocks through the forming and pyrolysis processes

Manufacture processes modeling of woven fabrics composites is a major stake for state-of-the-art industrial parts, where their usage is intensifying. Control of all the manufacturing stages of ceramic matrix composites, particularly the forming and pyrolysis steps, is essential. Understanding and simulation of the mechanical behavior at each stage is required to optimize the final product performances.

Two macroscopic modeling approaches of thick woven fabric reinforcements are detailed : a continuous classical one and a semi-discrete one. An initially orthotropic hyperelastic constitutive law is thus established. This law is based on a phenomenological observation of the main fabric deformation modes, from where physical invariants of the deformation are suggested. The required material parameters identification is explained. A modified version of this law, without any tensile energetic contribution, is implemented in a semi-discrete element where the tensile work is taken into account by bars that discretize the real weaving.

Thick woven reinforcements are highly anisotropic materials due to the large ratio between the tensile rigidity and the others. Their numerical modeling highlights spurious phenomena and limitations related to this specificity. The tension locking is firstly tackled. A remedy based on an enhanced assumed strain finite element formulation is suggested for classical continuum and semi-discrete elements. Problems linked to bending-dominated numerical simulations are brought to attention : transverse hourglassing and lack of local bending stiffness. For the transverse hourglassing situation, two stiffening technics are proposed : averaging the dilatation through the whole element or adding a supplementary tangent material rigidity in a specific direction. The local bending stiffness problem is solved by calculating the curvature inside the element by using rotation free plates. The induced bending moment leads to supplementary internal loads.

Finally, the elastic springback following the pyrolysis of the polymer matrix with ceramic precursors is modeled. The constitutive behavior is experimentally identified with a transverse isotropic hyperelastic law. Added to the initial reinforcements' hyperelastic law, with the preformed fabric as reference configuration, the pyrolysis induced deformations can be visualized. This final model is compared with experimental results.

**KEYWORDS:** woven fabrics, composite material, ceramic, macroscopic modeling, forming, hyperelasticity, finite elements, locking, physical stabilization, bending stiffness, pyrolysis

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>Table des figures</b>	<b>v</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xiii</b>
<b>Liste des symboles</b>	<b>xv</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Fabrication et comportement des composites à renforts tissés</b>	<b>3</b>
1.1 Qu'est-ce qu'un matériau composite ? . . . . .	5
1.2 De la fibre à la pièce finale . . . . .	6
1.2.1 Les mèches . . . . .	6
1.2.2 Le renfort . . . . .	9
1.2.3 La solidification : consolidation des matrices organiques . . . . .	12
1.2.4 La solidification : consolidation des matrices céramiques . . . . .	15
1.3 Comportement mécanique des renforts tissés . . . . .	19
1.3.1 Échelle microscopique : la fibre . . . . .	20
1.3.2 Échelle mésoscopique : la mèche . . . . .	21
1.3.3 Échelle macroscopique : le renfort . . . . .	26
1.4 Bilan du chapitre 1 . . . . .	42
<b>2 Simulation macroscopique des renforts tissés épais</b>	<b>45</b>
2.1 Simulation de la mise en forme des renforts tissés . . . . .	47
2.1.1 Simulation microscopique . . . . .	47
2.1.2 Simulation mésoscopique . . . . .	48
2.1.3 Simulation macroscopique . . . . .	52
2.2 Approche continue hyperélastique du comportement des renforts épais . . . . .	57
2.2.1 Cinématique des grandes transformations . . . . .	57
2.2.2 Hyperélasticité des renforts interlock . . . . .	63
2.2.3 Hyperélasticité et cadre mathématique rigoureux . . . . .	82
2.3 Approche semi-discrète hyperélastique du comportement des renforts épais . . . . .	84
2.4 Outil numérique de simulation : Plast4 . . . . .	88

2.5	Bilan du chapitre 2 . . . . .	90
<b>3</b>	<b>Analyse et correction du verrouillage en tension</b>	<b>93</b>
3.1	Intra-ply shear locking ou Tension locking . . . . .	95
3.1.1	Mise en évidence du tension locking . . . . .	95
3.1.2	Le verrouillage en tension . . . . .	95
3.1.3	Techniques de résolution du verrouillage en tension . . . . .	105
3.2	Intégration réduite et éléments à champs mixtes dans la résolution des problèmes numériques . . . . .	110
3.3	Élément à intégration réduite stabilisé physiquement avec <i>Enhanced Assumed Strain</i> . . . . .	111
3.3.1	Vecteurs et forces de stabilisation . . . . .	112
3.3.2	Formulation <i>enhanced</i> en déplacement total . . . . .	116
3.4	Élément semi-discret à intégration réduite stabilisé physiquement avec <i>Enhanced Assumed Strain</i> . . . . .	126
3.5	Élément <i>enhanced assumed strain</i> et déformation des mèches . . . . .	130
3.6	Performances des éléments pour le verrouillage en tension . . . . .	135
3.6.1	Élément continu et lois matériaux linéaires . . . . .	135
3.6.2	Élément continu et lois matériaux non linéaires . . . . .	144
3.6.3	Utilisation de l'élément semi-discret . . . . .	147
3.7	Bilan du chapitre 3 . . . . .	149
<b>4</b>	<b>Phénomène d'hourglassing transverse des renforts tissés épais</b>	<b>151</b>
4.1	Développement non désiré de modes hourglass dans l'épaisseur des renforts épais . . . . .	153
4.1.1	Mise en évidence de modes parasites transverses . . . . .	153
4.1.2	Justification par le calcul théorique des raideurs hourglass . . . . .	156
4.2	Raidissement des modes hourglass par la dilatation moyenne - méthode F-bar . . . . .	160
4.2.1	Présentation et utilisation classique . . . . .	160
4.2.2	Implémentation et valeurs propres . . . . .	160
4.2.3	Résultats numériques . . . . .	164
4.3	Raidissement des modes hourglass par une rigidité matérielle additionnelle	168
4.3.1	Paramètre de stabilisation hourglass matériel . . . . .	168
4.3.2	Résultats numériques . . . . .	169
4.4	Bilan du chapitre 4 . . . . .	172
<b>5</b>	<b>Prise en compte de la rigidité locale de flexion des renforts tissés épais</b>	<b>175</b>
5.1	Une rigidité locale en flexion . . . . .	177
5.1.1	Mise en évidence d'une rigidité locale de flexion . . . . .	177
5.2	Introduction d'une rigidité de courbure en flexion transverse . . . . .	184
5.2.1	Définition d'un moment linéaire transversal . . . . .	184
5.2.2	Plaques à degrés de liberté en déplacement . . . . .	188

5.2.3	Introduction virtuelle de plaques S3 . . . . .	191
5.2.4	Identification sur la flexion 3 points . . . . .	193
5.2.5	Suppression de la stabilisation des modes transverses . . . . .	197
5.2.6	Simulation de l'emboutissage hémisphérique . . . . .	198
5.3	Introduction d'une composante liée à la flexion des mèches dans le plan . .	200
5.3.1	Flexion plan et densité de mèches . . . . .	200
5.3.2	Identification de la flexion des mèches . . . . .	202
5.3.3	Simulation du Bias extension test . . . . .	202
5.3.4	Retour sur l'emboutissage hémisphérique . . . . .	204
5.4	Bilan du chapitre 5 . . . . .	205
<b>6</b>	<b>Initiation de la matrice céramique par pyrolyse et retour élastique</b>	<b>207</b>
6.1	Composites à matrice céramique et maîtrise géométrique . . . . .	209
6.2	Processus d'obtention des pièces CMC et paramètres influents . . . . .	210
6.2.1	Opérations sur texture . . . . .	210
6.2.2	Polymérisation de la matrice . . . . .	211
6.2.3	Initiation de la matrice céramique par pyrolyse . . . . .	212
6.2.4	Paramètres influents retenus . . . . .	213
6.3	Caractérisation du matériau au stade pyrolysé . . . . .	213
6.3.1	Essai de compression transverse . . . . .	214
6.3.2	Essai de traction de biais . . . . .	215
6.4	Loi de comportement matricielle au stade pyrolysé . . . . .	217
6.4.1	Loi hyperélastique isotrope transverse . . . . .	217
6.4.2	Identification en compression transverse . . . . .	220
6.4.3	Identification en cisaillement plan . . . . .	221
6.5	Approche pour la modélisation du retour élastique . . . . .	222
6.5.1	Chaîne de calcul . . . . .	222
6.5.2	Simulations d'ouverture de cornière . . . . .	222
6.6	Bilan du chapitre 6 . . . . .	225
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>227</b>
	<b>Annexes</b>	<b>229</b>
<b>A</b>	<b>Correction de l'invariant de compression transverse</b>	<b>231</b>
A.1	Définition du nouvel invariant . . . . .	231
A.2	Calcul de la dérivée première . . . . .	236
A.2.1	Calcul de la dérivée seconde . . . . .	236
<b>B</b>	<b>Postulat d'un nouvel invariant de compression transverse prenant en compte le foisonnement</b>	<b>239</b>
B.1	Définition du nouvel invariant . . . . .	239
B.2	Calcul de la dérivée première . . . . .	240
B.2.1	Calcul de la dérivée seconde . . . . .	242

B.3	Identification de l'épaississement . . . . .	246
<b>C</b>	<b>Composantes tensorielles des rigidités matérielles tangentes de la loi hyper-élastique orthotrope</b>	<b>249</b>
C.1	Variables tensorielles calculées . . . . .	249
C.2	Composante en élongation de la matrice tangente . . . . .	249
C.3	Composante en compression de la matrice tangente . . . . .	250
C.4	Composante en cisaillement de la matrice tangente . . . . .	251
<b>D</b>	<b>Calcul des matrices associées à la stabilisation dans la formulation <i>enhanced assumed strain</i></b>	<b>253</b>
D.1	Calcul de $\mathbf{K}_{uu}^{ij}$ et $\mathbf{K}_{\alpha u}^i$ . . . . .	253
D.2	Calcul de $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}$ . . . . .	256
<b>E</b>	<b>Élément <i>Optimal Incompressible (OI)</i> en grande transformation et déplacement total</b>	<b>259</b>
<b>F</b>	<b>Formulation des plaques <i>rotation free</i> triangulaires S3</b>	<b>263</b>
F.1	Expressions de la courbure des mèches . . . . .	263
F.2	Calcul des rotations de corps rigide . . . . .	266
F.3	Calcul des angles de flexion . . . . .	269
<b>G</b>	<b>Modes à énergie nulle des plaques <i>rotation free</i> quadrangulaires S4</b>	<b>271</b>
<b>H</b>	<b>Composantes tensorielles des rigidités matérielles tangentes de la loi hyper-élastique isotrope transverse</b>	<b>275</b>
H.1	Composantes dues à la contribution en élongation de la matrice tangente .	275
H.2	Composantes dues à la contribution en cisaillement transverse de la matrice tangente . . . . .	277
	<b>Bibliographie</b>	<b>279</b>

# Table des figures

1.1	Principe du procédé de fabrication des fibres de carbone ex-PAN [DUP 08]	7
1.2	Armures de renforts fibreux épais [GU 02]	9
1.3	Schéma d'un métier à tisser et principaux outils du procédé [FLO 13]	10
1.4	Les différents motifs de tissage 2D. Taffetas (a) Sergé 2x2 (b) Satin de 8 (c)	11
1.5	Structure des tissés interlock	12
1.6	Illustration du processus d'infusion sous vide	13
1.7	Illustration du processus RTM [BOI 04]	14
1.8	Schémas de procédés CVI	17
1.9	Matrice inter-fils en bord de porosité : en blanc la matrice infiltrée par phase vapeur (CVI), en gris foncé la matrice infiltrée par voie liquide (CVL) [GRI 13]	19
1.10	Les différentes échelles d'un renfort tissé	19
1.11	Dispositif de test en tension d'une fibre [AST 14]	20
1.12	Courbe effort-déplacement pour un essai de traction sur une fibre en carbone T700 [KAN 13]	21
1.13	Comportement en tension de mèches [DUM 03]	22
1.14	Vue en coupe (par microtomographie) d'une mèche en compression [BAD 08b]	23
1.15	Distorsion d'une mèche	24
1.16	Cisaillement transverse d'une mèche	24
1.17	Mécanismes intervenant dans la flexion d'une mèche [CHA 11b]	25
1.18	Validation de l'hypothèse de non-glissement relatif des mèches	26
1.19	Courbe expérimentale de traction uniaxiale sur taffetas de verre [BUE 98]	27
1.20	Compression dans le sens des mèches d'un interlock épais	28
1.21	La traction biaxiale des tissés [BUE 98, BUE 01]	29
1.22	Jeu de courbes expérimentales pour un taffetas de verre sens chaîne [BUE 98]	30
1.23	Mors du dispositif expérimental utilisé	31
1.24	Courbes d'écrasements successifs d'un taffetas de verre [CHA 11b]	31
1.25	Mécanisme de cisaillement d'un Interlock de carbone ( <i>Hexcel</i> G1151) [LUY 09b]	32
1.26	Picture Frame et Eprouvette de G1151 pour Picture Frame avec talons	34
1.27	Cinématique d'une éprouvette de bias extension test	35
1.28	Domaine de validité de l'hypothèse de non-glissement des mèches pour un tissé de type interlock [LUY 09b]	35

1.29	Essai de cisaillement transverse sur Interlock [ORL 12] . . . . .	38
1.30	Nouveau dispositif de cisaillement transverse . . . . .	38
1.31	Cisaillement transverse sur tissu interlock . . . . .	39
1.32	Dispositif de cisaillement transverse [ZHA 13] . . . . .	39
1.33	Identification de la rigidité des mèches . . . . .	41
1.34	Dispositif de flexion de de Bilbao [BIL 10] . . . . .	41
1.35	Essai de flexion trois points sur tissu épais . . . . .	42
2.1	Renfort tissé 2D généré par le modèle de Zhou [ZHO 04] . . . . .	48
2.2	Modélisation du VER d'un renfort après tissage [DUR 10] . . . . .	48
2.3	Modélisation analytique de Kawabata [KAW 73a] . . . . .	49
2.4	Génération d'une structure 3D d'un renfort en carbone [LOM 00] . . . . .	50
2.5	Plans définissant les points de contrôle pour un sergé 3x2 [HIV 05] . . . . .	51
2.6	Modélisation du VER d'un sergé de carbone par traitement d'une microtomographie [NAO 14] . . . . .	51
2.7	Deux Cellules Élémentaires Représentatives possibles pour une même armure de taffetas [BAD 07] . . . . .	52
2.8	Méthode du filet : détermination de la position du point C connaissant celles de A et B [BOI 04] . . . . .	53
2.9	Drapage d'une pièce complexe avec l'algorithme du filet [BOR 03] . . . . .	53
2.10	Modélisation d'une particule $O$ connectée à ses quatre voisins (a) avec modélisation de l'élongation (b), du cisaillement (c) et (d), et de la flexion (e) [SZE 05] . . . . .	54
2.11	Résultats expérimentaux et numériques d'un emboutissage de type double dôme avec mèches orientées à $45^\circ$ sur un tissu 2D [KHA 10] . . . . .	55
2.12	Forme expérimentale (a), numérique (b) et angles de cisaillement plan (c) du renfort après formage pour un emboutissage hémisphérique de renfort interlock [LUY 09a, CHA 12] . . . . .	55
2.13	Élément brique semi-discret à 8 nœuds et application [LUY 09b] . . . . .	56
2.14	Représentation de deux nappes et des coutures les liant dans un modèle semi-discret [CRE 06] . . . . .	56
2.15	Configuration initiale $C_0$ et configuration actuelle déformée $C(t)$ . . . . .	58
2.16	Définition du vecteur contrainte . . . . .	60
2.17	Modes de déformation des renforts interlocks . . . . .	66
2.18	Interlock générique étudié . . . . .	73
2.19	Identification numérique en tension du comportement . . . . .	74
2.20	Identification numérique du comportement global sens mèche : tension et compression . . . . .	75
2.21	Identification en compression sens mèches du comportement : numérique et expérimental . . . . .	76
2.22	Identification numérique en compression transverse du comportement . . . . .	77
2.23	Identification numérique en cisaillement plan du comportement . . . . .	78
2.24	Identification numérique en cisaillement transverse du comportement . . . . .	80



2.25	Élément semi-discret avec ses mèches . . . . .	84
2.26	Approche semi-discrète de la modélisation des mèches . . . . .	87
3.1	Maillage d'une éprouvette de traction de biais à $0/90^\circ$ (a) et à $\pm 45^\circ$ (b) . . . . .	96
3.2	Forces de traction pour des simulations élément fini dont le maillage est aligné ou non avec les fibres [YU 06] . . . . .	96
3.3	Modes de déformation pour certaines zones d'un essai de traction de biais [YU 06] . . . . .	97
3.4	Modes de déplacement de corps rigide (a), de dilatation (b), de cisaillement (c) et hourglass (d) pour le quadrangle suivant la direction horizontale	100
3.5	Domaines parent (isoparamétrique) et physique pour le quadrilatère à quatre nœuds Q4 . . . . .	101
3.6	Pas de déformation des mèches reliant les angles opposés lors de modes hourglass . . . . .	103
3.7	Repère local pour des éléments orientés à $45^\circ$ . . . . .	104
3.8	Repère local pour des éléments orientés à $0/90^\circ$ . . . . .	104
3.9	Représentation d'un maillage subissant un champ de déplacement hourglass	107
3.10	Modes de déplacement pour une brique selon une direction associés aux vecteurs 3.49 . . . . .	114
3.11	Orientation d'une mèche dans l'élément fini à tester . . . . .	132
3.12	Ratio déformation dans le sens de la mèche standard/déformation avec élément enhanced en fonction de l'angle d'orientation de la mèche dans l'élément pour le cas 1 . . . . .	133
3.13	Ratio déformation dans le sens de la mèche standard/déformation avec élément enhanced en fonction de l'angle d'orientation de la mèche dans l'élément pour le cas 2 . . . . .	134
3.14	Ratio déformation dans le sens de la mèche standard/déformation avec élément enhanced en fonction de l'angle d'orientation de la mèche dans l'élément pour le cas 3 . . . . .	134
3.15	Maillage à $45^\circ$ de l'éprouvette de traction de biais . . . . .	135
3.16	Maillage à $90^\circ$ de l'éprouvette de traction de biais . . . . .	135
3.17	Maillage à $90^\circ$ plus grossier de l'éprouvette de traction de biais . . . . .	136
3.18	Maillage à $90^\circ$ plus grossier et distordu de l'éprouvette de traction de biais	136
3.19	Représentation schématique de la dépose sur cercle . . . . .	137
3.20	Etat final du bias extension test avec maillage à $45^\circ$ . . . . .	138
3.21	Etat final du bias extension test avec maillage à $90^\circ$ . . . . .	139
3.22	Etat final du bias extension test avec maillage à $90^\circ$ plus grossier . . . . .	139
3.23	Etat final du bias extension test avec maillage à $90^\circ$ plus grossier et distordu	140
3.24	Effort repris par la machine en fonction de l'angle de cisaillement dans la zone centrale pour une formulation classique . . . . .	140
3.25	Effort repris par la machine en fonction de l'angle de cisaillement dans la zone centrale pour une formulation enhanced . . . . .	141
3.26	Déformation du maillage réglé . . . . .	142

3.27	Déformation du maillage distordu . . . . .	143
3.28	Variation du cisaillement dans la hauteur d'une éprouvette déposée sur cercle	143
3.29	Énergie de déformation dans la plaque déposée suivant le maillage et la formulation choisie en fonction de la progression de la dépose sur cercle .	144
3.30	Effort repris par la machine en fonction de l'angle de cisaillement dans la zone centrale pour une formulation classique . . . . .	145
3.31	Effort repris par la machine en fonction de l'angle de cisaillement dans la zone centrale pour une formulation enhanced . . . . .	145
3.32	Écart à la solution de référence en fonction de l'angle de cisaillement avec une loi matériau non linéaire pour le maillage à 90° . . . . .	146
3.33	Tension dans une mèche en fonction de son élongation . . . . .	147
3.34	Maillage à 90° de l'éprouvette de traction de biais avec l'élément semi-discret . . . . .	148
3.35	Maillage à 45° de l'éprouvette de traction de biais avec l'élément semi-discret . . . . .	148
3.36	Effort repris par la machine en fonction de l'angle de cisaillement dans la zone centrale suivant le maillage et la formulation choisie . . . . .	149
4.1	Essai de flexion trois points sur tissé épais - flèche de 0mm . . . . .	154
4.2	Essai de flexion trois points sur tissé épais - flèche de 20mm . . . . .	154
4.3	Essai de flexion trois points sur tissé épais - flèche de 40mm . . . . .	154
4.4	Essai de flexion trois points sur tissé épais - flèche de 60mm . . . . .	155
4.5	Cisaillement simple de deux éléments dans le plan $(x, z)$ . . . . .	155
4.6	Modes de déplacement principaux lors de la simulation de la flexion trois points . . . . .	156
4.7	Élément brique étudié . . . . .	157
4.8	Cisaillement simple de deux éléments dans le plan $(x, z)$ avec la méthode F-bar . . . . .	165
4.9	Essai de flexion trois points sur tissé épais avec méthode F-Bar - flèche de 40mm . . . . .	166
4.10	Essai de flexion trois points sur tissé épais avec méthode F-Bar - flèche de 60mm . . . . .	166
4.11	Effort repris par le cylindre central en fonction de la flèche imposée avec la méthode F-bar par rapport à un élément classique sens chaine . . . . .	167
4.12	Effort repris par le cylindre central en fonction de la flèche imposée avec la méthode F-bar sens chaine . . . . .	168
4.13	Cisaillement simple de deux éléments dans le plan $(x, z)$ avec la méthode de stabilisation hourglass . . . . .	170
4.14	Essai de flexion trois points sur tissé épais avec méthode $k_{Stab}$ - flèche de 40mm . . . . .	171
4.15	Essai de flexion trois points sur tissé épais avec méthode $k_{Stab}$ - flèche de 60mm . . . . .	171

4.16	Effort repris par le cylindre central en fonction de la flèche imposée pour les deux méthodes décrites . . . . .	172
4.17	Effort repris par le cylindre central en fonction de la flèche imposée avec la méthode de stabilisation hourglass . . . . .	173
5.1	Essai de flexion trois points sur tissé épais - flèche de 0mm . . . . .	177
5.2	Essai de flexion trois points sur tissé épais - flèche de 20mm . . . . .	178
5.3	Essai de flexion trois points sur tissé épais - flèche de 40mm . . . . .	178
5.4	Essai de flexion trois points sur tissé épais - flèche de 60mm . . . . .	178
5.5	Coordonnées de la ligne moyenne expérimentale pour différentes flèches .	179
5.6	Coordonnées de la ligne moyenne simulée pour différentes flèches . . . . .	180
5.7	Coordonnées de la ligne moyenne simulée pour différentes flèches . . . . .	180
5.8	Caractéristiques du montage d'emboutissage hémisphérique . . . . .	181
5.9	Préforme en fin d'emboutissage hémisphérique . . . . .	181
5.10	Vues de dessus de l'éprouvette emboutie par le poinçon hémisphérique . .	182
5.11	Plis locaux (a) ou globaux (b) non observés expérimentalement - Tissé embouti à 80% . . . . .	183
5.12	Frontière entre deux zones de cisaillement constant (a) et courbure des mèches (b) [FER 14] . . . . .	184
5.13	Exemple de structure de renfort interlock 2.5D . . . . .	184
5.14	Zones de calcul de la courbure pour une intégration avec deux points de Gauss. Cas d'un élément non distordu et d'un élément distordu initialement	187
5.15	Nœuds virtuels esclave et nœuds maitres pour une intégration avec deux points de Gauss . . . . .	188
5.16	Découpage des surfaces d'intégration $\psi_i$ dans le cas de l'utilisation d'éléments S3 . . . . .	190
5.17	Emplacements des éléments S3 internes et voisins pour le cas d'un maillage régulier initialement . . . . .	190
5.18	Emplacements des éléments S3 internes et voisins pour le cas d'un maillage non régulier initialement . . . . .	190
5.19	Élément S3 étudié (e) entouré de trois voisins . . . . .	191
5.20	Comparaison des lignes moyennes expérimentales et simulées sens trame avec une loi de comportement linéaire et optimisations discrètes . . . . .	194
5.21	Comparaison des lignes moyennes expérimentales et simulées sens trame avec une loi de comportement linéaire et optimisation globale . . . . .	195
5.22	Comparaison des lignes moyennes expérimentales et simulées sens trame avec une loi de comportement non-linéaire et optimisation globale . . . . .	196
5.23	Essai de flexion trois points sur tissé épais avec formulation en flexion - flèche de 20mm . . . . .	196
5.24	Essai de flexion trois points sur tissé épais avec formulation en flexion - flèche de 40mm . . . . .	197
5.25	Essai de flexion trois points sur tissé épais avec formulation en flexion - flèche de 60mm . . . . .	197

5.26	Motif hourglass transverse sur 3 éléments avec rigidité de flexion à intégration réduite . . . . .	198
5.27	Motif hourglass transverse sur 3 éléments avec rigidité de flexion à intégration complète . . . . .	198
5.28	Suppression des plis grâce aux rigidités de flexion. Gauche/droite : sans/avec formulation en flexion - Tissé embouti à 80% . . . . .	199
5.29	Flambement dans le plan avec la formulation en flexion - Tissé embouti à 80% . . . . .	199
5.30	Emplacement de la zone de calcul de la courbure pour la représentation de la flexion des mèches de chaîne . . . . .	201
5.31	Zones de cisaillement en fonction de la rigidité de flexion . . . . .	203
5.32	Emplacement des zones de calcul des courbures pour la représentation de l'ensemble des contributions en flexion . . . . .	204
5.33	Visualisation des éléments S3 virtuels utilisés . . . . .	204
5.34	Simulation d'un emboutissage hémisphérique avec des résistances à la courbure . . . . .	205
6.1	Visualisation des cornières . . . . .	209
6.2	Microscopie MEB d'un composite C/C pyrolysé à 880 °C [SCH 07] . . .	212
6.3	Comportement normalisé en compression transverse de l'interlock au stade pyrolysé . . . . .	214
6.4	Comportement normalisé en compression transverse de l'interlock au stade pyrolysé/renfort sec . . . . .	215
6.5	Comportement normalisé en traction de biais de l'interlock au stade pyrolysé/renfort sec . . . . .	215
6.6	Évolution du matériau pyrolysé en biais extension test . . . . .	216
6.7	Identification numérique normalisée en compression transverse du comportement . . . . .	221
6.8	Identification numérique normalisée en cisaillement plan du comportement	221
6.9	Simulation de cornière . . . . .	223
6.10	Simulation d'une polymérisation de cornière . . . . .	224
6.11	Simulation d'une cornière au stade pyrolysé . . . . .	224
A.1	Compression d'un tissu en cisaillement transverse pur . . . . .	232
A.2	Projection du vecteur matériel $m_3$ sur un plan orthogonal à $(m_1, m_2)$ . .	232
B.1	Suivi par corrélation du cisaillement transverse sur tissu interlock . . . . .	246
B.2	Exemple de déformations transversales en fonction de l'angle de cisaillement transverse sens chaîne pour un interlock . . . . .	247
F.1	Caractéristiques du S3 . . . . .	263
F.2	Élément S3 étudié (e) entouré de trois voisins . . . . .	266
F.3	Liens entre rotations de corps rigide et angle de flexion . . . . .	269

G.1 Patch d'éléments S4 subissant une cinématique de flexion avec un motif sinusoïdal . . . . .	272
G.2 Simulation de flexion trois points avec éléments S4 virtuels et flèche de 40mm . . . . .	273



# Liste des tableaux

1.1	Propriétés de mèches SiC et carbone . . . . .	9
2.1	Paramètres des potentiels en traction sens mèche (en MPa) . . . . .	74
2.2	Paramètres des potentiels en compression sens mèche (en MPa), cas d'ex- tension sans essai . . . . .	74
2.3	Paramètres des potentiels du comportement sens mèche (en MPa) iden- tifiés simultanément sur des essais de compression et traction . . . . .	75
2.4	Paramètres du potentiel en compression transverse (en MPa) . . . . .	77
2.5	Paramètres du potentiel en cisaillement plan (en MPa) . . . . .	77
2.6	Paramètres des potentiels en cisaillement transverse (en MPa) . . . . .	79
3.1	Tableau récapitulant les différentes rigidités pour les 3 cas testés . . . . .	133
3.2	Tableau récapitulant les valeurs des rigidités pour la simulation du bias extension test . . . . .	138
3.3	Écart à la solution de référence pour un cisaillement de $50^\circ$ . . . . .	141
3.4	Valeurs des rigidités pour la simulation de dépose sur cercle . . . . .	142
3.5	Écart à la solution de référence pour un cisaillement de $50^\circ$ avec une loi matériau non linéaire . . . . .	146
4.1	Déplacement des nœuds du cisaillement simple figure 4.5 . . . . .	156
4.2	Déplacement des nœuds du cisaillement simple figure 4.8 . . . . .	165
4.3	Déplacement des nœuds du cisaillement simple figure 4.13 . . . . .	170
5.1	Identification d'une rigidité de flexion pour une flèche donnée . . . . .	194
5.2	Identification d'une rigidité de flexion non linéaire . . . . .	196





# Liste des symboles

Par souci de clarté et d'insertion dans les zones de textes, on différenciera les notations tensorielles (ou mathématiques) avec des variables italiques tandis que les notations matricielles (ou calculatoires) utiliseront des variables droites. Les notations en gras indiquent des tenseurs d'ordre supérieur ou égal à 1. Les variables les plus significatives uniquement sont définies ici. Le premier chapitre d'introduction de la variable sera signalé.

## Chapitre 1

$\gamma$	Angle de cisaillement plan
$C_s$	Couple surfacique de cisaillement
$G_m$	Rigidité de flexion d'une mèche

## Chapitre 2

$x, \mathbf{x}$	Vecteur position eulérien
$\mathbf{X}, \mathbf{X}$	Vecteur position matériel
$\mathbf{F}, \mathbf{F}$	Tenseur gradient de la transformation
$j$	Jacobien de la transformation de la configuration initiale à la configuration déformée
$\mathbf{C}, \mathbf{C}$	Tenseur des dilatations de Cauchy-Green droit
$\mathbf{E}, \mathbf{E}$	Tenseur des déformations de Green-Lagrange
$\mathbf{e}, \mathbf{e}$	Tenseur des déformations d'Euler-Almansi
$\mathbf{D}, \mathbf{D}$	Tenseur taux de déformations
$\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{E}}$	Vitesse de déformation lagrangienne
$\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}$	Tenseur des contraintes de Cauchy
$\mathbf{P}, \mathbf{P}$	Tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff
$\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}$	Tenseur des contraintes de Kirchhoff
$\mathbf{S}, \mathbf{S}$	Second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff
$\psi$	Densité massique d'énergie interne
$\rho$	Masse volumique
$\Phi$	Dissipation par unité de volume
$w$	Densité volumique d'énergie de déformation

$I_2$	Tenseur identité d'ordre 2
$\dot{\mathbf{S}}, \mathbf{S}$	Taux de contrainte de Piola-Kirchhoff 2
$\mathbf{C}^{SE}, \mathbf{C}^{SE}$	Second tenseur d'élasticité ou tenseur matériel tangent
$\mathbf{M}_i$	Directions d'orthotropie du renfort sec $i = 1, 3$
$I_1, I_2$ et $I_3$	Invariants classiques de Cauchy-Green droit
$I_{4i}, I_{4ij}$ et $I_{5i}$	Invariants mixtes de Cauchy-Green droit pour l'orthotropie, $i, j = 1, 3$
$\mathbf{M}_{ij}$	Tenseur de structure associé aux directions $\mathbf{M}_i$ et $\mathbf{M}_j$
$I_{elong1}$	Invariant associé à l'élongation dans la direction $\mathbf{M}_1$
$I_{elong2}$	Invariant associé à l'élongation dans la direction $\mathbf{M}_2$
$I_{comp}$	Invariant associé à la compression dans la direction $\mathbf{M}_3$
$I_{cp}$	Invariant associé au cisaillement dans le plan $(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2)$
$I_{ct1}$	Invariant de cisaillement transverse associé au cisaillement dans le plan $(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_3)$
$I_{ct2}$	Invariant de cisaillement transverse associé au cisaillement dans le plan $(\mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3)$
$w_j$	Contribution énergétique associée au mode de déformation $j$ pour la loi hyperélastique orthotrope du renfort
$k_i$	Paramètres d'identification matériaux
$\Pi$	Potentiel total d'énergie de déformation
$\mathbf{u}$	Vecteur des déplacements nodaux
$\mathbf{K}_T$	Rigidité totale d'un élément fini
$\mathbf{K}_{mat}$	Rigidité matérielle d'un élément fini
$\mathbf{K}_{geo}$	Rigidité géométrique d'un élément fini
$\mathbf{B}_0$	Matrice d'interpolation du taux de déformation lagrangien à partir des vitesses nodales
$\mathcal{B}_0$	Matrice des dérivées des fonctions de forme d'indice $I$ dans la base lagrangienne
$\mathbf{I}_3$	Matrice identité de dimension 3
$I_0^-$ et $I_0^+$	Limite du domaine d'identification de la loi hyperélastique
$w_s$	Densité volumique d'énergie de déformation symétrisée
$I_0$	Limite du domaine d'identification de la loi hyperélastique pour un potentiel symétrisé
$\mathbf{C}_i^{SE}, \mathbf{C}_i^{SE}$	Second tenseur d'élasticité associé à la contribution énergétique $w_i$
$W_{int}$	Travail des forces internes
$W_{int}^{SD}$	Travail des forces internes de tension associées à l'élément semi-discret
$W_{int}^{cont}$	Travail des forces internes de tension associées à l'élément continu
$\mathbf{h}_m, \mathbf{h}_m$	Vecteur normé tangent à une mèche $m$ dans le repère eulérien
$\mathbf{H}_m, \mathbf{H}_m$	Vecteur normé tangent à une mèche $m$ dans le repère lagrangien
$\varepsilon_m$	Déformation d'une mèche $m$ dans le repère eulérien
$E_m$	Déformation d'une mèche $m$ dans le repère lagrangien
$T_m$	Tension dans une mèche $m$ dans le repère eulérien
$\mathbf{F}_{int}$	Forces internes associées à la déformation de l'élément fini

---

$\mathbf{F}_{int}^{SD}$	Forces internes associées à la déformation de l'élément fini semi-discret
$\mathcal{R}$	Rigidité bipoint d'une mèche (efforts eulériens et géométrie lagrangienne)
$\mathbf{M}_{dyn}$	Matrice de masse
$\mathbf{C}_{dyn}$	Matrice d'amortissement
$\mathbf{F}_{ext}$	Vecteur des forces extérieures

### Chapitre 3

$\xi, \eta$ et $\zeta$	Coordonnées dans le repère isoparamétrique
$\xi_i$	Vecteurs associés au sommet du carré ou cube de référence isoparamétrique
$\mathbf{h}$	Vecteur hourglass en dimension 2
$\mathbf{h}_i$	Vecteur hourglass en dimension 3 $i = 1, 4$
$h(\xi)$	Fonction hourglass
$\mathbf{N}(\xi)$	Vecteur des fonctions de forme
$\gamma$	Vecteur antihourglass en dimension 2
$\gamma_i$	Vecteurs antihourglass en dimension 3 $i = 1, 4$
$\mathbf{b}_i$	Vecteurs gradient
$\mathbf{C}_\theta$	Matrice de rigidité associée à la direction $\theta$
$\varepsilon_\theta^f$	Déformation des fibres dans la direction $\theta$
$U_\theta$	Énergie de déformation avec des fibres dans la direction $\theta$
$\bar{\mathbf{B}}$	Matrice d'interpolation des déplacement modifiée
$\bar{\varepsilon}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$	Gradient symétrisé du déplacement modifié
$\mathbf{J}$	Matrice jacobienne de la transformation du repère isoparamétrique au repère physique
$\mathbf{J}_0$	Matrice jacobienne de la transformation du repère isoparamétrique au repère physique évaluée en $\xi = 0$
$\mathbf{B}_0$	Partie constante de la matrice d'interpolation des déplacements
$\mathbf{B}_{stab}$	Partie non constante de la matrice d'interpolation des déplacements
$\mathbf{F}_0$	Contribution au forces internes associée à une intégration réduite
$\mathbf{F}_{stab}$	Forces internes de stabilisation
$j_0$	Jacobien de la transformation entre les domaines de référence et eulérien au centre du repère isoparamétrique
$\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_0$	Tenseur de Cauchy-Green droit au centre du repère isoparamétrique
$\tilde{\mathbf{u}}$	Déplacements dans le repère isoparamétrique
$\tilde{\varepsilon}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$	Déformations dans le repère isoparamétrique
$\left[\bar{\mathbf{J}}_0^{-1}\right]$	Matrice transportant le vecteur des déformations en notation de Voigt du domaine isoparamétrique vers le domaine matériel
$\tilde{\mathbf{B}}_{stab}$	Matrice d'interpolation des déplacements isoparamétriques de stabilisation
$\bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{C}}$	Tenseur de Cauchy-Green droit moyenné matériellement

$\tilde{\mathbf{G}}$	Matrice d'interpolation du champ de déformation isoparamétrique enhanced
$\boldsymbol{\alpha}$	Variables internes enhanced
$\mathbf{F}_{stab}^\alpha$	Forces de stabilisation associées à la variation des variables internes
$\tilde{\mathbf{C}}^{SE}$	Matrice des rigidité matérielles isoparamétriques tangentes
$\Gamma_i$	Matrice $24 \times 3$ contenant des vecteurs $\boldsymbol{\gamma}_i$
$\tilde{\mathbf{B}}_i$	Matrice $6 \times 3$ associée à $\Gamma_i$ pour l'interpolation des déformations de stabilisation
$\bar{j}_0$	Jacobien de la transformation entre domaines de référence et lagrangien au centre du repère isoparamétrique
$\mathbf{K}_{uu}^{ij}, \mathbf{K}_{\alpha u}^i$ et $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}$	Matrices de stabilisations liées à la méthode enhanced
$\mathbf{K}_i$	Matrice de rigidité globale de la méthode enhanced
$\bar{\mathbf{E}}, \bar{\mathbf{E}}$	Moyenne matérielle des déformations de Green-Lagrange
$\bar{\mathbf{e}}, \bar{\mathbf{e}}$	Moyenne matérielle des déformations d'Almansi
$\bar{\mathbf{E}}_m$	Moyenne matérielle des déformations de Green-Lagrange dans la direction de la mèche
$\bar{\mathbf{e}}_m$	Moyenne matérielle des déformations d'Almansi dans la direction de la mèche
$\mathbf{F}_0^m$	Forces internes pour une intégration réduite d'une mèche
$\mathbf{F}_{stab}^{\alpha m}$	Forces internes de stabilisation d'une mèche associées à la variation des variables enhanced
$\tilde{\mathcal{R}}$	Rigidité bipoint d'une mèche dans le repère isoparamétrique
$\mathbf{F}_{stab}^m$	Forces internes de stabilisation d'une mèche
$j_m$	Jacobien de la transformation entre les repères parent et eulérien de la mèche
$\mathbf{K}_{uu}^{ijTot}, \mathbf{K}_{\alpha u}^{iTot}$ et $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{Tot}$	Matrices de stabilisations globales liées à la méthode enhanced pour l'élément semi-discret

## Chapitre 4

$\omega_i^j$	Rigidité associée au vecteur antihourglass $\boldsymbol{\gamma}_i$ normé dans la direction j
$E_1$	Rigidité selon la première direction de mèche
$E_2$	Rigidité selon la seconde direction de mèche
$E_3$	Rigidité de compression transverse
$G_{12}$	Rigidité de cisaillement plan
$G_{23}$	Rigidité de cisaillement transverse dans la première direction de mèche
$G_{31}$	Rigidité de cisaillement transverse dans la seconde direction de mèche
$\omega_{cti}$	Rigidité associée au mode de cisaillement transverse dans la direction i
$\bar{j}$	Jacobien moyen de la transformation entre les domaines de référence et eulérien
$\mathbf{B}^{Sph}$	Partie sphérique de l'interpolation des déplacements
$\mathbf{B}^{dev}$	Partie déviatorique de l'interpolation des déplacements
$\mathbf{C}_{Stab}^{SE}, \mathbf{C}_{Stab}^{SE}$	Tenseur des rigidités matérielles tangentes de stabilisation
$k_{Stab}$	Paramètre de stabilisation hourglass additionnel

## Chapitre 5

- $\chi, \boldsymbol{\chi}$  Courbure  
 $\mathbf{M}$  Moment de flexion  
 $\mathbf{M}_l$  Moment linéaire de flexion  
 $\mathbf{u}^{*(i)}$  Déplacements des nœuds esclaves de la couche  $\psi_i$   
 $\mathbf{u}^p$  Déplacements de chaque nœud du patch considéré  
 $\chi_f, \boldsymbol{\chi}_f$  Courbures dans les directions principales des mèches  
 $\mathbf{M}_{fl}$  Moment linéaire de flexion dans les directions principales des mèches  
 $D$  Rigidité linéaire de flexion  
 $\mathbf{F}_i^{*(j)}$  Efforts internes esclaves associés à l'élément S3 numéro ( $j$ ) de la couche du point d'intégration  $\psi_i$   
 $\mathbf{F}_{int}^{Flex}$  Forces internes totales de flexion  
 $D_0, D_1$  et  $D_{Limite}$  Paramètres de la loi de comportement non linéaire en flexion transverse  
 $d_m^{Chaine}, d_m^{Trame}$  Densités surfacique de mèches dans les directions chaîne et trame

## Chapitre 6

- $\mathbf{C}_{mat}^{SE}, \mathbf{C}_{mat}^{SE}$  Tenseur des rigidités tangentes initiales de la matrice pyrolysée  
 $\hat{E}$  Module d'Young initial de la loi isotrope transverse  
 $\hat{E}_3$  Module de compression transverse initial de la loi isotrope transverse  
 $\hat{G}$  Module de cisaillement initial de la loi isotrope transverse  
 $\mathbf{C}_{renf}^{SE}, \mathbf{C}_{renf}^{SE}$  Tenseur des rigidités tangentes initiales du renfort  
 $\hat{w}$  Densité volumique d'énergie de déformation pour la loi isotrope transverse  
 $\hat{w}_i$  Densité volumique d'énergie de déformation associée à la contribution  $i$  pour la loi isotrope transverse  
 $\hat{\mathbf{S}}, \hat{\mathbf{S}}$  Second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff pour la loi isotrope transverse



# Introduction

Les problématiques économiques actuelles conduisent le domaine des transports, et en particulier les industries aéronautiques et aérospatiales, à rechercher l'allègement des structures. Avec l'augmentation du prix des carburants, le besoin en matériaux en rupture technologique a subi une très forte hausse. Parmi la grande variété des solutions, les excellentes caractéristiques mécaniques des matériaux composites à fibres longues, à la fois légers et résistants, leur valent une exposition considérable. Les deux acteurs majeurs de l'industrie aéronautique, Airbus et Boeing, ont fait de ce constat une réalité en introduisant ces matériaux en proportions de plus en plus importantes dans leurs nouvelles architectures aéronautiques. D'abord cantonnés aux pièces secondaires d'habillage, ils sont maintenant utilisés pour la réalisation de pièces structurelles, vitales pour la tenue mécanique de l'avion. Le caisson central de voilure des A380 et A350XWB en est un exemple frappant.

En dehors de leur légèreté, la possibilité d'adapter localement les caractéristiques mécaniques de la pièce aux sollicitations subies est la spécificité majeure de l'application des composites aux pièces structurelles. Pour les matériaux composites à renforts tissés, l'emplacement et l'orientation des mèches ont un impact direct sur les propriétés finales de la pièce. La maîtrise de l'élaboration est donc fondamentale, ce qui a conduit à un intense effort de recherche dans l'amélioration de leurs procédés de fabrication. Le processus classique d'obtention des pièces composites à fibres continues comporte une phase de mise en forme du renfort suivie d'une phase de solidification où une matrice apporte de la cohérence à la pièce. La phase de mise en forme est primordiale car elle détermine la position des fibres. Aujourd'hui les technologies de fabrication des composites à fibres continues font principalement appel à des méthodes manuelles de dépose. Ce type de méthode, au coût de fabrication élevé, n'est pas adapté à la fabrication d'un grand nombre de pièces. Pour pallier le problème, des méthodes de fabrication basées sur l'utilisation d'un moule sont développées, tel que le procédé RTM ou resin transfer molding. Dans cette optique, afin d'éviter des processus essai/erreur coûteux, la simulation de la phase de mise en forme est essentielle. La prévision de la formabilité et des caractéristiques mécaniques finales permet d'optimiser numériquement la conception de l'outillage nécessaire. Le premier axe de cette thèse s'inscrit dans cet objectif.

Le succès de l'utilisation des matériaux composites pour certaines pièces structurelles a ouvert la voie à leur utilisation dans des milieux plus difficiles, soumis à des contraintes thermiques. Les composites à matrice céramique ont été développés dans ce sens. En insérant des fibres continues dans une matrice céramique, les résistances à la fissuration,

à l'élongation et aux chocs thermiques de ces dernières ont été augmentées de manière drastique. Mais là aussi le processus de fabrication nécessite une optimisation : les phases de pyrolyse et de densification, qui ont pour objectif de créer la matrice céramique liant les fibres, ne sont pas mécaniquement maîtrisées. La simulation de la première phase de ce processus, la pyrolyse, constitue le deuxième axe de cette thèse.

Ce manuscrit est composé de six chapitres au cours desquels la mise en forme des renforts tissés épais de composite puis l'étape de pyrolyse initiant les matrices céramiques seront présentées puis simulées. Le premier chapitre introduit les matériaux composites à renforts tissés ; leurs constituants, leurs procédés de fabrication et leurs caractéristiques mécaniques.

Le deuxième chapitre est consacré à la modélisation des renforts tissés épais de composite. Après un état de l'art de la simulation des renforts tissés, deux approches macroscopiques par éléments finis seront détaillées. Suite à une introduction des concepts de base de la mécanique des milieux continus en grandes transformations, une loi hyperélastique de comportement est formulée. Son introduction telle quelle dans un élément volumique classique, ou après adaptations dans un élément fini spécifique semi-discret, est possible.

Dans le troisième chapitre, la problématique numérique du verrouillage en tension, spécifique aux renforts tissés, sera analysée. Ce phénomène, lié à la présence de condition de quasi-inextensibilité des mèches, induit une surévaluation numérique des efforts. Après avoir analysé l'origine de ce verrouillage, deux éléments, semi-discret ou non, basés sur une méthode *enhanced assumed strain* seront proposés pour réduire le phénomène de verrouillage.

Dans les quatrième et cinquième chapitres, la question de la modélisation en flexion des renforts tissés est abordée. Dans le premier de ces deux chapitres, la présence de modes parasites transverses dans des simulations dominées par la flexion est mise en évidence. Le raidissement des modes hourglass parasites est d'abord envisagé par une méthode de moyennage des dilatations dans l'élément, puis par l'ajout d'une rigidité tangente matérielle orientée dans une direction spécifique. Dans le second de ces chapitres, les limitations de la modélisation du comportement en flexion des renforts par une méthode du premier gradient sont soulignées. Une méthode innovante introduisant une rigidité à la courbure par l'intermédiaire de plaques *rotation free* est proposée. Un moment de flexion est alors calculé grâce à la position des éléments finis voisins. Les simulations réalisées grâce aux propositions faites dans ces deux chapitres sont comparées à des résultats expérimentaux de flexion trois points et d'emboutissage hémisphérique.

Le dernier chapitre concerne la simulation du retour élastique après pyrolyse des matrices polymères à précurseurs céramiques. Une loi de comportement hyperélastique pour la matrice pyrolysée est proposée. Une chaîne de calcul modélisant la mise en forme, l'introduction de la matrice pyrolysée, puis le retrait des forces de mise en forme est détaillée. Son application au cas de l'ouverture angulaire d'une cornière est analysée.



# Chapitre 1

## Fabrication et comportement des composites à renforts tissés

*Ce premier chapitre est une introduction à l'étude des pièces composites à renforts tissés. Dans ce manuscrit, nous aborderont deux aspects de la modélisation des étapes de fabrication des composites à renfort tissés épais : la mise en forme des renforts puis le procédé de pyrolyse dans la réalisation des matrices céramiques. Les différents constituants des pièces finales sont présentés individuellement afin de souligner la structure multiéchelle du matériau. Le comportement mécanique à chacune des échelles est détaillé, en parallèle de la présentation des méthodes de caractérisation adéquates.*

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Qu'est-ce qu'un matériau composite ?</b>	<b>5</b>
<b>1.2</b>	<b>De la fibre à la pièce finale</b>	<b>6</b>
1.2.1	Les mèches	6
1.2.2	Le renfort	9
1.2.3	La solidification : consolidation des matrices organiques	12
1.2.4	La solidification : consolidation des matrices céramiques	15
<b>1.3</b>	<b>Comportement mécanique des renforts tissés</b>	<b>19</b>
1.3.1	Échelle microscopique : la fibre	20
1.3.2	Échelle mésoscopique : la mèche	21

1.3.2.1	Comportement longitudinal des mèches . . . . .	21
1.3.2.2	Compression transverse des mèches . . . . .	22
1.3.2.3	Cisaillement des mèches . . . . .	23
1.3.2.4	Comportement en flexion des mèches . . . . .	24
1.3.3	Échelle macroscopique : le renfort . . . . .	26
1.3.3.1	Non-glissement entre chaîne et trame . . . . .	26
1.3.3.2	Comportement en tension uniaxiale . . . . .	27
1.3.3.3	Compression dans le sens des mèches . . . . .	27
1.3.3.4	Comportement en tension biaxiale . . . . .	28
1.3.3.5	Comportement en compression transverse . . . . .	29
1.3.3.6	Comportement en cisaillement dans le plan des mèches .	31
1.3.3.7	Comportement en cisaillement transverse . . . . .	37
1.3.3.8	Comportement en flexion . . . . .	40
<b>1.4</b>	<b>Bilan du chapitre 1 . . . . .</b>	<b>42</b>

---

## 1.1 Qu'est-ce qu'un matériau composite ?

### Définition générale

Un matériau composite est un assemblage d'au moins deux constituants non miscibles dont les propriétés répondent à des besoins spécifiques non satisfaits individuellement par les composants de base. Cette définition inclut un large éventail de matériaux, certains naturels et utilisés depuis longtemps tels que le bois, les os ou le torchis ; d'autres conçus plus récemment tels que les pneumatiques ou le béton armé. Tous ces matériaux ont en commun le fait d'être constitués de deux phases principales : le renfort qui confère au produit final les caractéristiques mécaniques dominantes et la matrice qui apporte la cohésion de l'ensemble. La volonté d'utiliser des matériaux spécifiques à chaque application dans l'optique d'optimiser coûts et performances mécanique fait des composites, par la multiplicité des matériaux imaginables, de sérieux candidats. Parmi les diverses industries intéressées par les composites, les domaines de l'aéronautique et de l'aérospatial sont demandeurs de matériaux légers et résistants, caractéristiques de prédilection des matériaux composites.

### La matrice

Les matrices des matériaux composites développés actuellement sont généralement classées en deux catégories :

- *Les matrices organiques* (polymères thermoplastiques, thermodurcissables et élastomères). Elles représentent la très grande majorité des matrices utilisées industriellement grâce à leur faible coût et à la facilité de mise en œuvre du processus de fabrication ;
- *Les matrices minérales* (céramiques et métalliques). Les matrices céramiques (oxydes et carbures) et métalliques (aluminium, magnésium, fer, cobalt, cuivre) sont destinées à des applications de pointe, lorsque des conditions environnementales hostiles ne permettent pas l'utilisation d'une matrice organique (hautes températures, hygrométrie défavorable). Leurs procédés de fabrication complexes rendent ces matériaux coûteux et difficiles à produire, restreignant leur utilisation actuelle aux secteurs militaire et spatial.

Les renforts que nous étudieront dans ce document sont destinés à des composites à matrices céramique ou organique. Pour ces dernières, les matrices thermodurcissables sont les plus couramment utilisées, leur faible viscosité avant réticulation facilitant la phase d'injection de résine dans le renfort sec. Ce type de matrice organique sera d'ailleurs celui considéré dans ce manuscrit. Pour le processus associé aux matrices céramiques également car les étapes initiales de production sont identiques à la mise en œuvre des matrices organiques, comme expliqué dans la section 1.2.4.

### Les renforts

Les renforts aussi peuvent être classifiés, cette fois en fonction de leur géométrie :

- *Les renforts particuliers* : la matrice est renforcée par une phase dispersée de particules avec ou sans orientation privilégiée. Il s'agit généralement d'inclusions granulaires (craie), lamellaire (talc, mica) ou aciculaires (wallastonite, fibres courtes). Les composites à renfort particulaire sont peu utilisés à des fins structurelles, mais plutôt pour des applications spécifiques ou des produits de grande consommation ;
- *Les renforts à fibres discontinues* : la matrice est renforcée par une phase dispersée de fibres courtes (de longueurs inférieures à 100 fois leurs diamètres) avec ou sans orientation privilégiée. Les fibres courtes sont assemblées en nappes appelées mâts et représentent un apport volumique en fibre de l'ordre de 30%. Le composite obtenu est alors un polymère renforcé ;
- *Les renforts à fibres continues* : la matrice est renforcée par une phase dispersée de fibres continues dont la longueur est voisine de celle de la pièce finale. Les directions privilégiées des fibres confèrent à la pièce finale ses caractéristiques mécaniques principales. Dans ce type de renfort, la matrice n'est présente que pour assurer la cohésion de l'ensemble et apporter une résistance aux efforts appliqués dans des directions différentes de celles des fibres.

Dans cette étude, nous nous intéresserons exclusivement aux renforts à fibres continues. Les fibres utilisées pour réaliser ces renforts peuvent être de différentes natures : verre, carbone, métaux, céramiques ou encore matériaux d'origines végétale (cellulose, lignine, lin) ou animale (collagène). Seules les fibres en carbone et carbure de silicium (SiC) seront étudiées. Ces fibres sont principalement destinées à des solutions technologiques de haute performance en aéronautique et aérospatiale. Les fibres peuvent être assemblées selon différentes méthodes. On distingue alors les nappes unidirectionnelles (UD), assemblages superposés de plis comptant des fibres orientées dans une direction privilégiée. Si plusieurs nappes sont cousues ensemble, on obtient alors un Non-Crimp Fabric (NCF). Les fibres peuvent également être assemblées en mèches, qui sont ensuite tricotées, tressées ou tissées. Ce travail sera limité aux assemblages tissés de mèches.

## 1.2 De la fibre à la pièce finale

La structure multiéchelle et multimatériau d'une pièce composite conditionne son comportement final. Dans cette partie, les différentes étapes du processus de fabrication sont présentées. Les fibres doivent être produites, puis assemblées en mèches qui seront liées par tissage ; le renfort est ainsi obtenu. Pour produire la pièce finale, le renfort doit être mis en forme, imprégné de résine puis cuit. Dans le cas des matrices céramiques, des étapes supplémentaires (pyrolyse, densification) sont nécessaires.

### 1.2.1 Les mèches

#### Fibres de carbone

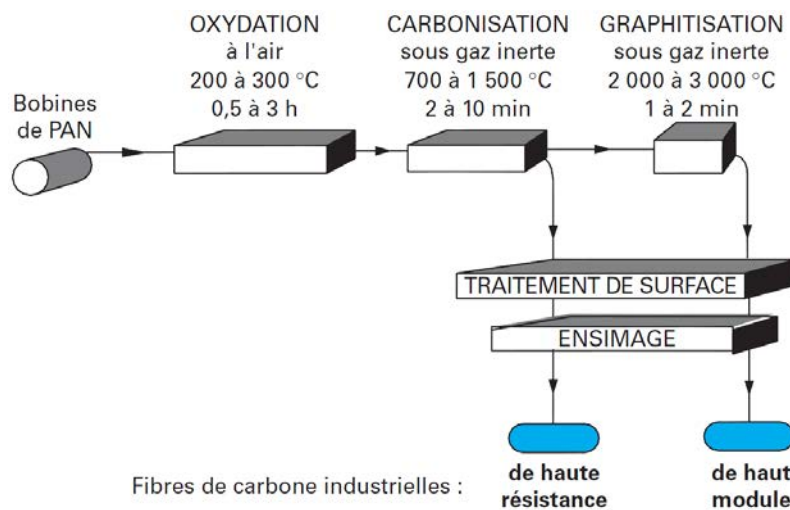
Les fibres de carbone peuvent être obtenues principalement de deux manières : à partir de fibres de polyacrylonitrile (dit PAN-based), la voie la plus courante, ou à partir de fibres

de brai produites par filage de résidus de houille ou de pétrole (dit pitch-based).

Dans le premier cas, les fibres de carbone sont créées par la conversion d'un précurseur en polyacrylonitrile. Les filaments sont d'abord filés à partir du précurseur élevé à sa température d'oxydation, puis maintenus en tension, et enfin carbonisés dans une atmosphère d'azote à environ 1 200°C. Les éléments non carbonés se volatilisent, laissant principalement le carbone. Les fibres obtenues après cette étape sont dites de haute résistance (HR). Une étape supplémentaire de graphitisation à 2 500°C permet de parfaire la structure et d'obtenir des fibres dites haut module (HM). Des variations pendant l'étape de graphitisation mènent à différentes gammes de fibres.

Pour le cas des fibres de brai, les filaments sont cuits après filage à 600°C puis carbonisés dans une atmosphère d'azote à 2 500°C afin de les enrichir en carbone. Les fibres obtenues affichent un très bon taux de carbone. Cependant, la difficulté d'élimination des impuretés dans le brai d'origine leur confère une rigidité de traction plus faible.

La dernière étape avant l'obtention de fibres utilisables est l'ensimage. Cette opération consiste à traiter la surface des fibres et joue un rôle prépondérant dans leur durée de vie. Sa fonction principale est d'obtenir une meilleure compatibilité et une meilleure cohésion entre fibres et matrice afin d'optimiser les caractéristiques mécaniques de la pièce finale. Sa composition peut varier fortement d'un producteur à l'autre et selon le couple fibre/matrice en jeu [BER 08]. La figure 1.1 rappelle les différentes étapes du procédé de fabrication des mèches de carbone ex-PAN.



**Figure 1.1** – Principe du procédé de fabrication des fibres de carbone ex-PAN [DUP 08]

### Fibres de carbure de silicium

Différents fibres en céramiques ont été développées afin de résister à des contraintes thermiques et mécaniques simultanées auxquelles les fibres classiques ne peuvent pas répondre. On trouve :

- Les fils de silice, caractérisés par de très bonnes propriétés diélectriques et pouvant supporter des températures d'exposition en continu supérieures à  $1\,000^{\circ}\text{C}$  ;
- Les fils à haute teneur en alumine ( $> 99\%$  en masse), caractérisés en particulier par une très bonne stabilité thermique en milieu oxydant et mécanique sous contraintes thermique ( $1\,600^{\circ}\text{C}$ ) ;
- Les fils silice/alumine, caractérisés par une bonne résistance thermique et mécanique (meilleure résistance thermomécanique que les fibres d'alumine) ;
- Les fils de carbure de silicium (SiC) qui constituent la famille de fibres possédant les meilleures performances mécaniques à haute température ( $\geq 1\,400^{\circ}\text{C}$ ), même en atmosphère oxydante.

Ce sont ces dernières qui vont être étudiées ici. Comme pour les fibres en carbone, les filaments sont produits à partir de précurseurs, ici des organo-silicones. Le carbure de silicium désiré se forme pendant une cuisson (réticulation) suivie d'un chauffage en atmosphère d'azote à environ  $1\,200^{\circ}\text{C}$ . D'un point de vue structurel, les fibres de SiC obtenues possèdent une structure isotrope à la différence des fibres de carbone, proches de la composition du graphite, constituées d'un empilement de feuillets nommés graphènes.

### Obtention des mèches

Les fibres obtenues peuvent subir des traitements ou des transformations afin de leur conférer de nouvelles propriétés. Dans notre cas, elles sont assemblées pour former des mèches, avec des traitements supplémentaires possibles :

- Le moulinage ou le retordage permet d'apporter une torsion aux fils continus pour, dans certains cas, améliorer leurs caractéristiques mécaniques et diminuer leur section et/ou assembler par torsion plusieurs fibres ;
- La texturation confère aux fils continus des propriétés de gonflant et d'élasticité modifiant ainsi l'aspect et le confort des étoffes ;
- Le guipage consiste à recouvrir un fil d'âme par enroulement hélicoïdal avec un ou plusieurs fils simples appelés fils de couverture. Si cette technique est utilisée principalement avec les fils élastiques dans le cas des applications traditionnelles (par exemple, bas et collant), elle permet également de protéger certains fils fragiles comme le carbone ou les fibres céramiques lors des opérations de transformation des fils en surfaces textiles (tissage, tressage...).

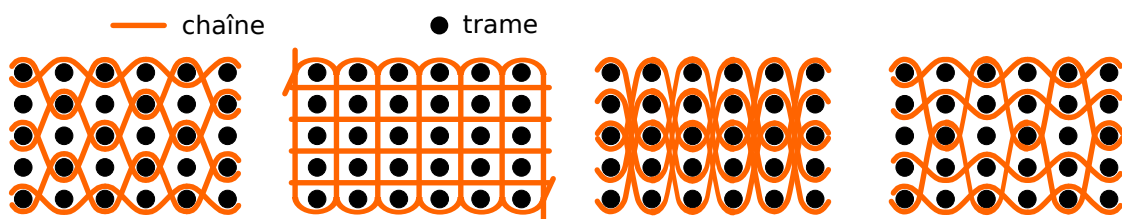
Une fois assemblées, les mèches de fibres de carbone contiennent généralement entre 3 000 et 48 000 fibres. Pour les mèches en céramique, le nombre de fibres est généralement plus faible avec environ 500 fibres par mèche, les applications ne nécessitant pas des mèches de taille importante. Les grandeurs caractéristiques généralement utilisées pour décrire une mèche sont les suivantes : matériau, type d'assemblage, nombre de fibres, diamètre des fibres, masse linéique (en *tex*,  $1\text{ tex} = 1\text{ g.km}^{-1}$ ), rigidité et résistance en tension. Des propriétés de mèches céramiques SiC (Nicalon 207) et de fibres de carbone (HexTow IM6) sont données tableau 1.1.

	Nicalon 207	HexTow IM6
Type	SiC	Carbone
Densité ( $T.m^{-3}$ )	2.5-2.65	1.76
Diamètre ( $\mu m$ )	14	5.2
Nombre de fibres par mèche	500	12 000
Module d'Young (GPa)	> 186	279
Coefficient de Poisson	0.12-0.25	-
Contrainte à rupture (GPa)	2.58	5.723
Déformation à rupture (%)	1.4	1.9

**Tableau 1.1** – Propriétés de mèches SiC et carbone

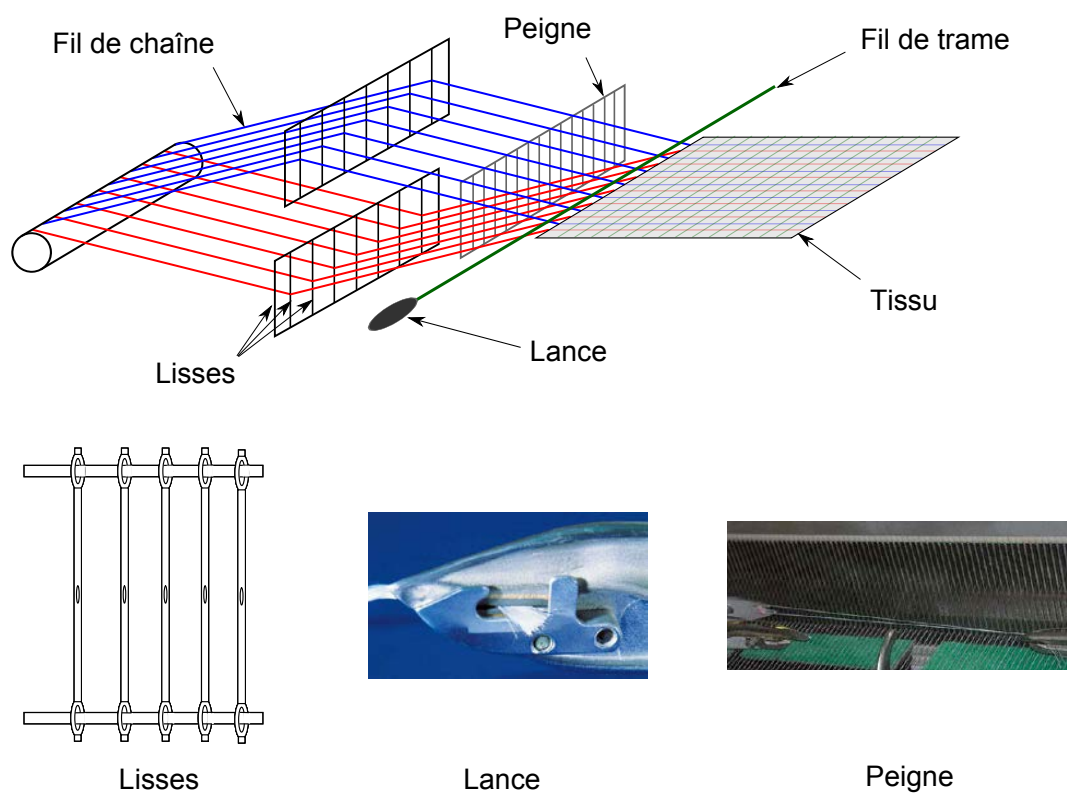
## 1.2.2 Le renfort

Les renforts étudiés dans ce manuscrit sont les assemblages de mèches de carbone ou de carbure de silicium obtenus par tissage. Les tissages peuvent être 2D (surfaciques), 2.5D (interlocks) ou 3D (tridimensionnels). Les premiers sont un entrecroisement de mèches selon deux directions perpendiculaires privilégiées, chaîne et trame. Le type d'agencement utilisé est appelé armure du renfort. Pour le cas 2D, les armures traditionnelles de l'industrie textile sont utilisées. Pour les tissages 3D, une troisième direction de mèche est ajoutée dans l'épaisseur du renfort. Finalement, les tissages nommés 2.5D se situent à la frontière entre tissés 2D et 3D. Des mèches de chaînes vont alors chercher dans les couches supérieures et inférieures une, ou plusieurs mèches de trame afin de lier ensemble les couches. Ces tissus sont souvent dérivés d'armure classiques 2D. Ce procédé permet d'obtenir des tissés très épais (de l'ordre d'une dizaine de centimètres) et résistants au délaminage. La figure 1.2 montre des schémas possibles pour le tissage des renforts épais.



**Figure 1.2** – Armures de renforts fibreux épais [GU 02]

Une armure tissée est obtenue à partir d'un métier à tisser, de la même manière que les textiles d'habillement. Le procédé de tissage nécessite un certain nombre d'étapes réalisées par des parties spécifiques du métier, illustrées figure 1.3 : l'ouverture de foule qui permet de séparer les mèches de chaîne en deux parties grâce aux lisses créant l'espace nécessaire à l'insertion d'une trame, l'insertion proprement dite de la trame, le coup de peigne permettant de tasser les trames puis la répétition de ces trois étapes jusqu'à complétion du renfort.



**Figure 1.3** – Schéma d'un métier à tisser et principaux outils du procédé [FLO 13]

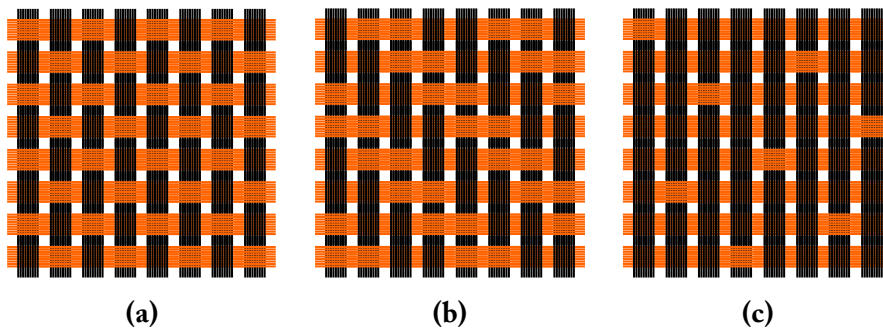


Seules les armures 2.5D seront étudiées dans ce manuscrit, mais il est intéressant de détailler les armures 2D qui sont à la base de ces armures plus complexes et peuvent aussi être utilisées pour obtenir des pièces épaisses de composite.

## Armures 2D

En ce qui concerne les tissus 2D, il existe trois armures principales (figure 1.4) :

- *La toile ou taffetas*, l'armure la plus simple : chaque fil de chaîne passe alternativement au-dessus et en dessous de chaque fil de trame (1.4a) ;
- *Le sergé* NxM : le fil de trame passe au-dessus de N puis en dessous de M fils de chaîne en décalant d'un fil à chaque passage (1.4b) ;
- *Le satin* : les points de liage de la chaîne et de la trame sont disséminés de façon à atténuer l'effet de diagonale présent sur le sergé. Le fil de trame passe au dessus de N fils de chaîne puis en dessous de 1. (1.4c).



**Figure 1.4** – Les différents motifs de tissage 2D. Taffetas (a) Sergé 2x2 (b) Satin de 8 (c)

La combinaison de ces trois familles d'armures avec la multiplicité de géométries et de matériaux disponibles pour la mèche, permet d'obtenir une grande diversité de renforts tissés. Si le renfort est identique dans la direction chaîne et dans la direction trame, on parle de tissu équilibré. De façon générale, un tissu peut être caractérisé par son armure, la disposition relative des chaînes et des trames, et son embuvage qui est la différence relative entre la longueur du tissu dans une direction et la longueur d'une mèche dans cette même direction. L'embuvage est donné par :

$$\text{embuvage} = \frac{l_{\text{mèche}} - l_{\text{tissu}}}{l_{\text{mèche}}} \quad (1.1)$$

Des pièces épaisses peuvent être réalisées grâce à ces armures 2D en les superposant. La structure ainsi obtenue permet d'optimiser la raideur du matériau fini en jouant sur l'orientation des plis, mais elle est définitivement laminaire au sens où les différents plis ne possèdent pas de liens autres que la résine. Ces matériaux sont alors très sensibles au délaminage qui, quand il apparaît, se propage sans obstacle et peut conduire à une ruine de la structure. De plus, l'empilement des différentes couches (de quelques millimètres d'épaisseur chacune), souvent réalisé à la main, conduit, pour des pièces de forte épaisseur, à des temps de fabrication prohibitifs.

### Armures 2.5D

Pour pallier les problèmes inhérents aux armures 2D, des renforts tissés épais ont été conçus [BIG 05]. Ces renforts peuvent être vus comme la superposition de différentes couches assemblées structurellement lors du tissage. Au lieu de s'entrecroiser continuellement dans le même plan, les mèches de trame croisent plusieurs plans de mèches de chaîne dans l'épaisseur du matériau (voir figure 1.5). Le tissé obtenu peut alors atteindre des épaisseurs de l'ordre de la dizaine de centimètres, permettant la fabrication de pièces aux qualités mécaniques comparables tout en évitant le phénomène de délaminage. Le métier à tisser nécessaire pour ces préformes utilise la mécanique Jacquard modifiée pour le cas des structures 3D de façon à contenir plusieurs couches de chaînes. Certains métiers à tisser aptes à créer de tels assemblages permettent également de faire varier le motif de tissage au sein de la même préforme de manière à optimiser les caractéristiques de la pièce en fonction des sollicitations subies. Ce type de matériau, onéreux, est pour l'instant réservé aux applications de pointe de l'aéronautique et de l'aérospatiale.

L'utilisation de tissés 2.5D permet aussi de minimiser les variations de propriétés mécaniques entre deux pièces composites achevées sensées être identiques, chose courante pour les stratifiés 2D où la méthode de travail de l'opérateur est prépondérante.

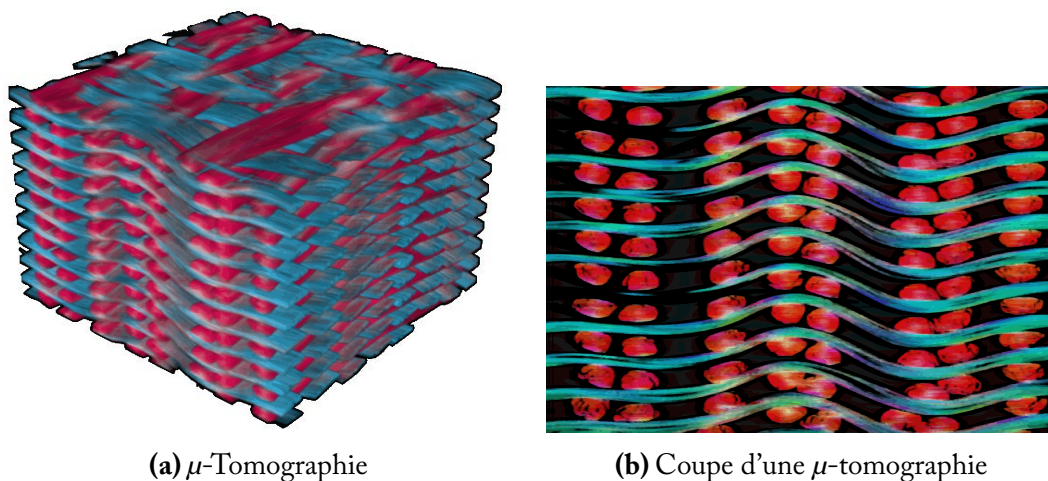


Figure 1.5 – Structure des tissés interlock

### 1.2.3 La solidification : consolidation des matrices organiques

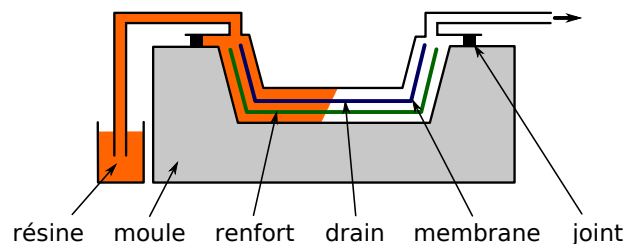
Les renforts tissés sur lesquels porte notre étude étant destinés à être mis en forme par moulage, nous nous intéresserons uniquement aux procédés de ce type. Les procédés de type LCM (Liquid Composite Moulding) permettent de mettre en forme les composites à renforts tissés et à matrice polymère. Parmi ces procédés, l'infusion sous vide et le RTM (Resin Transfer Moulding, [POT 99]) sont les plus utilisés. Le principe de ces procédés est de mouler le renfort sec, puis d'injecter la résine pour solidifier la pièce. Le fait de mouler le renfort sec permet d'obtenir une pièce composite finale très proche de la pièce

désirée, et ainsi de minimiser les étapes d'usinage et donc les coûts. Ces procédés, dits *procédés moule fermé*, permettent un contrôle strict des composés organiques volatiles émis lors de la fabrication, la résine n'étant alors pas en contact direct avec l'atmosphère.

De nombreux autres procédés de formage par moulage existent [BER 99, GAY 05]. Ils varient en fonction de la nature des matériaux constituant le renfort et la matrice, de l'importance des séries à effectuer, de la cadence et du coût de production recherchés

### L'infusion sous vide

En infusion sous vide, le renfort tissé sec à consolider est placé entre un moule et une membrane étanche, comme décrit figure 1.6. En mettant sous vide cette zone, la pompe va plaquer le renfort contre le moule grâce à la membrane et amorcer l'écoulement de la résine. Un filet de drainage, réalisé dans un matériau poreux, est placé à proximité du renfort de manière à faciliter la distribution de la résine. Ce procédé est plus facile à mettre en œuvre que le RTM, présenté dans le paragraphe suivant, et autorise la production de pièces en grande série avec une bonne répétabilité et des formes complexes. Cependant, le contrôle de l'épaisseur est difficile et l'état de surface du côté de la membrane est généralement moins bon que le côté moulé.



**Figure 1.6** – Illustration du processus d'infusion sous vide

### Resin transfer moulding

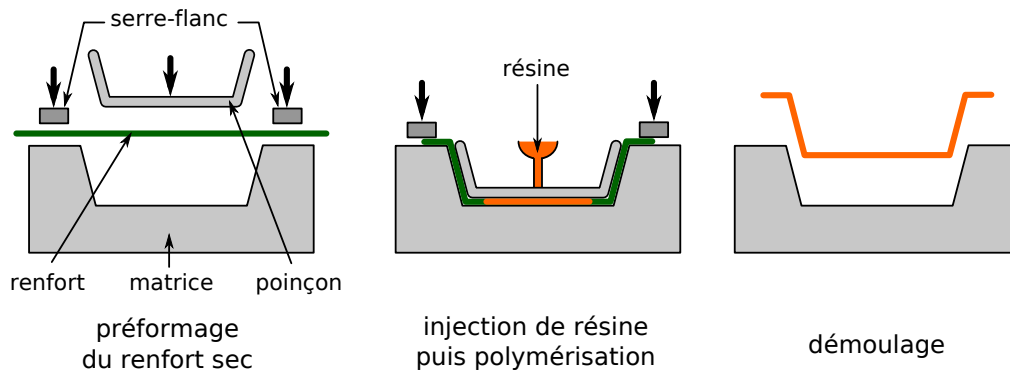
Le Resin Transfer Moulding (RTM) est, lui aussi, utilisé pour la réalisation de pièces en composite à renforts tissés [RUD 97, POT 99, PAR 00]. Le processus de fabrication peut être décomposé en trois étapes, comme illustré figure 1.7.

La première étape est l'étape de préformage. Elle consiste, à partir d'un renfort tissé, à le mettre en forme (ou l'emboutir) dans un moule par l'intermédiaire d'un poinçon. L'avantage de ce procédé est de disposer de deux parties rigides qui vont permettre de mieux contrôler la compression du renfort pendant la mise en forme et donc son épaisseur finale. L'état de surface est alors bon des deux côtés, contrairement à l'infusion sous vide. Afin d'éviter la formation de plis pendant l'emboutissage, des serre-flancs peuvent être utilisés pour ajouter une légère tension dans les mèches.

Une fois le renfort moulé dans la forme désirée, la résine est injectée. L'ensemble est ensuite chauffé pour polymériser la résine. Pour rappel, on considère dans cette étude

## 1. Fabrication et comportement des composites à renforts tissés

l'utilisation d'une matrice thermdurcissable. Finalement, lorsque la résine est consolidée, le moule est ouvert et la pièce démoulée.



**Figure 1.7** – Illustration du processus RTM [BOI 04]

Ce procédé connaît un fort développement dans l'objectif d'être utilisé pour des pièces en grande série car il permet une maîtrise du taux volumique de fibre, un bon état de surface, la création de géométries complexes et des cadences de fabrication soutenues et automatisées. Cependant, malgré son utilisation dans l'industrie, ce procédé n'est pas totalement contrôlé pour des formes complexes (non développables par exemple) ou de grandes tailles. Ces éléments conduisent aujourd'hui les industriels des secteurs aérospatiaux et automobiles à porter un grand intérêt au développement et à la recherche associés au procédé.

Des problèmes majeurs et de natures différentes sont liés aux deux principales étapes du processus : des problèmes mécaniques pendant la phase de mise en forme et des problèmes de fluide pendant la phase d'infiltration. Ces travaux s'intéressent uniquement aux problèmes d'origine mécanique mais de nombreuses études liées à la perméabilité des renforts et à la résistance à l'avancement du fluide injecté sont menées [VAR 95, BRÉ 03]. La mise en forme du renfort est une étape clé du procédé. La capacité du renfort à se déformer pour prendre la forme du moule a une influence majeure à la fois sur l'étape d'injection (qualité de l'imprégnation, temps de remplissage du moule) et sur les caractéristiques mécaniques de la pièce. Pendant la mise en forme, les événements préjudiciables pouvant être rencontrés sont :

- Des ruptures de fibres, lorsque la tension dans les mèches devient trop importante ;
- La formation de flambements locaux lorsque les mèches sont sollicitées en compression ;
- L'apparition de plis qui peuvent être générés par un cisaillement ou une compression trop importante [PRO 97, BOI 11] ;
- La création de zones sèches ou de zones sans mèches engendrées par un taux volumique de fibres trop important ou trop faible localement, générant une perte de cohésion ou une baisse des propriétés mécaniques.

Avec l'étude de la perméabilité, celle du préformage est indispensable pour vérifier la faisabilité d'un processus de fabrication d'une pièce par RTM. Les qualités mécaniques fi-

nales sont intimement liées à cette étape. C'est dans ce cadre que se situe l'étude présentée dans ce manuscrit.

#### 1.2.4 La solidification : consolidation des matrices céramiques

Les composites à matrices céramiques renforcées par des fibres longues sont communément fabriqués par des méthodes d'infiltration. Cela signifie que la matrice céramique est formée par l'infiltration d'un fluide (qu'il soit liquide, comme pour les procédés à matrices organiques section 1.2.3, ou gazeux) dans la structure fibreuse, ici un renfort tissé. Avant cette phase d'infiltration, la surface de la partie fibreuse est recouverte d'une interface fournissant une faible cohésion entre les fibres et la future matrice. Cette interface permet aux mèches de glisser dans la matrice afin d'éviter la rupture fragile de la pièce entière à laquelle sont prédisposés les matériaux céramiques par leur faible ductilité.

La matrice céramique injectée peut être de différentes natures : en carbure de silicium, en oxyde d'aluminium (oxyde d'aluminium-dioxyde de silicium) ou en carbone. Le matériau à matrice céramique étudié est un composite SiC/SiC (renfort et matrice en carbure de silicium) tissé 2.5D (Cerasep<sup>®</sup> A40C [BOU 04]), élaboré par Herakles (groupe SA-FRAN). Nous nous intéresserons donc uniquement aux méthodes de fabrication associée aux matrices céramiques SiC : la Chemical Vapor Infiltration (CVI) et les méthodes de type Liquid Phase Infiltration (LPI). Ce matériau utilise une gamme de fabrication particulière associant une phase de Polymer Infiltration and Pyrolysis (PIP), qui est un type de LPI, suivi d'une phase de CVI. En résumé, ces renforts sont donc imprégnés par un polymère à précurseur céramique, pyrolysés puis densifiés par un dépôt par voie gazeuse. Ces techniques sont décrites plus en détails dans les paragraphes suivants.

##### Polymer Infiltration and Pyrolysis

La Polymer Infiltration and Pyrolysis (PIP) est une méthode de fabrication des composites à matrice céramique consistant en l'infiltration d'un polymère faiblement visqueux dans la structure fibreuse suivie d'une pyrolyse (le chauffage du polymère en l'absence d'oxygène afin qu'il se décompose et soit converti en céramique). Les polymères utilisés pour ce type de processus, dits précurseurs céramiques, sont spécialement conçus afin de se dégrader en céramique pendant leur pyrolyse. Le procédé PIP est principalement utilisé pour la fabrication de composites avec des matrices en carbure de silicium à partir de polycarbosilanes (précurseur céramique obtenu à partir de silicium). Le rendement en SiC de ces précurseurs est environ 65%. L'utilisation de polymères précéramiques afin de produire du carbure de silicium est connue depuis un certain temps [BOU 91], la pyrolyse du polycarbosilane étant notamment bien documentée [HAS 83].

La réalisation du procédé PIP se décompose en plusieurs phases. La pièce composite infiltrée par un polymère précurseur de céramique est tout d'abord réalisée classiquement tel que décrit à la section 1.2.3. Le renfort fibreux est mis en forme, injecté avec le polymère, puis chauffé de manière à provoquer sa réticulation. Un procédé RTM identique aux matrices organiques classiques peut être utilisé. Jusqu'à cette étape, la pièce ressemble

en tout point à ce qui serait obtenu avec un polymère classique. Puis vient l'utilisation de la pyrolyse. La décomposition pyrolytique du polymère est réalisée sous atmosphère neutre d'argon à une température dans la gamme de 800-1 300°C. Les produits volatiles tels que le monoxyde carbone, le dihydrogène, le dioxyde carbone, le méthylène et l'eau sont libérés, laissant un résultat de pyrolyse fortement poreux. Ce reste forme alors une matrice céramique. Le rendement associé à la réaction provoquée par la pyrolyse est déterminé par la perte de masse (quantité de composés libérés). Le cycle infiltration-pyrolyse peut ensuite être renouvelé autant de fois que nécessaire (de 4 à 10 fois) jusqu'à obtenir une porosité matricielle satisfaisante. Cependant, une porosité résiduelle minimale ne pourra être dépassée, quelque soit le nombre de cycles réalisés.

La fabrication par voie de pyrolyse dispose d'avantages importants par rapport à d'autres techniques conventionnelles : elle demande des températures plus basses, les précurseurs existent sous différents états avant d'être pyrolysés (solides, films, fibres) et peuvent être réalisés spécifiquement de manière à remplir les besoins de l'application à laquelle est destinée le composite final [RIC 83]. Elle présente cependant des inconvénients : les temps de production sont longs dus aux multiples cycles nécessaires et les coûts de production sont relativement élevés, destinant ces matériaux à des applications hautement technologiques et actuellement quasi-uniquement militaires et spatiales. Pour pallier les problèmes de temps de production et de contrôle de la porosité, la fabrication du matériau Cerasep<sup>®</sup> A40C associe une densification par CVI à une première phase de PIP.

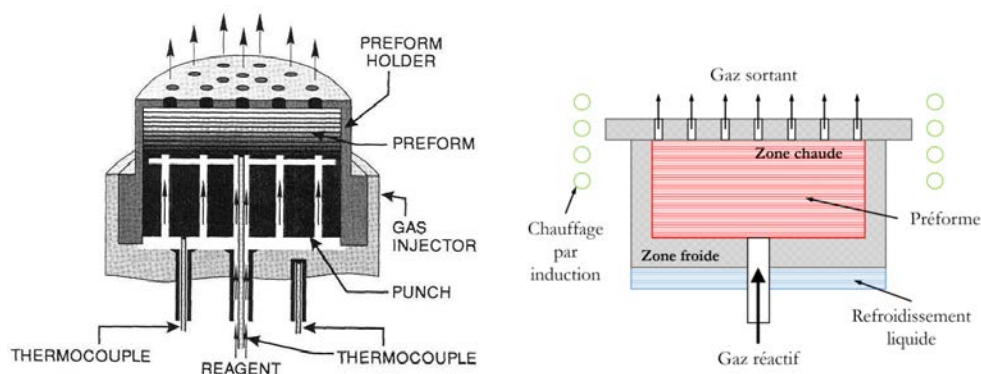
### **Chemical Vapor Infiltration**

L'infiltration par voie gazeuse (CVI) est un procédé au cours duquel des gaz réactifs sont diffusés dans une préforme poreuse, ici un tissu fait de fibres longues continues, afin que le résultat de leurs décompositions se déposent sur celle-ci. Le matériau déposé est le résultat de la réaction chimique se produisant à la surface des fibres. La CVI implique le passage de plusieurs flux de précurseurs gazeux adéquats à travers une pièce poreuse, tout en gardant cette pièce à une température adaptée à la décomposition du gaz. L'infiltration du gaz précurseur dans le renfort est dirigée par diffusion ou grâce à l'imposition d'une température ou d'une pression. La déposition du gaz vient remplir les espaces entre les fibres, formant la matrice du composite final. Sous des conditions favorables, le gaz se décompose sous la forme désirée dans les pores de la microstructure, augmentant sa densité. Une fois l'objectif de densité atteint, le composite dispose des propriétés mécaniques voulues. Lors d'une CVI, la densité d'un corps poreux peut être multipliée par un facteur de 2 à 10. Le matériau déposé par cette voie représente alors une part significative de la masse totale du produit final. Le temps nécessaire à la réussite de la CVI est ainsi fortement dépendant de la quantité de matière à ajouter. Afin de déposer un revêtement sur la surface d'un pore situé au cœur de la préforme, une phase de diffusion interne au matériau poreux doit intervenir pour diriger le matériel réactif vers l'intérieur de la préforme. Cette diffusion peut être provoquée par un gradient de concentration, de pression ou de température.



De nombreuses méthodes de CVI existent, chacune ayant atteint un stade différent de maturité technologique et industrielle [DEL 02]. Pour cette raison, de nombreuses données ne sont ni publiées ni disponibles, car soit non protégées par brevet et hautement sensibles, soit non optimales. Parmi les méthodes les plus courantes, on peut citer de manière non exhaustive :

- L'*Isothermal/Isobaric CVI* (I-CVI) qui est la méthode la plus commune, où la température et la pression sont gardées uniformes ;
- La *Temperature Gradient CVI* (TG-CVI) où un gradient de température est imposé à la préforme afin de favoriser la décomposition du gaz dans la partie à cœur, chaude, plutôt que dans les parties externes, plus froides ;
- L'*Isothermal-Forced Flow CVI* (IF-CVI) où un gradient de pression est imposé afin de forcer le gaz à pénétrer à l'intérieur de la préforme. Un schéma de fonctionnement est présenté figure 1.8a ;
- La *Thermal Gradient-Forced Flow CVI* (F-CVI) qui combine les avantages des gradients de température et de pression. Un schéma de fonctionnement est présenté figure 1.8b ;
- La *Pulsed Flow CVI* (P-CVI), identique à la F-CVI mais avec la pression du gaz réactif environnant qui change rapidement, suivant des cycles de remplissage et vidage du réacteur.



(a) Schéma d'un procédé IF-CVI à pression imposée [LEW 97]

(b) Schéma d'un procédé F-CVI. Chauffage dans la zone haute et différence de pression entre entrée et sortie

**Figure 1.8** – Schémas de procédés CVI

Parmi ces différentes techniques de CVI, les principaux facteurs influents sont [GOL 97] :

- La méthode de chauffage, par induction ou radiation ;
- L'utilisation ou non d'un gradient de température ;
- La gamme de pression utilisée, atmosphérique ou pression faible, et l'utilisation ou non d'un gradient de pression, possiblement pulsé ;
- Le type de réacteur utilisé, à mur chaud ou froid ;

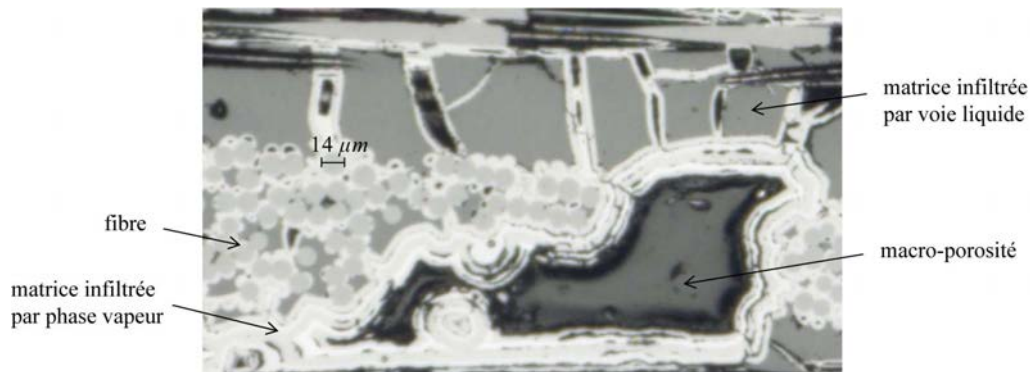
- La méthode d'extraction de la chaleur de la préforme (radiation, convection ou conduction);
- L'utilisation de plasma;
- L'immersion dans un liquide.

La CVI a plusieurs avantages, comparativement à d'autres méthodes de densification, comme la PIP. Elle autorise le dépôt de molécules dans les plus petits pores de la préforme, ne requiert pas de traitement postdensification et produit des revêtements uniformes sur l'ensemble des surfaces accessibles. Le procédé CVI donne des produits proches du résultat final au niveau forme, minimise les dommages faits aux fibres grâce à l'utilisation de température et de pression plus faibles que les techniques conventionnelles, produit une matrice plus pure et permet un contrôle de la composition des réactifs introduits plus précis. De plus les rétrécissements et microfissures inhérents à la pyrolyse de la phase PIP sont absents en CVI. Les méthodes CVI, comme les autres méthodes de densification, laissent une certaine quantité de porosité, inhérente aux composites à matrice céramique.

### **Le Cerasep A40C**

La fabrication du Cerasep<sup>®</sup> A40C suit une méthode mixte constituée d'une phase de pyrolyse après polymérisation suivie d'une densification par CVI. Grâce à l'élaboration par voie mixte (gazeuse et liquide), les porosités créées par le retrait de la matrice infiltrée par voie liquide lors de la pyrolyse sont remplies en grande partie par le dépôt de matrice par voie gazeuse. La matrice SiC déposée par infiltration chimique en phase vapeur (CVI), est également appelée matrice multi-séquencée [CHR 05]. Elle correspond à une alternance de couches de déviateur (pyrocarbone) et de couches de phases céramiques (SiC et [Si-B-C]). La matrice infiltrée par voie liquide (CVL) est présente au sein du matériau sous forme de blocs. Ces deux types de matrice (figure 1.9) jouent un rôle dans la déviation des fissures et la protection du matériau contre l'oxydation [LAM 97]. Cette matrice est dite Matrice Auto-Cicatrisante (MAC) : en température, lors de l'apparition d'une fissure, la formation d'un verre ralentit l'accès de l'oxygène aux fibres. Après élaboration, le matériau présente une porosité résiduelle globale de 10 % à 15 %. Cette porosité, inhérente au mode d'élaboration, se traduit alors à l'échelle du matériau par la présence de macropores représentant environ 9% de porosité et à l'échelle de la mèche, par la présence de micropores représentant environ 6% de porosité.



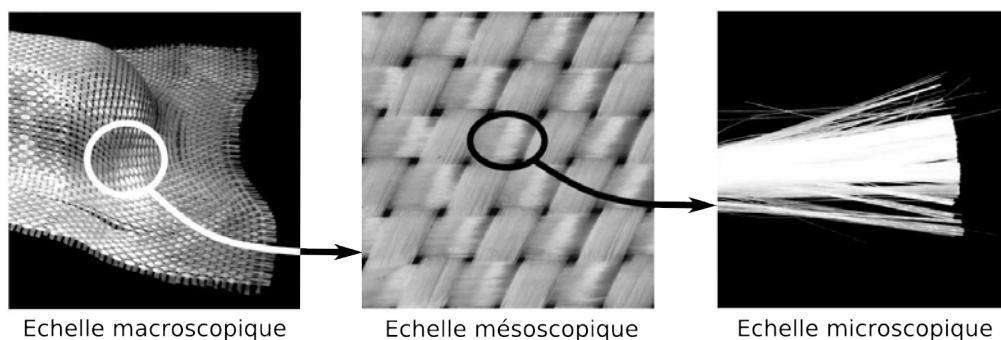


**Figure 1.9** – Matrice inter-fils en bord de porosité : en blanc la matrice infiltrée par phase vapeur (CVI), en gris foncé la matrice infiltrée par voie liquide (CVL) [GRI 13]

### 1.3 Comportement mécanique des renforts tissés

Comme détaillée dans la section 1.2, les renforts tissés de matériaux composites sont constitués d'une succession de sous-assemblage faisant du résultat final un matériau fondamentalement multiéchelle. Le comportement mécanique global du tissu est hérité du comportement de ses constituants et de leurs interactions à des échelles inférieures. Trois échelles d'observation sont alors distinguées :

- L'échelle *microscopique* = l'échelle de la fibre ;
- L'échelle *mésoscopique* = l'échelle de la mèche ;
- L'échelle *macroscopique* = l'échelle du renfort tissé.



**Figure 1.10** – Les différentes échelles d'un renfort tissé

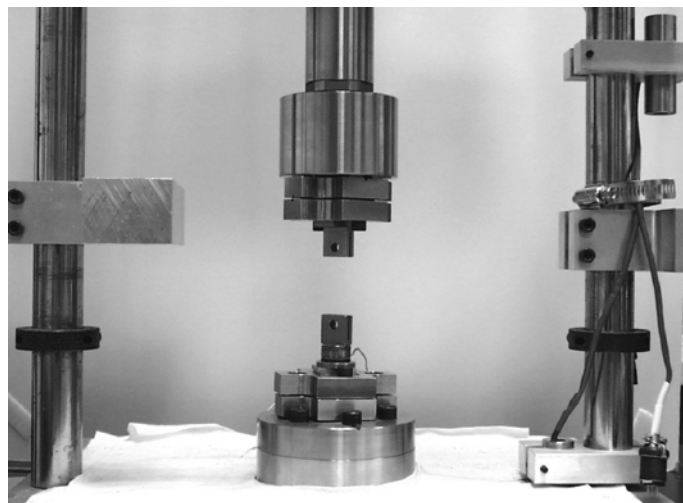
Chaque échelle comporte des problématiques de comportement mécanique, d'interaction et des défauts spécifiques. Le but de ce travail étant de modéliser le comportement des renforts secs de composite, il est important de connaître le comportement associé à chaque échelle de modélisation possible. Cette section a donc pour but de décrire les mécanismes connus qui régissent le comportement à chaque échelle afin de pouvoir appréhender le matériau dans son ensemble et comprendre les hypothèses nécessaires à la modélisation. Les moyens de caractérisation expérimentaux associés à chaque mécanisme

relevé aux différentes échelles seront présentés.

### 1.3.1 Échelle microscopique : la fibre

A l'échelle microscopique, le comportement d'une fibre est étudié. Les fibres sont les plus petits constituants des renforts tissés. Le comportement de la fibre est donc simplement le comportement du matériau qui la constitue (carbone ou SiC dans notre cas). La difficulté dans la caractérisation mécanique des fibres destinées à réaliser des mèches de renforts tissés provient de leur faible taille, de l'ordre du micromètre.

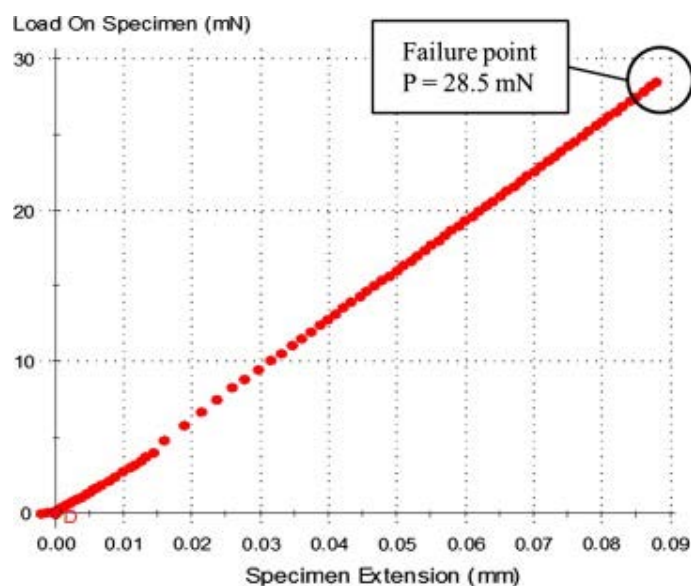
Pour l'obtention des propriétés mécaniques des fibres, un test réalisé sur une unique fibre est généralement pratiqué [HUG 86]. Cependant, une mesure précise de la déformation et du diamètre initial est un véritable challenge, tout comme maintenir une fibre unique dans les moyens de préhension du dispositif expérimental. Généralement, les spécimens sont collés à un papier ou un plastique avant d'être introduit dans le moyen d'essai afin de réduire les concentrations de contraintes en bout de fibre, tels que dans les standards ASTM [AST 14] (voir figure 1.11) et ISO [ISO 96]. Ces dispositifs sont utilisables pour différents types de fibres, qu'elles soient en carbone ou en céramique.



**Figure 1.11** – Dispositif de test en tension d'une fibre [AST 14]

Pour les fibres en carbone, un comportement non linéaire est observé où la rigidité tangente de la fibre augmente légèrement au fur et à mesure de l'augmentation de la force appliquée jusqu'à rupture [CUR 68, BEE 83, HUG 86, SHI 96]. Une courbe de traction est donnée figure 1.12 pour illustration. Cette non-linéarité est assez faible, menant souvent à l'utilisation de modèles linéaire en simulation. Elle provient d'une réorientation réversible des plans carbonés (proches du graphène) constituant la fibre. Ces plans s'alignent avec la ligne moyenne de la fibre avec l'augmentation de l'effort appliqué dans le domaine élastique.

Les fibres en céramique ont une structure 3D du point de vue atomique, contrairement aux fibres de carbone qui sont plutôt un empilement de structures 2D faiblement liées. Le



**Figure 1.12** – Courbe effort-déplacement pour un essai de traction sur une fibre en carbone T700 [KAN 13]

comportement des fibres céramiques est généralement admis comme linéaire, les études portant sur ces matériaux étant plutôt axées sur des problématiques de fluage, d'influence de la température et des traitements chimiques subis.

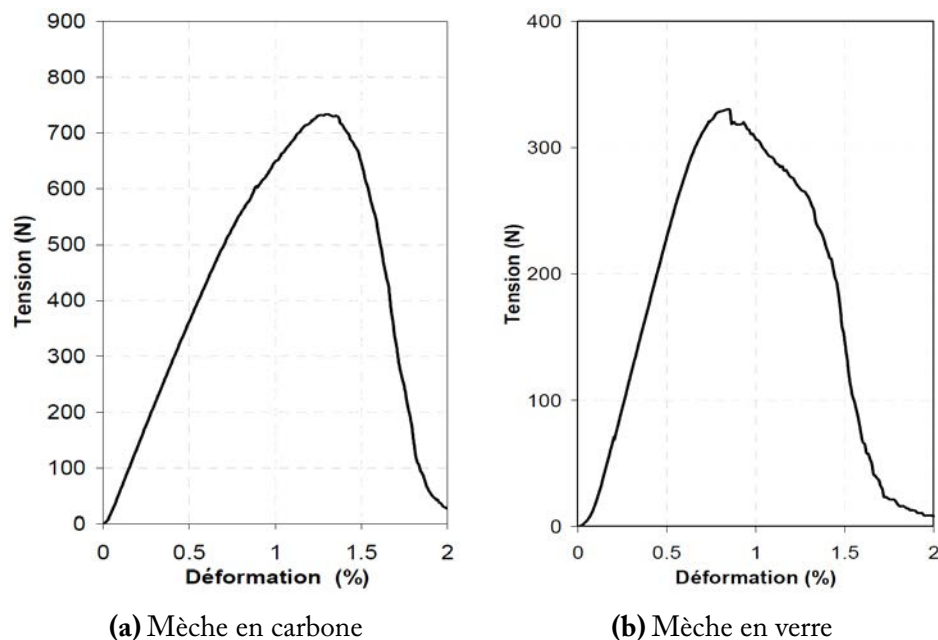
### 1.3.2 Échelle mésoscopique : la mèche

A l'échelle mésoscopique, on s'intéresse uniquement au comportement de la mèche. Ce sont alors le comportement mécanique des fibres et les interactions qu'elles subissent qui vont définir le comportement global de la mèche. Le seul moyen efficace à l'heure actuelle pour observer ces phénomènes microscopiques est la microtomographie X. Cette technique est prometteuse pour la compréhension fine des mouvements à cœur de mèches et constitue une problématique répandue de recherche [DES 05, BAD 08a, LAT 11, NAO 14]. Cette méthode possède l'avantage supplémentaire d'être non intrusive ni destructive et peut être utilisée parallèlement à des expérimentations mécaniques. Les phénomènes associés à la sollicitation des mèches sont identifiables à l'aide de considérations physiques et d'expérimentations simples.

#### 1.3.2.1 Comportement longitudinal des mèches

Comme vu section 1.2.1, les mèches sont constituées d'un grand nombre de fibres. Lorsqu'une mèche est mise sous tension, toutes ces fibres ne se tendent pas simultanément, mais l'une après l'autre. La tension progressive des fibres provoque une non-linéarité du comportement de la mèche en début de sollicitation. Ce phénomène est fortement dépendant de la constitution de la mèche et de son mode de fabrication. Une mèche fortement tournée se comportera, par exemple, de manière faiblement non linéaire. On peut

constater que la partie non linéaire est plus prononcée pour le cas du verre, comme illustré figure 1.13.



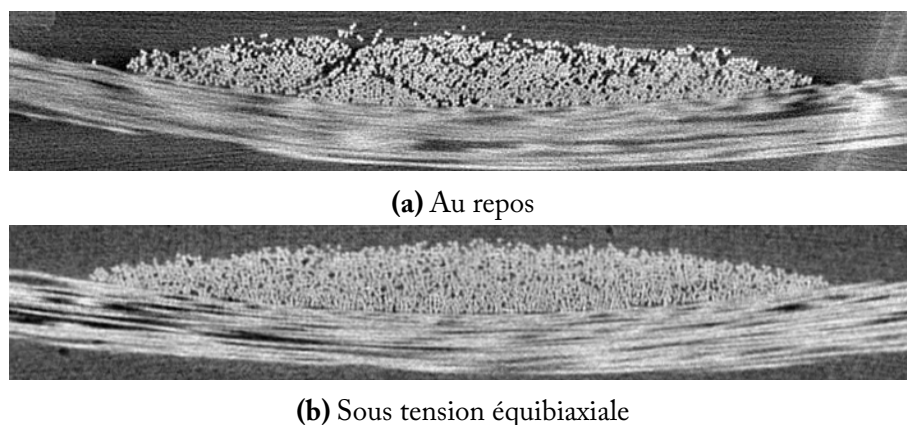
**Figure 1.13** – Comportement en tension de mèches [DUM 03]

Pour la quantification de la rigidité, l'utilisation de la notion de contrainte n'est pas adaptée aux mèches. Si l'on considère deux sections différentes de mèches possédant le même nombre de fibres, l'une avec peu d'espace entre les mèches et l'autre avec un espace plus large entre les mèches, alors pour une déformation identique, l'effort à fournir est identique. Le comportement étant basé, en simplifiant, sur le nombre de fibres et la rigidité de ces fibres, considérer une surface n'est pas cohérent. Il est plus logique de caractériser le comportement en tension par une rigidité en  $N$ , rapport de l'effort sur la déformation, plutôt que par un module.

Pour le comportement en compression, si l'on suppose la mèche seule et non pas incluse dans un système plus large tel qu'un tissé, il est difficile de considérer une rigidité en compression longitudinale. La rigidité en compression des fibres, de l'ordre de celle en traction, en conjonction avec leur faible rigidité en flexion va provoquer un flambement immédiat de la mèche.

### 1.3.2.2 Compression transverse des mèches

Le comportement en compression transverse des mèches est associé à un changement d'aire dans le plan transverse, c'est-à-dire dans le plan perpendiculaire à la direction des fibres. Lorsque la mèche est comprimée, les fibres se rapprochent les unes des autres et comblent le vide. La figure 1.14 montre cette variation de section lors de la sollicitation d'un tissé 2D en tension équi-biaxiale.



**Figure 1.14** – Vue en coupe (par microtomographie) d’une mèche en compression [BAD 08b]

Le mécanisme de compression d’une mèche peut être découpé en deux grandes étapes. Dans un premier temps, les fibres se réorganisent de manière à combler les espaces vides. On voit généralement pendant cette phase l’apparition de flexions de fibres qui vont apporter un caractère élastique à la sollicitation. Cette réorganisation va se stopper progressivement quand aucun espace libre ne peut plus être rempli par des fibres. Une situation de blocage se présente alors où la rigidité de compression de la mèche va tendre vers la rigidité de compression du matériau constituant les fibres. Ce comportement est difficile à identifier expérimentalement. Dans les études réalisées sur le comportement mésoscopique des tissés, le comportement en compression transverse est généralement identifié par une méthode inverse à partir d’un essai macroscopique [GAS 00, HAG 04, BAD 08a, POT 08, CHA 11b].

Directement liée à la compression des mèches, la densité de fibres au sein de la mèche a une influence considérable sur la perméabilité locale, et donc sur la qualité de l’injection de résine réalisée subséquentement à la mise en forme du renfort tissé. La qualité de la modélisation de ce comportement impacte directement les études de perméabilité qui pourraient ensuivre.

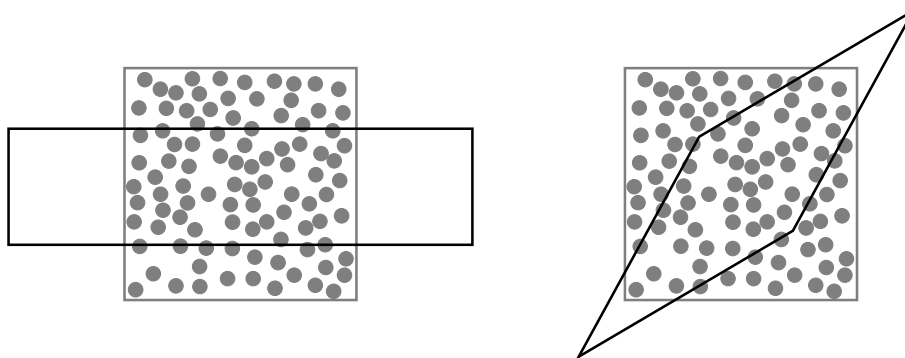
### 1.3.2.3 Cisaillement des mèches

Deux modes de déformation en cisaillement peuvent être identifiés pour une mèche. Un mode de distorsion qui correspond à un cisaillement dans le plan transverse de la mèche et un mode en cisaillement transverse qui a lieu dans la direction principale des fibres. L’identification directe de ces modes, de même que pour la compression transverse, apparaît difficile.

#### Distorsion des mèches

La distorsion désigne le changement de forme de la mèche dans le plan perpendiculaire à la direction principale des fibres, sans intervention de la compression transverse.

Cette sollicitation est illustrée figure 1.15. Lors de celle-ci, les fibres viennent glisser les unes contre les autres afin de s'arranger dans une forme adaptée à la déformation subie. Il est évident que la déformation en distorsion est facilitée si aucune compression n'est présente. Au contraire, si la mèche est comprimée, les fibres vont disposer de moins d'espace et vont subir plus de frottement lors de leur réarrangement. Il existe alors un couplage entre distorsion et compression transverse, là aussi difficile à identifier directement. Une légère flexion des fibres, comme pour la compression transverse, peut aussi intervenir pendant la sollicitation.



**Figure 1.15** – Distorsion d'une mèche

### Cisaillement transverse des mèches

Le cisaillement transverse désigne le glissement longitudinal des mèches les unes contre les autres. La figure 1.16 illustre cette transformation. Ce glissement n'est contraint, idéalement, que par le frottement existant entre les mèches. En réalité, l'ensimage et le tournage des mèches rigidifient ce mode de déformation. C'est donc la cohésion des fibres dans la mèche que l'on va ainsi quantifier. Comme précédemment, on peut supposer que le cisaillement transverse est rigidifié par la présence de compression transverse.



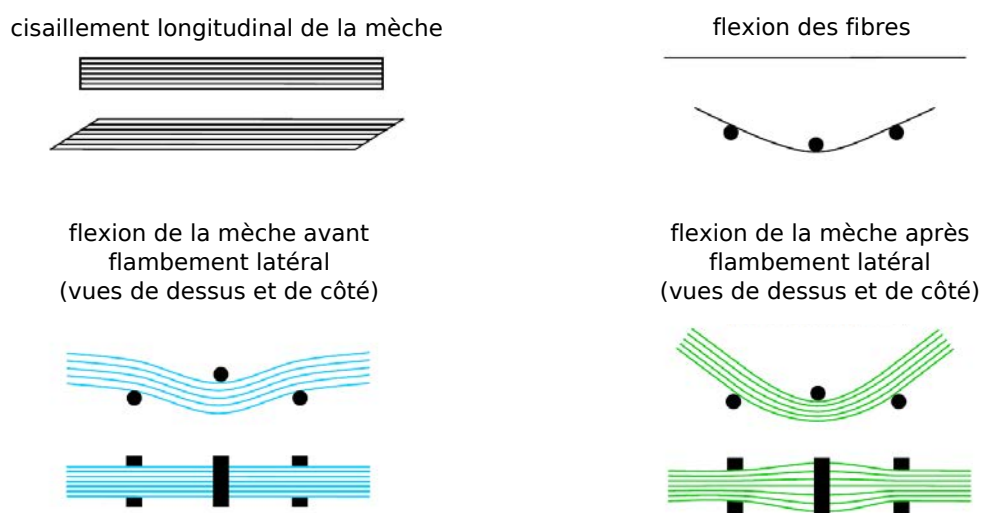
**Figure 1.16** – Cisaillement transverse d'une mèche

#### 1.3.2.4 Comportement en flexion des mèches

Bien que le comportement en flexion des mèches soit encore peu connu, il est important de le caractériser, notamment lorsque l'on désire modéliser la réponse en flexion d'un

renfort entier ou celle d'une mèche lors de simulation du procédé de tissage. Ce comportement est d'ailleurs très intéressant du point de vue des milieux continus car directement lié à la courbure du matériau, variable non influente dans les théories classiques (liées à la première dérivée du déplacement). Quelques phénomènes liés aux sollicitations en flexion sont détaillés ici. En observant un cas simple de chargement en flexion tel que la flexion trois points, trois phénomènes sont susceptibles d'intervenir (figure 1.17) :

- Un cisaillement transverse de la mèche, lié à l'inextensibilité des fibres (forte rigidité longitudinale) comparativement à sa faible résistance au cisaillement ;
- La flexion des fibres de la mèche, directement liée à la sollicitation impliquant une variation de leurs courbures ;
- Un flambement latéral des fibres au niveau de l'appui central. Ce phénomène est directement impacté par les traitements de cohésion subis par la mèche tels que l'ensimage, le tournage ou le guipage. Si la cohésion est trop importante, ce mode ne sera que très faiblement visible.



**Figure 1.17** – Mécanismes intervenant dans la flexion d'une mèche [CHA 11b]

Le comportement des mèches en flexion est donc piloté à la fois par le mode de cisaillement transverse et le comportement en flexion des fibres, c'est-à-dire leur résistance à un changement local de courbure. Cette influence de la courbure locale des fibres sur le comportement global des mèches permet d'affirmer que celle-ci ne répond pas aux hypothèses de milieu continu associé au premier gradient de la transformation : la dépendance aux rotations locales en fait un milieu micropolaire [COS 09, MIN 65]. Des dispositifs de caractérisation de la rigidité de flexion existent mais ont été développés initialement pour la caractérisation du comportement en flexion des tissés. Ils seront donc détaillés section 1.3.3.8.



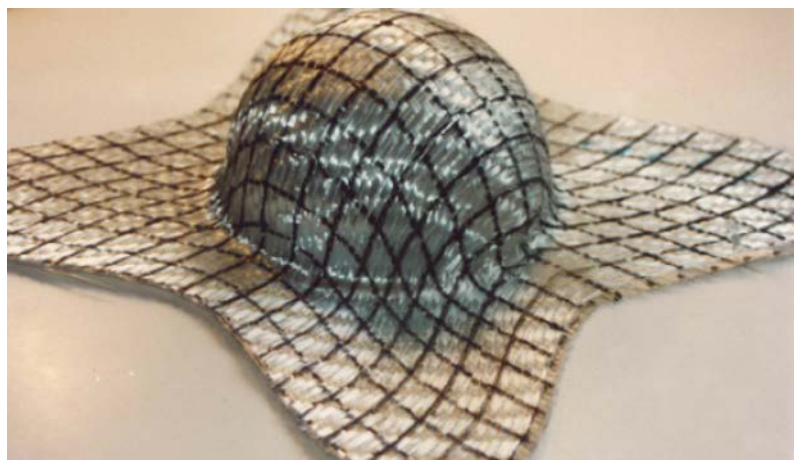
### 1.3.3 Échelle macroscopique : le renfort

A cette échelle, le renfort est considéré dans son ensemble. Étant un assemblage de mèches entremêlées, les renforts tissés héritent de l'ensemble des propriétés associées aux mèches, une échelle en dessous, mais pas uniquement. Des caractéristiques spécifiques à leur structure, et notamment à leur armure, apparaissent : le non-glissement entre mèches de chaîne et de trame, les variations d'embuvage, le blocage en cisaillement plan et la rigidification en cisaillement transverse. Des essais spécifiques à l'interprétation et la compréhension de ces modes sont nécessaires. Ils seront développés en détail ici et utilisés section 2.2 pour les identifications de la loi de comportement proposée.

#### 1.3.3.1 Non-glissement entre chaîne et trame

Avant d'analyser les résultats d'essai sur des renforts tissés, il est nécessaire de parler de l'hypothèse de non-glissement relatif entre réseaux de chaîne et de trame. Cette hypothèse est classiquement utilisée pour l'étude et la simulation macroscopique des milieux fibreux tissés. Selon cette hypothèse, des interactions fortes existent entre les réseaux constituant le tissu de manière à ce que tout mouvement d'un réseau entraîne le mouvement de l'autre sans glissement relatif. Elle permet de considérer le matériau analysé comme un milieu continu. Si des mouvements relatifs apparaissent, une modélisation par la théorie des milieux continus n'est plus possible.

Afin de valider cette hypothèse, une étude a été mise en place, basée sur l'emboutissage avec un poinçon hémisphérique. Cet essai consiste à venir emboutir à vitesse réduite une plaque de renfort tissé afin de lui donner une forme de type hémisphérique. Avant l'emboutissage, des traits sont tracés dans les directions chaînes et trames à intervalles réguliers. Une fois l'expérience réalisée, un croisement des lignes aux mêmes points que dans l'état initial indique qu'il n'y a pas eu glissement relatif entre les mèches [BOI 95]. La figure 1.18 montre ce résultat.



**Figure 1.18** – Validation de l'hypothèse de non-glissement relatif des mèches

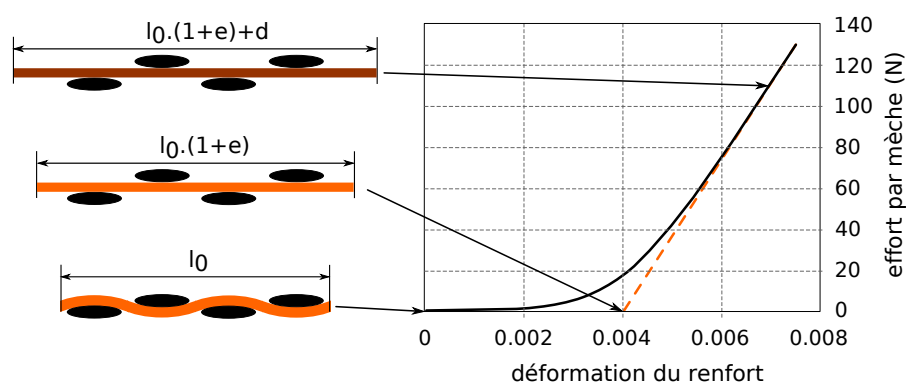


L'hypothèse de non-glissement relatif, qui sera considérée dans le reste de ce manuscrit, est donc vérifiée dans la plupart des cas de mise en forme mais peut être mise à l'épreuve pour des chargements complexes et pour certains tissus, tels que les NCF. Les renforts tissés utilisés dans cette étude sont a priori compatibles.

### 1.3.3.2 Comportement en tension uniaxiale

La sollicitation d'un tissé en traction uniaxiale voit l'apparition successive de deux phénomènes induits par l'armure étudiée, comme représenté figure 1.19 :

- La disparition progressive de l'embuvage dans la direction de sollicitation par la forte augmentation de la tension de la mèche. L'embuvage augmente alors fortement dans la direction orthogonale à celle de traction au fur et à mesure que les mèches dans la direction sollicitée deviennent droites ;
- L'élongation des mèches en tension une fois l'embuvage totalement supprimé.



**Figure 1.19** – Courbe expérimentale de traction uniaxiale sur taffetas de verre [BUE 98]

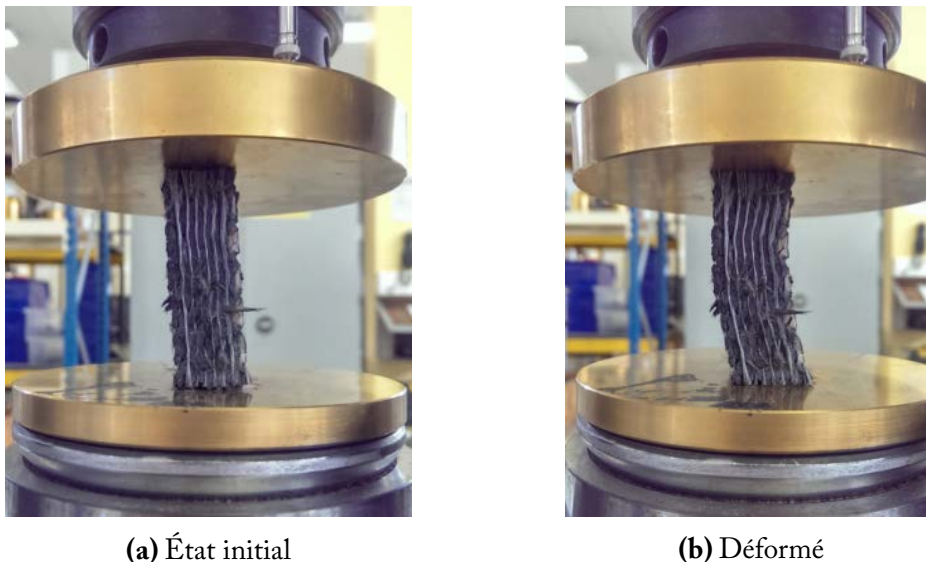
De ces deux mécanismes résulte une forte non-linéarité du comportement en tension pour les premiers pourcentages de déformation : la rigidité est faible au début de l'essai car l'effort doit simplement réaligner les mèches puis la rigidité devient très importante, valant la somme des rigidités des mèches en tension.

La disparition quasi totale de l'embuvage dans la direction sollicitée entraîne une forte augmentation de ce même embuvage dans la direction orthogonale. On assiste alors à un phénomène d'avalement où la longueur réelle du tissé, et non des mèches, diminue dans cette direction orthogonale. Ce phénomène contredit l'hypothèse de non glissement des mèches les unes par rapport aux autres. Cependant, les renforts tissés utilisés ici montrent un embuvage faible de l'ordre de 1%, nous permettant de négliger le phénomène d'avalement.

### 1.3.3.3 Compression dans le sens des mèches

Le comportement en compression dans la direction des mèches des renforts tissés est difficile à caractériser. Prise individuellement, une mèche aura tendance à flamber en compression. Cependant, par le procédé de tissage, celles-ci sont liées dans les renforts.

Leurs mouvements sont contraints par les positions de leurs voisines. La présence du tissage, à travers la densité de fibre et la cohésion, influence directement le comportement des mèches en compression, et donc le comportement macroscopique du matériau. Aucun essai significatif n'est communément admis, ni même utilisé, pour la caractérisation des tissés en compression dans le sens des mèches. Cependant, lors du travail de thèse de I. Azehaf, des essais de compression transverse sur des tissés épais ont été réalisés. Ces essais n'ont pu être menés que grâce à l'épaisseur importante (une quinzaine de millimètres) du matériau étudié. Une éprouvette assez grande pour contenir au moins une cellule élémentaire représentative du tissé a été découpée et placée transversalement de manière à être soumise à un effort de compression. La figure 1.20 illustre le dispositif. Les plateaux de compression utilisés sont ceux servant habituellement pour la compression transverse, voir section 1.3.3.5.



**Figure 1.20** – Compression dans le sens des mèches d'un interlock épais

Un flambement apparaît assez rapidement (à environ 2% de déformation), ce qui permet une caractérisation pour de petites déformations en compression. Cependant, à la vue des différentes rigidités mises en œuvre lors de la mise en forme des renforts tissés, la connaissance du comportement pour de petites déformations de ce mode de sollicitation est suffisante.

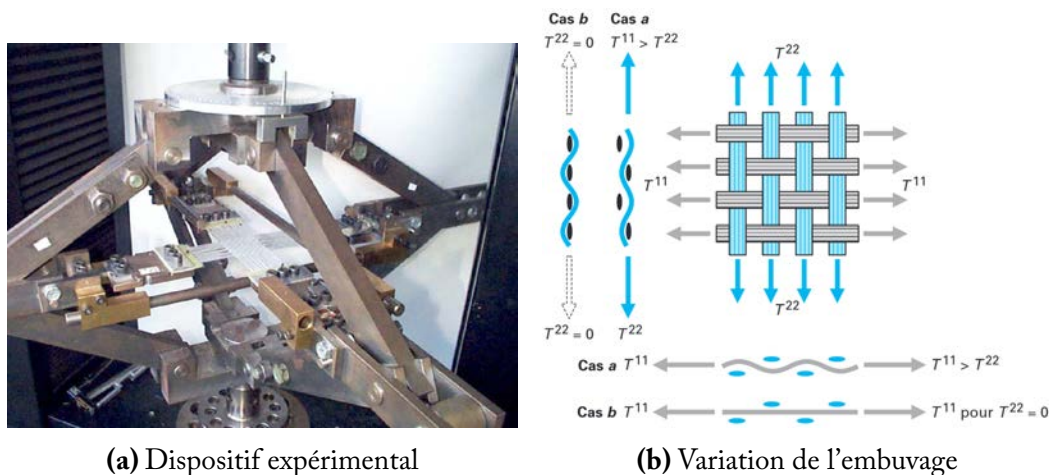
### 1.3.3.4 Comportement en tension biaxiale

Comme vu pour le cas de la tension uniaxiale, la tension dans une direction a une influence directe sur l'embuvage dans cette même direction et dans la direction orthogonale. La mise sous tension simultanée de deux directions orthogonales est donc intéressante à étudier. La traction biaxiale consiste à soumettre chacun des réseaux à une sollicitation de traction non nécessairement identique. En mesurant la déformation dans la direction étu-

diée  $\epsilon_{obs}$  et celle dans la direction orthogonale  $\epsilon_{orth}$ , on obtient le coefficient de traction biaxiale  $k$  défini par :

$$k = \frac{\epsilon_{orth}}{\epsilon_{obs}} \quad (1.2)$$

Une sollicitation identique des deux réseaux sera signifiée par  $k = 1$  alors qu'une sollicitation deux fois plus forte du réseau observé sera indiquée par  $k = 0.5$ . Les essais de traction biaxiale sont réalisés avec des dispositifs spécifiques permettant de contrôler en effort les deux directions étudiées, voir figure 1.21. Plusieurs dispositifs de traction biaxiale ont été conçus, permettant de régler plus facilement le coefficient de traction biaxiale [KAW 73a, BUE 01, WIL 08]. Le comportement non linéaire de la traction biaxiale est illustré figure 1.22 par l'intermédiaire d'un réseau de courbes correspondant à divers coefficients  $k$ .

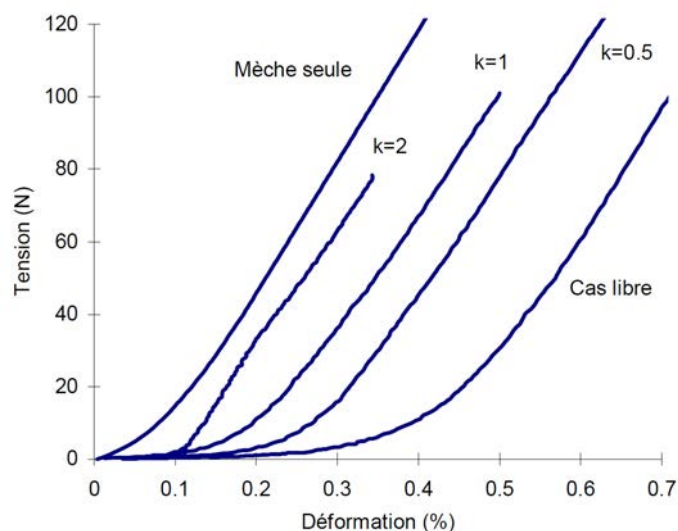


**Figure 1.21** – La traction biaxiale des tissés [BUE 98, BUE 01]

La mise en œuvre de ce type d'essai est difficile pour des tissés 2D, et d'autant plus pour des tissés épais, car l'utilisateur doit s'assurer que toutes les mèches d'un même réseau et que les deux réseaux se tendent au même instant. Cette partie étant extrêmement délicate, l'application de la traction biaxiale aux renforts tissés épais n'a, à ce jour, pas été réalisée et paraît difficilement envisageable.

### 1.3.3.5 Comportement en compression transverse

La compression transverse d'un tissu épais peut être caractérisée expérimentalement par un essai du même nom. Cette sollicitation est importante à modéliser car influant directement sur les paramètres et la qualité de l'injection au cours du procédé RTM. La densité volumique de fibres, principalement liée au comportement en compression, doit être maîtrisée afin d'optimiser les performances mécaniques tout en surveillant sa perméabilité et l'écoulement de la résine à l'intérieur du renfort [BIC 97, GRU 04].



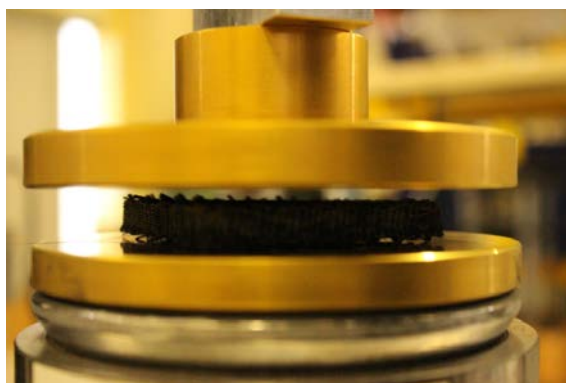
**Figure 1.22** – Jeu de courbes expérimentales pour un taffetas de verre sens chaîne [BUE 98]

Cet essai est simplement réalisé en écrasant progressivement une éprouvette du tissé étudié. Du point de vue du dispositif, des mors circulaires de diamètres 100 mm sont utilisés de façon à pouvoir écraser les éprouvettes entre elles, comme le montre la figure 1.23. La principale difficulté technique dans la réalisation d'essais de compression corrects est de conserver les surfaces d'appui haute et basse du dispositif parfaitement parallèles. C'est pourquoi un plateau rotulé est utilisé pour l'appui bas pour pallier les éventuels défauts de positionnement des plateaux supérieurs et inférieurs. Les plateaux ont subi un traitement au nitrure de titane afin de réduire le coefficient de frottement entre les surfaces d'appui et le matériau, autorisant ainsi le réarrangement des mèches sans effort. Les efforts importants nécessitant des machines de traction de forte capacité, le capteur de déplacement standard de la machine n'est généralement pas adapté aux faibles déplacements mis en œuvre. Pour cette raison, il est important d'utiliser un capteur de déplacement additionnel.

Les courbes expérimentales montrent là aussi une non-linéarité du comportement en compression, figure 1.24. La rigidité augmente progressivement au fur et à mesure de l'essai jusqu'à atteindre une zone de blocage où l'effort augmente très rapidement. Du point de vue structurel, on observe un réarrangement des mèches lors de la compression jusqu'à ce que les espaces initialement vides disparaissent. Une fois ce stade atteint, la rigidité observée expérimentalement est proche de celle des mèches.

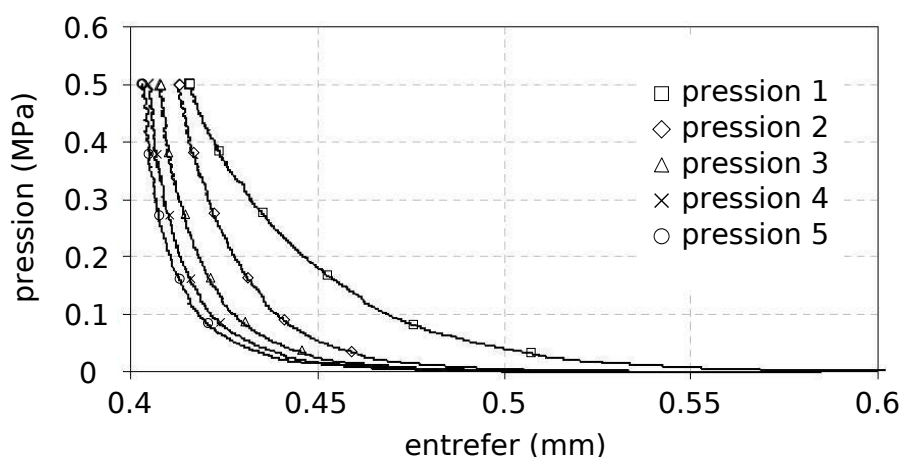
Pour permettre une comparaison des résultats obtenus expérimentalement avec d'autres éprouvettes, réalisées à partir du même tissé ou non, les résultats en déplacement et en effort sont généralement adimensionnés en pression (pour l'effort) et taux volumique de fibre  $V_f$  (pour le déplacement).

Des essais successifs sur la même éprouvette détaillés figure 1.24 mettent en évidence l'anélasticité du renfort. Lors de la réalisation d'un essai de compression, des phénomènes



**Figure 1.23** – Mors du dispositif expérimental utilisé

de dissipation irréversibles apparaissent et le renfort ne récupère pas ses caractéristiques initiales. Cet essai est aussi sensible à la vitesse. Un phénomène de relaxation est visible en fin d'essai, d'importance variable suivant le renfort testé et la vitesse sélectionnée. Ces phénomènes découlent directement des réarrangements des mèches et des fibres ayant lieu dans la préforme.



**Figure 1.24** – Courbes d'écrasements successifs d'un taffetas de verre [CHA 11b]

### 1.3.3.6 Comportement en cisaillement dans le plan des mèches

Lors des essais de formage, on constate que la souplesse du tissu en cisaillement en fait le mode de déformation privilégié des renforts tissés lorsque la forme à atteindre est à double courbure. C'est grâce à la faible raideur associée à ce mode de déformation qu'il est possible de donner au renfort une géométrie non développable. La caractérisation du comportement en cisaillement est essentielle :

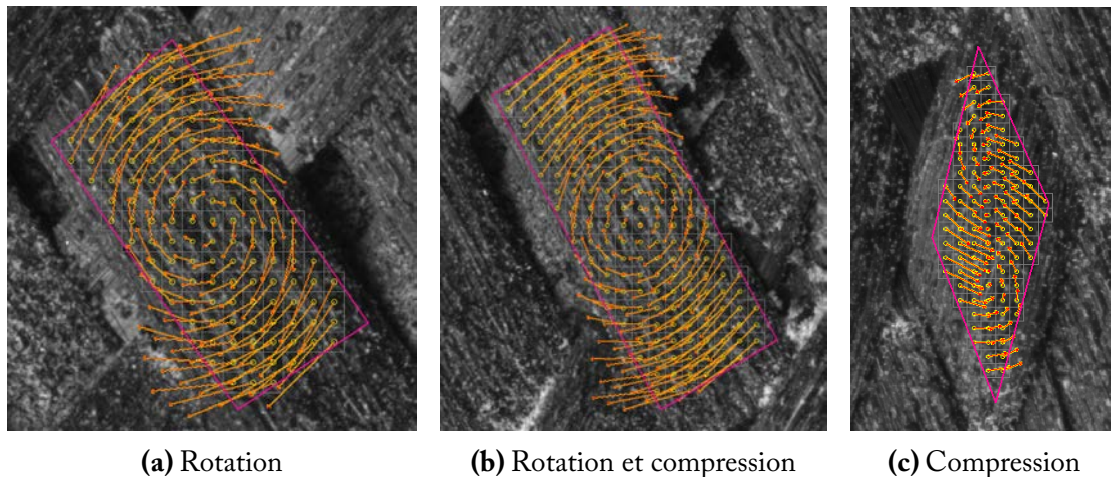
- Pour l'étude de la déformabilité du renfort, c'est-à-dire sa capacité à prendre des formes complexes sans que des défauts apparaissent ;



- Pour l'étude de la perméabilité du renfort : lorsque l'angle de blocage en cisaillement est atteint, la perméabilité locale du renfort est réduite de façon considérable, ce qui rend l'injection de résine plus difficile.

Le comportement du renfort en cisaillement est fortement non linéaire car différents mécanismes de déformation interviennent. Du point de vue cinématique, ceux-ci peuvent être décrits en trois étapes :

- Pour de faibles angles de cisaillement, les mèches pivotent les unes sur les autres sans beaucoup d'efforts, les mèches sont alors quasiment en rotation de corps rigide et ne sont que très peu déformées (figure 1.25a). La raideur est ici générée principalement par le frottement des mèches les unes sur les autres ;
- Progressivement les interstices se comblent, et une compression transverse des mèches vient s'ajouter à ce frottement (figure 1.25b) ;
- Graduellement, la compression transverse augmente jusqu'à n'être plus que le seul mode de déformation (figure 1.25c).



**Figure 1.25** – Mécanisme de cisaillement d'un Interlock de carbone (*Hexcel G1151*) [LUY 09b]

Tous les interstices ne se comblent pas simultanément, ce qui se traduit par un raidissement progressif. Une fois les interstices comblés, le phénomène de blocage en cisaillement apparaît. Le tissage du matériau joue un rôle fondamental dans l'apparition de ce blocage. C'est l'éloignement moyen entre les mèches qui va conditionner la liberté de mouvement de celles-ci. Plus le taux volumique de fibre induit par l'armure sera important, plus l'espace libre sera faible, plus le verrouillage apparaîtra rapidement.

En dehors des contraintes cinématiques, le cisaillement présente également plusieurs sources de dissipation :

- Une dissipation anélastique provoquée par les réarrangements de fibres au sein des mèches. Cet adoucissement, analogue à ce que l'on peut observer en compression transverse, est provoqué par la compression des mèches. La cinématique particulière de la sollicitation en cisaillement va provoquer des contacts entre mèches, tels

que décrits précédemment. Ces contacts, en induisant la compression des mèches, vont provoquer le réarrangement des fibres. Ce phénomène est bien dissipatif car une partie de l'énergie développée contribue au réarrangement des fibres ;

- Une dissipation due aux frottements intermèches. En fin d'essai, l'éprouvette ne retrouve pas sa position initiale. Une déformation résiduelle générée par les frottements intermèches persiste ;
- Une dissipation provenant de l'ensimage des mèches. L'ensimage (et le guipage) a pour objectif de maintenir les fibres en place lors de la manipulation des mèches et, surtout, de favoriser l'adhérence de la matrice aux fibres. Quand il est sollicité, cet ensimage agit comme une matrice, très faible, qui résiste au départ avant de céder. Une rigidité supplémentaire est donc observée en début d'essai sur des tissés fortement embuvés.

Deux essais classiques permettent d'étudier le comportement des tissés en cisaillement : l'essai de cadre (ou *picture frame test*) et l'essai de traction de biais (ou *bias extension test*).

### L'essai de picture frame

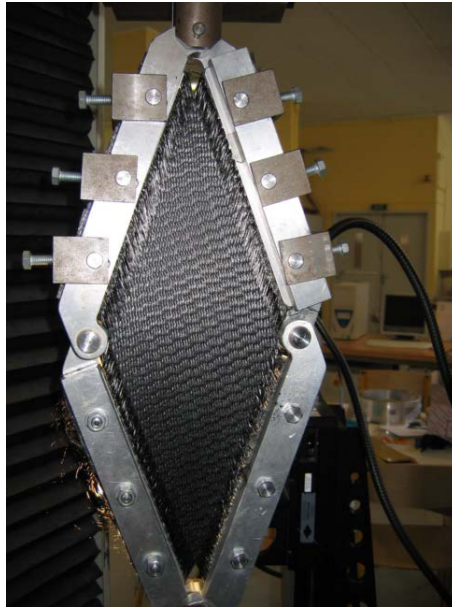
Le Picture Frame Test (ou essai de cadre) est un essai permettant d'imposer une cinématique de cisaillement pur à un tissé grâce à un parallélogramme déformable qui va solliciter l'échantillon. L'éprouvette est une croix, dont le côté a la même dimension que le cadre. Elle est maintenue par l'intermédiaire de talons réalisés par collage de plaques sur chacun des bords (figure 1.26). Ce dispositif a été largement étudié [PEN 04, HAR 04, CAO 08]. Un calcul de l'angle de cisaillement théorique  $\gamma$  imposé par le cadre en fonction du déplacement  $d$  de la machine et de la longueur  $L_c$  du côté du cadre est possible [MCG 97] :

$$\gamma(d) = \frac{\pi}{2} - 2 \cos^{-1} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{d}{2L_c} \right) \quad (1.3)$$

Si ce test permet d'imposer une cinématique de cisaillement pur, et est donc facile à analyser, sa difficulté, même pour des tissus minces, provient de l'alignement initial du tissu qui doit être rigoureusement identique à celui du cadre. Lors de ce test, on veut solliciter le tissu en cisaillement pur, or il persiste forcément un défaut angulaire initial ; la cinématique engendre donc de la tension dans les mèches. Le problème devient plus complexe dans le cas des renforts tridimensionnels à cause du nombre plus important de mèches, mais surtout de l'épaisseur du tissé qui complique le positionnement initial. La mise en œuvre de cet essai étant difficile, un essai de bias extension test lui est préféré.

### Le bias extension test

Cet essai est une alternative au traditionnel essai de cadre et permet d'identifier le module de cisaillement de l'éprouvette dans le plan des mèches [JOH 95, MCG 97, PRO 97, WAN 98, POT 02]. Il présente l'avantage de ne pas être aussi sensible au positionnement



**Figure 1.26** – Picture Frame et Eprouvette de G1151 pour Picture Frame avec talons

de l'éprouvette que l'essai de cadre. Son principe repose sur l'élongation d'une éprouvette dont les mèches sont orientées à  $45^\circ$  par rapport à la direction de traction (figure 1.27). Ceci induit une cinématique particulière du renfort qui implique une déformation de type cadre au centre de l'éprouvette si celle-ci possède un rapport longueur/largeur satisfaisant ( $L > 2l$ ) et si la rigidité des mèches est grande devant celle de cisaillement. Cette cinématique est garantie si l'hypothèse de non-glissement des mèches est vérifiée. Dans le cas du bias extension test, elle s'avère valide jusqu'à des angles de cisaillement de  $40^\circ$  pour des interlocks (figure 1.28). Néanmoins il conviendra de vérifier son domaine de validité pour les grands angles de cisaillement, quand le blocage cinématique intervient et que les mèches commencent à glisser.

Il existe trois zones de cisaillement différentes à distinguer lors de la réalisation de l'essai (figure 1.27) :

- Les zones d'accroche de l'éprouvette (en gris), qui restent non cisillées ;
- La zone centrale (en bleu foncé), qui est totalement cisillée ;
- Les zones latérales (en bleu clair), qui sont demi-cisillées.

Si l'on raisonne en termes de réseaux fibreux, les zones d'accroche sont constituées de deux réseaux (chaîne et trame), qui possèdent chacun un côté encastré. Les zones demi-cisillées sont constituées d'un réseau libre à ses deux bords et d'un réseau encastré d'un côté. Finalement, la zone cisillée est formée par deux réseaux dont les bords sont libres. Ainsi, aucune tension parasite n'apparaît dans les mèches. On voit ici le principal avantage du bias extension test par rapport à l'essai de cadre : les conditions limites nécessaires à la bonne réalisation d'un cisaillement pur sont facilement respectées. Comme toute simplification possède ses inconvénients, l'analyse des résultats est plus ardue. Nous allons donc maintenant développer les hypothèses et calculs nécessaires à l'analyse des résultats.



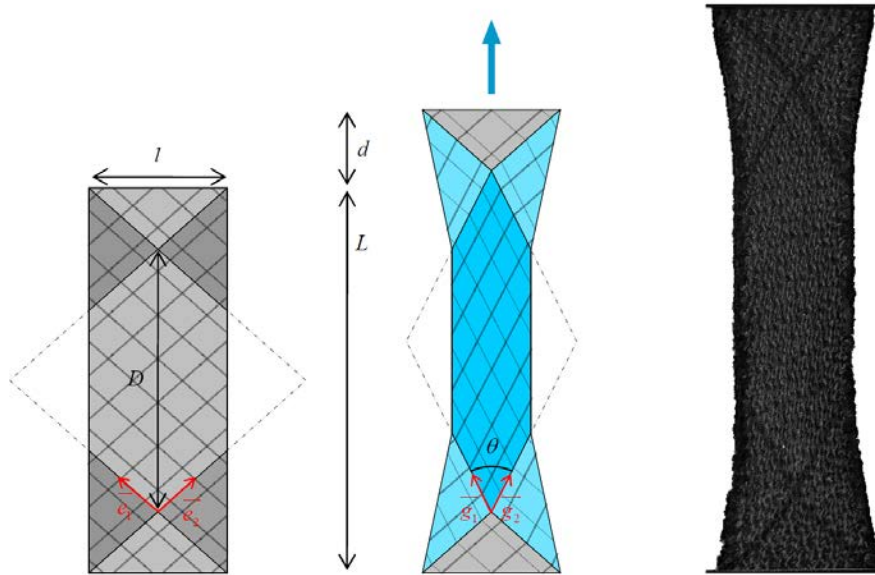


Figure 1.27 – Cinématique d'une éprouvette de bias extension test

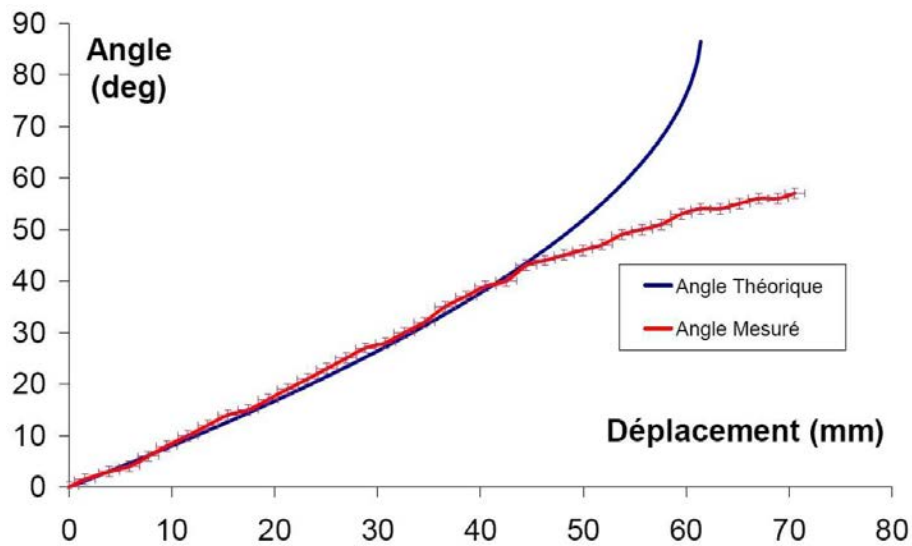


Figure 1.28 – Domaine de validité de l'hypothèse de non-glissement des mèches pour un tissé de type interlock [LUY 09b]

Si l'on se place dans le cas des hypothèses précédemment décrites, l'analyse de la géométrie nous donne la relation entre l'angle de cisaillement  $\gamma$  (avec  $\gamma = \pi/2 - \theta$ ) et le déplacement  $d$  [LUY 09b] :

$$\gamma(d) = \frac{\pi}{2} - 2 \cos^{-1} \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \left( 1 + \frac{d}{(L-l)} \right) \right] \quad (1.4)$$

où  $d$  est le déplacement des mors de la machine de traction,  $L$  la longueur initiale de l'éprouvette et  $l$  sa largeur initiale. Il est important de rappeler que l'angle de cisaillement  $\gamma$  utilisé dans la suite du paragraphe est l'angle de cisaillement théorique et non l'angle de cisaillement réel. Celui-ci peut être différent dans le cas où les hypothèses précédemment énoncées ne sont pas respectées. L'équation 1.4 nous permet de relier la force exercée sur l'éprouvette avec l'angle de cisaillement. Cependant, il est nécessaire d'adimensionner le résultat obtenu afin de pouvoir comparer des éprouvettes de tailles différentes ou des matériaux différents. Nous allons pour cela utiliser une méthode énergétique proposée par [HAR 04] pour l'essai de cadre et adaptée par [LUY 09b] pour l'essai de traction de biais. Cette approche se base sur un bilan de puissance réalisé sur l'éprouvette. On considère que la seule puissance développée en réponse au déplacement imposé par la machine provient du cisaillement du tissé, produit d'un moment résistant développé à chaque intersection de mèches avec le taux de cisaillement. Le couple unitaire de cisaillement  $C_s$ , fonction de l'angle de cisaillement, représente l'interaction entre le réseau chaîne et le réseau trame [BOI 05]. Ainsi le bilan des puissances nous donne :

$$F \dot{d} = \int_{S_1} C_s(\gamma) \dot{\gamma} dS + \int_{S_2} C_s \left( \frac{\gamma}{2} \right) \frac{\dot{\gamma}}{2} dS \quad (1.5)$$

où  $S_1$  correspond à l'aire de la zone cisailée,  $S_2$  à l'aire de la zone demi-cisailée,  $F$  est la norme de la force exercée par la machine de traction sur l'éprouvette et  $\dot{d}$  la vitesse de sollicitation. La zone non cisailée ne développe aucune puissance. En faisant l'hypothèse d'homogénéité d'angle et de couple de cisaillement pour une zone donnée, on obtient [LUY 09b] :

$$C_s(\gamma(t)) = \frac{\sqrt{2}}{2S_1} FD \sqrt{1 - \left( \frac{D+d}{D\sqrt{2}} \right)^2} - \frac{S_2}{2S_1} C_s \left( \frac{\gamma(t)}{2} \right) \quad (1.6)$$

avec  $D$  la longueur initiale de la diagonale du cadre de cisaillement pur induit par l'expérience (figure 1.27). La résolution de cette équation n'est pas directe puisqu'elle fait intervenir le couple surfacique dans les parties cisailées et dans les parties demi-cisailées. Afin de la résoudre, on adopte une méthode séquentielle. Nous disposons d'un nombre fini de valeurs discrètes du déplacement de la machine de traction et de la force exercée sur l'éprouvette. Le couple  $C_s(\gamma)$  est calculé pas à pas en supposant connu le couple pour un demi-angle de cisaillement  $C_s \left( \frac{\gamma}{2} \right)$ . L'initiation de cet algorithme de résolution est alors nécessaire. Pour cela, on suppose la linéarité du couple surfacique pour des petits angles de cisaillement. La première valeur est prise comme suit :

$$C_s\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1}{2}C_s(\gamma) \quad (1.7)$$

La relation 1.6 fait le lien entre les mesures expérimentales, l'effort appliqué sur l'éprouvette et le déplacement du mors mobile, et le couple de cisaillement. L'obtention de cette variable permet de comparer plusieurs essais réalisés dans des conditions comparables mais où la géométrie et la nature du renfort varient. Ainsi, sur une batterie de bias extension tests, les variations de résultats dus aux variations de taille de la zone utile entre éprouvette seront prises en compte et corrigées.

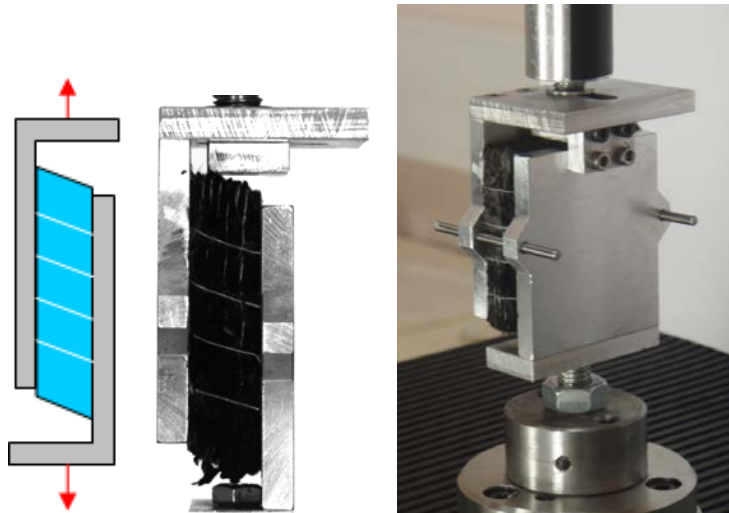
### 1.3.3.7 Comportement en cisaillement transverse

Contrairement à la majorité des tissés étudiés dans la littérature, les interlocks disposent d'une épaisseur non négligeable. Avec le cisaillement dans le plan, le cisaillement transverse devient alors un mode de déformation prédominant dans la mise en forme de ces tissés. Il est alors intéressant d'étudier leur comportement en cisaillement transverse, qui pourrait s'apparenter à du cisaillement entre plis. Ce mode de déformation a été très peu étudié jusqu'à présent du fait de la faible utilisation actuelle des tissés épais. On retrouve un protocole d'essai associé à une modélisation hyperélastique dans Charmetant [CHA 11a]. Dans les travaux de [ZHA 13] un nouveau dispositif d'essai est proposé, prenant en compte les spécificités du comportement en cisaillement transverse des tissés épais. A l'heure actuelle, du fait du faible nombre d'études de ce comportement réalisées, aucun dispositif ni protocole expérimental n'est communément admis.

Un premier dispositif expérimental a été proposé par Charmetant [CHA 11a]. Il est constitué de deux plaques fixées de chaque côté du renfort et transmettant l'effort imposé par la machine aux pans supérieurs et inférieurs de l'éprouvette (figure 1.29). Le degré de liberté des mors dans le sens de l'épaisseur est bloqué, ce qui implique que l'éprouvette ne peut pas gonfler ni se compresser librement. L'éprouvette est fixée sur les surfaces de contact à l'aide d'un scotch double face, qui comporte l'avantage d'être moins intrusif que la colle qui migre dans le renfort par capillarité et modifie le comportement.

Afin de vérifier la qualité de la sollicitation imposée, une corrélation d'image a été réalisée. Celle-ci montre la qualité de la déformation en cisaillement imposé jusqu'à un angle de  $22^\circ$ , angle à partir duquel la corrélation n'a pas pu être réalisée à cause de la technique choisie. Cependant l'épaisseur de l'éprouvette augmente sous l'effet du cisaillement transverse. En effet, quand le tissu est soumis à cette sollicitation, les mèches se réarrangent et provoquent un gonflement dans l'épaisseur. Ce phénomène, que nous nommerons foisonnement, doit être donc pris en compte dans la conception du dispositif d'essai. L'objectif est de libérer un degré de liberté dans le sens de l'épaisseur du tissu. Dans cette optique, un nouveau module a été conçu par Orliac [ORL 12] (voir figure 1.30).

Ce nouveau module possède des emplacements pour deux échantillons afin d'avoir un axe de traction toujours au centre de l'essai réalisé. De plus, des lames souples ont été réalisées dans le but d'induire une cinématique de parallélogramme. Ainsi, le déplacement de chaque surface de contact externe doit se faire parallèlement à la surface fixe interne.

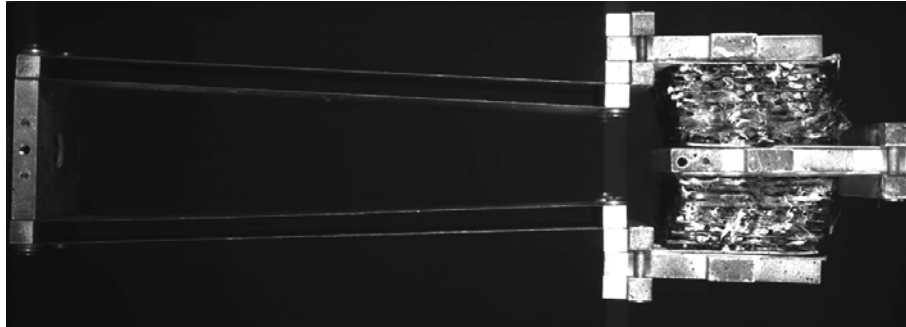


**Figure 1.29** – Essai de cisaillement transverse sur Interlock [ORL 12]



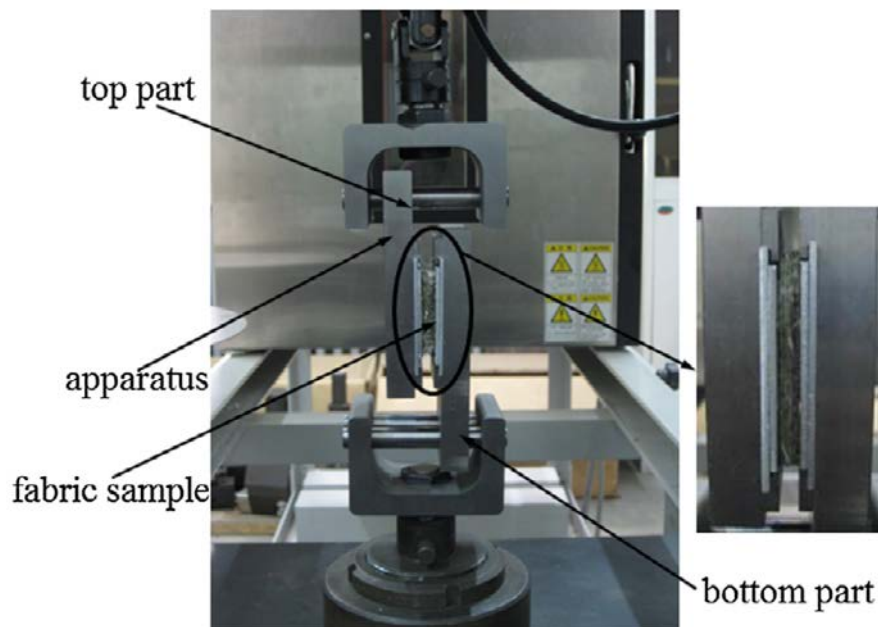
**Figure 1.30** – Nouveau dispositif de cisaillement transverse

La figure 1.31 illustre le fonctionnement du dispositif. C'est ce dispositif qui sera utilisé pour les identifications réalisées dans ce manuscrit.



**Figure 1.31** – Cisaillement transverse sur tissu interlock

Le dispositif expérimental proposé par [ZHA 13] diffère des précédents et dispose d'un degré de liberté dans le sens de l'épaisseur. Il a été conçu en accord avec la norme ASTM : C273 standard. Un schéma du dispositif monté sur une machine de traction uniaxiale est montré figure 1.32. Chaque côté de l'éprouvette a été collé sur des plaques en aluminium, elles-mêmes fixées à l'aide de vis sur le dispositif. Chaque partie du dispositif est montée sur les mors de la machine grâce à deux arbres leur permettant de coulisser selon une liaison linéaire.



**Figure 1.32** – Dispositif de cisaillement transverse [ZHA 13]

### 1.3.3.8 Comportement en flexion

Comme vu à l'échelle mésoscopique section 1.3.2.4, il existe une rigidité locale de flexion pour chaque mèche constituant le renfort tissé. Cette rigidité locale est encore accentuée à l'échelle macroscopique par l'existence d'une armure. Cette présence de résistance locale à la courbure a notamment été mise en évidence par le développement de plis lors d'essais de mise en forme [HAM 07, BOI 11]. Plusieurs dispositifs expérimentaux, détaillés dans les paragraphes suivants, permettent de caractériser cette rigidité de courbure.

#### La flexion simple

Le comportement en flexion des tissés (ou mèches) est caractérisé à l'aide du dispositif de Peirce [PEI 30], qui est un test de type cantilever. Le dispositif utilisé est une machine de Taber Industries (figure 1.33a). Une éprouvette est positionnée sur un plateau horizontal. Pour déterminer la rigidité de flexion, l'éprouvette est glissée et placée en porte-à-faux jusqu'à ce que, soumise à son propre poids, son extrémité atteigne le plan incliné à  $41.5^\circ$ . Le module de flexion  $G_m$  est alors défini par [BIL 08, SZA 03] :

$$G_m = \frac{l^3 \cos(\theta/2)}{8 \tan(\theta)} q \quad \text{où } q = \frac{mg}{l} \quad (1.8)$$

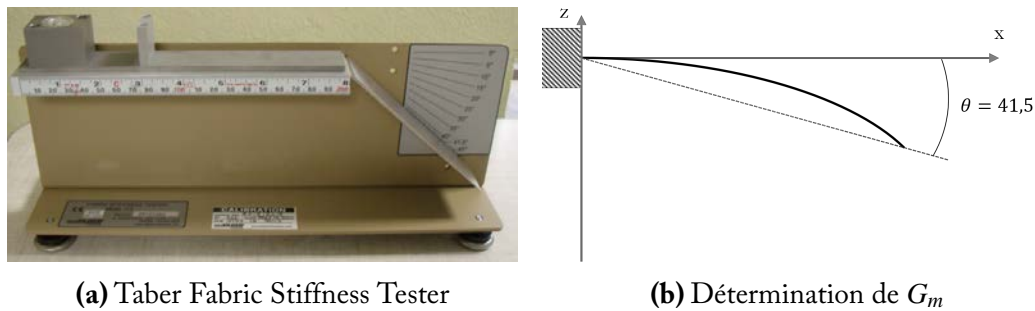
où  $q$  est le poids par unité de surface,  $l$  la longueur de surplomb,  $m$  la masse de la mèche en surplomb,  $g$  l'accélération de la pesanteur et  $\theta$  l'angle de test. L'angle  $\theta = 41.5^\circ$  est utilisé de telle manière que le calcul de  $G_m$  soit simplifié (figure 1.33). Le rapport suivant est alors approximé :

$$\frac{\cos(\theta/2)}{\tan(\theta)} = 1.05 \approx 1 \quad (1.9)$$

Cet essai est devenu un standard ASTM D1388-96. Sa mise en œuvre repose sur l'hypothèse de linéarité entre moment de flexion et courbure. Or, il a été montré que le comportement en flexion des renforts tissés peut être fortement non linéaire [LIV 64, KAW 80, BIL 10]. Les rigidités mesurées ainsi ne donnent alors qu'une estimation globale de la rigidité du matériau.

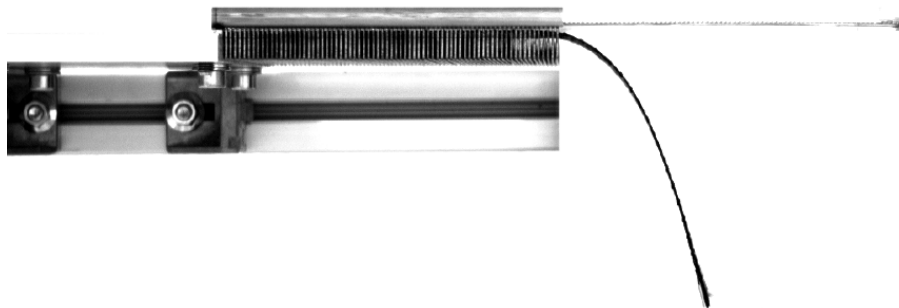
D'autres méthodes de mesure ont été mises au point tel que le dispositif de flexion KES (Kawabata Evaluation System for fabrics). Il permet de réaliser une flexion pure sur une fine éprouvette de tissu. Ce dispositif a été initialement développé pour des tests sur des textiles d'habillement dont la rigidité en flexion est bien moindre que celle des renforts tissés de composites. De plus les résultats obtenus sur la taille réduite de l'éprouvette nécessaire, proche de celle d'un volume élémentaire représentatif, sont difficilement généralisables au comportement global car impactés par des phénomènes locaux (flambements par exemple).

De Bilbao a développé un dispositif spécialement adapté aux renforts tissés de composite [BIL 10]. Il ressemble au dispositif ASTM excepté le fait qu'aucun angle de flexion



**Figure 1.33** – Identification de la rigidité des mèches

n'est à atteindre. Le tissu repose sur des lames qui sont retirées progressivement, illustré figure 1.34, entraînant la flexion de l'éprouvette sous son propre poids. A l'aide d'une mesure optique et d'un traitement d'images, le profil est obtenu pour une série discrète de longueurs d'échantillon. Après dépouillement, le moment de flexion est tracé en fonction de la courbure puis une loi non linéaire peut être identifiée.

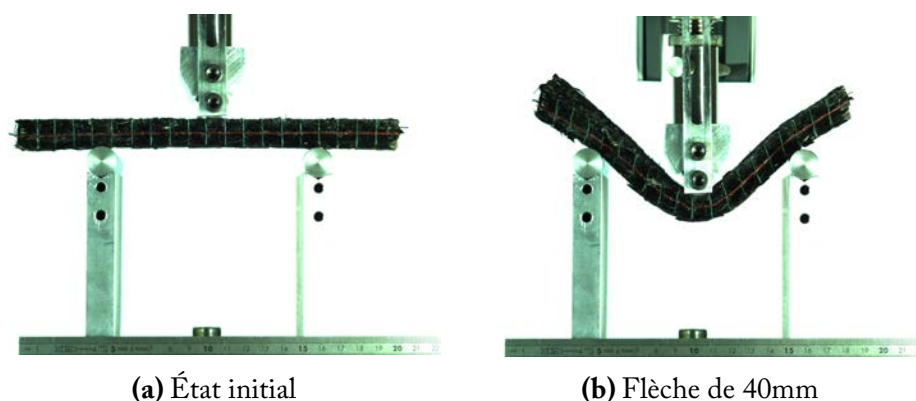


**Figure 1.34** – Dispositif de flexion de Bilbao [BIL 10]

Malgré cela, la transposition aux tissés épais est difficile. L'épaisseur du tissage interlock induit une rigidité de flexion supérieure et donc l'utilisation d'éprouvettes de flexion très longues (jusqu'à 50 cm). L'essai est alors moins simple à interpréter. Pour certains tissés haute performance étudiés durant ce travail de thèse, il est même impossible de disposer d'éprouvettes aux dimensions adaptées. L'utilisation de la flexion trois points lui a été préférée dans certains cas.

### La flexion trois points

Les travaux de Orliac [ORL 12] ont mis en évidence certains aspects du comportement en flexion trois points des matériaux tissés épais. Le protocole expérimental utilisé consiste à poser une plaque de tissé épais sur deux appuis puis à faire descendre un troisième poinçon pour imposer la flèche désirée. Le principe expérimental est visible figure 1.35.



**Figure 1.35** – Essai de flexion trois points sur tissu épais

La ligne moyenne et les variations des sections initialement perpendiculaires à celle-ci sont utilisées pour caractériser le comportement en flexion. Au cours de l'essai de flexion, en se basant sur l'observation de sections initialement droites, l'éprouvette est principalement soumise à du cisaillement transverse. Des sections, marquées de traits verticaux, restent quasi verticales au cours de la flexion, indiquant que des plans de mèches glissent les uns par rapport aux autres. Les matériaux fibreux épais se rapprochent alors, si on les assimile à des plaques, de la théorie de Mindlin-Reissner plutôt que de celle de Kirchhoff-Love, où les sections restent normales à la fibre moyenne. Cette déformation particulière est bien entendu liée aux larges rigidités en traction des mèches, qui contraignent chaque couche à garder une longueur constante.

### 1.4 Bilan du chapitre 1

Ce premier chapitre a été l'occasion de balayer une grande partie des composites existants et, de manière plus détaillée, de nous recentrer sur le sujet de l'étude : les renforts tissés épais de composites en fibres de carbone ou de céramique, ainsi que leur mise en forme et la pyrolyse après cuisson. Les spécificités liées à la structure multiéchelle fibre/mèche/renfort ont été évoquées à travers les étapes de fabrication des matériaux à matrices organique et céramique. Cette étude de la gamme de fabrication nous a conduit aux deux étapes ayant des enjeux industriels importants : l'obtention de pièces par procédé RTM et la consolidation des composites à matrice céramique.

Les essais mécaniques associés aux divers modes de déformation des renforts ont été évoqués et seront utilisés dans la suite du manuscrit pour les étapes de caractérisation/identification des comportements matériaux : les tractions uniaxiale et biaxiale, le bias extension test et le picture frame, le cisaillement transverse, la compression transverse et la flexion trois points.

Maintenant que les caractéristiques principales des renforts épais ont été analysées et que des hypothèses ont été avancées (non-glissement des réseaux l'un par rapport à l'autre, milieu continu), une approche de modélisation doit être sélectionnée, développée



et identifiée pour retranscrire le plus justement possible le comportement des renforts tissés durant leur formage.



# Chapitre 2

## Simulation macroscopique des renforts tissés épais

*Dans ce deuxième chapitre, la simulation numérique des renforts tissés épais de composite est abordée. Dans un premier temps, les différentes approches de simulation existantes sont détaillées, de manière à introduire celle choisie dans ce manuscrit : la simulation macroscopique. Le développement de deux variantes de simulation macroscopique a été mené de front dans ce travail de thèse : une simulation à l'aide d'un élément continu associé à une loi hyperélastique et un élément semi-discret à second ordre hyperélastique. Les concepts de bases de la mécanique des milieux continus en grandes transformations sont brièvement rappelés. Pour le premier élément, le formalisme d'une loi de comportement hyperélastique basée sur des invariants physiques de la transformation est détaillé. Pour le second élément, la formulation élément fini semi-discrète est développée. Finalement, le code de calcul Plast4, employé pour la résolution des problèmes numériques abordés dans ce manuscrit, est présenté.*

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Simulation de la mise en forme des renforts tissés</b>	<b>47</b>
2.1.1	Simulation microscopique	47
2.1.2	Simulation mésoscopique	48
2.1.3	Simulation macroscopique	52

---

<b>2.2</b>	<b>Approche continue hyperélastique du comportement des renforts épais</b>	<b>57</b>
2.2.1	Cinématique des grandes transformations	57
2.2.1.1	Description du mouvement	57
2.2.1.2	Mesures des déformations	58
2.2.1.3	Mesures des contraintes	60
2.2.1.4	Dualité contrainte-déformation	61
2.2.1.5	Loi de comportement, anisotropie et objectivité	61
2.2.2	Hyperélasticité des renforts interlock	63
2.2.2.1	La formulation hyperélastique	63
2.2.2.2	Hyperélasticité orthotrope des interlocks	65
2.2.2.3	Invariants physiques de la transformation	66
2.2.2.4	Détermination du format des densités d'énergie de déformation	68
2.2.2.5	Renforts étudiés	72
2.2.2.6	Identification en tensions dans les directions chaîne et trame	73
2.2.2.7	Identification en compression dans le sens transverse	76
2.2.2.8	Identification en cisaillement dans le plan	77
2.2.2.9	Identification en cisaillement transverse	79
2.2.2.10	Détermination du tenseur des rigidités tangentes	81
2.2.3	Hyperélasticité et cadre mathématique rigoureux	82
<b>2.3</b>	<b>Approche semi-discrète hyperélastique du comportement des renforts épais</b>	<b>84</b>
<b>2.4</b>	<b>Outil numérique de simulation : Plast4</b>	<b>88</b>
<b>2.5</b>	<b>Bilan du chapitre 2</b>	<b>90</b>

---

## 2.1 Simulation de la mise en forme des renforts tissés

La simulation du procédé de préformage correspond à un réel besoin industriel. Une meilleure compréhension du procédé de fabrication permettrait d'améliorer le comportement mécanique de la pièce finale, d'étendre le procédé à des séries plus importantes et, in fine, de pouvoir l'utiliser pour des applications en dehors des industries de pointe. L'obtention de simulations de bonne qualité évite, avant tout, de passer par une phase essai/erreur très coûteuse en temps et en argent. Un effort de compréhension important est nécessaire afin de pouvoir profiter des avantages apportés par cette technologie, voir section 1.2.3, sans subir les inconvénients inhérents à la mise en forme des tissés. L'objectif des simulations numériques est donc de pouvoir prédire les caractéristiques mécaniques et géométriques suivantes :

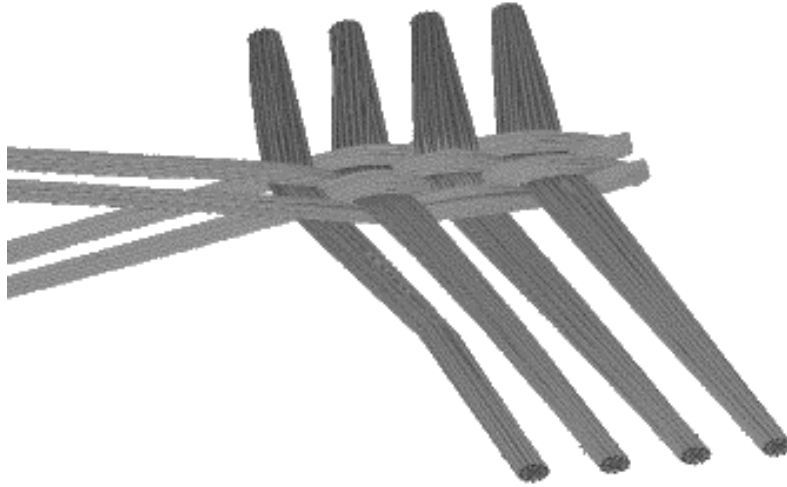
- L'orientation des mèches en fin de mise en forme ;
- Les caractéristiques finales du renfort après mise en forme, voire après cuisson ;
- La perméabilité en tout point du renfort déformé ;
- L'apparition éventuelle de plis, détissages et ruptures de fibres.

Les objectifs précédents doivent être complétés le plus précisément possible. L'inconvénient principal provient de la nature multiéchelle des renforts tissés : tous les défauts ne se détectent pas à la même échelle. Les ruptures de fibres, par exemple, sont un phénomène microscopique alors que l'apparition de plis ne peut être étudiée que macroscopiquement. C'est pourquoi plusieurs méthodes de simulations propres à chaque échelle ont été développées, et donc plus performantes sur certains points que d'autres.

### 2.1.1 Simulation microscopique

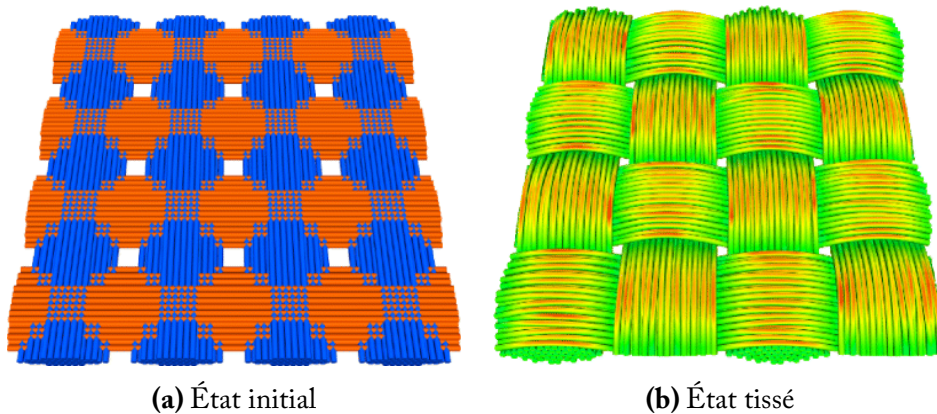
Dans une approche numérique microscopique, le constituant élémentaire de la simulation est la fibre. L'objectif est donc de modéliser le comportement matériel d'une fibre ainsi que leurs interactions. Les grandeurs mécaniques des fibres étant relativement bien connues, la principale difficulté de l'approche est la gestion du contact entre les nombreux corps du modèle. De nombreuses études portent sur la simulation de cordes ou de câbles dont la structure est proche des mèches mais avec un nombre limité de fibres, le tout fortement torsadé [JIA 99, NAW 00, SRE 06, GHO 07]. Par contre, l'application aux mèches des renforts est plus rare, principalement à cause du nombre élevé de fibres par mèche. On notera cependant la modélisation du tissage développée par Zhou [ZHO 04], figure 2.1, qui permet de prévoir dans certaines limites la géométrie des mailles tissées élémentaires.

Les travaux de Durville [DUR 10] donnent des résultats prometteurs pour la simulation à l'échelle microscopique de renforts. Des modèles de mailles élémentaires ont été développés afin de visualiser le positionnement des mèches et leur réarrangement pendant une sollicitation, figure 2.2. Le positionnement des fibres dans l'armure non déformée n'est pas imposé mais simulé par suppression incrémentale des interpénétrations initiales. La limitation principale de ce type de simulation est le temps de calcul inhérent au nombre de fibres à modéliser. Pour cette raison, des groupes de fibres sont modélisés dans les mèches, réduisant le nombre de fibres virtuelles à quelques dizaines au lieu des



**Figure 2.1** – Renfort tissé 2D généré par le modèle de Zhou [ZHO 04]

milliers de fibres réelles. Le résultat est directement dépendant de la discrétisation : plus celle-ci est grossière, plus les groupes de fibres ont un comportement proche de celui des mèches, qui est bien plus complexe.



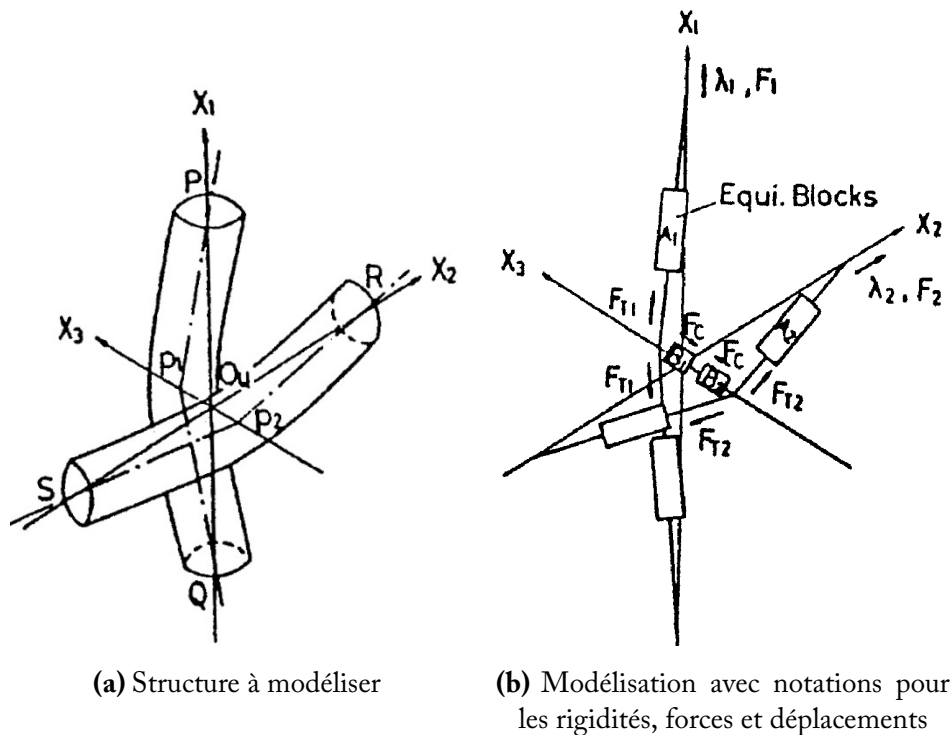
**Figure 2.2** – Modélisation du VER d'un renfort après tissage [DUR 10]

### 2.1.2 Simulation mésoscopique

Les modèles numériques mésoscopiques considèrent que le constituant élémentaire de la simulation n'est plus la fibre, mais la mèche vue comme un milieu continu. Il s'agit alors de s'appuyer sur le comportement mécanique des mèches et leurs interactions à l'intérieur d'une armure pour en déduire le comportement global du renfort. Le comportement mécanique macroscopique du renfort peut être calculé à partir de modélisations mésoscopiques : soit en modélisant l'ensemble de la pièce à caractériser, soit en injectant des résultats issus de modélisations mésoscopiques dans des calculs macroscopiques. La si-

mulation à cette échelle permet aussi d'observer directement l'influence de l'armure sur le comportement global d'un tissé et de déterminer le tissage adapté au besoin. La détermination de la perméabilité locale est aisément réalisée avec des résultats mésoscopiques, alimentant directement des calculs d'écoulement en phase d'injection.

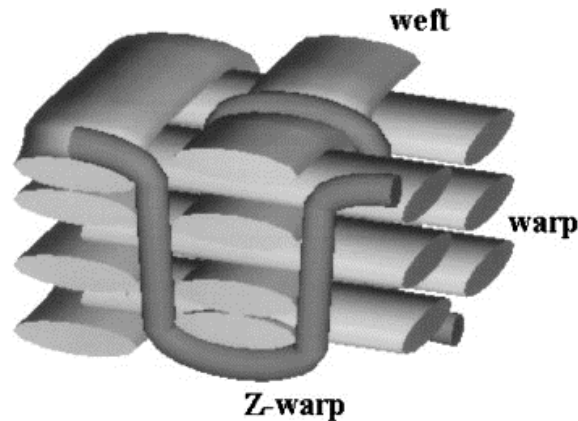
Des approches analytiques ont été développées afin d'accéder à ces grandeurs mécaniques et géométriques. Ces approches sont généralement fondées sur une simplification de la géométrie des mèches dans la maille élémentaire et sur des hypothèses de comportement mécanique. Une modélisation s'appuyant sur la discrétisation de la ligne moyenne par des segments, une rigidité étant associée à chaque segment et à chaque point de croisement entre réseau chaîne et trame, a été proposée par Kawabata [KAW 73a, KAW 73b], voir figure 2.3. Le comportement de la modélisation est satisfaisant pour des sollicitations en tension du renfort mais reste trop pauvre pour être suffisant en compression transverse et cisaillements.



**Figure 2.3** – Modélisation analytique de Kawabata [KAW 73a]

Une autre approche analytique, à l'origine du logiciel *WiseTex* développé à l'université de Louvain, a été proposée par Lomov [LOM 00, LOM 06], figure 2.4. La géométrie du renfort est ici obtenue par minimisation de l'énergie de déformation de chaque mèche jusqu'à obtenir un équilibre statique en prenant en compte différentes contributions mécaniques (tension, flexion, torsion, compression des mèches et interactions). Cette approche nécessite l'identification expérimentale de données difficiles à obtenir.

Les approches analytiques fournissent des résultats cohérents dans la détermination du comportement mécanique des mèches en tension mais sont plus limitées dans des ap-



**Figure 2.4** – Génération d’une structure 3D d’un renfort en carbone [LOM 00]

plications plus complexes où interviennent, par exemple, le cisaillement. Les hypothèses simplificatrices de la géométrie, notamment au niveau des contacts latéraux, sont problématiques. Face à ces limitations, le recours aux éléments finis semble une bonne alternative. Leur utilisation à cette échelle nécessite alors deux prérequis : la géométrie et les conditions limites du renfort.

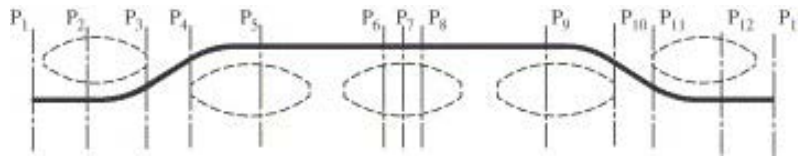
Avant de discrétiser en éléments finis les mèches à modéliser, il est nécessaire de disposer d’une géométrie appropriée des mèches. Cette géométrie doit pouvoir être obtenue théoriquement à partir des caractéristiques de la mèche et de l’armure, ou expérimentalement.

Du point de vue théorique, de nombreux modèles ont été développés séparément afin d’obtenir la géométrie finale. On notera le modèle associé à *WiseTex* évoqué précédemment, ou son alternative *Texgen*, développé à l’université de Nottingham [SHE 07]. Ce modèle n’utilise pas, contrairement à *WiseTex* de considération mécanique. Il permet toutefois de réaliser facilement des mailles élémentaires de tissés 2D et 3D dans lesquelles les mèches peuvent avoir des sections non symétriques variables le long de leur ligne moyenne. Pour ces deux approches, le problème de l’interpénétration, bien qu’il ait été sérieusement réduit sous *WiseTex* [VER 05], reste majeur.

Les travaux de Hivet [HIV 05] sur ce point sont très intéressants. Ces modèles se destinent aux tissés 2D et 3D [WEN 13] en proposant l’absence d’interpénétrations. Les sections sont définies le long des mèches en un certain nombre de points de contrôle, variable selon l’armure étudiée. Ces points de contrôle permettent une prise en compte fine des différentes zones de contact entre mèches. Chaque section de point de contrôle est alors divisée en quatre parties, chacune étant définie par une conique. La mèche finale est ensuite obtenue par balayage. Les points de contrôle d’un sergé 3x2 sont illustrés figure 2.5.

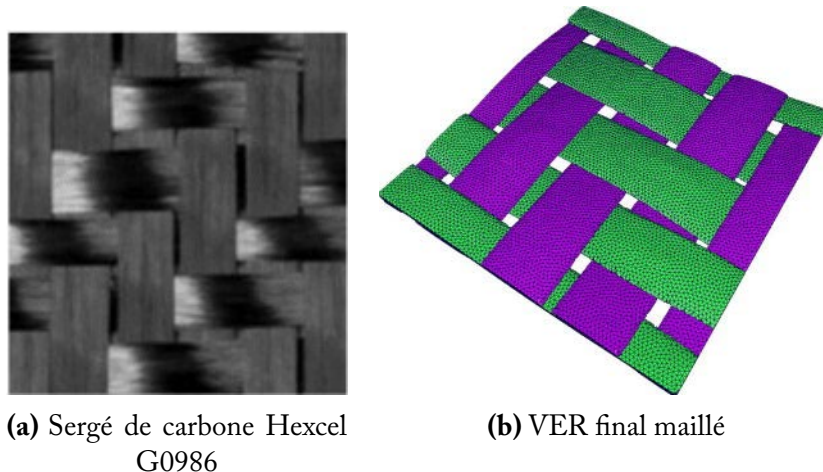
La microtomographie X est la méthode la plus prometteuse afin d’accéder expérimentalement à la géométrie d’une maille élémentaire [BAR 00, DES 05, HSI 09, HER 80, KHA 14]. Cette technique consiste à scanner un échantillon représentatif d’un renfort afin d’en obtenir une cartographie 3D puis de traiter les images obtenues en découpant





**Figure 2.5** – Plans définissant les points de contrôle pour un sergé 3x2 [HIV 05]

les éléments constitutifs (les mèches), en les séparant les uns des autres et en les maillant. La microtomographie a le grand avantage de pouvoir conduire à des modélisations libres d'interpénétrations si les traitements numériques appropriés sont réalisés [NAO 14]. Un exemple d'automatisation du traitement de tissés microtomographiés est montré figure 2.6. Les algorithmes de traitement sont aujourd'hui applicables pour des tissages 2D et sont en cours d'extension aux renforts 3D.

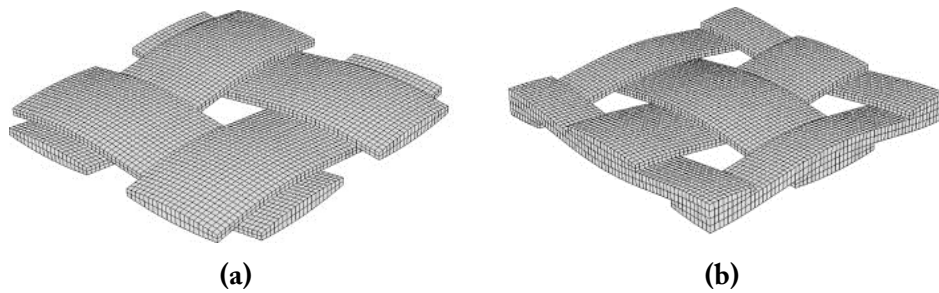


(a) Sergé de carbone Hexcel G0986

(b) VER final maillé

**Figure 2.6** – Modélisation du VER d'un sergé de carbone par traitement d'une microtomographie [NAO 14]

La modélisation mésoscopique de l'ensemble d'un renfort tissé composite pendant une mise en forme étant difficile, la modélisation de Cellules Élémentaires Représentatives (CER) est utilisée. Une CER représente le motif élémentaire le plus petit pouvant être répété afin d'obtenir l'ensemble de l'armure. L'objectif est alors d'étudier le comportement du tissage à une échelle moindre avant de l'étendre à l'ensemble de la pièce. Plusieurs CER différentes peuvent être utilisées pour chaque tissage, menant alors à des conditions limites différentes [BAD 07]. Par exemple, l'utilisation de la CER figure 2.7a est plus difficile à mettre en œuvre que la CER figure 2.7b car une partie des conditions limites ne correspond pas à des points matériels. Le choix de la CER est primordial, de même que sa caractérisation géométrique qui impactera directement les résultats numériques [TAR 01].



**Figure 2.7** – Deux Cellules Élémentaires Représentatives possibles pour une même armure de taffetas [BAD 07]

### 2.1.3 Simulation macroscopique

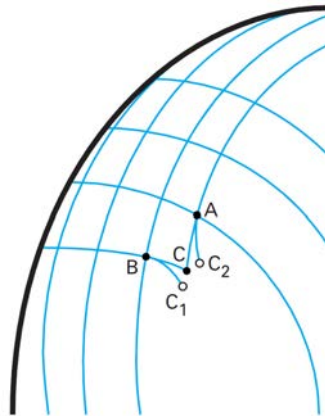
La simulation à l'échelle macroscopique a pour objectif de simuler la mise en forme de renforts tissés à l'échelle de la pièce entière. C'est le but final de la recherche sur la modélisation du préformage des renforts pour composite. L'étude de la formabilité consiste à prévoir l'apparition des divers défauts observables sur les tissés. La possibilité de détecter peu ou beaucoup de défauts observables provient à la fois du type d'approche de modélisation choisie et de la richesse des caractéristiques mécaniques qui leur sont conférées. Ces caractéristiques peuvent provenir d'essais réalisés à l'échelle du tissu ou d'observations/simulations à des échelles moindres, microscopique et mésoscopique. La réutilisation de résultats obtenus à des échelles inférieures constitue d'ailleurs la principale raison d'être des modèles correspondants. Parmi les approches macroscopiques connues, on recense des approches géométriques (basées sur la méthode du filet) ou mécaniques.

#### Approches géométriques

Les approches géométriques se basent sur l'algorithme dit du filet (*Fishnet algorithm*). Cette approche dite géométrique ou cinématique est principalement utilisée pour la simulation du drapage. Sa simplicité d'utilisation et sa rapidité d'exécution en font une bonne méthode de première approche [MAR 56, WEE 91, BOR 02]. Elle est basée sur des hypothèses fortes :

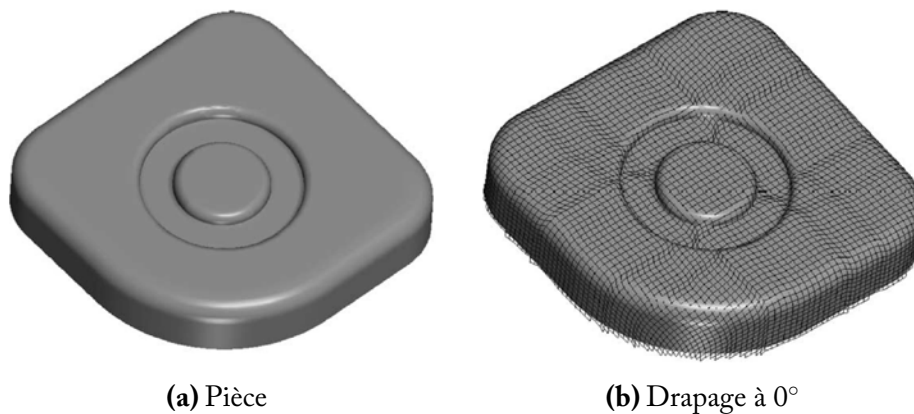
- L'inextensibilité des mèches ;
- Le non-glissement entre chaîne et trame ;
- La rotation libre aux points de croisement entre réseaux ;
- L'absence de considérations complexes de contact (frottement) avec les outils de mise en forme.

Dans cette approche, le renfort est semblable à des barres articulées aux points de croisement entre réseaux. L'algorithme calcule alors la position des points connexes sur des géodésiques tracées sur la surface à draper à partir du point courant. Figure 2.8, la position du point C est calculée grâce à A et B. La position du point initial est ainsi rendue primordiale et influe sur le résultat final [WAN 99].



**Figure 2.8** – Méthode du filet : détermination de la position du point C connaissant celles de A et B [BOI 04]

Avec la suppression de toutes considérations mécaniques et de tissage, les résultats sont identiques quelques soient les rigidités des mèches et l'armure choisie. Les blocages cinématiques en cisaillement et la variation d'épaisseur en compression sont aussi absents de la modélisation de base. L'utilisation de cette méthode pour des tissages épais est, bien évidemment, proscrite. L'absence de prise en compte d'un contact développé empêche l'utilisation d'outils externes tels que des serre-flancs, pourtant nécessaires à certaines mises en forme. Pour les renforts tissés, l'algorithme du filet est intéressant comme approche préliminaire afin de déterminer le degré de complexité du formage d'une pièce. Un exemple d'application sur une pièce complexe est donné figure 2.9.



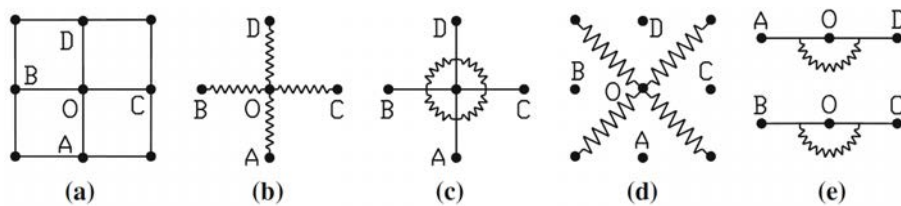
**Figure 2.9** – Drapage d'une pièce complexe avec l'algorithme du filet [BOR 03]

### Approches mécaniques

Parmi les modélisations mécaniques, trois types d'approches peuvent être distingués : discrète, semi-discrète ou continue.

## 2. Simulation macroscopique des renforts tissés épais

Les approches *discrètes* consistent à considérer le textile comme un assemblage discontinu d'éléments déformables [CHE 01, SHA 04, SZE 05, BOU 07]. Ce sont généralement des extensions de la théorie du filet, c'est à dire l'introduction de caractéristiques mécaniques dans la résolution du problème de mise en forme. Le renfort est modélisé par des nœuds reliés entre eux par des barres et ressorts ayant pour but de modéliser la réponse en élongation, cisaillements, torsion et flexion. Les travaux de Sze and Liu [SZE 05] sont notamment intéressants sur la variété des sollicitations modélisées pour des renforts 2D, comme illustré figure 2.10. Ces approches, généralement rencontrées pour les tissus d'habillement, sont délaissées aux profits de méthodes semi-discrètes ou continues dans le cas des tissus techniques. L'extension aux tissés épais, cas étudié ici, paraît d'ailleurs difficile.

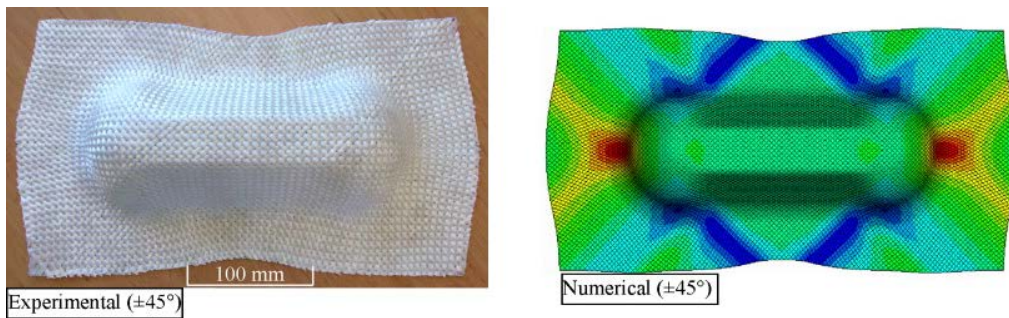


**Figure 2.10** – Modélisation d'une particule  $O$  connectée à ses quatre voisins (a) avec modélisation de l'élongation (b), du cisaillement (c) et (d), et de la flexion (e) [SZE 05]

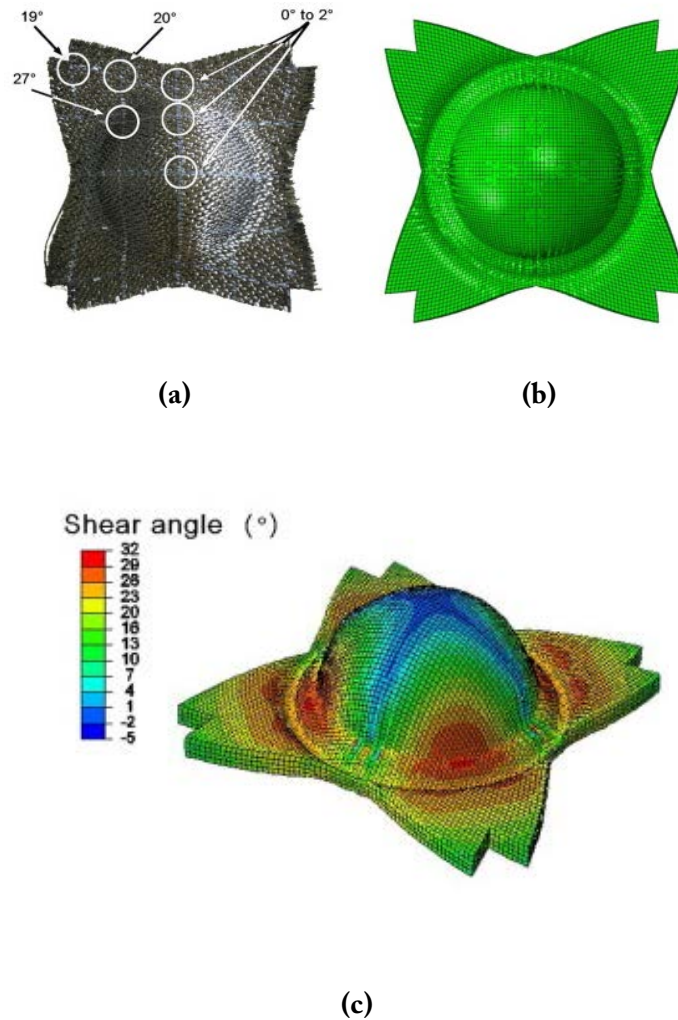
Les approches *continues* font l'hypothèse d'un matériau continu à l'échelle macroscopique. Cette hypothèse découle directement de la considération de non-glissement entre mèches durant la phase de mise en forme, présentée section 1.3.3.1. La considération du textile comme un milieu continu anisotrope dont le comportement est homogénéisé à partir d'échelles inférieures est alors possible. La modélisation est focalisée sur une proposition adaptée de lois de comportement. Différentes approches, qu'elles soient hypoélastiques [PEN 05, BAD 08c, KHA 10] ou hyperélastiques [SPE 72, THI 07, DRI 10, CHA 12], ont donné des résultats probants. Ces lois sont associées à des éléments coques ou plaques pour les tissés fins, figure 2.11, et à des briques pour les tissés épais, figure 2.12. Ces méthodes présentent l'avantage de pouvoir être utilisées facilement dans des codes éléments finis commerciaux. Son inconvénient principal provient justement de l'homogénéisation qui est réalisée. Le même matériau est appliqué en tout point du renfort fibreux à modéliser et ne prend pas en compte les variations des caractéristiques mécaniques inhérentes à l'armure étudiée.

Les approches *semi-discrètes* sont une combinaison des deux approches évoquées ci-dessus. Une partie du comportement est modélisée grâce à un solide continu tandis qu'une autre est modélisée grâce à des apports discrets. On peut alors distinguer deux philosophies dans l'interaction entre parties discrètes et continues.

Dans un premier cas, les parties discrètes et continues sont associées dans un même élément lagrangien. Les efforts générés par une déformation quelconque sont subdivisés entre une contribution de tension associée aux parties discrètes et les autres contributions (cisaillements, compression) associées à la partie continue. Les parties discrètes et continues sont fixes l'une par rapport à l'autre dans la configuration isoparamétrique. Dans ce



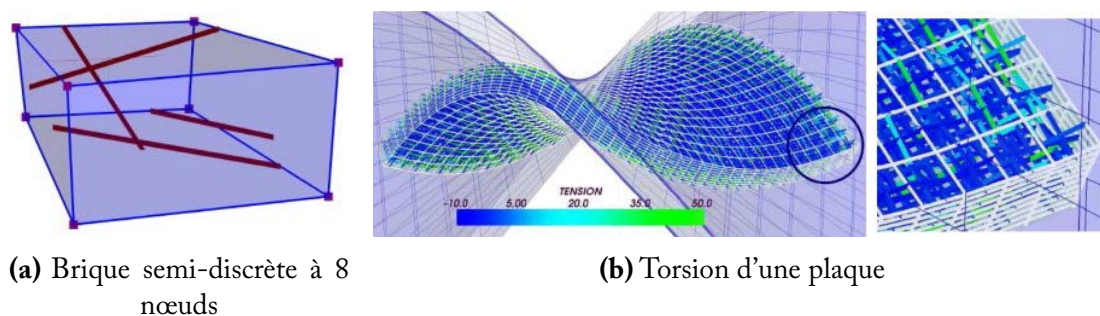
**Figure 2.11** – Résultats expérimentaux et numériques d’un emboutissage de type double dôme avec mèches orientées à  $45^\circ$  sur un tissu 2D [KHA 10]



**Figure 2.12** – Forme expérimentale (a), numérique (b) et angles de cisaillement plan (c) du renfort après formage pour un emboutissage hémisphérique de renfort interlock [LUY 09a, CHA 12]

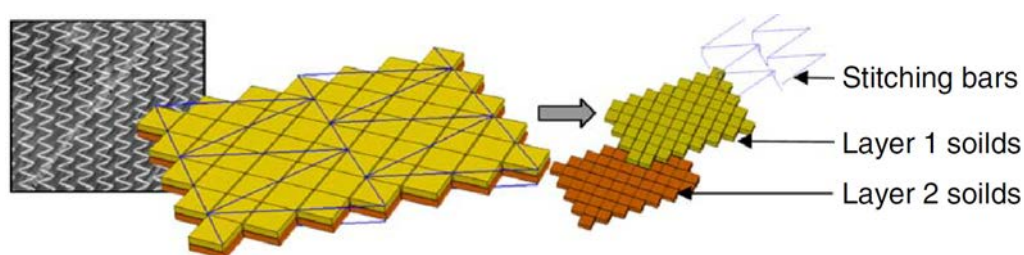


cas-ci, la partie discrète n'est que la représentation élémentaire d'une contribution énergétique de tension. Deux modèles de ce type ont été développés, le premier dédié aux tissus 2D utilisant des éléments plaque [HAM 08], et le second dédié aux interlocks utilisant des éléments brique (hexagonaux) [LUY 09a], figure 2.13. L'intérêt d'un tel élément est de pouvoir représenter plus fidèlement et simplement les directions locales des mèches dans la préforme et de rendre compte de l'anisotropie complexe de ces matériaux.



**Figure 2.13** – Élément brique semi-discrète à 8 nœuds et application [LUY 09b]

Une autre philosophie de modélisation considère les parties discrètes et continues comme totalement indépendantes. C'est le cas, par exemple, de travaux sur les NCF [CRE 06]. Ces tissés spécifiques sont constitués de nappes cousues. Dans cette modélisation, les nappes de mèches sont représentées par des couches d'éléments solides tandis que des éléments barres sont ajoutés pour représenter les coutures, figure 2.14. Ici, les parties continues sont totalement découplées des parties discrètes, impliquant la gestion du contact entre les nappes et les coutures.



**Figure 2.14** – Représentation de deux nappes et des coutures les liant dans un modèle semi-discrète [CRE 06]

Dans la suite du manuscrit, la simulation à l'échelle macroscopique sera sélectionnée. Durant ce travail de thèse, deux types d'approches macroscopiques ont été menées en parallèle : une approche continue basée sur une loi hyperélastique pour renforts interlocks [CHA 12] et une approche semi-discrète [LUY 09b, ORL 12]. L'avancée du travail sur la modélisation de la mise en forme a fait que la modélisation continue a été finalement préférée et avantageuse mais certains développements sont communs. Pour cela, les deux approches seront présentées aux sections 2.2 et 2.3. Dans les deux cas, le développement

de la loi de comportement est réalisé dans l'objectif d'être appliqué à des éléments volumiques hexaédriques à interpolation linéaire.

## 2.2 Approche continue hyperélastique du comportement des renforts épais

### 2.2.1 Cinématique des grandes transformations

Le développement de lois de comportement formulées en grande transformation nécessite une description étendue des mouvements particulières au sein du milieu. Les hypothèses simplificatrices de la théorie des petites perturbations ne peuvent plus être appliquées. Cette partie évoque les principales grandeurs utilisées en mécanique des grandes transformations pour les milieux respectant les hypothèses de Cauchy.

#### 2.2.1.1 Description du mouvement

Le mouvement d'un solide est décrit par la fonction bijective  $\Phi$  :

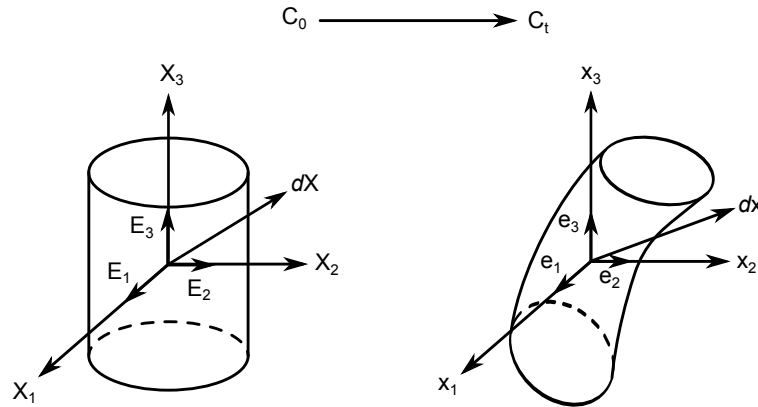
$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \Phi(\boldsymbol{X}, t) \\ \boldsymbol{X} &= \Phi^{-1}(\boldsymbol{x}, t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

qui donne le vecteur position  $\boldsymbol{x}$  à l'instant  $t$  de la particule qui occupait précédemment la position  $\boldsymbol{X}$ . Pour un instant  $t$  fixé, cette fonction définit la déformation en tout point d'un solide entre une configuration de référence  $C_0$  et une configuration actuelle  $C(t)$ , figure 2.15. En mécanique des solides, la configuration de référence  $C_0$  est généralement associée à l'état initial du solide non déformé, ce qui permet d'associer les deux configurations dans le même système d'axe. Les coordonnées dans la configuration  $C_0$  sont alors nommées coordonnées lagrangiennes ou matérielles, tandis que celles associées à la configuration courante  $C(t)$  sont appelées coordonnées eulériennes ou spatiales. Les différentes quantités présentées dans la suite seront écrites par rapport à l'un ou l'autre de ces référentiels. Par abus de langage la dépendance au temps  $t$  sera omise dans la suite en supposant  $t > 0$ .

Pour décrire la cinématique au voisinage d'un point  $X$  donné, l'équation 2.1 est différentiée, ce qui permet d'introduire  $\boldsymbol{F}$  :

$$d\boldsymbol{x} = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{X}} \cdot d\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{X} \quad (2.2)$$

Le tenseur gradient de la transformation  $\boldsymbol{F}$ , également appelé application linéaire tangente, est une application qui transforme un vecteur matériel élémentaire donné  $d\boldsymbol{X}$



**Figure 2.15** – Configuration initiale  $C_0$  et configuration actuelle déformée  $C(t)$

en sa contrepartie eulérienne  $d\mathbf{x}$ .  $\mathbf{F}$  donne une description locale, au premier ordre, de la transformation solide.

On définit aussi la transformation d'un élément de volume élémentaire. Soit un élément de volume dans la configuration de référence,  $d\Omega_0 \in C_0$ . Sa contrepartie déformée dans la configuration courante,  $d\Omega \in C$ , est donnée par le déterminant de la matrice jacobienne du tenseur gradient de la transformation, appelé jacobien :

$$d\Omega = j d\Omega_0 \quad \text{tel que } j = \det(\mathbf{F}) \quad (2.3)$$

L'application  $\Phi$  étant bijective, le jacobien  $j$  est toujours strictement positif. Physiquement, il serait incohérent de trouver un volume élémentaire nul ou négatif. On définit aussi la transformation d'un élément de surface  $d\mathbf{A}$  de normale  $\mathbf{N}$  en configuration initiale en un élément de surface  $d\mathbf{a}$  de normale  $\mathbf{n}$  à l'aide de la formule de Nanson :

$$d\mathbf{a} = j \mathbf{F}^{-T} \cdot d\mathbf{A} \quad (2.4)$$

### 2.2.1.2 Mesures des déformations

Afin de compléter la description du mouvement local, il est nécessaire de caractériser les changements de forme, c'est-à-dire les variations de longueurs et d'angles. Ce sont en fait les variations des produits scalaires de vecteurs matériels  $d\mathbf{X}$  et  $\delta\mathbf{X}$ , devenant  $d\mathbf{x}$  et  $\delta\mathbf{x}$  après transformation. On exprime le produit scalaire des vecteurs matériels déformés :

$$d\mathbf{x} \cdot \delta\mathbf{x} = dx_i \delta x_i = F_{ij} F_{ik} dX_j \delta X_k = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} \cdot \delta\mathbf{X} \quad (2.5)$$

où  $\mathbf{C}$  est le tenseur de Cauchy-Green droit, ou tenseur des dilatations, pouvant s'exprimer sous la forme :

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \quad (2.6)$$



Pour obtenir les déformations, on observe la variation de ces produits scalaires :

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} \cdot \delta\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot \delta\mathbf{X} &= d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} \cdot \delta\mathbf{X} - d\mathbf{X} \cdot \delta\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{I}_2) \cdot \delta\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{X} \end{aligned} \quad (2.7)$$

où  $\mathbf{I}_2$  est le tenseur identité d'ordre 2 et  $\mathbf{E}$  est le tenseur des déformations de Green-Lagrange donné par :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}_2) \quad (2.8)$$

En petites déformations, ce tenseur se confond avec le tenseur des déformations linéarisées  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Les tenseurs  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{E}$  sont définis par rapport à la configuration initiale et à des variations de vecteurs matériels élémentaires. À ce titre, ils sont qualifiés de lagrangiens. En reprenant le même processus, en exprimant  $d\mathbf{X} \cdot \delta\mathbf{X}$  puis la variation des produits scalaires dans la base spatiale, on obtient leurs équivalents eulériens en configuration courante :

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \quad (2.9)$$

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{B}^{-1}) \quad (2.10)$$

avec  $\mathbf{B}$  tenseur de Cauchy-Green gauche et  $\mathbf{e}$  le tenseur des déformations d'Euler-Almansi.

L'écriture du principe des puissances virtuelles, ainsi que certaines loi de comportement (hypoélastiques, viscoélastiques), nécessitent de définir la notion de vitesse de déformation. En différenciant l'équation 2.2 par rapport au temps, on obtient :

$$d\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{X} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{L} \cdot d\mathbf{x} \quad (2.11)$$

où  $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}$  est appelé tenseur gradient de vitesse. Sa décomposition en deux parties symétrique et antisymétrique permet de définir les tenseurs taux de déformation  $\mathbf{D}$  et taux de rotation  $\boldsymbol{\omega}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{D} + \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{D} &= \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \quad (2.13)$$

Le taux de déformation décrit la vitesse de déformation du solide considéré. Cette mesure est associée à la configuration actuelle. Pour que cette vitesse de déformation soit mesurée dans la configuration initiale,  $\mathbf{D}$  est transporté :

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} \quad (2.14)$$

où  $\dot{\mathbf{E}}$  est la vitesse de déformation lagrangienne.

### 2.2.1.3 Mesures des contraintes

On considère un solide virtuellement coupé en deux sous-domaines, avant et après déformation, figure 2.16. L'équilibre de ces deux sous-domaines, dans chaque configuration, impose l'existence de forces internes appliquées aux zones frontières. Soit un élément de surface  $ds$  dans la configuration eulérienne soumis à un effort  $d\mathbf{f}$ . Le vecteur contrainte  $\mathbf{t}$  est défini dans la configuration actuelle :

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{f}}{ds} \quad (2.15)$$

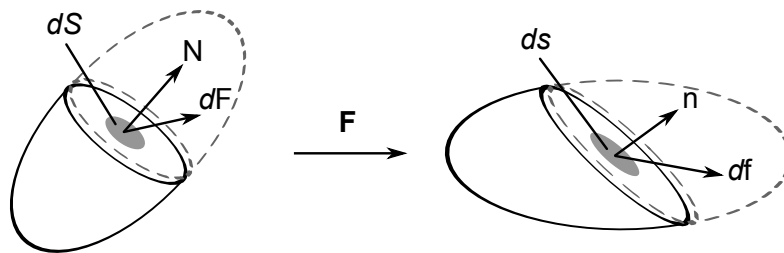


Figure 2.16 – Définition du vecteur contrainte

Selon le postulat effectué par Cauchy, le vecteur contrainte reste inchangé pour toute surface passant par le même point matériel et ayant la même normale. Pour une surface élémentaire, seule la normale  $\mathbf{n}$  est donc influente, et non sa courbure. Il existe alors un tenseur d'ordre deux, nommé tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ , tel que :

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad (2.16)$$

soit :

$$d\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} ds \quad (2.17)$$

Le raisonnement classique de la mécanique des milieux continus est donc eulérien et définit un tenseur eulérien des contraintes,  $\boldsymbol{\sigma}$ , symétrique. De même que pour les différentes mesures de déformations, il est possible de transporter ce tenseur pour définir d'autres mesures des contraintes. En notant  $d\mathbf{F}$ ,  $dS$  et  $\mathbf{N}$  l'effort, la surface élémentaire

et la normale à cette surface dans la configuration initiale, les trois tenseurs suivants sont définis :

$$\begin{aligned} d\mathbf{f} &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{N} dS \\ d\mathbf{F} &= \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} ds \\ d\mathbf{F} &= \mathbf{S} \cdot \mathbf{N} dS \end{aligned} \quad (2.18)$$

Ces tenseurs sont nommés tenseur de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{P}$ , tenseur de Kirchhoff  $\boldsymbol{\tau}$  et second tenseur de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$ . Ils lient surfaces et efforts élémentaires entre les configurations initiales et actuelles. On obtient facilement des formules permettant de les lier grâce aux transformations matérielles définies :

$$\boldsymbol{\tau} = j\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \quad (2.19)$$

En reprenant les définitions précédentes des adjectifs lagrangien et eulérien en fonction des configurations auxquelles sont associés les tenseurs, le tenseur de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  sera dit eulérien tandis que le second tenseur de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$  sera dit lagrangien. Les tenseurs de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{P}$  et de Kirchhoff  $\boldsymbol{\tau}$ , ni eulériens ni lagrangiens, seront dits bipoints. Du point de vue physique, seuls les tenseurs  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\mathbf{P}$  ont une signification directe car ils caractérisent les efforts appliqués.

#### 2.2.1.4 Dualité contrainte-déformation

La dualité entre les mesures de déformation et de contraintes introduites précédemment joue un rôle très important dans la formulation des énergies internes des corps déformables. Toutes les mesures de contrainte définies section 2.2.1.3 peuvent être utilisées afin d'exprimer l'énergie interne d'un corps. Cependant, si une certaine mesure de déformation est choisie, le tenseur contrainte associé ne peut être sélectionné arbitrairement. Toute mesure de contrainte est reliée à travers le taux d'énergie interne, donc la puissance interne, à une mesure de déformation bien définie. Les mesures de déformation et de contrainte possédant ces propriétés sont dits énergétiquement conjuguées. En définissant le taux d'énergie interne par unité de volume  $\rho\dot{\psi}$ , les densités massiques initiale et courante  $\rho_0$  et  $\rho$ , et le taux de densité massique d'énergie interne  $\dot{\psi}$ , on obtient les conjugués suivants :

$$\begin{aligned} \rho_0\dot{\psi} &= \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} && \text{En description matérielle} \\ \rho\dot{\psi} &= \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = \frac{1}{j}\boldsymbol{\tau} : \mathbf{D} && \text{En description spatiale} \end{aligned} \quad (2.20)$$

#### 2.2.1.5 Loi de comportement, anisotropie et objectivité

La loi de comportement relie les contraintes aux déformations subies par le matériau. C'est elle qui traduit son comportement physique. En correspondance avec la diversité

des comportements observables, il existe tout autant de modèles disponibles. On peut distinguer trois types de lois de comportement [SID 82] :

- Les lois hypoélastiques où une vitesse de déformation est liée à un taux de contrainte. Ces lois sont fréquemment utilisées pour des matériaux à la réponse peu anisotrope. Elles sont faciles à mettre en place et adaptées aux résolutions réactualisées. Les contraintes et énergies de déformation peuvent ne pas être indépendantes de l'historique de déformation ;
- Les lois élastiques (ou Cauchy élastique) où une mesure de la déformation est liée à une mesure de la contrainte. Les contraintes sont indépendantes de l'historique de déformation tandis que l'énergie de déformation peut ne pas l'être. Ces formulations sont très faiblement utilisées dans le cadre des grandes transformations ;
- Les lois hyperélastiques où une densité d'énergie de déformation est définie comme étant un potentiel des contraintes. Les contraintes et énergies de déformation sont indépendantes de l'historique de déformation.

En cinématique des grandes transformations, le mouvement peut être décomposé en une rotation de corps rigide et une déformation. La rotation du milieu continu, négligeable en petites perturbations, ne l'est plus. Cependant, seule la déformation du milieu est intéressante dans l'établissement de la loi de comportement. Une loi de comportement doit alors vérifier le principe d'indifférence matérielle, c'est-à-dire qu'elle doit être indépendante du repère dans lequel elle est appliquée. Elle devra donc s'exprimer comme une relation entre des quantités *objectives*, indépendantes de l'observateur. Cette objectivité n'est pas aisée à obtenir pour toutes ces lois, notamment les lois hypoélastiques. Ce sont les plus touchées par cette problématique car la dérivée par rapport au temps d'un tenseur objectif n'est pas forcément objective. Pour résoudre ces problèmes, des dérivées objectives ont été construites afin d'éliminer les rotations parasites en décrivant le tenseur à dériver dans un repère plus ou moins lié à la matière.

La plupart des modélisations décrites section 2.1 utilisent des lois de comportement hypoélastiques pour décrire le comportement des mèches ou des renforts. Cependant, les travaux de Hagège [HAG 04] ont permis de montrer que l'utilisation de dérivées objectives classiques, telles que celles de Green-Naghdi et Jaumann, ne garantit pas le suivi des directions d'anisotropie et donc l'objectivité de la loi de comportement. Les repères associés à ces dérivées tournent selon des rotations moyennes de la matière et ne suivent pas précisément la transformation des directions d'anisotropie. Ces travaux introduisent une nouvelle dérivée objective, propre aux mèches, appliquée aux renforts tricotés [HAG 04] puis étendue aux tissés [BAD 08c]. Cependant, bien qu'utilisable lors du suivi d'une seule direction comme dans le cas des mèches, l'extension au suivi simultané de plusieurs directions d'anisotropie reste très complexe. Ce formalisme, évoqué dans [HAG 04], utilise des concepts mathématiques lourds, telles que les dérivées de Lie, compliquant leur développement. Ces modèles hypoélastiques posent un autre problème : les calculs des contraintes et de l'énergie de déformation ne sont pas forcément indépendants de l'historique de déformation. Il est alors possible de dissiper de l'énergie lors d'un chargement cyclique. L'utilisation d'une loi hyperélastique adaptée aux renforts épais de composite lui sera préférée [CHA 12, ORL 12].

## 2.2.2 Hyperélasticité des renforts interlock

La définition de lois de comportement hyperélastiques est basée sur le premier et le second principe de la thermodynamique. L'inégalité de Clausius-Duhem constitue leur point de départ. Ce type de loi diffère donc des lois hypoélastiques, dans le sens où ces dernières sont dépourvues de fondements thermodynamiques. Nous utiliserons dans ce manuscrit une version améliorée de la loi hyperélastique à invariants physiques proposée par Charmetant [CHA 12].

### 2.2.2.1 La formulation hyperélastique

Dans la configuration initiale et dans la configuration actuelle déformée, l'inégalité de Clausius-Duhem s'exprime, respectivement :

$$\Phi_0 = -\rho_0(\dot{\psi} - \dot{\theta}\eta) - \frac{1}{\theta} \mathbf{Q} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} \geq 0 \quad (2.21)$$

$$\Phi = -\rho(\dot{\psi} - \dot{\theta}\eta) - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{X}} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \geq 0 \quad (2.22)$$

où  $\Phi_0$  et  $\Phi$  sont les dissipations par unité de volume initial et final,  $\psi$  est l'énergie libre spécifique (i.e. par unité de masse),  $\theta$  est la température,  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{q}$  sont les vecteurs flux de chaleur en configuration initiale et en configuration actuelle. Les effets thermiques n'étant pas pris en compte dans ce manuscrit, la température est homogène et la transformation isotherme. Les dissipations s'expriment alors :

$$\Phi_0 = -\rho_0 \dot{\psi} + \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} \quad (2.23)$$

$$\Phi = -\rho \dot{\psi} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \quad (2.24)$$

Un matériau hyperélastique est un matériau dont l'énergie de déformation par unité de volume initial  $w = \rho_0 \psi$  ne dépend que de l'état actuel de déformation et qui est non dissipatif, c'est-à-dire que les dissipations (équations 2.23 et 2.24) sont nulles. On peut déduire de ces deux conditions les équations suivantes, relations de base des lois de comportement hyperélastiques :

$$w(\mathbf{F}) = \rho_0 \psi \quad (2.25)$$

$$\dot{w}(\mathbf{F}) = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} \quad (2.26)$$

Il a été montré [CIA 88] que pour respecter le principe d'indifférence matérielle, il faut et il suffit que l'énergie de déformation soit une fonction du tenseur de Cauchy-Green droit :

$$w(\mathbf{C}) = \rho_0 \Psi \quad (2.27)$$

$$\dot{w}(\mathbf{C}) = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} \quad (2.28)$$

Ainsi, les problématiques liées aux dérivées objectives n'ont pas lieu d'être dans ce type de formulation. En différentiant 2.28 par rapport à  $\mathbf{C}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{w}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} (\mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}) \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial w(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} - \frac{1}{2} \mathbf{S} \right) \\ \Rightarrow \mathbf{S} &= 2 \frac{\partial w(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \end{aligned} \quad (2.29)$$

L'équation 2.29 constitue l'expression générale des lois de comportement hyperélastiques. Ces dernières nécessitent alors uniquement la définition de l'énergie de déformation  $w$  correspondant au comportement mécanique du matériau. Ce potentiel n'est admissible que s'il vérifie les conditions suivantes :

—  $w$  s'annule lorsque le matériau n'est soumis à aucune sollicitation :

$$w(\mathbf{I}_2) = 0 \quad (2.30)$$

—  $w$  respecte le principe d'indifférence matérielle :

$$w(\mathbf{F}) = w(\mathbf{QF}), \forall \mathbf{Q} \in SO_3 \quad (2.31)$$

—  $w$  respecte les symétries du matériau :

$$w(\mathbf{F}) = w(\mathbf{FQ}), \forall \mathbf{Q} \in \mathcal{G} \subset SO_3 \quad (2.32)$$

où  $\mathcal{G}$  est le groupe de symétries du matériau. La condition 2.30 dépend de la forme choisie pour l'énergie de déformation et devra être vérifiée lors de son établissement concret. La condition 2.31 est satisfaite par l'utilisation du tenseur de Cauchy-Green droit comme argument de  $w$ . La condition 2.32 est satisfaite par l'introduction d'invariants du tenseur de Cauchy-Green droit.

La définition des rigidités matérielles courantes, dites rigidités tangentes, sera utile dans la suite du développement de la loi. La dérivée temporelle de 2.29 donne :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{S}} &= 4 \frac{\partial^2 w(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} : \dot{\mathbf{E}} \\ &= \mathbf{C}^{SE} : \dot{\mathbf{E}} \end{aligned} \quad (2.33)$$

où  $C^{SE}$  est le tenseur matériel tangent, aussi appelé second tenseur d'élasticité. La rigidité matérielle tangente d'une loi de comportement doit respecter certaines propriétés mathématiques provenant de la définition même de la densité de déformation élastique. Ces conditions complexes à respecter seront détaillées section 2.2.3 et évoquées section 2.2.2.4.

### 2.2.2.2 Hyperélasticité orthotrope des interlocks

Les renforts interlocks sont constitués d'un réseau de chaînes et d'un réseau de trames, orthogonaux dans la configuration initiale. Le matériau homogénéisé correspondant peut donc être considéré comme orthotrope en configuration initiale, avec pour directions privilégiées :

- La direction des mèches de chaîne  $M_1$  ;
- La direction des mèches de trame  $M_2$  ;
- La direction transverse  $M_3$ , orthogonale aux deux précédentes.

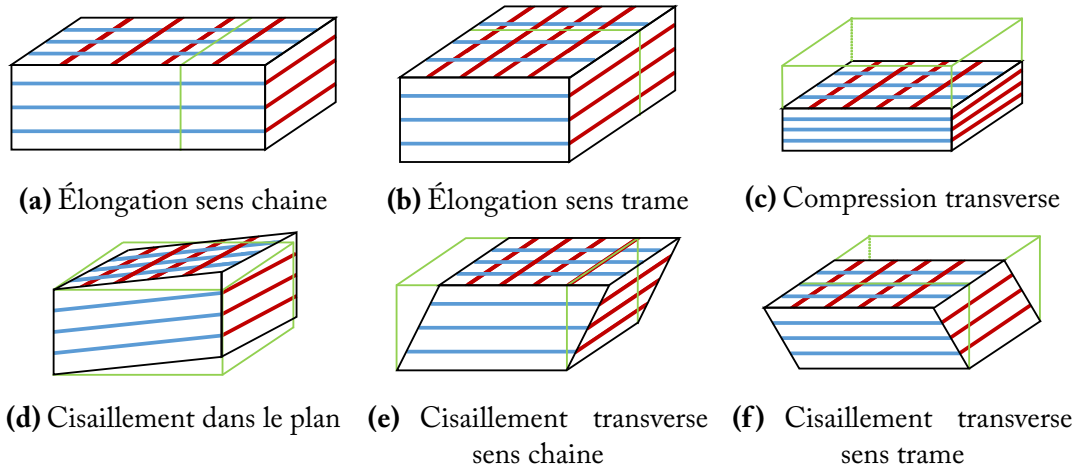
Les modes de déformation des renforts interlocks sont similaires à ceux des renforts tissés 2D (élongation des mèches et cisaillement plan), auxquels s'ajoutent les modes de déformation liés à l'épaisseur du renfort. Les modes de déformation suivants sont considérés [CHA 11b] :

- L'élongation du renfort dans la direction chaîne ;
- L'élongation du renfort dans la direction trame ;
- La compression transverse du renfort ;
- Le cisaillement du renfort dans le plan ;
- Le cisaillement transverse sens chaîne ;
- Le cisaillement transverse sens trame.

Ces modes de déformation, illustrés figure 2.17, sont supposés découplés. La plupart des modes de déformation des renforts interlocks peuvent être caractérisés expérimentalement de façon directe.

Plusieurs types d'anélasticité ont été mis en évidence lors de la caractérisation expérimentale du comportement mécanique associé à ces différents modes de déformation. A l'échelle de la mésostructure et de la microstructure, il existe des dissipations induites par les frottements entre les mèches et entre les fibres. Par ailleurs, les possibles réarrangements des fibres induisent des phénomènes de relaxation dans le comportement de la plupart de ces modes de déformation, et ont notamment une influence pour les cas de chargement cycliques. Seuls des cas de chargement simples, quasi statiques, ont été étudiés ; c'est pourquoi le comportement plastique ou visqueux associé à ces phénomènes n'est pas inclus dans la loi de comportement. Les comportements mécaniques associés aux différents modes de déformation seront supposés élastiques non linéaires.

Il est commun de développer des lois hyperélastiques basées soit sur des déformations, soit sur des invariants de la transformation. La seconde solution a été choisie. Le théorème de représentation permet alors l'écriture de la fonction densité d'énergie de déformation en fonction d'invariants de la transformation pour un comportement orthotrope [QUA 94,



**Figure 2.17** – Modes de déformation des renforts interlocks

EHR 07] :

$$w^{orth} = w^{orth}(I_1, I_2, I_3, I_{41}, I_{42}, I_{43}, I_{412}, I_{413}, I_{423}, I_{51}, I_{52}, I_{53}) \quad (2.34)$$

où l'on retrouve  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  qui sont les invariants classiques de Cauchy-Green droit :

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{Tr}(\mathbf{C}) \\ I_2 &= \frac{1}{2} \left( \text{Tr}(\mathbf{C})^2 - \text{Tr}(\mathbf{C}^2) \right) \\ I_3 &= \text{Det}(\mathbf{C}) \end{aligned} \quad (2.35)$$

et les invariants propres à l'orthotropie, liés aux trois directions principales et aux tenseurs de structure  $\mathbf{M}_{ij} = \mathbf{M}_i \otimes \mathbf{M}_j$ . Ces invariants sont dits mixtes :

$$\begin{aligned} I_{4i} &= \mathbf{C} : \mathbf{M}_{ii} = \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{M}_i \\ I_{4ij} &= \mathbf{C} : \mathbf{M}_{ij} = \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{M}_j \\ I_{5i} &= \mathbf{C}^2 : \mathbf{M}_{ii} = \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{M}_i \end{aligned} \quad (2.36)$$

### 2.2.2.3 Invariants physiques de la transformation

Les invariants du tenseur de Cauchy-Green droit  $\mathbf{C}$  présentés précédemment pour un matériau orthotrope ne sont pas directement porteurs de sens physique. Les six modes de déformation principaux du renfort ont alors été traduits sous forme de combinaisons d'invariants [CHA 11b]. Les invariants suivants sont définis pour décrire la transformation :



$$I_{elong1} = \ln(\sqrt{I_{41}}) \quad (2.37)$$

$$I_{elong2} = \ln(\sqrt{I_{42}}) \quad (2.38)$$

$$I_{comp} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{I_3}{I_{41}I_{42}(1 - I_{cp}^2)}\right) \quad (2.39)$$

$$I_{cp} = \frac{I_{412}}{\sqrt{I_{41}I_{42}}} = \sin(\gamma) \quad (2.40)$$

$$I_{ct1} = \frac{I_{413}}{\sqrt{I_{41}I_{43}}} = \sin(\alpha_{13}) \quad (2.41)$$

$$I_{ct2} = \frac{I_{423}}{\sqrt{I_{42}I_{43}}} = \sin(\alpha_{23}) \quad (2.42)$$

où :

- $I_{elong1}$  est l'invariant associé à l'élongation dans la direction  $\mathbf{M}_1$ . Il peut être interprété comme la déformation de Green-Lagrange dans cette direction.
- $I_{elong2}$  est l'invariant associé à l'élongation dans la direction  $\mathbf{M}_2$ . Il peut être interprété comme la déformation de Green-Lagrange dans cette direction.
- $I_{comp}$  est l'invariant associé à la compression dans la direction  $\mathbf{M}_3$ . Sa forme est modifiée par rapport à [CHA 12] et la raison de cette expression est détaillée annexe A.
- $I_{cp}$  est l'invariant associé au cisaillement dans le plan  $(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2)$  où  $\gamma$  est l'angle de cisaillement dans le plan chaîne/trame.
- $I_{ct1}$  est l'invariant de cisaillement transverse associé au cisaillement dans le plan  $(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_3)$ , c'est-à-dire dans la direction des mèches de chaîne, où  $\alpha_{13}$  est l'angle de cisaillement.
- $I_{ct2}$  est l'invariant de cisaillement transverse associé au cisaillement dans le plan  $(\mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3)$ , c'est-à-dire dans la direction des mèches de trame, où  $\alpha_{23}$  est l'angle de cisaillement.

L'énergie volumique de déformation peut alors être exprimée en fonction de ces invariants physiques grâce à l'hypothèse de découplage :

$$w = w_{elong1}(I_{elong1}) + w_{elong2}(I_{elong2}) + w_{comp}(I_{comp}) + w_{cp}(I_{cp}) + w_{ct1}(I_{ct1}) + w_{ct2}(I_{ct2}) \quad (2.43)$$

A partir de cette énergie volumique, on obtient le second tenseur de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$  (équation 2.29) :

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial w}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial w}{\partial I_k} \frac{\partial I_k}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial w_k}{\partial I_k} \frac{\partial I_k}{\partial \mathbf{C}} \quad (2.44)$$

avec  $I_k$  un invariant porteur de sens physique et  $w_k$  l'énergie élastique correspondante. Il est possible de simplifier chaque dérivée partielle de l'énergie par rapport aux invariants

physiques de manière à n'obtenir que la dérivée de chaque contribution énergétique par l'invariant associé. Cette simplification n'est possible que par ce que tous les invariants sont indépendants les uns des autres :

$$\frac{\partial I_i}{\partial I_j} = \delta_{ij} \quad (2.45)$$

L'obtention du second tenseur de Piola-Kirchhoff nécessite le calcul de deux dérivées différentes par mode de déformation : la dérivée de l'énergie volumique associée par rapport à l'invariant  $\partial w_k / \partial I_k$  ainsi que la dérivée de l'invariant par rapport au tenseur de Cauchy-Green droit  $\partial I_k / \partial \mathbf{C}$ . Les dérivées des invariants peuvent être calculées a priori :

$$\frac{\partial I_{elong1}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2I_{41}} \mathbf{M}_{11} \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial I_{elong2}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2I_{42}} \mathbf{M}_{22} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{comp}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{C}^{-1} - \frac{1}{I_{41}(1-I_{cp}^2)} \mathbf{M}_{11} - \frac{1}{I_{42}(1-I_{cp}^2)} \mathbf{M}_{22} \right. \\ \left. + \frac{I_{cp}}{\sqrt{I_{41}I_{42}}(1-I_{cp}^2)} (\mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_2 \otimes \mathbf{M}_1) \right] \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial I_{cp}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2\sqrt{I_{41}I_{42}}} (\mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_2 \otimes \mathbf{M}_1) - \frac{I_{cp}}{2I_{41}} \mathbf{M}_{11} - \frac{I_{cp}}{2I_{42}} \mathbf{M}_{22} \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial I_{ct1}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2\sqrt{I_{41}I_{43}}} (\mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_3 \otimes \mathbf{M}_1) - \frac{I_{ct1}}{2I_{41}} \mathbf{M}_{11} - \frac{I_{ct1}}{2I_{43}} \mathbf{M}_{33} \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial I_{ct2}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2\sqrt{I_{42}I_{43}}} (\mathbf{M}_2 \otimes \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_3 \otimes \mathbf{M}_2) - \frac{I_{ct2}}{2I_{42}} \mathbf{M}_{22} - \frac{I_{ct2}}{2I_{43}} \mathbf{M}_{33} \quad (2.51)$$

#### 2.2.2.4 Détermination du format des densités d'énergie de déformation

Les densités d'énergie de déformation, ou potentiels, doivent respecter les règles de construction principales suivantes :

- Quand le matériau est au repos l'énergie doit retranscrire cet état libre de contrainte. Quand aucune sollicitation n'est présente l'énergie volumique développée, ainsi que la contrainte induite, doivent être nulles :

$$w|_{\mathbf{C}=\mathbf{I}_2} = 0 \quad (2.52)$$

$$\mathbf{S}|_{\mathbf{C}=\mathbf{I}_2} = 2 \frac{\partial w}{\partial \mathbf{C}} \Big|_{\mathbf{C}=\mathbf{I}_2} = 0 \quad (2.53)$$

- La stabilité de l'élément fini doit être assurée par une condition sur la matrice des rigidités tangentes. Celle-ci doit être définie positive ;

- La fonction énergie doit être de classe  $C^2$ . L'énergie volumique  $w$ , sa première dérivée et sa seconde dérivée doivent être continues pour l'ensemble des valeurs prises par leurs variables ;
- Les fonctions définissant l'énergie doivent être construites de telle manière qu'elles puissent retranscrire l'énergie de déformation du matériau pour l'ensemble des valeurs que peuvent prendre les 6 invariants physiques.

L'obtention d'une identification correcte du comportement n'est pas chose aisée lorsque le comportement est, comme ici, fortement non linéaire. Les fonctions précédemment développées par [CHA 11b] afin de modéliser le comportement des interlocks ont été réalisées de manière à ce que les coefficients utilisés soit physiquement identifiables. Ainsi l'identification s'en révélait facilitée. Cependant des difficultés apparaissent :

- Des sauts de rigidités ont été rencontrés dans la modélisation du comportement en tension ;
- Chaque mode de déformation possède un potentiel dont le format lui est propre, non polyvalent.

Pour résoudre ces problèmes, nous décidons de nous affranchir de la corrélation entre paramètres d'identification et physique du problème. La base la plus simple à utiliser pour une identification est la base polynomiale :

$$f(x) = \sum_{i=0}^n k_i x^i \quad (2.54)$$

où les  $k_i$  sont les paramètres à trouver,  $x$  le paramètre et  $f(x)$  la fonction à reproduire. Pour un  $n$  suffisamment grand, toutes les fonctions peuvent être identifiées. Cependant, des oscillations peuvent être observées quand le degré du polynôme interpolant est augmenté pour améliorer la précision. La raison pour laquelle l'interpolation se trouve parfois en défaut peut s'expliquer par le phénomène de Runge. Ce phénomène montre que pour des grandes valeurs de  $n$ , le polynôme d'interpolation peut osciller entre les points entrés en données. Ce résultat est important parce qu'il montre qu'augmenter l'ordre des degrés n'augmente pas forcément la précision si la répartition des données à identifier n'est pas de bonne qualité. Ce phénomène est similaire au phénomène de Gibbs pour les séries de Fourier.

Les règles définies précédemment imposent des conditions sur la forme de l'identification polynomiale. Pour commencer, la densité d'énergie de déformation  $w$  associée à un invariant physique  $I$  est définie :

$$w(I) = \sum_{i=0}^n k_i I^i \quad (2.55)$$

Chaque invariant physique  $I$  est défini de manière à ce que sa valeur soit nulle quand le matériau est libre de toute contrainte. La condition 2.52 apporte une première contrainte à la définition de l'énergie 2.55. Celle-ci devant être nulle au repos, le coefficient  $k_0$  est obligatoirement nul.

La condition 2.53 fournit une seconde indication. La contrainte, liée à la dérivée du potentiel par rapport à Cauchy-Green droit, doit être nulle pour un matériau non déformé et n'ayant pas stocké de déformation. Le calcul de cette contrainte  $\mathbf{S}$  est réalisé grâce à deux types de dérivées partielles (équation 2.44) : les  $\partial w_k / \partial I_k$  qui sont des scalaires et les  $\partial I_k / \partial \mathbf{C}$  qui sont les composantes tensorielles de la contrainte. La nullité ou non de  $\mathbf{S}$  est directement liée aux scalaires  $\partial w_k / \partial I_k$ . Par conséquent, afin de vérifier cette seconde condition,  $k_1$  doit être pris nul dans 2.55.

La troisième condition vient de la constitution de la matrice des rigidités tangentes de l'élément fini considéré. Elle provient de la stationnarité du potentiel total d'énergie [LAN 62]. La seconde variation du potentiel total  $\Pi$  donne :

$$\delta^2 \Pi = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_T \mathbf{u} \quad (2.56)$$

où  $\delta \mathbf{u}$  est la variation du vecteur déplacement des nœuds de l'élément et  $\mathbf{K}_T$  la matrice des rigidités tangentes. Le critère de stabilité est donné par la positivité de cette seconde variation et, inversement, une instabilité par une valeur négative. En d'autres mots, si  $\mathbf{K}_T$  est définie positive, alors l'élément est stable. Ce critère est d'une grande utilité dans l'investigation de la stabilité en grandes perturbations [VEU 68]. Il est aussi possible de déterminer le signe du déterminant de  $\mathbf{K}_T$ . Ce critère peut être écrit :

$$\delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_{mat} \mathbf{u} + \delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_{geo} \mathbf{u} > 0 \quad (2.57)$$

où  $\mathbf{K}_{mat}$  est la matrice des rigidités matérielles et  $\mathbf{K}_{geo}$  celle des rigidités géométriques, propre aux grandes transformations. En utilisant le second tenseur de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$  et le second tenseur d'élasticité  $\mathbf{C}^{SE}$ , ces quantités sont exprimées :

$$\mathbf{K}_{mat} = \int_{\Omega_0} \mathbf{B}_0^T \mathbf{C}^{SE} \mathbf{B}_0 d\Omega \quad (2.58)$$

$$\mathbf{K}_{IJ}^{geo} = \mathbf{I}_3 \int_{\Omega_0} \mathcal{B}_{0I}^T \mathbf{S} \mathcal{B}_{0J} d\Omega \quad (2.59)$$

où  $\mathbf{B}_0$  est la matrice permettant d'interpoler le taux de déformation lagrangien  $\dot{\mathbf{E}}$  à partir des déplacements nodaux et  $\mathcal{B}_0$  la matrice des dérivées des fonctions de forme d'indice  $I$  dans la base lagrangienne, permettant d'interpoler la vitesse de déformation  $\dot{\mathbf{F}}$  [BEL 00],  $\mathbf{I}_3$  la matrice identité de dimension 3, et  $\mathbf{K}_{IJ}^{geo}$  la composante  $I, J$  de dimension 3 de  $\mathbf{K}_{geo}$ .

La condition de stationnarité de l'énergie potentielle devra être vérifiée pour chaque identification réalisée dans les paragraphes suivants et implique que la représentation matricielle du second tenseur d'élasticité  $\mathbf{C}^{SE}$  soit définie positive. De même que précédemment pour les contraintes, ce sont les scalaires  $\partial^2 w_k / (\partial I_k \partial I_k)$  qui influent sur cette positivité. Par conséquent, afin de vérifier cette dernière condition,  $k_2$  doit être pris strictement supérieur à zéro dans 2.55. On se retrouve avec une forme compatible pour la densité d'énergie telle que :

$$w(I) = \sum_{i=2}^n k_i I^i \quad \text{avec } k_2 > 0 \quad (2.60)$$

Par soucis de ne pas introduire un nombre trop important de paramètres tout en permettant une identification réaliste et précise du comportement, on limite le nombre de paramètres  $k_i$  à 6. De plus on découple le comportement entre valeurs négatives et positives des invariants :

$$w = \begin{cases} k_1 I^2 + k_2 I^3 + k_3 I^4 + k_4 I^5 + k_5 I^6 + k_6 I^7 & \text{Si } I \leq 0 \\ k_1 I^2 + k_7 I^3 + k_8 I^4 + k_9 I^5 + k_{10} I^6 + k_{11} I^7 & \text{Si } I > 0 \end{cases} \quad (2.61)$$

avec un premier coefficient identique  $k_1$  dans les deux cas pour assurer la continuité de la seconde dérivée par rapport à l'invariant, et donc l'appartenance à la classe  $\mathcal{C}^2$  du potentiel.

Les identifications sont généralement réalisées sur une certaine gamme de variation de l'invariant. Cependant, il peut arriver lors du calcul numérique que l'invariant sorte de cet intervalle d'identification. Afin d'assurer la vérification des conditions précédemment détaillées en dehors du domaine d'identification, on considère des limites. Un développement en série de Taylor du second ordre permet alors que le calcul de l'énergie en delà des limites assure la continuité de la rigidité  $\forall I$  :

$$w = \begin{cases} w(I_0^-) + \frac{\partial w}{\partial I} \Big|_{I=I_0^-} (I - I_0^-) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial I \partial I} \Big|_{I=I_0^-} (I - I_0^-)^2 & \text{Si } I < I_0^- \\ k_1 I^2 + k_2 I^3 + k_3 I^4 + k_4 I^5 + k_5 I^6 + k_6 I^7 & \text{Si } I \leq 0 \\ k_1 I^2 + k_7 I^3 + k_8 I^4 + k_9 I^5 + k_{10} I^6 + k_{11} I^7 & \text{Si } I > 0 \\ w(I_0^+) + \frac{\partial w}{\partial I} \Big|_{I=I_0^+} (I - I_0^+) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial I \partial I} \Big|_{I=I_0^+} (I - I_0^+)^2 & \text{Si } I > I_0^+ \end{cases} \quad (2.62)$$

Puis pour la première dérivée par rapport à l'invariant :

$$\frac{\partial w}{\partial I} = \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial I} \Big|_{I=I_0^-} + \frac{\partial^2 w}{\partial I \partial I} \Big|_{I=I_0^-} (I - I_0^-) & \text{Si } I < I_0^- \\ 2k_1 I + 3k_2 I^2 + 4k_3 I^3 + 5k_4 I^4 + 6k_5 I^5 + 7k_6 I^6 & \text{Si } I \leq 0 \\ 2k_1 I + 3k_7 I^2 + 4k_8 I^3 + 5k_9 I^4 + 6k_{10} I^5 + 7k_{11} I^6 & \text{Si } I > 0 \\ \frac{\partial w}{\partial I} \Big|_{I=I_0^+} + \frac{\partial^2 w}{\partial I \partial I} \Big|_{I=I_0^+} (I - I_0^+) & \text{Si } I > I_0^+ \end{cases} \quad (2.63)$$

Et la seconde dérivée par rapport à l'invariant :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial I \partial I} = \begin{cases} \left. \frac{\partial^2 w}{\partial I \partial I} \right|_{I=I_0^-} & \text{Si } I < I_0^- \\ 2k_1 + 6k_2 I + 12k_3 I^2 + 20k_4 I^3 + 30k_5 I^4 + 42k_6 I^5 & \text{Si } I \leq 0 \\ 2k_1 + 6k_7 I + 12k_8 I^2 + 20k_9 I^3 + 30k_{10} I^4 + 42k_{11} I^5 & \text{Si } I > 0 \\ \left. \frac{\partial^2 w}{\partial I \partial I} \right|_{I=I_0^+} & \text{Si } I > I_0^+ \end{cases} \quad (2.64)$$

On obtient ainsi 13 paramètres dans le cas le plus général. Pour finir, dans le cas où le comportement de l'invariant  $I$  est symétrisé entre valeurs négatives et positives (modes de cisaillement par exemple), 7 paramètres seulement sont nécessaires et :

$$w_s = \begin{cases} k_1 |I|^2 + k_2 |I|^3 + k_3 |I|^4 + k_4 |I|^5 + k_5 |I|^6 + k_6 |I|^7 & \text{Si } |I| \leq I_0 \\ w_s(I_0) + \left. \frac{\partial w_s}{\partial I} \right|_{I=I_0} (|I| - I_0) \text{Signe}(I) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 w_s}{\partial I \partial I} \right|_{I=I_0} (|I| - I_0)^2 & \text{Sinon} \end{cases} \quad (2.65)$$

$$\frac{\partial w_s}{\partial I} = \begin{cases} 2k_1 |I| + 3k_2 |I|^2 + 4k_3 |I|^3 + 5k_4 |I|^4 + 6k_5 |I|^5 + 7k_6 |I|^6 & \text{Si } |I| \leq I_0 \\ \left. \frac{\partial w_s}{\partial I} \right|_{I=I_0} \text{Signe}(I) + \left. \frac{\partial^2 w_s}{\partial I \partial I} \right|_{I=I_0} (|I| - I_0) & \text{Sinon} \end{cases} \quad (2.66)$$

$$\frac{\partial^2 w_s}{\partial I \partial I} = \begin{cases} 2k_1 + 6k_2 |I| + 12k_3 |I|^2 + 20k_4 |I|^3 + 30k_5 |I|^4 + 42k_6 |I|^5 & \text{Si } |I| \leq I_0 \\ \left. \frac{\partial^2 w_s}{\partial I \partial I} \right|_{I=I_0} & \text{Sinon} \end{cases} \quad (2.67)$$

Dans les identifications suivantes, si la limite  $I_0$  est indiquée comme nulle, alors aucune limite n'est imposée au domaine de définition.

### 2.2.2.5 Renforts étudiés

Trois renforts interlocks ont été utilisés lors de cette étude : deux interlocks fournis par Herakles du groupe Safran et un interlock, dit générique, fourni par Snecma du groupe Safran. Les interlocks fournis par Herakles sont de type ply-to-ply interlock et angle interlock et le générique est de type ply-to-ply interlock. Seules les données relatives à l'interlock générique seront données ici, des problèmes de confidentialité empêchant de montrer en détails les tissages et réponses expérimentales des matériaux Herakles. La maille élémentaire du renfort Snecma étudié est montrée figure 2.18. Ce renfort possède un ratio de 51/49, c'est-à-dire que dans une maille élémentaire de renfort 51% de la masse est

constituée par les mèches de chaîne et 49% pour les mèches de trame. Ce renfort est donc, massivement, quasiment équilibré. Les essais utilisés pour réaliser les identifications des paragraphes suivants ont été réalisés dans des thèses précédentes [CHA 11b, ORL 12]. Les courbes d'identification présentées ont été moyennées sur trois spécimens. L'absence de barres d'erreur est due à la non connaissance détaillées de ces essais. Les mêmes essais ont été mis en œuvre pour les matériaux Herakles.

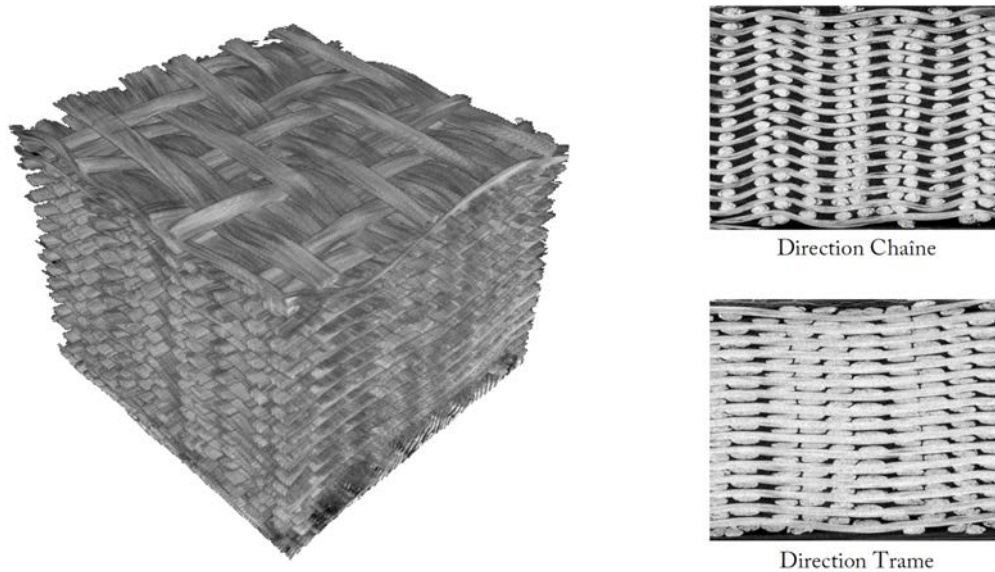


Figure 2.18 – Interlock générique étudié

### 2.2.2.6 Identification en tensions dans les directions chaîne et trame

Les comportements en tension dans les directions chaîne et trame sont différents selon la répartition des mèches dans ces deux directions. C'est l'équilibrage. La modélisation proposée permet de dissocier les deux comportements afin d'être adaptable à l'ensemble des renforts tissés épais. Pour le renfort étudié, équilibré, le comportement est pris identique dans les deux directions.

Pour le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff 2, dans les directions chaîne ( $i = 1$ ) et trame ( $i = 2$ ) :

$$\begin{aligned} S_{elongi} &= 2 \frac{\partial w_{elongi}}{\partial C} = 2 \frac{\partial w_{elongi}}{\partial I_{elongi}} \frac{\partial I_{elongi}}{\partial C} \\ &= \frac{1}{I_{4i}} M_{ii} \frac{\partial w_{elongi}}{\partial I_{elongi}} \end{aligned} \quad (2.68)$$

La densité d'énergie de déformation en tension  $w_{elongi}$  est choisie non symétrique, la réponse du matériau dans la direction des mèches étant plus raide en tension qu'en compression. Les paramètres en tension sont donnés tableau 2.1. Les courbes numérique

## 2. Simulation macroscopique des renforts tissés épais

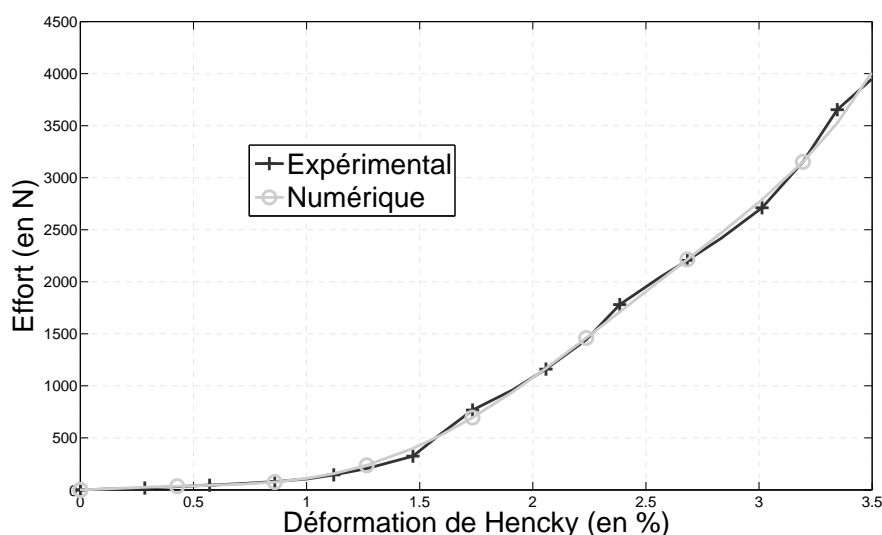
	$k_1$	$k_7$	$k_8$	$k_9$	$k_{10}$	$k_{11}$	$I_0^+$
$w_{elong1}$	1,322e1	3,516e3	-8,591e5	7,546e7	-2,246e9	2,287e10	3,381e-2
$w_{elong2}$	1,322e1	3,516e3	-8,591e5	7,546e7	-2,246e9	2,287e10	3,381e-2

**Tableau 2.1** – Paramètres des potentiels en traction sens mèche (en MPa)

	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$I_0^-$
$w_{elong1}$	1,322e1	0	0	0	0	0	0
$w_{elong2}$	1,322e1	0	0	0	0	0	0

**Tableau 2.2** – Paramètres des potentiels en compression sens mèche (en MPa), cas d'extension sans essai

et expérimentale sont données figure 2.19. La caractérisation expérimentale a été réalisée sur une éprouvette de 37 mm x 275 mm.



**Figure 2.19** – Identification numérique en tension du comportement

Pour le comportement en compression dans le sens des mèches, la caractérisation est difficile. Pour le cas des renforts épais dont l'épaisseur est suffisante, des essais de compression dans le sens des mèches peuvent être envisagés. L'éprouvette de renfort tissé placée sur sa tranche (voir section 1.3.3.3) va pouvoir être sollicitée en compression. Dans les cas où le renfort est 2.5D mais non suffisamment épais, on va simplement utiliser la rigidité initiale en tension dans le sens des mèches en tant que rigidité de compression sens mèche, voir tableau 2.2.

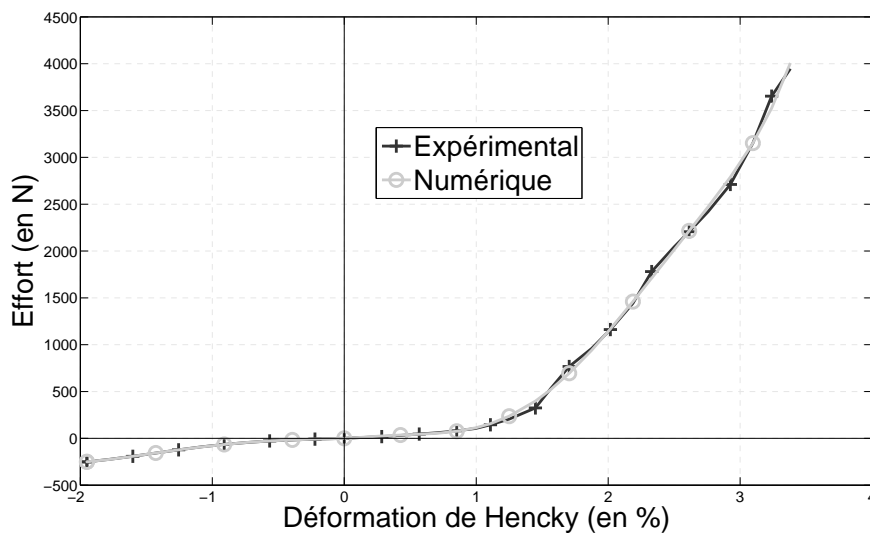
Tandis que si un essai de compression sens mèche est utilisé, les paramètres en compression sont donnés tableau 2.3 pour une identification globale. Les courbes numérique et expérimentale sont données figure 2.20. La caractérisation expérimentale en compres-



	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$I_0^-$
$w_{elong1}$	8.692e0	-5.056e2	1.073e5	-2.687e6	0	0	-1.950e-2
$w_{elong2}$	8.692e0	-5.056e2	1.073e5	-2.687e6	0	0	-1.950e-2
	$k_1$	$k_7$	$k_8$	$k_9$	$k_{10}$	$k_{11}$	$I_0^+$
$w_{elong1}$	8.692e0	4.816e3	-1.002e6	8.275e7	-2.419e9	2.442e10	3,381e-2
$w_{elong2}$	8.692e0	4.816e3	-1.002e6	8.275e7	-2.419e9	2.442e10	3,381e-2

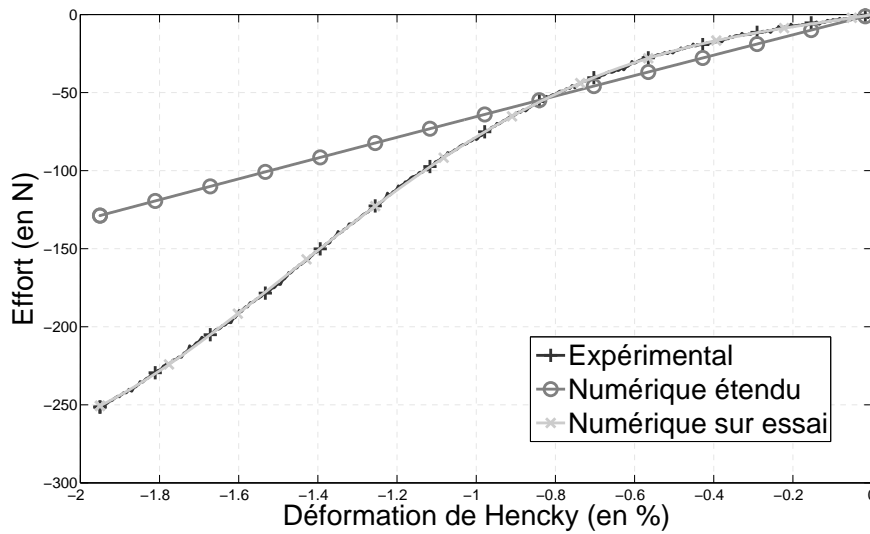
**Tableau 2.3** – Paramètres des potentiels du comportement sens mèche (en MPa) identifiés simultanément sur des essais de compression et traction

sion a été réalisée sur une éprouvette de 50 mm x 50 mm.



**Figure 2.20** – Identification numérique du comportement global sens mèche : tension et compression

Pour comparaison, le figure 2.21 illustre la différence entre une courbe numérique obtenue par extension à la compression de la raideur initiale en tension (tableau 2.2) et une courbe directement identifiée sur un essai de compression macroscopique sens mèche (tableau 2.3).



**Figure 2.21** – Identification en compression sens mèches du comportement : numérique et expérimental

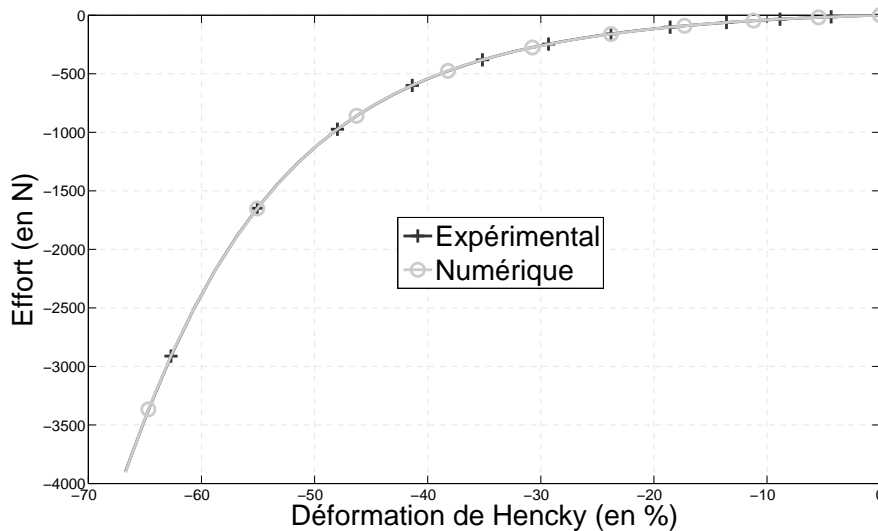
### 2.2.2.7 Identification en compression dans le sens transverse

Pour les sollicitations dans le sens transverse, seule la compression transverse est caractérisable. Aucun essai n'a été imaginé pour la traction dans cette direction. Sa mise en place est difficile et l'enrichissement de la modélisation serait faible étant donné le peu d'influence qu'a cette rigidité sur le résultat final. Pour cette raison on utilise un potentiel symétrisé. Pour le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff 2 dans la direction transverse :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_{comp} &= 2 \frac{\partial w_{comp}}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial w_{comp}}{\partial I_{comp}} \frac{\partial I_{comp}}{\partial \mathbf{C}} \\
 &= \left[ \mathbf{C}^{-1} - \frac{1}{I_{41} (1 - I_{cp}^2)} \mathbf{M}_{11} - \frac{1}{I_{42} (1 - I_{cp}^2)} \mathbf{M}_{22} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{I_{cp}}{\sqrt{I_{41} I_{42}} (1 - I_{cp}^2)} (\mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_2 \otimes \mathbf{M}_1) \right] \frac{\partial w_{comp}}{\partial I_{comp}} \quad (2.69)
 \end{aligned}$$

Les paramètres en compression sont donnés tableau 2.4. Les courbes numérique et expérimentale sont données figure 2.22. La caractérisation expérimentale a été réalisée sur une éprouvette de 50 mm x 50 mm.

	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$I_0$
$w_{comp}$	6,023e-2	1,397e-3	7,458e-1	-1,825e0	2,554e0	-6,245e-1	6,673e-1

**Tableau 2.4** – Paramètres du potentiel en compression transverse (en MPa)

**Figure 2.22** – Identification numérique en compression transverse du comportement

### 2.2.2.8 Identification en cisaillement dans le plan

Pour les sollicitations en cisaillement dans le plan, le comportement est le même si l'invariant de cisaillement est négatif ou positif. Pour cette raison on utilise un potentiel symétrisé. Pour le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff 2 issu du cisaillement plan :

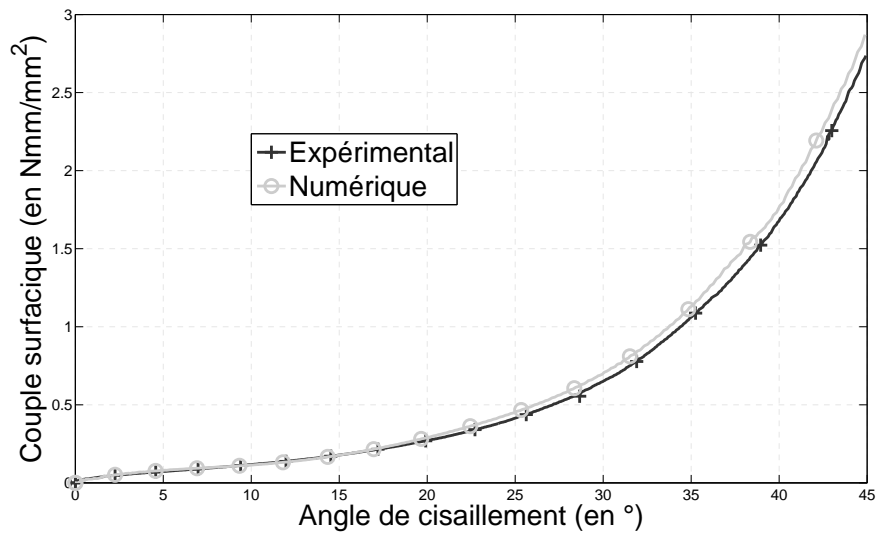
$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_{cp} &= 2 \frac{\partial w_{cp}}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial w_{cp}}{\partial I_{cp}} \frac{\partial I_{cp}}{\partial \mathbf{C}} \\
 &= \left[ \frac{1}{\sqrt{I_{41} I_{42}}} (\mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_2 \otimes \mathbf{M}_1) - \frac{I_{cp}}{I_{41}} \mathbf{M}_{11} - \frac{I_{cp}}{I_{42}} \mathbf{M}_{22} \right] \frac{\partial w_{cp}}{\partial I_{cp}} \quad (2.70)
 \end{aligned}$$

Les paramètres en cisaillement plan sont donnés tableau 2.5. Les courbes numérique et expérimentale sont données figure 2.23. La caractérisation expérimentale a été réalisée grâce à un bias extension test sur une éprouvette de 100 mm x 300 mm.

L'identification du comportement en cisaillement à partir d'un essai de traction de biais n'est pas immédiate. Il faut dans un premier temps dépouiller les résultats de ma-

	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$I_0$
$w_{cp}$	1,099e-1	-4,389e-1	1,342e-1	6,329e0	-1,763e1	1,529e1	7,165e-1

**Tableau 2.5** – Paramètres du potentiel en cisaillement plan (en MPa)



**Figure 2.23** – Identification numérique en cisaillement plan du comportement

nière à les exprimer en fonction de variables homogénéisées et comparables, comme expliqué section 1.3.3.6. Une expression du couple surfacique  $C_s$  en fonction de l'angle de cisaillement est obtenue. On pourrait alors identifier la densité d'énergie de déformation en cisaillement plan directement en supposant qu'elle était la source unique de l'énergie de déformation totale. L'égalité suivante peut être écrite :

$$\int_{\Omega_0} w_{cp} d\Omega = \int_{S_0} C_s \gamma dS \quad (2.71)$$

avec  $\Omega_0$  le volume initial de la zone cisailée,  $S_0$  son aire initiale et  $\gamma$  l'angle de cisaillement. Soit la relation suivante :

$$w_{cp} = \frac{C_s \gamma}{h_0} \quad (2.72)$$

où  $h_0$  est la hauteur initiale de la zone cisailée. Ainsi  $w_{cp}$  est directement identifiable. Mais, en réalité, la simulation d'un bias extension test ne fait pas intervenir uniquement des composantes en cisaillement et l'utilisation d'une énergie identifiée grâce à l'équation 2.72 donne des efforts numériques plus importants que ceux relevés expérimentalement. La cinétique propre à cet essai n'est obtenue que grâce à la mise en compétition des raideurs en cisaillement plan et en tension. C'est la très forte raideur des mèches qui va imposer l'apparition des zones caractéristiques. Par conséquent, une partie de l'énergie de déformation finale provient de la tension dans les mèches. Bien que la déformation des mèches induite soit très faible, leur forte rigidité génère une énergie qui représente une part non négligeable de l'énergie totale de déformation. Une identification inverse entre simulation et expérience doit être réalisée. Pour cela, l'algorithme de levenberg-Marquardt est utilisé [SCH 92] pour faire coïncider résultats numériques et expérimentaux. L'énergie

	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$I_0$
$w_{ct1}$	2,437e-2	-2,417e-1	1,507e0	-5,055e0	8,611e0	-5,821e0	3,7e-1
$w_{ct2}$	1,614e-2	-8,932e-2	3,415e-1	-6,771e-1	6,752e-1	-2,622e-1	6,860e-1

**Tableau 2.6** – Paramètres des potentiels en cisaillement transverse (en MPa)

obtenue grâce à 2.72 est prise comme point de départ de l'optimisation.

### 2.2.2.9 Identification en cisaillement transverse

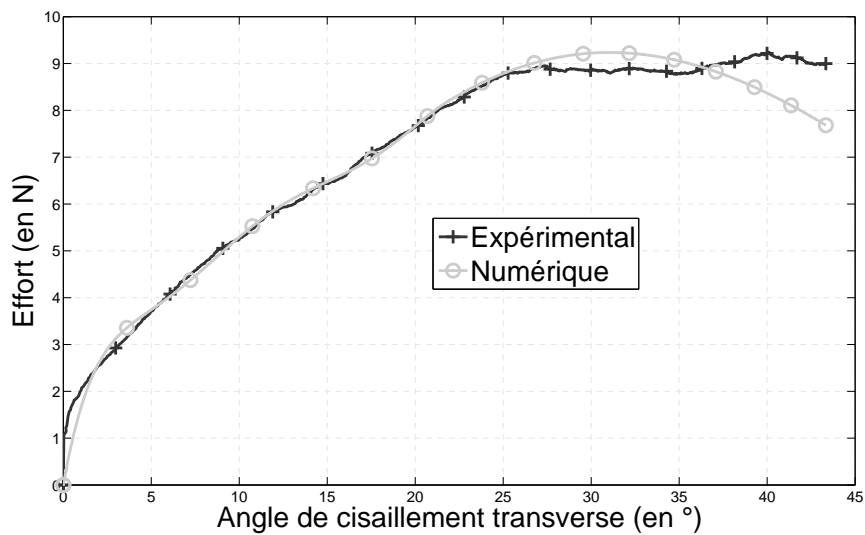
Pour les sollicitations en cisaillement transverse, le comportement est le même si l'invariant de cisaillement est négatif ou positif. Pour cette raison on utilise un potentiel symétrisé. Pour le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff 2 issu du cisaillement transverse dans le sens chaîne ( $i = 1$ ) et trame ( $i = 2$ ) :

$$\begin{aligned}
 S_{cti} &= 2 \frac{\partial w_{cti}}{\partial C} = 2 \frac{\partial w_{cti}}{\partial I_{cti}} \frac{\partial I_{cti}}{\partial C} \\
 &= \left[ \frac{1}{\sqrt{I_{4i} I_{43}}} (M_i \otimes M_3 + M_3 \otimes M_i) - \frac{I_{cti}}{I_{4i}} M_{ii} - \frac{I_{cti}}{I_{43}} M_{33} \right] \frac{\partial w_{cti}}{\partial I_{cti}} \quad (2.73)
 \end{aligned}$$

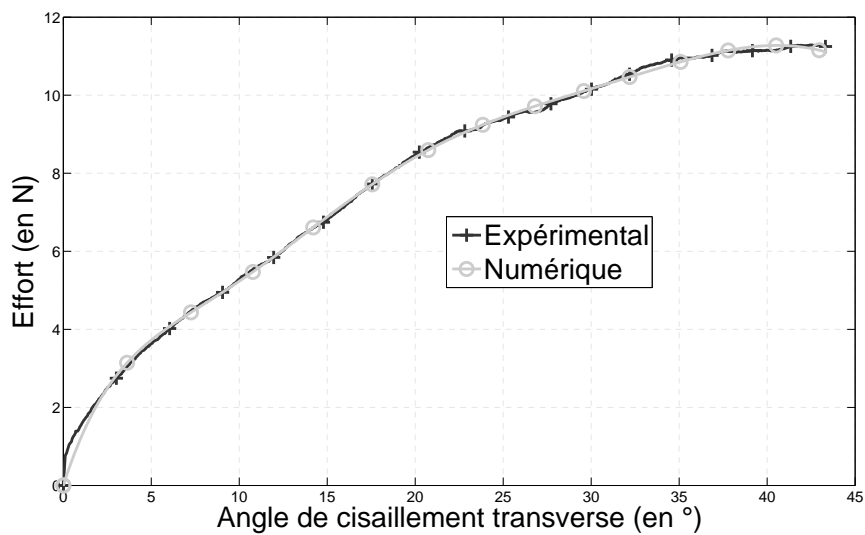
Les paramètres en cisaillement transverse sont donnés tableau 2.6. Les courbes numérique et expérimentale sont données figures 2.24. La caractérisation expérimentale a été réalisée sur des éprouvettes de 50 mm x 50 mm.

Comme évoqué précédemment section 1.3.3.7, on observe l'apparition d'un foisonnement en cisaillement transverse : le renfort s'épaissit au fur et à mesure que le cisaillement transverse augmente. Une approche d'un nouvel invariant de compression qui serait dépendant de l'invariant de cisaillement transverse a été initiée annexe B.

## 2. Simulation macroscopique des renforts tissés épais



(a) Sens Chaîne



(b) Sens Trame

**Figure 2.24** – Identification numérique en cisaillement transverse du comportement

### 2.2.2.10 Détermination du tenseur des rigidités tangentes

Dans l'optique de mettre en place une technique d'optimisation du pas de temps dans le code de calcul ou pour utiliser certaines formulations éléments finis (voir chapitre 3), le calcul de la matrice tangente est nécessaire. Dans le cas de l'optimisation du pas de temps, connaître la rigidité instantanée d'un élément fini permet d'accéder directement au pas de temps critique qui influencera la rapidité de résolution d'un schéma explicite. Dans le cas d'une résolution implicite, le calcul de la matrice tangente est nécessaire pour la convergence de l'algorithme de résolution, du type Newton-Raphson par exemple. La matrice matérielle tangente de notre loi hyperélastique se calcule de la manière suivante :

$$\mathbf{C}^{SE} = \sum_i \mathbf{C}_i^{SE} \quad (2.74)$$

où les  $\mathbf{C}_i^{SE}$  sont les composantes de la matrice de rigidité associées à chaque mode de déformation, et donc à chaque invariant physique.

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_i^{SE} &= \frac{\partial^2 w_i(I_i)}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{E}} \left( \frac{\partial w_i(I_i)}{\partial \mathbf{E}} \right) = 2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left( 2 \frac{\partial w_i(I_i)}{\partial \mathbf{C}} \right) \\ &= 4 \frac{\partial^2 w_i(I_i)}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \end{aligned} \quad (2.75)$$

où chaque énergie élastique de déformation  $w_i$  est associée à l'invariant physique  $I_i$ . La première dérivée de l'énergie par rapport au tenseur de Cauchy-Green droit prend la forme :

$$\frac{\partial w_i(I_i)}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial w_i(I_i)}{\partial I_i} \frac{\partial I_i}{\partial \mathbf{C}} \quad (2.76)$$

Et pour la seconde dérivée de l'énergie par rapport à Cauchy-Green droit :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left( \frac{\partial w_i(I_i)}{\partial \mathbf{C}} \right) = \frac{\partial^2 w_i(I_i)}{\partial I_i^2} \left( \frac{\partial I_i}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_i}{\partial \mathbf{C}} \right) + \frac{\partial w_i(I_i)}{\partial I_i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left( \frac{\partial I_i}{\partial \mathbf{C}} \right) \quad (2.77)$$

En utilisant l'équation 2.77 dans 2.75, on obtient la forme générale de la contribution de chaque sollicitation à la matrice tangente :

$$\mathbf{C}_i^{SE} = 4 \left[ \frac{\partial^2 w_i(I_i)}{\partial I_i^2} \left( \frac{\partial I_i}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_i}{\partial \mathbf{C}} \right) + \frac{\partial w_i(I_i)}{\partial I_i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left( \frac{\partial I_i}{\partial \mathbf{C}} \right) \right] \quad (2.78)$$

Afin de simplifier l'écriture des résultats, on identifiera les composantes de la matrice tangente associées à chaque contribution énergétique sous la forme suivante :

$$\mathbf{C}_i^{SE} = 4 [a_i \mathbf{A}_i + b_i \mathbf{B}_i] \quad (2.79)$$

où  $a_i$  et  $b_i$  sont des scalaires liés à la seconde et première dérivée du potentiel en question par rapport à l'invariant associé, et  $\mathbf{A}_i$  et  $\mathbf{B}_i$  les composantes tensorielles qui leur sont liées.

Les composantes tensorielles des matrices matérielles tangentes sont détaillées annexe C. Les scalaires sont liés à la forme du potentiel est sont détaillés section 2.2.2.4.

### 2.2.3 Hyperélasticité et cadre mathématique rigoureux

Trouver une solution à un problème à conditions limites en élasticité non linéaire dépend de la question suivante : existe-t-il un état de déformation qui minimise localement ou globalement l'énergie élastique totale d'un corps ? Cette question peut être répondue positivement si l'énergie de déformation du corps respecte certaines conditions :

- L'énergie de déformation du corps est quasi convexe ;
- L'énergie satisfait des conditions de continuité et d'expansion. Cette dernière étant appelée condition de coercivité, elle signifie que la fonction tend vers l'infini aux bords de l'intervalle sur lequel elle est définie.

En ce qui concerne la quasi-convexité, la condition est écrite sous la forme d'une inégalité entre intégrales, rendant la condition assez difficile à démontrer. Ainsi, une condition plus forte appelée polyconvexité a été introduite par Ball [BAL 77]. Cette notion est plus simple à manipuler et a permis de montrer la polyconvexité de plusieurs modèles hyperélastiques classiques : Ogden, Mooney-Rivlin et néo-hookéen. La vérification de cette polyconvexité pour des énergies de déformation anisotropiques est bien plus complexe. A la place, des fonctions a priori polyconvexes sont utilisées pour construire de nouvelles formes d'énergie de déformation. Ceci a été utilisé pour créer des énergies de déformation isotropes transverse et orthotropes [SCH 03]. Cependant les potentiels ne respectaient pas une condition importante afin de faire le lien avec la physique : un état au repos libre de contrainte. Ainsi une combinaison des fonctions était nécessaire pour coller à la physique. A partir de ces résultats, une famille d'énergies de déformation orthotropes et isotropes transverses polyconvexes a été proposée [ITS 04]. Les énergies résultantes sont libres de contraintes au repos et, condition qui n'a pas été évoquée jusqu'à présent, sont coercives.

Ces conditions d'existence n'ont pas été vérifiées pour la loi que nous utiliserons, rendant sa justification mathématique incertaine. Il serait nécessaire :

- De vérifier la *polyconvexité* de la forme globale de l'énergie de déformation. Celle-ci est définie comme la somme de l'énergie produite par chaque type de déformation :

$$w = w_{elong1} + w_{elong2} + w_{comp} + w_{cp} + w_{ct1} + w_{ct2} \quad (2.80)$$

Si chaque composante  $w_i$  de l'énergie totale de déformation  $w$  est convexe, alors  $w$  est polyconvexe. Il est donc suffisant d'assurer la convexité de chaque fonction  $w_i(I_i)$  par rapport au gradient de transformation. La convexité de la densité d'énergie  $w_i$  par rapport à l'invariant physique associé est réalisée par construction. Il est alors nécessaire de vérifier la convexité de chaque invariant physique du tenseur de Cauchy-Green droit  $C$ . Il apparait, de manière fortuite, que les invariants de Cauchy-Green droit qui ont été choisis pour construire nos invariants physiques ( $I_3$ ,  $I_4$  et  $I_{4ij}$ ) sont des fonctions convexes de  $F$  (voir [SCH 03] pour



les détails). De ce point de vue là, la condition est respectée. Cependant, les invariants physiques sont des compositions des invariants de Cauchy-Green droit et leur convexité par rapport à  $\mathbf{F}$  doit être prouvée. L'invariant physique d'élongation, par exemple, n'est pas nécessairement une fonction convexe du gradient de la transformation. La condition de polyconvexité n'est donc pas assurée, tout comme la convergence. Une étude devrait être menée pour chaque invariant physique afin de se rendre compte de leur validité ou non. Les calculs sont cependant complexes et l'interprétation directe des résultats aussi. L'utilisation d'invariants physiques au lieu des invariants réels de Cauchy-Green droit possède ses inconvénients et ses avantages. D'un côté, la visualisation des sollicitations associées à chaque invariant physique est plus aisée et l'identification de l'énergie facilitée par le découplage. Par contre, la justification mathématique de la polyconvexité peut échouer et la minimisation de l'énergie de déformation n'est pas assurée ;

- De vérifier la *coercivité* de l'énergie de déformation totale. C'est une condition sur l'expansion de la fonction aux bords de l'intervalle qui permet, de concert avec la polyconvexité, de justifier de l'existence d'un minimiseur global de l'énergie élastique de déformation. Cette condition, suivant les premiers développements de [BAL 77], a été reformulée par [MÜL 94] : il existe  $c_0 > 0$ ,  $p \geq 1$ ,  $q \geq \frac{3}{4}$  et  $c_1$  tels que :

$$w(\mathbf{C}) \geq c_0 (I_1^p + I_2^q) - c_1, \forall \mathbf{C} \in \text{Sym}^+ \quad (2.81)$$

où  $\text{Sym}^+$  est l'ensemble des tenseurs du second ordre avec un déterminant positif. Cette définition n'est donnée ici qu'à titre d'indication car la justification mathématique de la coercivité demande des calculs complexes en dehors de notre champ de compétences ;

- De vérifier que l'énergie est *libre de contraintes* dans un état de repos. Les invariants physiques et l'énergie de déformation qui en découle ont été créés dans ce sens, cette condition est donc remplie a priori.

Finalement, la modélisation développée, bien que simple dans sa construction, ne satisfaisait pas forcément toutes les conditions nécessaires à sa justification mathématique. Ainsi, l'existence d'une déformation permettant de minimiser l'énergie élastique de déformation n'est pas assurée, rendant la convergence incertaine. Cependant, les efforts concernant l'identification d'une énergie de déformation convexe par rapport aux invariants physiques ont permis l'obtention d'une bonne robustesse de la loi de comportement. Peu, voire pas, de situations de non convergence imputables à une mauvaise définition rigoureuse de la loi hyperélastique ont été rencontrées. En l'absence de cette justification, il est toutefois possible que certaines combinaisons de modes de déformation provoquent des instabilités matérielles.

## 2.3 Approche semi-discrète hyperélastique du comportement des renforts épais

Comme évoqué section 2.1.3, il est possible de simuler macroscopiquement le comportement de renforts tissés épais de composite par des méthodes dites semi-discrètes. L'approche est lagrangienne, signifiant qu'il n'y a pas de transfert de matière, et scinde en deux parties les différentes contributions à l'énergie de déformation interne de l'élément. Une partie discrète assure la simulation du comportement des mèches en élongation tandis que la partie continue assure la modélisation des autres contributions (cisaillements, compression transverse, frottements et réorganisation de mèches). La contribution discrète est dite de premier ordre, car représentant les fortes rigidités en traction des mèches, tandis que la partie continue est dite de second ordre.

Le travail présenté par ce manuscrit a été principalement réalisé avec une approche continue, mais certains développements ont été effectués pour un élément semi-discret. Nous allons donc détailler rapidement la formulation de l'élément proposé par de Luycker [LUY 09a] puis enrichi par Orliac [ORL 12] en se basant sur les travaux d'hyperélasticité de Charmetant [CHA 12].

Ces éléments sont des briques à huit nœuds à interpolation trilineaire. Les mèches traversent les éléments et une même mèche ne peut apparaître que dans un seul élément, comme figure 2.25. L'interpolation est lagrangienne, ce qui signifie que chaque mèche est fixée cinématiquement et matériellement à l'élément qui la contient. Cela implique une absence de glissements entre les mèches. Cette hypothèse forte est observée expérimentalement et est à la base de la construction de l'élément. Si des grands mouvements relatifs entre les mèches étaient mis en lumière, des méthodes eulérienne ou ALE devraient être mise en place. Les mèches ne doivent pas être considérées comme l'insertion d'éléments discrets dans un maillage d'éléments finis volumiques. Telles qu'elles apparaissent figure 2.25, elles ne sont que la visualisation de l'orientation de la contribution en tension et permettent d'observer plus facilement les directions fortes d'anisotropie.

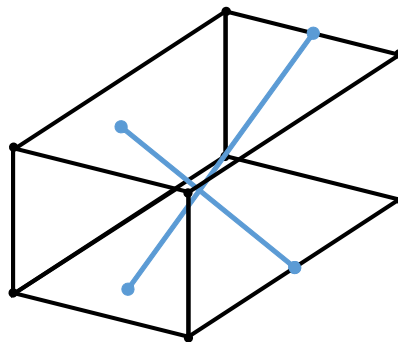


Figure 2.25 – Élément semi-discrète avec ses mèches

Dans le cadre du principe des travaux virtuels, le travail des forces internes de tension dû à la partie discrète et le travail dû aux autres contributions sont dissociés :

$$\delta W_{int} = \delta W_{int}^{SD} + \delta W_{int}^{Cont} \quad (2.82)$$

avec  $W_{int}^{SD}$  le travail des forces internes de tension et  $W_{int}^{Cont}$  le travail des autres contributions. Le travail des autres contributions est calculé avec la loi hyperélastique macroscopique détaillée section 2.2. La seule différence est que les contributions énergétiques en tension des mèches ne sont plus nécessaires, étant maintenant remplacées par la partie discrète.  $W_{int}^{Cont}$  est donc calculé de la manière suivante :

$$W_{int}^{Cont} = \int_{\Omega_0} w \, d\Omega \quad (2.83)$$

où  $w$  est la densité d'énergie de déformation calculée en se basant sur l'équation 2.43 :

$$w = w_{comp}(I_{comp}) + w_{cp}(I_{cp}) + w_{ct1}(I_{ct1}) + w_{ct2}(I_{ct2}) \quad (2.84)$$

Il reste à calculer la contribution de la partie discrète. Pour ce faire, il existe plusieurs manières d'exprimer le travail virtuel, que l'on se place dans la configuration matérielle ou eulérienne. Le travail virtuel interne peut être écrit comme suit [BAS 00] :

$$\delta W_{int} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega \quad (2.85)$$

La tension et la déformation dans les mèches doivent maintenant être exprimées. Soit une mèche  $m$ , notons  $\mathbf{h}_m$  le vecteur normé tangent à cette mèche dans le repère eulérien et  $\mathbf{H}_m$  le vecteur normé tangent dans le repère matériel. La déformation de la mèche peut alors être calculée dans ces deux configurations :

$$E_m = \mathbf{H}_m \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{H}_m \quad (2.86)$$

$$\varepsilon_m = \mathbf{h}_m \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{h}_m \quad (2.87)$$

avec  $E_m$  les déformations exprimées dans le repère matériel et  $\varepsilon_m$  les déformations dans le repère eulérien. Pour en revenir au travail virtuel, étant donnée l'unique direction privilégiée, il s'exprime pour chaque mèche présente dans l'élément, en s'appuyant sur 2.85 :

$$\delta W_{int}^m = \int_{l_m} T_m \varepsilon_m \, dl \quad (2.88)$$

avec  $l_m$  la longueur courante de la mèche et  $T_m$  la tension dans une mèche. Soit pour un élément à  $N$  mèches :

$$\delta W_{int}^{SD} = \sum_{m=1}^N \delta W_{int}^m = \sum_{m=1}^N \int_{l_m} T_m \varepsilon_m \, dl \quad (2.89)$$

Afin de simplifier la notation pour l'expression des déformations de la mèche en notation de Voigt, l'équation 2.87 est reformulée :

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varepsilon}_m &= \mathbf{h}_m \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{h}_m \\
 &= \mathbf{h}_m^i \cdot \varepsilon_{ij} \cdot \mathbf{h}_m^j \\
 &= \mathbf{h}_m \boldsymbol{\varepsilon}
 \end{aligned} \tag{2.90}$$

où  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est écrit grâce aux notations de Voigt usuelles, et :

$$\mathbf{h}_m = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_m^1 & \mathbf{h}_m^1 \\ \mathbf{h}_m^2 & \mathbf{h}_m^2 \\ \mathbf{h}_m^3 & \mathbf{h}_m^3 \\ \mathbf{h}_m^1 & \mathbf{h}_m^2 \\ \mathbf{h}_m^2 & \mathbf{h}_m^3 \\ \mathbf{h}_m^3 & \mathbf{h}_m^1 \end{pmatrix} \tag{2.91}$$

On peut alors obtenir les forces internes de tension dues aux mèches dans un élément semi-discret :

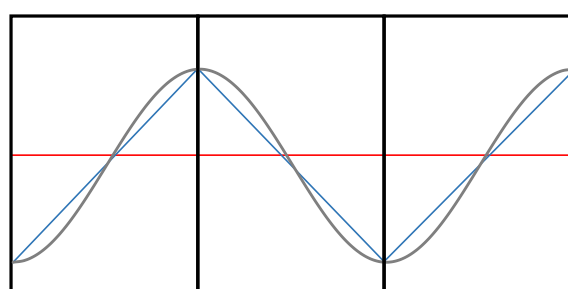
$$\mathbf{F}_{int}^{SD} = \sum_{m=1}^N \int_{l_m} \mathbf{h}_m^T T_m dl \tag{2.92}$$

La relation entre la tension  $T_m$  dans la mèche et les déformations dans le repère matériel  $E_m$  est exprimée par choix :

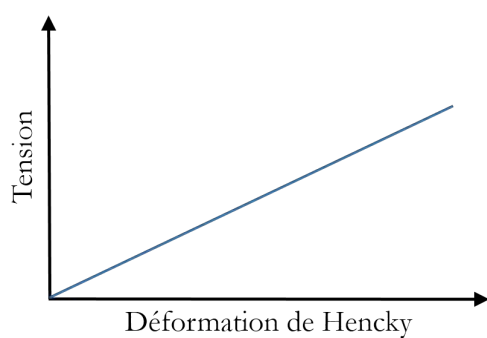
$$T_m = \mathcal{R} E_m \tag{2.93}$$

avec  $\mathcal{R}$  la rigidité bipoint de la mèche mesurée expérimentalement.  $\mathcal{R}$  relie les efforts sur la géométrie courante aux déformations exprimées dans la configuration initiale. Cette rigidité peut être prise constante ou variable, en fonction du comportement voulu pour la mèche. Cela permet notamment de considérer le comportement des mèches de deux façons suivant l'embuvage. Si le comportement des mèches en traction est généralement considéré comme linéaire, celui des tissés, lui, est non linéaire à la fois par son embuvage et par le comportement transverse rigidifiant des mèches [BUE 98, BOI 01, BAD 08a]. Pour prendre en compte ceci dans notre modèle, deux approches sont envisagées, figure 2.26 :

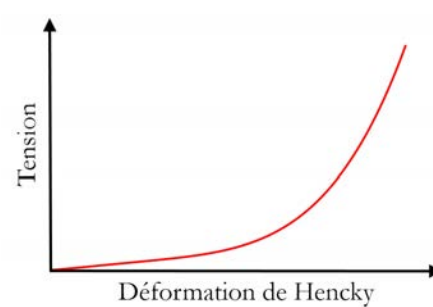
- Une première méthode est d'utiliser un maillage de mèches ondulées. Dans ce cas, le comportement des mèches est pris linéaire en fonction de la déformation de Hencky, figure 2.26b, et  $\mathcal{R}$  est constant ;
- Une autre solution utilisable dans des structures trop complexes pour être maillées finement, est d'introduire dans notre maillage des mèches droites, mais possédant un comportement non linéaire (plus souple au départ), figure 2.26c, et  $\mathcal{R}$  est non linéaire.



(a) Discrétisation d'une mèche embuvée structurellement (bleue) ou numériquement (rouge)



(b) Embuvage structurel



(c) Embuvage numérique

**Figure 2.26** – Approche semi-discrète de la modélisation des mèches

## 2.4 Outil numérique de simulation : Plast4

Le code éléments finis Plast4, initié par M. Brunet, H. Walter et L. Baillet, est développé au LaMCoS depuis une quinzaine d'années sous des formes diverses. Ce code utilise un schéma temporel en dynamique explicite et est, à l'origine, destiné à la simulation des matériaux fragiles avec fissuration et à la simulation d'impacts. Il a ensuite été étendu à la simulation de la mise en forme des renforts composites 2D par N. Hamila, sous le nom de PLASFIB, puis sous le nom Plast4 par E. de Luycker pour la simulation de renforts 3D. Plast4 est une version tridimensionnelle contenant des éléments déformables volumiques et rigides surfaciques pour la modélisation de la mise en forme des renforts tissés épais.

Le schéma utilisé dans le code est en dynamique explicite. Ce type de schéma permet une résolution conditionnelle pas à pas d'un problème de dynamique. L'équation de la dynamique, valable à tout instant, s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{M}_{dyn}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}_{dyn}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{F}_{int} = \mathbf{F}_{ext} \quad (2.94)$$

avec

- $\mathbf{M}_{dyn}$  la matrice de masse
- $\mathbf{C}_{dyn}$  la matrice d'amortissement
- $\mathbf{F}_{int}$  le vecteur des forces internes
- $\mathbf{F}_{ext}$  le vecteur des forces extérieures
- $\mathbf{u}$  le vecteur des déplacements nodaux

Afin de résoudre cette équation à l'aide d'un schéma d'intégration temporelle, le temps est d'abord discrétisé en incréments, ou pas de temps. L'équation de la dynamique 2.94 devient :

$$\mathbf{M}_{dyn}\ddot{\mathbf{u}}^i + \mathbf{C}_{dyn}\dot{\mathbf{u}}^i + \mathbf{F}_{int}^i = \mathbf{F}_{ext}^i \quad (2.95)$$

Le schéma d'intégration temporelle va définir la façon dont sont approximés les déplacements, vitesses et accélérations d'un incrément à l'autre. La famille de schéma de résolution la plus répandue est celle de Newmark généralisée [NEW 59]. Celui utilisé ici est dit Newmark  $\beta_2$  et correspond à un développement en série de Taylor à l'ordre 2 des déplacements, tronqués au jerk, avec coefficients de pondération  $\beta$  et  $\gamma$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{i+1} &= \mathbf{u}^i + \Delta t \dot{\mathbf{u}}^i + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}^i + \beta \frac{1}{2} \Delta t^2 (\ddot{\mathbf{u}}^{i+1} - \ddot{\mathbf{u}}^i) \\ \dot{\mathbf{u}}^{i+1} &= \dot{\mathbf{u}}^i + \Delta t \ddot{\mathbf{u}}^i + \gamma \Delta t (\ddot{\mathbf{u}}^{i+1} - \ddot{\mathbf{u}}^i) \end{aligned} \quad (2.96)$$

On peut alors écrire deux jeux de termes, dits de prédiction :

$$\begin{aligned}\check{\mathbf{u}}^{i+1} &= \mathbf{u}^i + \Delta t \dot{\mathbf{u}}^i + \frac{1}{2} \Delta t^2 (1 - \beta) \ddot{\mathbf{u}}^i \\ \dot{\check{\mathbf{u}}}^{i+1} &= \dot{\mathbf{u}}^i + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{u}}^i\end{aligned}\quad (2.97)$$

et de correction :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{i+1} &= \check{\mathbf{u}}^{i+1} + \beta \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}^{i+1} \\ \dot{\mathbf{u}}^{i+1} &= \dot{\check{\mathbf{u}}}^{i+1} + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{u}}^{i+1}\end{aligned}\quad (2.98)$$

L'objectif est maintenant de trouver l'accélération au nouveau pas de temps en insérant 2.98 dans 2.95 :

$$\ddot{\mathbf{u}}^{i+1} = -\mathbf{A}^{-1} \left( \mathbf{F}_{ext}^{i+1} + \mathbf{C}_{dyn} \dot{\check{\mathbf{u}}}^{i+1} + \mathbf{K}_{dyn} \check{\mathbf{u}}^{i+1} \right) \quad (2.99)$$

où :

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}_{dyn} + \gamma \Delta t \mathbf{C}_{dyn} + \frac{1}{2} \beta \Delta t^2 \mathbf{K}_{dyn} \quad (2.100)$$

et  $\mathbf{K}_{dyn}$  la rigidité tangente. Après des manipulations utilisant les équations 2.97 et 2.98, les déplacements au pas de temps suivant sont obtenus. Les paramètres  $\gamma$  et  $\beta$  de l'algorithme permettent d'obtenir différents schémas d'intégration, adaptés au problème donné. La stabilité du schéma en est directement influencée. Deux types de résolution sont alors possibles. La résolution explicite permet de connaître le déplacement à l'incrément suivant uniquement à l'aide du déplacement, de la vitesse et de l'accélération au pas précédent. À l'inverse, lorsque ce n'est pas possible, la résolution est dite implicite. Ces derniers sont généralement stables pour de grand pas de temps et assurent par construction la convergence de l'équation de la dynamique. Les schémas explicites sont eux conditionnellement stables. Leur stabilisation implique l'utilisation de petits pas de temps dépendant du maillage et du matériau utilisés. Par contre, l'absence de vérification de la convergence permet de résoudre plus facilement les problèmes non linéaires (géométriques, matériels ou de contact). Le schéma utilisé dans Plast4 est explicite et le couple  $\gamma = 1/2$  et  $\beta = 0$  est utilisé. On remarque alors que la matrice des rigidités, équation 2.100, n'a plus besoin d'être inversée car effacée par la valeur de  $\beta$ . En dynamique explicite, les matrices des masses et d'amortissement sont prises diagonales. L'inversion de ces matrices est alors extrêmement simplifiée. Une méthode de condensation de matrice de masse est utilisée (mass lumping, [ZIE 05]). La condensation de la matrice est faite en sommant sur la diagonale les termes d'une même ligne :

$$\tilde{\mathbf{M}}_{ii} = \sum_j \mathbf{M}_{ij} \quad (2.101)$$

Cette méthode utilisant une approximation diagonale  $\tilde{\mathbf{M}}_{dyn}$  à la place de la matrice de masse  $\mathbf{M}_{dyn}$  permet d'accélérer le calcul, tout en étant raisonnable puisque globalement

$\mathbf{M}_{ij} \neq 0$  est en faible nombre pour chaque ligne  $i$  et est associé à des degrés de libertés proches géométriquement [BON 08]. La perte de précision est largement compensée par le gain en temps de calcul. En sus, la matrice d'amortissement est calculée en fonction de la matrice de masse en utilisant un cas spécial de l'amortissement de Rayleigh, tel que  $\mathbf{C}_{dyn} = \alpha \mathbf{M}_{dyn}$ .

En mécanique de la mise en forme, nous devons traiter avec de fortes non-linéarités. Des non-linéarités géométriques tout d'abord, qui proviennent des grandes transformations et des flambements (tels que des plis) qui peuvent apparaître lors de mises en formes. Des non-linéarités matérielles ensuite, que ce soit en termes de plasticité, de frottements ou simplement de comportement mécanique. Des non-linéarités de contact enfin, car des moules rigides viennent mettre en place le renfort lors de la mise en forme. Ces non-linéarités, conduisant à des matrices de comportement qui évoluent au cours du temps et qui peuvent éventuellement être singulières (dans le cas du flambement par exemple), rendent les schémas explicites de résolution en temps particulièrement adaptés aux problèmes de mise en forme [HUG 83, CRI 97, BOI 07]. Ce type de schéma étant, par contre, conditionnellement stable, il conviendra de vérifier que la condition de Courant-Friedrichs-Lewy est bien vérifiée : c'est-à-dire que le pas de temps utilisé pour la simulation reste bien inférieur à un pas de temps critique qui sera évalué à partir du temps mis par une onde élastique pour traverser le plus petit élément du maillage [BEL 00].

Les simulations réalisées en mise en forme des renforts fibreux supposent l'absence d'effets inertiels. Par conséquent la résolution des problèmes numériques en dynamique implique l'utilisation d'une vitesse réduite. Les calculs seront tous réalisés en quasi-statique.

L'ensemble des formulations décrites dans la suite de cette thèse ont été implémentées dans Plast4. Les résultats de simulation détaillés ont été obtenus avec ce code, puis post-traités avec le logiciel Paraview.

## 2.5 Bilan du chapitre 2

Un état de l'art de la simulation de la mise en forme des renforts tissés a été présenté à travers les trois échelles classiques des matériaux composites : microscopique, mésoscopique et macroscopique. A l'échelle macroscopique, celle choisie, la plupart des modélisations existantes sont associées à des lois matériau hypoélastiques. Ces lois comportent plusieurs inconvénients : le suivi objectif de plusieurs directions d'anisotropie est difficile, l'identification est compliquée par la non-connaissance fine des énergies mise en jeu, et le comportement final n'est pas indépendant de l'historique des déformations.

Pour ces raisons une loi de comportement hyperélastique basée sur des invariants physiques de la transformation a été choisie. Ces invariants représentent les modes de déformations principaux des renforts tissés épais : l'élongation dans les directions chaîne et trame, la compression transverse, le cisaillement plan et les cisaillements transverses dans les directions chaîne et trame. Un découplage de ces modes est supposé, facilitant l'identification expérimentale du comportement global. Une forme d'énergie polyvalente,



respectant au mieux le cadre mathématique propre aux lois hyperélastiques, a été utilisée afin d'identifier les paramètres numériques nécessaires à la simulation. Tous les paramètres nécessaires à la réalisation d'une modélisation macroscopique continue du comportement des tissus épais ont été fournis.

En plus de l'approche continue, le formalisme de la formulation élément fini d'un élément semi-discret a été détaillé. Dans cet élément, les rigidités de tension sont prise en compte par une modélisation discrète tandis que les autres rigidités, dites secondaires car plus faibles, sont modélisées par l'intermédiaire d'un élément fini continu classique. Parties discrète et continue sont assemblées dans un élément fini lagrangien. Cette modélisation permet une représentation locale du tissage tout en utilisant une approche macroscopique de modélisation.

Finalement, le code élément fini Plast4 dans lequel sont implantées les formulations développées est présenté. Ce code en dynamique explicite, utilisé en quasi-statique, permet de contrôler tous les aspects de la résolution numérique. L'utilisateur a accès à toutes les composantes du solveur, autorisant l'implémentation d'un large éventail de méthodes numériques.

Maintenant que tous les éléments nécessaires à la simulation de la mise en forme des renforts tissés épais sont disponibles, la qualité des résultats obtenus peut être analysée. Des problèmes numériques liés à la forte anisotropie et au comportement spécifique des renforts tissés épais sont alors mis en évidence : le verrouillage numérique, l'instabilité en flexion et l'absence de rigidité locale en flexion. Les chapitres suivants ont pour objectif de les mettre en évidence et de proposer des solutions visant à les supprimer.



# Chapitre 3

## Analyse et correction du verrouillage en tension

*La simulation numérique du comportement macroscopique des renforts tissés a montré l'existence d'un verrouillage dû aux contraintes de quasi-inextensibilité directionnelles, celles des mèches. Ce phénomène est lié aux orientations des mèches dans les éléments et aux ratios entre les différentes rigidités des renforts tissés épais. La mise en évidence du problème est détaillée ainsi que les solutions existantes. Une nouvelle solution basée sur une formulation enhanced assumed strain, indépendante des directions d'anisotropie, est détaillée et appliquée à des éléments volumiques hexaédriques classique et semi-discret. Des simulations mettant en avant ce verrouillage sont réalisées afin de quantifier la qualité de la formulation proposée.*

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Intra-ply shear locking ou Tension locking</b>	<b>95</b>
3.1.1	Mise en évidence du tension locking	95
3.1.2	Le verrouillage en tension	95
3.1.3	Techniques de résolution du verrouillage en tension	105
3.1.3.1	Alignement mèches-côtés des éléments	106
3.1.3.2	Intégration réduite	106
3.1.3.3	Éléments à champs mixtes	109

<b>3.2</b>	<b>Intégration réduite et éléments à champs mixtes dans la résolution des problèmes numériques</b>	<b>110</b>
<b>3.3</b>	<b>Élément à intégration réduite stabilisé physiquement avec <i>Enhanced Assumed Strain</i></b>	<b>111</b>
3.3.1	Vecteurs et forces de stabilisation	112
3.3.2	Formulation <i>enhanced</i> en déplacement total	116
<b>3.4</b>	<b>Élément semi-discret à intégration réduite stabilisé physiquement avec <i>Enhanced Assumed Strain</i></b>	<b>126</b>
<b>3.5</b>	<b>Élément <i>enhanced assumed strain</i> et déformation des mèches</b>	<b>130</b>
<b>3.6</b>	<b>Performances des éléments pour le verrouillage en tension</b>	<b>135</b>
3.6.1	Élément continu et lois matériaux linéaires	135
3.6.2	Élément continu et lois matériaux non linéaires	144
3.6.3	Utilisation de l'élément semi-discret	147
<b>3.7</b>	<b>Bilan du chapitre 3</b>	<b>149</b>

---

## 3.1 Intra-ply shear locking ou Tension locking

### 3.1.1 Mise en évidence du tension locking

Les renforts secs des matériaux composites sont faits du tissage ou tressage de conglomerats de fibres continues de très grande rigidité. Aucune liaison autre que les entrelacements dus au procédé de tissage ne vient maintenir les mèches en place dans la structure. Ils n'apparaissent alors pas comme des matériaux mésoscopiquement continus mais sont traités comme tels macroscopiquement par hypothèse. Le tissage leur confère une grande liberté de déformation en cisaillement plan ou transverse qui autorise le drapage sur des formes complexes, allant jusqu'à la double courbure. La dualité entre une résistance très forte en l'élongation et une grande malléabilité en cisaillement les rend fortement anisotropiques. Lors de simulations utilisant des lois matériaux adaptées à leur comportement, l'influence du maillage du renfort a pu être mise en évidence [YU 06, THI 08, HAM 13b], bien que le lien entre inextensibilité des mèches et verrouillage ait été relevé auparavant [SIM 93a]. Il a alors été montré que des simulations éléments finis avec des éléments briques (ou quadrangles) classiques à intégration complète et interpolation linéaire dont les directions fortes d'anisotropie ne sont pas orientées selon les côtés des éléments donnent des solutions trop rigides. Un phénomène numérique de verrouillage est mis en évidence : on parle de *Tension Locking* ou *Intra-ply shear locking*. Ce comportement a notamment été analysé par des simulations de traction de biais. Si l'échantillon étudié est maillé avec des éléments rectangulaires dont les côtés sont orientés selon la largeur et la longueur de la préforme (figure 3.1a), ce qui est le maillage le plus naturel, l'effort nécessaire à la déformation numérique est beaucoup plus élevé que l'effort machine relevé. Au contraire, un maillage orienté à  $\pm 45^\circ$  par rapport à la direction de traction (figure 3.1b) donnera l'effort recherché. La figure 3.2 illustre qualitativement et quantitativement la problématique pour la traction de biais numérique. Bien que le problème puisse être contourné dans ce cas précis, ce n'est pas toujours le cas : lors de l'utilisation de renforts à la forme complexe et lors de l'orientation aléatoire de mèches à l'intérieur des éléments [LUY 09a]. Bien que des solutions aient été proposées (voir 3.1.3), il n'existe pour l'instant pas d'élément fini adapté aux grandes transformations capable de retranscrire le champ de déformation correct de l'élément pour une orientation aléatoire des directions fortes d'anisotropie des renforts composites.

### 3.1.2 Le verrouillage en tension

Les phénomènes de verrouillage sont de première importance dans les analyses éléments finis. Dans des cas particuliers, bien que le calcul converge et donne une solution, celle-ci n'est pas conforme au résultat attendu suite au calcul analytique. C'est alors à l'utilisateur de vérifier et sélectionner la formulation élément fini adaptée au cas qu'il désire traiter. Plusieurs types de verrouillages, plus courants que celui abordé ici, ont été amplement étudiés.

Le verrouillage volumétrique est dû à l'incapacité des éléments à intégration complète

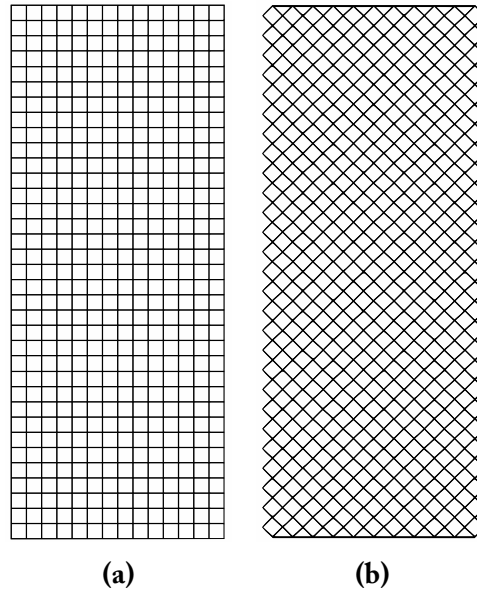


Figure 3.1 – Maillage d’une éprouvette de traction de biais à  $0/90^\circ$  (a) et à  $\pm 45^\circ$  (b)

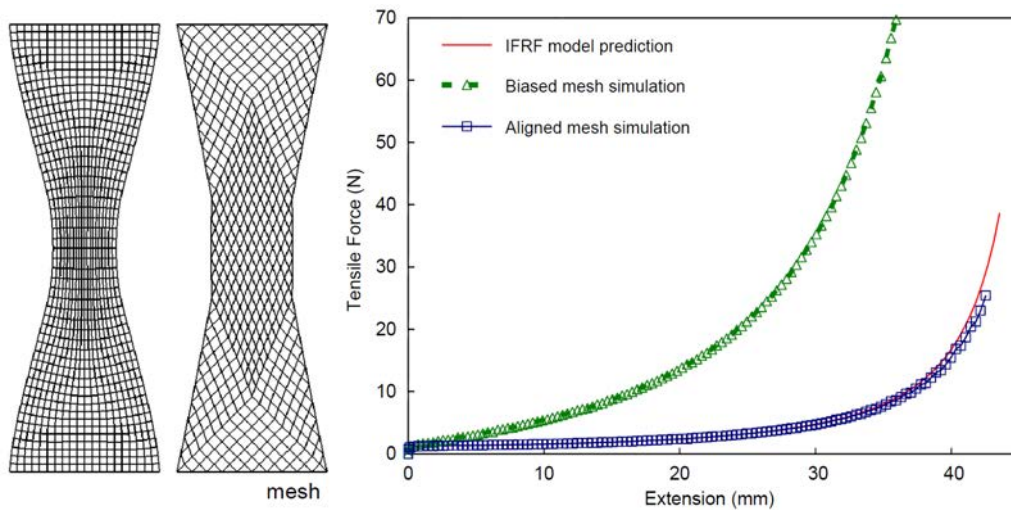


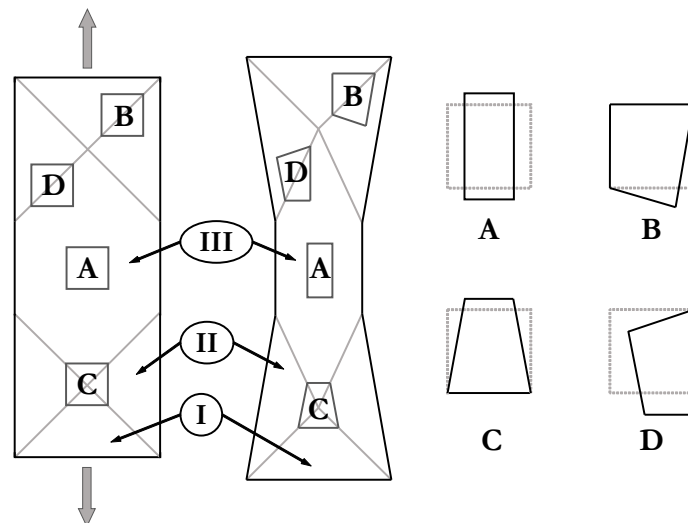
Figure 3.2 – Forces de traction pour des simulations élément fini dont le maillage est aligné ou non avec les fibres [YU 06]

à reproduire un champ de déformation isochore en tous points pour un champ de déplacement qui conserve le volume. Dans le cas de lois de comportement incompressible ou quasi incompressible, la dilatation non-nulle en tout point des modes hourglass, qui sont un mode de déformation isochore, provoquera un raidissement du comportement [NAG 74, HUG 80, BEL 86].

Le verrouillage en cisaillement plan apparaît lors de sollicitations en flexion pure. Aucun cisaillement ne doit exister en tous points de l'élément. Cependant, le principal mode de déformation est un mode hourglass. Le cisaillement donné par l'interpolation n'est donc pas nul en tous points, faisant intervenir une résistance en cisaillement. On parle alors de rigidité supplémentaire en cisaillement [BEL 86, BEL 90a].

Il existe aussi le *transverse shear locking* [HUG 81] pour les plaques et coques minces sollicitées en flexion pure et le *membrane locking* [STO 82] dans le cas des coques courbées sollicitées par des déformations en flexion [BEL 00]. Ceux-ci étant uniquement réservés aux éléments de type plaque ou coque, ils ne seront pas abordés ici.

Pour en revenir au cas du *tension locking*, il est intéressant d'étudier un cas précis mettant en lumière ce phénomène de verrouillage. Prenons le cas du bias extension test, qui a été amplement étudié. Comme cela a été montré par [YU 06], afin de réussir une simulation, chaque élément doit être capable de se déformer suivant certains modes. La figure 3.3 montre les quatre modes composants la simulation. L'élément A, localisé dans la zone III, doit reproduire une déformation de treillis uniforme. Dans l'élément B, à cheval sur les zones I et II, et l'élément D, à cheval sur les zones II et III, les fibres selon une direction peuvent être courbées. L'élément C s'étend sur l'ensemble des zones de telle manière que les fibres selon les deux directions subissent de la flexion.



**Figure 3.3** – Modes de déformation pour certaines zones d'un essai de traction de biais [YU 06]

Les modes de déformations B, C et D sont ceux qui vont poser problème. Modéliser le bias extension test nécessite une continuité  $C^0$  aux frontières entre domaines. Les éléments

finis à intégration complète sont au minimum  $C^1$  dans leur domaine. Une rotation des fibres à l'intérieur de l'élément, c'est à dire une discontinuité, n'est pas représentable. Le seul moyen de faire apparaître ces discontinuités est d'aligner les fibres avec les côtés des éléments, le champ de déplacement étant  $C^0$  entre eux. Ainsi, les flexions de mèches sont possibles.

Dans les paragraphes suivant, une explication du verrouillage en tension à partir d'hypothèses simplificatrices est donnée. On montrera la présence de déformations parasites non constantes dans la direction des mèches, provoquant des elongations fibreuses numériques non désirées.

#### **Approximation du comportement élément fini par $\gamma$ -projection**

Quantitativement, la non-cohérence de ces modes de déformation peut aussi être reliée à une trop grande rigidité des modes de déformation hourglass due aux très larges rigidités de tension par comparaison aux autres. Cette trop grande rigidité des modes hourglass, générant un champ de déformation non constant dans l'élément, peut elle-même être expliquée par l'existence de déformations parasites dans les directions des mèches. L'évaluation des forces générées par ces déformations parasites conduira au verrouillage. Afin de montrer les problèmes numériques soulevés par ces matériaux, la déformation dans les directions des mèches (supposées quasi inextensibles) est développée explicitement grâce à l'approximation des Q4 (quadrangle à quatre nœuds) proposée par [BEL 86], repris par [KOH 87] puis [SIM 93b] entre autres. Pour cela, plusieurs hypothèses simplificatrices seront faites ici :

- Des éléments surfaciques sont considérés. Cette hypothèse permet d'alléger les calculs théoriques. Ceux-ci peuvent aussi être réalisés en volumique mais trois modes hourglass supplémentaires apparaissent dans chaque direction, alourdissant les notations. Pour le développement associé aux cas tridimensionnels, on s'appuiera par exemple sur [BEL 93];
- Les perturbations sont supposées petites. Cette simplification est aussi faite dans un souci de compréhension. L'extension des résultats aux cas non linéaires pourrait être réalisée simplement en considérant une loi en taux et en travaillant avec les vitesses en lieu des déplacements (voir [BEL 84]). Cependant, gardons en tête que les lois en taux sont difficilement applicables à nos matériaux, à causes de nécessaires différenciations des champs de tenseur appelées dérivées de Lie. Ces dérivées complexes permettent de garantir le cumul objectif des contraintes. L'extension au cas géométriquement non linéaire sera réalisée d'une manière différente, adaptée aux lois en déplacement total, dans les sections 3.3, 3.4 et l'annexe E.

Afin de mettre en évidence le verrouillage en tension pour un élément, l'introduction de notions liées aux  $\gamma$ -projections est nécessaire. Les problématiques soulevées par l'utilisation de lois élément fini classiques peuvent alors être abordées : les déformations parasites dans la direction des mèches et l'énergie de déformation erronée qui en découle.

Les coordonnées  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(X, t)$  dont les composantes matérielles sont  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$  transforment les particules étiquetées  $X$  des coordonnées de la configuration  $C_0$  dans la



configuration courante au temps  $t$ . Les déplacements totaux à partir de la configuration de référence seront notés  $\mathbf{u}$ . Dans le cas des éléments finis isoparamétriques les fonctions de forme lagrangiennes sont les plus couramment utilisées :

$$x_i = \sum_{A=1}^4 N^A(\boldsymbol{\xi}) x_i^A \text{ avec } N^A = \frac{1}{4} \left(1 + \xi_1 \xi_1^A\right) \left(1 + \xi_2 \xi_2^A\right) \quad (3.1)$$

où  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^T = (\xi, \eta)^T$  sont les coordonnées isoparamétriques, les  $\boldsymbol{\xi}^A = (\xi_1^A, \xi_2^A)^T$  sont les vecteurs contenant les coordonnées des sommets du carré bi-unitaire  $\square$  et  $x_i^A$  est la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée du nœud  $A$ . En développant l'équation 3.1, on obtient une description vectorielle des fonctions de forme composée d'une famille orthogonale de vecteurs :

$$\mathbf{N}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4} (\mathbf{s} + \xi \boldsymbol{\xi}_1 + \eta \boldsymbol{\xi}_2 + h(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{h}) \quad (3.2)$$

de telle manière que :

$$x_i = \mathbf{N}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}_i \text{ avec } \mathbf{x}_i^T = (x_i^1, x_i^2, x_i^3, x_i^4)^T \quad (3.3)$$

où  $\mathbf{s}$  est le vecteur de translation, les  $\boldsymbol{\xi}_i$  sont les vecteurs sommets du carré biunitaire et  $\mathbf{h}$  est le vecteur hourglass :

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= (+1, +1, +1, +1)^T \\ \boldsymbol{\xi}_1 &= (-1, +1, +1, -1)^T \\ \boldsymbol{\xi}_2 &= (-1, -1, +1, +1)^T \\ \mathbf{h} &= (+1, -1, +1, -1)^T \end{aligned} \quad (3.4)$$

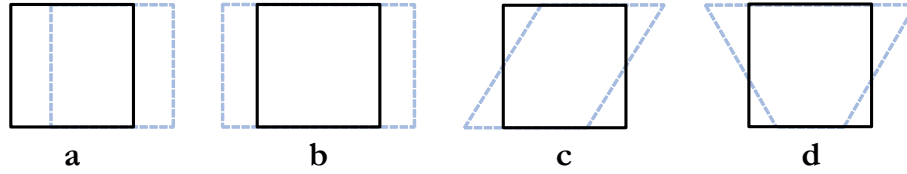
Et  $h(\boldsymbol{\xi})$  la fonction Hourglass :

$$h = \xi \eta \quad (3.5)$$

Les quatre vecteurs donnés équation 3.4 forment une base sur laquelle peuvent être projetés les champs de déplacement suivant chaque direction. L'ensemble des modes de déformations d'un quadrangle peut alors être décomposé selon huit modes, dont la moitié sont donnés figure 3.4. Les quatre autres modes peuvent être trouvés en transposant les quatre premiers dans la direction verticale. De ces modes de déplacement, le dernier est intéressant : c'est le seul où la déformation est non constante en tout point de l'élément. Ce mode est appelé mode hourglass.

Afin de facilement découpler les composantes dues aux modes hourglass, le champ de déplacement suivant pour l'élément isoparamétrique à quatre nœuds est utilisé :

$$u_i = \left( \boldsymbol{\Delta}^T + x \mathbf{b}_x^T + y \mathbf{b}_y^T + h \boldsymbol{\gamma}^T \right) \mathbf{u}_i \quad (3.6)$$



**Figure 3.4** – Modes de déplacement de corps rigide (a), de dilatation (b), de cisaillement (c) et hourglass (d) pour le quadrangle suivant la direction horizontale

où :

$$\Delta = \frac{1}{4} \left[ \mathbf{t} - \left( \mathbf{t}^T \mathbf{x} \right) \mathbf{b}_x - \left( \mathbf{t}^T \mathbf{y} \right) \mathbf{b}_y \right] \quad (3.7)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{4} \left[ \mathbf{h} - \left( \mathbf{h}^T \mathbf{x} \right) \mathbf{b}_x - \left( \mathbf{h}^T \mathbf{y} \right) \mathbf{b}_y \right] \quad (3.8)$$

$$\mathbf{t}^T = [+1, +1, +1, +1] \quad (3.9)$$

$$\mathbf{h}^T = [+1, -1, +1, -1] \quad (3.10)$$

$$\mathbf{b}_x = \frac{1}{2A} [y_{24}, y_{31}, y_{42}, y_{13}] \quad (3.11)$$

$$\mathbf{b}_y = \frac{1}{2A} [x_{42}, x_{13}, x_{24}, x_{31}] \quad (3.12)$$

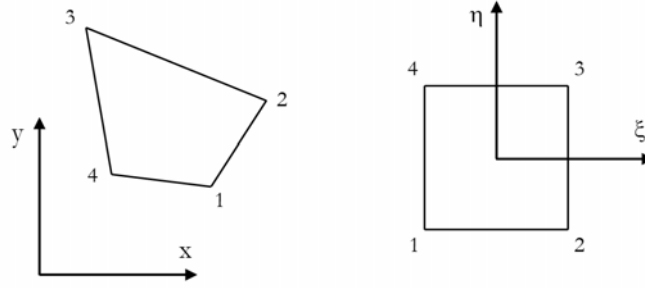
$$y_{ij} = y_i - y_j, \quad x_{ij} = x_i - x_j \quad (3.13)$$

$$h = \xi \eta \quad (3.14)$$

avec  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  les vecteurs des coordonnées nodales,  $\mathbf{u}_x$  et  $\mathbf{u}_y$  les vecteurs des déplacements nodaux,  $\mathbf{u}^T = [\mathbf{u}_x^T, \mathbf{u}_y^T]$  et  $(\xi, \eta)$  les coordonnées dans le repère isoparamétrique (carré bi-unitaire tel que  $\xi \in [-1, +1]$  et  $\eta \in [-1, +1]$ , figure 3.5).  $\boldsymbol{\gamma}$  est appelé le vecteur anti-hourglass : son produit scalaire avec le vecteur hourglass  $\mathbf{h}$  est unitaire, ces deux vecteurs sont donc orthogonaux. Le gradient symétrisé du champ de déplacement est obtenu en prenant les dérivées de 3.6.

$$\nabla_s = \begin{bmatrix} u_{xx} \\ u_{yy} \\ u_{x,y} + u_{y,x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_x + h_{,x} \boldsymbol{\gamma}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_y + h_{,y} \boldsymbol{\gamma}^T \\ \mathbf{b}_y + h_{,y} \boldsymbol{\gamma}^T & \mathbf{b}_x + h_{,x} \boldsymbol{\gamma}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (3.15)$$

Les différents vecteurs qui apparaissent dans 3.6 satisfont par définition les conditions d'orthogonalité suivantes :



**Figure 3.5** – Domaines parent (isoparamétrique) et physique pour le quadrilatère à quatre nœuds Q4

$$\mathbf{b}_i^T \mathbf{x}_j = \delta_{ij} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{h}^T \boldsymbol{\gamma} = 1 \quad (3.17)$$

$$\mathbf{b}_i^T \mathbf{h} = \mathbf{b}_i^T \mathbf{s} = 0 \quad (3.18)$$

$$\mathbf{h}_i^T \mathbf{s} = 0 \quad (3.19)$$

Il est aussi important de noter que l'intégrale des dérivées de la fonction hourglass sur le volume de l'élément s'annule, retranscrivant la non-homogénéité de ces modes de déformations :

$$\int_{\Omega_e} h_{,x} d\Omega = \int_{\Omega_e} h_{,y} d\Omega = 0 \quad (3.20)$$

### Application au verrouillage en tension

Définissons une matrice de comportement simplifiée pour l'élément, qui sera utilisée dans ce chapitre. Deux réseaux de fibres orthogonaux sont considérés. Les fibres sont orientées d'un angle  $\theta$  par rapport au repère local à l'élément, le coefficient de Poisson est pris nul dans une hypothèse de découplage classique des modes de déformation des milieux fibreux, ce qui amène à la matrice de rigidité  $\mathbf{C}_\theta$  en notations de Voigt :

$$\mathbf{C}_\theta = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_\theta^{11} & \mathbf{C}_\theta^{12} & \mathbf{C}_\theta^{13} \\ \mathbf{C}_\theta^{12} & \mathbf{C}_\theta^{22} & \mathbf{C}_\theta^{23} \\ \mathbf{C}_\theta^{13} & \mathbf{C}_\theta^{23} & \mathbf{C}_\theta^{33} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

où :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}_\theta^{11} &= E_1 \cos(\theta)^4 + E_2 \sin(\theta)^4 + 4G \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 \\
 \mathbf{C}_\theta^{12} &= E_1 \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 + E_2 \sin(\theta)^2 \cos(\theta)^2 - 4G \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 \\
 \mathbf{C}_\theta^{13} &= E_1 \cos(\theta)^3 \sin(\theta) - E_2 \sin(\theta)^3 \cos(\theta) - 2G \cos(\theta) \sin(\theta) (\cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2) \\
 \mathbf{C}_\theta^{22} &= E_1 \sin(\theta)^4 + E_2 \cos(\theta)^4 + 4G \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 \\
 \mathbf{C}_\theta^{23} &= E_1 \sin(\theta)^3 \cos(\theta) - E_2 \cos(\theta)^3 \sin(\theta) + 2G \cos(\theta) \sin(\theta) (\cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2) \\
 \mathbf{C}_\theta^{33} &= E_1 \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 + E_2 \sin(\theta)^2 \cos(\theta)^2 + G_{12} (\cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2)^2
 \end{aligned}$$

où  $E_1$  et  $E_2$  sont les rigidités de tension des mèches selon la première et la seconde direction,  $G_{12}$  étant le module de cisaillement plan. Soit pour  $\theta = 0^\circ$  :

$$\mathbf{C}_0 = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Et pour  $\theta = 45^\circ$  :

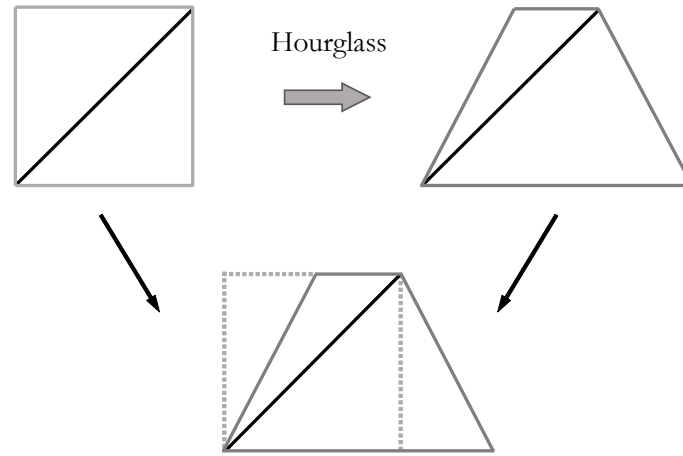
$$\mathbf{C}_{45} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (E_1 + E_2) + G_{12} & (E_1 + E_2) - G_{12} & (E_1 - E_2) \\ (E_1 + E_2) - G_{12} & (E_1 + E_2) + G_{12} & (E_1 - E_2) \\ (E_1 - E_2) & (E_1 - E_2) & (E_1 + E_2) \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Comme vu précédemment, les modes de déformation posant des problèmes sont ceux faisant intervenir des modes de déformations hourglass où les directions de mèches ne sont pas alignées avec les côtés des éléments. Ces modes de déformation hourglass n'apparaissent, dans le cas problématique du bias extension test, que lorsque le maillage est orienté selon la largeur et longueur de l'échantillon. Si celui-ci est orienté à  $\pm 45^\circ$ , seuls les modes de déformations en dilatation et cisaillement simple apparaissent, ou du moins dominant le champ de déformation.

Une propriété fondamentale des renforts tissés est la très grande rigidité le long des directions de fibre. Une condition de quasi-inextensibilité peut alors être formulée, signifiant que la déformation dans la direction des mèches doit être très faible, voire nulle (si la rigidité en tension est infinie). Il apparaît, comme souligné précédemment, que les modes de déformation hourglass vont provoquer une déformation non nulle de la mèche lors de l'essai de traction de biais. Intuitivement, il apparaît dans le cas simple où les éléments sont carrés et les mèches orientées selon les diagonales de l'élément (figure 3.6), que la déformation dans la direction des mèches doit être nulle pour une sollicitation hourglass pure. En écrivant le champ de déplacement en fonction de la décomposition effectuée précédemment avec les vecteurs de translations, nodaux et hourglass, on obtient en utilisant l'équation 3.6 :

$$\mathbf{u}_x = \alpha_{0x} \mathbf{s} + \alpha_{1x} \mathbf{x} + \alpha_{2x} \mathbf{y} + \alpha_{3x} \mathbf{h} \quad (3.24)$$

$$\mathbf{u}_y = \alpha_{0y} \mathbf{s} + \alpha_{1y} \mathbf{x} + \alpha_{2y} \mathbf{y} + \alpha_{3y} \mathbf{h} \quad (3.25)$$



**Figure 3.6** – Pas de déformation des mèches reliant les angles opposés lors de modes hourglass

Où les  $\alpha_{ix}$  et  $\alpha_{iy}$  sont des constantes dépendantes de l'amplitude de la déformation pour chaque composante de la base précédemment décrite. En utilisant 3.15 et les conditions d'orthogonalités induites par la décomposition :

$$\nabla \mathbf{u}_s = \begin{bmatrix} u_{x,x} \\ u_{y,y} \\ u_{x,y} + u_{y,x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{1x} + \alpha_{3x}h_{,x} \\ \alpha_{2y} + \alpha_{3y}h_{,y} \\ \alpha_{2x} + \alpha_{3x}h_{,y} + \alpha_{1y} + \alpha_{3y}h_{,x} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

La déformation dans une direction  $\theta$  par rapport au repère local choisi est alors donnée par :

$$\varepsilon_{\theta}^f = \cos(\theta)^2 u_{x,x} + 2 \cos(\theta) \sin(\theta) (u_{x,y} + u_{y,x}) + \sin(\theta)^2 u_{y,y} \quad (3.27)$$

Si on se place dans le cas du maillage orienté à  $\pm 45^\circ$ , les modes de déformation observés sont le cisaillement simple et l'élongation ( $\alpha_{3x}$  et  $\alpha_{3y}$  sont nuls). Les mèches sont orientées selon les côtés des éléments. Les déformations sont exprimées dans un repère local orienté selon ces mêmes côtés (figure 3.7). Les déformations dans les directions des mèches dans ce repère (soit  $0/90^\circ$  ici) sont :

$$\varepsilon_0^f = \alpha_{1x} \quad (3.28)$$

$$\varepsilon_{90}^f = \alpha_{2y} \quad (3.29)$$

Cela signifie que seule la sollicitation dans la direction des vecteurs des coordonnées nodales  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ , c'est à dire une élongation dans les directions locales orientées selon les mèches, provoque une déformation homogène de l'élément dans le sens de la mèche, ce qui est cohérent.

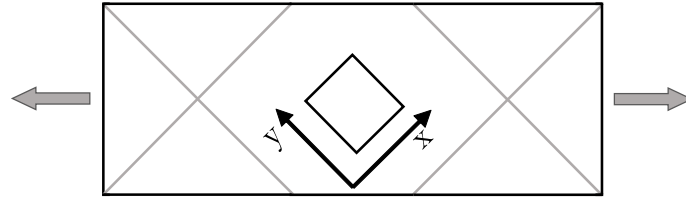


Figure 3.7 – Repère local pour des éléments orientés à  $45^\circ$

Dans le cas du maillage à  $0/90^\circ$  maintenant, tous les modes de déformations sont sollicités, et plus particulièrement les modes de déformation hourglass. En considérant seulement ces modes de déformations ( $\alpha_{1x}$  et  $\alpha_{2y}$  sont nuls) et une orientation à  $\pm 45^\circ$  des mèches (repère local figure 3.8) :

$$\varepsilon_{45}^f = \frac{1}{2} (\alpha_{3x} h_{,x} + 2 (\alpha_{3x} h_{,y} + \alpha_{3y} h_{,x}) + \alpha_{3y} h_{,y}) \quad (3.30)$$

$$\varepsilon_{-45}^f = \frac{1}{2} (\alpha_{3x} h_{,x} - 2 (\alpha_{3x} h_{,y} + \alpha_{3y} h_{,x}) + \alpha_{3y} h_{,y}) \quad (3.31)$$

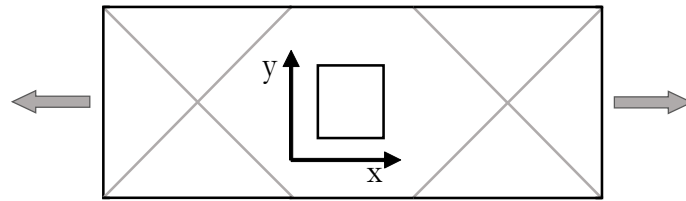


Figure 3.8 – Repère local pour des éléments orientés à  $0/90^\circ$

En remarquant que  $h_{,x}$  et  $h_{,y}$  sont nuls uniquement à l'origine du domaine isoparamétrique, les déformations  $\varepsilon_{45}^f$  et  $\varepsilon_{-45}^f$  ne sont nulles qu'en ce point précis. Cela signifie que toute déformation hourglass provoque une déformation dans la direction des mèches en tout point de celle-ci excepté à l'origine même si la longueur globale de la mèche est conservée. Par conséquent, des efforts parasites additionnels rendus important par le module de rigidité en tension vont apparaître. Il est alors évident que le verrouillage provient de l'incapacité de l'élément fini à représenter une déformation nulle dans la direction de la mèche en tout point de cette mèche lors de la présence de modes de déplacement hourglass. Le principe majeur suivant peut alors en être tiré :

Le champ de déformation dans la direction des mèches doit être nul pour tout champ de déplacement qui préserve la longueur des mèches. En particulier pour le cas du quadrilatère, il doit disparaître pour les modes hourglass.

L'énergie de déformation peut aussi être calculée pour des combinaisons de modes de déformations hourglass afin de confirmer le phénomène. Les déplacements nodaux suivants sont considérés :

$$\mathbf{u}_x = \alpha_{3x} \mathbf{h} \quad (3.32)$$

$$\mathbf{u}_y = \alpha_{3y} \mathbf{h} \quad (3.33)$$

donnant ainsi

$$U_\theta = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C}_\theta \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \quad (3.34)$$

Pour simplification, on écrit seulement pour  $\theta = 45^\circ$  :

$$\begin{aligned} U_{45} = & \frac{E_1}{4} (\alpha_{3x} + \alpha_{3y})^2 (H_{xx} + 2H_{xy} + H_{yy}) \\ & + \frac{E_2}{4} (\alpha_{3x} - \alpha_{3y})^2 (H_{xx} - 2H_{xy} + H_{yy}) \\ & + G_{12} (\alpha_{3x}^2 H_{xx} - 2\alpha_{3x}\alpha_{3y} H_{xy} + \alpha_{3y}^2 H_{yy}) \end{aligned} \quad (3.35)$$

où

$$H_{ij} = \int_{\Omega} h_i h_j d\Omega \quad (3.36)$$

L'énergie de déformation associée à toutes les combinaisons des modes hourglass contient toujours les modules de rigidité longitudinaux des mèches  $E_1$  et  $E_2$ . A cause de la présence des termes  $(\alpha_{3x} + \alpha_{3y})$  et  $(\alpha_{3x} - \alpha_{3y})$ , aucune combinaison de ces modes ne peut être trouvée annulant la contribution des modules de rigidité des mèches à l'énergie de déformation. Si l'on revient à la condition d'inextensibilité des mèches postulée précédemment, ces modules tendent vers l'infini, et donc l'énergie aussi. L'énergie de déformation développée par des déformations hourglass, qui sont nécessaires à la bonne représentativité de la simulation de bias extension test, tend vers l'infini. Les efforts relevés numériquement ne peuvent donc être que trop importants.

### 3.1.3 Techniques de résolution du verrouillage en tension

Des remèdes ont été proposés au verrouillage en tension. Les auteurs ont entre autres étudié la possibilité d'utiliser des éléments à intégration sélective, à intégration réduite avec stabilisation physique ou par perturbation, ainsi que des éléments à champs mixtes. Bien que des résultats intéressants aient été obtenus, aucune solution définitive ne semble se dégager. Aucun élément polyvalent ne semble apparaître non plus. De plus, uniquement des éléments en deux dimensions ont été étudiés, la plupart des tissus composites utilisés étant effectivement de faible épaisseur. Néanmoins, l'utilisation de plus en plus courante de tissés épais tels que le nôtre mérite de s'intéresser aux éléments volumiques.

#### 3.1.3.1 Alignement mèches-côtés des éléments

Le remède le plus simple et le plus efficace au verrouillage des mèches en tension semble être d'aligner les mèches avec les côtés des éléments. Cependant, cette solution n'est pas universelle et est parfois inapplicable :

- Dans le cas où la préforme n'est pas de forme rectangulaire. Dès que les bords libres sont courbés il devient difficile de respecter cette règle tout en gardant des éléments parallélépipèdes rectangles, quelle que soit l'orientation des mèches ;
- Lorsque les mèches ne sont pas orientées dans la direction de la préforme prélevée. C'est notamment le cas du bias extension test où les directions de mèches sont orientées à  $\pm 45^\circ$  par rapport à la longueur et la largeur de l'échantillon. Le maillage forme alors des escaliers sur les bords (figure 3.1b) ;
- Lorsque les directions des mèches ne sont pas orthogonales entre elles. Il est possible d'utiliser des parallélépipèdes non rectangles ou des parallélogrammes dans ces cas-ci, mais leur comportement général perd en qualité.

En plus de ces limitations, la possibilité d'utiliser des méthodes de résolution de type ALE (arbitrary lagrangian eulerian) est limitée et tout remaillage devient impossible.

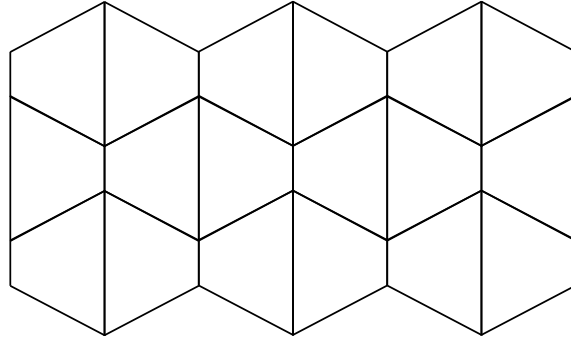
#### 3.1.3.2 Intégration réduite

L'intégration réduite, qu'elle soit sélective ou non, est une méthode couramment utilisée pour éliminer le verrouillage, même pour le verrouillage en tension des tissés [YU 06]. Comme vu précédemment, section 3.1.2, le verrouillage en tension apparaît à cause de l'impossibilité pour les éléments à intégration complète de représenter une discontinuité du champ de déplacement. L'apparition d'une déformation parasite en au moins un point d'intégration de l'élément en est alors le résultat, créant des conditions favorables au verrouillage. L'utilisation de l'intégration réduite permet de lever ces contraintes. L'utilisation d'un seul point d'intégration situé à l'origine du repère parent permet de ne tenir compte que des rigidités associées aux modes de déformations constants. Les mèches peuvent alors s'étendre ou se comprimer en tout autre point de l'élément, évitant le verrouillage. Par définition, aucune rigidité n'est alors associée à chaque mode de déformation hourglass. On parle de modes à énergie nulle. Le problème de l'intégration réduite est le développement non désiré sous forme de motifs de ces modes hourglass, c'est l'hourglassing (voir figure 3.9). Ceux-ci doivent alors être contrôlés. Plusieurs techniques de contrôles existent.

La méthode dite par perturbations est la plus simple. Une rigidité globale est associée par l'utilisateur aux modes hourglass. Cette solution fonctionne mais comporte plusieurs inconvénients :

- Comment choisir la rigidité des modes hourglass ? Une valeur doit être associée à la rigidité des modes hourglass arbitrairement. Cette valeur aura une influence plus ou moins grande sur les efforts et la déformée finale, en fonction des ratios entre les autres rigidités.
- Une même rigidité est associée à tous les modes hourglass. C'est à dire que douze modes de déformations (2 en deux dimensions) vont se voir assigner la même rigidité. Pour notre matériau, les ordres de grandeur des rigidités sont tous assez





**Figure 3.9** – Représentation d’un maillage subissant un champ de déplacement hourglass

éloignés les uns des autres, même entre les différentes directions de cisaillement.

L’intégration sélective semble alors être un bon compromis. [HAM 13b] et [THI 08] proposent d’effectuer une intégration réduite sur la tension uniquement. C’est à dire que le calcul de la composante en tension des tissés est uniquement réalisée au centre de l’élément, supprimant dès lors toute possibilité de verrouillage dû à la rigidité des modes hourglass. La contribution de ces modes n’est associée qu’aux autres rigidités matérielles (cisaillements et compression transverse). Cette méthode à l’avantage de supprimer le verrouillage tout en ne laissant pas les modes hourglass se propager librement et détruire la simulation. Il a cependant été montré dans [HAM 13b] que cette méthode n’est pas satisfaisante. Le verrouillage est bien supprimé mais la stabilisation des modes hourglass n’est réalisée que jusqu’à un certain point. Dès que les déformations deviennent trop importantes, la procédure de stabilisation devient inefficace.

L’utilisation de la stabilisation physique est aussi une solution. Dans ces procédures, la stabilisation est basée sur les propriétés mécaniques et géométriques de l’élément. La stabilisation est alors efficace mais ne permet cependant pas de supprimer le verrouillage. Les rigidités de stabilisation sont développées analytiquement de manière à se rapprocher au plus près du comportement des éléments à intégration complète. Le principal intérêt est alors le gain de temps apporté par l’intégration réduite. Il est néanmoins possible de modifier ces éléments de manière à obtenir une suppression de certains verrouillages en s’appuyant sur les méthodes dites *assumed strain* où le champ de déformation associé aux modes hourglass est modifié [BEL 90a, BEL 93].

Afin d’éliminer le verrouillage en tension, le champ de déformation doit être projeté de manière à ce que la rigidité en tension n’apparaisse plus dans le calcul de l’énergie de déformation associée au mode hourglass. Pour cette raison, on considère un champ de déformation supposée (méthodes *assumed strain*) dont la matrice d’interpolation générale  $\bar{\mathbf{B}}$  est la suivante :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_x + e_1 h_x \boldsymbol{\gamma}^T & e_2 h_y \boldsymbol{\gamma}^T \\ e_2 h_x \boldsymbol{\gamma}^T & \mathbf{b}_y + e_1 h_y \boldsymbol{\gamma}^T \\ \mathbf{b}_y + e_3 h_y \boldsymbol{\gamma}^T & \mathbf{b}_x + e_3 h_x \boldsymbol{\gamma}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{B}} \mathbf{u} \quad (3.37)$$

### 3. Analyse et correction du verrouillage en tension

---

L'intégration complète correspond à  $e_1 = 1$ ,  $e_2 = 0$  et  $e_3 = 1$ . On définit alors la matrice de changement de repère en notation de Voigt pour les tenseurs d'ordre 2 :

$$\mathbf{T}_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta)^2 & \sin(\theta)^2 & \cos(\theta)\sin(\theta) \\ \sin(\theta)^2 & \cos(\theta)^2 & -\cos(\theta)\sin(\theta) \\ -2\cos(\theta)\sin(\theta) & 2\cos(\theta)\sin(\theta) & \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Les déformations dans le repère tourné de l'angle  $\theta$  sont alors :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^\theta = \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_{xx}^\theta \\ \bar{\varepsilon}_{yy}^\theta \\ \bar{\varepsilon}_{xy}^\theta \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_\theta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.39)$$

En utilisant les notations 3.32 et 3.33 :

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{xx}^\theta &= \cos(\theta)^2 (e_1 \alpha_{3x} \mathbf{h}_x + e_2 \alpha_{3y} \mathbf{h}_y) + \sin(\theta)^2 (e_2 \alpha_{3x} \mathbf{h}_x + e_1 \alpha_{3y} \mathbf{h}_y) \\ &\quad + \cos(\theta)\sin(\theta) (e_3 \alpha_{3x} \mathbf{h}_y + e_2 \alpha_{3y} \mathbf{h}_x) \\ \bar{\varepsilon}_{yy}^\theta &= \sin(\theta)^2 (e_1 \alpha_{3x} \mathbf{h}_x + e_2 \alpha_{3y} \mathbf{h}_y) + \cos(\theta)^2 (e_2 \alpha_{3x} \mathbf{h}_x + e_1 \alpha_{3y} \mathbf{h}_y) \\ &\quad - \cos(\theta)\sin(\theta) (e_3 \alpha_{3x} \mathbf{h}_y + e_2 \alpha_{3y} \mathbf{h}_x) \\ \bar{\varepsilon}_{xy}^\theta &= -2\cos(\theta)\sin(\theta) (e_1 \alpha_{3x} \mathbf{h}_x + e_2 \alpha_{3y} \mathbf{h}_y) \\ &\quad + 2\cos(\theta)\sin(\theta) (e_2 \alpha_{3x} \mathbf{h}_x + e_1 \alpha_{3y} \mathbf{h}_y) \\ &\quad + (\cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2) (e_3 \alpha_{3x} \mathbf{h}_y + e_2 \alpha_{3y} \mathbf{h}_x) \end{aligned}$$

Comme évoqué précédemment, pour les milieux fibreux l'objectif est d'avoir des déformations nulles dans la direction  $\theta$  (qui doit être la direction dans laquelle est orientée une mèche) pour n'importe quelle combinaison de modes hourglass. Pour cela, il faut définir  $e_1$ ,  $e_2$  et  $e_3$  de manière à ce que  $\bar{\varepsilon}_{xx}^\theta$  soit nul. On remarque en premier lieu que les termes  $\alpha_{3x} \mathbf{h}_y$  et  $\alpha_{3y} \mathbf{h}_x$  ne peuvent être annulés que si  $e_3 = 0$ . Il reste alors un terme en  $\alpha_{3x} \mathbf{h}_x$  et un terme en  $\alpha_{3y} \mathbf{h}_y$ . Afin de les faire disparaître, trois jeux de paramètres sont possibles :

	$e_1$	$e_2$	$\theta$
1	0	0	$\theta$
2	$e_1$	$-e_1$	$\frac{\pi}{4}$
3	$e_1$	$-e_1$	$-\frac{\pi}{4}$

Seule la première combinaison est utilisable pour tout  $\theta$ . Cependant cette combinaison implique que  $e_1$ ,  $e_2$  et  $e_3$  soient nuls. Ceci revient à avoir une matrice d'interpolation des déformations avec uniquement des valeurs constantes dans l'élément. On se retrouve alors avec un simple élément à intégration réduite sans stabilisation des modes hourglass. Il n'existe pas de valeurs constantes de  $e_1$  et  $e_2$ , c'est dire qui ne soient pas fonction de  $\alpha_{3x}$ ,  $\alpha_{3y}$ ,  $\mathbf{h}_x$  et  $\mathbf{h}_y$ , qui annulent la déformation dans une direction  $\theta$  pour n'importe quelle combinaison de modes hourglass. Cependant, dans le cas précis où l'angle est choisi à

$\pm 45^\circ$ , il est possible d'annuler la déformation dans cette direction là. Cet élément est l'élément ASOI (Assumed strain optimal bending) [BEL 86]. Il permet d'obtenir une déformation hourglass nulle à  $45^\circ$ . L'énergie de déformation suivante est alors obtenue :

$$U_{45} = 4G_{12} (\alpha_{3x}H_{xx} - \alpha_{3y}H_{yy})^2 \quad (3.40)$$

Les modules de rigidité en tension ont disparu du calcul de l'énergie totale de déformation en cas de présence de modes hourglass pour des mèches orientées à  $\pm 45^\circ$ . Ce résultat est ici spécifique aux petites déformations. Il est intéressant de noter que cet élément n'est pas été conçu pour résoudre des problèmes spécifiques au composite. Il tire son nom du fait que la suppression des parties non constantes du cisaillement empêche l'apparition de cisaillement parasite en flexion pure et que la dilatation est constante en tout point pour permettre les déformations isochores des matériaux incompressibles. Il sera étendu aux grandes déformations dans l'annexe E, en se basant sur des développements de la section 3.3.

### 3.1.3.3 Éléments à champs mixtes

Un élément à un champ mixte a aussi été proposé [THI 08]. Ces éléments contiennent des degrés de liberté supplémentaires de différents type afin d'enrichir la formulation élément fini. Un historique plus complet et leurs différentes utilisations sont abordés plus en détail dans la section 3.2. Cet élément a été développé avec une variable supplémentaire : la déformation axiale de la mèche. L'objectif est de rajouter un champ supplémentaire dont l'interpolation sera différente de celle réalisée pour le reste de l'élément. Le champ résultant de cette interpolation spécifique doit permettre de supprimer le blocage. A la différence des formulations classiques, les formulations en champs mixtes ajoutent des équations dites de contrainte. Cet élément est donc régit par :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{\nabla} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (\sigma_{ij,j} + f_i = 0) \text{ dans } \Omega \quad (3.41)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} \quad (\sigma_{ij}n_j = t_i) \text{ sur } \Gamma \quad (3.42)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{a} - \varepsilon_f = 0 \quad (a_i u_{i,j} a_j - \varepsilon_f = 0) \text{ dans } \Omega \quad (3.43)$$

avec  $\Omega$  le volume du corps étudié et  $\Gamma$  la frontière. Le vecteur  $\mathbf{f}$  représente les forces volumiques,  $\mathbf{t}$  les forces surfaciques et  $\mathbf{n}$  la normale à la frontière. Les contraintes totales sont alors obtenues par la somme entre les contraintes de l'élément classique auxquelles sont ajoutées celles générées par l'élongation de la mèche :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{el} + \sigma_f \mathbf{a} \mathbf{a} \quad (\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{el} + \sigma_f a_i a_j) \quad (3.44)$$

Finalement, suivant la méthode de discrétisation de Galerkin, après avoir écrit le principe des travaux virtuels, on obtient un jeu d'équations du type :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{H} & \mathbf{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^k \\ \boldsymbol{\varepsilon}_f^k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3.45)$$

avec  $\mathbf{u}^k$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}_f^k$  les degrés de libertés et  $k$  le compteur nodal. On observe la présence d'une équation de contraintes qui va permettre d'évaluer les degrés de libertés correspondant à l'interpolation supplémentaire. Ces degrés supplémentaires viendront alors corriger les forces internes calculées usuellement afin de faire disparaître le verrouillage en tension. Il reste alors à sélectionner l'interpolation additionnelle de manière à ne pas obtenir de verrouillage. Pour cela la déformation de la mèche est choisie constante dans l'ensemble de l'élément. Cet élément donne de bons résultats. Par contre, comme souligné dans [THI 08], il ne semble être qu'une écriture plus élégante de l'intégration réduite sélective en tension proposée. Les deux mènent à considérer la déformation constante. Cependant, il semble que la vitesse de convergence soit plus importante avec l'élément à champ mixte. Cette caractéristique n'intervient pas dans le choix de l'élément dans notre cas, notre algorithme de résolution étant explicite. Il est noté que l'équivalence entre de nombreuses méthodes à intégration réduite sélective et les éléments à champs mixtes a été démontrée [MAL 78].

## 3.2 Intégration réduite et éléments à champs mixtes dans la résolution des problèmes numériques

Les effets numériques du verrouillage vont de la convergence lente des calculs jusqu'à l'impossibilité de réaliser la simulation. De nombreuses idées pour supprimer ces problèmes ont été formulées. Parmi celles-ci, deux s'avèrent particulièrement efficaces dans le régime des grandes déformations : l'intégration réduite avec stabilisation des modes hourglass et les méthodes *enhanced assumed strain* et/ou *stress*.

En se basant sur les premiers papiers de [HUG 77a] et [MAL 78], le concept initial d'intégration réduite a été amélioré par l'introduction d'un contrôle des méthodes hourglass inévitables [FLA 81, BEL 84, BEL 86]. Ces papiers mettent en place le processus général de stabilisation en introduisant les paramètres de rigidité et d'amortissement artificiels. Les vecteurs antihourglass  $\boldsymbol{\gamma}$  y jouent un rôle important dans la construction et l'évaluation de la rigidité de stabilisation. Différentes approches ont ensuite été utilisées. Une première par Liu [LIU 85b, LIU 85a] où les méthodes de  $\boldsymbol{\gamma}$ -projection et  $\bar{\mathbf{B}}$  sont utilisées pour projeter le champ de déformation grâce à un développement en séries de Taylor afin de supprimer le verrouillage volumétrique. Le champ de déformation a été projeté en utilisant un cisaillement constant et un moyennage de la dilatation afin d'éliminer le verrouillage [KOH 87]. Cette technique a par la suite été étendue au régime non linéaire [ZHU 96]. Cependant cet élément possède des modes à énergie nulle et n'était pas insensible au changement de repère. L'utilisation d'un repère corotationnel a ensuite été proposée afin de fournir un repère local à l'élément dans lequel le verrouillage serait supprimé par une modification du champ de déformation [BEL 90b]. Cet élément s'avère être efficace pour les matériaux isotropes mais est difficilement applicable à des lois plus générales où la détermination du repère local corotationnel devient difficile. De manière plus générale, les méthodes précédemment décrites sont développés pour des formulations incrémentales et des quadrangles.

En ce qui concerne les méthodes *assumed strain (stress)*, l'objectif est de modifier le champ de déformation (de contrainte) afin de supprimer les verrouillages, soit en le construisant entièrement (méthode *assumed*), soit en l'améliorant par l'intermédiaire de variables supplémentaires (méthodes des modes incompatibles ou *enhanced assumed*). Ces méthodes ont pour bases mathématiques les principes variationnels mixtes, principalement le principe de Hu-Washizu [WAS 82], où les champs de déformations et de contraintes sont des variables supplémentaires indépendantes. Du côté *assumed stress*, les principaux travaux sont à mettre au crédit de Pian et Sumihara [PIA 84] et Weissman et Taylor [WEI 91]. Cependant, à cause d'une construction plus difficile du champ *assumed stress*, de la plus grande facilité d'introduction dans les logiciels éléments finis des *assumed strain* et de leur coût calculatoire plus grand, cette méthode reste peu utilisée. Du point de vue *assumed strain*, en se basant sur les premiers travaux de Simo [SIM 90, SIM 92, SIM 93b], de nombreuses formulations en grandes transformations ont été développées pour les coques, les solid-shell à quatre ou huit nœuds et plus généralement, dans le cas qui nous intéresse, pour des briques [ARE 03, CAO 02, KAS 00, ROE 96, WRI 96]. L'intérêt d'une telle formulation 3D est de pouvoir développer un élément ne disposant d'aucune direction privilégiée d'amélioration et sans restriction concernant la loi de comportement utilisable contrairement à la technique  $\bar{\mathbf{B}}$  et aux éléments mixtes  $u - p$  (déplacement - pression). Les contraintes principales étant la possibilité d'apparition d'instabilités pour des larges compression en grandes transformation [SOU 95] et le coût de calcul élevé pour les lois de comportement non linéaire dû au besoin de résoudre un système non linéaire au niveau élémentaire.

L'aspect efficacité numérique étant de première importance dans les problématiques de mise en forme, les formulations *enhanced assumed strain* et à intégration réduite revêtent un intérêt particulier en associant la puissance des formulations mixtes à l'efficacité de l'intégration réduite. Plusieurs de ces éléments ont été développés avec succès [KOR 95, PUS 00, REE 05]. L'objectif de ces méthodes est de modifier les champs de déformations approximés par la méthode de stabilisation physique grâce à une méthode de type *enhanced assumed strain*. Les travaux présentés sont basés sur l'élément de Puso en déplacement total, proche de la technique utilisé par Reese, seuls les tenseurs de déformation et contrainte choisis diffèrent.

### 3.3 Élément à intégration réduite stabilisé physiquement avec *Enhanced Assumed Strain*

L'élément décrit ici est basé sur celui développé par Puso [PUS 00]. Cet élément combine la méthode des modes incompatibles avec une méthode de stabilisation physique. Il a été développé pour associer une formulation élément fini très efficace à l'élément hexaèdre à huit nœuds. L'utilisation d'un élément à intégration réduite permet d'obtenir un gain non négligeable en temps de calcul. Ce gain est encore plus grand dans le cas des formulations de type *enhanced strain*, comme ici. Ces dernières supposent l'introduction de variables supplémentaires au niveau élémentaire qui, par un choix judicieux des fonctions

d'interpolation associées, vont permettre de résoudre divers problèmes de verrouillage. Cependant, l'introduction de ces variables dans des briques classiques à intégration complète contenant des lois matériaux non linéaires provoque une augmentation considérable du temps de calcul. Afin de déterminer ces variables de cas-ci, une résolution d'un système d'équations non linéaires doit être effectuée grâce à un algorithme de type Newton-Raphston pour chaque élément. Autant dire que cette solution n'est pas adaptée à la résolution explicite désirée. L'intérêt de l'élément fini à intégration réduite est de n'avoir qu'un système linéaire d'équations à résoudre. Dans notre cas, par un choix judicieux des interpolations pour les variables *enhanced*, on se retrouve même avec une formulation qui contient un inversion analytique de matrice. La résolution est donc simplifiée.

#### 3.3.1 Vecteurs et forces de stabilisation

Avant de développer la formulation élément fini *enhanced assumed strain*, cette section détaille la méthode de stabilisation physique des éléments à intégration réduite. Les coordonnées  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$  dont les composantes sont  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$  transforment les particules étiquetées  $\mathbf{X}$  des coordonnées de la configuration  $C_0$  dans la configuration courante au temps  $t$ . Les déplacements totaux à partir de la configuration de référence seront notés  $\mathbf{u}$ . Dans le cas des éléments finis isoparamétriques les fonctions de forme lagrangiennes sont les plus couramment utilisées :

$$x_i = \sum_{A=1}^8 N^A(\boldsymbol{\xi}) x_i^A \text{ with } N^A = \frac{1}{8} \left(1 + \xi_1 \xi_1^A\right) \left(1 + \xi_2 \xi_2^A\right) \left(1 + \xi_3 \xi_3^A\right) \quad (3.46)$$

où  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T = (\xi, \eta, \zeta)^T$  sont les coordonnées isoparamétriques, les  $\boldsymbol{\xi}^A = (\xi_1^A, \xi_2^A, \xi_3^A)^T$  sont les vecteurs contenant les coordonnées des sommets du cube biunitaire  $\square$  et  $x_i^A$  est la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée du nœud  $A$ . En développant l'équation 3.46, on obtient une description vectorielle des fonctions de forme composée d'une famille orthogonale de vecteurs :

$$\mathbf{N}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{8} \left( \mathbf{s} + \sum_{i=1}^3 \xi_i \boldsymbol{\xi}_i + \sum_{j=1}^4 h_j(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{h}_j \right) \quad (3.47)$$

de telle manière que :

$$x_i = \mathbf{N}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{x}_i \text{ où } \mathbf{x}_i^T = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^8)^T \quad (3.48)$$

où  $\mathbf{s}$  est le vecteur de translation, les  $\boldsymbol{\xi}_i$  sont les vecteurs sommets du cube biunitaire et les  $\mathbf{h}_j$  sont les vecteurs Hourglass :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s} &= (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^T \\
 \boldsymbol{\xi}_1 &= (-1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1)^T \\
 \boldsymbol{\xi}_2 &= (-1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1)^T \\
 \boldsymbol{\xi}_3 &= (-1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1)^T \\
 \mathbf{h}_1 &= (1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1)^T \\
 \mathbf{h}_2 &= (1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, 1)^T \\
 \mathbf{h}_3 &= (1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1)^T \\
 \mathbf{h}_4 &= (-1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, -1)^T
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

Les 8 vecteurs donnés équation 3.49 forment une base sur laquelle peuvent être projetés les champs de déplacement suivant chaque direction. L'ensemble des modes de déformations d'une brique peut alors être décomposé selon 8 modes dans 3 directions. Pour illustration, les modes selon une direction sont donnés figure 3.10. Les autres modes peuvent être trouvés en transposant ces huit-ci dans les deux autres directions. De ces modes de déformation les quatre derniers sont intéressants : ce sont les seuls où la déformation est non constante en tout point de l'élément. Ce sont les modes hourglass. Et  $h_j(\boldsymbol{\xi})$  les fonctions hourglass :

$$h_1 = \xi\eta, h_2 = \eta\zeta, h_3 = \xi\zeta, h_4 = \xi\eta\zeta \tag{3.50}$$

On définit le jacobien, qui est le tenseur métrique liant le domaine isoparamétrique au domaine physique, de la manière suivante :

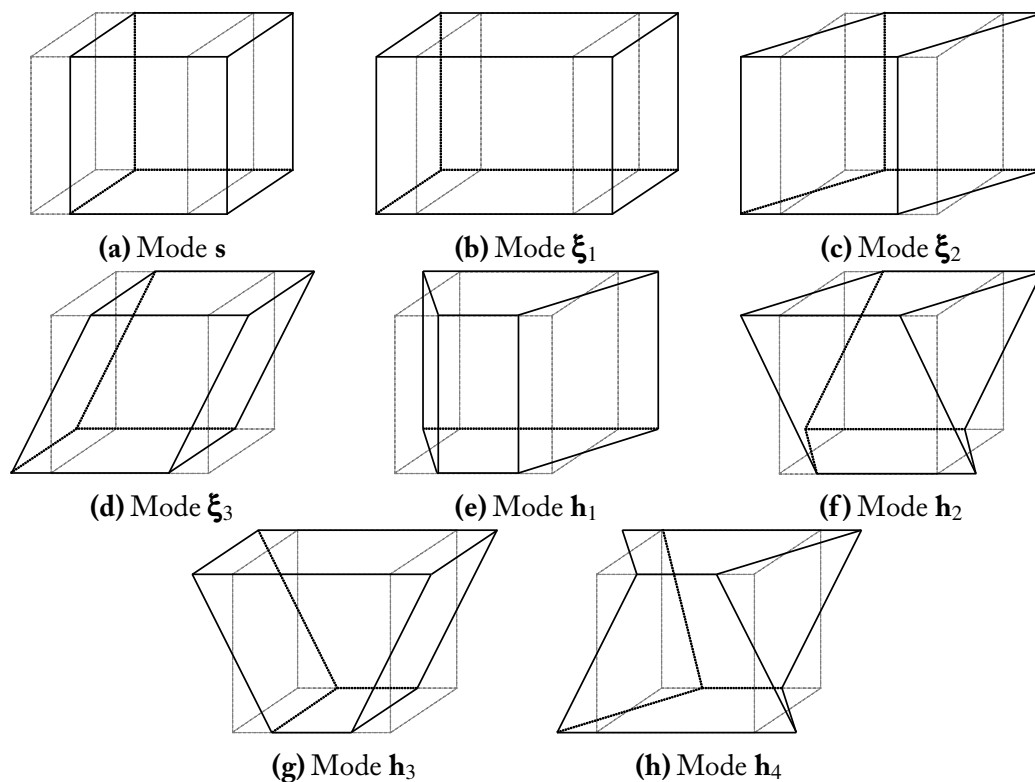
$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \tag{3.51}$$

A partir des équations 3.48 et 3.51, on peut exprimer le jacobien au centre du domaine isoparamétrique  $\mathbf{J}_0 = \mathbf{J}(\mathbf{0})$  :

$$(\mathbf{J}_0)_{ij} = \frac{\partial x_i(\mathbf{0})}{\partial \xi_j} = \frac{\partial \mathbf{N}(\mathbf{0})}{\partial \xi_j} \cdot \mathbf{x}_i = \frac{1}{8} \mathbf{x}_i \cdot \boldsymbol{\xi}_j$$

Il est alors intéressant de réécrire 3.47 en fonction des coordonnées globales  $\mathbf{x}$ . En utilisant équations 3.47, 3.48 et 3.49, les coordonnées isoparamétriques peuvent être exprimées par :

$$\xi_i = \left( \mathbf{J}_0^{-1} \right)_{ij} = \left( x_j - \frac{1}{8} \mathbf{s} \cdot \mathbf{x}_j - \frac{1}{8} \sum_{k=1}^4 (\mathbf{h}_k \cdot \mathbf{x}_j) h_k(\boldsymbol{\xi}) \right) \tag{3.52}$$



**Figure 3.10** – Modes de déplacement pour une brique selon une direction associés aux vecteurs 3.49



En intégrant 3.52 dans 3.47 et après réarrangement, on peut alors exprimer les fonctions de forme en fonction des vecteurs gradients  $\mathbf{b}_i$  et des vecteurs de stabilisation Hourglass  $\boldsymbol{\gamma}_i$  :

$$\mathbf{N}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{b}_0 + \sum_{i=1}^3 \mathbf{b}_i x_i + \sum_{j=1}^4 h_j(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\gamma}_j \quad (3.53)$$

où :

$$\mathbf{b}_i = \frac{1}{8} \left( \mathbf{J}_0^{-1} \right)_{ji} \boldsymbol{\xi}_j \quad (3.54)$$

et :

$$\mathbf{b}_0 = \frac{1}{8} \left[ \mathbf{s} - \sum_{i=1}^3 (\mathbf{s} \cdot \mathbf{x}_i) \mathbf{b}_i \right] \quad (3.55)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_i = \frac{1}{8} \left[ \mathbf{h}_i - \sum_{j=1}^3 (\mathbf{h}_i \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j \right] \quad (3.56)$$

A partir de l'équation 3.53, on peut calculer la matrice d'interpolation des déplacements :

$$\frac{\partial \mathbf{N}(\boldsymbol{\xi})}{\partial x_i} = \mathbf{b}_i + \sum_{j=1}^4 h_{j,i}(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\gamma}_j \quad (3.57)$$

On retrouve ainsi dans l'équation 3.57 une partie constante, les  $\mathbf{b}_i$ , et une partie non constante, les  $h_{j,i}(\boldsymbol{\xi})$ . La matrice d'interpolation des déplacements prend alors la forme suivante :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{stab}(\boldsymbol{\xi}) \quad (3.58)$$

où  $\mathbf{B}_0$ , la partie constante, et  $\mathbf{B}_{stab}$ , la partie non constante, sont des matrices  $6 \times 24$  définies comme suit :

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{b}_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{stab} = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} h_{i,1}(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\gamma}_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & h_{i,2}(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\gamma}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & h_{i,3}(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\gamma}_i \\ h_{i,2}(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\gamma}_i & h_{i,1}(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\gamma}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & h_{i,3}(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\gamma}_i & h_{i,2}(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\gamma}_i \\ h_{i,3}(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\gamma}_i & \mathbf{0} & h_{i,1}(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\gamma}_i \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

avec

$$h_{i,j} = \sum_{k=1}^3 (\mathbf{J}^{-1})_{kj} \frac{\partial h_i(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_k} \quad (3.60)$$

Ces matrices d'interpolation des déplacements sont alors utilisées pour calculer les déformations dans le cas des petites déformations puis de remonter aux efforts internes :

$$\mathbf{F}_{int} = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (3.61)$$

Le principe de la stabilisation physique est d'utiliser des approximations permettant de calculer analytiquement les forces internes équation 3.61 empêchant l'apparition des modes hourglass. L'approximation suivante, classique en intégration réduite, est utilisée [LIU 85b, KOH 87, ZHU 96] :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mathbf{x}} \approx \mathbf{J}_0^{-1} \quad (3.62)$$

afin de remplacer  $\mathbf{J}^{-1}$  par  $\mathbf{J}_0^{-1}$  dans 3.60 et 3.61. Ainsi le calcul analytique est réalisable en utilisant un seul point d'intégration. En utilisant 3.59 dans 3.62, les vecteurs des forces internes peuvent être exprimés analytiquement :

$$\mathbf{F}_{int} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_{stab} \quad (3.63)$$

où  $\mathbf{F}_0$  est la contribution du point d'intégration central et  $\mathbf{F}_{stab}$  la partie stabilisatrice. Il a été par la suite montré qu'utiliser l'approximation 3.62 provoque l'échec du patch test par l'élément [BEL 93]. Ainsi, on utilise un moyennage volumique de la matrice d'interpolation des déplacements :

$$\bar{\mathbf{B}} = \frac{1}{V_e} \int_{\square} \mathbf{B}(\boldsymbol{\xi}) j(\boldsymbol{\xi}) d\square \quad (3.64)$$

où  $V_e$  est le volume de l'élément,  $j(\boldsymbol{\xi}) = \text{Det}[\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi})]$  et  $j_0 = j(\mathbf{0})$ . L'utilisation de cette expression à la place de  $\mathbf{B}_0$ , puis le calcul des vecteurs de stabilisation à partir de celle-ci, permet d'obtenir un élément mathématiquement acceptable.

### 3.3.2 Formulation *enhanced* en déplacement total

Maintenant, que le principe de base de la stabilisation physique des éléments à intégration réduite a été détaillé, cette section va développer la version en déplacement total de la stabilisation physique puis l'introduction de variables internes supplémentaires dites *enhanced*.

### Expression des dilatations de Cauchy-green droit

Développons maintenant la version en déplacement total de l'élément de Puso. Cet élément est basé sur une approximation du tenseur de Cauchy-Green droit. L'équation 3.53 est alors réécrite en fonction des coordonnées initiales  $X_i$  :

$$\mathbf{N}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{b}_0 + \sum_{i=1}^3 \mathbf{b}_i X_i + \sum_{j=1}^4 h_j(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\gamma}_j \quad (3.65)$$

où :

$$\mathbf{b}_i = \frac{1}{8} \left( \bar{\mathbf{J}}_0^{-1} \right)_{ji} \boldsymbol{\xi}_j \text{ avec } \bar{\mathbf{J}}_0^{-1} \approx \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mathbf{X}} \quad (3.66)$$

et :

$$\mathbf{b}_0 = \frac{1}{8} \left[ \mathbf{s} - \sum_{i=1}^3 (\mathbf{s} \cdot \mathbf{X}_i) \mathbf{b}_i \right] \quad (3.67)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_i = \frac{1}{8} \left[ \mathbf{h}_i - \sum_{j=1}^3 (\mathbf{h}_i \cdot \mathbf{X}_j) \mathbf{b}_j \right] \quad (3.68)$$

On observant l'équation 3.65, on remarque que le déplacement peut être écrit sous la forme d'une partie constante et d'une partie variable :

$$u_i = u_i^0 + \Delta u_i^{stab} \quad (3.69)$$

où :

$$u_i^0 = \sum_{i=1}^3 \mathbf{b}_i X_i \cdot \mathbf{u}_i \text{ et } \Delta u_i^{stab} = \sum_{j=1}^4 h_j(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\gamma}_j \cdot \mathbf{u}_i \quad (3.70)$$

De même, le gradient de la transformation peut être écrit de la forme suivante :

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{F}_0 + \Delta \mathbf{F}_{stab}(\boldsymbol{\xi}) \quad (3.71)$$

où :

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \mathbf{X}} \text{ et } \Delta \mathbf{F}_{stab}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial \Delta \mathbf{u}^{stab}}{\partial \mathbf{X}} \quad (3.72)$$

et  $\mathbf{u}_0 = (u_1^0, u_2^0, u_3^0)^T$  et  $\Delta \mathbf{u}^{stab} = (\Delta u_1^{stab}, \Delta u_2^{stab}, \Delta u_3^{stab})^T$ . Le tenseur de Cauchy-Green droit  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$  est approximé en utilisant 3.71 :

$$\mathbf{C} \approx \mathbf{C}_0 + \mathbf{F}_0^T \Delta \mathbf{F}_{stab} + \Delta \mathbf{F}_{stab}^T \mathbf{F}_0 \quad (3.73)$$

où on suppose que les termes du second ordre du type  $O(|\Delta \mathbf{F}_{stab}|^2)$  sont petits et peuvent être négligés. Les termes du premier ordre sont suffisants pour stabiliser l'élément. En utilisant le pendant de 3.62 dans la configuration de référence :

$$\Delta \mathbf{F}_{stab} \approx \frac{\partial \Delta \mathbf{u}_{stab}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \bar{\mathbf{J}}_0^{-1} \quad (3.74)$$

et on l'insérant dans 3.73 :

$$\mathbf{C} \approx \mathbf{C}_0 + \mathbf{F}_0^T \frac{\partial \Delta \mathbf{u}_{stab}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \bar{\mathbf{J}}_0^{-1} + \bar{\mathbf{J}}_0^{-T} \frac{\partial \Delta \mathbf{u}_{stab}^T}{\partial \boldsymbol{\xi}} \mathbf{F}_0 \quad (3.75)$$

L'objectif est alors de formuler et modifier le champ de stabilisation dans le domaine isoparamétrique puis de le transporter dans le domaine physique afin que la formulation soit invariante quant au repère courant. On exprime les déplacements dans le domaine isoparamétrique en utilisant l'approximation 3.62 :

$$\tilde{u}_i^A = (\mathbf{J}_0)_{ji} u_j^A \quad (3.76)$$

où les quantités surmontées de tilde sont exprimées dans le domaine isoparamétrique. De plus, comme les lignes de  $\bar{\mathbf{J}}_0^{-1}$  sont les vecteurs de la base contravariante, les  $\tilde{u}_i^A$  sont les composantes contravariantes du déplacement. Le vecteur  $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{\mathbf{u}}_1, \tilde{\mathbf{u}}_2, \tilde{\mathbf{u}}_3)^T$ , où  $\tilde{\mathbf{u}}_i = (\tilde{u}_i^1, \tilde{u}_i^2, \dots, \tilde{u}_i^8)$ , est formé en calculant les composantes contravariantes de chaque déplacement nodal grâce à :

$$\Delta \tilde{\mathbf{u}}_{stab} \approx \mathbf{J}_0^T \Delta \mathbf{u}_{stab} \quad (3.77)$$

on obtient :

$$\mathbf{C} \approx \mathbf{C}_0 + \bar{\mathbf{J}}_0^{-T} \left[ \frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{u}}_{stab}}{\partial \boldsymbol{\xi}} + \frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{u}}_{stab}^T}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right] \bar{\mathbf{J}}_0^{-1} \quad (3.78)$$

On reconnaît alors le tenseur  $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$  des petites déformations dans le domaine isoparamétrique :

$$\mathbf{C} \approx \mathbf{C}_0 + \left[ \bar{\mathbf{J}}_0^{-1} \right] \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (3.79)$$

Par soucis de clarté,  $\Delta \tilde{\mathbf{u}}_{stab}$  sera remplacé par  $\tilde{\mathbf{u}}$ . L'outil mathématique  $\left[ \bar{\mathbf{J}}_0^{-1} \right]$  est introduit afin de faciliter les calculs numériques. Cette matrice permet de transporter le vecteur des déformations en notation de Voigt du domaine isoparamétrique vers le domaine physique. Son expression littérale est la suivante :

$$[\bar{\mathbf{J}}_0^{-1}] = \begin{bmatrix} j_{11}^2 & j_{21}^2 & j_{31}^2 & j_{11}j_{21} & j_{21}j_{31} & j_{11}j_{31} \\ j_{12}^2 & j_{22}^2 & j_{32}^2 & j_{12}j_{22} & j_{22}j_{32} & j_{12}j_{32} \\ j_{13}^2 & j_{23}^2 & j_{33}^2 & j_{13}j_{23} & j_{23}j_{33} & j_{13}j_{33} \\ 2j_{11}j_{12} & 2j_{21}j_{22} & 2j_{31}j_{32} & j_{11}j_{22} + j_{21}j_{12} & j_{21}j_{32} + j_{31}j_{22} & j_{11}j_{32} + j_{31}j_{12} \\ 2j_{12}j_{13} & 2j_{22}j_{23} & 2j_{32}j_{33} & j_{12}j_{23} + j_{22}j_{13} & j_{22}j_{33} + j_{32}j_{23} & j_{12}j_{33} + j_{32}j_{13} \\ 2j_{13}j_{11} & 2j_{23}j_{21} & 2j_{33}j_{31} & j_{13}j_{21} + j_{23}j_{11} & j_{23}j_{31} + j_{33}j_{21} & j_{13}j_{31} + j_{33}j_{11} \end{bmatrix}$$

où :

$$j_{ij} = \left( \bar{\mathbf{J}}_0^{-1} \right)_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial X_j} \quad (3.80)$$

Le second terme du membre de droite de l'équation 3.78 représente la partie stabilisatrice du tenseur de Cauchy-Green droit. On peut alors écrire en utilisant les notations courantes :

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_{stab} = \mathbf{C}_0 + 2 \left[ \bar{\mathbf{J}}_0^{-1} \right] \tilde{\mathbf{B}}_{stab} \tilde{\mathbf{u}} \quad (3.81)$$

### Choix des interpolations

La matrice d'interpolation des déplacements de stabilisation  $\tilde{\mathbf{B}}_{stab}$  est calculée grâce à la dérivée de l'expression des fonctions de forme 3.65 par rapport aux coordonnées dans la configuration de référence.

$$\tilde{\mathbf{B}}_{stab}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \eta\gamma_1 + \zeta\gamma_3 + \eta\zeta\gamma_4 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \xi\gamma_1 + \zeta\gamma_2 + \xi\zeta\gamma_4 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \eta\gamma_2 + \xi\gamma_3 + \xi\eta\gamma_4 \\ \xi\gamma_1 + \zeta\gamma_2 + \xi\zeta\gamma_4 & \eta\gamma_1 + \zeta\gamma_3 + \eta\zeta\gamma_4 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \eta\gamma_2 + \xi\gamma_3 + \xi\eta\gamma_4 & \xi\gamma_1 + \zeta\gamma_2 + \xi\zeta\gamma_4 \\ \eta\gamma_2 + \xi\gamma_3 + \xi\eta\gamma_4 & \mathbf{0} & \eta\gamma_1 + \zeta\gamma_3 + \eta\zeta\gamma_4 \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

Dans le développement de Puso, les termes soulignés sont supprimés. On omettant ces termes, le verrouillage en cisaillement peut être évité pour les éléments parallélépipédiques. En modifiant la matrice d'interpolation des déplacements de cette manière, on utilise une formulation dite *assumed* car celle-ci n'est pas retranscrite comme elle le serait réellement avec une interpolation trilineaire complète classique.

Comme évoqué précédemment, l'utilisation des moyennes matérielles en lieu et place de l'évaluation de propriétés au centre d'élément permet à l'élément de passer le patch test et d'être juste mathématiquement. Pour cette raison un tenseur de Cauchy-Green droit moyen  $\bar{\mathbf{C}}$  est calculé

$$\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}} \text{ où } \bar{F}_{ij} = \frac{\overline{\partial N_k}}{\partial X_j} x_i^k \text{ et } \frac{\overline{\partial N_k}}{\partial X_j} = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \frac{\partial N_k}{\partial X_j} dV_0 \quad (3.83)$$

Il s'agit maintenant de corriger le champ de déplacement calculé grâce à une formulation *enhanced strain*. L'objectif de cette formulation est d'empêcher les verrouillages numériques pouvant apparaître lors de l'utilisation de lois matériau spécifiques ou fortement anisotropiques. Cette modification du champ de déplacement est réalisée au niveau élémentaire. Afin de s'affranchir de tout changement de repère, cette modification est introduite dans le domaine isoparamétrique de la façon suivante :

$$\mathbf{C} = \bar{\mathbf{C}} + 2 \left[ \bar{\mathbf{J}}_0^{-1} \right] (\bar{\mathbf{B}}_{stab} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{G}} \boldsymbol{\alpha}) \quad (3.84)$$

où  $\tilde{\mathbf{G}}$  est la matrice représentative du champ de déformation isoparamétrique enhanced à partir des variables interne  $\boldsymbol{\alpha}$ . Celle-ci est choisie de la manière suivante par Puso :

$$\tilde{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & \xi\eta & \eta\zeta & \zeta\xi \\ 0 & \eta & 0 & \xi\eta & \eta\zeta & \zeta\xi \\ 0 & 0 & \zeta & \xi\eta & \eta\zeta & \zeta\xi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

Ce champ est formé de telle façon qu'il puisse empêcher les divers verrouillages qui peuvent apparaître à cause de la loi de comportement. Les trois premières colonnes de 3.85 fournissent les variables isoparamétriques permettant de compléter les polynômes du premier ordre vus dans la matrice 3.82. Ces termes suppriment le verrouillage volumétrique en 2D et le verrouillage en flexion de type Poisson. En utilisant 3.82, on peut écrire la contribution du déplacement isoparamétrique aux déformations volumétriques. Les trois premières lignes de la matrice 3.82 interviendront, soit des termes du type :

$$A_0 + A_1\xi + A_2\eta + A_3\zeta + A_4\xi\eta + A_5\eta\zeta + A_6\zeta\xi \quad (3.86)$$

Les trois dernières colonnes de 3.85 fournissent alors les termes bilinéaires nécessaires à la suppression des éventuelles déformations parasites et ainsi éviter le verrouillage en 3D. Il est à noter que les champs  $\tilde{\mathbf{G}}$  et  $\tilde{\mathbf{B}}_{stab}$  sont choisis (par définition pour  $\tilde{\mathbf{B}}_{stab}$ ) de telle manière que leurs intégrales sur le domaine isoparamétrique  $\square$  soient nulles.

$$\int_{\square} \tilde{\mathbf{B}}_{stab}(\boldsymbol{\xi}) d\square = 0 \quad (3.87)$$

$$\int_{\square} \tilde{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\xi}) d\square = 0 \quad (3.88)$$

Cela signifie que les déformations hourglass et les variables internes supplémentaires ont des composantes qui s'annulent sur le volume de l'élément.

Les choix précédemment réalisés sont ceux faits par Puso : la suppression des termes supprimant le verrouillage en cisaillement dans la matrice d'interpolation 3.82 et la définition de la matrice d'interpolation des variables internes 3.85. Ces choix ont été réalisés dans l'objectif principal de n'avoir à inverser qu'une matrice diagonale, voir équation 3.111. Cependant ces simplifications ne sont pas adaptées à toutes les configurations matérielles et aux géométries d'éléments non parallélépipédiques. Des instabilités ont été remarquées dans le cas d'éléments aux cotés non parallèles quatre à quatre, dues à la forte anisotropie du matériau. Afin d'éviter ce genre de problèmes, la matrice d'interpolation  $\tilde{\mathbf{B}}_{stab}$  est prise en compte sans modifications :

$$\tilde{\mathbf{B}}_{stab}(\xi) = \begin{bmatrix} \eta\gamma_1 + \zeta\gamma_3 + \eta\zeta\gamma_4 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \xi\gamma_1 + \zeta\gamma_2 + \xi\zeta\gamma_4 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \eta\gamma_2 + \xi\gamma_3 + \xi\eta\gamma_4 \\ \xi\gamma_1 + \zeta\gamma_2 + \xi\zeta\gamma_4 & \eta\gamma_1 + \zeta\gamma_3 + \eta\zeta\gamma_4 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \eta\gamma_2 + \xi\gamma_3 + \xi\eta\gamma_4 & \xi\gamma_1 + \zeta\gamma_2 + \xi\zeta\gamma_4 \\ \eta\gamma_2 + \xi\gamma_3 + \xi\eta\gamma_4 & \mathbf{0} & \eta\gamma_1 + \zeta\gamma_3 + \eta\zeta\gamma_4 \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

La matrice d'interpolation des variables internes  $\tilde{\mathbf{G}}$  doit alors être modifiée pour prendre en compte ces changements. Le verrouillage en cisaillement étant maintenant possible, les trois dernières lignes doivent être remplies. Le choix de cette interpolation reste toujours la question majeure des formulations *enhanced*. Celle-ci doit être en adéquation avec les performances désirées afin d'obtenir un élément possédant les meilleures performances attendues possibles. Une interpolation générale a été proposée pour les cas en trois dimensions [AND 93]. Les neuf premiers modes sont nécessaires pour compléter les polynômes incomplets du déplacement isoparamétrique et permettent de formuler l'élément Q1/E9 :

$$\tilde{\mathbf{G}}(\xi) = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta & \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta & \xi \end{bmatrix} \cdots \quad (3.90)$$

Les six modes suivants permettent d'améliorer le comportement des éléments distordus en flexion et forment l'élément Q1/E15 :

$$\tilde{\mathbf{G}}(\xi) = \cdots \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \xi\zeta & \eta\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi\eta & \xi\zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & \eta\zeta \end{bmatrix} \cdots \quad (3.91)$$

Les six modes suivants permettent d'améliorer le comportement des éléments distordus pour des matériaux incompressible, et possiblement pour le verrouillage en tension, et forment l'élément Q1/E21 :

$$\tilde{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\xi}) = \dots \begin{bmatrix} \xi\eta & \xi\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi\eta & \eta\zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\zeta & \eta\zeta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

L'efficacité de ces éléments est directement liée au nombre de modes supplémentaires ; plus le nombre est grand, plus l'efficacité de l'élément diminuera. Par conséquent, afin d'optimiser le temps de calcul, l'élément Q1/E9 sera utilisé pour les éléments non distordus et l'élément Q1/E21 pour les éléments distordus initialement. Cependant, en modifiant les matrices  $\tilde{\mathbf{B}}_{stab}$  et  $\tilde{\mathbf{G}}$  proposées par Puso, la matrice à inverser n'est plus diagonale, diminuant l'efficacité numérique. Par contre, l'inversion peut tout de même être effectuée analytiquement : celle-ci est réalisée grâce à un logiciel de calcul formel (Maple<sup>TM</sup> par exemple) et ainsi implantée. L'utilisation de ces matrices d'interpolations, bien que plus coûteux, permet de supprimer une grande partie du verrouillage en tension.

#### Expression des contraintes de Piola-Kirchhoff 2

Afin de calculer les contraintes de Piola-Kirchhoff 2, on effectue un développement limité en série de Taylor autour du tenseur des déformations de Cauchy-Green droit moyen :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{C}) &\approx \mathbf{S}(\bar{\mathbf{C}}) + \left. \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} \right|_{\mathbf{C}=\bar{\mathbf{C}}} (\mathbf{C} - \bar{\mathbf{C}}) \\ &= \mathbf{S}(\bar{\mathbf{C}}) + \mathbf{C}^{SE} \left[ \bar{\mathbf{J}}_0^{-1} \right] (\tilde{\mathbf{B}}_{stab} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{G}} \boldsymbol{\alpha}) \end{aligned} \quad (3.93)$$

où  $\mathbf{C}^{SE}$  est la matrice des rigidités matérielles tangentées.

#### Calcul des forces de stabilisation

La relation entre les déplacements dans le domaine isoparamétrique et ceux dans le domaine physique peut s'écrire :

$$\tilde{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\Xi} \mathbf{u} \quad (3.94)$$

où  $\boldsymbol{\Xi}$  est une matrice  $24 \times 24$  qui réalise l'opération  $\Delta \tilde{u}_i^A = (\mathbf{J}_0)_{ji} \Delta u_j^A$ . La variation de 3.94 est alors donnée par :

$$\delta \tilde{\mathbf{u}} \approx \boldsymbol{\Xi} \delta \mathbf{u} \quad (3.95)$$



car le terme  $\delta \Xi \mathbf{u}$  mène à des termes en  $O(|\Delta \mathbf{F}_{stab}|^2)$  dans l'équation du travail virtuel. La variation de 3.84 peut alors être calculée :

$$\delta \mathbf{C} = \delta \bar{\mathbf{C}} + 2 \left[ \bar{\mathbf{J}}_0^{-1} \right] \left( \tilde{\mathbf{B}}_{stab} \delta \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{G}} \delta \boldsymbol{\alpha} \right) \quad (3.96)$$

En utilisant les quantités conjuguées  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{E}$ , on exprime la variation du travail virtuel :

$$\delta \mathbf{W}_{int} = \int_{\Omega_e^0} \delta \mathbf{E} : \mathbf{S} \, d\Omega_e^0 \quad (3.97)$$

Que l'on peut modifier en utilisant 3.96 et 3.93 :

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{W}_{int} &= \int_{\Omega_e^0} \delta \mathbf{E}^T \mathbf{S} \, d\Omega_e^0 \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_e^0} \left[ \delta \bar{\mathbf{C}} + 2 \left[ \bar{\mathbf{J}}_0^{-1} \right] \left( \tilde{\mathbf{B}}_{stab} \delta \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{G}} \delta \boldsymbol{\alpha} \right) \right]^T \\ &\quad \left[ \mathbf{S}(\bar{\mathbf{C}}) + \mathbf{C}^{SE} \left[ \bar{\mathbf{J}}_0^{-1} \right] \left( \tilde{\mathbf{B}}_{stab} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{G}} \boldsymbol{\alpha} \right) \right] \, d\Omega_e^0 \end{aligned} \quad (3.98)$$

En exploitant les conditions d'orthogonalités 3.87 et 3.88 énoncées précédemment, on observe un découplage des parties constantes et non constantes de la transformation :

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{W}_{int} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_e^0} [\delta \bar{\mathbf{C}}]^T \mathbf{S}(\bar{\mathbf{C}}) \, d\Omega_e^0 \\ &\quad + \int_{\Omega_e^0} \left[ \left[ \bar{\mathbf{J}}_0^{-1} \right] \left( \tilde{\mathbf{B}}_{stab} \delta \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{G}} \delta \boldsymbol{\alpha} \right) \right]^T \mathbf{C}^{SE} \left[ \bar{\mathbf{J}}_0^{-1} \right] \left( \tilde{\mathbf{B}}_{stab} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{G}} \boldsymbol{\alpha} \right) \, d\Omega_e^0 \end{aligned} \quad (3.99)$$

Si l'on considère uniquement le premier terme de 3.99, on se retrouve avec le travail virtuel généré par une intégration réduite, plus spécifiquement par une intégration moyennée ici. On calcule alors de manière usuelle :

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F}_0 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_e^0} [\delta \bar{\mathbf{C}}]^T \mathbf{S}(\bar{\mathbf{C}}) \, d\Omega_e^0 \\ &= \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{B}}_G^T \mathbf{P}(\bar{\mathbf{F}}) \, \Omega_e^0 \end{aligned} \quad (3.100)$$

où  $\mathbf{F}_0$  est la force générée par une intégration en un seul point et  $\bar{\mathbf{B}}_G^T$  est la matrice gradient moyenne (voir [BON 95]). Le second terme de 3.99 est le travail virtuel dû aux forces de stabilisation. On observe deux forces de stabilisation distinctes. La force  $\mathbf{F}_{stab}$  associée à la variation des déplacements  $\delta \mathbf{u}$  qui sont les forces de stabilisation qui vont à la fois empêcher le développement de modes Hourglass et le verrouillage. Cette force de stabilisation est fonction des déplacements isoparamétriques  $\tilde{\mathbf{u}}$  et des variables internes  $\boldsymbol{\alpha}$ . La seconde force de stabilisation nommée  $\mathbf{F}_{stab}^\alpha$  est associée à la variation des variables

### 3. Analyse et correction du verrouillage en tension

internes  $\delta\boldsymbol{\alpha}$ . Afin que ces variables internes de la formulation *enhanced* n'aient aucune influence à l'échelle globale du calcul élément fini, il est évident que  $\mathbf{F}_{stab}^\alpha$  doit s'annuler. L'équation qui va alors naître de ce calcul est une équation dite de contrainte. Étant donné que cette dernière est fonction des déplacements isoparamétriques  $\tilde{\mathbf{u}}$  et des variables internes  $\boldsymbol{\alpha}$ , la valeur analytique de ces variables internes va pouvoir être calculée afin d'être introduite dans les forces des stabilisations  $\mathbf{F}_{stab}$  :

$$\delta\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{F}_{stab}^\alpha = \delta\boldsymbol{\alpha}^T \int_{\Omega_e^0} \tilde{\mathbf{G}}^T [\bar{\mathbf{J}}_0^{-T}] \mathbf{C}^{SE} [\bar{\mathbf{J}}_0^{-1}] (\tilde{\mathbf{B}}_{stab} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{G}} \boldsymbol{\alpha}) d\Omega_e^0 \quad (3.101)$$

Soit :

$$\mathbf{F}_{stab}^\alpha = \int_{\Omega_e^0} \tilde{\mathbf{G}}^T \tilde{\mathbf{C}}^{SE} (\tilde{\mathbf{B}}_{stab} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{G}} \boldsymbol{\alpha}) d\Omega_e^0 \quad (3.102)$$

$$= 0 \quad (3.103)$$

avec  $\tilde{\mathbf{C}}^{SE}$  la matrice des rigidités du domaine isoparamétrique :

$$\tilde{\mathbf{C}}^{SE} = [\bar{\mathbf{J}}_0^{-T}] \mathbf{C}^{SE} [\bar{\mathbf{J}}_0^{-1}] \quad (3.104)$$

En procédant de la même manière pour les forces de stabilisation globales on obtient :

$$\delta\mathbf{u}^T \mathbf{F}_{stab} = \delta\tilde{\mathbf{u}}^T \int_{\Omega_e^0} \tilde{\mathbf{B}}_{stab}^T \tilde{\mathbf{C}}^{SE} (\tilde{\mathbf{B}}_{stab} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{G}} \boldsymbol{\alpha}) d\Omega_e^0 \quad (3.105)$$

Il reste alors à simplifier les expressions 3.105 et 3.103 afin que les forces de stabilisation  $\mathbf{F}_{stab}$  soient calculées de manière efficace. Pour ceci, différentes notations et matrices vont être introduites. Pour commencer la matrice de stabilisation 3.89 va être réécrite en factorisant par les vecteurs de stabilisation  $\boldsymbol{\gamma}_i$  :

$$\tilde{\mathbf{B}}_{stab} = \sum_{i=1}^4 \tilde{\mathbf{B}}_i \boldsymbol{\Gamma}_i^T \text{ avec } \boldsymbol{\Gamma}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_i & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\gamma}_i & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\gamma}_i \end{bmatrix} \quad (3.106)$$

où  $\tilde{\mathbf{B}}_i$  est une matrice  $6 \times 3$  et  $\boldsymbol{\Gamma}_i$  une matrice  $24 \times 3$ . Il est aussi utile de pouvoir exploiter l'identité suivante :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Gamma}_i^T \tilde{\mathbf{u}} &= \boldsymbol{\Gamma}_i^T \boldsymbol{\Xi} \mathbf{u} \\ &= \mathbf{J}_0^T \boldsymbol{\Gamma}_i^T \mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.107)$$

où  $\mathbf{J}_0$  est la matrice jacobienne de  $3 \times 3$ . Utiliser cette expression permet une économie substantielle lors des calculs finaux. On peut alors réécrire 3.103 :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{stab}^\alpha &= \int_{\Omega_e^0} \tilde{\mathbf{G}}^T \tilde{\mathbf{C}}^{SE} \tilde{\mathbf{B}}_{stab} \tilde{\mathbf{u}} d\Omega_e^0 + \int_{\Omega_e^0} \tilde{\mathbf{G}}^T \tilde{\mathbf{C}}^{SE} \tilde{\mathbf{G}} \boldsymbol{\alpha} d\Omega_e^0 \\
 &= \sum_{i=1}^4 \mathbf{K}_{\alpha u}^i \mathbf{J}_0^T \Gamma_i^T \mathbf{u} + \mathbf{K}_{\alpha\alpha} \boldsymbol{\alpha}
 \end{aligned} \tag{3.108}$$

où :

$$\mathbf{K}_{\alpha u}^i = \int_{\square} \tilde{\mathbf{G}}^T \tilde{\mathbf{C}}^{SE} \tilde{\mathbf{B}}_i \bar{j}_0 d\square \tag{3.109}$$

$$\mathbf{K}_{\alpha\alpha} = \int_{\square} \tilde{\mathbf{G}}^T \tilde{\mathbf{C}}^{SE} \tilde{\mathbf{G}} \bar{j}_0 d\square \tag{3.110}$$

avec  $\bar{j}_0 = \text{Det}[\bar{\mathbf{J}}_0]$  le déterminant de la matrice jacobienne qui correspond à la variation de volume entre le domaine isoparamétrique et le domaine physique. On peut alors utiliser le fait que les forces de stabilisation associées aux variables internes doivent être nulles (équation 3.103) et ainsi exprimer analytiquement les variables internes  $\boldsymbol{\alpha}$  :

$$\boldsymbol{\alpha} = -\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{-1} \sum_{i=1}^4 \mathbf{K}_{\alpha u}^i \mathbf{J}_0^T \Gamma_i^T \mathbf{u} \tag{3.111}$$

Nous verrons que l'inversion de la matrice  $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}$  se fait analytiquement, annexe D. Afin d'obtenir les forces de stabilisation, on part maintenant de 3.105 :

$$\begin{aligned}
 \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F}_{stab} &= \delta \tilde{\mathbf{u}}^T \int_{\Omega_e^0} \tilde{\mathbf{B}}_{stab}^T \tilde{\mathbf{C}}^{SE} (\tilde{\mathbf{B}}_{stab} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{G}} \boldsymbol{\alpha}) d\Omega_e^0 \\
 &= \delta \mathbf{u}^T \sum_{i=1}^4 \Gamma_i \mathbf{J}_0 \int_{\Omega_e^0} \tilde{\mathbf{B}}_i^T \tilde{\mathbf{C}}^{SE} (\tilde{\mathbf{B}}_{stab} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{G}} \boldsymbol{\alpha}) d\Omega_e^0
 \end{aligned} \tag{3.112}$$

Soit :

$$\mathbf{F}_{stab} = \sum_{i=1}^4 \Gamma_i \mathbf{J}_0 \mathbf{K}_i \mathbf{u} \tag{3.113}$$

où :

$$\mathbf{K}_i = \sum_{j=1}^4 \left[ \mathbf{K}_{uu}^{ij} - \mathbf{K}_{\alpha u}^{iT} \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{-1} \mathbf{K}_{\alpha u}^j \right] \mathbf{J}_0^T \Gamma_j^T \tag{3.114}$$

$$\mathbf{K}_{uu}^{ij} = \int_{\square} \tilde{\mathbf{B}}_i^T \tilde{\mathbf{C}}^{SE} \tilde{\mathbf{B}}_j \bar{j}_0 d\square \tag{3.115}$$

Les expressions analytiques des matrices 3.110, 3.109 et 3.115 seront détaillées annexe D. L'expression trouvée pour cet élément à intégration réduite et *enhanced assumed strain* peut être rapproché de la méthode de stabilisation hourglass par perturbation. En remplaçant  $\mathbf{K}_i$  par  $\kappa \mathbf{\Gamma}_i^T$  où  $\kappa$  est un paramètre à définir, on se place dans le cas de la stabilisation par perturbation. L'intérêt de la formulation ici proposée est de s'affranchir de paramètres externes non contrôlés en s'appuyant sur un calcul analytique de ce paramètre basé sur des approximations. Cette ressemblance favorise l'implémentation de la formulation décrite.

L'utilisation et la performance de cet élément sera décrite section 3.6.1 pour une loi de comportement linéaire et 3.6.2 pour une loi de comportement non linéaire. Dans les deux cas, des non-linéarités géométriques sont considérées.

## 3.4 Élément semi-discret à intégration réduite stabilisé physiquement avec *Enhanced Assumed Strain*

La formulation élément fini décrite dans la section 3.3 partait d'une approche continue. Cette formulation doit donc être utilisée en conjonction avec une loi de comportement homogénéisée. Cette formulation va maintenant être adaptée pour une utilisation avec l'élément semi-discret décrit section 2.3. Le principe reste identique : le travail virtuel de chaque contribution (continu et semi-discret) va être décomposé en deux parties : une partie constante et une partie non constante dans l'élément. En utilisant une approximation, chaque partie non constante est intégrée analytiquement.

Maintenant que toutes les variables nécessaires ont été définies, il reste à dérouler la procédure identiquement à la section 3.3. Les déformations de Green-Lagrange (comme 3.84) sont exprimées :

$$\mathbf{E} = \bar{\mathbf{E}} + \left[ \bar{\mathbf{J}}_0^{-1} \right] (\tilde{\mathbf{B}}_{stab} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{G}} \boldsymbol{\alpha}) \quad (3.116)$$

et les variations des déformations d'Almansi (comme 3.96) :

$$\delta \mathbf{e} = \delta \bar{\mathbf{e}} + \left[ \mathbf{J}_0^{-1} \right] (\tilde{\mathbf{B}}_{stab} \delta \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{G}} \delta \boldsymbol{\alpha}) \quad (3.117)$$

Pour rappel, les tenseurs des déformations de Green-Lagrange et d'Almansi sont liés entre eux par l'opération de *Pull-Back* suivante :

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}^T \mathbf{eF} \quad (3.118)$$

d'où la transformation de l'opérateur  $\left[ \bar{\mathbf{J}}_0^{-1} \right]$  exprimé dans la base initiale en  $\left[ \mathbf{J}_0^{-1} \right]$  dans la base courante. Afin de simplifier la notation pour l'expression des déformations de Green-Lagrange de la mèche en notation de Voigt, l'équation 2.86 est reformulée :

$$\begin{aligned}
 E_m &= \mathbf{H}_m \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{H}_m \\
 &= \mathbf{H}_m^i \cdot \mathbf{E}_{ij} \cdot \mathbf{H}_m^j \\
 &= \mathbf{H}_m \mathbf{E}
 \end{aligned} \tag{3.119}$$

où  $\mathbf{E}$  est écrit grâce aux notations de Voigt usuelles et :

$$\mathbf{H}_m = \begin{Bmatrix} \mathbf{H}_m^1 & \mathbf{H}_m^1 \\ \mathbf{H}_m^2 & \mathbf{H}_m^2 \\ \mathbf{H}_m^3 & \mathbf{H}_m^3 \\ \mathbf{H}_m^1 & \mathbf{H}_m^2 \\ \mathbf{H}_m^2 & \mathbf{H}_m^3 \\ \mathbf{H}_m^3 & \mathbf{H}_m^1 \end{Bmatrix} \tag{3.120}$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 E_m &= \mathbf{H}_m \mathbf{E} \\
 &= \bar{E}_m + \mathbf{H}_m \left[ \bar{\mathbf{J}}_0^{-1} \right] (\tilde{\mathbf{B}}_{stab} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{G}} \boldsymbol{\alpha})
 \end{aligned} \tag{3.121}$$

avec :

$$\bar{E}_m = \mathbf{H}_m \bar{\mathbf{E}} \tag{3.122}$$

De même :

$$\begin{aligned}
 e_m &= \mathbf{h}_m \mathbf{e} \\
 &= \bar{e}_m + \mathbf{h}_m \left[ \mathbf{J}_0^{-1} \right] (\tilde{\mathbf{B}}_{stab} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{G}} \boldsymbol{\alpha})
 \end{aligned} \tag{3.123}$$

avec :

$$\bar{e}_m = \mathbf{h}_m \bar{\mathbf{e}} \tag{3.124}$$

où l'outil numérique  $\mathbf{h}_m$  est défini équation 2.91. Afin de calculer la tension  $T_m$ , on effectue un développement limité en série de Taylor autour de la déformation de Green-Lagrange moyenne  $\bar{E}_m$  (comme équation 3.93) :

$$\begin{aligned}
 T_m(E_m) &\approx T_m(\bar{E}_m) + \left. \frac{\partial T_m}{\partial E_m} \right|_{E_m=\bar{E}_m} (E_m - \bar{E}_m) \\
 &\approx T_m(\bar{E}_m) + \mathcal{R} \mathbf{H}_m \left[ \bar{\mathbf{J}}_0^{-1} \right] (\tilde{\mathbf{B}}_{stab} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{G}} \boldsymbol{\alpha})
 \end{aligned} \tag{3.125}$$

### 3. Analyse et correction du verrouillage en tension

---

où  $\mathcal{R}$  est la rigidité bipoint de la mèche définie équation 2.93. On peut écrire la variation du travail virtuel et exploiter les conditions d'orthogonalité (équations 3.98 et 3.99) :

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{W}_{int}^m &= \int_{l_m} \delta e_m T_m dl \\ &= \int_{l_m} \delta \bar{e}_m T_m (\bar{E}_m) dl \\ &+ \int_{l_m} \left[ \mathbf{h}_m \left[ \mathbf{J}_0^{-1} \right] (\tilde{\mathbf{B}}_{stab} \delta \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{G}} \delta \boldsymbol{\alpha}) \right]^T \mathcal{R} \mathbf{H}_m \left[ \bar{\mathbf{J}}_0^{-1} \right] (\tilde{\mathbf{B}}_{stab} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{G}} \boldsymbol{\alpha}) dl\end{aligned}\quad (3.126)$$

Il reste maintenant à trouver les forces nodales associées à la formulation développée. En procédant toujours de la même façon, on obtient (comme équation 3.100) pour la partie constante :

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{u}^T \mathbf{F}_0^m &= \int_{l_m} \delta \bar{e}_m T_m (\bar{E}_m) dl \\ &= \int_{l_m} \delta \bar{\mathbf{e}}^T \mathbf{h}_m^T T_m dl \\ &= \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{B}}_0^T \mathbf{h}_m^T T_m l_m\end{aligned}\quad (3.127)$$

où  $\mathbf{F}_0^m$  est la force générée par une intégration en un seul point et  $\bar{\mathbf{B}}_0^T$  est la matrice d'interpolation classique eulérienne au centre de la mèche. Pour  $\mathbf{F}_{stab}^{\alpha m}$  associée à la variation des variables internes  $\delta \boldsymbol{\alpha}$  (comme 3.103) :

$$\mathbf{F}_{stab}^{\alpha m} = \int_{l_m} \tilde{\mathbf{G}}^T \tilde{\mathcal{R}} (\tilde{\mathbf{B}}_{stab} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\alpha}) dl \quad (3.128)$$

$$= 0 \quad (3.129)$$

avec  $\tilde{\mathcal{R}}$  la rigidité de la mèche dans le domaine isoparamétrique (identique à équation 3.104) :

$$\tilde{\mathcal{R}} = \left[ \mathbf{J}_0^{-1} \right]^T \mathbf{h}_m^T \mathcal{R} \mathbf{H}_m \left[ \bar{\mathbf{J}}_0^{-1} \right] \quad (3.130)$$

En procédant de la même manière (équation 3.105) pour les forces de stabilisation globales  $\mathbf{F}_{stab}^m$  on obtient :

$$\delta \mathbf{u}^T \mathbf{F}_{stab}^m = \delta \tilde{\mathbf{u}}^T \int_{l_m} \tilde{\mathbf{B}}_{stab}^T \tilde{\mathcal{R}} (\tilde{\mathbf{B}}_{stab} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{G}} \boldsymbol{\alpha}) dl \quad (3.131)$$

Le reste du calcul pour une mèche, jusqu'à obtention de la rigidité équivalente des modes de déformation hourglass (équation 3.113), est strictement identique à la section 3.3. Les seules différences proviennent du remplacement de la matrice des rigidités tangentes isoparamétriques  $\tilde{\mathbf{C}}^{SE}$  par la rigidité tangente de la mèche  $\tilde{\mathcal{R}}$  dans ce même domaine et du changement du domaine d'intégration. Les intégrales ne sont plus réalisées sur le volume initial de l'élément  $\Omega_e^0$  mais sur la longueur courante  $l_m$  de la mèche. D'après les équations 3.109, 3.110 et 3.115 :

$$\mathbf{K}_{\alpha u}^{imSD} = \int_{\square} \tilde{\mathbf{G}}^T \tilde{\mathcal{R}} \tilde{\mathbf{B}}_i j_m d\square \quad (3.132)$$

$$\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{mSD} = \int_{\square} \tilde{\mathbf{G}}^T \tilde{\mathcal{R}} \tilde{\mathbf{G}} j_m d\square \quad (3.133)$$

$$\mathbf{K}_{uu}^{ijmSD} = \int_{\square} \tilde{\mathbf{B}}_i^T \tilde{\mathcal{R}} \tilde{\mathbf{B}}_j j_m d\square \quad (3.134)$$

où  $j_m$  est le jacobien permettant le passage du repère parent unidimensionnel de la mèche où  $\chi \in [-1, 1]$  vers le repère local eulérien unidirectionnel orienté par la mèche de coordonnée  $s$ . De la même façon que la formulation continue, ce jacobien est approximé au centre de la mèche afin de pouvoir réaliser l'intégration analytiquement :

$$j_m = \frac{\partial s}{\partial \chi} \approx \left. \frac{\partial s}{\partial \chi} \right|_{\chi=0} \quad (3.135)$$

Dans le cas de la présence de plusieurs mèches et d'une partie continu, ce qui est l'objectif principal, le calcul des forces nodales doit être réalisé avec précaution en tenant compte de toutes les contributions. En revenant à l'expression du travail virtuel (équations 2.82 et 2.89) :

$$\begin{aligned} \delta W_{int} &= \delta W_{int}^{SD} + \delta W_{int}^{Cont} \\ &= \sum_{m=1}^N \delta W_{int}^m + \delta W_{int}^{Cont} \\ &= \sum_{m=1}^N \int_{l_m} T_m \delta e_m dl + \int_{\Omega_e^0} \delta \mathbf{E}^T \mathbf{S} d\Omega_e^0 \\ &= \delta \mathbf{u}^T \left( \sum_{m=1}^N (\mathbf{F}_0^m + \mathbf{F}_{stab}^m) + \mathbf{F}_0^{Cont} \right) + \delta \boldsymbol{\alpha}^T \left( \sum_{m=1}^N \mathbf{F}_{stab}^{\alpha m} + \mathbf{F}_{stab}^{\alpha Cont} \right) \end{aligned} \quad (3.136)$$

Le terme associé à la variation des variables internes  $\delta \boldsymbol{\alpha}$  doit alors être annulé :

$$\sum_{m=1}^N \mathbf{F}_{stab}^{\alpha m} + \mathbf{F}_{stab}^{\alpha Cont} = \mathbf{0} \quad (3.137)$$

On peut alors utiliser le fait que les forces de stabilisation associées aux variables internes doivent être nulles et ainsi exprimer analytiquement  $\boldsymbol{\alpha}$  :

$$\boldsymbol{\alpha} = -(\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{Tot})^{-1} \sum_{i=1}^4 \mathbf{K}_{\alpha u}^{iTot} \mathbf{J}_0^T \Gamma_i^T \mathbf{u} \quad (3.138)$$

avec :

$$\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{Tot} = \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{Cont} + \sum_{m=1}^N \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{mSD} \quad (3.139)$$

$$\mathbf{K}_{\alpha u}^{iTot} = \mathbf{K}_{\alpha u}^{iCont} + \sum_{m=1}^N \mathbf{K}_{\alpha u}^{imSD} \quad (3.140)$$

Soit pour la rigidité globale dans la base matérielle des modes hourglass  $\mathbf{K}_i$  (équation 3.114) :

$$\mathbf{K}_i = \sum_{j=1}^4 \left[ \mathbf{K}_{uu}^{ijTot} - (\mathbf{K}_{\alpha u}^{iTot})^T (\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{Tot})^{-1} \mathbf{K}_{\alpha u}^{iTot} \right] \mathbf{J}_0^T \Gamma_j^T \quad (3.141)$$

avec :

$$\mathbf{K}_{uu}^{ijTot} = \mathbf{K}_{uu}^{ijCont} + \sum_{m=1}^N \mathbf{K}_{uu}^{ijmSD} \quad (3.142)$$

Il est à noter qu'à la différence de l'élément développé par Puso, l'élément semi-discret à intégration réduite et stabilisation *enhanced* des modes hourglass n'est pas forcément constitué d'un seul point d'intégration. Un seul point d'intégration au centre de l'élément parent est nécessaire pour la partie continue et un au centre de chaque mèche présente pour la partie discrète. Cependant, si le centre de la mèche ne se situe pas au milieu du domaine isoparamétrique, un point d'intégration supplémentaire est nécessaire pour cette mèche.

## 3.5 Élément *enhanced assumed strain* et déformation des mèches

Les formulations *enhanced* permettent la suppression des déformations hourglass dans les directions de forte anisotropie, celle des mèches dans notre cas. Afin d'étudier l'influence de la formulation *enhanced assumed strain* introduite, le calcul de la déformation dans la direction des mèches est effectuée dans des cas simples. Tout d'abord avec un élément fini classique à interpolation linéaire. Ensuite avec un élément possédant une formulation enrichie par des variables internes. L'objectif est de comparer les valeurs des déformations dans les directions de mèches dans ces deux cas et d'étudier l'influence



de différentes variables. On se place encore en deux dimensions pour simplifier les calculs. L'élément fini utilisé pour effectuer ces comparaisons est pris arbitrairement de taille  $10 \times 10$ . Les différentes variables étudiées sont les suivantes :

- L'amplitude du champ de déplacement hourglass imposé, qu'il soit uniquement horizontal, vertical ou une combinaison des deux ;
- L'emplacement dans le domaine isoparamétrique du point où l'on va calculer la déformation ;
- L'angle d'orientation de la mèche étudié par rapport aux côtés de l'élément et donc par rapport au repère global (figure 3.11) ;
- Les valeurs du module de cisaillement plan et de rigidité en tension des mèches, plus particulièrement le rapport entre les deux.

Afin de mieux comprendre l'influence de l'ensemble de ces variables, le calcul de la déformation dans la direction souhaitée est effectué à la fois avec un logiciel de calcul formel (Maple<sup>TM</sup>) et de calcul numérique (MATLAB<sup>®</sup>). La valeur test permettant de déterminer la qualité de la formulation élément fini utilisée sera le ratio des déformations dans la direction d'une mèche pour la formulation classique sur sa valeur dans la formulation *enhanced*.

$$\text{ratio} = \frac{\epsilon_m^{\text{classique}}}{\epsilon_m^{\text{enhanced}}} \quad (3.143)$$

où  $\epsilon_m^{\text{classique}}$  est la déformation dans la direction de la mèche pour une formulation à interpolation linéaire et  $\epsilon_m^{\text{enhanced}}$  cette même déformation quand la formulation est enrichie de variables internes *enhanced*. Ainsi, tout en mettant en exergue le fait que la déformation est surévaluée pour une formulation classique, on confirmera que la formulation *enhanced* réduit ces déformations parasites. Après analyse de ces calculs, les conclusions suivantes peuvent être tirées sur la déformation dans la direction des mèches :

- L'amplitude du champ de déplacement hourglass imposé n'a pas d'influence sur le ratio trouvé. Si un champ de la forme suivant est utilisé :

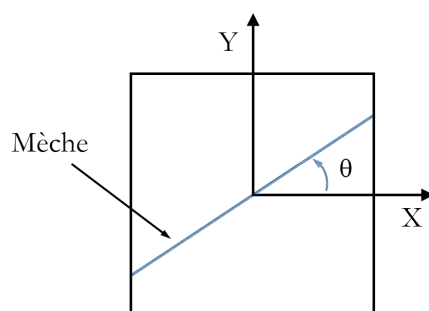
$$\mathbf{u}_x = a\mathbf{h} \quad (3.144)$$

$$\mathbf{u}_y = b\mathbf{h} \quad (3.145)$$

alors toutes les valeurs possibles de  $a$  et  $b$  donneront un ratio identique

- L'emplacement du point du domaine isoparamétrique où l'on va calculer le ratio n'a aussi pas d'influence. Cela signifie que la déformation dans la direction des mèches en tout point de l'élément est identique. La déformation est rendue homogène dans l'ensemble de l'élément pour n'importe quelle combinaison de modes de déplacement hourglass : la non-constance problématique de ces modes est corrigée.
- L'angle d'orientation de la mèche par rapport aux côtés de l'élément est évidemment important dans le calcul du ratio. Celui-ci est défini comme indiqué figure 3.11. La mèche est supposée passer au centre de l'élément mais, comme vu au point précédent, l'emplacement du point du domaine isoparamétrique pour calculer le

ratio des déformations n'a pas d'influence. Elle pourrait donc se situer à n'importe quel emplacement dans l'élément fini. Seule son orientation est importante. Prenons le cas de la figure 3.12 (dénommé cas 1). Cette figure montre l'évolution du ratio en fonction de l'orientation de la mèche par rapport aux côtés de l'élément. Pour ce cas le module de cisaillement plan est choisi tel que  $G = 1\text{GPa}$  et la rigidité des mèches telle que  $E_1 = E_2 = 100\text{GPa}$ . La courbe présente deux minima en  $0^\circ$  et  $90^\circ$  et un maximum à  $45^\circ$ . Les minima ont une valeur de ratio de 1 et correspondent aux cas où les mèches sont alignées avec les côtés de l'élément. La formulation enhanced introduite ne modifie pas la valeur de la déformation dans le sens des mèches dans ce cas. Aucun verrouillage n'apparaissant dans le cas où mèches et côtés des éléments sont alignés, il est cohérent de trouver un ratio de 1. Le maximum de la courbe correspond à l'orientation pour laquelle la mèche est la plus éloignée des côtés de l'élément. C'est bien pour cette orientation que la déformation dans la direction de la mèche est le plus surévaluée. La courbe est aussi strictement supérieure à 1 sur l'ensemble du domaine, confirmant la surévaluation de la déformation dans la formulation classique.

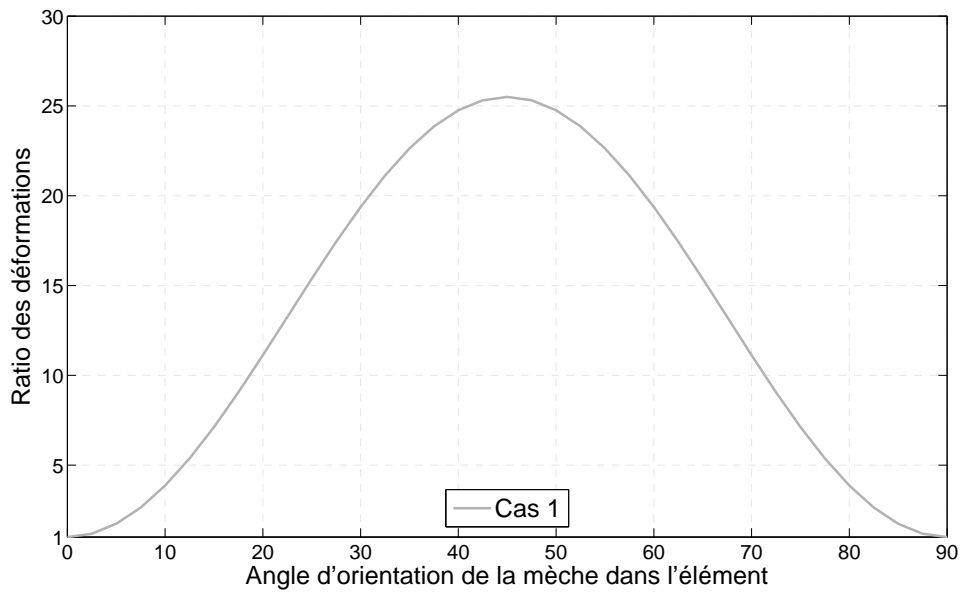


**Figure 3.11** – Orientation d'une mèche dans l'élément fini à tester

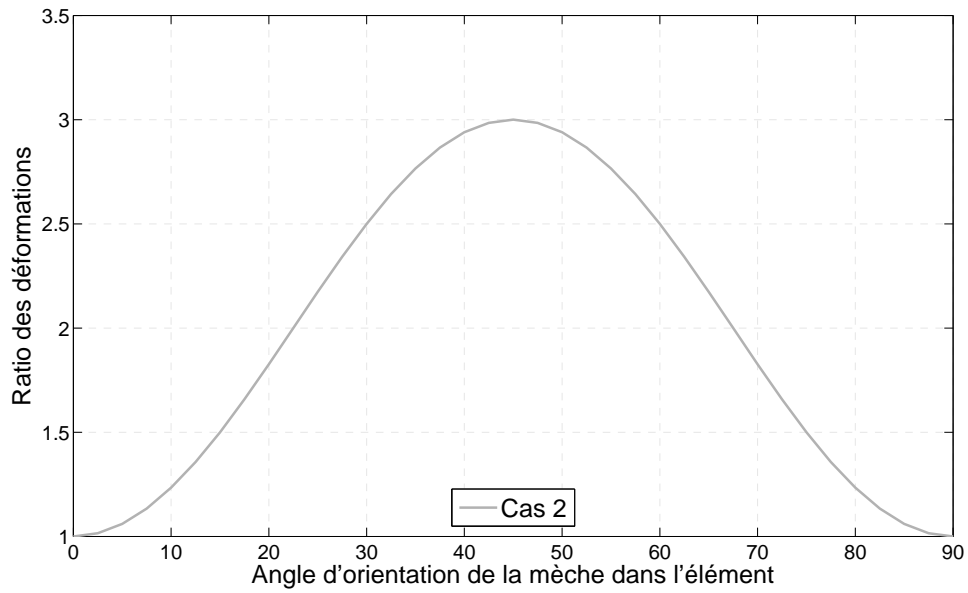
- En ce qui concerne l'influence du ratio entre module de cisaillement et rigidité de tension, deux autres cas ont été testés. Dans le cas 2, la valeur de  $G$  est identique au cas 1 mais la rigidité de tension est de  $10\text{GPa}$ . Pour le cas 3, la rigidité de tension est de  $1000\text{GPa}$ . Le tableau 3.1 rappelle les différents cas. Ces trois courbes (figures 3.12, 3.13 et 3.14) ont en commun leur forme, qui est identique pour les trois cas. Seule l'amplitude de la courbe varie. L'amplitude du ratio de déformation dans les sens des mèches est donc directement dépendante du ratio entre module de cisaillement et rigidité de tension. La déformation dans le sens des mèches pour un élément fini classique étant la même peu importe ce ratio, cela signifie que plus le ratio  $E_i/G$  augmente, plus les déformations parasites dans le sens des mèches sont supprimées par la formulation enhanced.

Cas	$G$ (GPa)	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)
1	1	100	100
2	1	10	10
3	1	1000	1000

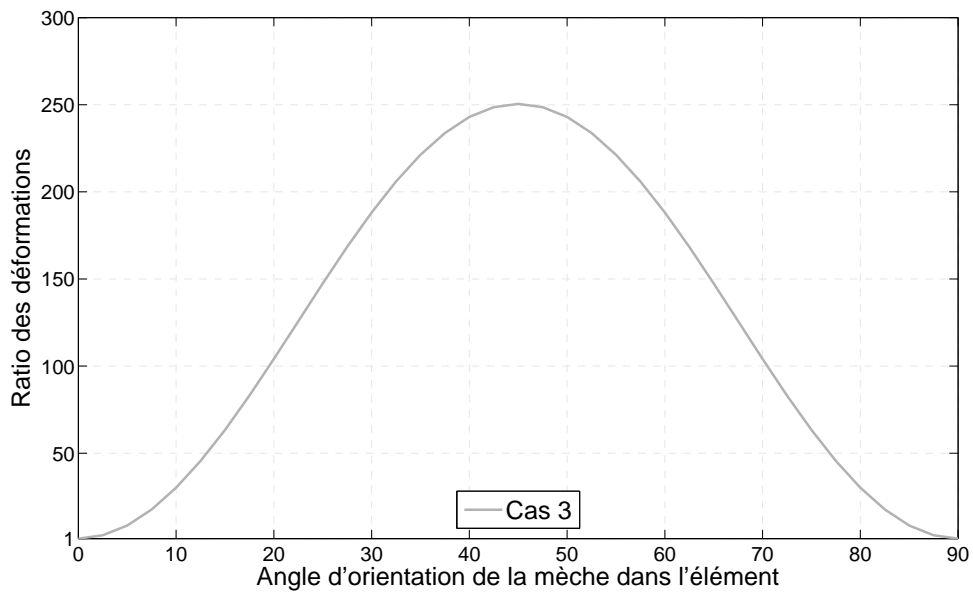
**Tableau 3.1** – Tableau récapitulant les différentes rigidités pour les 3 cas testés



**Figure 3.12** – Ratio déformation dans le sens de la mèche standard/déformation avec élément *enhanced* en fonction de l'angle d'orientation de la mèche dans l'élément pour le cas 1



**Figure 3.13** – Ratio déformation dans le sens de la mèche standard/déformation avec élément enhanced en fonction de l'angle d'orientation de la mèche dans l'élément pour le cas 2



**Figure 3.14** – Ratio déformation dans le sens de la mèche standard/déformation avec élément enhanced en fonction de l'angle d'orientation de la mèche dans l'élément pour le cas 3

## 3.6 Performances des éléments pour le verrouillage en tension

### 3.6.1 Élément continu et lois matériaux linéaires

Dans un premier temps, l'élément enhanced assumed strain continu est testé avec une loi de comportement élastique linéaire. Deux types de simulations sont réalisés afin de vérifier leur performance :

- La simulation du bias extension test, simulation la plus utilisée pour la mise en évidence du verrouillage en tension. Trois maillages différents seront utilisés : un maillage à  $45^\circ$  (figure 3.15), un à  $90^\circ$  avec des mailles de même taille que celles du maillage à  $45^\circ$  (figure 3.16), un à  $90^\circ$  plus grossier (figure 3.17) et un dernier à  $90^\circ$  plus grossier et distordu (figure 3.18). Le nombre d'éléments est de 442 pour le premier maillage, 451 pour le second et 189 pour les suivants. Une éprouvette de taille  $270\text{mm} \times 70\text{mm}$  est utilisée. Le déplacement est imposé aux deux extrémités de l'échantillon à vitesse réduite de manière à supprimer tout effet inertiel. L'éprouvette est déformée jusqu'à obtenir une valeur théorique de cisaillement dans la partie centrale égale à  $50^\circ$ .

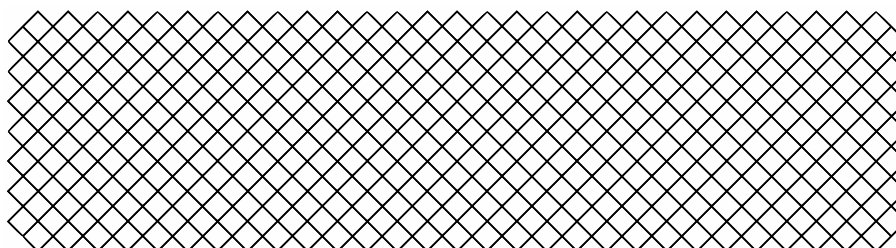


Figure 3.15 – Maillage à  $45^\circ$  de l'éprouvette de traction de biais

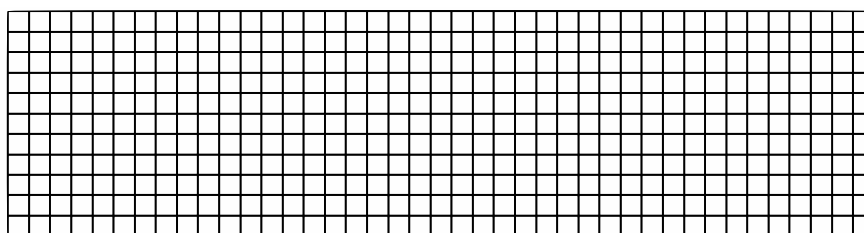
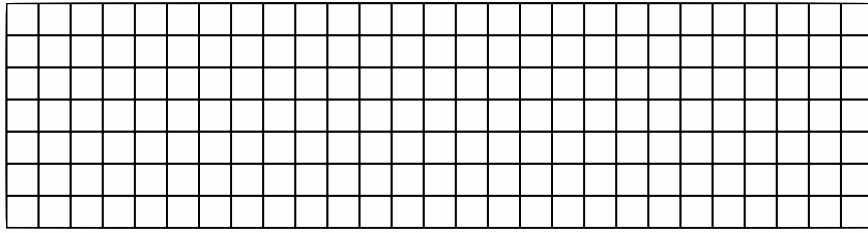
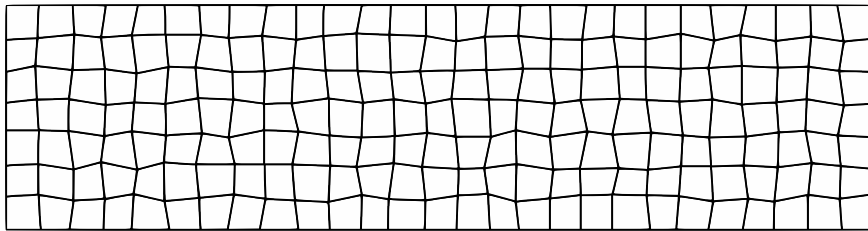


Figure 3.16 – Maillage à  $90^\circ$  de l'éprouvette de traction de biais

- La simulation de la dépose sur cercle pour la mise en évidence du verrouillage en tension a été proposée en tant qu'alternative au bias extension test [HAM 13a]. Ce test est représenté schématiquement figure 3.19. Il consiste en une plaque de  $40\text{ mm} \times 60\text{ mm}$  dont la largeur inférieure est encastrée. Les mèches sont placées verticalement et horizontalement (les deux réseaux étant toujours orthogonaux)



**Figure 3.17** – Maillage à 90° plus grossier de l'éprouvette de traction de biais



**Figure 3.18** – Maillage à 90° plus grossier et distordu de l'éprouvette de traction de biais

dans la plaque initiale. Le déplacement est imposé dans la direction horizontale (selon l'axe  $x$ ) sur le bord droit de l'éprouvette. Ce déplacement est calculé de manière à ce que dans l'état final, le bord droit soit *déposé* sur un arc de cercle dont le rayon de courbure est choisi. En étant ainsi déposée, la plaque va entraîner une déformation de cisaillement graduelle de la largeur encastree jusqu'au bord libre. L'emplacement du cisaillement maximal se situant évidemment en haut de la plaque. Cet angle de cisaillement maximal est uniquement fonction du rayon choisi, si l'on suppose la géométrie de l'éprouvette fixée. Le rayon est choisi à 76 mm afin d'obtenir un cisaillement maximal de 45°. L'objectif de cette simulation est d'étudier les différences d'efforts obtenues en fin de simulation pour divers types de maillages de la plaque.

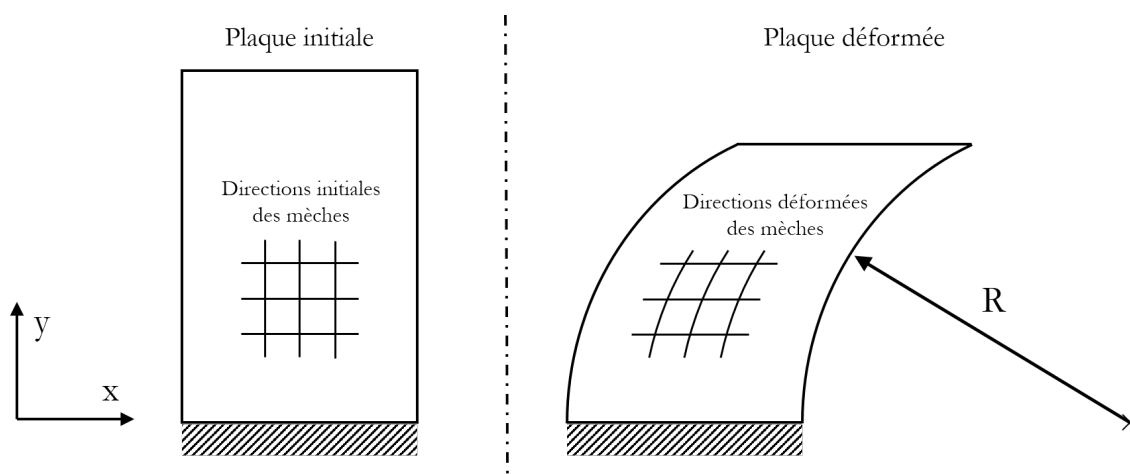
En ce qui concerne la loi matériau utilisée dans cette première partie, c'est une simple loi élastique anisotrope en grande déformation et déplacement total qui lie déformation de Green-Lagrange et contraintes de Piolat-Kirchhoff 2 :

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} : \mathbf{E} \quad (3.146)$$

Le comportement matériel est supposé orthotropique avec découplage de tous les modes, c'est à dire un coefficient de Poisson nul. La matrice des rigidités  $\mathbf{C}$  est alors donnée par :

$$C = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31} \end{bmatrix} \quad (3.147)$$

où  $E_1$  est la rigidité selon la première direction de mèche,  $E_2$  est la rigidité selon la seconde direction de mèche (orthogonale à la première),  $E_3$  la rigidité de compression transverse (de direction orthogonale au plan formé par les mèches),  $G_{12}$  la rigidité de cisaillement plan,  $G_{23}$  la rigidité de cisaillement transverse dans la première direction de mèche et  $G_{31}$  la rigidité de cisaillement transverse dans la seconde direction de mèche. Cette matrice de comportement sera utilisée telle qu'elle, pour la dépose sur cercle, ou tournée de  $45^\circ$ , pour le bias extension test.



**Figure 3.19** – Représentation schématique de la dépose sur cercle

### Simulation de la traction de biais.

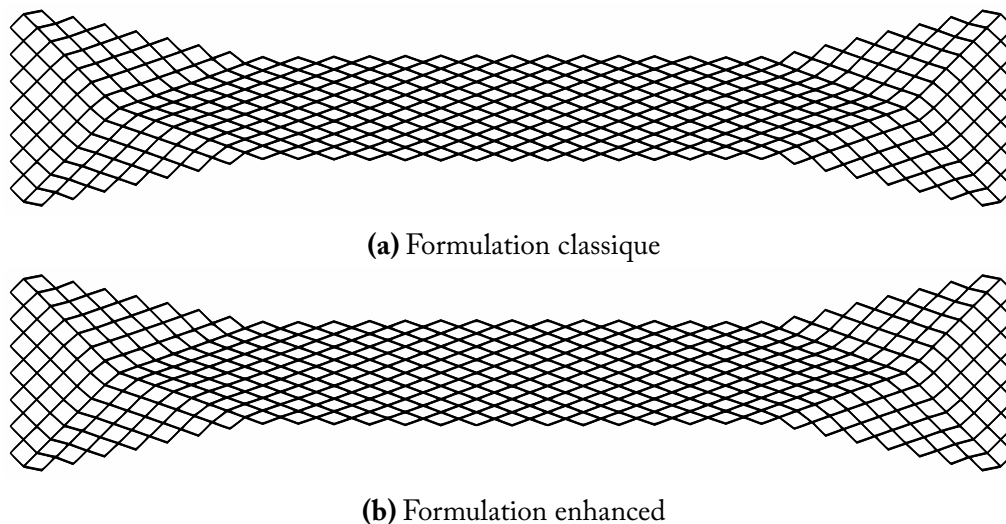
Pour la simulation du bias extension test, les valeurs des rigidités matérielles utilisées sont notées dans le tableau 3.2.

La forme finale des différents maillages pour les deux formulations testées est donnée figures 3.20, 3.21, 3.22 et 3.23. Cette simple analyse de la forme globale et de l'apparition des zones de cisaillement donne des informations intéressantes quant à l'amélioration apportée par la formulation enrichie. En ce qui concerne le maillage orienté à  $45^\circ$ , où aucun verrouillage n'est supposé intervenir, les résultats sont identiques. L'absence de verrouillage est validée ainsi que le bon comportement du nouvel élément dans des cas où aucune amélioration n'est attendue. Pour les trois autres cas, les résultats de la formulation classique sont erronés, ne faisant pas apparaître les trois zones caractéristiques du bias

Constante	Valeur (en MPa)
$E_1$	1000
$E_2$	1000
$E_3$	10
$G_{12}$	1
$G_{23}$	1
$G_{31}$	1

**Tableau 3.2** – Tableau récapitulant les valeurs des rigidités pour la simulation du bias extension test

extension test. Au contraire, la formulation enrichie permet à ces zones de se développer normalement, même pour le maillage à  $90^\circ$  distordu. Ces premiers résultats apportent une amélioration notable visuellement sur le comportement en traction de biais.

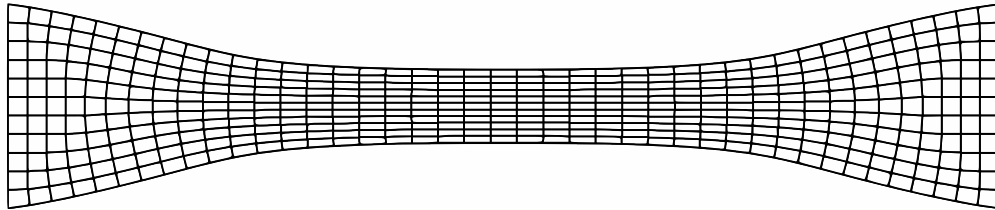


**Figure 3.20** – Etat final du bias extension test avec maillage à  $45^\circ$

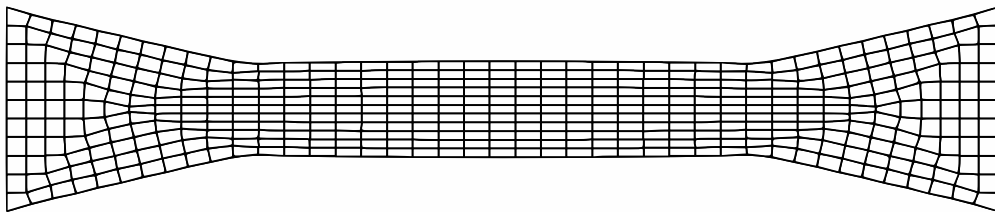
Il est intéressant de commenter les efforts repris par la machine de traction lors de ces simulations. Quand le verrouillage en tension apparaît, les efforts calculés sont supérieurs à ceux attendus. La figure 3.24 trace les efforts repris par la machine de traction pour les différents maillages décrits précédemment. La surévaluation de l'effort attendu peut être observée pour les maillages orientés à  $90^\circ$ . Les simulations utilisant la formulation classique mettent correctement en évidence l'apparition du verrouillage en tension. Il peut aussi être observé que le raffinement du maillage provoque une diminution de l'écart, tendance caractéristique des verrouillages numériques.

La figure 3.25 permet de visualiser les courbes d'effort repris par la machine pour une formulation élément fini enhanced. A la différence des résultats avec une formulation élément fini classique, on observe très peu de différences entre les divers maillages. Que le maillage soit orienté à  $90^\circ$  ou  $45^\circ$ , qu'il soit fin ou plus grossier, distordu ou non,



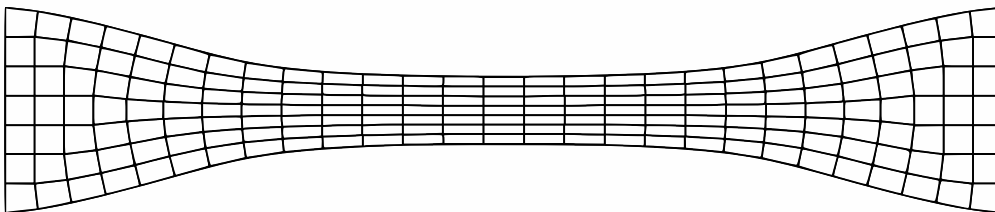


(a) Formulation classique

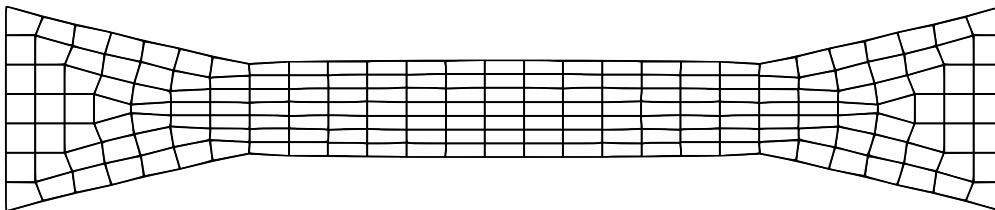


(b) Formulation enhanced

**Figure 3.21** – Etat final du bias extension test avec maillage à  $90^\circ$

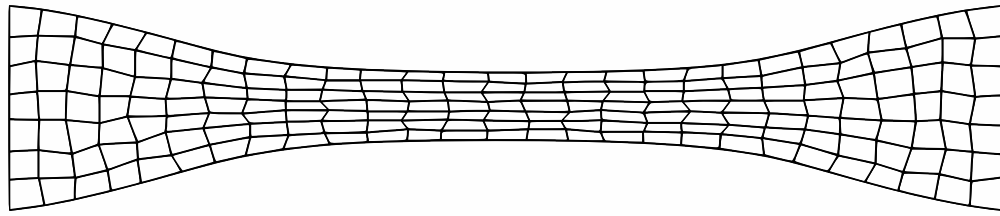


(a) Formulation classique

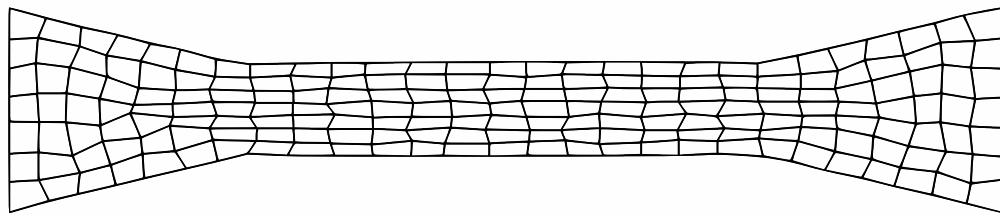


(b) Formulation enhanced

**Figure 3.22** – Etat final du bias extension test avec maillage à  $90^\circ$  plus grossier



(a) Formulation classique



(b) Formulation enhanced

Figure 3.23 – Etat final du bias extension test avec maillage à 90° plus grossier et distordu

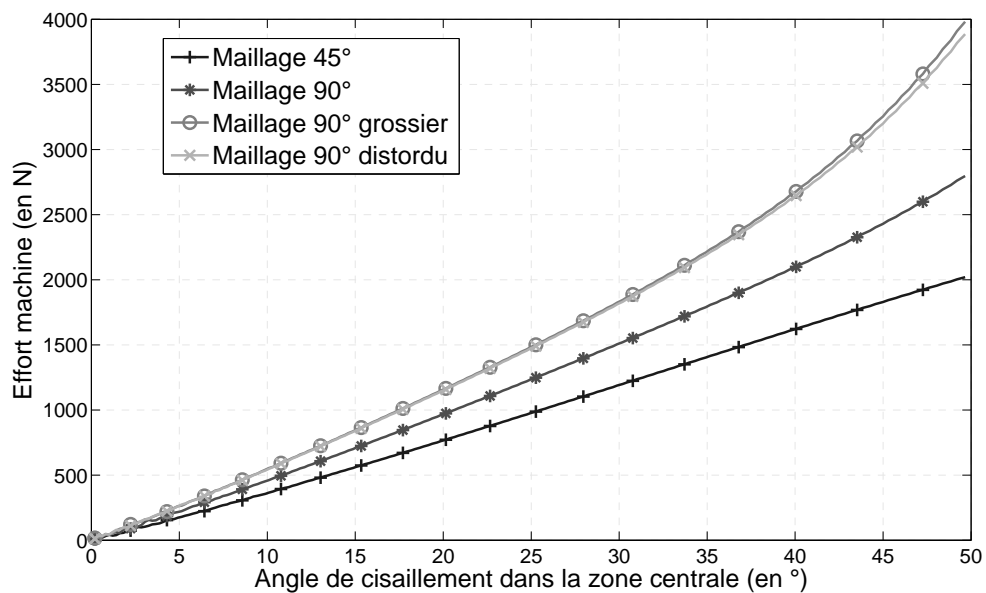
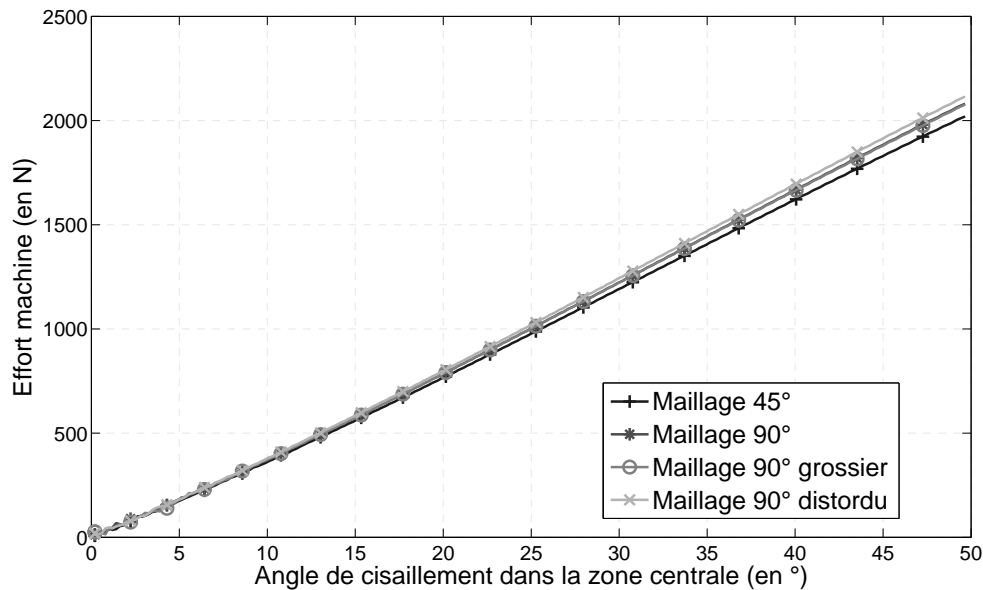


Figure 3.24 – Effort repris par la machine en fonction de l'angle de cisaillement dans la zone centrale pour une formulation classique

les efforts trouvés sont proches jusqu'à  $50^\circ$  de cisaillement maximum, angle théorique maximal atteint lors de simulations de mise en forme. L'amélioration est quantifiable en calculant l'écart, en pourcentage, à l'effort calculé pour un maillage orienté à  $45^\circ$ . Ces écarts sont fournis dans le tableau 3.3. L'écart maximal enregistré est inférieur à 5% pour un cisaillement de  $50^\circ$  (cas du maillage distordu). Ce résultat est acceptable quant à la précision attendue.



**Figure 3.25** – Effort repris par la machine en fonction de l'angle de cisaillement dans la zone centrale pour une formulation enhanced

	Maillage	Écart (en %)
Formulation classique	90°	+39.11
	90° grossier	+99.25
	90° distordu	+94.35
Formulation enhanced	90°	+3.07
	90° grossier	+2.83
	90° distordu	+4.72

**Tableau 3.3** – Écart à la solution de référence pour un cisaillement de  $50^\circ$

### Simulation de la dépose sur cercle.

L'objectif de la dépose sur cercle est de vérifier que, si la rigidité de cisaillement est supposée négligeable, l'éprouvette va se déformer sans effort, c'est à dire sans allongement des mèches. En effet, celles-ci étant supposées inextensibles, la dépose sur cercle doit se

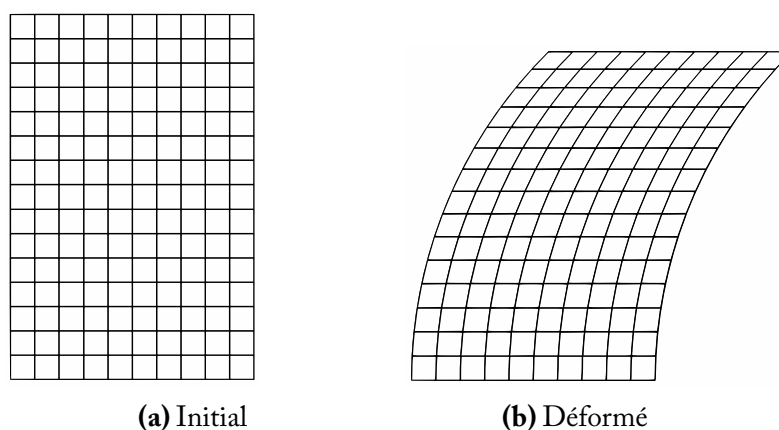
faire sans déformation. Contrairement à [HAM 13a] où la rigidité de cisaillement est prise nulle, elle est ici seulement prise extrêmement faible. Le fonctionnement de la formulation enhanced introduite suppose l'utilisation d'un tenseur tangent à valeurs propres non nulles. Le tableau 3.4 donne les valeurs de ces rigidités matériau. Du point de vue maillage, deux possibilités sont considérées :

- Un maillage réglé sur l'ensemble de la plaque qui va nous servir de référence pour vérifier l'absence d'efforts lors de la dépose, représenté figure 3.26.
- Un maillage distordu permettant de tester l'apparition ou non de verrouillage en tension lors de la simulation, représenté figure 3.27.

L'absence de rigidité de cisaillement permet d'obtenir un résultat ou la valeur de l'angle de cisaillement varie graduellement dans le sens de la hauteur de la plaque déposée. A la base, aucun cisaillement n'est ressenti, tandis que celui-ci est maximal sur le bord haut. La variation de cet angle de cisaillement a été représentée figure 3.28 pour vérification.

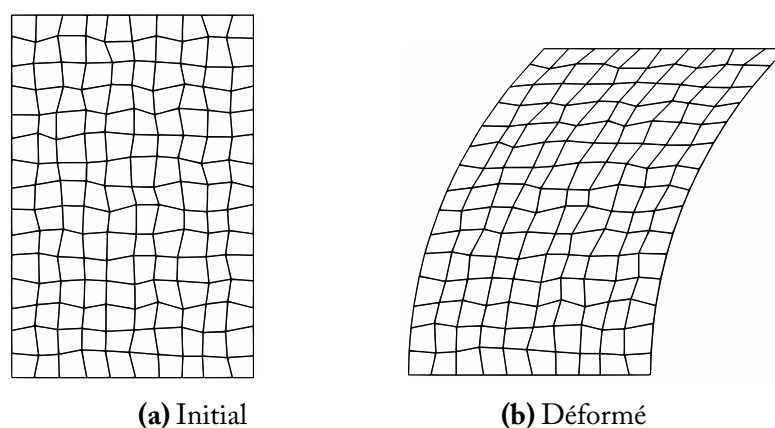
Constante	Valeur (en MPa)
$E_1$	1000
$E_2$	1000
$E_3$	10
$G_{12}$	$1 \times 10^{-10}$
$G_{23}$	1
$G_{31}$	1

**Tableau 3.4** – Valeurs des rigidités pour la simulation de dépose sur cercle



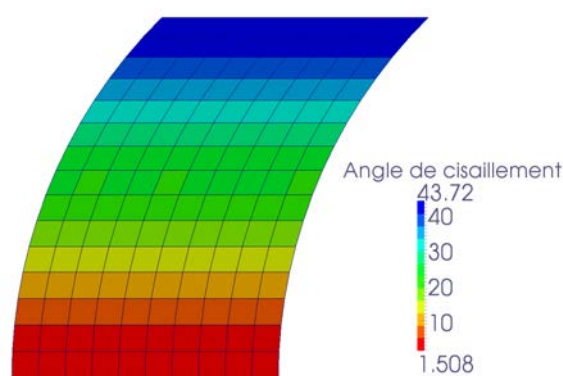
**Figure 3.26** – Déformation du maillage réglé

Afin de comparer les performances de la formulation classique et de la formulation enhanced, l'énergie de déformation de la plaque est calculée en tout moment de la dépose sur cercle et tracée figure 3.29. L'analyse de l'énergie associée au maillage réglé et à la formulation classique permet de vérifier que, lors de la dépose, aucune déformation parasite n'apparaît. L'énergie de déformation maximale rencontrée est de 0.227mJ. Au

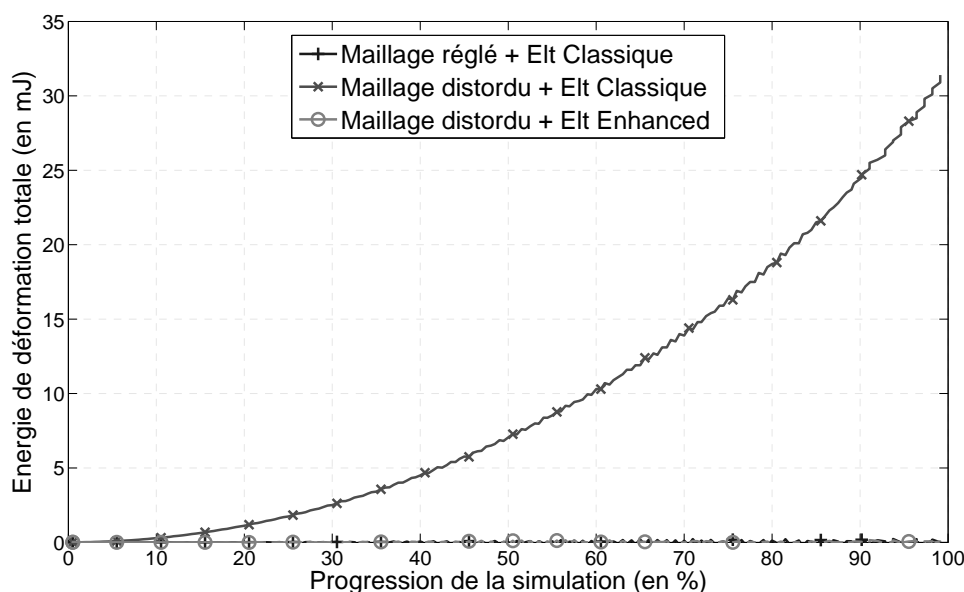


**Figure 3.27** – Déformation du maillage distordu

contraire, lors de l'utilisation d'un maillage distordu avec cette même formulation, une déformation parasite apparait, créant une surévaluation des efforts nécessaires. L'énergie maximale mesurée est alors de 31.8 mJ. Cela confirme la capacité de cette simulation à détecter la présence de verrouillage en tension. Finalement, l'énergie mesurée lors de cette dépose avec une formulation enhanced s'avère être faible, avec un maximum de 0.155mJ. Par conséquent, la formulation élément finie enhanced permet de supprimer les déformations parasites générées par l'utilisation d'un maillage distordu lors de la simulation de dépose sur cercle.



**Figure 3.28** – Variation du cisaillement dans la hauteur d'une éprouvette déposée sur cercle



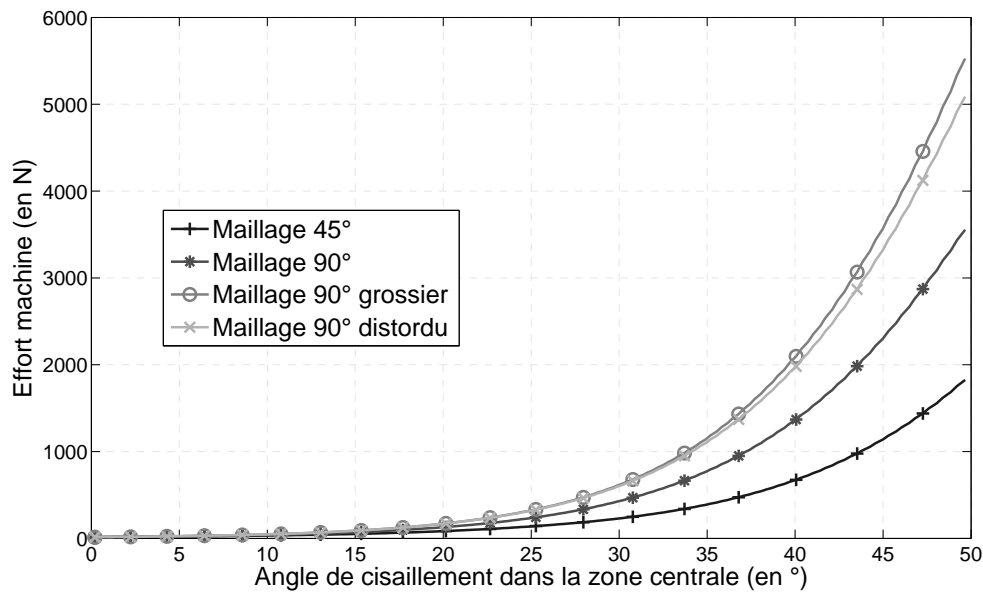
**Figure 3.29** – Énergie de déformation dans la plaque déposée suivant le maillage et la formulation choisie en fonction de la progression de la dépose sur cercle

#### 3.6.2 Élément continu et lois matériaux non linéaires

La formulation enhanced assumed strain développée est maintenant testée sur la loi de comportement hyperélastique définie section 2.2. Seule la simulation de bias test est réalisée, la dépose sur cercle demandant une loi sans rigidités de cisaillement pour être analysée. Les caractéristiques de la simulation du bias test sont les mêmes que pour la partie 3.6.1. Les maillages utilisés sont identiques (figures 3.15, 3.16, 3.17 et 3.18).

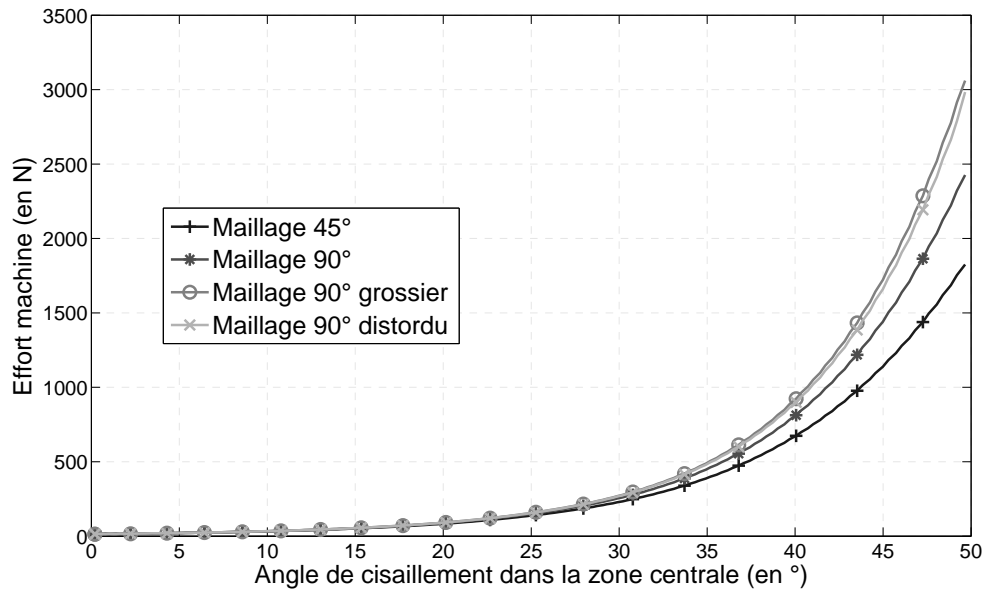
Les efforts repris par la machine de traction pour les différents maillages et la formulation classique sont tracés 3.30. La surévaluation de l'effort attendue est observée pour les maillages orientés à 90°. Les simulations utilisant la formulation classique mettent en évidence l'apparition du verrouillage en tension. L'amélioration des résultats avec le raffinement du maillage est encore observée.

La figure 3.31 permet de visualiser les courbes d'effort repris par la machine pour une formulation élément fini enhanced. A la différence des résultats obtenus pour la loi matériau linéaire (figure 3.25), on observe une variation de l'effort calculé entre les différents maillages. Une amélioration certaine des résultats est tout de même visible, quantifiable en calculant l'écart, en pourcentage, à l'effort calculé pour un maillage orienté à 45°. Ces écarts sont fournis dans le tableau 3.5. L'écart maximal enregistré est de 34% pour un cisaillement de 50° du maillage à 90°. Ce résultat est, bien sûr, meilleur que l'écart de 94% obtenu pour une formulation classique mais n'est pas pleinement satisfaisant. La qualité de l'amélioration obtenue peut être mieux appréciée en traçant l'écart à la courbe d'effort de référence pour les simulations avec maillage à 90° des deux formulations (figure



**Figure 3.30** – Effort repris par la machine en fonction de l’angle de cisaillement dans la zone centrale pour une formulation classique

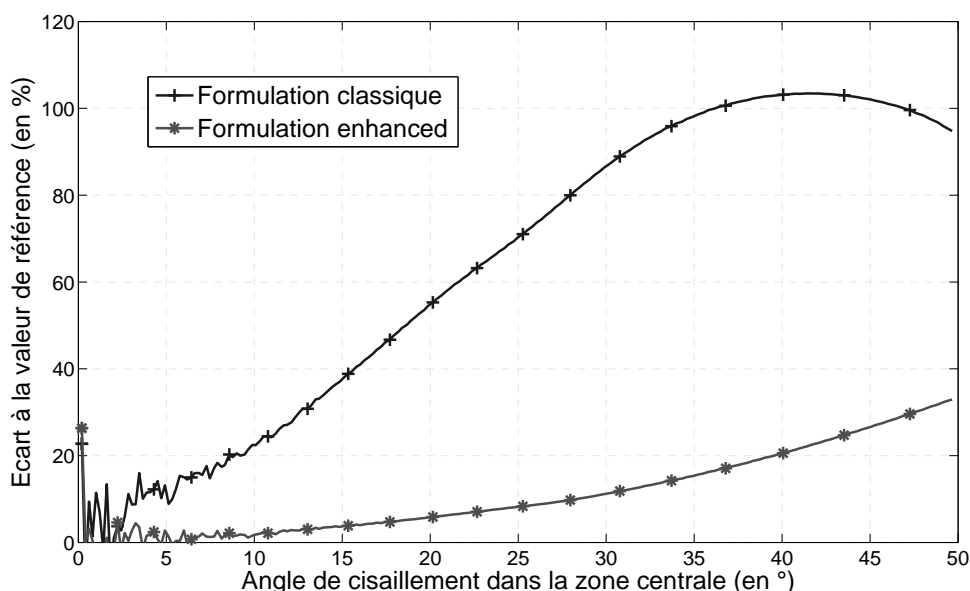
3.32). L’écart à la référence reste tout de même assez faible sur l’ensemble de l’amplitude angulaire, notamment dans la zone utile pour la simulation de la mise en forme.



**Figure 3.31** – Effort repris par la machine en fonction de l’angle de cisaillement dans la zone centrale pour une formulation enhanced

	Maillage	Écart (en %)
Formulation classique	90°	+93.55
	90° grossier	+201.20
	90° distordu	+177.07
Formulation enhanced	90°	+33.54
	90° grossier	+69.26
	90° distordu	+52.97

**Tableau 3.5** – Écart à la solution de référence pour un cisaillement de 50° avec une loi matériau non linéaire



**Figure 3.32** – Écart à la solution de référence en fonction de l'angle de cisaillement avec une loi matériau non linéaire pour le maillage à 90°

Afin d'améliorer ces résultats pour les lois non linéaires, deux pistes ont été explorées :

- L'utilisation d'un élément fini à intégration réduite et formulation *enhanced assumed strain* basé, non plus sur le tenseur des dilatations de Cauchy-Green droit, mais sur le gradient du déplacement de Reese [REE 05]. L'intérêt de cette formulation est d'enrichir directement le gradient du déplacement plutôt que d'enrichir une version approximée de Cauchy-Green droit (équation 3.84). Ce choix est, d'après Wriggers [WRI 96], mieux adapté aux grandes transformations.
- L'utilisation d'un élément fini à intégration complète et formulation *enhanced assumed strain* basé sur le gradient du déplacement de Simo [SIM 93b]. L'objectif ici est de déterminer si l'approximation du tenseur de comportement tangent, le fait de le considérer constant dans l'élément (équation 3.93), devient invalide lorsque

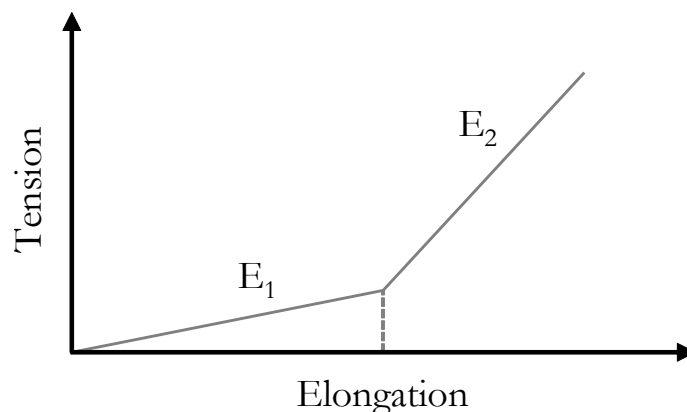


la loi de comportement est trop fortement non linéaire. La mise en place de ce type d'élément à intégration complète est plus lourde, le calcul des variables internes à chaque élément étant réalisé grâce à la résolution d'un système d'équations non linéaires. Un algorithme de Newton doit être utilisé pour faire converger la solution dans chaque élément.

Ces deux solutions, bien que prometteuses, ont fourni les mêmes résultats que ceux obtenus grâce à l'élément développé partie 3.3. Le fait que le verrouillage ne soit pas supprimé avec une loi de comportement non linéaire reste pour l'instant inexpliqué.

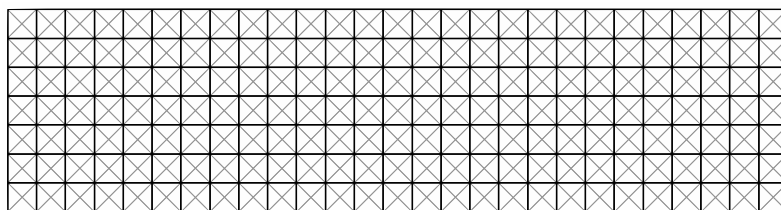
### 3.6.3 Utilisation de l'élément semi-discret

La version semi-discrète de la formulation *enhanced assumed strain* (section 3.4) est testée ici pour le bias extension test. Le comportement de cet élément fini peut être divisé en deux parties : le comportement associé aux mèches (où aux contributions énergétiques en tension) et le comportement associé aux rigidités secondaires (cisaillements et compression transverse). Pour la réponse des mèches à une sollicitation, la rigidité est prise linéaire par morceaux (figure 3.33). La première rigidité  $E_1$  est égale à 3 227 N et la seconde,  $E_2$ , égale à 14 390 N. Le comportement de la mèche est non linéaire, fonction de son élongation. En ce qui concerne les rigidités secondaires, la partie continue de l'élément, la loi hyperélastique est utilisée sans les contributions énergétiques en tension. Deux maillages sont utilisés. Le premier est discrétisé selon  $0 - 90^\circ$  (figure 3.34), les mèches étant orientées à  $45^\circ$  dans les éléments. Le second est orienté à  $45^\circ$ , les mèches suivent les côtés des éléments (figure 3.35). Sur cette représentation les mèches ne sont visibles car collées aux côtés des éléments. Les deux maillages ont été réalisés de manière à contenir le même nombre de mèches dans chaque direction.

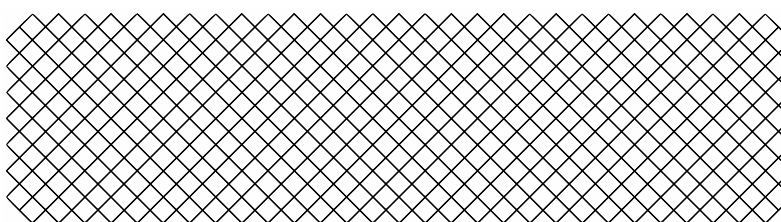


**Figure 3.33** – Tension dans une mèche en fonction de son élongation

Les résultats en efforts sont présentés figure 3.36. Comme précédemment pour l'élément fini continu, les résultats montrent des différences nettes. Les efforts calculés avec une formulation semi-discrète classique pour le maillage à  $90^\circ$  sont largement supérieurs à ceux trouvés pour le maillage à  $45^\circ$  (+258% en fin de courbe). La présence du verrouillage



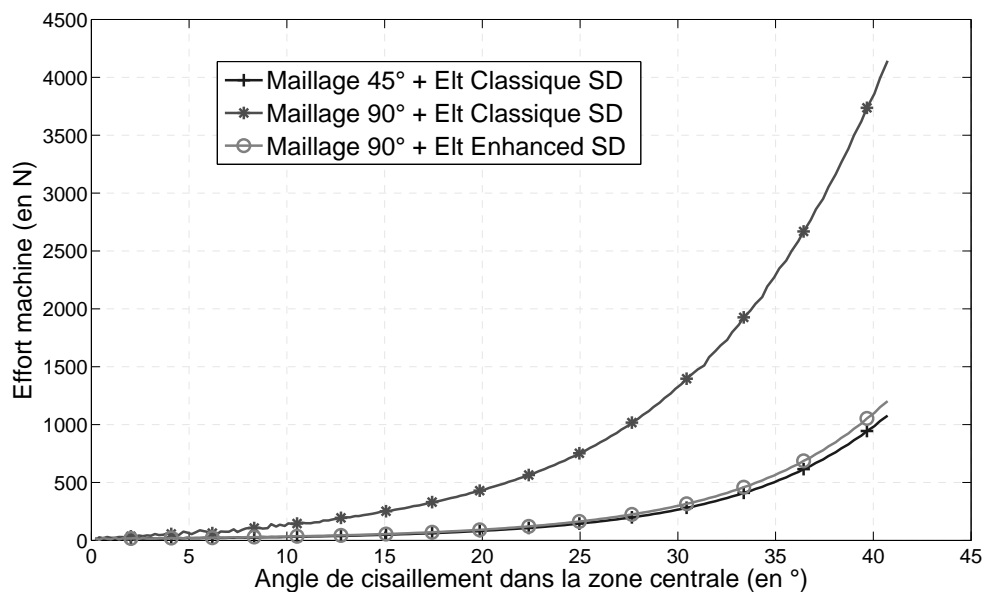
**Figure 3.34** – Maillage à  $90^\circ$  de l'éprouvette de traction de biais avec l'élément semi-discret



**Figure 3.35** – Maillage à  $45^\circ$  de l'éprouvette de traction de biais avec l'élément semi-discret

numérique en tension est confirmée. Dans le cas de la formulation *enhanced* associée au maillage à  $90^\circ$ , le résultat est en cohérence avec les courbes de référence. L'écart en fin de courbe est alors de  $+12\%$ . Cet exemple met encore en avant le gain quantitatif associé à l'utilisation d'une formulation *enhanced assumed strain*. Il est noté qu'à la différence des résultats précédant, l'angle maximal de cisaillement retenu pour la courbe 3.36 est de  $41^\circ$ . Cela vient du fait que la simulation avec l'élément classique et le maillage à  $90^\circ$  est instable compte tenu du verrouillage numérique et de la plus grande instabilité des éléments semi-discrets. Cette simulation n'atteint alors que cette valeur maximale en cisaillement.

Il est intéressant de noter que les résultats obtenus ici sont bien meilleurs que les résultats obtenus pour l'élément fini continu avec une loi non-linéaire. Pourtant la loi de comportement associée à l'élément semi-discret testé est entièrement non linéaire, que ce soit pour les contributions en tension où pour les rigidités secondaires (identiques à l'élément continu). Il semble alors que la formulation *enhanced* soit plus efficace sur cet élément semi-discret. Afin d'expliquer cela, on peut avancer le fait que la définition des directions des contributions en tension est réalisée dans le domaine isoparamétrique. Par conséquent, l'enrichissement étant réalisé dans ce domaine isoparamétrique, il doit être plus efficace.



**Figure 3.36** – Effort repris par la machine en fonction de l'angle de cisaillement dans la zone centrale suivant le maillage et la formulation choisie

### 3.7 Bilan du chapitre 3

Ce chapitre a permis de détailler de nombreux aspects du verrouillage en tension des renforts tissés. L'étude de l'essai de bias extension test a permis de visualiser les modes de déplacement posant problème lors de la simulation numérique : les modes hourglass. La confirmation de la responsabilité de ces modes a ensuite été développée théoriquement. La partie non-constante des déformations hourglass entraîne des déformations globales nulles dans la direction des mèches mais non nulles localement, au niveau des points d'intégration. Des efforts indésirables sont alors générés. La problématique est d'utiliser des formulations éléments finis supprimant, ou corrigeant, ces déformations locales parasites.

Un état de l'art des techniques de résolution disponibles actuellement a alors été présenté avec principalement : l'alignement entre directions de mèches et cotés des éléments, l'intégration réduite (sélective, avec stabilisation physique...) et les éléments à champ mixte. Parmi ces solutions, aucune n'est polyvalente ni communément admise pour la résolution du verrouillage en tension.

Un élément fini basé sur une formulation *enhanced assumed strain* à intégration réduite est proposé pour résoudre le problème du verrouillage en tension. Il est basé sur une approximation du tenseur des dilatations de Cauchy-Green droit autour d'un seul point d'intégration central. Des variables internes supplémentaires sont ajoutées. Leurs fonctions d'interpolations sont choisies de manière à compléter les polynômes isoparamétriques d'interpolation des déplacements classiques. Deux éléments sont proposés : un possédant 9 variables internes pour les éléments non distordus initialement, et un autre

possédant 21 variables internes pour gérer les éléments distordus initialement.

En plus de l'élément fini continu, la même procédure est appliquée à l'élément fini semi-discret. Les contributions discrètes en tension subissent le même traitement que l'élément fini continu. Un élément fini à intégration réduite semi-discret avec formulation *enhanced assumed strain* est obtenu.

La qualité des améliorations apportées par les nouvelles formulations est quantifiée sur des simulations de traction de biais (et de dépose sur cercle pour le cas matériellement linéaire) avec des maillages différents. L'élément fini continu donne de très bons résultats avec une loi de comportement linéaire tandis que les résultats avec la loi de comportement hyperélastique adaptée aux renforts interlock sont décevants. L'explication de cette différence est pour l'instant inconnue. Pour le nouvel élément fini semi-discret, les résultats obtenus sont très satisfaisants. Le verrouillage est presque entièrement supprimé.

## Chapitre 4

# Phénomène d'hourglassing transverse des renforts tissés épais

*Les renforts tissés épais de composite, par leur structure singulière, se voient attribué un comportement fortement anisotropique. Les différences importantes d'amplitude entre les rigidités est source de problèmes numériques. Ici, un comportement parasite en flexion des renforts lors de leur simulation numérique est mis en évidence. Le développement indésirable de modes hourglass transverses est détaillé puis corrigé par l'intermédiaire de deux solutions : une rigidification globale des modes hourglass par la méthode de la dilatation moyenne, puis une stabilisation matérielle à l'aide d'un paramètre utilisateur supplémentaire. Les deux solutions sont qualitativement comparées à l'aide de simulations de flexion trois points.*

### Sommaire

---

<b>4.1 Développement non désiré de modes hourglass dans l'épaisseur des renforts épais</b> . . . . .	<b>153</b>
4.1.1 Mise en évidence de modes parasites transverses . . . . .	153
4.1.1.1 Flexion 3 points . . . . .	153
4.1.1.2 Cisaillement simple de deux éléments . . . . .	155
4.1.2 Justification par le calcul théorique des raideurs hourglass . . . . .	156
<b>4.2 Raidissement des modes hourglass par la dilatation moyenne - méthode F-bar</b> . . . . .	<b>160</b>

---

4.2.1	Présentation et utilisation classique . . . . .	160
4.2.2	Implémentation et valeurs propres . . . . .	160
4.2.3	Résultats numériques . . . . .	164
4.2.3.1	Cisaillement simple sur deux éléments . . . . .	164
4.2.3.2	Flexion 3 points . . . . .	165
<b>4.3</b>	<b>Raidissement des modes hourglass par une rigidité matérielle addition-</b> <b>nelle . . . . .</b>	<b>168</b>
4.3.1	Paramètre de stabilisation hourglass matériel . . . . .	168
4.3.2	Résultats numériques . . . . .	169
4.3.2.1	Cisaillement simple sur deux éléments . . . . .	169
4.3.2.2	Flexion 3 points . . . . .	171
<b>4.4</b>	<b>Bilan du chapitre 4 . . . . .</b>	<b>172</b>

---

## 4.1 Développement non désiré de modes hourglass dans l'épaisseur des renforts épais

La forte anisotropie des tissés épais secs, due à l'entremêlement de mèches très raides constituant une préforme malléable, introduit des phénomènes numériques non désirés. Outre le verrouillage en tension décrit chapitre 3, leurs caractéristiques spécifiques autorisent le développement parasite de modes de déplacement hourglass dans leur épaisseur lors de sollicitations dominées par la flexion. L'analyse des phénomènes numériques et leur résolution sont plus facilement obtenues en ayant connaissance des rigidités en jeu. Ici, deux types de rigidités peuvent être distingués : les rigidités principales de tension sollicitées par l'extension des mèches et les rigidités secondaires dues aux frottements et blocages entre mèches (compression transverse et cisaillements). Contrairement au cas du verrouillage en tension, on va s'intéresser non pas au ratio entre rigidités secondaires et principales, mais aux différentes rigidités secondaires, plus particulièrement celles en cisaillement transverse et compression transverse. On verra que le comportement numérique du tissé diffère largement de celui observé expérimentalement pour des sollicitations faisant intervenir les deux rigidités susmentionnées. L'apparition des modes hourglass transverses parasites sera mise en évidence section 4.1.1 et étudiée analytiquement section 4.1.2. Finalement deux solutions seront proposées : la première basée sur la technique F-bar (section 4.2) initialement utilisée pour remédier à l'incompressibilité, la seconde fondée sur la rigidification des modes hourglass grâce aux  $\gamma$ -projections (section 4.3).

### 4.1.1 Mise en évidence de modes parasites transverses

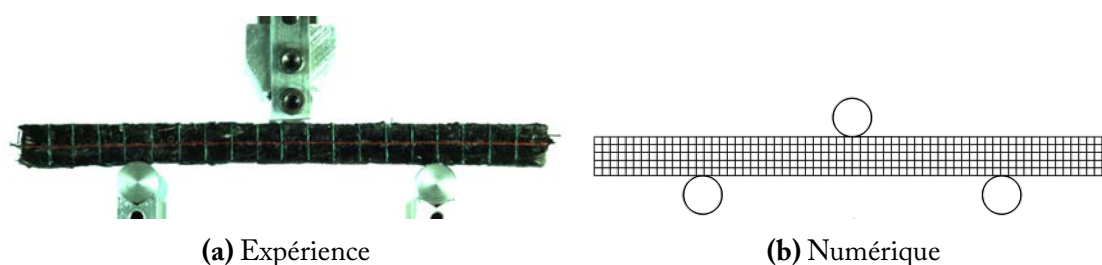
#### 4.1.1.1 Flexion 3 points

L'essai de flexion trois points permet d'étudier la réponse du matériau à des sollicitations n'étant pas décrites explicitement dans la loi de comportement numérique. A la différence des coques et poutres, les éléments volumiques classiques étudiés ici ne font pas apparaître explicitement la rigidité en flexion, elle est induite par d'autres rigidités numériques.

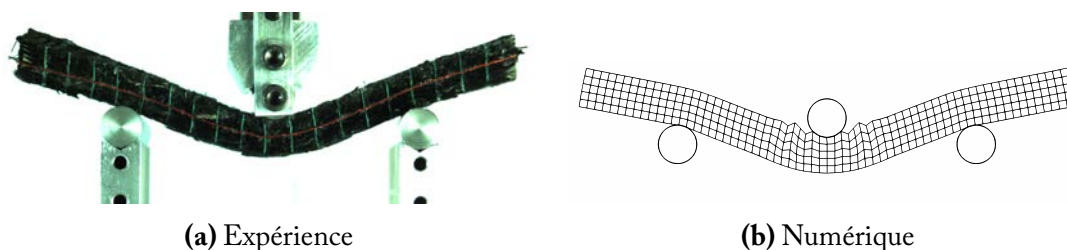
L'expérience est réalisée dans les conditions décrites section 1.3.3.8 avec un échantillon mesurant 200mm  $\times$  30mm  $\times$  15mm (longueur  $\times$  largeur  $\times$  épaisseur). Le principe expérimental est visible figure 1.35. Au cours de l'essai de flexion, en se basant sur l'observation de sections initialement droites, l'éprouvette est principalement soumise à du cisaillement transverse. Ses sections, marquées de traits verticaux, restent quasi verticales aux cours de la flexion, indiquant que des plans de mèches glissent les uns par rapport aux autres. Les matériaux fibreux épais se rapprochent alors, si on les assimile à des plaques, plus de la théorie de Mindlin-Reissner que de celle de Kirchhoff-Love où les sections restent droites et normales à la fibre moyenne. Cette déformation particulière est bien entendue liée aux larges rigidités en traction des mèches, qui forcent chaque couche à rester de la même longueur.

La simulation est accomplie dans les mêmes conditions que l'expérience. Une plaque

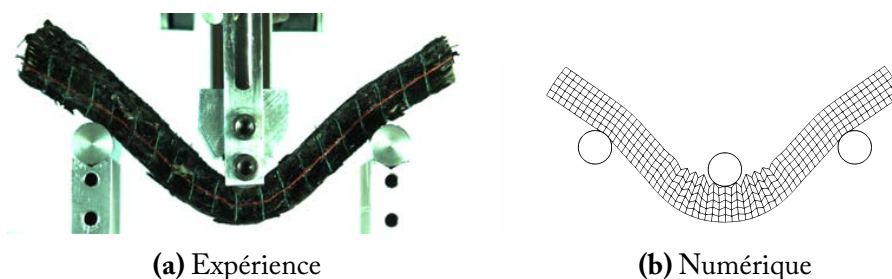
est déposée sur deux cylindres fixes, la gravité est appliquée à l'ensemble de la structure puis le cylindre central descend de 60 mm pour solliciter le tissé en flexion. Le calcul est réalisé avec des éléments volumiques sans conditions de symétrie avec la loi de comportement hyperélastique décrite section 2.2 où tous les paramètres ont été identifiés sur des essais différents de celui-ci. Les résultats obtenus par simulation sont montrés figures 4.1, 4.2, 4.3 et 4.4 pour des flèches respectivement de 0mm, 20mm, 40mm et 60mm. Seul le maillage est donné car seul celui-ci nous intéresse ici. Le maillage initial est un maillage réglé où les mailles sont des cubes de 3mm de côté. Cinq éléments ont été placés dans l'épaisseur afin de pouvoir négliger le verrouillage en cisaillement inhérent à l'utilisation d'éléments finis classiques à interpolation linéaire et intégration complète [COO 75]. La simulation est quasi statique afin de ne faire apparaître aucun effort inertiel.



**Figure 4.1** – Essai de flexion trois points sur tissé épais - flèche de 0mm



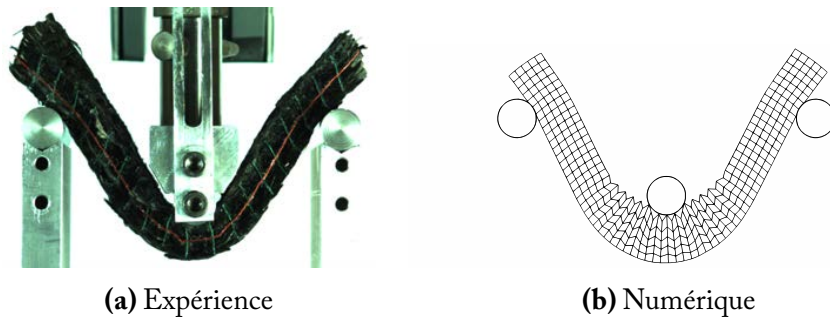
**Figure 4.2** – Essai de flexion trois points sur tissé épais - flèche de 20mm



**Figure 4.3** – Essai de flexion trois points sur tissé épais - flèche de 40mm

A la vue des résultats numériques, la modélisation utilisée ne reflète pas la réalité. On observe l'apparition graduelle de bourrelets. Ceux-ci sont présents dès le début de la



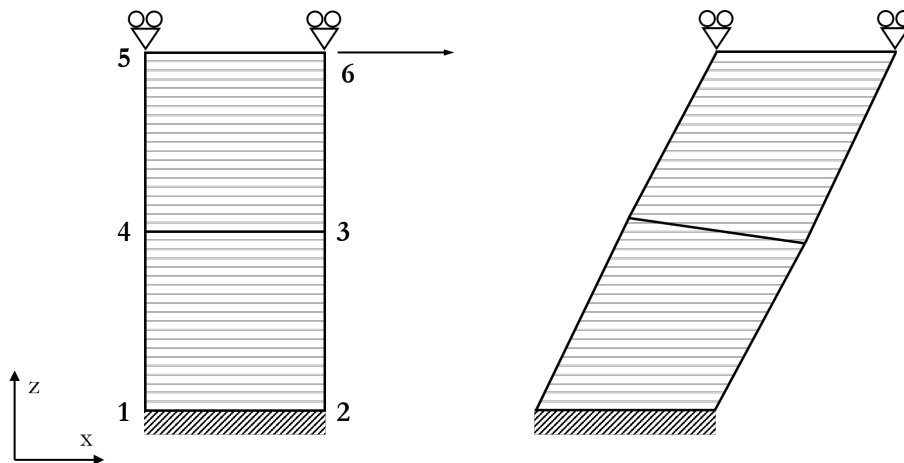


**Figure 4.4** – Essai de flexion trois points sur tissu épais - flèche de 60mm

simulation et leur nombre augmente au fur et à mesure. Ces bourrelets ne sont bien sûr pas attendus, comme le confirment les résultats expérimentaux. On voit ici un exemple des conséquences numériques de la forte anisotropie des tissus épais.

#### 4.1.1.2 Cisaillement simple de deux éléments

De manière à mettre en évidence plus simplement les phénomènes en jeu, un test élémentaire est mis au point. La représentation en est faite figure 4.5. Il est constitué de deux éléments cubiques superposés selon la direction  $z$ , alignée avec la direction transverse  $M_3$ . C'est à dire que la direction  $z$  désigne l'épaisseur d'un tissu épais. Un cisaillement simple est appliqué à partir du côté supérieur du patch d'élément dans la direction  $x$ . Le déplacement total imposé sur ce côté est égal à la longueur de ce même côté. Le résultat est donné figure 4.5. Les traits horizontaux plus clairs représentent les mèches et leur orientation correspond aux hypothèses de base de formulation de la loi hyperélastique.



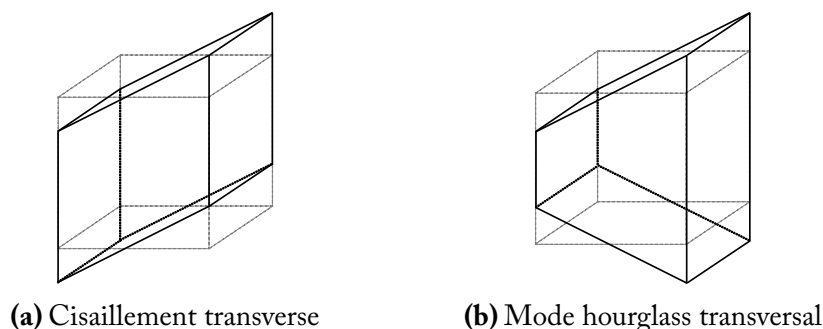
**Figure 4.5** – Cisaillement simple de deux éléments dans le plan  $(x, z)$

Afin d'analyser les résultats, on observe les déplacements des nœuds, principalement les 3 et 4, pour un patch d'éléments cubiques de côté 6 mm. Les déplacements des nœuds sont indiqués dans le tableau 4.1.

Nœud	Déplacement x (mm)	Déplacement z (mm)
1	0.0	0.0
2	0.0	0.0
3	3.015	-0.408
4	2.973	0.408
5	6.0	0.0
6	6.0	0.0

**Tableau 4.1** – Déplacement des nœuds du cisaillement simple figure 4.5

Le résultat indique une variation de l'orientation du coté 3-4 par rapport à la direction  $x$ . Ce résultat est normal pour des matériaux classiques (isotrope par exemple) mais pas pour notre tissu épais. La loi de comportement utilisée est définie de telle manière que, lors d'un cisaillement simple, les lignes initialement horizontales restent horizontales (comme dans l'essai de cisaillement transverse, section 1.3.3.7). Le résultat obtenu n'est pas le comportement qui a été identifié. On remarque aussi que le mode de déplacement qui se développe est principalement un mode hourglass transverse au lieu d'un mode de cisaillement simple. Pour en revenir à notre essai de flexion trois points, les modes de déplacements à surveiller sont les modes de cisaillement transverse et hourglass transverse, représentés figure 4.6.



**Figure 4.6** – Modes de déplacement principaux lors de la simulation de la flexion trois points

#### 4.1.2 Justification par le calcul théorique des raideurs hourglass

Nous avons vu lors de la simple sollicitation en cisaillement de deux éléments, section 4.1.1.2, que les modes hourglass transversaux avaient tendance à se développer plus facilement que le cisaillement transverse. Afin d'analyser cette supposition il est intéressant de comparer les rigidités associées à chacun des modes hourglass et de les comparer aux rigidités des modes homogènes (cisaillement et dilatation). Pour ce faire, l'utilisation de notions liées aux  $\gamma$ -projections est nécessaire, détaillée section 3.3.1.

Afin de calculer les rigidités associées aux modes de déformation qui nous intéressent, on prend comme base l'élément décrit figure 4.7 de longueur  $L$  (direction 1), largeur  $D$  (direction 2), et épaisseur  $t$  (direction 3). L'élément n'est pas distordu initialement et ne subit pas de déformation afin de simplifier les explications. Le calcul de la rigidité de l'élément  $\mathbf{K}_e$  pour un élément à intégration complète (2 points de Gauss dans chaque direction) est réalisé analytiquement grâce à Maple<sup>TM</sup>. Le calcul de la matrice de rigidité est réalisé en considérant la seconde variation du potentiel d'énergie élastique et peut être exprimé :

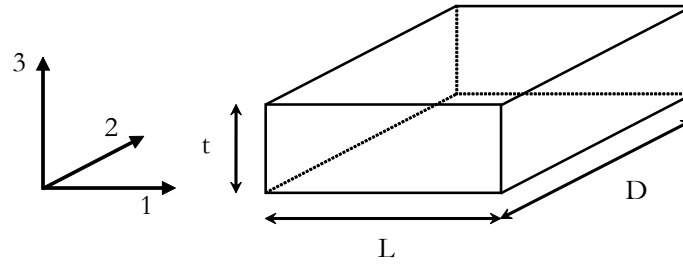


Figure 4.7 – Élément brique étudié

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_{\text{mat}} + \mathbf{K}_{\text{geo}} \quad (4.1)$$

où  $\mathbf{K}_{\text{mat}}$  et  $\mathbf{K}_{\text{geo}}$  sont les rigidités matérielles et géométriques définies équations 2.58 et 2.59. On se place à l'état non déformé, annulant ainsi les rigidités géométriques. Par conséquent, le calcul de la rigidité de l'élément peut être réalisé dans le domaine matériel (équation 2.58) :

$$\mathbf{K}_T = \int_{\Omega_0} \mathbf{B}_0^T \mathbf{C}^{SE} \mathbf{B}_0 d\Omega \quad (4.2)$$

Pour calculer la rigidité des modes hourglass, définissons les vecteurs  $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_i^j$  qui sont construits avec la version normée  $\boldsymbol{\gamma}_i^n$  des vecteurs antihourglass  $\boldsymbol{\gamma}_i$  (équation 3.68) et appliqués à la direction  $j$  tel que :

$$\boldsymbol{\gamma}_i^n = \boldsymbol{\gamma}_i / \|\boldsymbol{\gamma}_i\| \quad (4.3)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_i^x = (\{\boldsymbol{\gamma}_i^n\}_1, 0, 0, \{\boldsymbol{\gamma}_i^n\}_2, 0, 0, \{\boldsymbol{\gamma}_i^n\}_3, 0, 0, \{\boldsymbol{\gamma}_i^n\}_4, 0, 0, \{\boldsymbol{\gamma}_i^n\}_5, 0, 0, \{\boldsymbol{\gamma}_i^n\}_6, 0, 0, \{\boldsymbol{\gamma}_i^n\}_7, 0, 0, \{\boldsymbol{\gamma}_i^n\}_8, 0, 0) \quad (4.4)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_i^y = (0, \{\boldsymbol{\gamma}_i^n\}_1, 0, 0, \{\boldsymbol{\gamma}_i^n\}_2, 0, 0, \{\boldsymbol{\gamma}_i^n\}_3, 0, 0, \{\boldsymbol{\gamma}_i^n\}_4, 0, 0, 0, \{\boldsymbol{\gamma}_i^n\}_5, 0, 0, \{\boldsymbol{\gamma}_i^n\}_6, 0, 0, \{\boldsymbol{\gamma}_i^n\}_7, 0, 0, \{\boldsymbol{\gamma}_i^n\}_8, 0) \quad (4.5)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_i^z = (0, 0, \{\boldsymbol{\gamma}_i^n\}_1, 0, 0, \{\boldsymbol{\gamma}_i^n\}_2, 0, 0, \{\boldsymbol{\gamma}_i^n\}_3, 0, 0, \{\boldsymbol{\gamma}_i^n\}_4, 0, 0, 0, 0, \{\boldsymbol{\gamma}_i^n\}_5, 0, 0, \{\boldsymbol{\gamma}_i^n\}_6, 0, 0, \{\boldsymbol{\gamma}_i^n\}_7, 0, 0, \{\boldsymbol{\gamma}_i^n\}_8) \quad (4.6)$$

Les rigidités associées à chaque mode de déplacement hourglass peuvent être calculées par la relation suivante :

$$\omega_i^j = \tilde{\mathbf{r}}_i^j \mathbf{T} \mathbf{K}_e \tilde{\gamma}_i^j \quad (4.7)$$

En ce qui concerne la loi matériau, la matrice des rigidités tangentes qui lie taux de déformation de Green-Lagrange et taux de contraintes de Piolat-Kirchhoff 2 est utilisée (équation 2.33). Le comportement matériel initial est orthotrope avec découplage de tous les modes, c'est à dire un coefficient de Poisson nul. La matrice des rigidités  $\mathbf{C}^{SE}$  est alors donnée par :

$$\mathbf{C}^{SE} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

où  $E_1$  est la rigidité selon la première direction de mèche,  $E_2$  est la rigidité selon la seconde direction de mèche (orthogonale à la première),  $E_3$  la rigidité de compression transverse (de direction orthogonale au plan formé par les mèches),  $G_{12}$  la rigidité de cisaillement plan,  $G_{23}$  la rigidité de cisaillement transverse dans la première direction de mèche et  $G_{31}$  la rigidité de cisaillement transverse dans la seconde direction de mèche. Chacun de ces coefficients est dépendant de la déformation. Pour rappel, celle-ci est considérée nulle pour simplification.

Après calcul, les rigidités des modes hourglass (correspondant aux modes de déplacements  $\mathbf{h}_1$ ,  $\mathbf{h}_2$ ,  $\mathbf{h}_3$  et  $\mathbf{h}_4$  dans les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$  figure 3.10) sont données par :

$$\omega_1^x = t \frac{E_1 D^2 + G_{12} L^2}{6LD} \quad (4.9)$$

$$\omega_1^y = t \frac{E_2 L^2 + G_{12} D^2}{6LD} \quad (4.10)$$

$$\omega_1^z = t \frac{G_{13} D^2 + G_{23} L^2}{6LD} \quad (4.11)$$

$$\omega_2^x = L \frac{G_{12} t^2 + G_{13} D^2}{6Dt} \quad (4.12)$$

$$\omega_2^y = L \frac{E_2 t^2 + G_{23} D^2}{6Dt} \quad (4.13)$$

$$\omega_2^z = L \frac{E_3 D^2 + G_{23} t^2}{6Dt} \quad (4.14)$$

$$\omega_3^x = D \frac{E_1 t^2 + G_{13} L^2}{6Lt} \quad (4.15)$$

$$\omega_3^y = D \frac{G_{12}t^2 + G_{23}L^2}{6Lt} \quad (4.16)$$

$$\omega_3^z = D \frac{E_3L^2 + G_{13}t^2}{6Lt} \quad (4.17)$$

$$\omega_4^x = \frac{(G_{12}t^2 + G_{13}D^2)L^2 + E_1t^2D^2}{18LDt} \quad (4.18)$$

$$\omega_4^y = \frac{(E_2t^2 + G_{23}D^2)L^2 + G_{12}D^2t^2}{18LDt} \quad (4.19)$$

$$\omega_4^z = \frac{(E_3D^2 + G_{23}t^2)L^2 + G_{13}D^2t^2}{18LDt} \quad (4.20)$$

Les modes principaux impliqués dans la simulation de la flexion trois points sont, comme indiqué figure 4.6, le cisaillement transverse et le mode hourglass transversal. La rigidité du mode hourglass transverse sens 1 (direction chaîne) est donnée par la valeur  $\omega_3^z$ , équation 4.17 (pour le sens 2, direction trame, valeur  $\omega_2^z$  équation 4.14). En procédant de la même manière, les raideurs des modes de cisaillement transverse sens 1 (figure 4.6a) et sens 2 sont données par :

$$\omega_{ct1} = \frac{DtG_{13}}{2L} \quad (4.21)$$

$$\omega_{ct2} = \frac{LtG_{23}}{2D} \quad (4.22)$$

Afin d'éviter que le mode hourglass transverse ne se développe plus facilement que le mode de cisaillement transverse attendu dans la simulation trois points, la rigidité associée au cisaillement transverse doit être plus faible que celle associée au mode hourglass transverse. La condition suivante apparaît :

$$\omega_{ct1} < \omega_3^z \text{ et } \omega_{ct2} < \omega_2^z \quad (4.23)$$

Soit après utilisation des équations 4.17 et 4.21, puis 4.14 et 4.22 :

$$E_3 > 2G_{13} \frac{t^2}{L^2} \quad (4.24)$$

$$E_3 > 2G_{23} \frac{t^2}{D^2} \quad (4.25)$$

Par conséquent pour un maillage cubique non distordu ni déformé ( $L = d = t$ ), la rigidité tangente de compression transverse doit être supérieure à deux fois la rigidité tangente de cisaillement transverse afin que le développement des modes hourglass ne soit pas facilité. Cependant, dans notre cas, la rigidité tangente initiale en compression est de 0.0662 MPa et celle de cisaillement 0.0888 MPa (pour les deux directions). Le ratio  $\omega_3^z$  sur  $\omega_{ct1}$  (ou  $\omega_2^z$  sur  $\omega_{ct2}$ ) est :

$$\frac{\omega_3^z}{\omega_{ct1}} = \frac{\omega_2^z}{\omega_{ct2}} = 0.5818 \quad (4.26)$$

Ce ratio est bien inférieur à 1, confirmant la possibilité pour les modes de déplacement hourglass à se développer. Afin d'obtenir un comportement cohérent de la simulation numérique en flexion trois points, la rigidité associée aux modes hourglass parasites doit être augmentée. Deux solutions sont proposées ici : la méthode dite F-bar (section 4.2) et une méthode de raidissement des modes hourglass basée sur les  $\gamma$ -projection (section 4.3).

Il est à noter que la rigidité  $\omega_4^z$  (équation 4.20), associée à la distorsion transversale, est aussi problématique pour la simulation des tissés épais. La stabilisation de ce mode n'est pas prise en compte ici car ces caractéristiques de déplacement particulières ne déclenchent pas facilement son apparition, spécialement en flexion.

## 4.2 Raidissement des modes hourglass par la dilatation moyenne - méthode F-bar

### 4.2.1 Présentation et utilisation classique

Dans le cas de lois de comportement incompressible ou quasi incompressible, la dilatation non nulle en tout point des modes hourglass, qui sont un mode de déformation isochore, provoque un raidissement du comportement. Ce phénomène a été extensivement étudié et plusieurs techniques de résolution sont disponibles.

L'approche la plus intéressante est d'utiliser une formulation en déplacement pur. Cette idée a commencé son chemin avec les méthodes à intégration réduite, sélective et les méthodes  $\bar{\mathbf{B}}$  [HUG 77b], pour laquelle un théorème d'équivalence a été obtenu [HUG 77a, MAL 78]. La formulation en dilatation moyenne introduite par [NAG 74] peut aussi être associée au modèle  $\bar{\mathbf{B}}$ . Cette formulation est largement utilisée dans des codes commerciaux de premier plan (LS-DYNA, NIKE3D ou Abaqus). Les principaux développements sur les méthodes  $\bar{\mathbf{F}}$ , qui est la généralisation aux déformations finies des méthodes  $\bar{\mathbf{B}}$  ont été réalisés par [HUG 75, SIM 85, SOU 96, SOU 05].

Nous nous intéresserons ici à la méthode  $\bar{\mathbf{F}}$  qui permet d'éviter les problèmes d'incompressibilité en déformations finies. Comme nous allons le voir, son utilité première n'a aucun rapport avec notre objectif de stabilisation des modes hourglass :  $\bar{\mathbf{F}}$  permet de faire diminuer la rigidité des modes hourglass (qui sont à volume constant) des matériaux incompressibles alors que l'on désire augmenter la rigidité de certains de nos modes hourglass problématiques. Cette méthode a pour intérêt d'être implémentée, de manière plus ou moins ressemblante, dans de nombreux codes éléments finis commerciaux.

### 4.2.2 Implémentation et valeurs propres

L'objectif de la technique  $\bar{\mathbf{F}}$  est d'obtenir une dilatation qui sera la même en tout point de l'élément. Ainsi le verrouillage numérique lié à l'incompressibilité des matériaux

pourra être levé. La version géométriquement non linéaire de l'implémentation de cette technique est décrite ici. L'idée principale est de scinder le gradient de la transformation en deux parties : une partie déviatorique (qui conserve le volume) et une partie sphérique. Le gradient de la transformation est utilisé car c'est la quantité pertinente dans les cas géométriquement non linéaire. La décomposition est réalisée de manière multiplicative. Ce type de décomposition a été exploité par [FLO 69, HUG 75, SIM 91, SIM 85], grâce au principe à trois champs de Hu-Washizu, et plus récemment sous une approche  $\bar{F}$  alternative [SOU 96, SOU 05]. Ces travaux ont aussi été repris par [ELG 08]. Définissons le gradient de la transformation et son déterminant, indiquant la variation de volume :

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} , \quad \text{Det}(\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi})) = j(\boldsymbol{\xi}) \quad (4.27)$$

Il faut tout d'abord définir la dilatation que l'on souhaite voir appliquée à l'ensemble de l'élément. Pour cela on va utiliser le déterminant du gradient de la transformation  $j$  qui va mesurer le changement de volume en un point précis. Là, deux solutions sont possibles. Soit on utilise le déterminant calculé au centre du domaine isoparamétrique :

$$\bar{j} = \text{Det}(\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}))_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}} \quad (4.28)$$

où  $\boldsymbol{\xi}$  désigne les coordonnées du domaine isoparamétrique dans le cube biunitaire. Cette solution, bien que simple, s'avère ne pas satisfaire le patch test pour des solutions distordues initialement. Par conséquent, il lui est préféré la moyenne matérielle de la dilatation dans l'élément :

$$\bar{j} = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \text{Det}(\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi})) \, dV_0 \quad (4.29)$$

où  $\bar{j}$  est indépendant de  $\boldsymbol{\xi}$ . Le nouveau gradient de la transformation est alors défini comme suit :

$$\bar{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) \left( \frac{\bar{j}}{j(\boldsymbol{\xi})} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.30)$$

rendant la dilatation constante en tout point  $\boldsymbol{\xi}$ . Pour montrer cela, prenons le déterminant de  $\bar{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi})$  :

$$\text{Det}(\bar{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi})) = \text{Det} \left( \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) \left( \frac{\bar{j}}{j(\boldsymbol{\xi})} \right)^{\frac{1}{3}} \right) \quad (4.31)$$

dans laquelle on veut faire sortir le scalaire :

$$\left( \frac{\bar{j}}{j(\boldsymbol{\xi})} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.32)$$

du membre de droite. Comme nous travaillons en trois dimensions, le scalaire sortant du déterminant est mis à la puissance trois :

$$\text{Det}(\bar{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi})) = \text{Det}(\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi})) \left( \left( \frac{\bar{j}}{j(\boldsymbol{\xi})} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^3 \quad (4.33)$$

$$\text{Det}(\bar{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi})) = j(\boldsymbol{\xi}) \frac{\bar{j}}{j(\boldsymbol{\xi})} \quad (4.34)$$

$$\text{Det}(\bar{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi})) = \bar{j} \quad (4.35)$$

où  $\bar{j}$  est indépendant du point d'intégration  $\boldsymbol{\xi}$ . Le déterminant, et par conséquent la dilatation, est constante en tout point d'intégration de l'élément. Le calcul habituellement réalisé pour calculer les contraintes avec  $\mathbf{F}$  est maintenant fait avec  $\bar{\mathbf{F}}$ , défini équation 4.30. Étant donné que l'interpolation des déplacements afin de calculer le gradient de la transformation est modifiée, l'interpolation des forces internes calculées à partir des contraintes doit être modifiée aussi. En lieu et place de l'équation classique :

$$\mathbf{F}_{int} = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (4.36)$$

une matrice  $\bar{\mathbf{B}}$  différente est utilisée telle que :

$$\mathbf{F}_{int} = \int_V \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (4.37)$$

Cette matrice est construite en considérant la décomposition additive entre la partie sphérique et la partie déviatorique :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^{Sph} + \mathbf{B}^{dev} \quad (4.38)$$

donnée par :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{b}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 & 0 & \mathbf{b}_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^{Sph} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

avec :

$$\mathbf{b}_i = \frac{\partial N}{\partial x_i} \quad (4.40)$$



où  $N$  est le vecteur des fonctions de forme. La matrice  $\bar{\mathbf{B}}$  est alors définie telle que la dilatation soit nulle en tout point de l'élément, c'est à dire en lui retirant sa partie sphérique :

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B} - \mathbf{B}^{Sph} \quad (4.41)$$

donnant :

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\mathbf{b}_1 & -\frac{1}{3}\mathbf{b}_2 & -\frac{1}{3}\mathbf{b}_3 \\ -\frac{1}{3}\mathbf{b}_1 & \frac{2}{3}\mathbf{b}_2 & -\frac{1}{3}\mathbf{b}_3 \\ -\frac{1}{3}\mathbf{b}_1 & -\frac{1}{3}\mathbf{b}_2 & \frac{2}{3}\mathbf{b}_3 \\ \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{b}_1 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

On peut vérifier que la somme des trois premières lignes de la matrice  $\bar{\mathbf{B}}$  est toujours nulle, imposant la nullité de la dilatation en tout point de l'élément. Après avoir défini la méthode F-bar utilisée, il est maintenant intéressant de calculer les nouvelles rigidités des modes de déplacement hourglass transverse et cisaillement transverse afin de les comparer. Dans les mêmes conditions que pour la section 4.1.2, celles-ci sont maintenant données par :

$$\omega_2^z = L \frac{(E_1 + E_2 + 4E_3)D^2 + 9G_{23}t^2}{54Dt} \quad (4.43)$$

$$\omega_3^z = D \frac{(E_1 + E_2 + 4E_3)L^2 + 9G_{13}t^2}{54Lt} \quad (4.44)$$

et :

$$\omega_{cr1} = \frac{DtG_{13}}{2L} \quad (4.45)$$

$$\omega_{cr2} = \frac{LtG_{23}}{2D} \quad (4.46)$$

Les rigidités associées aux deux modes de déplacement hourglass ont vu l'expression analytique de leur rigidité changer. Les modules  $E_1$  et  $E_2$  qui correspondent aux rigidités des mèches sont apparus. Par contre, comme attendu, la rigidité des modes de cisaillement n'a pas changé, confirmant que la méthode F-Bar n'agit que sur les modes hourglass. Comme les rigidités des mèches sont bien supérieures aux autres rigidités (de l'ordre de 50MPa à l'état initial ici), on peut supposer que la rigidité des modes hourglass a été considérablement augmentée. Pour vérifier cela, le calcul du ratio des rigidités est effectué (équation 4.26) :

$$\frac{\omega_3^z}{\omega_{cr1}} = \frac{\omega_2^z}{\omega_{cr2}} = 42.1522 \quad (4.47)$$

Le ratio 4.47 est bien supérieur à la valeur de 1 impliquant une rigidité des modes hourglass transverse supérieure à celle du cisaillement transverse à l'état non déformé. Cette méthode permet donc de stabiliser les modes parasites qui apparaissent lors de la simulation de la flexion trois points grâce aux valeurs importantes des rigidités des mèches  $E_1$  et  $E_2$ . Cette méthode à deux inconvénients principaux :

- La nouvelle rigidité des modes hourglass transverse  $\omega_2^z$  et  $\omega_3^z$  est directement liée aux rigidités  $E_1$  et  $E_2$ . Si celles-ci ne sont pas fortement supérieures aux autres rigidités (cisaillement et compression transverse), il se peut que les modes hourglass ne soient pas suffisamment stabilisés ;
- La plupart des rigidités des modes hourglass sont modifiées, et pas seulement  $\omega_2^z$  et  $\omega_3^z$  :

$$\omega_1^x = 2t \frac{(4E_1 + E_2 + E_3) D^2 + 9G12L^2}{108LD} \quad (4.48)$$

$$\omega_1^y = t \frac{(E_1 + 4E_2 + E_3) L^2 + 9G12D^2}{54LD} \quad (4.49)$$

$$\omega_1^z = t \frac{G13D^2 + G23L^2}{6LD} \quad (4.50)$$

$$\omega_2^x = L \frac{G12t^2 + G13D^2}{6Dt} \quad (4.51)$$

$$\omega_2^y = L \frac{(E_1 + 4E_2 + E_3)t^2 + 9G23D^2}{54Dt} \quad (4.52)$$

$$\omega_3^x = 2D \frac{(4E_1 + E_2 + E_3)t^2 + 9G13L^2}{108Lt} \quad (4.53)$$

$$\omega_3^y = D \frac{G12t^2 + G23L^2}{6Lt} \quad (4.54)$$

$$\omega_4^x = \frac{((4E_1 + E_2 + E_3)t^2 + 9G13L^2) D^2 + 9G12L^2 t^2}{162LDt} \quad (4.55)$$

$$\omega_4^y = \frac{((E_1 + 4E_2 + E_3)t^2 + 9G23D^2) L^2 + 9G12t^2 D^2}{162LDt} \quad (4.56)$$

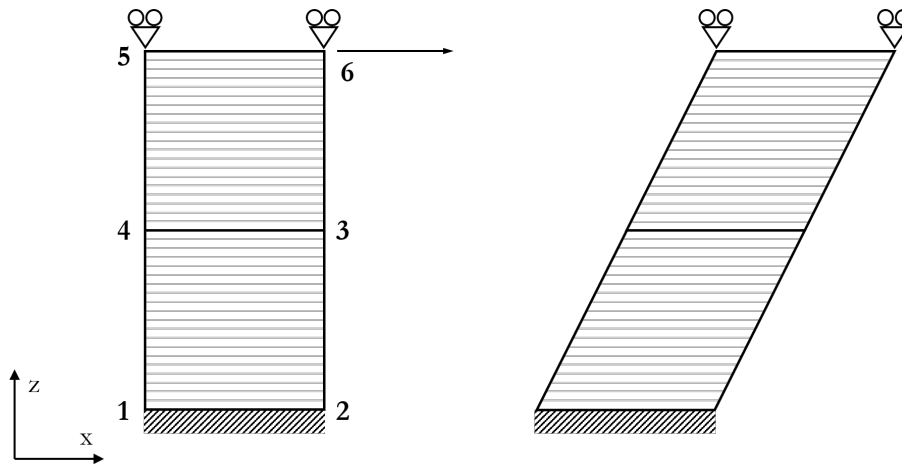
$$\omega_4^z = \frac{((E_1 + E_2 + 4E_3) D^2 + 9G23t^2) L^2 + 9D^2 t^2 G13}{162LDt} \quad (4.57)$$

Le comportement global peut être légèrement modifié par la méthode F-Bar, suivant le type de simulation réalisée.

## 4.2.3 Résultats numériques

### 4.2.3.1 Cisaillement simple sur deux éléments

La simulation de deux éléments en cisaillement simple réalisée section 4.1.1.2 est re-produite avec la méthode F-bar. Le résultat est donné figure 4.8.



**Figure 4.8** – Cisaillement simple de deux éléments dans le plan  $(x, z)$  avec la méthode F-bar

Afin d'analyser les résultats, on observe les déplacements des nœuds, principalement les 3 et 4, pour un patch d'éléments cubiques de côté 6 mm. Les déplacements des nœuds sont indiqués dans le tableau 4.2.

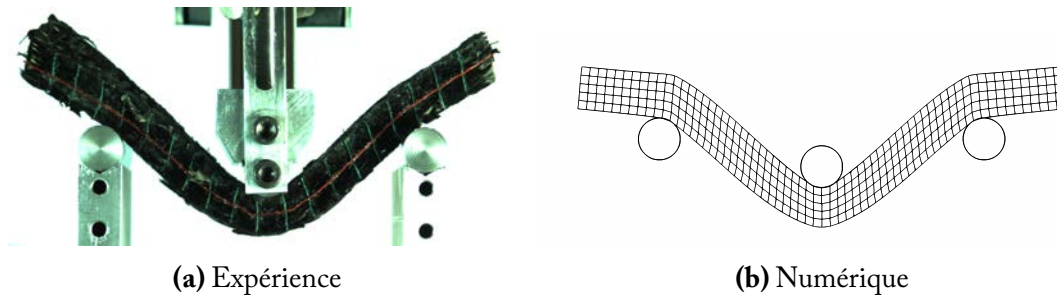
Nœud	Déplacement x (mm)	Déplacement z (mm)
1	0.0	0.0
2	0.0	0.0
3	3.007	-0.006
4	3.007	0.005
5	6.0	0.0
6	6.0	0.0

**Tableau 4.2** – Déplacement des nœuds du cisaillement simple figure 4.8

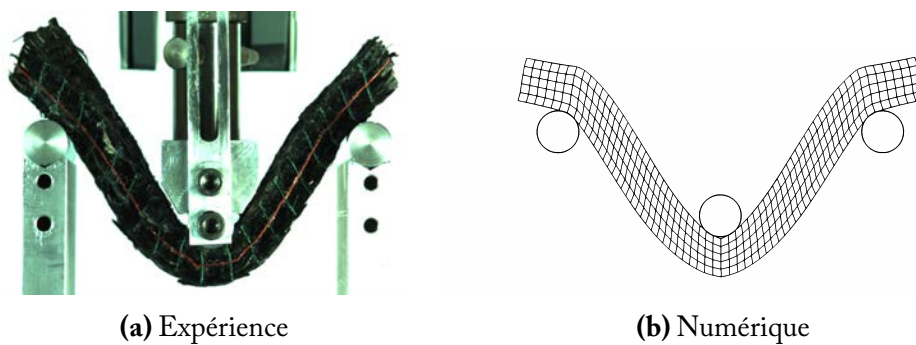
Le résultat indique que le côté 3-4 ne change pas d'orientation contrairement au résultat avec une formulation classique figure 4.5. La variation de hauteur des nœuds 3 et 4 est négligeable. Ce résultat est en accord avec la loi de comportement utilisée et l'essai de cisaillement transverse réalisé.

#### 4.2.3.2 Flexion 3 points

Des calculs de flexion trois points sont réalisés dans les mêmes conditions que ceux décrits section 4.1.1.1. La seule différence est l'utilisation de la méthode F-bar. Les résultats de ces simulations sont donnés figures 4.9 et 4.10 pour un déplacement de 40mm et 60mm. Contrairement aux figures 4.3 et 4.4, aucun bourrelet n'apparaît lors de la simulation. Les rigidités des modes hourglass sont maîtrisées et la forme globale de la simulation est cohérente avec l'expérience.

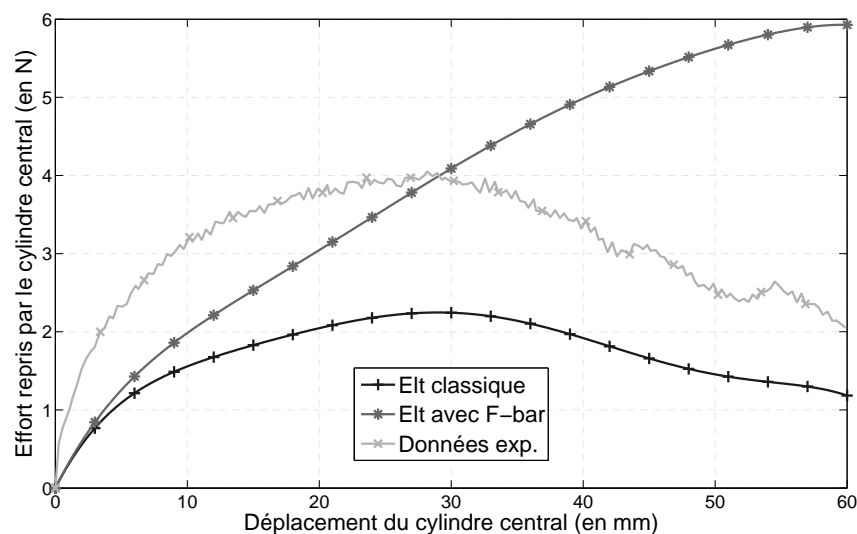


**Figure 4.9** – Essai de flexion trois points sur tissé épais avec méthode F-Bar - flèche de 40mm



**Figure 4.10** – Essai de flexion trois points sur tissé épais avec méthode F-Bar - flèche de 60mm

Afin de confirmer l'augmentation de la rigidité des modes hourglass, la force nécessaire à l'appui central pour atteindre un déplacement de 60mm est tracé figure 4.11. L'effort nécessaire pour atteindre le même déplacement est bien supérieur avec la méthode F-bar. Ceci s'explique par le fait que le mode principal de déplacement des éléments n'est plus le mode hourglass transverse mais le cisaillement transverse, à cause de l'augmentation de la rigidité des modes hourglass due à la méthode F-bar. La rigidité du cisaillement transverse étant supérieure, la force nécessaire pour déformer les éléments est supérieure.



**Figure 4.11** – Effort repris par le cylindre central en fonction de la flèche imposée avec la méthode F-bar par rapport à un élément classique sens chaîne

La méthode F-bar est donc efficace pour supprimer l'apparition de bourrelets parasites lors de simulations dominées par la flexion. Son implémentation est simple et rapide. Pour en revenir aux inconvénients listés section 4.2.2, des simulations ont été réalisées avec des rigidités de mèches sens trame  $E_2$  différentes (pour des flexions sens chaîne). Ces rigidités ont soit été multipliées par 2, 5 ou 10 ; ou divisée par 2, 5 ou 10. Les courbes de l'effort repris par le cylindre central sont tracées figure 4.12.

Ces résultats montrent, comme supposé, que la stabilisation apportée par la méthode F-bar dépend grandement des autres rigidités, même celles non sollicitées comme la rigidité en tension sens trame pour des flexions trois points sens chaîne. Le comportement final est fortement influencé par celles-ci. De plus, pour le cas où les rigidités ont été divisées par 10, des bourrelets sont apparus. Cela indique que la quantité de stabilisation apportée n'est pas maîtrisée.

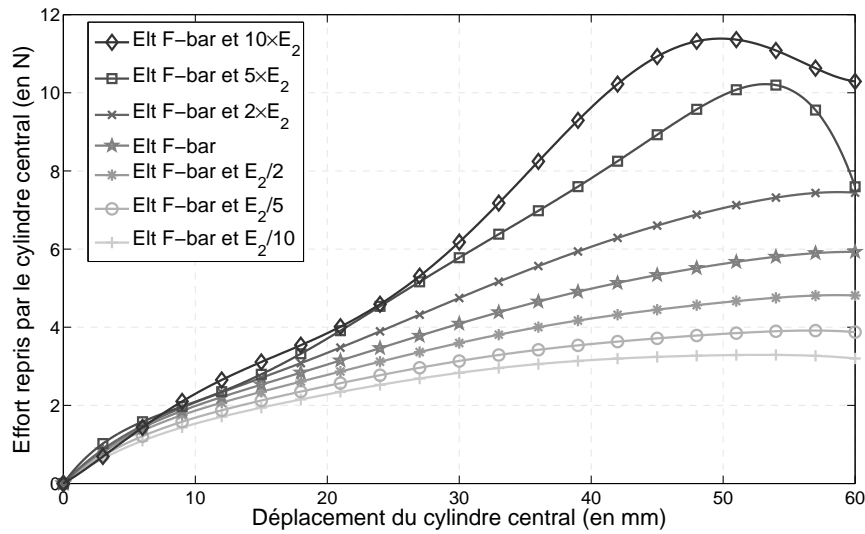


Figure 4.12 – Effort repris par le cylindre central en fonction de la flèche imposée avec la méthode F-bar sens chaîne

### 4.3 Raidissement des modes hourglass par une rigidité matérielle additionnelle

#### 4.3.1 Paramètre de stabilisation hourglass matériel

L'objectif avec cette seconde méthode est de mieux contrôler la rigidité associée aux modes de déplacement parasites que l'on désire faire disparaître. Dans cette optique nous partons de la théorie des  $\gamma$ -projections initiée section 3.3.1 afin de développer une méthode de stabilisation hourglass en déplacement total adaptée à notre formulation hyperélastique. Pour cela, on reprend le concept de stabilisation à intégration réduite, développé section 3.3.1, sans la partie *enhanced strain*. Les approximations suivantes du tenseur des dilatations de Cauchy-green droit et du tenseur des contraintes de Piolat-Kirchhoff 2 sont utilisées (à partir des équations 3.84 et 3.93) :

$$\mathbf{C} = \bar{\mathbf{C}} + 2 \left[ \bar{\mathbf{J}}_0^{-1} \right] \tilde{\mathbf{B}}_{stab} \tilde{\mathbf{u}} \quad (4.58)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{C}) = \mathbf{S}(\bar{\mathbf{C}}) + \mathbf{C}^{SE} \left[ \bar{\mathbf{J}}_0^{-1} \right] \tilde{\mathbf{B}}_{stab} \tilde{\mathbf{u}} \quad (4.59)$$

donnant les forces de stabilisation (équation 3.113) :

$$\mathbf{F}_{stab} = \sum_{i=1}^4 \Gamma_i \mathbf{J}_0 \mathbf{K}_i \mathbf{u} \quad (4.60)$$

où :

$$\mathbf{K}_i = \sum_{j=1}^4 \mathbf{K}_{uu}^{ij} \mathbf{J}_0^T \Gamma_j^T \quad (4.61)$$

$$\mathbf{K}_{uu}^{ij} = \int_{\square} \tilde{\mathbf{B}}_i^T \tilde{\mathbf{C}}_{Stab}^{SE} \tilde{\mathbf{B}}_j \bar{\mathbf{J}}_0 d\square \quad (4.62)$$

et  $\tilde{\mathbf{C}}_{Stab}^{SE}$  le second tenseur d'élasticité des rigidités stabilisatrices :

$$\tilde{\mathbf{C}}_{Stab}^{SE} = \left[ \bar{\mathbf{J}}_0^{-T} \right] \mathbf{C}_{Stab}^{SE} \left[ \bar{\mathbf{J}}_0^{-1} \right] \quad (4.63)$$

L'objectif est maintenant de définir le tenseur des rigidités tangentes  $\mathbf{C}_{Stab}^{SE}$  qui permettra de stabiliser nos modes parasites grâce aux forces de stabilisation qu'il génère. Comme identifié section 4.1.2, les deux modes qui posent problème sont les modes  $\omega_2^z$  et  $\omega_3^z$  (équations 4.14 et 4.17). L'objectif étant d'ajouter une rigidité matérielle supplémentaire hourglass, il faut décider de la direction à laquelle on va associer cette rigidité. On remarque que le paramètre  $E_3$  lié à la compression transverse n'est associé qu'aux modes hourglass problématiques :  $\omega_2^z$  et  $\omega_3^z$  (et  $\omega_4^z$ , mais non pris en compte). Le choix d'utiliser une rigidité hourglass matérielle transverse supplémentaire est donc tout indiqué. Un paramètre  $k_{Stab}$  est introduit de manière à définir un tenseur de rigidité stabilisateur  $\mathbf{C}_{Stab}^{SE}$  :

$$\mathbf{C}_{Stab}^{SE} = k_{Stab} \mathbf{M}_3 \otimes \mathbf{M}_3 \otimes \mathbf{M}_3 \otimes \mathbf{M}_3 \quad (4.64)$$

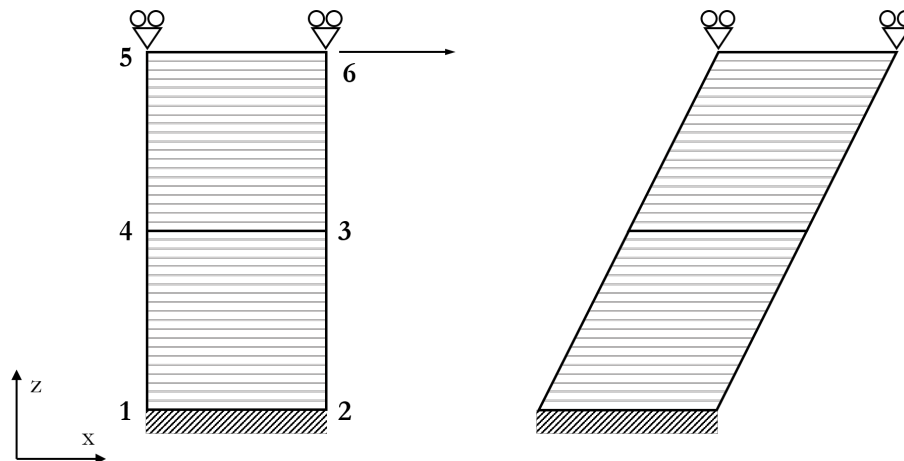
où  $\mathbf{M}_3$  désigne la direction transverse. Un paramètre est donc défini par l'utilisateur afin d'obtenir le comportement désiré. Dans notre cas la valeur choisie pour  $k_{Stab}$  est la plus petite valeur ne faisant pas apparaître de bourrelets lors de la simulation totale de la flexion 3 points, jusqu'à un déplacement 60mm. Ce paramètre est très difficile à définir analytiquement dans notre cas à cause de la complexité du calcul de la rigidité tangente à partir de la loi hyperélastique, des non-linéarités matérielles et des non-linéarités géométriques. Définir  $k_{Stab}$  analytiquement pour tout état de déformation possiblement existant n'est pas possible, il est donc identifié empiriquement.

## 4.3.2 Résultats numériques

### 4.3.2.1 Cisaillement simple sur deux éléments

La simulation de deux éléments en cisaillement simple réalisée section 4.1.1.2 est reproduite avec la méthode de stabilisation hourglass. Le paramètre  $k_{Stab}$  a été identifié à 1.5MPa. Le résultat est donné figure 4.13.

Afin d'analyser les résultats, on observe les déplacements des nœuds, principalement les 3 et 4, pour un patch d'éléments cubiques de coté 6 mm. Les déplacements des nœuds sont indiqués dans le tableau 4.3.



**Figure 4.13** – Cisaillement simple de deux éléments dans le plan  $(x, z)$  avec la méthode de stabilisation hourglass

Nœud	Déplacement x (mm)	Déplacement z (mm)
1	0.0	0.0
2	0.0	0.0
3	2.995	-0.045
4	2.995	0.045
5	6.0	0.0
6	6.0	0.0

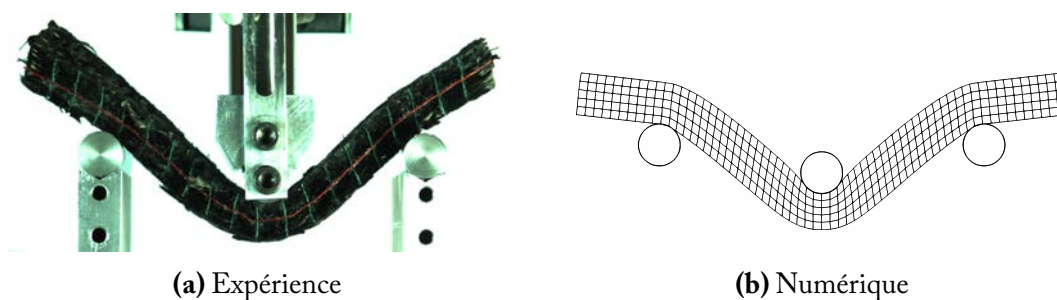
**Tableau 4.3** – Déplacement des nœuds du cisaillement simple figure 4.13



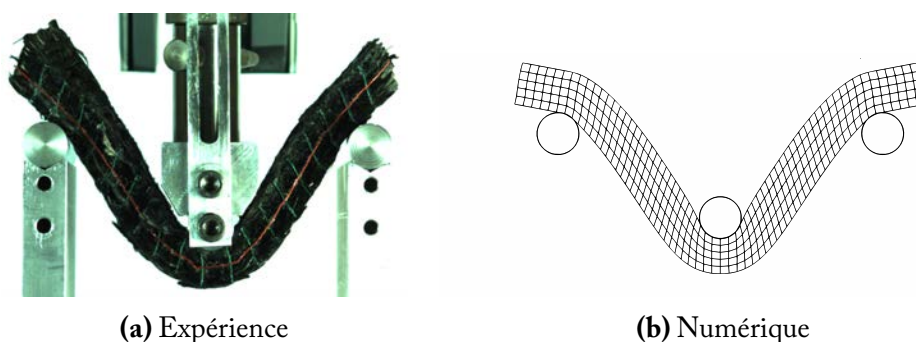
Le résultat indique que le coté 3-4 ne change pas d'orientation par rapport à la direction  $x$  contrairement au résultat avec une formulation classique figure 4.5. La variation de hauteur des nœuds 3 et 4 est encore négligeable mais légèrement supérieure à celle de la méthode F-bar, tableau 4.2. Ce résultat est en accord avec la loi de comportement utilisée et l'essai de cisaillement transverse réalisé.

#### 4.3.2.2 Flexion 3 points

Des calculs de flexion trois points sont réalisés dans les mêmes conditions que ceux décrits section 4.1.1.1. La seule différence est l'utilisation de la méthode de stabilisation. Le paramètre  $k_{Stab}$  a été identifié à 1.5MPa. Le résultat de cette simulation est donnée figures 4.14 et 4.15 pour un déplacement de 40mm et 60mm. Contrairement aux figures 4.3 et 4.4, aucun bourrelet n'apparaît lors de la simulation. Les rigidités des modes hourglass sont maîtrisées et la forme globale de la simulation est cohérente avec l'expérience. On observe même l'apparition dans la partie centrale d'une zone de compression transverse observée expérimentalement qui n'était pas présente figure 4.10 avec la méthode F-Bar.



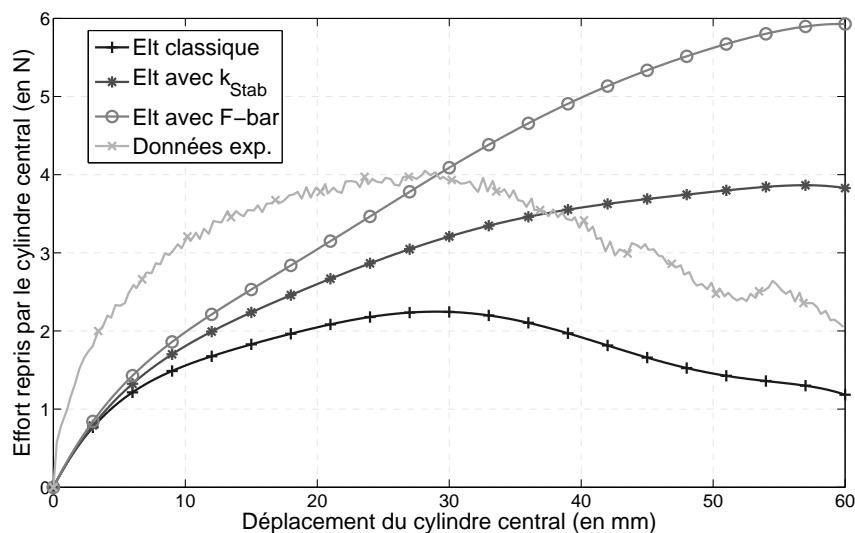
**Figure 4.14** – Essai de flexion trois points sur tissu épais avec méthode  $k_{Stab}$  - flèche de 40mm



**Figure 4.15** – Essai de flexion trois points sur tissu épais avec méthode  $k_{Stab}$  - flèche de 60mm

Afin de confirmer l'augmentation de la rigidité des modes hourglass, la force nécessaire à l'appui central pour atteindre un déplacement de 60mm est tracé figure 4.16 pour

les deux méthodes étudiées. L'effort nécessaire pour atteindre le même déplacement est supérieur avec la méthode F-bar, la méthode avec rigidité supplémentaire se situant entre la courbe d'effort avec un élément classique et celle de la méthode F-bar.



**Figure 4.16** – Effort repris par le cylindre central en fonction de la flèche imposée pour les deux méthodes décrites

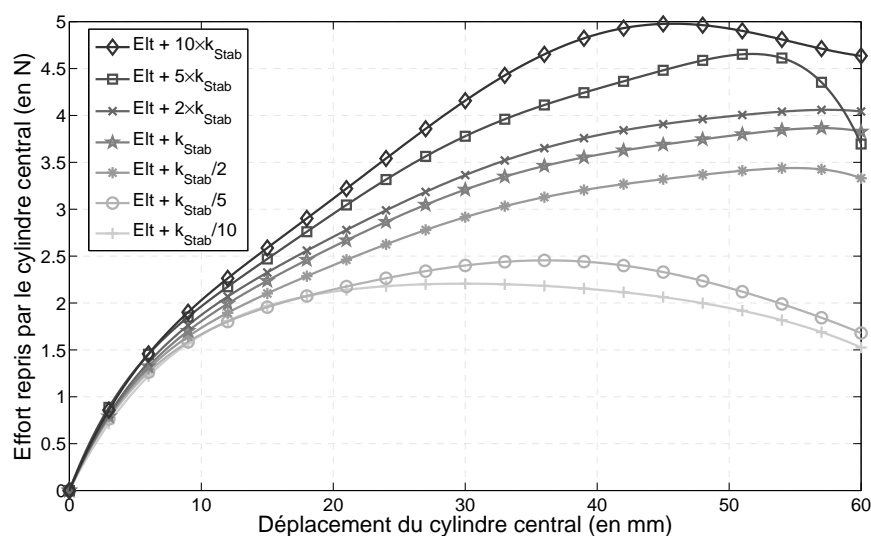
La méthode de stabilisation hourglass est donc efficace pour supprimer l'apparition de bourrelets parasites lors de simulations dominées par de la flexion. Son implémentation est plus complexe que la méthode F-bar mais l'utilisation de l'intégration réduite pour la rigidité stabilisatrice supplémentaire permet de limiter l'augmentation du temps de calcul.

L'inconvénient principal de la stabilisation est le choix du paramètre  $k_{Stab}$ . Pour montrer son influence, des simulations ont été réalisées avec des rigidités de stabilisation hourglass différentes. Le coefficient  $k_{Stab}$  a soit été multiplié par 2, 5 ou 10 ; ou divisé par 2, 5 ou 10. Les courbes d'effort repris par le cylindre central sont tracées figure 4.17.

Ces résultats montrent que la stabilisation apportée par la méthode de stabilisation hourglass dépend de  $k_{Stab}$ , le comportement final étant altéré par celui-ci. Le paramètre  $k_{Stab}$  étant identifié dans ce but, toutes les simulations réalisées avec un paramètre divisé ont laissé apparaître des modes parasites à différents instants de la simulation. Dans le cas où le paramètre a été multiplié l'écart à la référence varie plus ou moins fortement aussi. On retiendra qu'avec un paramètre doublé, l'écart maximal pendant la simulation est de 5.9%.

## 4.4 Bilan du chapitre 4

Dans ce chapitre, des problèmes numériques propres aux tissés secs épais ont été mis en évidence. Lors de simulations dominées par des sollicitations en flexion, des bourre-



**Figure 4.17** – Effort repris par le cylindre central en fonction de la flèche imposée avec la méthode de stabilisation hourglass

*lets* sans aucune réalité physique ont été observés. Une simulation plus simple basée sur le cisaillement simple de deux éléments a montré des déplacements parasites non prévus dans la modélisation de la loi de comportement. Les deux modes de déplacements en compétition pour ces simulations sont les modes de cisaillement transverse et hourglass transverse. Une étude des différentes raideurs en jeu a montré que celle des modes hourglass était plus faible, favorisant leur développement. Afin de résoudre ce problème numérique lié à la forte anisotropie de nos matériaux, deux solutions sont proposées :

- La première solution est la méthode F-bar. Cette solution est simple à implémenter et permet de rigidifier les modes hourglass problématiques. Elle a l'avantage d'être implémentée dans la plupart des codes éléments finis commerciaux. Son inconvénient principal est d'être trop fortement dépendante à l'ensemble des rigidités matérielles.
- La seconde solution est basée sur le raidissement matériel des modes de déplacement hourglass. Une rigidité additionnelle ne s'appliquant qu'aux modes de déplacement problématiques est incorporée, orientée suivant l'épaisseur du matériau. Cette méthode permet d'obtenir des résultats plus proches des observations expérimentales. Elle possède comme inconvénient l'introduction d'un paramètre supplémentaire qui doit être identifié sur un nouvel essai et dont l'influence est importante sur le résultat final. Le paramètre présenté ici est identifié sur un essai de flexion trois points. Un autre avantage de cette seconde solution est de pouvoir être utilisée directement avec la solution proposée pour le verrouillage en tension chapitre 3, car issue de la même philosophie de modélisation.

Finalement, bien que les des solutions suscitées permettent de supprimer les modes de déplacement parasites, des problèmes subsistent en flexion. On peut notamment observer

que la cinématique de la flexion trois points n'est pas parfaitement simulée (figures 4.14 et 4.15 par exemple) : la courbure au niveau de l'appui central et le relèvement des extrémités de la préforme ne correspondent pas entre expérience et simulation. Cette problématique est traitée chapitre 5.

# Chapitre 5

## Prise en compte de la rigidité locale de flexion des renforts tissés épais

*Dans ce cinquième chapitre, la modélisation du comportement en flexion des renforts tissés de composite est abordée. Les hypothèses initiales de la loi hyperélastique, basées sur un comportement associé à la dérivée première du déplacement, montrent des limitations en flexion, notamment lors de la simulation de la flexion trois points. Pour améliorer la modélisation, des rigidités de courbure dans la direction transverse et dans le plan des mèches sont introduites. Le calcul de la courbure, réalisé avec des éléments plaques rotation free, conduit à l'ajout de contributions aux efforts internes liées à la flexion et à une correction de la problématique soulevée.*

### Sommaire

---

<b>5.1 Une rigidité locale en flexion</b>	<b>177</b>
5.1.1 Mise en évidence d'une rigidité locale de flexion	177
5.1.1.1 La flexion trois points	177
5.1.1.2 L'emboutissage hémisphérique	179
5.1.1.3 Le bias extension test	183
<b>5.2 Introduction d'une rigidité de courbure en flexion transverse</b>	<b>184</b>
5.2.1 Définition d'un moment linéaire transversal	184
5.2.2 Plaques à degrés de liberté en déplacement	188

---

5.2.3	Introduction virtuelle de plaques S3 . . . . .	191
5.2.3.1	État de l'art . . . . .	191
5.2.3.2	Des déplacements nodaux à la courbure dans les directions d'anisotropie . . . . .	191
5.2.3.3	Forces internes aux nœuds maitres . . . . .	192
5.2.4	Identification sur la flexion 3 points . . . . .	193
5.2.5	Suppression de la stabilisation des modes transverses . . . . .	197
5.2.6	Simulation de l'emboutissage hémisphérique . . . . .	198
<b>5.3</b>	<b>Introduction d'une composante liée à la flexion des mèches dans le plan .</b>	<b>200</b>
5.3.1	Flexion plan et densité de mèches . . . . .	200
5.3.2	Identification de la flexion des mèches . . . . .	202
5.3.3	Simulation du Bias extension test . . . . .	202
5.3.4	Retour sur l'emboutissage hémisphérique . . . . .	204
<b>5.4</b>	<b>Bilan du chapitre 5 . . . . .</b>	<b>205</b>

---

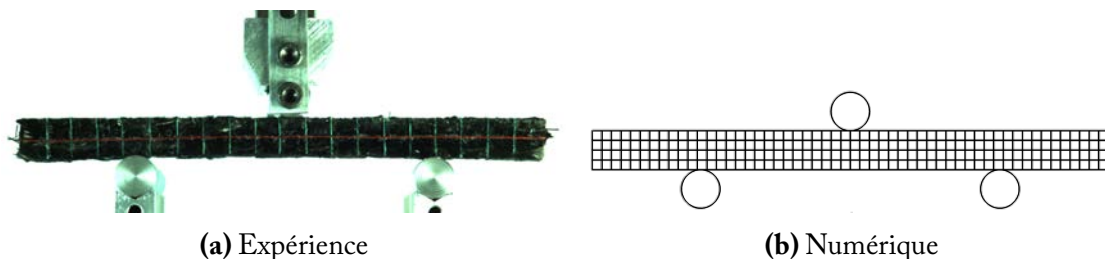
## 5.1 Une rigidité locale en flexion

En plus du développement de modes de déplacement parasites dans l'épaisseur pour des simulations dominées par la flexion (chapitre 4), des problèmes d'absence de rigidité locale de flexion apparaissent. Les mèches constituant le tissé disposent d'une rigidité de flexion propre, par l'intermédiaire des fibres les constituant. Celle-ci sera sollicitée lorsque le tissé lui-même subira une déformation en flexion. Cette rigidité de flexion est locale et n'est donc pas restituée par les modes de déformation usuels associé à la flexion : la traction-compression dans le sens des mèches, le cisaillement transverse et la rigidité de compression transverse (lié au mode hourglass transverse en compétition avec le mode de cisaillement transverse lors de la flexion, chapitre 4). La faible rigidité de cisaillement transverse associée à la faible rigidité de compression transverse empêche la transmission d'efforts de cisaillement suffisants aux éléments voisin, ne reproduisant pas la cinématique de flexion. L'introduction d'une rigidité de flexion n'est pas simple : elle est liée à la courbure (et donc au second gradient du déplacement) alors qu'un élément fini volumique classique à degrés de liberté en déplacement est associé au premier gradient du déplacement seulement. Le manque de rigidité locale de flexion sera mis en évidence section 5.1.1. Une solution sera proposée, basée sur l'introduction d'un moment linéaire de flexion dans l'épaisseur du tissé, section 5.2.1. Ce moment sera calculé grâce à l'introduction de plaques de Kirchhoff virtuelles triangulaires S3 (section 5.2.3). L'élément développé sera appliqué aux cas de la flexion trois points (section 5.2.4), de l'emboutissage hémisphérique (section 5.2.6) et du bias extension test (section 5.3.3).

### 5.1.1 Mise en évidence d'une rigidité locale de flexion

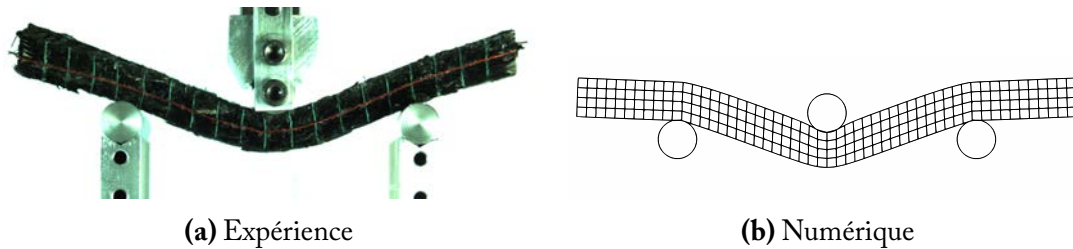
#### 5.1.1.1 La flexion trois points

Des calculs de flexion trois points sont réalisés dans les mêmes conditions que ceux décrits section 4.1.1.1. La seule différence est l'utilisation de la méthode de stabilisation. Le paramètre  $k_{Stab}$  (section 4.3.1) a été identifié à 1.5MPa. Les résultats obtenus par simulation section 4.3.2.2 sont rappelés figures 5.1, 5.2, 5.3 et 5.4 pour des flèches respectivement de 0 mm, 20 mm, 40 mm et 60 mm.

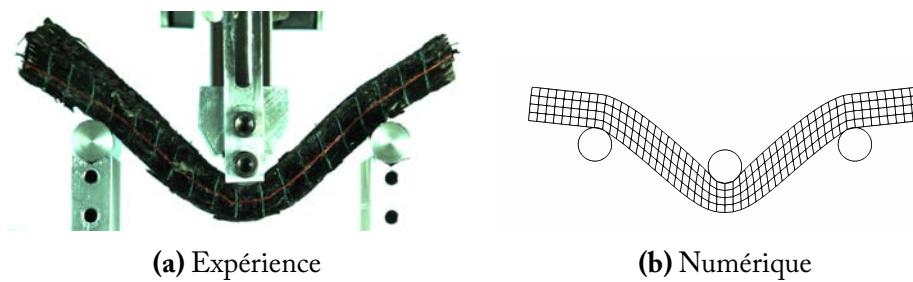


**Figure 5.1** – Essai de flexion trois points sur tissé épais - flèche de 0mm

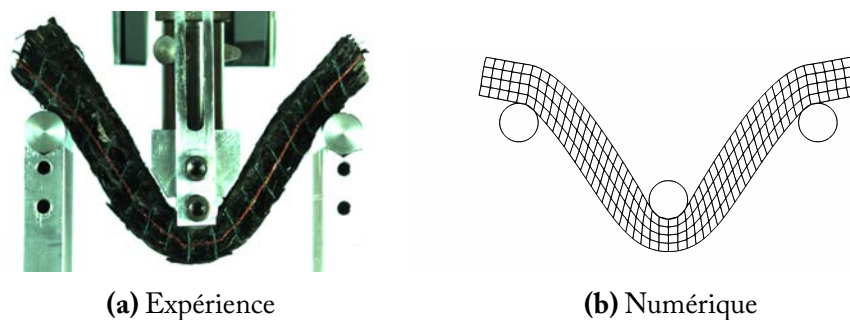
Ces résultats montrent une bonne cohérence globale entre simulation et expérience. Les sections droites restent quasi-verticales et le tissé se rapproche de la théorie des



**Figure 5.2** – Essai de flexion trois points sur tissé épais - flèche de 20mm



**Figure 5.3** – Essai de flexion trois points sur tissé épais - flèche de 40mm



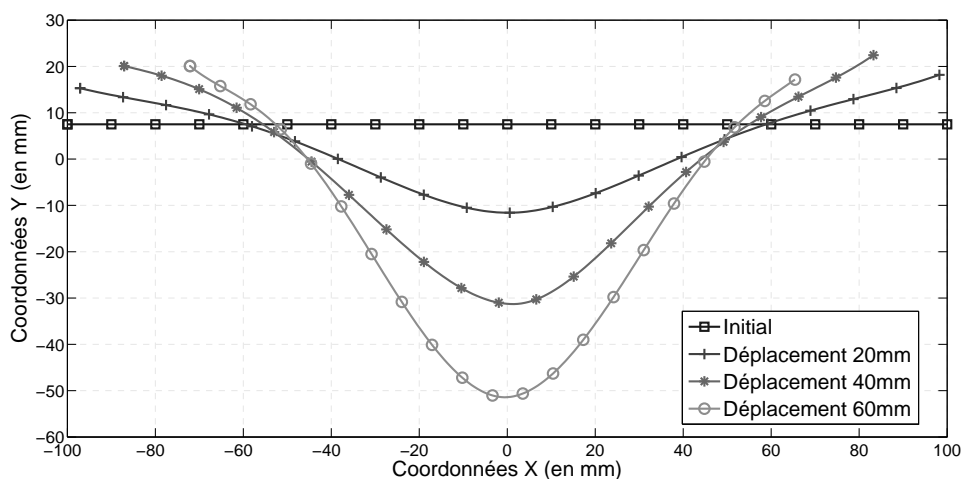
**Figure 5.4** – Essai de flexion trois points sur tissé épais - flèche de 60mm



plaques de Mindlin-Reissner. Cependant deux points restent à améliorer :

- Le premier point concerne la partie les parties non chargées de l'éprouvette, c'est à dire les bouts en dehors des appuis cylindriques. Dans le cas expérimental ces parties se relèvent, ce qui n'est pas le cas de la simulation où elles restent quasi horizontales. Ceci est dû aux faibles rigidités secondaires (cisaillement et compression transverses) qui ne transmettent pas l'effort vers ces parties de l'éprouvette.
- Le second point concerne le rayon de courbure de la partie centrale qui est en contact avec l'appui imposant la flèche. Ce rayon de courbure est plus élevé expérimentalement que dans la simulation.

Pour une meilleure visualisation, il est intéressant de comparer les lignes moyennes des éprouvettes pour les simulations et les essais. Pour le cas expérimental, la ligne moyenne est retrouvée par traitement d'image : soit par filtrage de la ligne rouge centrale posée en début d'essai ou par une méthode de squelettisation. La figure 5.5 donne les coordonnées des lignes moyennes expérimentales pour des flèches de 20 mm, 40 mm et 60 mm.



**Figure 5.5** – Coordonnées de la ligne moyenne expérimentale pour différentes flèches

La figure 5.6 donne les coordonnées les lignes moyennes simulées pour des flèches de 20 mm, 40 mm et 60 mm.

Finalement, les lignes moyennes expérimentales et simulées pour des déplacements de 20 mm et 60 mm sont tracées figure 5.7 pour comparaison. On retrouve les caractéristiques relevées à partir de la forme globale : mauvais rayon de courbure central et non-concordance des parties non chargées.

### 5.1.1.2 L'emboutissage hémisphérique

Dans cette partie, un emboutissage du renfort par un poinçon hémisphérique est étudié. Cet essai est couramment rencontré pour l'étude de la mise en forme des textiles [BOI 95, CHE 01, HAM 08] car il induit une déformation à double courbure à partir

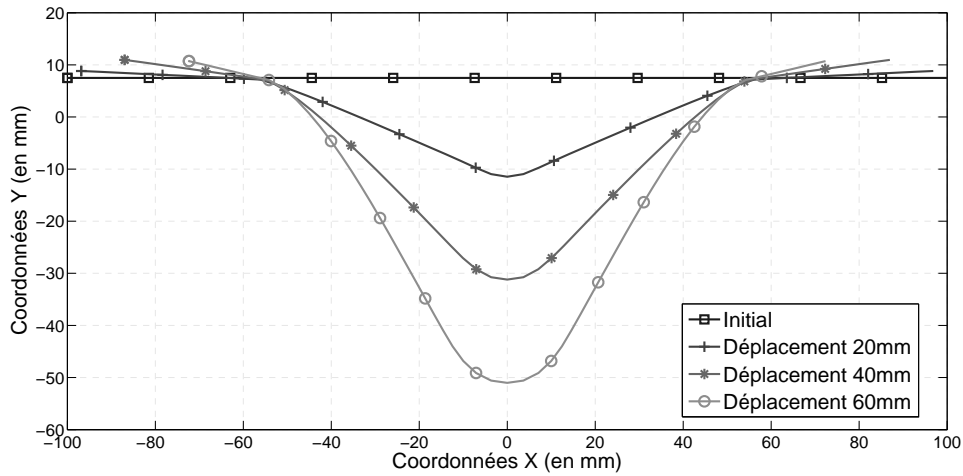


Figure 5.6 – Coordonnées de la ligne moyenne simulée pour différentes flèches

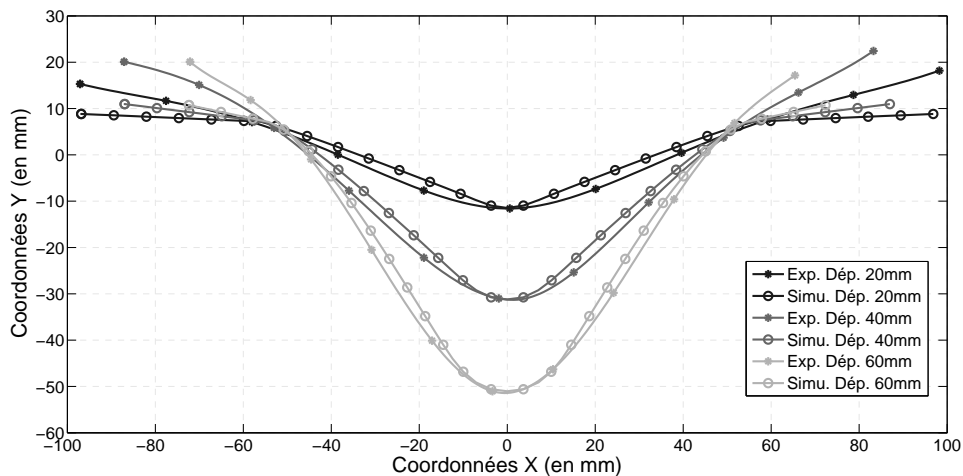
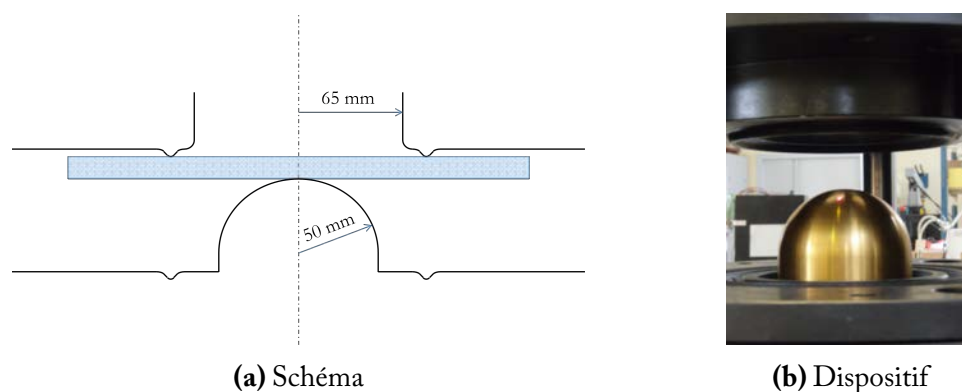


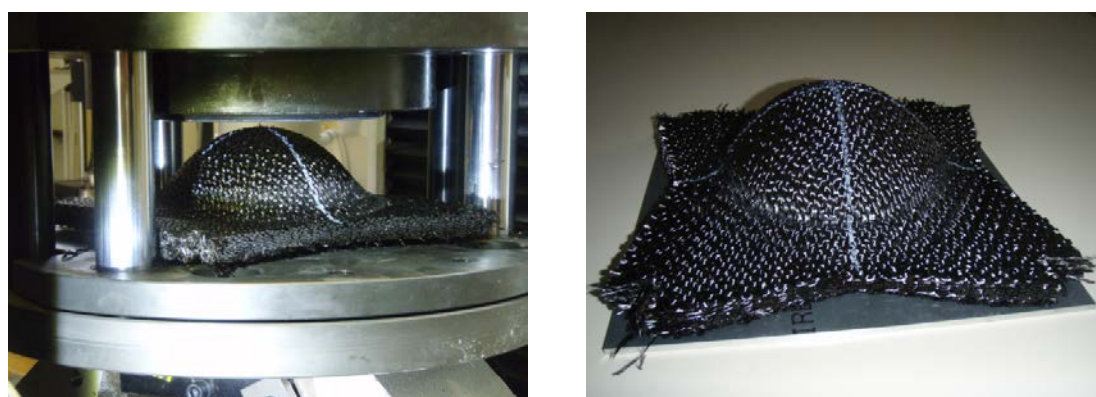
Figure 5.7 – Coordonnées de la ligne moyenne simulée pour différentes flèches

d'un outillage simple. A cause de la spécificité de cet essai, le matériau doit progressivement s'accommoder afin d'obtenir la surface non déformable finale. Suivant sa capacité d'accommodation, des plissements peuvent apparaître en différents points et à diverses avancées du poinçon. Les faibles rigidités en cisaillement des tissus épais devraient permettre au tissu d'épouser la forme finale en limitant le nombre de plis. L'essai d'emboutissage a été réalisé dans le cadre de la thèse de de Luycker [LUY 09b]. La comparaison sera essentiellement qualitative.

L'emboutissage est réalisé grâce au module décrit figure 5.8. La mise en forme a été réalisée sans serre-flanc. L'éprouvette est placée sur le poinçon fixe, puis la matrice descend et vient emboutir la préforme sèche. L'essai s'arrête une fois que le tissé est en compression entre les plans formés par la partie fixe et la partie mobile. Avant démoulage, de la laque est pulvérisée sur la préforme afin de la maintenir en position. La figure 5.9 montre la préforme dans son état final.



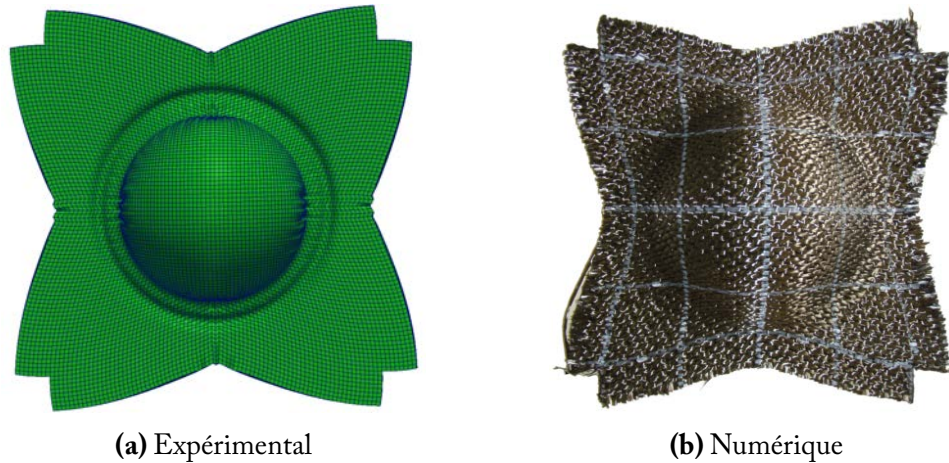
**Figure 5.8** – Caractéristiques du montage d'emboutissage hémisphérique



**Figure 5.9** – Préforme en fin d'emboutissage hémisphérique

Une simulation d'emboutissage hémisphérique est réalisée avec les mêmes caractéristiques géométriques que l'essai. La loi de comportement utilisée est celle décrite section 2.2. La forme finale de la préforme simulée, figure 5.10, est cinématiquement admissible

avec celle obtenue expérimentalement. De plus, la répartition de l'angle de cisaillement est globalement bonne, même dans l'épaisseur du tissé.

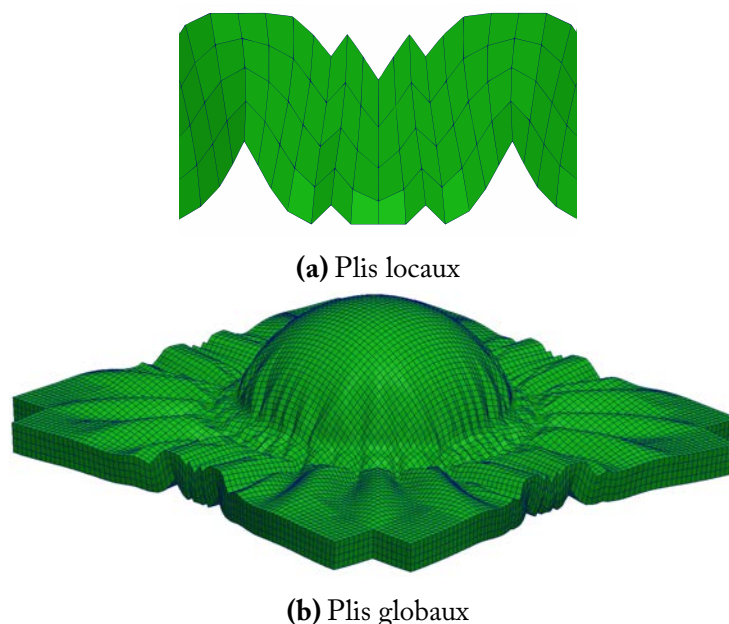


**Figure 5.10** – Vues de dessus de l'éprouvette emboutie par le poinçon hémisphérique

Par contre certains points révèlent une problématique numérique plus complexe. Lors de la simulation d'emboutissage, des plis non visibles expérimentalement apparaissent, avant d'être atténués, voire supprimés, par la phase de compression finale. Ces plis peuvent être classés en deux catégories :

1. Des plis localisés, liés au maillage. Ces plis (représentés figure 5.11a) sont caractérisés par l'apparition d'*accordéons*. C'est à dire que des colonnes d'éléments fortement cisailés transversalement dans un sens alternent avec des colonnes d'éléments fortement cisailés dans le sens opposé. Ceci peut être expliqué par la faible raideur en cisaillement transverse comparativement à la raideur en compression dans la direction des mèches. Lorsque celles-ci se retrouvent comprimées, le matériau flambe facilement et, comme la rigidité de cisaillement transverse est faible, forme ces motifs. La compression longitudinale est ici induite par la difficulté du matériau à épouser la forme non développable. Ces plis sont une indication d'un manque flagrant de rigidité locale de flexion. Si on observe deux éléments voisins avec des cisaillements transverses opposés, l'angle formé par leurs lignes moyennes respectives est très faible. Un matériau réel ne peut atteindre de telles variations d'angle de cisaillement car les mèches disposent d'une rigidité de flexion qui n'autoriserait pas une telle situation. Ces plis sont dits locaux car fortement liés au maillage. Ces plis apparaissent même pour des maillages plus fins.
2. Des plis globaux. Ces plis (représentés figure 5.11b) sont caractérisés par l'apparition d'ondulations sur l'ensemble du tissé. Celles-ci sont tout simplement dues à l'absence d'une rigidité de courbure locale dans la loi de comportement. Comme pour les plis locaux, le matériau flambe, provoquant l'apparition de plis. Ces plis sont nombreux, de courbure importante et non observés lors de la mise en forme réelle. Ils proviennent de l'incapacité des rigidités présentes (compression et ci-

saillement transverses faibles) à représenter correctement la flexion locale du tissu épais.



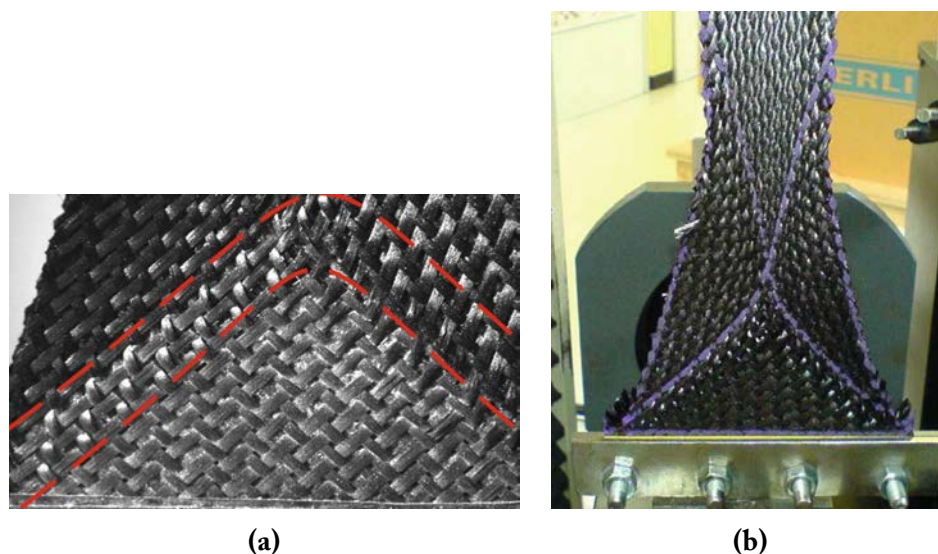
**Figure 5.11** – Plis locaux (a) ou globaux (b) non observés expérimentalement - Tissé embouti à 80%

Les plis observés ici, qu'ils soient locaux ou globaux, proviennent d'une absence de rigidité de courbure du matériau. Les limitations des lois basées sur le premier gradient du déplacement sont atteintes et d'autres pistes doivent être envisagées.

### 5.1.1.3 Le bias extension test

Une hypothèse supplémentaire du bias extension test est souvent omise : la rigidité des mèches est considérée faible. La cinématique sur laquelle se base le dépouillement suppose la définition de zones nettes de cisaillement, demi-cisaillement et non-cisaillement (voir figure 1.27). Cependant, si les mèches du tissu sont trop rigides, les zones de changement d'angle de cisaillement entre partie non-cisaillée et partie demi-cisaillée ou entre partie demi-cisaillée et partie cisaillée ne sont plus nettes. La rigidité de flexion des mèches empêche le changement rapide d'angle de cisaillement et fait apparaître une zone de transition, figure 5.12. Cette zone de transition est directement liée à la rigidité en flexion des mèches. Plus la rigidité en flexion des mèches sera importante, plus la zone de transition sera large. Ce problème a par exemple été traité à l'aide d'une approche du second gradient [FER 14].



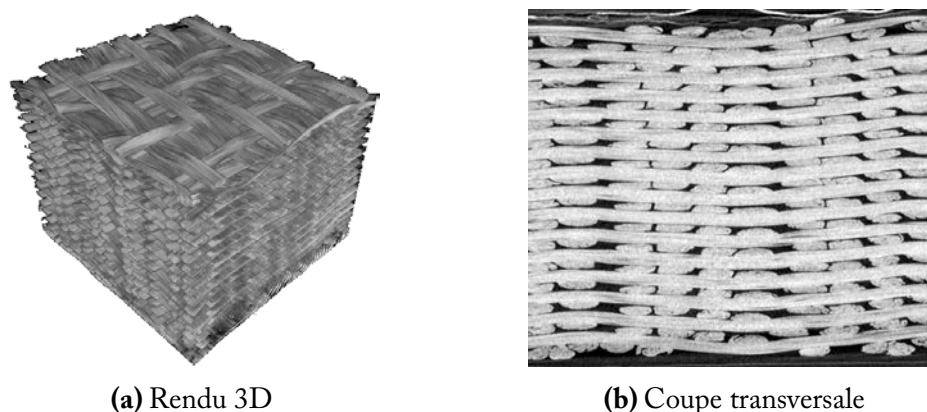


**Figure 5.12** – Frontière entre deux zones de cisaillement constant (a) et courbure des mèches (b) [FER 14]

## 5.2 Introduction d'une rigidité de courbure en flexion transverse

### 5.2.1 Définition d'un moment linéaire transversal

Les tissés épais sont constitués, similairement aux renforts 2D, de l'entremêlement de fils de chaîne et de trame. Celles-ci croisent plusieurs plans de mèches de chaîne dans l'épaisseur du matériau. A la différence des matériaux multicouches qui ne sont que la superposition de tissés 2D, les tissés épais ont les couches voisines liées. Ces structures peuvent être vues comme l'entrelacement de plusieurs couches (voir figure 5.13)



**Figure 5.13** – Exemple de structure de renfort interlock 2.5D

Du point de vue de la flexion, les tissés 2D sont généralement modélisés grâce à des

coques ou plaques où la rigidité associée est explicitement introduite. De cette manière aucun problème identique à celui relevé section 5.1.1 ne peut être observé. Les éléments volumiques ne demandent pas la définition explicite d'une rigidité de courbure. L'introduction de celle-ci est plus complexe. Pour les renforts épais, on peut imaginer que, de manière identique aux 2D, chaque couche constituant le matériau doit disposer d'une rigidité de flexion propre. Ces structures peuvent être vues de manière simpliste, du point de vue flexion, comme un empilement de plaques glissant les unes contre les autres. C'est en partant de cette vision que vont être introduites des rigidités associées aux sollicitations de flexion. L'objectif est donc d'intégrer une résistance à la courbure de chaque couche. Chaque couche est initialement orthogonale à la direction transverse, d'où le nom de flexion transverse. Supposons que la courbure dans un élément soit connue, le potentiel d'énergie élastique associé à la flexion peut être écrit :

$$\Pi_{int} = \frac{1}{2} \int_{A_e} \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{M}(\boldsymbol{\chi}) \, dA \quad (5.1)$$

où  $\boldsymbol{\chi}$  est la courbure de la plaque et  $\mathbf{M}$  le moment de flexion, fonction de la courbure et de l'épaisseur  $t_e$  de l'élément subissant une flexion. L'intégrale est réalisée sur l'aire du plan en flexion de l'élément  $A_e$ , orthogonal à la direction portée par l'épaisseur (direction transverse). Si l'on venait à utiliser un potentiel de ce type dans notre cas, des problèmes de discrétisation dans l'épaisseur seraient rencontrés. Étant donné que le moment de flexion est directement lié à l'épaisseur d'un élément structural et que l'on désire calculer la courbure de chaque couche du renfort, un élément par couche devra être utilisé. L'utilisation d'un élément par couche rendrait la modélisation coûteuse en temps de calcul et trop contraignante pour l'utilisateur. L'objectif est de pouvoir modéliser le comportement en flexion de notre tissé quel que soit le nombre d'éléments finis ou de couches de chaînes et trames dans l'épaisseur. De plus, les paramètres liés à la rigidité de flexion ne doivent pas nécessiter de modification en fonction de la discrétisation transverse choisie. On pourrait alors utiliser des densités, telle que la densité de couche dans l'épaisseur, comme ce qui sera réalisé pour la flexion des mèches section 5.3. Mais, cela implique une intégration réduite dans l'épaisseur qui cause problème à cause des faibles rigidités transverses des tissés épais. Afin de résoudre ce problème un moment linéaire de flexion est introduit :

$$\mathbf{M} = \int_t \mathbf{M}_l \, ds \quad (5.2)$$

tel que le moment de flexion transverse total du renfort  $\mathbf{M}$  soit l'intégrale du moment de flexion linéaire  $\mathbf{M}_l$  sur l'épaisseur  $t$ . L'utilisation de cette quantité peut se justifier en observant une colonne d'éléments. Le potentiel élastique associé à la flexion pour l'utilisation de  $n$  éléments superposés dans l'épaisseur est :

$$\Pi_{int}^n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{A_e} \boldsymbol{\chi}_i^T \mathbf{M}_i(\boldsymbol{\chi}_i) \, dA \quad (5.3)$$

où l'indice  $i$  signifie que la quantité appartient à la couche  $i$ . Dans ce cas, la courbure et le moment varient par blocs car ils sont constants à l'intérieur de chaque élément. Le matériau étant épais, on désire que la courbure soit variable continument dans l'épaisseur afin de représenter au mieux le comportement du matériau. Cela revient alors à faire tendre le nombre de couches vers l'infini.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_{int}^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{A_e} \boldsymbol{\chi}_i^T \mathbf{M}_i(\boldsymbol{\chi}_i) dA \quad (5.4)$$

Si on introduit le moment par unité de longueur  $\mathbf{M}_{l_i}$  du bloc  $i$  :

$$\mathbf{M}_{l_i}(\boldsymbol{\chi}_i) = \frac{\mathbf{M}_i(\boldsymbol{\chi}_i)}{t_i} = \frac{t \mathbf{M}_i(\boldsymbol{\chi}_i)}{n} \quad (5.5)$$

où  $t_i$  est l'épaisseur d'une couche à courbure constante. On obtient alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_{int}^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t}{2n} \sum_{i=1}^n \int_{A_e} \boldsymbol{\chi}_i^T \mathbf{M}_{l_i}(\boldsymbol{\chi}_i) dA \quad (5.6)$$

où l'on reconnaît une intégrale de Riemann. En supposant que le moment de flexion par unité de longueur soit continu dans l'épaisseur, on peut passer à une intégrale sur l'épaisseur du tissé :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_{int}^n = \frac{1}{2} \int_t \int_{A_e(s)} \boldsymbol{\chi}(s)^T \mathbf{M}_l(\boldsymbol{\chi}, s) dA ds \quad (5.7)$$

avec  $s$  la coordonnée de l'épaisseur du tissé, orientée par la direction  $\mathbf{M}_3$  dans la loi utilisée (section 2.2). Ce potentiel élastique est associé à l'épaisseur totale et permet de définir un nouveau potentiel d'énergie élastique qui utilise un moment de flexion linéaire :

$$\Pi_{int} = \frac{1}{2} \int_s \int_{A_e(s)} \boldsymbol{\chi}(s)^T \mathbf{M}_l(\boldsymbol{\chi}, s) dA ds \quad (5.8)$$

L'intérêt du nouveau potentiel 5.8 est que, grâce à l'utilisation d'un moment par unité de longueur  $\mathbf{M}_l$  plutôt qu'un moment classique  $\mathbf{M}$ , il n'est plus dépendant de l'épaisseur de l'élément dans lequel il intervient. La discrétisation dans l'épaisseur du renfort peut alors être laissée à la discrétion de l'utilisateur et n'est plus bornée à un nombre précis de couches d'éléments. De plus, le moment linéaire permet d'observer une variation continue de la courbure.

Afin d'obtenir un élément simple on suppose que la courbure est constante dans le plan de flexion de l'élément, ce qui revient à considérer un point d'intégration au centre de la surface en flexion :

$$\Pi_{int} = \frac{1}{2} \int_s \boldsymbol{\chi}(s)^T \mathbf{M}_l(\boldsymbol{\chi}, s) A_e(s) ds \quad (5.9)$$

Il reste alors à effectuer l'intégrale sur l'épaisseur qui est réalisée par intégration numérique :

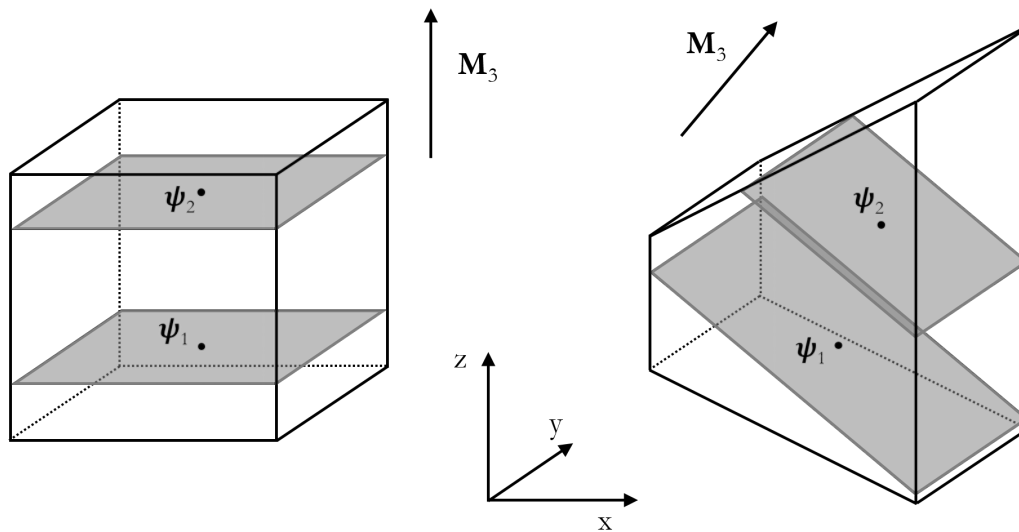


$$\Pi_{int} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i \chi(\psi_i)^T \mathbf{M}_l(\chi, \psi_i) A_e(\psi_i) J_s \quad (5.10)$$

pour  $n$  points d'intégration,  $\omega_i$  le poids associé au point d'intégration et  $J_s$  le jacobien de la transformation des coordonnées associées à la direction  $\mathbf{M}_3$  vers un élément parent de coordonnée  $\psi_i$  dans l'intervalle  $[-1, 1]$  :

$$J_s = \left\| \frac{\partial s}{\partial \psi} \right\| \quad (5.11)$$

Il est alors nécessaire d'évaluer la courbure pour des zones discrètes de l'élément en fonction du nombre de points d'intégration. Ces zones sont liées au repère lagrangien et donc immobiles matériellement pendant la transformation. Par exemple, pour une intégration avec deux points de Gauss, suffisante dans le cas d'un matériau élastique, les zones de courbure constante à calculer sont représentées figure 5.14. Dans le premier le cas, l'élément est non distordu initialement avec une direction d'intégration  $\mathbf{M}_3$  orientée suivant  $z$ , tandis que le second cas montre un élément distordu avec une direction d'intégration aléatoire.

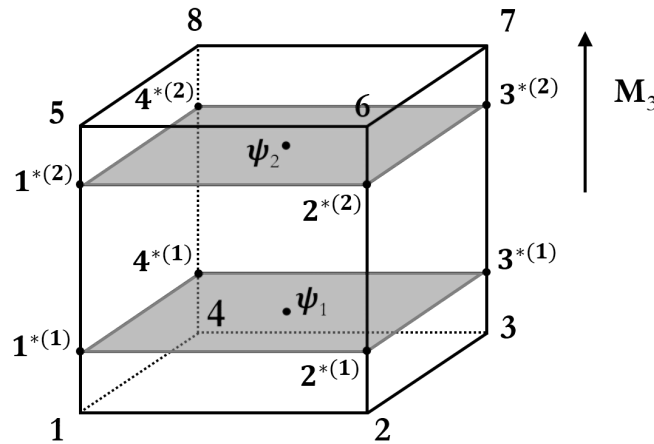


**Figure 5.14** – Zones de calcul de la courbure pour une intégration avec deux points de Gauss. Cas d'un élément non distordu et d'un élément distordu initialement

Il est important de noter que, dans le cas des éléments distordus initialement, la représentation des plans associés aux points d'intégrations de la configuration physique vers la configuration parente, et inversement, donne des surfaces courbes. L'utilisation de l'intégration réduite pour chaque plan permet de réaliser une meilleure approximation en utilisant le parallélogramme équivalent lors de l'intégration [ARU 95] et en projetant la surface sur un plan.

### 5.2.2 Plaques à degrés de liberté en déplacement

Afin de calculer la courbure, supposée constante pour chaque surface grisée de la figure 5.14, des plaques de kirchhoff à degrés de liberté en déplacement seulement, dites *rotation free*, sont utilisées. Ces plaques permettent de calculer des courbures grâce aux autres éléments plaque les entourant. Des nœuds virtuels dits esclaves sont introduits aux points où les surfaces grisées coupent l'élément volumique, par opposition aux nœuds appelés maîtres définissant la brique. La figure 5.15 reprend un exemple de numérotation des nœuds esclaves dans le cas d'une intégration avec deux points de Gauss.



**Figure 5.15** – Nœuds virtuels esclave et nœuds maîtres pour une intégration avec deux points de Gauss

Les nœuds maîtres suivent une numérotation classique tandis qu'une  $\star$  en exposant indique un nœud esclave, le numéro entre parenthèses indiquant le numéro du point d'intégration associé. Par définition, les nœuds maîtres permettent de calculer la position des nœuds esclaves grâce aux fonctions d'interpolation lagrangiennes classiques. Les coordonnées  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$  d'un point de l'élément peuvent être exprimées grâce aux coordonnées  $\mathbf{x}^A = (x_1^A, x_2^A, x_3^A)^T$  des nœuds de la brique :

$$x_i = \sum_{A=1}^8 N^A(\boldsymbol{\xi}) x_i^A \text{ avec } N^A = \frac{1}{8} \left(1 + \xi_1 \xi_1^A\right) \left(1 + \xi_2 \xi_2^A\right) \left(1 + \xi_3 \xi_3^A\right) \quad (5.12)$$

où  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T = (\xi, \eta, \zeta)^T$  sont les coordonnées isoparamétriques du point considéré, les  $\boldsymbol{\xi}^A = (\xi_1^A, \xi_2^A, \xi_3^A)^T$  sont les vecteurs contenant les coordonnées des sommets du cube biunitaire. Les coordonnées isoparamétriques des nœuds esclaves peuvent être trouvées initialement par considérations géométriques dans le repère parent. Par conséquent les coordonnées, ou déplacement des nœuds esclaves d'un point d'intégration  $i$  peuvent être exprimées grâce aux nœuds maîtres :

$$\mathbf{u}^{*(i)} = \mathbf{G}\mathbf{u} \quad (5.13)$$

avec  $\mathbf{u}^{*(i)}$  les déplacements des nœuds esclaves de la couche  $\psi_i$  :

$$\mathbf{u}^{*(i)} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^{*(i)} \\ \mathbf{u}_2^{*(i)} \\ \mathbf{u}_3^{*(i)} \\ \mathbf{u}_4^{*(i)} \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

où le vecteur  $\mathbf{u}_j^{*(i)}$  désigne les déplacements associé à un nœud esclave  $j$  pour un point d'intégration  $\psi_i$ . Le vecteur des déplacements maître  $\mathbf{u}$  est formé de manière similaire. La matrice  $\mathbf{G}$  est remplie avec les fonctions d'interpolation calculées au point désiré tel que :

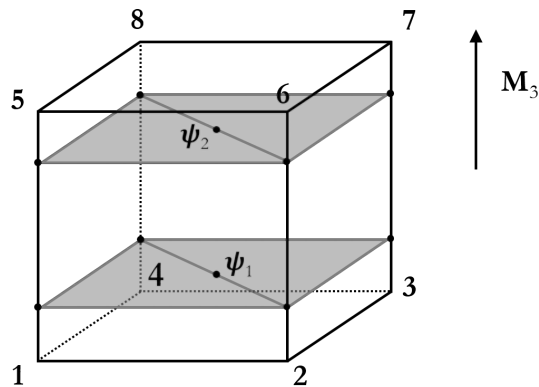
$$\mathbf{u}_j^{*(i)} = \sum_{A=1}^8 N^A(\xi_j^{*(i)}) \mathbf{u}^A \quad (5.15)$$

avec  $\xi_j^{*(i)}$  les coordonnées isoparamétriques du nœud esclave  $j$  du point d'intégration  $\psi_i$  et  $\mathbf{u}^A$  le vecteur déplacement du nœud  $A$ .

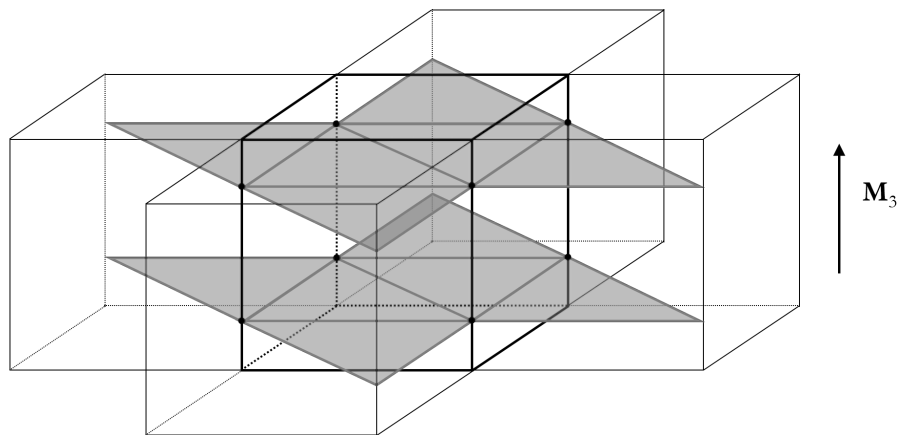
Des plaques sont donc introduites, basées sur ces nœuds esclaves virtuels afin de calculer la courbure, le moment puis les efforts internes associés. Deux solutions sont évoquées dans la suite :

- La première utilise un découpage du quadrilatère formé par les nœuds d'un point d'intégration  $\psi_i$  en deux triangles, puis l'utilisation d'éléments S3. La figure 5.16 représente la situation. Deux solutions existent pour la découpe en deux triangles, suivant chaque diagonale. L'équivalence des deux solutions a été vérifiée avec diverses simulations ;
- La seconde solution utilise directement un quadrangle S4 afin de calculer les efforts internes. Cette solution, qui semble normalement plus appropriée, est évoquée ici afin de montrer que des modes de déplacement à énergie nulle sont présents et non compatibles avec les problèmes de plissement soulevés. Cet inconvénient est détaillé annexe G.

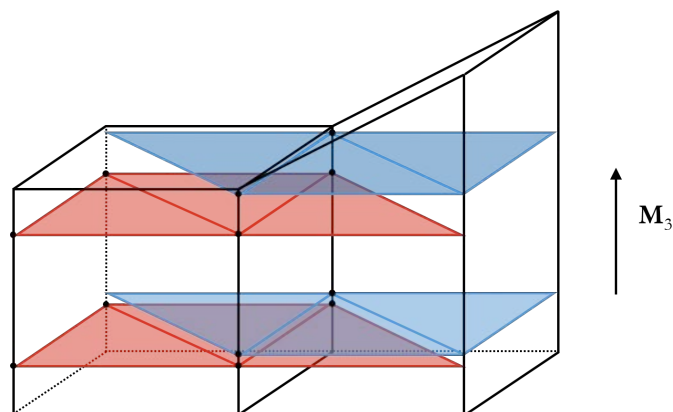
Il est important de bien visualiser l'emplacement des plaques *rotation free* voisines qui vont permettre le calcul de la courbure dans un élément volumique. Dans le cas d'un maillage régulier, ce qui est très fréquemment le cas pour la simulation des renforts tissés qui sont initialement sous forme de plaques, on voit l'apparition de *nappes* d'éléments plaques. Les plaques voisines de calcul de courbure se superposent aux plaques internes de l'élément voisin (figure 5.17). Par contre, lorsque le maillage n'est pas régulier, les plaques voisines d'un élément et internes de l'élément voisin ne coïncident plus (figure 5.18).



**Figure 5.16** – Découpage des surfaces d'intégration  $\psi_i$  dans le cas de l'utilisation d'éléments S3



**Figure 5.17** – Emplacements des éléments S3 internes et voisins pour le cas d'un maillage régulier initialement



**Figure 5.18** – Emplacements des éléments S3 internes et voisins pour le cas d'un maillage non régulier initialement

## 5.2.3 Introduction virtuelle de plaques S3

### 5.2.3.1 État de l'art

L'objectif principal du développement d'éléments à rigidité en flexion et degrés de libertés en déplacement, dits *rotation free*, est de réduire le cout numérique des simulations. Le temps de simulation est la principale contrainte des codes à résolution explicite. La volonté d'introduire à moindre coût la flexion dans les logiciels éléments finis a conduit au développement quasi simultanée de triangle *rotation free* pour la simulation de l'emboutissage de métaux et du retour élastique par [ONA 93, BRU 93, RIO 93]. On y retrouve l'introduction d'un patch d'élément (l'élément étudié associé à ses voisins directs) qui va permettre de calculer une courbure constante à l'intérieur de chacun de ceux-ci. Ces éléments ont été inclus dans des codes commerciaux (RADIOSS<sup>®</sup>, Stampack<sup>®</sup>) et montrent d'excellents résultats [BRU 95, ROJ 98]. Un papier récapitulant les principaux développements sur les plaques triangulaires à degrés de liberté en déplacement a été proposé par [ONA 00].

### 5.2.3.2 Des déplacements nodaux à la courbure dans les directions d'anisotropie

Les détails de la formulation des éléments plaques S3 utilisés sont précisés annexe F. L'objectif de cette formulation est de calculer la courbure courante dans les directions principales des mèches de chaîne  $M_1$  et de trame  $M_2$ , pour cela :

- Prise en considération d'un patch d'éléments triangulaires S3, c'est-à-dire le triangle dans lequel on désire calculer la courbure ainsi que les éventuels triangles voisins, figure 5.19. Les déplacements de chaque nœud du patch sont calculés et forment le vecteur  $\mathbf{u}^p$ .

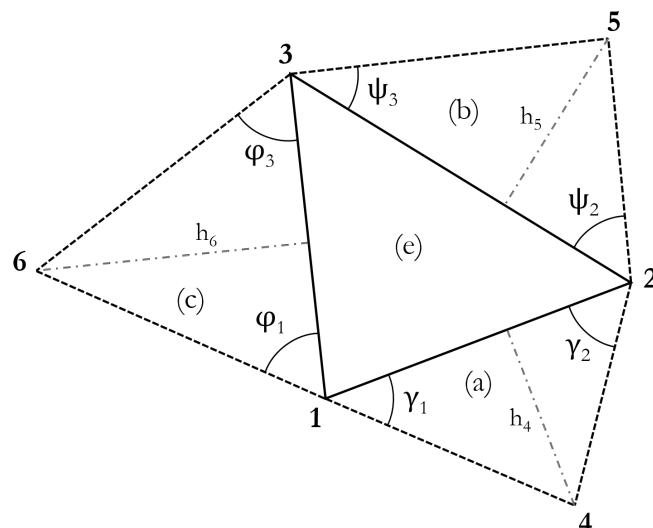


Figure 5.19 – Élément S3 étudié (e) entouré de trois voisins

- Calcul des rotations de corps rigide  $\boldsymbol{\alpha}$  autour de chaque côté de l'élément étudié en utilisant les fonctions d'interpolation classiques (équation F.14). La matrice  $\mathbf{C}$ , détaillée équation F.25, donne la relation :

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{C}\mathbf{u}^p \quad (5.16)$$

- Calcul des angles de flexion  $\boldsymbol{\theta}^b$  grâce aux rotations de corps rigide. La matrice  $\mathbf{H}$ , détaillée équation F.37, donne la relation :

$$\boldsymbol{\theta}^b = \mathbf{H}\boldsymbol{\alpha} \quad (5.17)$$

- Calcul des courbures dans les directions des mèches  $\boldsymbol{\chi}_f$  avec les angles de flexion puis obtention du moment de flexion linéaire. La matrice  $\mathbf{R}$ , détaillée équation F.39, donne la relation :

$$\boldsymbol{\chi}_f = \mathbf{R}\boldsymbol{\theta}^b \quad (5.18)$$

Les courbures dans les directions d'anisotropie sont donc obtenues en fonctions des déplacements aux nœuds du patch d'éléments S3.

### 5.2.3.3 Forces internes aux nœuds maitres

Une fois les courbures calculées, les forces internes globales peuvent être obtenues. Dans un premier temps les forces internes esclaves du point d'intégration  $\boldsymbol{\psi}_i$  sont calculées puis interpolées aux nœuds maitres. En revenant au potentiel élastique global de l'élément équation 5.9, on peut écrire pour un élément S3 intégré dans un élément volumique :

$$\Pi_i^* = \frac{1}{2} \boldsymbol{\chi}_f^T \mathbf{M}_{fl} A_e \quad (5.19)$$

où  $\mathbf{M}_{fl}$  est le moment de flexion par unité de longueur associé aux courbures dans les directions de mèche. On calcule alors sa variation, afin de faire apparaître les efforts internes esclaves  $\mathbf{F}_i^{*(j)}$  associés à l'élément S3 numéro ( $j$ ) de la couche du point d'intégration  $\boldsymbol{\psi}_i$  :

$$\delta \Pi_i^{*(j)} = \delta \boldsymbol{\chi}_f^T \mathbf{M}_{fl} A_e \quad (5.20)$$

$$= [\delta \mathbf{u}^p]^T \mathbf{F}_i^{*(j)} \quad (5.21)$$

La rigidité de flexion  $D$ , liant la courbure au moment de flexion linéaire, est définie de la façon suivante :

$$\mathbf{M}_{fl} = D(\boldsymbol{\chi}_f) \boldsymbol{\chi}_f \quad (5.22)$$

où cette rigidité peut être choisie non linéaire en fonction de la courbure totale. Finalement les forces internes générées au niveau des nœuds virtuels esclaves par un élément  $j$  de la couche  $\psi_i$  s'exprime :

$$\mathbf{F}_i^{*(j)} = A_e \mathbf{C}^T \mathbf{H}^T \mathbf{R}^T D \mathbf{R} \mathbf{H} \mathbf{C} \mathbf{u}^{p(j)} \quad (5.23)$$

avec  $\mathbf{u}^{p(j)}$  les déplacements nodaux du patch associé à l'élément  $j$ . Ces efforts doivent être interpolés aux nœuds maîtres afin de résoudre le problème élément fini global. Sachant que deux éléments S3 minimum sont nécessaires par couche, les forces internes totales de flexion dans l'élément brique sont :

$$\mathbf{F}_{int}^{Flex} = \sum_{i=1}^n \omega_i \left( \mathbf{G}_i^{(1)T} \mathbf{F}_i^{*(1)} + \mathbf{G}_i^{(2)T} \mathbf{F}_i^{*(2)} \right) J_s \quad (5.24)$$

où les  $\mathbf{G}_i^{(j)}$  sont les matrices d'interpolation des déplacements nodaux maîtres vers les déplacements nodaux esclave de l'élément  $j$  associé au point d'intégration  $i$  considéré, telles que définies équation 5.13.

## 5.2.4 Identification sur la flexion 3 points

Afin d'identifier la rigidité de flexion  $D$ , définie équation 5.22, un processus doit être mis en place. Les sollicitations liées à la flexion et les composantes liées à sa bonne représentativité sont nombreuses ce qui rend l'identification de  $D$  complexe. L'identification ne peut être réalisée directement, mais par optimisation inverse. L'identification du comportement en flexion est réalisée sur les essais de flexion trois points car plus adaptés aux renforts épais (voir section 1.3.3.8).

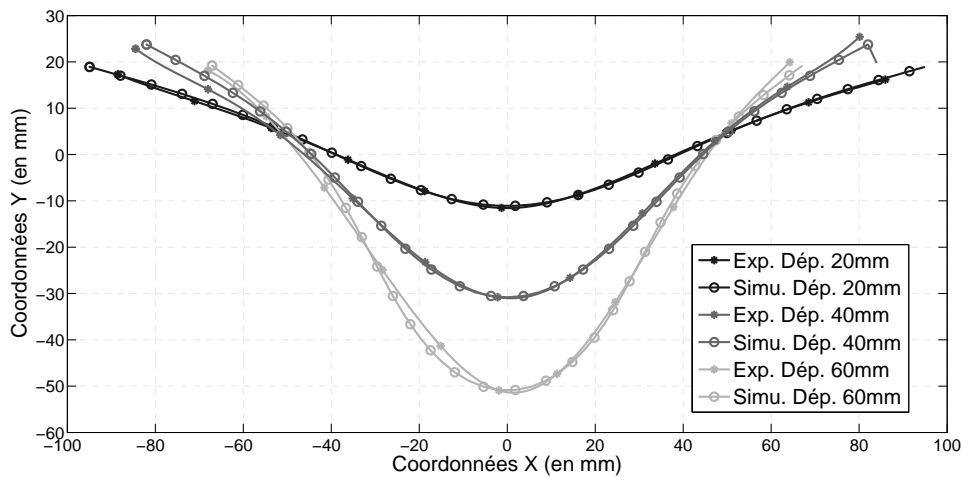
Pour réaliser l'optimisation inverse, l'algorithme de Levenberg-Marquardt est choisi pour rapprocher la ligne moyenne obtenue par simulation de celle obtenue expérimentalement. Cet algorithme possède l'avantage de combiner l'algorithme de Gauss-Newton et l'algorithme du gradient, ce qui lui permet de converger même si le point de départ est pris loin du minimum. La régression est réalisée grâce à la méthode des moindres carrés, somme de la différence au carré des points expérimentaux et numériques. La ligne moyenne expérimentale est obtenue après traitement d'image.

La loi de comportement, équation 5.22, est dans un premier temps prise linéaire, puis la rigidité de flexion  $D$  optimale est trouvée individuellement pour des flèches de 20 mm, 40 mm et 60 mm. Ces valeurs optimales sont listées dans le tableau 5.1 pour les directions chaîne  $M_1$  et trame  $M_2$ .

Les lignes moyennes des simulations réalisées sans trame avec les paramètres listés tableau 5.1 sont tracées figure 5.20 pour comparaison avec les données expérimentales. Contrairement aux résultats observés figure 5.7, la courbure centrale est mieux suivie par la simulation et, surtout, les bords non chargés de l'éprouvette remontent grâce à l'introduction d'une rigidité locale de flexion. Ceci permet de confirmer l'utilité de la formulation avec rigidité de flexion introduite.

Flèche	$D_{Chaîne}$ (en $N.mm$ )	$D_{Trame}$ (en $N.mm$ )
20 mm	21.29	11.60
40 mm	8.18	7.95
60 mm	4.04	4.22

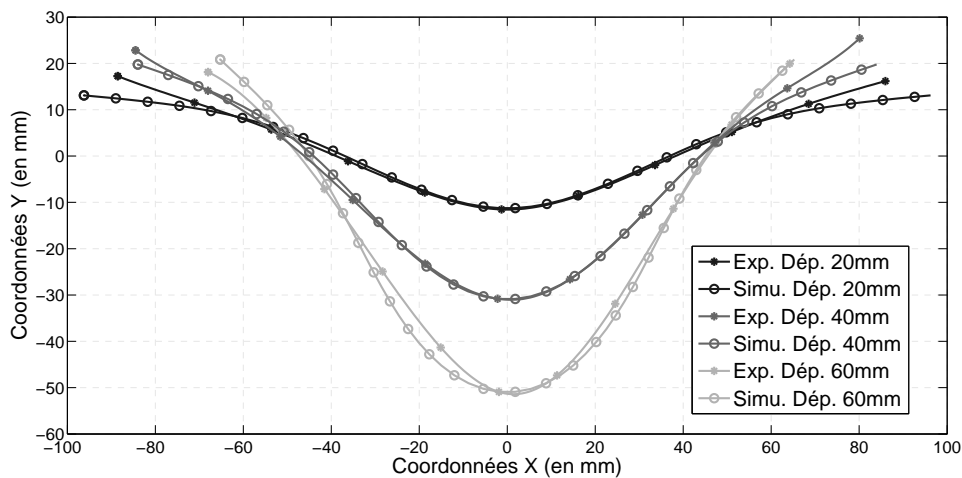
**Tableau 5.1** – Identification d'une rigidité de flexion pour une flèche donnée



**Figure 5.20** – Comparaison des lignes moyennes expérimentales et simulées sens trame avec une loi de comportement linéaire et optimisations discrètes



Les valeurs obtenues tableau 5.1 sont spécifiques à une flèche de flexion trois points. Elles permettent de confirmer la non-linéarité de la loi de comportement entre courbure et moment linéaire de flexion. Deux types d'identification simultanés sur les trois flèches (20mm, 40mm et 60mm) sont conduits : la première avec une loi linéaire, la seconde avec une loi non linéaire. L'identification avec la loi linéaire donne des rigidités de flexion par unité de longueur de  $5.40 N.m$  dans le sens chaîne et de  $5.80 N.m$  dans le sens trame. Les lignes moyennes associées sont tracées figure 5.21. Cette identification permet de voir que la ligne moyenne au niveau des bords libres est moins bien représentée que lors des identifications individuelles, surtout pour les flèches de 20mm et 40mm.



**Figure 5.21** – Comparaison des lignes moyennes expérimentales et simulées sens trame avec une loi de comportement linéaire et optimisation globale

Pour le cas de l'identification avec une loi non linéaire la loi de comportement suivante est retenue :

$$\mathbf{M}_{fl} = \begin{cases} (D_0 - D_1 |\chi_f|) \chi_f & \text{Si } D_0 - D_1 \chi_f > D_{Limite} \\ D_{Limite} \chi_f & \text{Sinon} \end{cases} \quad (5.25)$$

L'introduction d'une rigidité minimale limite  $D_{Limite}$  permet d'éviter que la rigidité tangente de flexion ne devienne négative pour des valeurs extérieures à l'intervalle d'identification. La valeur  $D_{Limite}$  est choisie sur un cas extrême, le cas de la flèche de 60mm pour nous où la courbure centrale est maximale. Les deux autres paramètres sont identifiés comme précédemment par optimisation inverse. Les paramètres obtenus pour la loi non linéaire sont donnés tableau 5.2.

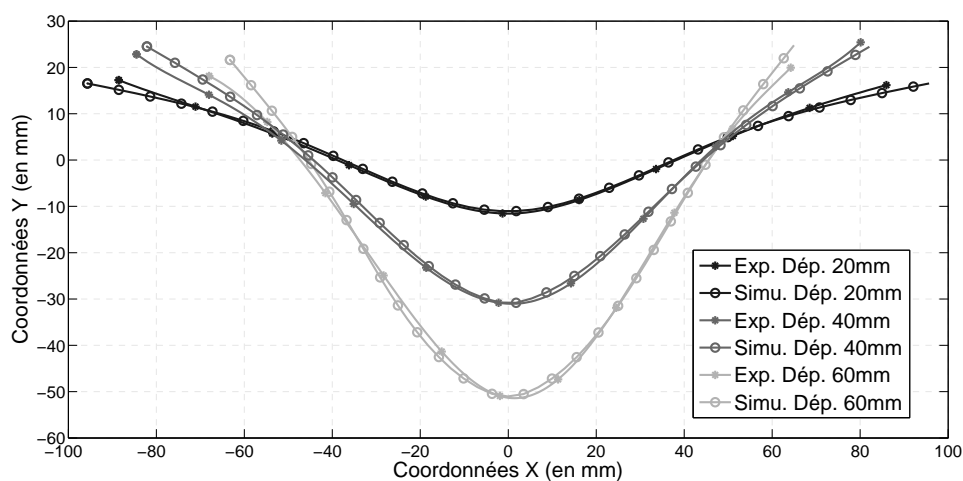
Les lignes moyennes correspondantes sont alors tracées figure 5.22 pour comparaison avec l'expérience. Bien que les lignes moyennes ne soient pas parfaitement superposées pour toutes les configurations, la loi de comportement non linéaire postulée permet d'obtenir des résultats très proches, que ce soit pour la courbure de la zone centrale ou pour le

## 5. Prise en compte de la rigidité locale de flexion des renforts tissés épais

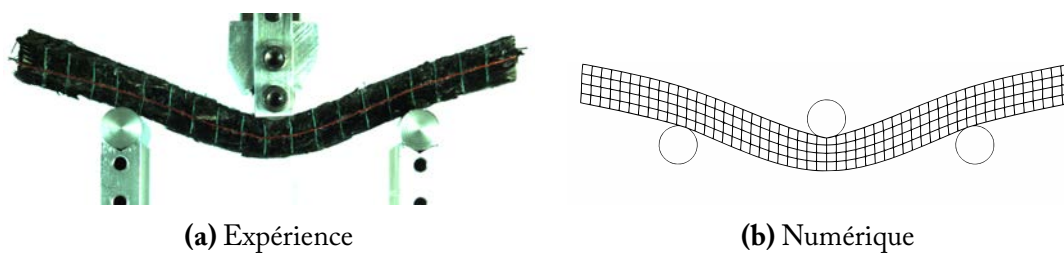
	$D_0$ (en $N.mm$ )	$D_1$ (en $N.mm^2$ )	$D_{Limite}$ (en $N.mm$ )
Chaine	14.4582	135.404	4.04237
Trame	12.0956	123.616	4.2242

**Tableau 5.2** – Identification d'une rigidité de flexion non linéaire

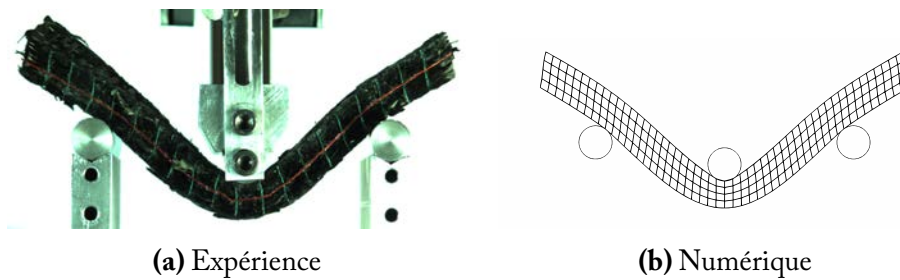
relèvement des bords libres d'efforts. Finalement, les simulations finales sont tracées avec les images expérimentales figures 5.23, 5.24 et 5.25.



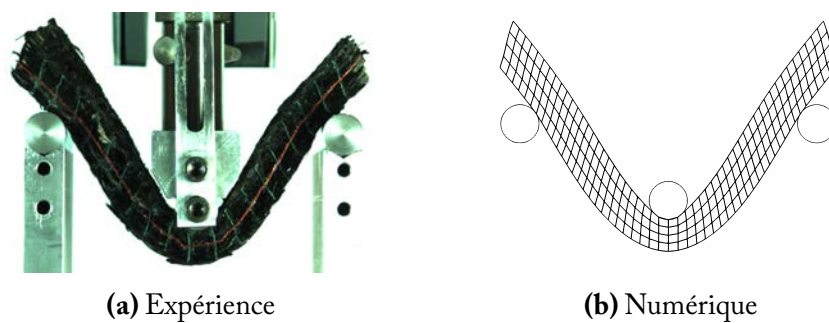
**Figure 5.22** – Comparaison des lignes moyennes expérimentales et simulées sens trame avec une loi de comportement non-linéaire et optimisation globale



**Figure 5.23** – Essai de flexion trois points sur tissu épais avec formulation en flexion - flèche de 20mm



**Figure 5.24** – Essai de flexion trois points sur tissu épais avec formulation en flexion - flèche de 40mm

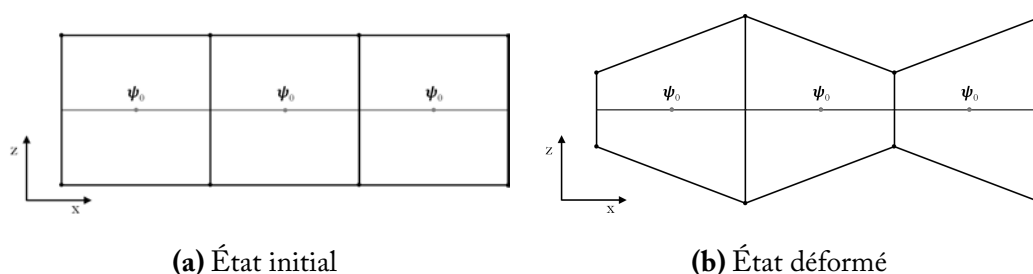


**Figure 5.25** – Essai de flexion trois points sur tissu épais avec formulation en flexion - flèche de 60mm

### 5.2.5 Suppression de la stabilisation des modes transverses

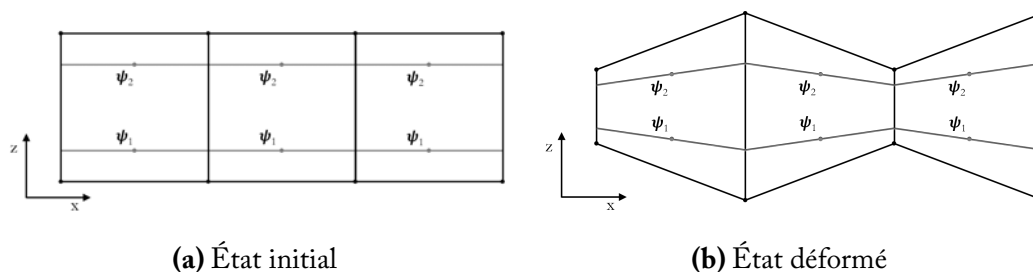
Il est à noter que l'introduction d'une rigidité de flexion permet de supprimer les modes hourglass transverses qui se développent dans des simulations dominées par la flexion (chapitre 4). Il a été montré que la forte anisotropie des tissés, et notamment la faible rigidité en compression transverse comparativement à la rigidité de cisaillement transverse, facilite le développement de modes de déplacement hourglass dans l'épaisseur du tissu. Des solutions ont été proposées, et notamment l'utilisation d'une rigidité additionnelle hourglass, décrite section 4.3. L'introduction de la flexion permet d'éviter cette stabilisation supplémentaire. Cependant la rigidité de flexion doit être introduite proprement. Si seulement un point d'intégration est choisi pour l'intégration du moment linéaire de flexion, les modes parasites pourront toujours se développer, comme montré figure 5.26.

Cependant, si deux points d'intégration sont utilisés (c'est-à-dire qu'on autorise une variation du moment linéaire), les éléments plaques virtuels vont subir une déformation et développer une résistance, comme montré figure 5.27. Par conséquent, l'implémentation d'une rigidité de flexion fondée sur une variation du moment linéaire permet de se passer d'une technique de stabilisation des modes hourglass transverses, si la rigidité de courbure introduite est suffisante. La rigidité des modes hourglass transverses étant faible, on supposera que la rigidité de flexion introduite est suffisante pour les empêcher d'apparaître. Aucuns de ces modes parasites n'a par la suite été identifié dans des simulations



**Figure 5.26** – Motif hourglass transverse sur 3 éléments avec rigidité de flexion à intégration réduite

avec rigidité en flexion.



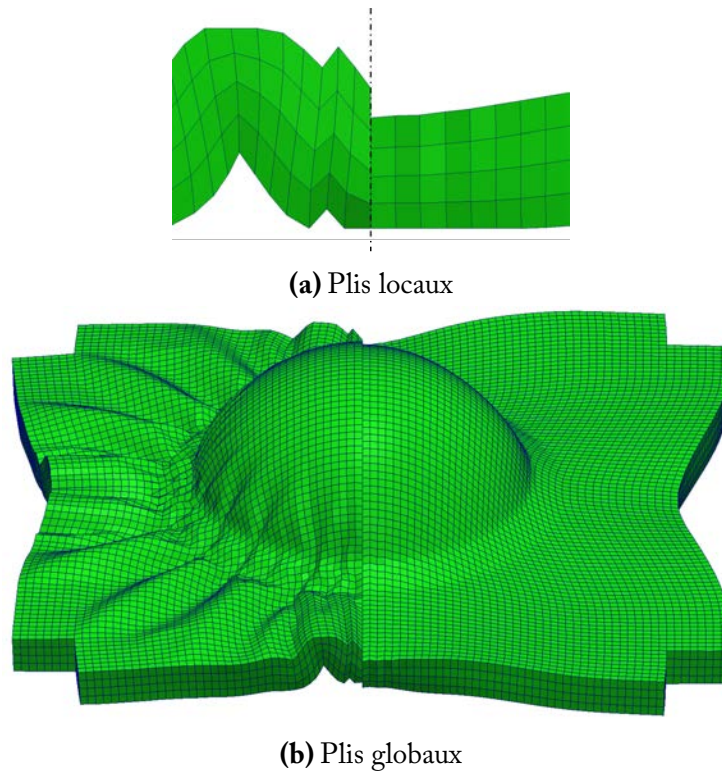
**Figure 5.27** – Motif hourglass transverse sur 3 éléments avec rigidité de flexion à intégration complète

### 5.2.6 Simulation de l'emboutissage hémisphérique

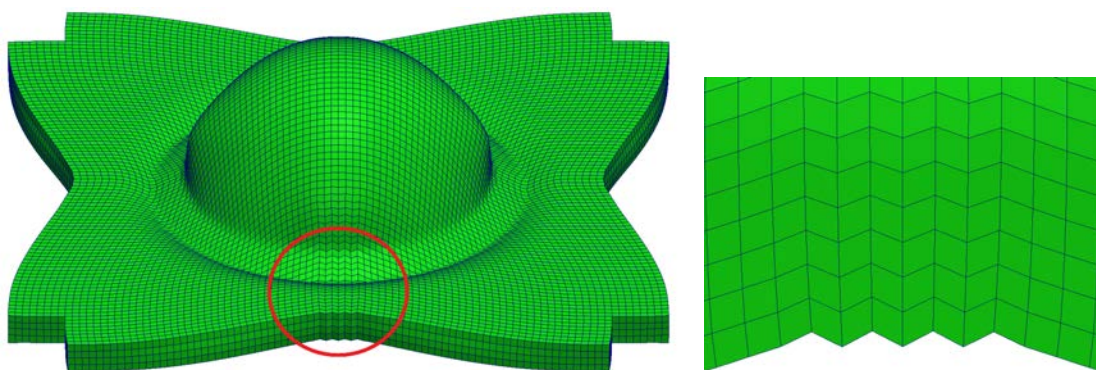
La simulation d'emboutissage hémisphérique décrite section 5.1.1.2 est reproduite en ajoutant la formulation prenant en compte la courbure développée section 5.2. Les résultats en fin de simulation, après écrasement entre les serre-flancs, sont identiques à ceux trouvés sans ajout de rigidité de flexion figure 5.10. La problématique soulevée mettait en évidence l'apparition de plis locaux ou globaux, non présents expérimentalement, en cours de simulation. Ces plis ont été décrits figure 5.11. Des résultats comparatifs aux emplacements de ces mêmes plis sont présentés figure 5.28. Les résultats obtenus sont clairs et montrent la suppression totale des plis parasites, au niveau local ou global. La simulation du comportement global du matériau s'en trouve fortement améliorée.

Cependant, bien que les plis locaux aient disparu totalement, le même phénomène de compression dans la direction des mèches provoque non plus un flambement transversal mais un flambement dans le plan des mèches dans la même zone. La figure 5.29 montre l'emplacement de ces flambements, présentant encore un motif d'accordéon.

L'apparition de cette zone peut être expliquée de manière identique à l'apparition du flambement transversal. L'absence de rigidité en flexion des mèches permet aux éléments de faire apparaître ce motif de cisaillement plan alterné. Pour les mêmes raisons, l'intégration de la rigidité de flexion associée aux mèches pourrait permettre de supprimer ce



**Figure 5.28** – Suppression des plis grâce aux rigidités de flexion. Gauche/droite : sans/avec formulation en flexion - Tissé embouti à 80%



**Figure 5.29** – Flambement dans le plan avec la formulation en flexion - Tissé embouti à 80%

phénomène numérique. L'importance de la rigidité en flexion des mèches pour certaines simulations a été montré avec l'exemple du bias extension test section 5.1.1.3 et une solution sera abordée section 5.3.

## 5.3 Introduction d'une composante liée à la flexion des mèches dans le plan

### 5.3.1 Flexion plan et densité de mèches

Comme vu section 5.1.1.3, la rigidité des mèches peut avoir des effets importants sur les mises en formes de renforts de composites. Il serait intéressant, en se basant sur les développements effectués section 5.2, d'ajouter une composante homogénéisée en flexion plane des mèches. Cependant, si un moment linéaire de flexion était introduit de la même manière, l'identification serait complexe, aucun essai simple ne la permettant. L'objectif est donc de pouvoir insérer directement la rigidité d'une mèche dans la simulation. Pour cela on part du potentiel d'énergie élastique, équation 5.1 :

$$\Pi_{int} = \frac{1}{2} \int_{A_e} \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{M}(\boldsymbol{\chi}) dA \quad (5.26)$$

Contrairement à ce qui été réalisé pour la flexion transverse ce potentiel est conservé tel quel et intégré sur l'aire  $A_e$  avec un seul point d'intégration :

$$\Pi_{int} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{M}(\boldsymbol{\chi}) A_e \quad (5.27)$$

Il est alors nécessaire d'intégrer une méthode qui soit, elle aussi, indépendant de la discrétisation réalisée. En supposant que l'on connaisse la rigidité d'une seule mèche  $G_m$  telle que :

$$\mathbf{M}_m = G_m \boldsymbol{\chi} \quad (5.28)$$

où  $\mathbf{M}_m$  est le moment de flexion associé à une mèche. Le moment de flexion dans le plan global peut être exprimé pour  $n$  mèches :

$$\mathbf{M} = \sum_{m=1}^n \mathbf{M}_m = \sum_{m=1}^n G_m \boldsymbol{\chi} \quad (5.29)$$

Et en supposant que les rigidités de chaque mèche soient identiques, on introduit la densité surfacique de mèche  $d_m$  :

$$\mathbf{M} = A_{e0} d_m G_m \boldsymbol{\chi} \quad (5.30)$$

avec  $A_{e0}$  l'aire de la surface initiale à fléchir. La formulation étant lagrangienne, le nombre de mèche  $n = A_{e0} d_m$  qui passera à travers la surface  $A_e$  sera toujours le même. Le nombre

de mèches  $n$  peut être calculé initialement. Le potentiel élastique final associé à la flexion de mèche peut s'écrire :

$$\Pi_{int} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\chi}^T A_{e0} d_m G_m \boldsymbol{\chi} A_e \quad (5.31)$$

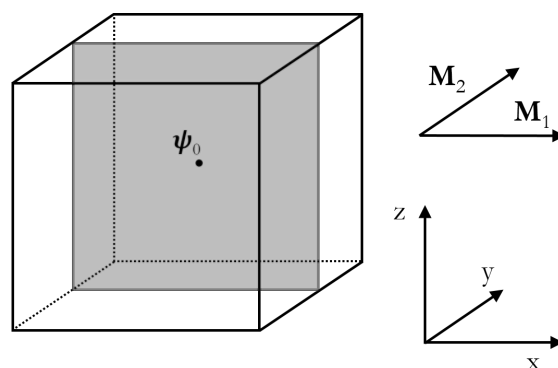
Soit pour les forces internes aux nœuds esclaves d'un élément S3 (telle que l'équation 5.23) :

$$\mathbf{F}^{*(j)} = A_e \mathbf{C}^T \mathbf{H}^T \mathbf{R}^T A_{e0} d_m G_m \mathbf{R} \mathbf{H} \mathbf{C} \mathbf{u}^p(j) \quad (5.32)$$

Puis pour les forces internes maîtres avec l'utilisation de deux éléments S3 (telle que l'équation 5.24) :

$$\mathbf{F}_{int}^{Flex} = 2 \left( \mathbf{G}^{(1)T} \mathbf{F}^{*(1)} + \mathbf{G}^{(2)T} \mathbf{F}^{*(2)} \right) J_s \quad (5.33)$$

Les calculs réalisés pour le cas de la flexion des mèches et des chaînes peuvent être rapprochés du calcul développé section 5.2 en liant rigidité de flexion linéaire avec somme des rigidités de flexion de mèche en un seul point d'intégration. Une illustration pour l'intégration de la flexion des mèches de chaîne est intégrée figure 5.30. Le plan grisé est orthogonal à la direction trame  $M_2$  et contient la direction chaîne  $M_1$ . L'utilisation d'un seul point d'intégration n'est pas problématique ici car les instabilités hourglass sont uniquement présentes dans le plan transverse.



**Figure 5.30** – Emplacement de la zone de calcul de la courbure pour la représentation de la flexion des mèches de chaîne

Il est évident que le mécanisme lié à la flexion dans le plan est plus complexe que l'utilisation de rigidités de mèche identifiées en dehors de tout tissage. Cependant, il est supposé que la somme des rigidités associées à chaque mèche est inférieure à la rigidité de flexion dans le plan homogénéisée réelle. Une solution possible pour intégrer un moment de flexion linéaire dans le plan serait, tout d'abord, d'identifier le comportement en cisaillement grâce à un essai de picture frame. L'avantage de cet essai est de ne comporter qu'une seule zone de cisaillement constant et, donc, de ne pas faire intervenir de rigidité en flexion dans le plan. Puis, l'identification de la rigidité serait réalisée par identification

inverse sur un essai de bias extension test. Le problème de cette solution est que la mise œuvre de l'essai de picture frame est difficile, notamment afin d'obtenir les conditions limites voulues. De plus, à notre connaissance, aucun essai de picture frame sur des tissés épais n'est décrit dans la littérature.

### 5.3.2 Identification de la flexion des mèches

Deux paramètres sont à identifier pour faire intervenir une rigidité de flexion dans le plan : la rigidité de flexion d'une mèche et la densité surfacique de mèches.

Pour la densité surfacique de mèche, la méthode la plus simple est, à partir d'un plan de tissage et de mesures réelles, d'approximer la densité surfacique de mèches. Afin d'obtenir un résultat plus précis, une tomographie a été utilisée. Celle-ci doit contenir au moins un volume élémentaire représentatif afin que les résultats soient significatifs. Après traitement, on sélectionne une coupe orthogonale à chaque direction de mèche. La résolution de la tomographie nous donne la mesure de la surface réelle. La densité surfacique de mèches dans les directions chaîne  $M_1$  et trame  $M_2$  est obtenue en comptant le nombre de mèche dans la surface mesurée :

$$d_m^{Chaîne} = 0.19 \text{ mèches par } mm^2 \quad (5.34)$$

$$d_m^{Trame} = 0.19 \text{ mèches par } mm^2 \quad (5.35)$$

Le comportement en flexion des mèches est caractérisé à l'aide du dispositif de Peirce, section 1.3.3.8. Cette méthode de détermination de la rigidité de flexion suppose que le comportement de la mèche est linéaire. La rigidité de flexion étant un complément à la loi de comportement globale de notre matériau, l'utilisation d'une loi linéaire est ici suffisante. La rigidité des mèches du tissé étudié est de  $0.446 N.mm^2$  dans les deux directions principales.

### 5.3.3 Simulation du Bias extension test

L'influence de la rigidité de flexion des mèches peut être montrée par simulation d'un bias extension test. Trois simulations de traction de biais sont réalisées avec la loi de comportement hyperélastique, dans les conditions listées section 5.1.1.3. Dans la première simulation aucune rigidité de flexion n'est ajoutée. Des rigidités de flexion moyenne (rigidité de mèche de  $5 N.mm^2$ ) puis importante (rigidité de mèche de  $25 N.mm^2$ ) sont ajoutées dans les deux dernières. La densité de mèche est de  $0.19$  mèches par  $mm^2$ . Les résultats de ces simulations sont comparées figure 5.31 pour un angle de cisaillement théorique maximal de  $35^\circ$  dans la zone centrale.

La simulation sans rigidité de flexion, figure 5.31a, montre un découpage net des différentes zones caractéristiques de la traction de biais. Pour les simulations avec des rigidités de flexion des mèches (figures 5.31b et 5.31c), on observe l'apparition des zones



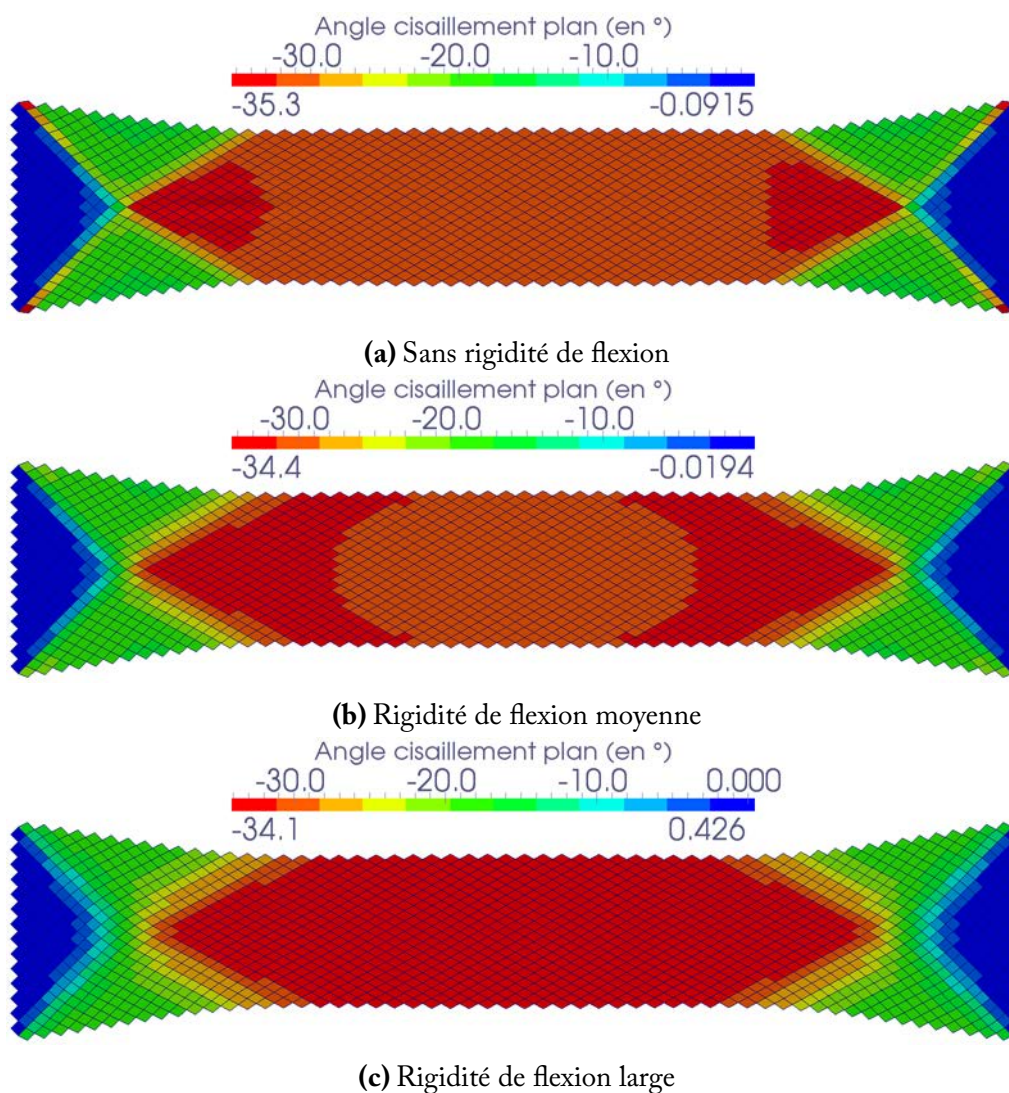
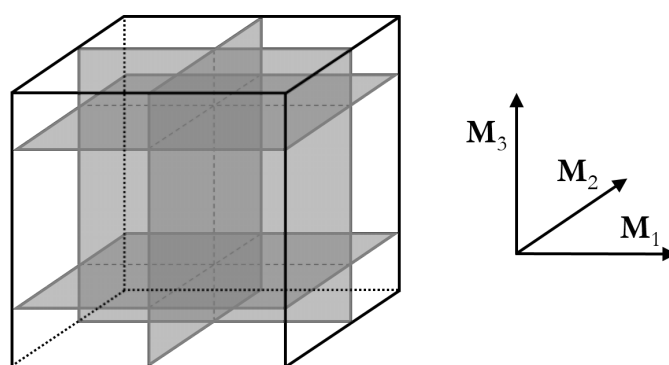


Figure 5.31 – Zones de cisaillement en fonction de la rigidité de flexion

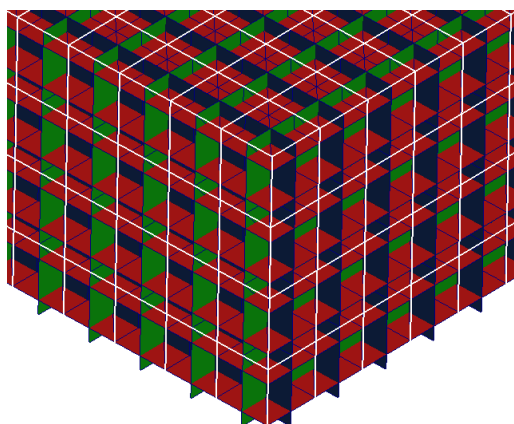
de transition décrites section 5.1.1.3. L'introduction de la rigidité grâce à des plaques à degrés de libertés en cisaillement permet donc de décrire la rigidité de flexion des mèches.

### 5.3.4 Retour sur l'emboutissage hémisphérique

La simulation d'emboutissage hémisphérique réalisée section 5.2.6 est relancée en prenant en compte la résistance à la courbure transverse développée section 5.2 et la rigidité en flexion des mèches décrite section 5.3.1. L'ensemble des zones où la courbure est calculée est représenté figure 5.32 et un zoom sur les éléments S3 virtuels utilisés dans le maillage éléments finis est représenté figure 5.33.



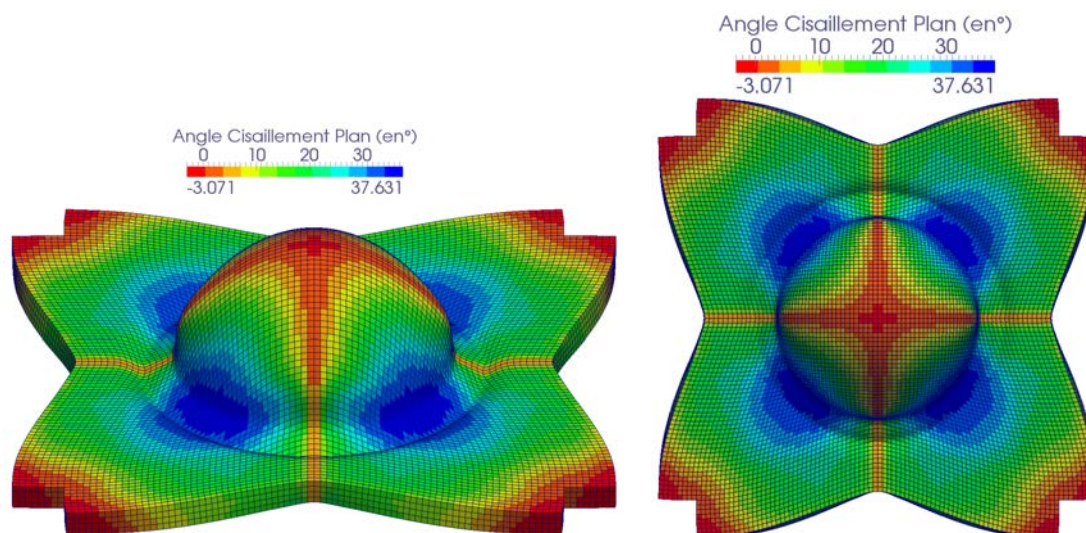
**Figure 5.32** – Emplacement des zones de calcul des courbures pour la représentation de l'ensemble des contributions en flexion



**Figure 5.33** – Visualisation des éléments S3 virtuels utilisés

Maintenant que la rigidité des mèches a été introduite, le phénomène de compression dans la direction des mèches ne provoque plus un flambement transversal. La figure 5.34 montre le résultat final de la simulation. Un emboutissage hémisphérique réel n'a pas pu être réalisé par manque de renfort. Une comparaison directe n'est donc pas possible. On peut cependant qualitativement comparer les angles de cisaillement trouvés avec ceux

obtenus par de Luycker [LUY 09b]. Une bonne concordance au niveau de la forme finale et de la répartition des angles de cisaillement est alors trouvée.



**Figure 5.34** – Simulation d'un emboutissage hémisphérique avec des résistances à la courbure

## 5.4 Bilan du chapitre 5

Dans ce chapitre, un problème numérique propre aux renforts tissés épais de composites a été mis en évidence. Tout d'abord, lors de simulations dominées par des sollicitations en flexion, une mauvaise représentation de la courbure, une absence de transmission des efforts aux parties non chargées et des plis sans aucune réalité physique ont été observés. De plus, l'influence de la rigidité en flexion de mèches a été mise en évidence sur des bias extension test. Afin de résoudre ces problèmes liés à la rigidité de flexion des tissés, une solution est proposée.

L'introduction d'un moment linéaire de flexion transverse est proposée pour simuler la flexion transverse tandis qu'une densité surfacique de mèches est mesurée pour implémenter la rigidité en flexion dans le plan des mèches. En associant ces quantités avec la courbure évaluée grâce à des plaques triangulaires *rotation free*, des efforts internes additionnels liés à la flexion sont calculés.

Des simulations de flexion trois points, d'emboutissage numérique et de traction de biais comparées à des résultats expérimentaux ont permis de valider l'amélioration du comportement des tissés secs épais en flexion.



# Chapitre 6

## Initiation de la matrice céramique par pyrolyse et retour élastique

*La mise en forme des renforts tissés épais de pièces composites ayant été traitée dans les chapitres précédents, la phase suivante dans le processus de fabrication des composites à matrice céramique est abordée : la pyrolyse. Cette étape du processus de fabrication induit une perte de rigidité de la matrice de cohésion qui provoque un relâchement des efforts de mise en forme par l'intermédiaire de déformations parasites. Le processus global menant à ces déformations ainsi que les paramètres influents seront détaillés. Après caractérisation du matériau au stade pyrolysé, une modélisation hyperélastique isotrope transverse est proposée puis appliquée à la simulation du retour élastique après pyrolyse de cornières à géométrie simple.*

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Composites à matrice céramique et maîtrise géométrique . . . . .</b>	<b>209</b>
<b>6.2</b>	<b>Processus d'obtention des pièces CMC et paramètres influents . . . . .</b>	<b>210</b>
6.2.1	Opérations sur texture . . . . .	210
6.2.2	Polymérisation de la matrice . . . . .	211
6.2.3	Initiation de la matrice céramique par pyrolyse . . . . .	212
6.2.4	Paramètres influents retenus . . . . .	213
<b>6.3</b>	<b>Caractérisation du matériau au stade pyrolysé . . . . .</b>	<b>213</b>

---

6.3.1	Essai de compression transverse . . . . .	214
6.3.2	Essai de traction de biais . . . . .	215
<b>6.4</b>	<b>Loi de comportement matricielle au stade pyrolysé . . . . .</b>	<b>217</b>
6.4.1	Loi hyperélastique isotrope transverse . . . . .	217
6.4.2	Identification en compression transverse . . . . .	220
6.4.3	Identification en cisaillement plan . . . . .	221
<b>6.5</b>	<b>Approche pour la modélisation du retour élastique . . . . .</b>	<b>222</b>
6.5.1	Chaîne de calcul . . . . .	222
6.5.2	Simulations d'ouverture de cornière . . . . .	222
<b>6.6</b>	<b>Bilan du chapitre 6 . . . . .</b>	<b>225</b>

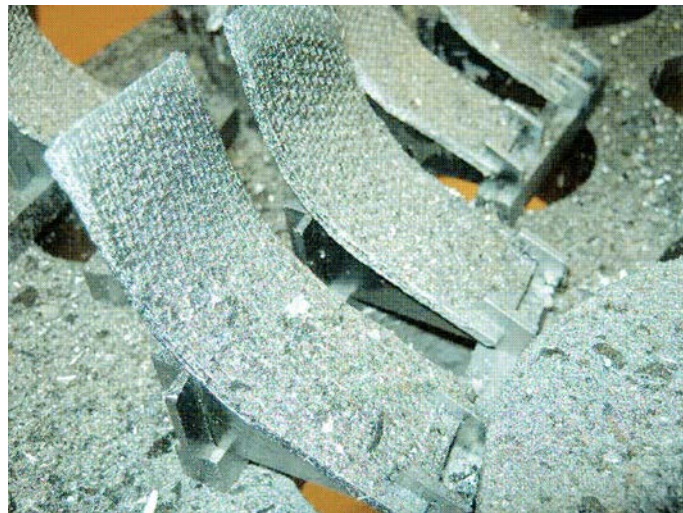
---



## 6.1 Composites à matrice céramique et maîtrise géométrique

L'obtention des matériaux composites à renforts et fibres céramiques suit une gamme de fabrication plus complexe que les classiques pièces composites à matrice organique. Comme exposé section 1.2.4, les principales méthodes de dépôt de matrice céramique sur le renfort sont : les cycles d'injection polymère/pyrolyse et/ou la densification par voie gazeuse. Ces méthodes disposent d'avantages et d'inconvénients qui les rendent plus ou moins adaptées à la fabrication de pièces en fonction de la forme et de la fonction de ces dernières. Le matériau étudié, le Cerasep A40C (section 1.2.4), a la particularité d'être obtenu par une méthode mixte constituée d'une pyrolyse après réticulation suivie d'une densification par CVI. Cette technique bénéficie de la rapidité de la consolidation par pyrolyse et du meilleur contrôle qualitatif et quantitatif de la densification par CVI.

Ce matériau, qui offre des gains de masse importants tout en ayant des propriétés stables à haute température, a pour objectif d'être utilisé dans des applications aéronautique et spatiale de pointe. Dans ces domaines, la sécurité est primordiale et exige la parfaite connaissance du procédé de fabrication. La maîtrise de la stabilité géométrique des pièces pendant l'élaboration est essentielle. Or, des déformations parasites ont été constatées au cours de l'élaboration de certaines pièces, notamment les pièces courbées. L'établissement d'une chaîne de modélisation afin de permettre la simulation de ces déformations permettrait une optimisation des méthodes et outils de fabrication.



**Figure 6.1** – Visualisation des cornières

Afin de reproduire et d'étudier cette problématique, des éprouvettes simples technologiquement ont été réalisées. Des tests ont été pratiqués par Herakles sur des cornières : ces pièces sont de simples plaques (100 mm x 36 mm) de renfort tissé coudées selon un angle déterminé (ici  $117,75^\circ$ ). La réalisation de ces pièces, figure 6.1, a été conduite pour divers traitements des fibres et différentes quantités de résine injectées. Les mesures

après complétion de la gamme de fabrication ont montré une ouverture de l'angle des cornières et un gonflement. L'objectif de ce chapitre est de reproduire ces déformations. Tout d'abord, les divers paramètres du processus de fabrication seront évoqués section 6.2 puis les paramètres influents seront sélectionnés. Le matériau sera caractérisé, section 6.3, puis modélisé au stade pyrolysé, section 6.4. Finalement, les résultats obtenus par la modélisation proposée seront comparés aux déformations mesurées expérimentalement, section 6.5.

### 6.2 Processus d'obtention des pièces CMC et paramètres influents

L'obtention d'une pièce composite à matrice et renforts en céramique découle d'un long processus de fabrication à travers la réalisation du tissé puis la consolidation matricielle. Les étapes de fabrication peuvent être résumées de la façon suivante :

1. Fabrication des fibres en céramique ;
2. Assemblage en mèches des fibres ;
3. Tissage du renfort de composite avec les mèches ;
4. Réalisation éventuelle de divers traitements sur le renfort ;
5. Mise en forme du renfort tissé ;
6. Imprégnation et cuisson de la matrice polymère avec précurseurs céramiques ;
7. Pyrolyse de la matrice polymère ;
8. Densification par CVI de la matrice céramique.

Les diverses étapes de fabrication ont été détaillées section 1.2. L'objectif de cette partie est d'analyser les paramètres qui pourraient influencer sur les déformations finales et d'identifier ceux qui sont de première importance. Parmi ces étapes, le renfort interlock utilisé est considéré fixé. De plus, la modélisation du renfort et les hypothèses qui en découlent ont été développées chapitre 2. Seules restent à étudier les étapes de traitements sur texture, d'imprégnation/cuisson de la matrice organique, de pyrolyse, et de densification par CVI.

#### 6.2.1 Opérations sur texture

Parmi les opérations sur texture on retrouve le dépôt de l'interphase et divers traitements chimiques, propres à chaque industriel. Les diverses opérations réalisées sur le renfort sec ont évidemment une influence directe sur sa réponse mécanique, le dépôt de pyrocarbone notamment. Celui-ci tient un rôle de déviateur des fissures et de protection des fibres. Cependant, si l'épaisseur déposée est significative, les propriétés mécaniques du renfort tissé s'en trouvent modifiées. Le matériau étant plus rigide, les efforts nécessaires à sa déformation seront donc plus importants et pourront, possiblement, augmenter l'amplitude du retour élastique.



L'impact mécanique de cette interphase ne sera cependant pas pris en compte explicitement dans la modélisation. La loi hyperélastique pour renforts tissés épais développée chapitre 2 est identifiée sur un renfort ayant déjà subi ces traitements. L'influence de l'interphase, et d'éventuels autres traitements, est donc indirectement prise en compte dans la modélisation macroscopique.

L'impact structural du pyrocarbone peut cependant être plus important. La quantité de pyrocarbone déposée a une influence directe sur la morphologie et la répartition des blocs céramiques obtenus après pyrolyse. La modélisation de la matrice obtenue au stade pyrolysé est donc dépendante du dépôt de pyrocarbone. La caractérisation d'une matrice pyrolysée sera donc associée à un renfort, et surtout aux traitements qu'il a subis.

### 6.2.2 Polymérisation de la matrice

La polymérisation de la matrice injectée par RTM est réalisée par cuisson. Lors de cette étape deux facteurs peuvent induire de nouvelles contraintes dans la pièce composite : la différence de coefficients de dilatation thermique entre renfort et matrice, et le retrait chimique matriciel.

Pendant la cuisson, la pièce composite est sujette à un différentiel d'expansions thermiques tandis que la matrice polymère subit des réactions chimiques. Ce ratio de dilatations thermiques provient de la différence des coefficients de dilatation thermique entre les fibres du renfort et la matrice. Ce différentiel génère alors des contraintes internes résiduelles de cuisson dépendant de la forme de la pièce réalisée, de la quantité et composition de la matrice, et du positionnement des fibres [OLI 98, OLI 06]. L'amplitude de ces contraintes est généralement suffisante pour être prise en compte dans le travail de modélisation et de conception de pièces composite.

De plus, la réaction de réticulation macromoléculaire induit des variations de volume, un phénomène nommé retrait chimique. Le retrait de polymérisation des résines est inhérent à la réaction de polymérisation elle-même et dépend de leur composition chimique, de la fraction volumique des charges et du degré de conversion (mesure du degré de polymérisation). La réaction de réticulation produit un durcissement de la résine et la réaction chimique induit un passage de l'état liquide à l'état solide. Comme à tout changement de phase, il se produit une variation volumique qui se traduit dans le cas des matrices thermodurcissables par une contraction volumique [BAR 92]. Ce retrait chimique occasionne l'apparition de contraintes internes de cuisson. Quand il est comparé aux contraintes résiduelles de cuisson, ce retrait n'est pas totalement négligeable mais faiblement influent. Le niveau de contrainte ainsi induit atteint au maximum 5% des contraintes totales de cuisson. Bien qu'elles soient nécessaires à une optimisation totale de la pièce finale, ces contraintes ne sont généralement pas prises en compte.

La cuisson se résume donc à une considération globale des interactions entre les phénomènes chimiques, mécaniques, et bien entendu thermiques. Lorsque la matrice est complètement réticulée, la pièce obtenue ne bouge pour ainsi dire plus. C'est pourquoi, nous supposons ci-après que les déformations associées à la phase de cuisson sont nulles. Cependant, il y a bien une addition de contraintes résiduelles de cuisson. Dans le cadre de

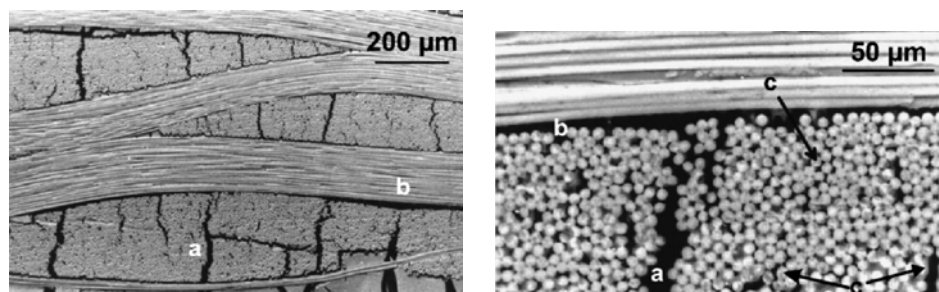
cette étude, qui a pour but de réaliser une première approche des déformations finales des pièces CMC, ces contraintes additionnelles seront supposées faibles par rapport à celles provoquées par la phase de mise en forme. Il est évident que cette hypothèse n'est pas vraie pour tous les cas de mise en forme et en tout point de la préforme considérée.

### 6.2.3 Initiation de la matrice céramique par pyrolyse

Avant cette étape, la pièce composite consolidée par cuisson de la matrice polymère est démoulée. Elle est ensuite placée dans un four, où elle est faiblement fixée. La pyrolyse décrite section 1.2.4 va alors être réalisée. Lors de cette étape, la matrice polymère est convertie en céramique et subit une contraction volumique importante, avec un ratio volumique pré/post-pyrolyse de l'ordre de 2,5. Des fissures dont la disposition est guidée par la forte rigidité des fibres apparaissent parallèlement à grande porosité et conduisent à de faibles propriétés mécaniques.

Dans le processus de fabrication global, la disposition des fissures durant la pyrolyse joue un rôle majeur. Ces fissures doivent avoir une certaine forme et largeur afin de favoriser au mieux les procédés d'infiltration subséquents, le dépôt par CVI dans le cas présent.

Les principaux types de fissuration issus de la pyrolyse sont montrés figure 6.2 : les fissures transversales (a), les délaminations partielles (b) et les microfissurations dues au décollement fibres-matrice (c) [SCH 07]. Les fissures transversales divisent les mèches en plusieurs segments. La matrice, se contractant durant la pyrolyse, est contrainte par la grande rigidité des fibres. Les fissures ne peuvent alors apparaître que dans les directions situées dans le plan orthogonal à la direction principale de la mèche. De plus, à cause de la pression transverse inhérente aux procédés de fabrication, le développement des fissures est facilité dans la direction transverse. Les délimitations partielles, qui ne génèrent pas de délaminations macroscopiques, apparaissent aux interfaces entre chaînes et trames. Les microfissures dues au décollement entre la matrice et les fibres à l'intérieur des mèches sont présentes dans cette interface sans orientation particulière. Ces différents phénomènes peuvent être, par leur taille, divisés en deux familles : des fissures transversales et des délaminations partielles à l'échelle mésoscopique, des microfissures à l'échelle microscopique.



**Figure 6.2** – Microscopie MEB d'un composite C/C pyrolysé à 880 °C [SCH 07]

En dehors de ces fissurations, la matrice résultante peut aussi être caractérisée par une grande porosité. Cette porosité est à la fois le résultat de la contraction matricielle et

de l'emprisonnement dans des cavités de gaz dégagé pendant la pyrolyse. Ces gaz, en se diffusant dans de petites cavités, vont favoriser leur développement et leur croissance.

Du point de vue mécanique la perte de rigidité, par rapport à la matrice polymère, est évidente. Si les caractéristiques en tension des fibres, et indirectement du tissé, ne sont pas affectées, la fissuration et le délaminage, associés à une contraction volumique importante, vont impacter directement les rigidités dites secondaires. Ces rigidités en cisaillements et compression transverse sont les principaux modes de déformation du renfort sec. Les faibles propriétés de la matrice au stade pyrolysé vont alors directement les affecter. Si les déformations en fin d'étape de cuisson sont négligeables, les décohésions de la phase de pyrolyse semblent les favoriser. Cette étape sera privilégiée dans la simulation de l'ouverture des cornières précédemment décrites.

#### **6.2.4 Paramètres influents retenus**

Les hypothèses de la modélisation retenues peuvent être résumées de la manière suivante :

- Les contraintes stockées lors de la mise en forme, qui ont un rôle majeur dans la déformation ultime de la pièce, sont supposées uniquement dépendantes des caractéristiques mécaniques de la préforme, de la fabrication des fibres jusqu'aux traitements de surfaces éventuels ;
- Le dépôt de pyrocarbone éventuel influe directement sur la morphologie de la matrice résultant de la pyrolyse. Son épaisseur est supposée fixée ;
- Les déformations finales sont indépendantes de la phase de cuisson. Des contraintes internes résiduelles dues aux coefficients de dilatation thermique et au retrait chimique de la matrice en réticulation existent mais sont supposées négligeables devant celles générées par la mise en forme ;
- La phase de pyrolyse génère la majeure partie des déformations finales. Pendant le processus, les contraintes internes de mise en forme sont relâchées, entraînant des déformations parasites ;
- Les fibres en céramiques sont considérées thermiquement stables. Leurs propriétés mécaniques restent identiques après la phase de pyrolyse ;
- La phase de densification, qui n'a pas été évoquée ici, est supposée ne pas affecter l'état de déformation ou de contrainte de la pièce. Les déformations après densification par voie CVI sont assimilées à celles après pyrolyse.

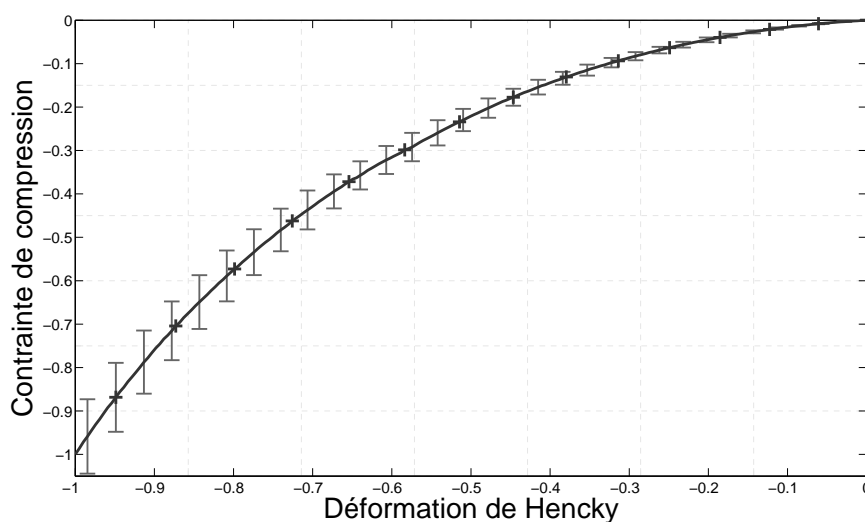
### **6.3 Caractérisation du matériau au stade pyrolysé**

Dans l'objectif de modéliser le matériau au stade pyrolysé, la caractérisation de la matrice céramique fragmentée présente est nécessaire. Pour cela, les essais décrits section 1.3 et utilisés pour l'identification de la loi hyperélastique section 2.2 afin de caractériser les rigidités secondaires des renforts tissés épais sont considérés. Ces essais sont : le bias extension test, la compression transverse et les essais de cisaillements transverses. Cependant, à cause de la rigidification apportée par la phase PIP, la réalisation de l'essai de

cisaillement transverse est impossible. Le matériau est usuellement fixé grâce à des adhésifs dont la résistance est suffisante pour des tissés secs mais pas pour le matériau au stade pyrolysé. Pour cette raison, des essais de bias extension test et de compression transverse uniquement ont été conduits à fin de caractérisation. Les éprouvettes ont été fournies par Herakles, le renfort initial étant un interlock ply-to-ply multisatin. Pour des raisons de confidentialité, les courbes présentées sont normalisées.

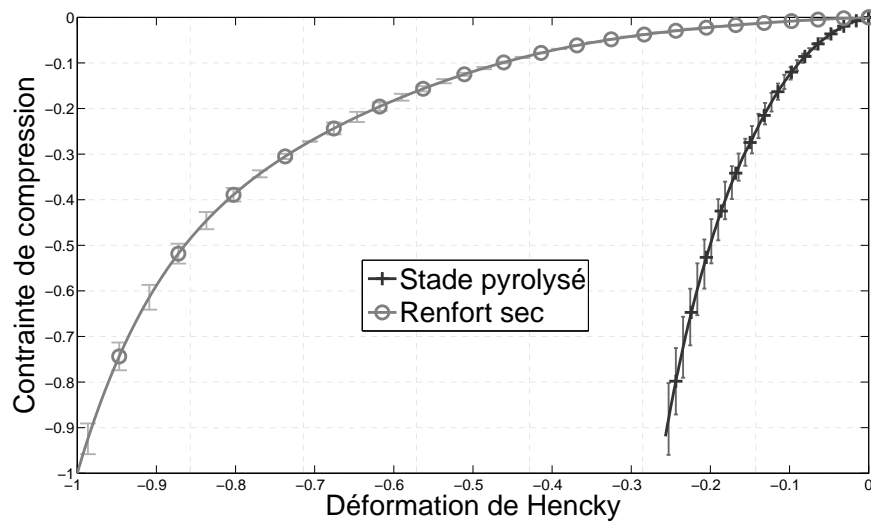
### 6.3.1 Essai de compression transverse

La courbe expérimentale est donnée figure 6.3. La caractérisation expérimentale a été réalisée sur une éprouvette de 50 mm x 50 mm x 4mm.



**Figure 6.3** – Comportement normalisé en compression transverse de l'interlock au stade pyrolysé

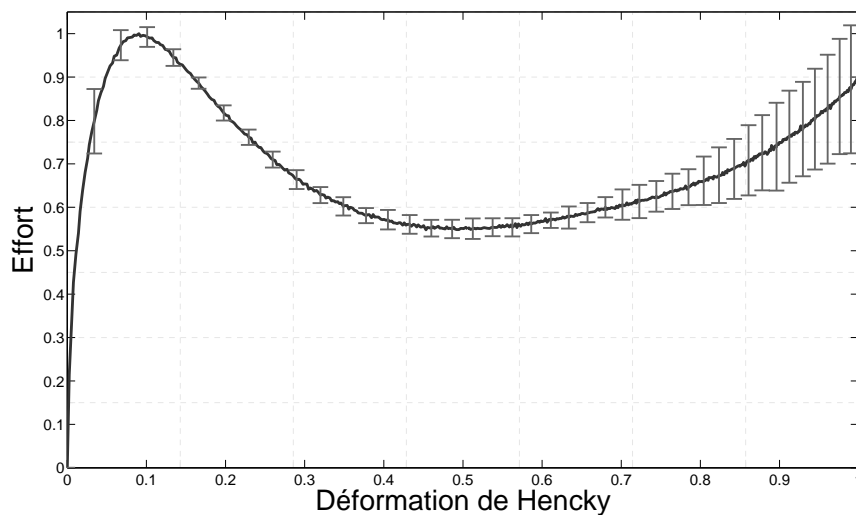
Le comportement global obtenu est classique avec une augmentation constante de la rigidité tangente. La rigidification du comportement par rapport au renfort sec peut être mise en évidence en traçant simultanément le comportement en compression pour le renfort sec et pyrolysé, figure 6.4. Les résultats expérimentaux sont en accord avec ce qui est attendu de la consolidation par pyrolyse.



**Figure 6.4** – Comportement normalisé en compression transverse de l'interlock au stade pyrolysé/renfort sec

### 6.3.2 Essai de traction de biais

La courbe expérimentale est donnée figure 6.5. La caractérisation expérimentale a été réalisée grâce à un biais extension test sur une éprouvette de 118 mm x 37,5 mm x 4 mm.

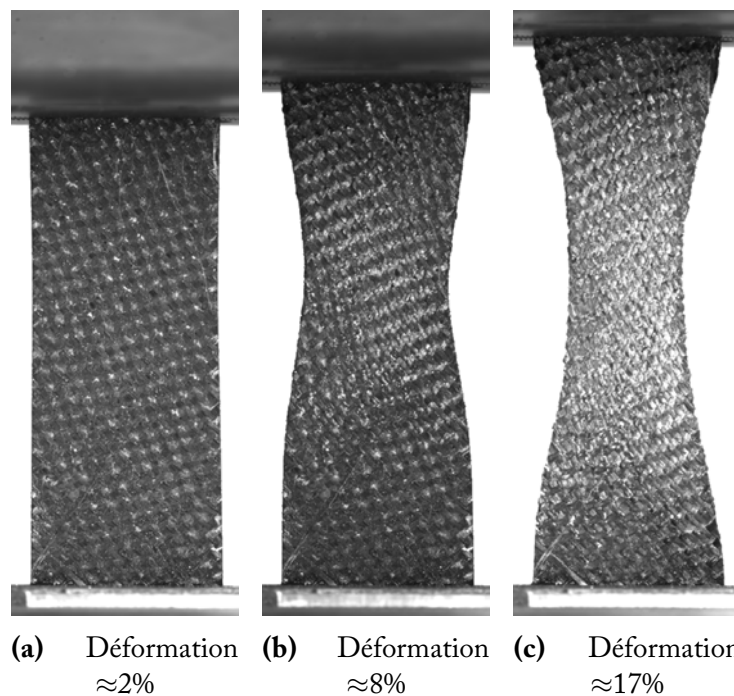


**Figure 6.5** – Comportement normalisé en traction de biais de l'interlock au stade pyrolysé/renfort sec

Le comportement en traction de biais du matériau pyrolysé montre, au contraire de la compression transverse, une réponse différente du renfort sec. Ici, on n'observe plus une

courbe continuellement croissante due à une rigidification continue du comportement. Le comportement au stade pyrolysé pour cet essai peut être décrit en trois phases, représentées figure 6.6 :

1. Une phase réversible de croissance rapide de l'effort. Cette phase correspond, en partie, à la réponse de la matrice pyrolysée associée à une augmentation progressive de la tension dans les mèches. Les déformations sont pour l'instant faibles (figure 6.6a).;
2. Une phase d'endommagement de la matrice. La limite de résistance de la matrice a été atteinte, la cohésion des blocs de matrice avec les mèches diminue. Un endommagement progressif de la matrice se met en place, tout comme un début de cinématique de bias test (figure 6.6b). L'effort mesuré chute ;
3. La fin de l'endommagement et le début du blocage en cisaillement. L'endommagement progressif de la matrice a facilité l'apparition des zones caractéristiques du bias extension test (figure 6.6c). Le mécanisme classique s'est mis en place jusqu'à l'apparition d'un blocage cinématique en cisaillement plan. Le blocage classique, dû à la compression latérale des mèches, est ici accentué par la présence d'un corps supplémentaire : les blocs de matrice.



**Figure 6.6** – Évolution du matériau pyrolysé en bias extension test

Le comportement en traction de biais a été testé jusqu'à des valeurs de déformations non atteintes en retour élastique, ce qui permet de mieux comprendre le mécanisme du comportement de la matrice pyrolysée. La loi de comportement associée devra reproduire les prémices de ce mécanisme.

## 6.4 Loi de comportement matricielle au stade pyrolysé

### 6.4.1 Loi hyperélastique isotrope transverse

Le matériau pyrolysé peut être considéré comme un renfort tissé dans lequel les rigidités secondaires du comportement sont plus importantes. Pour cette raison, les mêmes modes de déformation que pour la loi hyperélastique pour renforts interlocks sont choisis, section 2.2.2.2 (figure 2.17) :

- La tension du renfort dans la direction chaîne
- La tension du renfort dans la direction trame
- La compression transverse du renfort
- Le cisaillement du renfort dans le plan
- Le cisaillement transverse sens chaîne
- Le cisaillement transverse sens trame

L'objectif est d'utiliser ces mêmes modes de déformations associés aux mêmes invariants physiques afin de définir une loi hyperélastique pour la matrice pyrolysée. Cette loi sera ensuite additionnée aux efforts générés par la loi de comportement du renfort sec. La caractérisation des modes de déformation en cisaillement plan et compression transverse a pu être réalisée classiquement en utilisant les essais réalisés, section 6.3. La réponse au bias extension test a montré un comportement spécifique avec une apparition tardive des zones caractéristiques. L'analyse cinématique permettant de calculer analytiquement l'angle de cisaillement plan n'est plus réalisable. La matrice, bien que morcelée, est directement mise en jeu lors de cette sollicitation. La modélisation de la réponse du matériau doit alors être différente. Les matériaux céramiques ayant un comportement proche de l'isotropie, une loi de comportement hyperélastique isotrope transverse orientée dans l'épaisseur du tissé est considérée. La matrice possède alors un comportement isotrope dans le plan des mèches.

Comme première hypothèse, on suppose toujours un découplage des modes de déformation en utilisant un coefficient de poisson nul. Les rigidités en cisaillement transverse ne pouvant être identifiées, elles sont supposées identiques aux rigidités de cisaillement plan. La matrice des rigidités tangentes initiales de notre matrice pyrolysée s'écrit :

$$\mathbf{C}_{mat}^{SE} = \begin{bmatrix} \hat{E} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{E} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{E}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{G} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

avec  $\hat{E} = 2\hat{G}$ . Un chapeau utilisé sur une variable dans la suite du chapitre indiquera que celle-ci est relative au comportement matriciel pyrolysé. Précisons que cette matrice des rigidités caractérise uniquement le comportement de la matrice pyrolysée, c'est-à-dire les rigidités secondaires. L'objectif est que cette loi de comportement soit additionnée aux contributions énergétiques de la loi hyperélastique pour renforts épais. Pour faciliter la

compréhension de la suite du développement, la matrice des rigidités tangentes initiales de la loi pour renfort secs est rappelée :

$$\mathbf{C}_{renf}^{SE} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

Pour la définition des rigidités en cisaillement  $\hat{G}$  et en compression transverse  $\hat{E}_3$  (équation 6.1), on se base sur 6.2 pour définir :

$$\hat{G} = \frac{\partial^2 \hat{w}_{cp}}{\partial I_{cp} \partial I_{cp}} \quad (6.3)$$

$$\hat{E}_3 = \frac{\partial^2 \hat{w}_{comp}}{\partial I_{comp} \partial I_{comp}} \quad (6.4)$$

où  $\hat{w}_{cp}$  et  $\hat{w}_{comp}$  sont les densités d'énergie de déformation associées au comportement en cisaillement dans le plan et dans la direction transverse de la loi isotrope transverse. En utilisant 6.3 et 6.4 dans 6.1 :

$$\mathbf{C}_{mat}^{SE} = \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial^2 \hat{w}_{cp}}{\partial I_{cp} \partial I_{cp}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 \frac{\partial^2 \hat{w}_{cp}}{\partial I_{cp} \partial I_{cp}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 \hat{w}_{comp}}{\partial I_{comp} \partial I_{comp}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 \hat{w}_{cp}}{\partial I_{cp} \partial I_{cp}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 \hat{w}_{cp}}{\partial I_{cp} \partial I_{cp}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 \hat{w}_{cp}}{\partial I_{cp} \partial I_{cp}} \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

A partir de l'équation 6.5, en utilisant une définition des invariants physiques identiques, les densités d'énergie de déformation suivantes sont choisies pour la tension et le cisaillement transverse :



$$\hat{w}_{elongi} = \frac{\partial^2 \hat{w}_{cp}}{\partial I_{cp} \partial I_{cp}} I_{elongi}^2 \quad (6.6)$$

$$\hat{w}_{cti} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{w}_{cp}}{\partial I_{cp} \partial I_{cp}} I_{cti}^2 \quad (6.7)$$

La densité totale d'énergie peut finalement être exprimée comme équation 2.43 :

$$\begin{aligned} \hat{w} = & \hat{w}_{elong1}(I_{elong1}, I_{cp}) + \hat{w}_{elong2}(I_{elong2}, I_{cp}) + \hat{w}_{comp}(I_{comp}) \\ & + \hat{w}_{cp}(I_{cp}) + \hat{w}_{ct1}(I_{ct1}, I_{cp}) + \hat{w}_{ct2}(I_{ct2}, I_{cp}) \end{aligned} \quad (6.8)$$

### Second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff

Le calcul du tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff 2 est réalisé par différentiation de cette énergie de déformation, équation 2.29. Cependant, les contributions énergétiques associées à la tension et au cisaillement transverse ne sont plus uniquement dépendantes des invariants physiques associés du même nom, mais aussi de l'invariant de cisaillement plan. Les contraintes issues de chaque contribution sont, pour la tension dans le plan des mèches :

$$\begin{aligned} \hat{S}_{elongi} = & 2 \frac{\partial \hat{w}_{elongi}}{\partial \mathbf{C}} \\ = & 2 \frac{\partial \hat{w}_{elongi}}{\partial I_{elongi}} \frac{\partial I_{elongi}}{\partial \mathbf{C}} + 2 \frac{\partial \hat{w}_{elongi}}{\partial I_{cp}} \frac{\partial I_{cp}}{\partial \mathbf{C}} \\ = & \frac{2}{I_{4i}} \mathbf{M}_{ii} \frac{\partial^2 \hat{w}_{cp}}{\partial I_{cp} \partial I_{cp}} I_{elongi} \\ & + \left[ \frac{1}{\sqrt{I_{41} I_{42}}} (\mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_2 \otimes \mathbf{M}_1) - \frac{I_{cp}}{I_{41}} \mathbf{M}_{11} - \frac{I_{cp}}{I_{42}} \mathbf{M}_{22} \right] \frac{\partial^3 \hat{w}_{cp}}{\partial I_{cp}^3} I_{elongi}^2 \end{aligned} \quad (6.9)$$

Pour les sollicitations transverses :

$$\begin{aligned} \hat{S}_{comp} = & 2 \frac{\partial \hat{w}_{comp}}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial \hat{w}_{comp}}{\partial I_{comp}} \frac{\partial I_{comp}}{\partial \mathbf{C}} \\ = & \left[ \mathbf{C}^{-1} - \frac{1}{I_{41} (1 - I_{cp}^2)} \mathbf{M}_{11} - \frac{1}{I_{42} (1 - I_{cp}^2)} \mathbf{M}_{22} \right. \\ & \left. + \frac{I_{cp}}{\sqrt{I_{41} I_{42}} (1 - I_{cp}^2)} (\mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_2 \otimes \mathbf{M}_1) \right] \frac{\partial \hat{w}_{comp}}{\partial I_{comp}} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Pour le cisaillement plan :

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{S}}_{cp} &= 2 \frac{\partial \hat{w}_{cp}}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial \hat{w}_{cp}}{\partial I_{cp}} \frac{\partial I_{cp}}{\partial \mathbf{C}} \\
 &= \left[ \frac{1}{\sqrt{I_{41} I_{42}}} (\mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_2 \otimes \mathbf{M}_1) - \frac{I_{cp}}{I_{41}} \mathbf{M}_{11} - \frac{I_{cp}}{I_{42}} \mathbf{M}_{22} \right] \frac{\partial \hat{w}_{cp}}{\partial I_{cp}} \quad (6.11)
 \end{aligned}$$

Pour le cisaillement transverse :

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{S}}_{cti} &= 2 \frac{\partial \hat{w}_{cti}}{\partial \mathbf{C}} \\
 &= 2 \frac{\partial \hat{w}_{cti}}{\partial I_{cti}} \frac{\partial I_{cti}}{\partial \mathbf{C}} + 2 \frac{\partial \hat{w}_{cti}}{\partial I_{cp}} \frac{\partial I_{cp}}{\partial \mathbf{C}} \\
 &= \left[ \frac{1}{\sqrt{I_{4i} I_{43}}} (\mathbf{M}_i \otimes \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_3 \otimes \mathbf{M}_i) - \frac{I_{cti}}{I_{4i}} \mathbf{M}_{ii} - \frac{I_{cti}}{I_{43}} \mathbf{M}_{33} \right] \frac{\partial^2 \hat{w}_{cp}}{\partial I_{cp} \partial I_{cp}} I_{cti} \quad (6.12) \\
 &\quad + \left[ \frac{1}{\sqrt{I_{41} I_{42}}} (\mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_2 \otimes \mathbf{M}_1) - \frac{I_{cp}}{I_{41}} \mathbf{M}_{11} - \frac{I_{cp}}{I_{42}} \mathbf{M}_{22} \right] \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \hat{w}_{cp}}{\partial I_{cp}^3} I_{cti}^2
 \end{aligned}$$

Les rigidités tangentes associées sont données annexe H. Maintenant que la loi a été formulée, les paramètres matériaux associés à la forme des énergies de déformation  $\hat{w}_{cp}$  et  $\hat{w}_{comp}$  doivent être identifiés. La forme des potentiels est prise identique à celle postulée pour la loi hyperélastique orthotrope, section 2.2.2.4. L'identification numérique est réalisée en ajoutant aux contributions de la loi isotrope transverse (équation 6.8) représentant la matrice, les contributions en tension du renfort global (équation 2.43). Pour des raisons de confidentialité, les paramètres de l'identification numérique ne sont pas précisés. Les courbes normalisées d'identification uniquement sont présentées.

### 6.4.2 Identification en compression transverse

Pour les sollicitations dans le sens transverse, seule la compression transverse est caractérisable. On utilise un potentiel symétrisé (section 2.2.2.4). Les courbes numériques et expérimentale sont données figure 6.7.

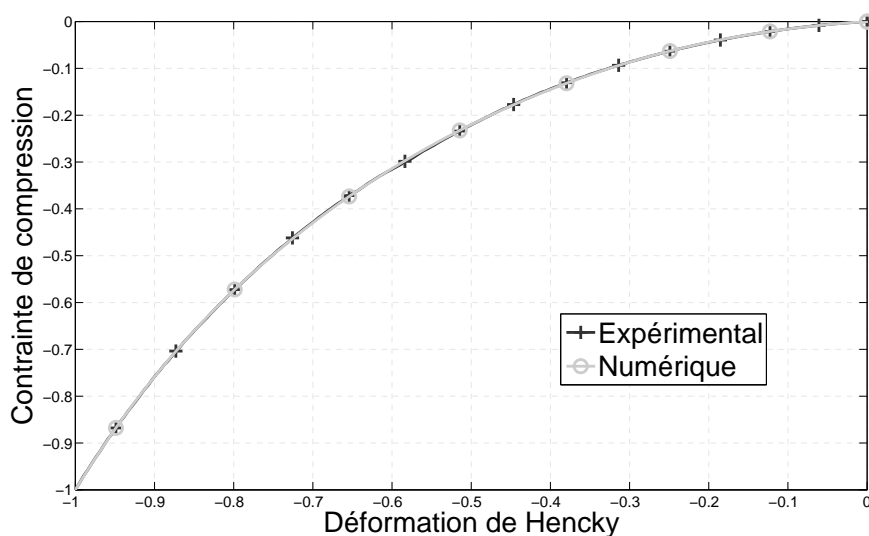


Figure 6.7 – Identification numérique normalisée en compression transverse du comportement

### 6.4.3 Identification en cisaillement plan

Pour les sollicitations en cisaillement dans le plan, le comportement est le même si l'invariant de cisaillement est négatif ou positif. Pour cette raison on utilise un potentiel symétrisé (section 2.2.2.4). Les courbes numérique et expérimentale sont données figure 6.8. L'identification du comportement en cisaillement est réalisée par optimisation inverse.

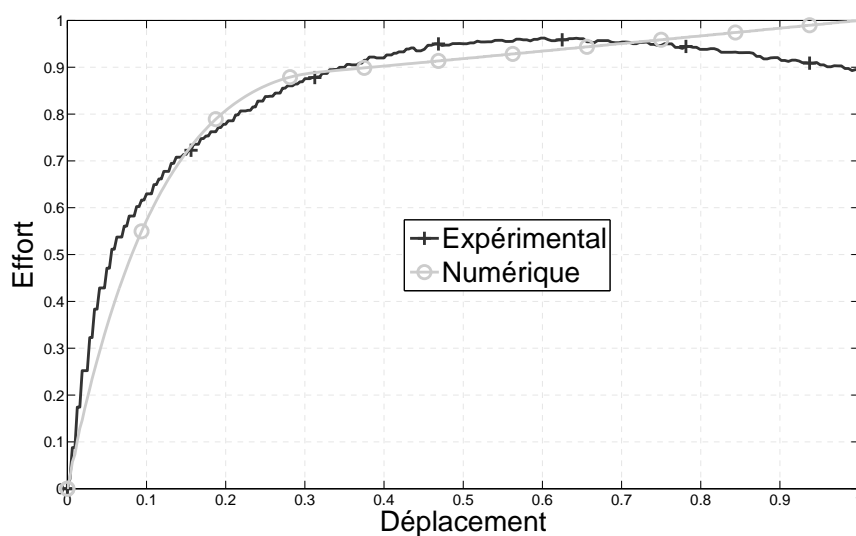


Figure 6.8 – Identification numérique normalisée en cisaillement plan du comportement

## 6.5 Approche pour la modélisation du retour élastique

### 6.5.1 Chaîne de calcul

La chaîne de calcul proposée pour la simulation du retour élastique après pyrolyse de la cornière est la suivante :

1. Mise en forme du renfort ;
2. Apparition d'une matrice additionnelle ;
3. Libération des efforts externes de mise en forme.

La mise en forme du renfort est réalisée par application d'une pression. Ce choix permet d'obtenir une répartition homogène de l'effort sur l'ensemble du matériau. Une pression de 2 atm est choisie. La loi de comportement orthotrope hyperélastique (section 2.2.2.2) donnant les efforts internes dus à la déformation possède comme configuration de référence le renfort dans son état non déformé. Les contributions à la flexion développées chapitre 5 sont aussi introduites.

Le maintien des efforts (externes et internes) et l'apparition d'une matrice de cohésion forment l'étape suivante. Deux options ont été testées : la loi isotrope transverse décrite section 6.4 pour simuler une matrice pyrolysée ou une loi isotrope classique représentant une matrice polymère réticulée. Pour cette dernière un module d'Young de 5GPa et un coefficient de Poisson de 0.4 sont sélectionnés. Pour les deux options, la configuration de référence utilisée pour la loi de comportement supplémentaire est la configuration en fin de mise en forme du renfort. Les efforts internes calculés dans l'élément fini ont maintenant deux sources : la loi de comportement orthotrope du renfort sec avec comme référence la configuration initiale et la loi de comportement isotrope transverse (ou isotrope) de la matrice pyrolysée (ou polymérisée) avec comme référence la configuration en fin de mise en forme.

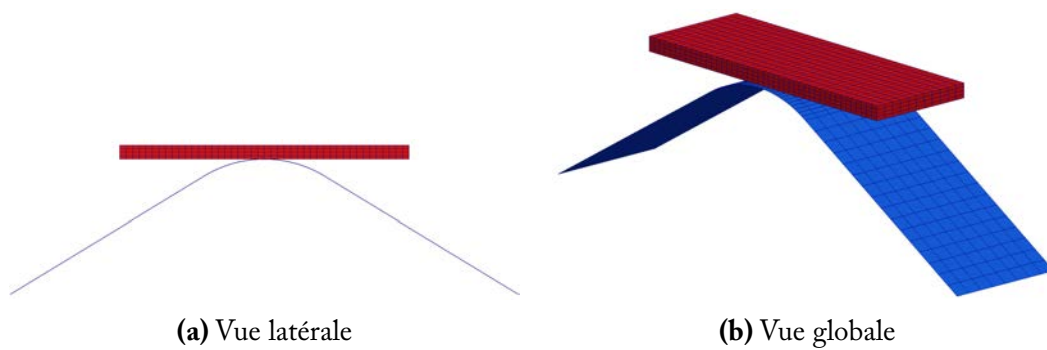
Finalement, les efforts externes (la pression dans notre cas) sont réduits de manière progressive de façon à ne pas générer d'instabilités dans la résolution explicite.

### 6.5.2 Simulations d'ouverture de cornière

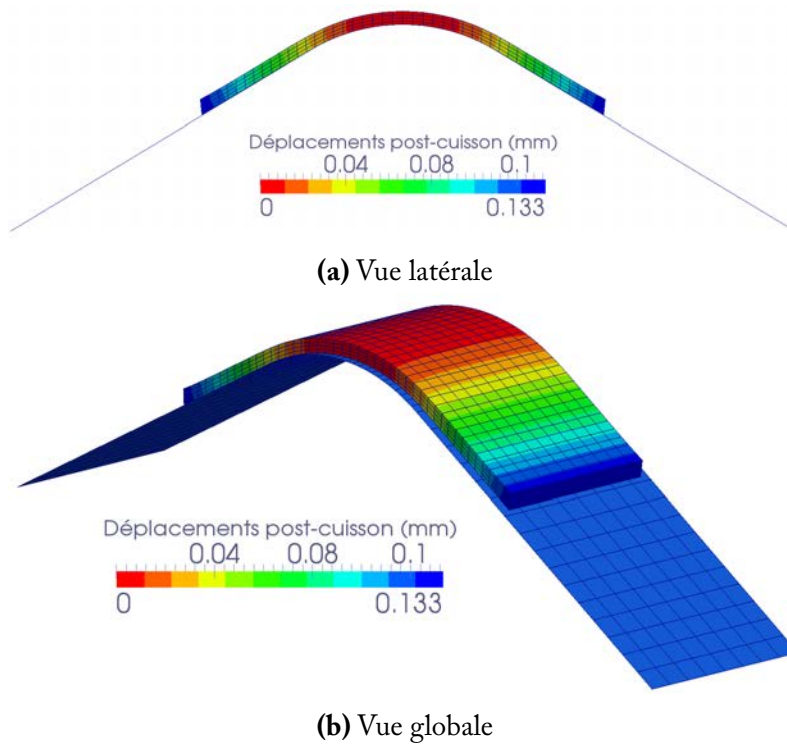
La chaîne de calcul proposée au paragraphe précédent est simulée. Un renfort tissé épais est placé en appui initialement sur l'angle de la cornière, figure 6.9. Après application d'une pression, cuisson (ou pyrolyse) et suppression des efforts externes, le résultat obtenu est présenté figure 6.10 (ou figure 6.11). Les déplacements obtenus après relâchement des efforts de maintien externes sont visualisés.

La simulation de la phase de cuisson, figure 6.10, permet de comparer les déplacements calculés dans ce cas aux déplacements post-pyrolyses figure 6.11. Les résultats obtenus montrent des déplacements faibles par rapport au cas pyrolysé mais tout de même non négligeables. Pour les hypothèses choisies, les déplacements de pyrolyse sont indépendants de ces déplacements de cuisson qui n'ont été calculés que pour valider le niveau des contraintes de mise en forme emmagasinées. Un faible déplacement indique une estimation cohérente.

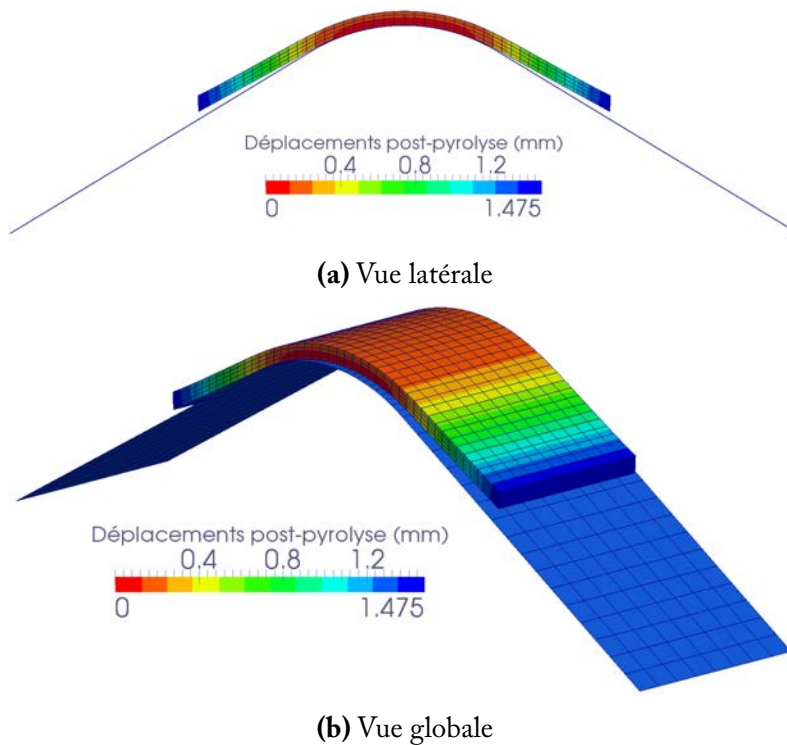
Pour le cas des déplacements après pyrolyse, l'ouverture de la cornière est simulée. L'angle d'ouverture numérique, mesuré sur les faces extérieures de la cornière à l'aide d'un outil de traitement d'image, indique  $124,63^\circ$ . Les résultats expérimentaux, pour un jeu de paramètres équivalent, ont donné un angle de  $128,96^\circ$  pour la cornière. Cependant, lors de la batterie d'essais réalisée, cette mesure a été considérée comme déviante par rapport aux autres résultats. Par conséquent, on prendra la valeur de  $124,41^\circ$  qui a été obtenu pour les paramètres expérimentaux les plus proches de ceux de la simulation. Les résultats obtenus par la simulation sont satisfaisants malgré les hypothèses simplificatrices réalisées. La comparaison finale ne peut être que qualitative devant la variation des résultats expérimentaux et les approximations dans les mesures.



**Figure 6.9** – Simulation de cornière



**Figure 6.10** – Simulation d'une polymérisation de cornière



**Figure 6.11** – Simulation d'une cornière au stade pyrolysé

## 6.6 Bilan du chapitre 6

Dans ce chapitre, une chaîne de calcul permettant la simulation du retour élastique observé expérimentalement après pyrolyse est proposée. Les paramètres influents sur l'amplitude des déformations finales sont étudiés. Afin de simplifier la modélisation de la matrice pyrolysée, plusieurs hypothèses ont été choisies : le renfort utilisé pour la mise en forme est identifié avec un traitement surfacique fixé, les contraintes résiduelles de cuisson sont négligeables par rapport à celles issues de la mise en forme et la phase de densification CVI n'a pas d'influence. Ces hypothèses mènent à une modélisation purement mécanique du phénomène.

Le comportement du matériau pyrolysé est ensuite étudié, plus particulièrement le comportement de la matrice. Ses rigidités secondaires sont identifiées par biais extension test et essai de compression transverse. En cohérence avec ces essais, une loi de comportement isotrope transverse hyperélastique est proposée. Son objectif est d'être additionnée à la loi de comportement hyperélastique pour renforts tissés secs proposée section 2.2.2.2. Pour cela, les mêmes modes de déformation et invariants physique sont utilisés afin de la définir puis d'identifier les paramètres matériaux.

Finalement, une simulation de l'ouverture angulaire de cornières après pyrolyse est proposée. Le renfort est mis en forme, la matrice pyrolysée est introduite avec la loi de comportement isotrope transverse puis les efforts de mise en forme sont relâchés. La valeur numérique de l'angle d'ouverture trouvé est en bonne cohérence avec les valeurs expérimentales.

Malgré les résultats satisfaisants obtenus pour la modélisation du retour élastique après pyrolyse, un approfondissement de ce travail est nécessaire. Les contraintes internes de cuisson, jugées négligeables ici, seraient intéressantes à caractériser afin de connaître exactement leur influence. De plus, la simulation sur cornière proposée est assez simple. Des comparaisons numériques/expérimentales s'avèrent nécessaires pour des pièces plus complexes, à double courbure par exemple.





# Conclusions et perspectives

La maîtrise de la conception des pièces composites à renforts tissés épais passe par la connaissance précise de leur comportement mécanique à tout instant du procédé de fabrication. L'acquisition de simulations significatives enrichies par des modèles numériques de plus en plus pointus est un moyen indispensable pour optimiser ces procédés. Dans cette optique, des contributions à la modélisation de la mise en forme des renforts tissés épais de composite et du procédé de pyrolyse des CMC ont été proposées.

Pour l'aspect mise en forme, des améliorations ont été apportées à la modélisation du comportement des renforts tissés épais. Tout d'abord, une loi hyperélastique macroscopique pour la simulation du comportement a été proposée. Cette loi, basée sur des invariants physiques de la déformation, permet des identifications simplifiées. Une forme polyvalente pour les fonctions densité d'énergie a été détaillée. Des dispositifs d'essai simples sont décrits pour l'identification numérique des paramètres matériaux. La modélisation obtenue grâce à cette loi est satisfaisante. Cependant, la forte anisotropie du comportement des tissés épais soulève l'existence de phénomènes numériques majeurs. Le premier problème est le verrouillage en tension. À cause de la quasi-inextensibilité des mèches et de l'incapacité des éléments finis classiques à représenter un champ de déformation constant pour certains modes de déformations, des efforts numériques largement plus importants que ceux obtenus expérimentalement sont relevés. En corrigeant le champ de déplacement avec l'introduction de variables internes, les éléments *enhanced assumed strain* permettent de réduire, et parfois de supprimer, le phénomène de verrouillage en question. Le deuxième problème numérique identifié est l'hourglassing en flexion. La faible rigidité en compression transverse des tissés épais favorise le développement de modes hourglass transverses qui viennent perturber le comportement en flexion. Par l'introduction d'un paramètre matériau additionnel, la rigidité hourglass en compression transverse est artificiellement augmentée pour supprimer les modes parasites. Finalement, la limitation en flexion de la théorie du premier gradient pour les renforts tissés épais est le dernier problème numérique étudié. Une rigidité supplémentaire, s'appuyant sur une résistance à la courbure de la formulation éléments finis est introduite par l'intermédiaire de plaques *rotation free*. Le moment de flexion qui en découle permet de corriger des problématiques soulignées lors de corrélations essai/simulation de flexion trois points. L'ensemble des phénomènes numériques liés à la simulation de la mise en forme des renforts tissés de composites étudiés a ainsi été amélioré.

Pour l'aspect simulation de la pyrolyse, une chaîne de calcul pour reproduire les dé-

formations en fin du processus de fabrication a été proposée. Elle consiste à simuler la mise en forme du renfort utilisé à l'aide des outils préalablement définis, à introduire un corps supplémentaire (la matrice pyrolysée) puis à observer les déplacements résultants d'un relâchement des efforts de maintien. Une loi de comportement hyperélastique isotrope transverse pour la matrice pyrolysée est introduite puis identifiée sur des essais de traction de bais et de compression transverse. Le résultat final, malgré les hypothèses simplificatrices utilisées, donne des déformations ultimes proches de la réalité pour une simple cornière.

Des perspectives s'ouvrent à l'issu de ce travail dans la plupart des domaines abordés :

- La loi de comportement hyperélastique orthotrope utilisée lors de la mise en forme arrive à maturité après avoir été manipulée par plusieurs doctorants. Cependant, la nécessité d'apporter une réponse définitive aux problématiques de quasi-convexité se fait sentir ;
- Bien que la résolution du verrouillage en tension pour les renforts tissés 2D a été étudiée ces dernières années, son application aux renforts épais n'est pas immédiate. Malgré des résultats satisfaisants ressortant de l'étude proposée ici, le verrouillage n'est pas entièrement supprimé pour la loi hyperélastique orthotrope. L'exploitation de nouvelles voies est nécessaire ;
- La problématique de la flexion a donné lieu, dans ce manuscrit, à des résultats amplement satisfaisants. Des améliorations supplémentaires pourraient être apportées par l'utilisation d'une vraie formulation du second gradient associée à des éléments à degrés de liberté en rotation. L'emploi d'une telle formulation serait par contre probablement contraire aux objectifs d'efficacités et de simplicité de la simulation ainsi que du choix de la résolution explicite ;
- En ce qui concerne la simulation de la phase de pyrolyse, de nombreuses améliorations peuvent encore être apportées dont notamment : l'introduction des contraintes résiduelles de cuisson et l'implémentation d'une résolution implicite pour le retrait progressif des efforts externes, la stabilité et la rapidité de la simulation seraient alors fortement améliorées.

# Annexes



# Annexe A

## Correction de l'invariant de compression transverse

### A.1 Définition du nouvel invariant

L'invariant de compression transverse est initialement défini comme suit par Charmetant [CHA 12] :

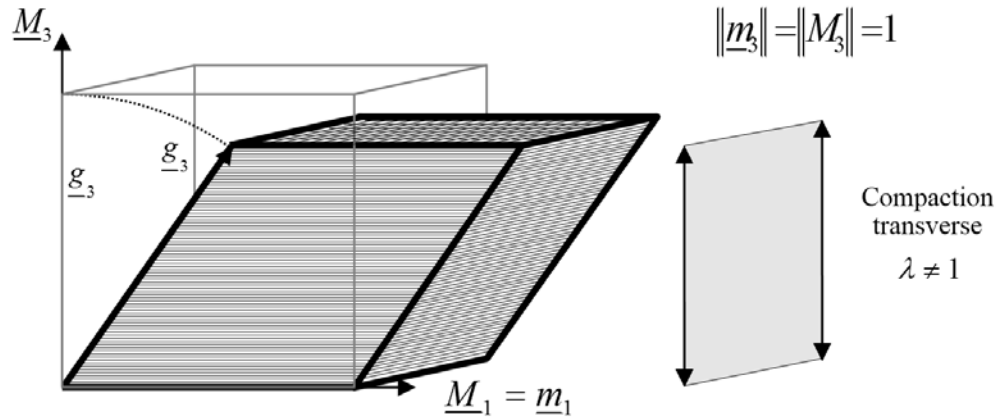
$$I_{comp} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{I_3}{I_{41}I_{42}} \right) \quad (\text{A.1})$$

Cet invariant n'est pas totalement bien défini pour la philosophie de modélisation adoptée. Les sollicitations ont été choisies découplées. Hors, ici, une sollicitation en cisaillement plan de notre élément peut modifier l'invariant de compression sans pour autant que l'épaisseur de l'élément ne change. Si on sollicite l'élément en cisaillement plan pur, on obtient :

$$\begin{cases} I_{41} = 1 \\ I_{42} = 1 \\ I_3 \neq 1 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

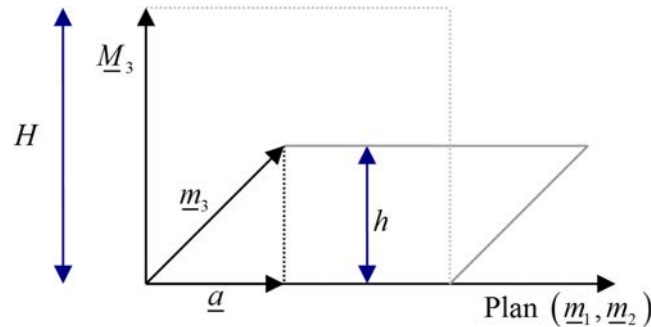
Les vecteurs matériels dans le plan changent d'orientation mais pas de norme, ce qui a pour effet de modifier le volume de l'élément. L'invariant de compression n'est plus nul alors que l'épaisseur n'a pas changée. Les contraintes de compression qui en sont déduites apporteront une contribution non désirée. Afin de résoudre ce problème, une redéfinition de l'invariant est nécessaire. Soit  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$  (Respectivement  $m_1$ ,  $m_2$  et  $m_3$ ) les vecteurs covariants initiaux (respectivement déformés). On décide de baser le nouvel invariant sur la compression du renfort tissé. C'est donc la variation de l'épaisseur de l'élément qui nous intéresse. Cet écrasement n'est pas, comme on pourrait le penser à première vue, uniquement basé sur la variation de longueur du vecteur covariant associé à la direction verticale (vecteur matériel  $m_3$ ). Il est en effet possible que celui-ci change de

direction au cours de la transformation sans changer de norme. Le renfort subit pourtant une compression transverse (voir figure A.1)!



**Figure A.1** – Compression d'un tissu en cisaillement transverse pur

L'invariant de compression précédemment cité prenait en considération cette particularité en étant défini par le changement de volume total ( $J = \sqrt{I_3}$ ) divisé par les déformations en élancement dans les directions chaîne et trame. Pour notre nouvel invariant, on cherche à déterminer analytiquement à partir des invariants à notre disposition la variation de la hauteur de projection du vecteur matériel  $\underline{m}_3$  sur un plan orthogonal au plan formé par les deux autres vecteurs matériels,  $\underline{m}_1$  et  $\underline{m}_2$ . (voir figure A.2)



**Figure A.2** – Projection du vecteur matériel  $\underline{m}_3$  sur un plan orthogonal à  $(\underline{m}_1, \underline{m}_2)$

Pour cela, on cherche le ratio d'extension  $\lambda$  dans le sens 3 de notre élément :

$$\lambda = \frac{h}{H} \quad (\text{A.3})$$

Soit :

$$\lambda = \frac{h}{\|\underline{M}_3\|} \quad (\text{A.4})$$

Par convention, on suppose que la base covariante initiale est orthonormée. En utilisant le théorème de Pythagore on obtient :

$$\lambda^2 = \|\mathbf{m}_3\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2 \quad (\text{A.5})$$

Afin d'obtenir la norme du vecteur  $\mathbf{a}$ , on projette le vecteur covariant  $\mathbf{m}_3$  sur le plan formé par les vecteurs  $\mathbf{m}_1$  et  $\mathbf{m}_2$ . Cependant, la projection n'est pas aisée dans le cas général où  $(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2)$  n'est pas une base orthonormée du plan que ces vecteurs décrivent. Afin de permettre la projection, on va construire une base orthonormée à partir de ces deux vecteurs matériels. On utilise pour cela le procédé de Gram-Schmidt. On définit l'opérateur de projection suivant :

$$proj_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \mathbf{u} \quad (\text{A.6})$$

On construit tout d'abord un premier vecteur  $\mathbf{u}_1$  que l'on va en suite normer pour former le premier vecteur  $\mathbf{e}_1$  de notre base :

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{m}_1 \quad (\text{A.7})$$

$$\boxed{\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{m}_1}{\|\mathbf{m}_1\|}} \quad (\text{A.8})$$

Le second vecteur  $\mathbf{u}_2$ , orthogonal à  $\mathbf{u}_1$ , est construit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2 &= \mathbf{m}_2 - proj_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{m}_2) \\ &= \mathbf{m}_2 - \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{m}_2}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 \\ &= \mathbf{m}_2 - \frac{I_{412}}{I_{41}} \mathbf{m}_1 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Pour rappel, les invariants caractéristiques de milieux orthotropes sont définis section 2.2.2.2. La norme au carré du second vecteur  $\mathbf{u}_2$  est :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_2\|^2 &= \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 \\ &= \left( \mathbf{m}_2 - \frac{I_{412}}{I_{41}} \mathbf{m}_1 \right) \cdot \left( \mathbf{m}_2 - \frac{I_{412}}{I_{41}} \mathbf{m}_1 \right) \\ &= \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{m}_2 + \left( \frac{I_{412}}{I_{41}} \right)^2 \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_1 - 2 \left( \frac{I_{412}}{I_{41}} \right)^2 \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2 \\ &= I_{42} - \frac{I_{412}^2}{I_{41}} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Finalement le second vecteur de notre base est obtenu :

$$\boxed{e_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{I_{42} - \frac{I_{412}^2}{I_{41}}}} \left( \mathbf{m}_2 - \frac{I_{412}}{I_{41}} \mathbf{m}_1 \right)} \quad (\text{A.11})$$

La projection sur le plan formé par les vecteurs  $\mathbf{m}_1$  et  $\mathbf{m}_2$  est maintenant possible puisque l'on connaît une base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  de cet espace :

$$\boxed{\mathbf{a} = (\mathbf{m}_3 \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 + (\mathbf{m}_3 \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_2} \quad (\text{A.12})$$

Soit :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \left( \mathbf{m}_3 \cdot \frac{\mathbf{m}_1}{\|\mathbf{m}_1\|} \right) \frac{\mathbf{m}_1}{\|\mathbf{m}_1\|} + \frac{1}{I_{42} - \frac{I_{412}^2}{I_{41}}} \left( \mathbf{m}_3 \cdot \mathbf{m}_2 - \frac{I_{412}}{I_{41}} \mathbf{m}_1 \right) \left( \mathbf{m}_2 - \frac{I_{412}}{I_{41}} \mathbf{m}_1 \right) \\ &= \frac{I_{413}}{I_{41}} \mathbf{m}_1 + \frac{1}{I_{42} - \frac{I_{412}^2}{I_{41}}} \left( I_{423} - \frac{I_{412}}{I_{41}} I_{413} \right) \left( \mathbf{m}_2 - \frac{I_{412}}{I_{41}} \mathbf{m}_1 \right) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Et après développements :

$$\boxed{\mathbf{a} = \left( \frac{I_{413}I_{42} - I_{412}I_{423}}{I_{42}I_{41} - I_{412}^2} \right) \mathbf{m}_1 + \left( \frac{I_{423}I_{41} - I_{412}I_{413}}{I_{42}I_{41} - I_{412}^2} \right) \mathbf{m}_2} \quad (\text{A.14})$$

On peut dès lors calculer la norme au carré de  $\mathbf{a}$  que l'on cherchait :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}\|^2 &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \\ &= \left( \frac{I_{413}I_{42} - I_{412}I_{423}}{I_{42}I_{41} - I_{412}^2} \right)^2 \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_1 + \left( \frac{I_{423}I_{41} - I_{412}I_{413}}{I_{42}I_{41} - I_{412}^2} \right)^2 \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{m}_2 \\ &\quad + 2 \left( \frac{I_{413}I_{42} - I_{412}I_{423}}{I_{42}I_{41} - I_{412}^2} \right) \left( \frac{I_{423}I_{41} - I_{412}I_{413}}{I_{42}I_{41} - I_{412}^2} \right) \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2 \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Et après développements :

$$\|\mathbf{a}\|^2 = \frac{I_{413}^2 I_{42} - 2I_{413}I_{412}I_{423} + I_{423}^2 I_{41}}{I_{41}I_{42} - I_{412}^2} \quad (\text{A.16})$$

Finalement, on peut exprimer le ratio d'extension selon l'épaisseur de l'élément, au carré en introduisant équation A.16 dans l'équation A.5 :

$$\boxed{\lambda^2 = \frac{I_{41}I_{42}I_{43} - I_{423}^2 I_{41} - I_{413}^2 I_{42} - I_{412}^2 I_{43} + 2I_{413}I_{412}I_{423}}{I_{41}I_{42} - I_{412}^2}} \quad (\text{A.17})$$

Il est possible de réduire cette expression car on peut y reconnaître 2 termes différents :



— L'invariant physique de cisaillement plan :

$$I_{cp} = \frac{I_{412}}{\sqrt{I_{41}I_{42}}} \quad (\text{A.18})$$

— Le troisième invariant du tenseur de Cauchy-Green droit  $I_3$ , désignant la variation de volume au carré.

Afin de faire apparaître ce dernier terme dans l'expression du ratio d'extension, on va exprimer la variation de volume dans un parallélépipède en fonction de la variation de longueur de ses cotés et d'angles entre ses faces :

$$J = \frac{abc}{ABC} \sqrt{1 + 2 \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\gamma) - \cos(\alpha)^2 - \cos(\beta)^2 - \cos(\gamma)^2} \quad (\text{A.19})$$

où  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont les longueurs initiales des cotés ;  $a$ ,  $b$  et  $c$  les longueurs courantes des cotés ;  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  les angles formés entre, respectivement,  $\mathbf{m}_1$  et  $\mathbf{m}_2$ ,  $\mathbf{m}_1$  et  $\mathbf{m}_3$ , et  $\mathbf{m}_2$  et  $\mathbf{m}_3$ . Ces différents paramètres peuvent être exprimés en fonction des invariants de la transformation. Pour les variations de longueurs :

$$\frac{a}{A} = \frac{\|\mathbf{m}_1\|}{\|\mathbf{M}_1\|} = \|\mathbf{m}_1\| = \sqrt{I_{41}} \quad (\text{A.20})$$

Pour les cosinus :

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2}{\|\mathbf{m}_1\| \|\mathbf{m}_2\|} = \frac{I_{421}^2}{\sqrt{I_{41}I_{42}}} \quad (\text{A.21})$$

On peut alors exprimer le troisième invariant de la transformation par :

$$I_3 = J^2 = I_{41}I_{42}I_{43} - I_{423}^2I_{41} - I_{413}^2I_{42} - I_{412}^2I_{43} + 2I_{413}I_{412}I_{423} \quad (\text{A.22})$$

On reconnaît cette expression comme étant le dividende de l'expression du ratio d'extension précédemment trouvé équation A.17. On l'utilisant en association avec l'invariant physique de cisaillement plan (équation A.18), on obtient :

$$\lambda^2 = \frac{I_3}{I_{41}I_{42}(1 - I_{cp}^2)} \quad (\text{A.23})$$

Et de la même manière que Charmetant, on construit un invariant physique de compression égal à la déformation de Hencky dans l'épaisseur de l'élément :

$$I_{comp} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{I_3}{I_{41}I_{42}(1 - I_{cp}^2)} \right) \quad (\text{A.24})$$

On remarque alors que le nouvel invariant physique diffère peu de l'original. On distingue simplement un terme de correction fonction de l'invariant physique de cisaillement plan, qui permet d'éviter toute dilatation ou contraction lors de cette sollicitation.

## A.2 Calcul de la dérivée première

Le calcul de la dérivée de l'invariant par rapport au tenseur de Cauchy-Green droit est nécessaire pour calculer les contraintes de Piola-Kirchhoff créées par la sollicitation.

$$\text{Soit : } u = \frac{I_3}{I_{41}I_{42}(1-I_{cp}^2)} \quad (\text{A.25})$$

$$\frac{\partial I_{comp}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2u} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{C}} \quad (\text{A.26})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{C}} = & \frac{1}{[I_{41}I_{42}(1-I_{cp}^2)]^2} \left[ \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} I_{41}I_{42}(1-I_{cp}^2) \right. \\ & \left. - I_3 \left( \frac{\partial I_{41}}{\partial \mathbf{C}} I_{42}(1-I_{cp}^2) + I_{41} \frac{\partial I_{42}}{\partial \mathbf{C}} (1-I_{cp}^2) - 2I_{41}I_{42}I_{cp} \frac{\partial I_{cp}}{\partial \mathbf{C}} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Les dérivées de chaque invariant sont données par :

$$\frac{\partial I_{41}}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{M}_{11} \text{ avec } \mathbf{M}_{11} = \mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_1 \quad (\text{A.28})$$

$$\frac{\partial I_{42}}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{M}_{22} \text{ avec } \mathbf{M}_{22} = \mathbf{M}_2 \otimes \mathbf{M}_2 \quad (\text{A.29})$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} = \det(\mathbf{C}) [\mathbf{C}^{-1}]^T = I_3 \mathbf{C}^{-1} \quad (\text{A.30})$$

$$\frac{\partial I_{cp}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2\sqrt{I_{41}I_{42}}} (\mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_2 \otimes \mathbf{M}_1) - \frac{I_{cp}}{2I_{41}} \mathbf{M}_{11} - \frac{I_{cp}}{2I_{42}} \mathbf{M}_{22} \quad (\text{A.31})$$

Soit après factorisations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{comp}}{\partial \mathbf{C}} = & \frac{1}{2} \left[ \mathbf{C}^{-1} - \frac{1}{I_{41}(1-I_{cp}^2)} \mathbf{M}_{11} - \frac{1}{I_{42}(1-I_{cp}^2)} \mathbf{M}_{22} \right. \\ & \left. + \frac{I_{cp}}{\sqrt{I_{41}I_{42}}(1-I_{cp}^2)} (\mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_2 \otimes \mathbf{M}_1) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

On fixant  $I_{cp} = 0$ , on retrouve bien les résultats obtenus par Charmetant pour la dérivée première.

### A.2.1 Calcul de la dérivée seconde

Le calcul de la dérivée seconde est nécessaire pour le calcul du pas de temps en explicite et pour le calcul de la matrice matérielle tangente  $\mathbf{C}^{SE}$  en implicite. Pour ce faire, on

calcule la dérivée seconde de l'énergie volumique de compression transverse par le tenseur de Cauchy-Green droit. Les notations suivantes sont adoptées :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}^{SE} &= 4 \frac{\partial^2 w}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \\
 &= 4 \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial I_{comp}^2} \left( \frac{\partial I_{comp}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{comp}}{\partial \mathbf{C}} \right) + \frac{\partial w}{\partial I_{comp}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left( \frac{\partial I_{comp}}{\partial \mathbf{C}} \right) \right] \\
 &= 4 [\mathbf{aA} + \mathbf{bB}]
 \end{aligned} \tag{A.33}$$

On recherche ici uniquement les composantes tensorielles du résultat  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ , les composantes scalaires étant liées à l'expression du potentiel en fonction de l'invariant. A partir de l'équation A.32, on effectue une seconde dérivée par rapport à  $\mathbf{C}$  pour trouver  $\mathbf{B}$ . On obtient alors les dérivées suivantes pour chaque terme :

$$\left( \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} \right)_{ijkl} = -\frac{1}{2} \left( C_{ik}^{-1} C_{jl}^{-1} + C_{il}^{-1} C_{jk}^{-1} \right) \tag{A.34}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left( \frac{1}{I_{41} (1 - I_{cp}^2)} \mathbf{M}_{11} \right) &= \frac{1}{I_{41} (1 - I_{cp}^2)^2} \left[ \frac{I_{cp}}{\sqrt{I_{41} I_{42}}} (\mathbf{M}_{1211} + \mathbf{M}_{2111}) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{I_{41}} \mathbf{M}_{1111} - \frac{I_{cp}^2}{I_{42}} \mathbf{M}_{2211} \right]
 \end{aligned} \tag{A.35}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left( \frac{1}{I_{42} (1 - I_{cp}^2)} \mathbf{M}_{22} \right) &= \frac{1}{I_{42} (1 - I_{cp}^2)^2} \left[ \frac{I_{cp}}{\sqrt{I_{41} I_{42}}} (\mathbf{M}_{1222} + \mathbf{M}_{2122}) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{I_{42}} \mathbf{M}_{2222} - \frac{I_{cp}^2}{I_{41}} \mathbf{M}_{1122} \right]
 \end{aligned} \tag{A.36}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Soit : } d &= \frac{I_{cp}}{\sqrt{I_{41} I_{42}} (1 - I_{cp}^2)} (\mathbf{M}_{12} + \mathbf{M}_{21}) \\
 \frac{\partial d}{\partial \mathbf{C}} &= \frac{1}{I_{41} I_{42} (1 - I_{cp}^2)^2} \left\{ \frac{1 + I_{cp}^2}{2} (\mathbf{M}_{1212} + \mathbf{M}_{2112} + \mathbf{M}_{1221} + \mathbf{M}_{2121}) \right. \\
 &\quad \left. - I_{cp} \left[ \sqrt{\frac{I_{42}}{I_{41}}} (\mathbf{M}_{1112} + \mathbf{M}_{1121}) + \sqrt{\frac{I_{41}}{I_{42}}} (\mathbf{M}_{2212} + \mathbf{M}_{2221}) \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{A.37}$$

Soit finalement :

$$B = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial C^{-1}}{\partial C} + \frac{1}{I_{41}I_{42}(1-I_{cp}^2)^2} \begin{bmatrix} \frac{1+I_{cp}^2}{2} (M_{1212} + M_{2112} + M_{1221} + M_{2121}) \\ -I_{cp}\sqrt{\frac{I_{42}}{I_{41}}} (M_{1112} + M_{1121} + M_{1211} + M_{2111}) \\ -I_{cp}\sqrt{\frac{I_{41}}{I_{42}}} (M_{2212} + M_{2221} + M_{1222} + M_{2122}) \\ +I_{cp}^2 (M_{1122} + M_{2211}) + \frac{I_{42}}{I_{41}} M_{1111} + \frac{I_{41}}{I_{42}} M_{2222} \end{bmatrix} \right\}$$

et :

$$A = \frac{1}{4} \left\{ C^{-1} \otimes C^{-1} + \frac{I_{cp}}{\sqrt{I_{41}I_{42}}(1-I_{cp}^2)} \times \begin{bmatrix} I_{cp} (M_{12} \otimes C^{-1} + M_{21} \otimes C^{-1}) \\ +I_{cp} (C^{-1} \otimes M_{12} + C^{-1} \otimes M_{21}) \\ -\sqrt{\frac{I_{42}}{I_{41}}} (M_{11} \otimes C^{-1} + C^{-1} \otimes M_{11}) \\ -\sqrt{\frac{I_{41}}{I_{42}}} (M_{22} \otimes C^{-1} + C^{-1} \otimes M_{22}) \end{bmatrix} \right. \\ \left. + \frac{1}{I_{41}I_{42}(1-I_{cp}^2)^2} \times \begin{bmatrix} I_{cp}^2 (M_{1212} + M_{2121} + M_{1221} + M_{2112}) \\ + \frac{I_{42}}{I_{41}} M_{1111} + \frac{I_{41}}{I_{42}} M_{2222} + M_{1122} + M_{2211} \\ -I_{cp}\sqrt{\frac{I_{42}}{I_{41}}} (M_{1112} + M_{1121} + M_{1211} + M_{2111}) \\ -I_{cp}\sqrt{\frac{I_{41}}{I_{42}}} (M_{2212} + M_{2221} + M_{1222} + M_{2122}) \end{bmatrix} \right\}$$

## Annexe B

# Postulat d'un nouvel invariant de compression transverse prenant en compte le foisonnement

### B.1 Définition du nouvel invariant

Comme cela est évoqué section 1.3.3.7, la sollicitation en cisaillement transverse provoque, par réarrangement des fibres et mèches, un phénomène de foisonnement dans l'épaisseur du matériau. Afin de quantifier ce phénomène et de le prendre en compte dans la modélisation, un module d'essai a été conçu (figure 1.31). Ce dispositif a permis de confirmer l'existence du phénomène qui doit maintenant être pris en compte par les invariants physiques. Pour ce faire, une nouvelle modification de l'invariant de compression est proposée. L'invariant original postulé par [CHA 11b] est le suivant :

$$I_{comp}^{Charm} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{I_3}{I_{41} I_{42}} \right) \quad (\text{B.1})$$

Puis un nouvel invariant a été proposé pour corriger un défaut de définition en cisaillement plan (équation A.24) :

$$I_{comp}^{new} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{I_3}{I_{41} I_{42} (1 - I_{cp}^2)} \right) \quad (\text{B.2})$$

Ce dernier partait du calcul du ratio d'extension  $\lambda$ , qui exprime l'élongation dans la direction matérielle transverse de notre élément (équation A.3). Nous considérons maintenant que la hauteur de référence pour le calcul de ce ratio d'extension n'est plus la hauteur  $H$  initiale de notre matériau, mais que cette hauteur de référence va varier en fonction du cisaillement transverse appliqué à notre tissé. On remplace alors  $H$  par  $\mathcal{H}(\gamma_{13}, \gamma_{23})$ , une fonction des angles de cisaillement respectivement dans les plan  $(M_1, M_3)$  et  $(M_2, M_3)$ . L'équation A.23 devient alors :

B. Postulat d'un nouvel invariant de compression transverse prenant en compte le foisonnement

---

$$\boxed{\lambda^2 \mathcal{H}^2 = \frac{I_3}{I_{41} I_{42} (1 - I_{cp}^2)}} \quad (\text{B.3})$$

Et l'invariant de compression modifié s'exprime :

$$I_{comp} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{I_3}{\mathcal{H}^2 I_{41} I_{42} (1 - I_{cp}^2)} \right) \quad (\text{B.4})$$

Soit :

$$\boxed{I_{comp} = I_{comp}^{new} - \ln(\mathcal{H})} \quad (\text{B.5})$$

L'expression B.5 peut facilement être interprétée physiquement. La fonction  $\mathcal{H}$  prend une valeur unitaire en l'absence de cisaillement transverse. Dès qu'un cisaillement transverse apparaît, sa valeur augmente. La valeur de  $I_{comp}$  diminue alors, induisant un état virtuel de compression qui va générer des efforts dans la direction transverse et épaissir le renfort. Il reste à exprimer la fonction  $\mathcal{H}(\gamma_{13}, \gamma_{23})$  en fonction d'invariants physique de la transformation. Les invariants physiques de cisaillement transverse  $I_{ct1}$  et  $I_{ct2}$  sont choisis car ils représentent le sinus des angles  $\gamma_{13}$  et  $\gamma_{23}$ . Rappelons aussi que la fonction  $\mathcal{H}$  doit être égale à 1 au repos car la norme du vecteur matériel  $M_3$  qu'elle représente est choisie unitaire. On peut alors postuler une forme de cette fonction. En supposant une identification grâce à des polynômes du second degré et en découplant l'influence des cisaillements, on obtient :

$$\mathcal{H} = 1 + k_0 |I_{ct1}| + k_1 |I_{ct1}|^2 + k_2 |I_{ct2}| + k_3 |I_{ct2}|^2 \quad (\text{B.6})$$

## B.2 Calcul de la dérivée première

Il reste maintenant à identifier le comportement de foisonnement en cisaillement transverse et à vérifier le bon comportement en simulation. On commence par calculer le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff 2 :

$$\mathbf{S}_{comp} = 2 \frac{\partial w_{comp}}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial w_{comp}}{\partial I_{comp}} \frac{\partial I_{comp}}{\partial \mathbf{C}} + 2 \frac{\partial w_{comp}}{\partial I_{ct1}} \frac{\partial I_{ct1}}{\partial \mathbf{C}} + 2 \frac{\partial w_{comp}}{\partial I_{ct2}} \frac{\partial I_{ct2}}{\partial \mathbf{C}} \quad (\text{B.7})$$

On remarque maintenant l'apparition de dérivées de l'énergie de compression par rapport aux invariants de cisaillement transverse. Ceci provient de l'introduction de ces invariants dans l'invariant de compression transverse. En effet, contrairement à précédemment, les invariants de cisaillement transverse peuvent faire varier l'énergie de compression transverse. On simplifie B.7 :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_{comp} &= 2 \frac{\partial w_{comp}}{\partial I_{comp}} \frac{\partial I_{comp}}{\partial \mathbf{C}} + 2 \frac{\partial w_{comp}}{\partial I_{comp}} \frac{\partial I_{comp}}{\partial I_{ct1}} \frac{\partial I_{ct1}}{\partial \mathbf{C}} + 2 \frac{\partial w_{comp}}{\partial I_{comp}} \frac{\partial I_{comp}}{\partial I_{ct2}} \frac{\partial I_{ct2}}{\partial \mathbf{C}} \\
 &= 2 \frac{\partial w_{comp}}{\partial I_{comp}} \left[ \frac{\partial I_{comp}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial I_{comp}}{\partial I_{ct1}} \frac{\partial I_{ct1}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial I_{comp}}{\partial I_{ct2}} \frac{\partial I_{ct2}}{\partial \mathbf{C}} \right] \quad (\text{B.8})
 \end{aligned}$$

Trois dérivées non connues restent à calculer : la dérivée de l'invariant de compression par rapport à Cauchy-Green droit et les dérivées de cet invariant de compression par rapport aux invariants de cisaillement transverse. Ces dernières peuvent être calculées, en partant de B.5, de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I_{comp}}{\partial I_{cti}} &= \frac{\partial I_{comp}^{new}}{\partial I_{cti}} - \frac{1}{\mathcal{H}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_{cti}} \quad i = 1, 2 \\
 &= -\frac{1}{\mathcal{H}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_{cti}} \quad i = 1, 2 \quad (\text{B.9})
 \end{aligned}$$

En utilisant la forme donnée équation B.6 pour  $\mathcal{H}$  :

$$\frac{\partial I_{comp}}{\partial I_{ct1}} = -\frac{1}{\mathcal{H}} (k_0 \text{Signe}(I_{ct1}) + 2k_1 I_{ct1}) \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{\partial I_{comp}}{\partial I_{ct2}} = -\frac{1}{\mathcal{H}} (k_2 \text{Signe}(I_{ct2}) + 2k_3 I_{ct2}) \quad (\text{B.11})$$

Et pour la dérivée de l'invariant de compression par rapport à Cauchy-Green droit :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I_{comp}}{\partial \mathbf{C}} &= \frac{\partial I_{comp}^{new}}{\partial \mathbf{C}} - \frac{1}{\mathcal{H}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{C}} \\
 &= \frac{\partial I_{comp}^{new}}{\partial \mathbf{C}} - \frac{1}{\mathcal{H}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_{ct1}} \frac{\partial I_{ct1}}{\partial \mathbf{C}} - \frac{1}{\mathcal{H}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_{ct2}} \frac{\partial I_{ct2}}{\partial \mathbf{C}} \quad (\text{B.12})
 \end{aligned}$$

Soit pour les contraintes de Piolat-Kirchhoff 2, en insérant les résultats B.9 et B.12 dans B.8 :

$$\mathbf{S}_{comp} = 2 \frac{\partial w_{comp}}{\partial I_{comp}} \left( \frac{\partial I_{comp}^{new}}{\partial \mathbf{C}} - \frac{2}{\mathcal{H}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_{ct1}} \frac{\partial I_{ct1}}{\partial \mathbf{C}} - \frac{2}{\mathcal{H}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_{ct2}} \frac{\partial I_{ct2}}{\partial \mathbf{C}} \right) \quad (\text{B.13})$$

La dérivée de l'invariant de compression amélioré est donnée annexe A, équation A.32, tandis que les dérivées des invariants de cisaillement transverses peuvent être trouvées section 2.2.2.3 :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_{comp} = & \frac{\partial w_{comp}}{\partial I_{comp}} \left[ \mathbf{C}^{-1} - \frac{1}{I_{41}} \left( \frac{1}{(1-I_{cp}^2)} - \frac{2}{\mathcal{H}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_{ct1}} I_{ct1} \right) \mathbf{M}_{11} \right. \\
 & - \frac{1}{I_{42}} \left( \frac{1}{(1-I_{cp}^2)} - \frac{2}{\mathcal{H}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_{ct2}} I_{ct2} \right) \mathbf{M}_{22} \\
 & + \frac{2}{I_{43} \mathcal{H}} \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_{ct1}} I_{ct1} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_{ct2}} I_{ct2} \right) \mathbf{M}_{33} \\
 & + \frac{I_{cp}}{\sqrt{I_{41} I_{42}} (1-I_{cp}^2)} (\mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_2 \otimes \mathbf{M}_1) \\
 & - \frac{2}{\sqrt{I_{41} I_{43}} \mathcal{H}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_{ct1}} (\mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_3 \otimes \mathbf{M}_1) \\
 & \left. - \frac{2}{\sqrt{I_{42} I_{43}} \mathcal{H}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_{ct2}} (\mathbf{M}_2 \otimes \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_3 \otimes \mathbf{M}_2) \right] \quad (\text{B.14})
 \end{aligned}$$

En fixant  $I_{cp} = 0$  et la nullité des dérivées partielles de l'élongation  $\mathcal{H}$ , on retrouve bien les résultats obtenus par Charmetant pour la dérivée première de son invariant de compression transverse.

### B.2.1 Calcul de la dérivée seconde

La dernière étape est le calcul des rigidités tangentés afin d'obtenir des informations supplémentaires sur les quantités à identifier. La composante due à la contribution énergétique en compression transverse est donnée par :

$$C_{comp}^{SE} = 4 \frac{\partial^2 w_{comp}}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}_{comp}}{\partial \mathbf{C}} \quad (\text{B.15})$$

Soit, en différentiant B.7 :



$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{S}_{comp}}{\partial \mathcal{C}} = & 2 \left( \frac{\partial^2 w_{comp}}{\partial I_{comp} \partial I_{comp}} \frac{\partial I_{comp}}{\partial \mathcal{C}} + \frac{\partial^2 w_{comp}}{\partial I_{comp} \partial I_{ct1}} \frac{\partial I_{ct1}}{\partial \mathcal{C}} + \frac{\partial^2 w_{comp}}{\partial I_{comp} \partial I_{ct2}} \frac{\partial I_{ct2}}{\partial \mathcal{C}} \right) \otimes \frac{\partial I_{comp}}{\partial \mathcal{C}} \\
 & + 2 \left( \frac{\partial^2 w_{comp}}{\partial I_{ct1} \partial I_{comp}} \frac{\partial I_{comp}}{\partial \mathcal{C}} + \frac{\partial^2 w_{comp}}{\partial I_{ct1} \partial I_{ct1}} \frac{\partial I_{ct1}}{\partial \mathcal{C}} + \frac{\partial^2 w_{comp}}{\partial I_{ct1} \partial I_{ct2}} \frac{\partial I_{ct2}}{\partial \mathcal{C}} \right) \otimes \frac{\partial I_{ct1}}{\partial \mathcal{C}} \\
 & + 2 \left( \frac{\partial^2 w_{comp}}{\partial I_{ct2} \partial I_{comp}} \frac{\partial I_{comp}}{\partial \mathcal{C}} + \frac{\partial^2 w_{comp}}{\partial I_{ct2} \partial I_{ct1}} \frac{\partial I_{ct1}}{\partial \mathcal{C}} + \frac{\partial^2 w_{comp}}{\partial I_{ct2} \partial I_{ct2}} \frac{\partial I_{ct2}}{\partial \mathcal{C}} \right) \otimes \frac{\partial I_{ct2}}{\partial \mathcal{C}} \\
 & + 2 \frac{\partial w_{comp}}{\partial I_{comp}} \frac{\partial^2 I_{comp}}{\partial \mathcal{C} \partial \mathcal{C}} \\
 & + 2 \frac{\partial w_{comp}}{\partial I_{ct1}} \frac{\partial^2 I_{ct1}}{\partial \mathcal{C} \partial \mathcal{C}} \\
 & + 2 \frac{\partial w_{comp}}{\partial I_{ct2}} \frac{\partial^2 I_{ct2}}{\partial \mathcal{C} \partial \mathcal{C}}
 \end{aligned}$$

Les secondes dérivées partielles par rapport aux invariants peuvent s'exprimer par :

$$\frac{\partial^2 w_{comp}}{\partial I_{comp} \partial I_{cti}} = \frac{\partial^2 w_{comp}}{\partial I_{comp} \partial I_{comp}} \frac{\partial I_{comp}}{\partial I_{cti}} \tag{B.16}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 w_{comp}}{\partial I_{cti} \partial I_{ctj}} &= \frac{\partial^2 w_{comp}}{\partial I_{comp} \partial I_{cti}} \frac{\partial I_{comp}}{\partial I_{ctj}} + \frac{\partial w_{comp}}{\partial I_{comp}} \frac{\partial^2 I_{comp}}{\partial I_{cti} \partial I_{ctj}} \\
 &= \frac{\partial^2 w_{comp}}{\partial I_{comp} \partial I_{comp}} \frac{\partial I_{comp}}{\partial I_{cti}} \frac{\partial I_{comp}}{\partial I_{ctj}} + \frac{\partial w_{comp}}{\partial I_{comp}} \frac{\partial^2 I_{comp}}{\partial I_{cti} \partial I_{ctj}} \tag{B.17}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 w_{comp}}{\partial I_{cti} \partial I_{cti}} = \frac{\partial^2 w_{comp}}{\partial I_{comp} \partial I_{comp}} \left( \frac{\partial I_{comp}}{\partial I_{cti}} \right)^2 + \frac{\partial w_{comp}}{\partial I_{comp}} \frac{\partial^2 I_{comp}}{\partial I_{cti} \partial I_{cti}} \tag{B.18}$$

donnant la dérivée des contraintes selon  $\mathcal{C}$  :

B. Postulat d'un nouvel invariant de compression transverse prenant en compte le foisonnement

---

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{S}_{comp}}{\partial \mathbf{C}} = & 2 \frac{\partial w_{comp}^2}{\partial I_{comp} \partial I_{comp}} \left[ \frac{\partial I_{comp}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial I_{comp}}{\partial I_{ct1}} \frac{\partial I_{ct1}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial I_{comp}}{\partial I_{ct2}} \frac{\partial I_{ct2}}{\partial \mathbf{C}} \right] \otimes \frac{\partial I_{comp}}{\partial \mathbf{C}} \\
& + 2 \frac{\partial w_{comp}^2}{\partial I_{comp} \partial I_{comp}} \left[ \frac{\partial I_{comp}}{\partial I_{ct1}} \frac{\partial I_{comp}}{\partial \mathbf{C}} + \left( \frac{\partial I_{comp}}{\partial I_{ct1}} \right)^2 \frac{\partial I_{ct1}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial I_{comp}}{\partial I_{ct1}} \frac{\partial I_{comp}}{\partial I_{ct2}} \frac{\partial I_{ct2}}{\partial \mathbf{C}} \right] \otimes \frac{\partial I_{ct1}}{\partial \mathbf{C}} \\
& + 2 \frac{\partial w_{comp}^2}{\partial I_{comp} \partial I_{comp}} \left[ \frac{\partial I_{comp}}{\partial I_{ct2}} \frac{\partial I_{comp}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial I_{comp}}{\partial I_{ct1}} \frac{\partial I_{comp}}{\partial I_{ct2}} \frac{\partial I_{ct1}}{\partial \mathbf{C}} + \left( \frac{\partial I_{comp}}{\partial I_{ct2}} \right)^2 \frac{\partial I_{ct2}}{\partial \mathbf{C}} \right] \otimes \frac{\partial I_{ct2}}{\partial \mathbf{C}} \\
& + 2 \frac{\partial w_{comp}}{\partial I_{comp}} \left[ \frac{\partial I_{comp}^2}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} + \frac{\partial I_{comp}}{\partial I_{ct1}} \frac{\partial I_{ct1}^2}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} + \frac{\partial I_{comp}}{\partial I_{ct2}} \frac{\partial I_{ct2}^2}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \right] \\
& + 2 \frac{\partial w_{comp}}{\partial I_{comp}} \left[ \frac{\partial I_{comp}^2}{\partial I_{ct1} \partial I_{ct1}} \frac{\partial I_{ct1}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{ct1}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial I_{comp}^2}{\partial I_{ct1} \partial I_{ct2}} \frac{\partial I_{ct2}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{ct1}}{\partial \mathbf{C}} \right] \\
& + 2 \frac{\partial w_{comp}}{\partial I_{comp}} \left[ \frac{\partial I_{comp}^2}{\partial I_{ct1} \partial I_{ct2}} \frac{\partial I_{ct1}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{ct2}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial I_{comp}^2}{\partial I_{ct2} \partial I_{ct2}} \frac{\partial I_{ct2}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{ct2}}{\partial \mathbf{C}} \right]
\end{aligned}$$

Soit finalement :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{comp}^{SE} = & 4 \frac{\partial w_{comp}^2}{\partial I_{comp} \partial I_{comp}} \left[ \frac{\partial I_{comp}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{comp}}{\partial \mathbf{C}} \right. \\
& + \left( \frac{\partial I_{comp}}{\partial I_{ct1}} \right)^2 \frac{\partial I_{ct1}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{ct1}}{\partial \mathbf{C}} + \left( \frac{\partial I_{comp}}{\partial I_{ct2}} \right)^2 \frac{\partial I_{ct2}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{ct2}}{\partial \mathbf{C}} \\
& + \frac{\partial I_{comp}}{\partial I_{ct1}} \left( \frac{\partial I_{ct1}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{comp}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial I_{comp}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{ct1}}{\partial \mathbf{C}} \right) \\
& + \frac{\partial I_{comp}}{\partial I_{ct2}} \left( \frac{\partial I_{ct2}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{comp}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial I_{comp}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{ct2}}{\partial \mathbf{C}} \right) \\
& \left. + \frac{\partial I_{comp}}{\partial I_{ct1}} \frac{\partial I_{comp}}{\partial I_{ct2}} \left( \frac{\partial I_{ct1}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{ct2}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial I_{ct2}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{ct1}}{\partial \mathbf{C}} \right) \right] \\
& + 4 \frac{\partial w_{comp}}{\partial I_{comp}} \left[ \frac{\partial I_{comp}^2}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} + \frac{\partial I_{comp}}{\partial I_{ct1}} \frac{\partial I_{ct1}^2}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} + \frac{\partial I_{comp}}{\partial I_{ct2}} \frac{\partial I_{ct2}^2}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \right. \\
& + \frac{\partial I_{comp}^2}{\partial I_{ct1} \partial I_{ct1}} \frac{\partial I_{ct1}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{ct1}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial I_{comp}^2}{\partial I_{ct1} \partial I_{ct2}} \frac{\partial I_{ct2}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{ct1}}{\partial \mathbf{C}} \\
& \left. + \frac{\partial I_{comp}^2}{\partial I_{ct1} \partial I_{ct2}} \frac{\partial I_{ct1}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{ct2}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial I_{comp}^2}{\partial I_{ct2} \partial I_{ct2}} \frac{\partial I_{ct2}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{ct2}}{\partial \mathbf{C}} \right]
\end{aligned}$$

Trois dérivées non connues restent à calculer : la seconde dérivée de l'invariant de compression par rapport à Cauchy-Green droit et les secondes dérivées partielles de cette

invariant de compression par rapport aux invariants de cisaillement. Ces dernières peuvent être calculées, en partant de B.9, de la manière suivante :

$$\frac{\partial I_{comp}}{\partial I_{cti} \partial I_{ctj}} = \frac{1}{\mathcal{H}^2} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_{cti}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_{ctj}} - \frac{1}{\mathcal{H}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_{cti} \partial I_{ctj}} \quad i = 1, 2 \quad (\text{B.19})$$

Ce qui en utilisant la forme donnée équation B.6 pour  $\mathcal{H}$  :

$$\frac{\partial I_{comp}}{\partial I_{ct1} \partial I_{ct1}} = \frac{1}{\mathcal{H}^2} (k_0 \text{Signe}(I_{ct1}) + 2k_1 I_{ct1})^2 - \frac{2k_1}{\mathcal{H}} \quad (\text{B.20})$$

$$\frac{\partial I_{comp}}{\partial I_{ct2} \partial I_{ct2}} = \frac{1}{\mathcal{H}^2} (k_2 \text{Signe}(I_{ct2}) + 2k_3 I_{ct2})^2 - \frac{2k_3}{\mathcal{H}} \quad (\text{B.21})$$

$$\frac{\partial I_{comp}}{\partial I_{ct1} \partial I_{ct2}} = \frac{1}{\mathcal{H}^2} (k_2 \text{Signe}(I_{ct2}) + 2k_3 I_{ct2}) (k_2 \text{Signe}(I_{ct1}) + 2k_1 I_{ct1}) \quad (\text{B.22})$$

Ces dérivées partielles sont non nulles au repos, validant la forme de l'interpolation de l'élongation transverse en foisonnement. Et pour la seconde dérivée de l'invariant de compression par rapport à Cauchy-Green droit, en partant de B.12 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I_{comp}}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} &= \frac{\partial^2 I_{comp}^{new}}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} + \frac{2}{\mathcal{H}^2} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{C}} - \frac{1}{\mathcal{H}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \\ &= \frac{\partial^2 I_{comp}^{new}}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} + \frac{2}{\mathcal{H}^2} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_{ct1}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_{ct2}} \left( \frac{\partial I_{ct1}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{ct2}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial I_{ct2}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{ct1}}{\partial \mathbf{C}} \right) \\ &\quad + \frac{2}{\mathcal{H}^2} \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_{ct1}} \right)^2 \frac{\partial I_{ct1}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{ct1}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{2}{\mathcal{H}^2} \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_{ct2}} \right)^2 \frac{\partial I_{ct2}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{ct2}}{\partial \mathbf{C}} \\ &\quad - \frac{1}{\mathcal{H}} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial I_{ct1} \partial I_{ct1}} \frac{\partial I_{ct1}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{ct1}}{\partial \mathbf{C}} - \frac{1}{\mathcal{H}} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial I_{ct2} \partial I_{ct2}} \frac{\partial I_{ct2}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{ct2}}{\partial \mathbf{C}} \\ &\quad - \frac{1}{\mathcal{H}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_{ct1}} \frac{\partial^2 I_{ct1}}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} - \frac{1}{\mathcal{H}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_{ct2}} \frac{\partial^2 I_{ct2}}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

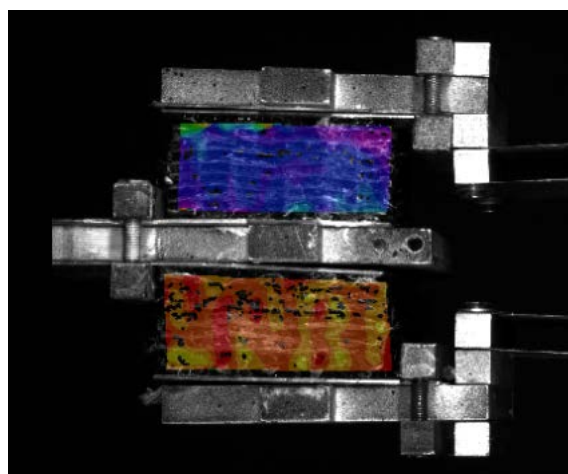
Soit finalement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I_{comp}}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} &= \frac{\partial^2 I_{comp}^{new}}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} + \frac{2}{\mathcal{H}^2} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_{ct1}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_{ct2}} \left( \frac{\partial I_{ct1}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{ct2}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial I_{ct2}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{ct1}}{\partial \mathbf{C}} \right) \\ &\quad + \left( \frac{2}{\mathcal{H}^2} \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_{ct1}} \right)^2 - \frac{1}{\mathcal{H}} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial I_{ct1} \partial I_{ct1}} \right) \frac{\partial I_{ct1}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{ct1}}{\partial \mathbf{C}} \\ &\quad + \left( \frac{2}{\mathcal{H}^2} \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_{ct2}} \right)^2 - \frac{1}{\mathcal{H}} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial I_{ct2} \partial I_{ct2}} \right) \frac{\partial I_{ct2}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{ct2}}{\partial \mathbf{C}} \\ &\quad - \frac{1}{\mathcal{H}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_{ct1}} \frac{\partial^2 I_{ct1}}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} - \frac{1}{\mathcal{H}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_{ct2}} \frac{\partial^2 I_{ct2}}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

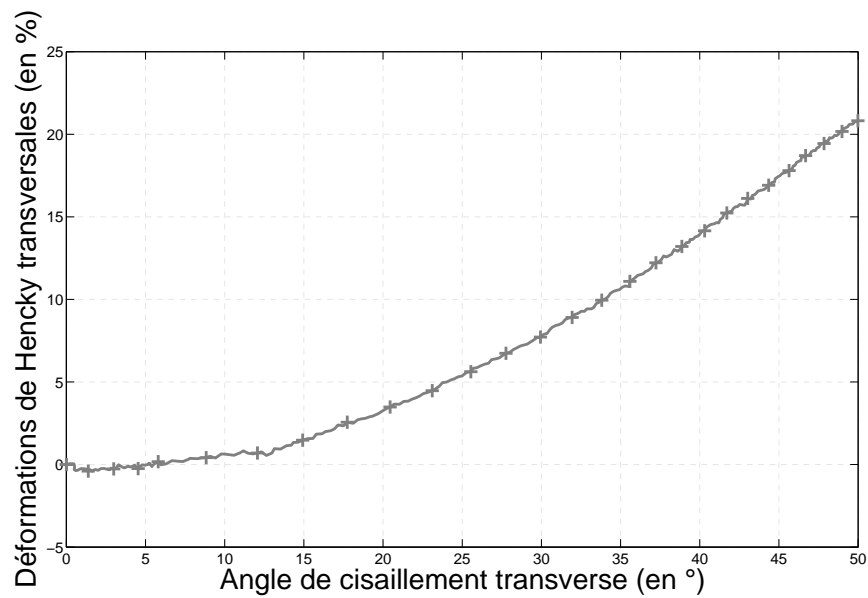
Toutes les données analytiques pour mener à bien l'assemblage du tenseur matériel tangent ont été données. Pour éviter des notations encore plus lourdes, l'expression totale n'est pas détaillée ici.

### B.3 Identification de l'épaississement

Afin d'utiliser les développements détaillés dans les paragraphes précédents, l'identification de la variation d'épaisseur en fonction du cisaillement transverse doit être réalisée. Pour cela le dispositif présenté section 1.3.3.7 peut être utilisé. En appliquant un mouche-tis sur les plaques de traction supérieures et inférieures, la variation de l'épaisseur peut être suivie par corrélation d'image. Le logiciel de corrélation d'image VIC-2D<sup>TM</sup> est utilisé, figure B.1. Après analyse de l'ensemble des images de l'essai, la variation de hauteur en fonction de l'angle de cisaillement transverse du tissu peut être tracée, figure B.2. L'implémentation de ce nouvel invariant n'a pas pu être réalisée, ni donc testée.



**Figure B.1** – Suivi par corrélation du cisaillement transverse sur tissu interlock



**Figure B.2** – Exemple de déformations transversales en fonction de l'angle de cisaillement transverse sens chaîne pour un interlock



# Annexe C

## Composantes tensorielles des rigidités matérielles tangentes de la loi hyperélastique orthotrope

### C.1 Variables tensorielles calculées

Cette annexe détaille les composantes tensorielles des rigidités matérielles tangentes de la loi hyperélastique orthotrope telle que définie section 2.2. La forme générale de la contribution de chaque sollicitation à la matrice tangente est donnée par :

$$C_i^{SE} = 4 \left[ \frac{\partial^2 w_i(I_i)}{\partial I_i^2} \left( \frac{\partial I_i}{\partial C} \otimes \frac{\partial I_i}{\partial C} \right) + \frac{\partial w_i(I_i)}{\partial I_i} \frac{\partial}{\partial C} \left( \frac{\partial I_i}{\partial C} \right) \right] \quad (C.1)$$

Pour simplification :

$$C_i^{SE} = 4[a_i A_i + b_i B_i] \quad (C.2)$$

Les composantes  $A_i$  et  $B_i$  seront données dans les paragraphes suivants.

### C.2 Composante en élongation de la matrice tangente

Rappel de l'invariant d'élongation :

$$I_{elongi} = \ln(\sqrt{I_{4i}}) \quad i \in 1, 2 \quad (C.3)$$

Première dérivée de l'invariant d'élongation par rapport à Cauchy-Green droit  $C$  :

$$\frac{\partial I_{elongi}}{\partial C} = \frac{1}{2I_{4i}} M_{ii} \quad (C.4)$$

D'où :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\text{elongi}} &= \frac{\partial I_{\text{elongi}}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{\text{elongi}}}{\partial \mathbf{C}} \\ &= \frac{1}{4I_{4i}^2} \mathbf{M}_{iiii} \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\text{elongi}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left( \frac{\partial I_{\text{elongi}}}{\partial \mathbf{C}} \right) \\ &= -\frac{1}{2I_{4i}^2} \mathbf{M}_{iiii} \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

### C.3 Composante en compression de la matrice tangente

Rappel de l'invariant de compression :

$$I_{\text{comp}} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{I_3}{I_{41} I_{42} (1 - I_{cp}^2)} \right) \quad (\text{C.7})$$

Première dérivée de l'invariant de compression par rapport à Cauchy-Green droit  $\mathbf{C}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{\text{comp}}}{\partial \mathbf{C}} &= \frac{1}{2} \left[ \mathbf{C}^{-1} - \frac{1}{I_{41} (1 - I_{cp}^2)} \mathbf{M}_{11} - \frac{1}{I_{42} (1 - I_{cp}^2)} \mathbf{M}_{22} \right. \\ &\quad \left. + \frac{I_{cp}}{\sqrt{I_{41} I_{42}} (1 - I_{cp}^2)} (\mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_2 \otimes \mathbf{M}_1) \right] \end{aligned}$$

D'où :

$$\mathbf{A}_{\text{comp}} = \frac{\partial I_{\text{comp}}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{\text{comp}}}{\partial \mathbf{C}} \quad (\text{C.8})$$

$$\mathbf{A}_{\text{comp}} = \frac{1}{4} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + \frac{I_{cp}}{\sqrt{I_{41} I_{42}} (1 - I_{cp}^2)} \times \left[ \begin{array}{l} I_{cp} (\mathbf{M}_{12} \otimes \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{M}_{21} \otimes \mathbf{C}^{-1}) \\ + I_{cp} (\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{M}_{12} + \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{M}_{21}) \\ - \sqrt{\frac{I_{42}}{I_{41}}} (\mathbf{M}_{11} \otimes \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{M}_{11}) \\ - \sqrt{\frac{I_{41}}{I_{42}}} (\mathbf{M}_{22} \otimes \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{M}_{22}) \end{array} \right] \\ + \frac{1}{I_{41} I_{42} (1 - I_{cp}^2)^2} \times \left[ \begin{array}{l} I_{cp}^2 (\mathbf{M}_{1212} + \mathbf{M}_{2121} + \mathbf{M}_{1221} + \mathbf{M}_{2112}) \\ + \frac{I_{42}}{I_{41}} \mathbf{M}_{1111} + \frac{I_{41}}{I_{42}} \mathbf{M}_{2222} + \mathbf{M}_{1122} + \mathbf{M}_{2211} \\ - I_{cp} \sqrt{\frac{I_{42}}{I_{41}}} (\mathbf{M}_{1112} + \mathbf{M}_{1121} + \mathbf{M}_{1211} + \mathbf{M}_{2111}) \\ - I_{cp} \sqrt{\frac{I_{41}}{I_{42}}} (\mathbf{M}_{2212} + \mathbf{M}_{2221} + \mathbf{M}_{1222} + \mathbf{M}_{2122}) \end{array} \right] \end{array} \right\}$$



et :

$$\mathbf{B}_{comp} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left( \frac{\partial I_{comp}}{\partial \mathbf{C}} \right) \quad (\text{C.9})$$

$$\mathbf{B}_{comp} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{1}{I_{41} I_{42} (1 - I_{cp}^2)^2} \begin{bmatrix} \frac{1+I_{cp}^2}{2} (\mathbf{M}_{1212} + \mathbf{M}_{2112} + \mathbf{M}_{1221} + \mathbf{M}_{2121}) \\ -I_{cp} \sqrt{\frac{I_{42}}{I_{41}}} (\mathbf{M}_{1112} + \mathbf{M}_{1121} + \mathbf{M}_{1211} + \mathbf{M}_{2111}) \\ -I_{cp} \sqrt{\frac{I_{41}}{I_{42}}} (\mathbf{M}_{2212} + \mathbf{M}_{2221} + \mathbf{M}_{1222} + \mathbf{M}_{2122}) \\ +I_{cp}^2 (\mathbf{M}_{1122} + \mathbf{M}_{2211}) + \frac{I_{42}}{I_{41}} \mathbf{M}_{1111} + \frac{I_{41}}{I_{42}} \mathbf{M}_{2222} \end{bmatrix} \right\}$$

avec :

$$\left( \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} \right)_{ijkl} = -\frac{1}{2} [C_{ik}^{-1} C_{jl}^{-1} + C_{il}^{-1} C_{jk}^{-1}] \quad (\text{C.10})$$

## C.4 Composante en cisaillement de la matrice tangente

Rappel des invariants en cisaillement :

$$I_{cij} = \frac{I_{4ij}}{\sqrt{I_{4i} I_{4j}}} \quad (\text{C.11})$$

Première dérivée de l'invariant de cisaillement par rapport à Cauchy-Green droit  $\mathbf{C}$  :

$$\frac{\partial I_{cij}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{I_{4i} I_{4j}}} (\mathbf{M}_{ij} + \mathbf{M}_{ji}) - \frac{I_{cij}}{I_{4i}} \mathbf{M}_{ii} - \frac{I_{cij}}{I_{4j}} \mathbf{M}_{jj} \right] \quad (\text{C.12})$$

D'où :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{cij} &= \frac{\partial I_{cij}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{cij}}{\partial \mathbf{C}} \\ &= \frac{1}{4I_{4i} I_{4j}} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}_{ijij} + \mathbf{M}_{ijji} + \mathbf{M}_{jüj} + \mathbf{M}_{jji} \\ -I_{cij} \sqrt{\frac{I_{4i}}{I_{4j}}} (\mathbf{M}_{ijü} + \mathbf{M}_{iüj} + \mathbf{M}_{jüi} + \mathbf{M}_{iüj}) \\ -I_{cij} \sqrt{\frac{I_{4j}}{I_{4i}}} (\mathbf{M}_{ijjj} + \mathbf{M}_{jjij} + \mathbf{M}_{jijj} + \mathbf{M}_{jjji}) \\ +I_{cij}^2 \left[ \mathbf{M}_{iüj} + \mathbf{M}_{jüi} + \frac{I_{4j}}{I_{4i}} \mathbf{M}_{iüi} + \frac{I_{4i}}{I_{4j}} \mathbf{M}_{jjjj} \right] \end{array} \right\} \quad (\text{C.13}) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{cij} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left( \frac{\partial I_{cij}}{\partial \mathbf{C}} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left( \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{I_{4i} I_{4j}}} (\mathbf{M}_{ij} + \mathbf{M}_{ji}) - \frac{I_{cij}}{I_{4i}} \mathbf{M}_{ii} - \frac{I_{cij}}{I_{4j}} \mathbf{M}_{jj} \right] \right) \quad (\text{C.14}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}_{cij} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left( \frac{\partial I_{cij}}{\partial \mathbf{C}} \right) \\
 &= \frac{1}{4I_{4i}I_{4j}} \left\{ \begin{array}{l} I_{cij} \left[ \mathbf{M}_{iijj} + \mathbf{M}_{jjii} + \left( \frac{I_{4j}}{I_{4i}} \mathbf{M}_{iiii} + \frac{I_{4i}}{I_{4j}} \mathbf{M}_{jjjj} \right) \right] \\ -\sqrt{\frac{I_{4j}}{I_{4i}}} (\mathbf{M}_{ijji} + \mathbf{M}_{iiij} + \mathbf{M}_{jiii} + \mathbf{M}_{iiji}) \\ -\sqrt{\frac{I_{4i}}{I_{4j}}} (\mathbf{M}_{ijjj} + \mathbf{M}_{jjij} + \mathbf{M}_{jijj} + \mathbf{M}_{jjji}) \end{array} \right\} \quad (\text{C.15})
 \end{aligned}$$

## Annexe D

# Calcul des matrices associées à la stabilisation dans la formulation *enhanced assumed strain*

Cette annexe a pour objectif de déterminer analytiquement et explicitement les matrices de stabilisations physiques de la formulation *enhanced assumed strain* décrite section 3.4. Ces matrices sont :  $\mathbf{K}_{uu}^{ij}$  (équation 3.115),  $\mathbf{K}_{\alpha u}^i$  (équation 3.109) et  $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}$  (équation 3.110). Pour différencier les matrices  $\mathbf{K}_{\alpha u}^i$  et  $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}$  en fonction du nombre de variables internes choisies, un exposant sera utilisé : E9 pour 9 variables internes (matrice d'interpolation 3.90) et E21 pour 21 variables internes (matrice d'interpolation 3.92).

### D.1 Calcul de $\mathbf{K}_{uu}^{ij}$ et $\mathbf{K}_{\alpha u}^i$

La matrice de stabilisation, équation 3.89, est réécrite de la forme :

$$\tilde{\mathbf{B}}_{stab}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^4 \tilde{\mathbf{B}}_i(\boldsymbol{\xi}) \Gamma_i^T \quad (\text{D.1})$$

Les matrices associées à chaque vecteur de stabilisation  $\tilde{\mathbf{B}}_i(\boldsymbol{\xi})$  sont données par :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{B}}_1 &= \rho_1 \mathbf{B}_{11} + \rho_2 \mathbf{B}_{12} \\ \tilde{\mathbf{B}}_2 &= \rho_2 \mathbf{B}_{22} + \rho_3 \mathbf{B}_{23} \\ \tilde{\mathbf{B}}_3 &= \rho_1 \mathbf{B}_{31} + \rho_3 \mathbf{B}_{33} \\ \tilde{\mathbf{B}}_4 &= \rho_4 \mathbf{B}_{44} + \rho_5 \mathbf{B}_{55} + \rho_6 \mathbf{B}_{66} \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

où les  $\rho_j(\boldsymbol{\xi})$  sont les dérivées selon  $\boldsymbol{\xi}$  des fonctions hourglass  $h_i(\boldsymbol{\xi})$  :

$$\rho_1 = \xi, \rho_2 = \eta, \rho_3 = \zeta, \rho_4 = \xi\eta, \rho_5 = \eta\zeta \text{ et } \rho_6 = \zeta\xi \quad (\text{D.3})$$

Les matrices individuelles  $\mathbf{B}_{ij}$  de  $6 \times 3$  peuvent être exprimées simplement :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}_{11} &= [\mathbf{e}_4 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_5] & \mathbf{B}_{12} &= [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_4 \ \mathbf{e}_6] & \mathbf{B}_{31} &= [\mathbf{e}_6 \ \mathbf{e}_5 \ \mathbf{e}_3] \\
 \mathbf{B}_{22} &= [\mathbf{e}_6 \ \mathbf{e}_5 \ \mathbf{e}_3] & \mathbf{B}_{23} &= [\mathbf{e}_4 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_5] & \mathbf{B}_{33} &= [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_4 \ \mathbf{e}_6] \\
 \mathbf{B}_{44} &= [\mathbf{e}_6 \ \mathbf{e}_5 \ \mathbf{e}_3] & \mathbf{B}_{55} &= [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_4 \ \mathbf{e}_6] & \mathbf{B}_{66} &= [\mathbf{e}_4 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_5]
 \end{aligned} \tag{D.4}$$

où les  $\mathbf{e}_i$  sont les vecteurs classiques de la base de  $\mathfrak{R}^6$ . En utilisant les conditions d'orthogonalité des dérivées des fonctions de forme  $\rho_i(\boldsymbol{\xi})$ . On utilisera alors le résultat D.5 pour obtenir les expressions analytiques des intégrales de  $\mathbf{K}_{uu}^{ij}$ .

$$\int_{\square} \rho_i \rho_j d\square = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \frac{8}{3}, & i = j \\ \frac{8}{9}, & i = j = 4, 5, 6 \end{cases} \quad 1 \leq i \leq 3 \tag{D.5}$$

En exploitant les décompositions en  $\tilde{\mathbf{B}}_i$  (équation D.2) ainsi que les résultats des intégrales (équation D.5), on obtient pour les  $\mathbf{K}_{uu}^{ij}$  (équation 3.115) non nuls :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{uu}^{11} &= \frac{8}{3} \mathbf{B}_{11}^T \tilde{\mathbf{C}}^{SE} \mathbf{B}_{11} + \frac{8}{3} \mathbf{B}_{12}^T \tilde{\mathbf{C}}^{SE} \mathbf{B}_{12}, & \mathbf{K}_{uu}^{12} &= \frac{8}{3} \mathbf{B}_{12}^T \tilde{\mathbf{C}}^{SE} \mathbf{B}_{22}, & \mathbf{K}_{uu}^{13} &= \frac{8}{3} \mathbf{B}_{11}^T \tilde{\mathbf{C}}^{SE} \mathbf{B}_{31} \\
 \mathbf{K}_{uu}^{22} &= \frac{8}{3} \mathbf{B}_{22}^T \tilde{\mathbf{C}}^{SE} \mathbf{B}_{22} + \frac{8}{3} \mathbf{B}_{23}^T \tilde{\mathbf{C}}^{SE} \mathbf{B}_{23}, & \mathbf{K}_{uu}^{21} &= \frac{8}{3} \mathbf{B}_{22}^T \tilde{\mathbf{C}}^{SE} \mathbf{B}_{12}, & \mathbf{K}_{uu}^{23} &= \frac{8}{3} \mathbf{B}_{23}^T \tilde{\mathbf{C}}^{SE} \mathbf{B}_{33} \\
 \mathbf{K}_{uu}^{33} &= \frac{8}{3} \mathbf{B}_{31}^T \tilde{\mathbf{C}}^{SE} \mathbf{B}_{31} + \frac{8}{3} \mathbf{B}_{33}^T \tilde{\mathbf{C}}^{SE} \mathbf{B}_{33}, & \mathbf{K}_{uu}^{31} &= \frac{8}{3} \mathbf{B}_{31}^T \tilde{\mathbf{C}}^{SE} \mathbf{B}_{11}, & \mathbf{K}_{uu}^{32} &= \frac{8}{3} \mathbf{B}_{33}^T \tilde{\mathbf{C}}^{SE} \mathbf{B}_{23} \\
 \mathbf{K}_{uu}^{44} &= \frac{8}{9} \mathbf{B}_{44}^T \tilde{\mathbf{C}}^{SE} \mathbf{B}_{44} + \frac{8}{9} \mathbf{B}_{55}^T \tilde{\mathbf{C}}^{SE} \mathbf{B}_{55} + \frac{8}{9} \mathbf{B}_{66}^T \tilde{\mathbf{C}}^{SE} \mathbf{B}_{66}
 \end{aligned} \tag{D.6}$$

où  $\tilde{\mathbf{C}}^{SE}$  est la matrice matérielle tangente exprimée dans le domaine isoparamétrique (équation 3.104). Dans la suite l'exposant *SE* de la matrice matérielle tangente sera omis pour alléger les notations. Afin de réduire drastiquement le temps de calcul et éviter des calculs de multiplication de matrices, on peut alors trouver directement les expressions analytiques des  $\mathbf{K}_{uu}^{ij}$ , qui sont des matrices  $3 \times 3$  :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{uu}^{11} &= \frac{8}{3} \bar{J}_0 \begin{bmatrix} \tilde{C}_{44} + \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{42} + \tilde{C}_{14} & \tilde{C}_{45} + \tilde{C}_{16} \\ \tilde{C}_{24} + \tilde{C}_{41} & \tilde{C}_{22} + \tilde{C}_{44} & \tilde{C}_{25} + \tilde{C}_{46} \\ \tilde{C}_{54} + \tilde{C}_{61} & \tilde{C}_{52} + \tilde{C}_{64} & \tilde{C}_{55} + \tilde{C}_{66} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{K}_{uu}^{22} &= \frac{8}{3} \bar{J}_0 \begin{bmatrix} \tilde{C}_{66} + \tilde{C}_{44} & \tilde{C}_{65} + \tilde{C}_{42} & \tilde{C}_{63} + \tilde{C}_{45} \\ \tilde{C}_{56} + \tilde{C}_{24} & \tilde{C}_{55} + \tilde{C}_{22} & \tilde{C}_{53} + \tilde{C}_{25} \\ \tilde{C}_{36} + \tilde{C}_{54} & \tilde{C}_{35} + \tilde{C}_{52} & \tilde{C}_{33} + \tilde{C}_{55} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{K}_{uu}^{33} &= \frac{8}{3} \bar{J}_0 \begin{bmatrix} \tilde{C}_{66} + \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{65} + \tilde{C}_{14} & \tilde{C}_{63} + \tilde{C}_{16} \\ \tilde{C}_{56} + \tilde{C}_{41} & \tilde{C}_{55} + \tilde{C}_{44} & \tilde{C}_{53} + \tilde{C}_{46} \\ \tilde{C}_{36} + \tilde{C}_{61} & \tilde{C}_{35} + \tilde{C}_{64} & \tilde{C}_{33} + \tilde{C}_{66} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{K}_{uu}^{44} &= \frac{8}{9} \bar{J}_0 \begin{bmatrix} \tilde{C}_{44} + \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{44} + \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{44} + \tilde{C}_{11} \\ \tilde{C}_{44} + \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{44} + \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{44} + \tilde{C}_{11} \\ \tilde{C}_{44} + \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{44} + \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{44} + \tilde{C}_{11} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{uu}^{13} &= \frac{8}{3} \bar{j}_0 \begin{bmatrix} \tilde{C}_{46} & \tilde{C}_{45} & \tilde{C}_{43} \\ \tilde{C}_{26} & \tilde{C}_{25} & \tilde{C}_{23} \\ \tilde{C}_{56} & \tilde{C}_{55} & \tilde{C}_{53} \end{bmatrix} & \mathbf{K}_{uu}^{31} &= \frac{8}{3} \bar{j}_0 \begin{bmatrix} \tilde{C}_{64} & \tilde{C}_{62} & \tilde{C}_{65} \\ \tilde{C}_{54} & \tilde{C}_{52} & \tilde{C}_{55} \\ \tilde{C}_{34} & \tilde{C}_{32} & \tilde{C}_{35} \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_{uu}^{12} &= \frac{8}{3} \bar{j}_0 \begin{bmatrix} \tilde{C}_{16} & \tilde{C}_{15} & \tilde{C}_{13} \\ \tilde{C}_{46} & \tilde{C}_{45} & \tilde{C}_{43} \\ \tilde{C}_{66} & \tilde{C}_{65} & \tilde{C}_{63} \end{bmatrix} & \mathbf{K}_{uu}^{21} &= \frac{8}{3} \bar{j}_0 \begin{bmatrix} \tilde{C}_{61} & \tilde{C}_{64} & \tilde{C}_{66} \\ \tilde{C}_{51} & \tilde{C}_{54} & \tilde{C}_{56} \\ \tilde{C}_{31} & \tilde{C}_{34} & \tilde{C}_{36} \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_{uu}^{32} &= \frac{8}{3} \bar{j}_0 \begin{bmatrix} \tilde{C}_{14} & \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{15} \\ \tilde{C}_{44} & \tilde{C}_{42} & \tilde{C}_{45} \\ \tilde{C}_{64} & \tilde{C}_{62} & \tilde{C}_{65} \end{bmatrix} & \mathbf{K}_{uu}^{23} &= \frac{8}{3} \bar{j}_0 \begin{bmatrix} \tilde{C}_{41} & \tilde{C}_{44} & \tilde{C}_{46} \\ \tilde{C}_{21} & \tilde{C}_{24} & \tilde{C}_{26} \\ \tilde{C}_{51} & \tilde{C}_{54} & \tilde{C}_{56} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec  $\bar{j}_0$  le jacobien de la transformation dans le repère matériel au centre du domaine isoparamétrique. De même, en exploitant les décompositions en  $\tilde{\mathbf{B}}_i$  (équation D.2) ainsi que les résultats des intégrales (équation D.5), on obtient pour les  $\mathbf{K}_{\alpha u}^i$  (équation 3.109), qui sont des matrices  $9 \times 3$ , associées à l'élément à 9 variables internes :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\alpha u}^{1E9} &= \frac{8}{3} \bar{j}_0 \begin{bmatrix} \tilde{C}_{14} & \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{15} \\ \tilde{C}_{21} & \tilde{C}_{24} & \tilde{C}_{26} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{44} & \tilde{C}_{42} & \tilde{C}_{45} \\ \tilde{C}_{41} & \tilde{C}_{44} & \tilde{C}_{46} \\ \tilde{C}_{51} & \tilde{C}_{54} & \tilde{C}_{56} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{64} & \tilde{C}_{62} & \tilde{C}_{65} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{K}_{\alpha u}^{2E9} &= \frac{8}{3} \bar{j}_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{26} & \tilde{C}_{25} & \tilde{C}_{23} \\ \tilde{C}_{34} & \tilde{C}_{32} & \tilde{C}_{35} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{46} & \tilde{C}_{45} & \tilde{C}_{43} \\ \tilde{C}_{56} & \tilde{C}_{55} & \tilde{C}_{53} \\ \tilde{C}_{54} & \tilde{C}_{52} & \tilde{C}_{553} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{64} & \tilde{C}_{62} & \tilde{C}_{65} \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_{\alpha u}^{3E9} &= \frac{8}{3} \bar{j}_0 \begin{bmatrix} \tilde{C}_{16} & \tilde{C}_{15} & \tilde{C}_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{31} & \tilde{C}_{34} & \tilde{C}_{36} \\ \tilde{C}_{46} & \tilde{C}_{45} & \tilde{C}_{43} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{51} & \tilde{C}_{54} & \tilde{C}_{56} \\ \tilde{C}_{66} & \tilde{C}_{65} & \tilde{C}_{63} \\ \tilde{C}_{61} & \tilde{C}_{64} & \tilde{C}_{66} \end{bmatrix} & \mathbf{K}_{\alpha u}^{4E9} &= \frac{8}{9} \bar{j}_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pour l'élément à 21 variables internes, les matrices  $\mathbf{K}_{\alpha u}^{iE21}$ , qui sont des matrices  $21 \times 3$ , comportent les 9 premières lignes de leurs équivalentes pour l'élément à 9 variables internes :

$$\mathbf{K}_{\alpha u}^{iE21} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha u}^{iE9} \\ \mathbf{K}_{\alpha u}^{iE21*} \end{bmatrix} \quad (\text{D.7})$$

où :

$$\mathbf{K}_{\alpha u}^{1E21*} = \frac{8\bar{j}_0}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{\alpha u}^{2E21*} = \frac{8\bar{j}_0}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{\alpha u}^{3E21*} = \frac{8\bar{j}_0}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{\alpha u}^{4E21*} = \frac{8\bar{j}_0}{9} \begin{bmatrix} \tilde{C}_{44} & \tilde{C}_{42} & \tilde{C}_{45} \\ \tilde{C}_{41} & \tilde{C}_{44} & \tilde{C}_{46} \\ \tilde{C}_{56} & \tilde{C}_{55} & \tilde{C}_{53} \\ \tilde{C}_{54} & \tilde{C}_{52} & \tilde{C}_{55} \\ \tilde{C}_{66} & \tilde{C}_{65} & \tilde{C}_{63} \\ \tilde{C}_{61} & \tilde{C}_{64} & \tilde{C}_{66} \\ \tilde{C}_{16} & \tilde{C}_{15} & \tilde{C}_{13} \\ \tilde{C}_{14} & \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{15} \\ \tilde{C}_{26} & \tilde{C}_{25} & \tilde{C}_{23} \\ \tilde{C}_{21} & \tilde{C}_{24} & \tilde{C}_{26} \\ \tilde{C}_{34} & \tilde{C}_{32} & \tilde{C}_{35} \\ \tilde{C}_{31} & \tilde{C}_{34} & \tilde{C}_{36} \end{bmatrix}$$

## D.2 Calcul de $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}$

Comme cela a été évoqué, un des principaux intérêts de la formulation présentée section 3.3 est la possibilité de résoudre de façon simple et directe l'équation de contrainte associée à chaque élément. C'est-à-dire que la détermination des variables internes  $\alpha$  se fait simplement, par résolution d'un système linéaire d'équations. La matrice  $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}$  obtenue sera inversée analytiquement à l'aide d'un logiciel de calcul formel. Son expression est donnée par :

$$\mathbf{K}_{\alpha\alpha} = \int_{\square} \tilde{\mathbf{G}}^T \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{G}} \bar{j}_0 d\square \quad (\text{D.8})$$

Après calculs et grâce aux équations 3.85 et 3.104, on peut montrer que  $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}$  pour l'élément à 9 variables internes (dimensions  $9 \times 9$ ) prend la forme :

$$\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{\text{E9}} = \frac{8}{3} \bar{j}_0 \begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} & 0 & 0 & \tilde{C}_{14} & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{16} & 0 \\ 0 & \tilde{C}_{22} & 0 & 0 & \tilde{C}_{24} & \tilde{C}_{25} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{C}_{33} & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{35} & 0 & \tilde{C}_{36} \\ \tilde{C}_{41} & 0 & 0 & \tilde{C}_{44} & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{46} & 0 \\ 0 & \tilde{C}_{42} & 0 & 0 & \tilde{C}_{44} & \tilde{C}_{45} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{C}_{52} & 0 & 0 & \tilde{C}_{54} & \tilde{C}_{55} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{C}_{53} & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{55} & 0 & \tilde{C}_{56} \\ \tilde{C}_{61} & 0 & 0 & \tilde{C}_{64} & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{66} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{C}_{63} & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{65} & 0 & \tilde{C}_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{D.9})$$

La matrice effectivement utilisée sera son inverse  $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{-1}$ . Pour l'élément à 21 variables internes, la matrice de dimensions  $21 \times 21$  peut être écrite sous la forme suivante :

$$\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{\text{E21}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{\text{E9}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{\text{E21*}} \end{bmatrix} \quad (\text{D.10})$$

avec  $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{\text{E21*}}$  :

$$\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{\text{E21*}} = \frac{8}{9} \bar{j}_0 \begin{bmatrix} \tilde{C}_{44} & 0 & 0 & \tilde{C}_{45} & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{41} & 0 & 0 & \tilde{C}_{43} & 0 \\ 0 & \tilde{C}_{44} & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{46} & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{42} & 0 & \tilde{C}_{43} \\ 0 & 0 & \tilde{C}_{55} & 0 & \tilde{C}_{56} & 0 & \tilde{C}_{51} & 0 & \tilde{C}_{52} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{54} & 0 & 0 & \tilde{C}_{55} & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{51} & 0 & 0 & \tilde{C}_{53} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{C}_{65} & 0 & \tilde{C}_{66} & 0 & \tilde{C}_{61} & 0 & \tilde{C}_{62} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{C}_{64} & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{66} & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{62} & 0 & \tilde{C}_{63} \\ 0 & 0 & \tilde{C}_{15} & 0 & \tilde{C}_{16} & 0 & \tilde{C}_{11} & 0 & \tilde{C}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{14} & 0 & 0 & \tilde{C}_{15} & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{11} & 0 & 0 & \tilde{C}_{13} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{C}_{25} & 0 & \tilde{C}_{26} & 0 & \tilde{C}_{21} & 0 & \tilde{C}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{C}_{24} & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{26} & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{22} & 0 & \tilde{C}_{23} \\ \tilde{C}_{34} & 0 & 0 & \tilde{C}_{35} & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{31} & 0 & 0 & \tilde{C}_{33} & 0 \\ 0 & \tilde{C}_{34} & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{36} & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{32} & 0 & \tilde{C}_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{D.11})$$





## Annexe E

# Élément *Optimal Incompressible* (OI) en grande transformation et déplacement total

Comme évoqué dans la section 3.1.3.2, il est possible de modifier le champ de déplacement d'un élément surfacique afin de, sous certaines conditions d'orientation des mèches et de forme de l'élément, supprimer tout verrouillage en tension. Et ceci sans rentrer dans les formulations *enhanced strain* mais en restant sur une formulation *assumed strain*, bien plus simple à mettre en œuvre. L'inconvénient de la formulation présentée dans la section sus-citée est qu'elle n'est utilisable qu'en petites déformations, ou pour des lois en taux (hypoélastiques). Pour l'étendre aux grandes transformations, on se base sur le développement effectué avec la formulation tirée de Puso sans la partie *enhanced* du champ de déformation (section 3.3). On part du même développement jusqu'à obtenir le tenseur de Cauchy-Green droit, d'après l'équation 3.84 :

$$\mathbf{C} = \bar{\mathbf{C}} + 2 \left[ \bar{\mathbf{J}}_0^{-1} \right] (\tilde{\mathbf{B}}_{stab}(\boldsymbol{\xi}) \bar{\mathbf{u}}) \quad (\text{E.1})$$

En deux dimensions, la matrice d'interpolation des petites déformations isoparamétriques 3.82 devient :

$$\tilde{\mathbf{B}}_{stab}^{2D}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \eta\gamma & 0 \\ 0 & \xi\gamma \\ \xi\gamma & \eta\gamma \end{bmatrix} \quad (\text{E.2})$$

On utilise alors le résultat trouvé précédemment section 3.1.3.2 de manière à définir un champ de déplacement qui supprimerait le verrouillage en tension. La matrice de stabilisation de l'élément devient alors :

$$\tilde{\mathbf{B}}_{stab}^{OI}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \eta\gamma & -\xi\gamma \\ -\eta\gamma & \xi\gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.3})$$

La formulation obtenue permet de supprimer le verrouillage en tension. Les déformations selon  $\pm 45^\circ$  de l'élément étaient nulles pour des combinaisons de déformation hourglass, dans la section 3.1.3.2. Ici, par contre, ce sont les déformations à  $\pm 45^\circ$  dans le repère isoparamétrique qui deviennent nulles et étendent le champ d'action de l'élément. C'est-à-dire que les déformations selon les directions qui, après passage du domaine physique au domaine isoparamétrique, sont orientées à  $\pm 45^\circ$  sont nulles. Cet élément permet de supprimer le verrouillage en tension pour tous les éléments dont les mèches relient les angles opposés du quadrilatère physique.

On va démontrer que les déformations associées aux modes hourglass dans la direction des mèches sont nulles lorsque les mèches sont orientées à  $\pm 45^\circ$  dans le domaine isoparamétrique et que  $e_1 = -e_2$  (voir équation 3.37). Cela revient à démontrer que ce sont les déformations de stabilisations qui sont nulle pour ces conditions, c'est à dire le deuxième terme de l'équation E.1. Soit :

$$\mathbf{\epsilon}^{stab} = [\bar{\mathbf{J}}_0^{-1}] (\tilde{\mathbf{B}}_{stab}(\boldsymbol{\xi}) \tilde{\mathbf{u}}) \quad (\text{E.4})$$

En réutilisant l'équation 3.33 :

$$\mathbf{u}_x = \alpha_{3x} \mathbf{h} \quad (\text{E.5})$$

$$\mathbf{u}_y = \alpha_{3y} \mathbf{h} \quad (\text{E.6})$$

Les déformations dans le domaine isoparamétrique s'écrivent alors, en supposant  $e_3 = 0$  :

$$\tilde{\mathbf{\epsilon}}_{stab} = \begin{Bmatrix} e_1 \eta \alpha_{3x} + e_2 \xi \alpha_{3y} \\ e_2 \eta \alpha_{3y} + e_1 \xi \alpha_{3x} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{E.7})$$

tel que :

$$\mathbf{\epsilon}^{stab} = [\bar{\mathbf{J}}_0^{-1}] \tilde{\mathbf{\epsilon}}_{stab} \quad (\text{E.8})$$

La matrice de changement de repère utilisée avec les notations 3.80 en 3D est reformulée en 2D :

$$[\bar{\mathbf{J}}_0^{-1}] = \begin{bmatrix} j_{11}^2 & j_{21}^2 & j_{11} j_{21} \\ j_{12}^2 & j_{22}^2 & j_{12} j_{22} \\ 2j_{11} j_{12} & 2j_{21} j_{22} & j_{11} j_{22} + j_{21} j_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{E.9})$$

Créée grâce à la matrice de la base contravariante initiale :

$$\bar{\mathbf{J}}_0^{-1} = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{E.10})$$

Et associée à la matrice de la base covariante initiale :

$$\bar{\mathbf{J}}_0 = \frac{1}{j_{11}j_{22} - j_{12}j_{21}} \begin{bmatrix} j_{22} & -j_{12} \\ -j_{21} & j_{11} \end{bmatrix} \quad (\text{E.11})$$

Comme on cherche à utiliser des directions de mèches à  $\pm 45^\circ$  dans le domaine isoparamétrique, la direction du vecteur covariant à la mèche dans cette base est :

$$\tilde{h}_m = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ pour le cas } +45^\circ \quad (\text{E.12})$$

$$\tilde{h}_m = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \text{ pour le cas } -45^\circ \quad (\text{E.13})$$

Soit dans le repère matériel pour  $+45^\circ$  :

$$h_m = \bar{\mathbf{J}}_0 \cdot \tilde{h}_m = \frac{1}{j_{11}j_{22} - j_{12}j_{21}} \begin{Bmatrix} j_{22} - j_{12} \\ -j_{21} + j_{11} \end{Bmatrix} \quad (\text{E.14})$$

Afin de se placer dans repère associé à la direction de la mèche  $\theta$  dans le repère physique initial, nous avons besoin de  $\cos(\theta)$  et de  $\sin(\theta)$ . Pour ceci, des produits vectoriels peuvent être réalisés avec des vecteurs choisis de manière adéquate. Pour simplifier cette phase, on suppose que  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . Soit  $(\vec{x}, \vec{y})$  la base orthonormée du repère physique, alors pour les valeurs de  $\theta$  désirées :

$$\cos(\theta) = \frac{h_m \cdot \vec{x}}{\|h_m\| \|\vec{x}\|} \quad (\text{E.15})$$

$$= \frac{j_{22} - j_{12}}{\sqrt{j_{11}^2 - 2j_{11}j_{21} + j_{12}^2 - 2j_{12}j_{22} + j_{21}^2 + j_{22}^2}} \quad (\text{E.16})$$

$$\sin(\theta) = \frac{h_m \cdot \vec{y}}{\|h_m\| \|\vec{y}\|} \quad (\text{E.17})$$

$$= \frac{j_{11} - j_{21}}{\sqrt{j_{11}^2 - 2j_{11}j_{21} + j_{12}^2 - 2j_{12}j_{22} + j_{21}^2 + j_{22}^2}} \quad (\text{E.18})$$

On peut alors exprimer la déformation de stabilisation dans le repère matériel dans la direction de la mèche, quand la direction orientée à  $+45^\circ$  dans le repère isoparamétrique est choisie :

$$\boldsymbol{\epsilon}_m^{stab} = (e_1 + e_2) \frac{(j_{11}j_{22} - j_{12}j_{21})^2 (\alpha_{3x}\boldsymbol{\eta} + \alpha_{3y}\boldsymbol{\xi})}{j_{11}^2 - 2j_{11}j_{21} + j_{12}^2 - 2j_{12}j_{22} + j_{21}^2 + j_{22}^2} \quad (\text{E.19})$$

Comme cela avait été supposé précédemment, l'utilisation du champ de déformation *assumed* avec  $e_1 = -e_2$  et  $e_3 = 0$  permet de supprimer les déformations dans la direction de la mèche dans le repère matériel pour les modes hourglass. En utilisant la même méthode

avec des mèches à  $-45^\circ$  dans le repère isoparamétrique, le résultat précédent est aussi obtenu. Cette méthode est alors efficace pour supprimer le verrouillage en tension dans les cas simples surfacique, où les mèches sont orientées suivant les diagonales du quadrilatère utilisé, et notamment dans le cas du bias extension test.

## Annexe F

# Formulation des plaques *rotation free* triangulaires S3

### F.1 Expressions de la courbure des mèches

L'élément fini triangulaire S3 décrit ici est principalement basé sur Sabourin et Brunet [SAB 06]. Il est composé de trois nœuds (1, 2 et 3 figure F.1) disposant d'un degré de liberté en déplacement normal au plan du triangle  $w_i$ . Une rotation est associée à chaque côté, définie par  $\partial w/\partial n_1$ ,  $\partial w/\partial n_2$  et  $\partial w/\partial n_3$ . Les longueurs des côtés sont désignées par  $L_1, L_2$  et  $L_3$  tandis que les mesures des hauteurs sont nommées  $h_1, h_2$  et  $h_3$ .

Le développement commence par la décomposition du déplacement normal  $w$  en deux parties : une partie linéaire associée à la rotation de corps rigide  $w^r$  et une partie quadratique associée au changement de courbure  $w^b$ .

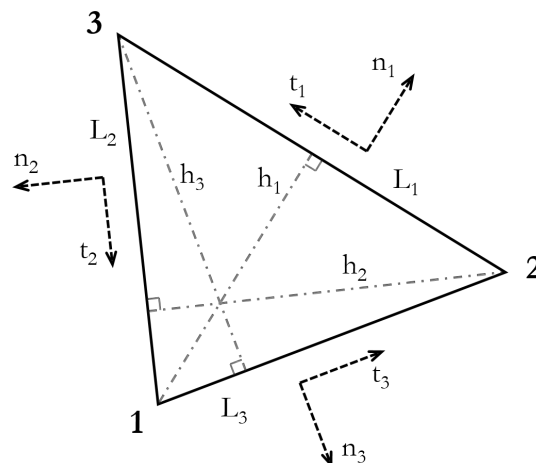


Figure F.1 – Caractéristiques du S3

La courbure s'écrit dans un repère local au plan formé par le triangle :

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ 2\chi_{xy} \end{Bmatrix} = - \left[ \frac{\partial^2 w^b}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w^b}{\partial y^2}, 2 \frac{\partial^2 w^b}{\partial x \partial y} \right]^T \quad (\text{F.1})$$

où  $\chi_x$  et  $\chi_y$  sont les courbures associées aux directions locales  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  du repère local de calcul, situé ici sur les plans grisés de la figure 5.14, et  $\chi_{xy}$  la courbure de torsion. Une des hypothèses fondamentales est que la courbure est constante dans l'élément. Elle peut alors être réécrite :

$$\boldsymbol{\chi} = \frac{1}{A_e} \int_{A_e} \left[ -\frac{\partial^2 w^b}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 w^b}{\partial y^2}, -2 \frac{\partial^2 w^b}{\partial x \partial y} \right]^T dA \quad (\text{F.2})$$

où  $A_e$  est l'aire de l'élément. En intégrant par partie F.2 et en exploitant les formules de Green-Ostrogradski ([ONA 05]), le champ de courbure constant suivant apparait :

$$\boldsymbol{\chi} = \frac{1}{A_e} \oint_{\Gamma_e} \begin{bmatrix} -n_x & 0 \\ 0 & -n_y \\ -n_y & -n_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w^b}{\partial x} \\ \frac{\partial w^b}{\partial y} \end{Bmatrix} d\Gamma \quad (\text{F.3})$$

où  $\Gamma_e$  désigne la frontière de l'élément et  $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$  la normale sortante au côté exprimée dans le repère local. Cette équation permet d'exprimer le champ de courbure constant de l'élément en fonction simplement du gradient du déplacement normal le long des côtés du triangle. Elle peut être reformulée en fonction de la numérotation des côtés :

$$\boldsymbol{\chi} = \frac{1}{A_e} \sum_{i=1}^3 L_i \begin{bmatrix} -n_{ix} & 0 \\ 0 & -n_{iy} \\ -n_{iy} & -n_{ix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w^b}{\partial x} \\ \frac{\partial w^b}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{F.4})$$

où les  $n_{ix}$  et  $n_{iy}$  désignent les composantes dans la base locale des normales sortantes  $\mathbf{n}_i$ . En utilisant les hauteurs  $h_i$  :

$$\boldsymbol{\chi} = \sum_{i=1}^3 \frac{2}{h_i} \begin{bmatrix} -n_{ix} & 0 \\ 0 & -n_{iy} \\ -n_{iy} & -n_{ix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w^b}{\partial x} \\ \frac{\partial w^b}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{F.5})$$

On relie maintenant le gradient du déplacement transverse dans le repère local au gradient du déplacement transverse dans la direction de chaque normale sortante  $\partial w / \partial n_i$ , car directement lié à l'angle de flexion  $\theta^b$ . Pour cela on effectue une rotation vers les repères  $(n_i, t_i)$  :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial w^b}{\partial x} \\ \frac{\partial w^b}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -n_{ix} & n_{iy} \\ -n_{iy} & -n_{ix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w^b}{\partial n_i} \\ \frac{\partial w^b}{\partial t_i} \end{Bmatrix} \quad (\text{F.6})$$

Les éléments à courbure constantes sont issus de l'élément fini de Morley [MOR 71] à degrés de liberté en rotation au milieu des côtés faisant l'hypothèse que le gradient du déplacement transverse est nul dans la direction tangente au côté. Par conséquent :

$$\boldsymbol{\chi} = - \sum_{i=1}^3 \frac{2}{h_i} \begin{Bmatrix} n_{ix}^2 \\ n_{iy}^2 \\ 2n_{ix}n_{iy} \end{Bmatrix} \frac{\partial w^b}{\partial n_i} \quad (\text{F.7})$$

Étant dans un milieu fibreux, on utilisera seulement des courbures portées par la direction principales des mèches  $M_1$  et  $M_2$ . On utilisera le moment  $M_{f11}$  (et  $M_{f12}$ ) associé à la courbure  $\chi_1$  (et  $\chi_2$ ) calculée dans la direction  $M_1$  (et  $M_2$ ).  $\boldsymbol{\chi}$  est remplacé par :

$$\boldsymbol{\chi}_f = \begin{Bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{F.8})$$

où les courbures sont données par :

$$\chi_1 = (\bar{M}_1 \cdot \mathbf{e}_x)^2 \chi_{xx} + (\bar{M}_1 \cdot \mathbf{e}_y)^2 \chi_{yy} + 2(\bar{M}_1 \cdot \mathbf{e}_x)(\bar{M}_1 \cdot \mathbf{e}_y) \chi_{xy} \quad (\text{F.9})$$

$$\chi_2 = (\bar{M}_2 \cdot \mathbf{e}_x)^2 \chi_{xx} + (\bar{M}_2 \cdot \mathbf{e}_y)^2 \chi_{yy} + 2(\bar{M}_2 \cdot \mathbf{e}_x)(\bar{M}_2 \cdot \mathbf{e}_y) \chi_{xy} \quad (\text{F.10})$$

où  $\bar{M}_j$  est la projection de la direction  $M_j$  sur le plan du triangle. Si la loi de comportement est bien définie  $\bar{M}_j$  est identique à  $M_j$ . De là, en considérant les directions de mèche  $M_1$  et  $M_2$ , la courbure dans une de ses deux directions se réécrit :

$$\chi_j = - \sum_{i=1}^3 \frac{2}{h_i} (\bar{M}_j \cdot \mathbf{n}_i)^2 \frac{\partial w^b}{\partial n_i} \quad (\text{F.11})$$

En considérant que le gradient des déplacements transverse est lié à l'angle de flexion associé à un côté du triangle :

$$\theta_i^b = - \frac{\partial w^b}{\partial n_i} \quad (\text{F.12})$$

on peut écrire :

$$\chi_j = \sum_{i=1}^3 \frac{2}{h_i} (\bar{M}_j \cdot \mathbf{n}_i)^2 \theta_i^b \quad (\text{F.13})$$

Comme évoqué précédemment, le triangle de Morley d'où est issu ce début de développement utilise des degrés de liberté en rotation. L'objectif ici est de se passer de ces degrés de liberté.

## F.2 Calcul des rotations de corps rigide

L'idée principale est de tirer l'équivalent des degrés de liberté en rotation par des considérations géométriques. Pour ce faire, un groupe d'éléments est considéré ; c'est-à-dire un élément entouré de trois autres éléments, chacun ayant un côté en commun avec l'élément central (figure F.2).

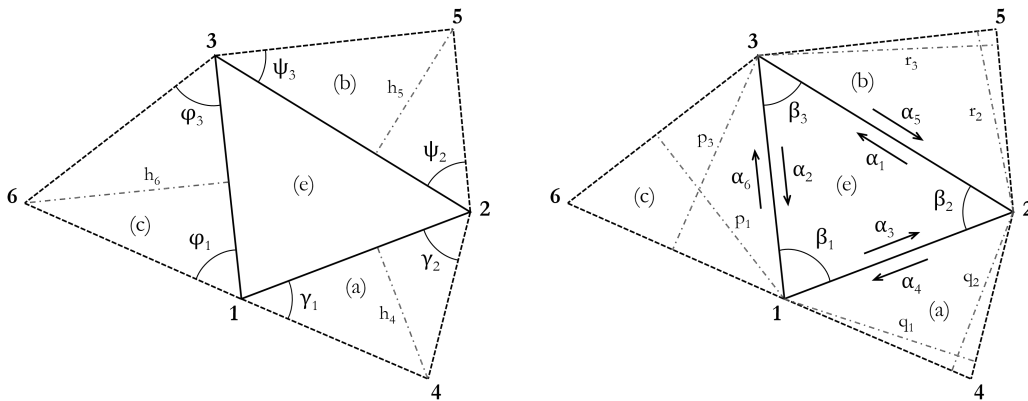


Figure F.2 – Élément S3 étudié (e) entouré de trois voisins

Dans un premier temps, on veut accéder aux rotations de corps rigide  $\alpha_i$  de chaque côté du triangle. Deux méthodes sont possibles. La première consiste à utiliser directement les fonctions de forme classiques  $N_j$ . Les rotations de corps rigides  $\alpha_i$  peuvent alors être calculées, si l'on considère l'élément (e) uniquement, telles que :

$$\alpha_i = -\frac{\partial w^r}{\partial n_i} = -\sum_{j=1}^3 \frac{\partial N_j}{\partial n_i} w_j \quad (\text{F.14})$$

soit pour l'élément (e) entier :

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial n_1} w_1^e + \frac{\partial N_2}{\partial n_1} w_2^e + \frac{\partial N_3}{\partial n_1} w_3^e \\ \frac{\partial N_1}{\partial n_2} w_1^e + \frac{\partial N_2}{\partial n_2} w_2^e + \frac{\partial N_3}{\partial n_2} w_3^e \\ \frac{\partial N_1}{\partial n_3} w_1^e + \frac{\partial N_2}{\partial n_3} w_2^e + \frac{\partial N_3}{\partial n_3} w_3^e \end{Bmatrix} \quad (\text{F.15})$$

et en utilisant la même technique pour les éléments voisins, si existants :



$$\begin{cases} \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\partial N_1}{\partial n_4} w_2^a + \frac{\partial N_2}{\partial n_4} w_1^a + \frac{\partial N_3}{\partial n_4} w_4^a \\ \frac{\partial N_1}{\partial n_5} w_3^b + \frac{\partial N_2}{\partial n_5} w_2^b + \frac{\partial N_3}{\partial n_5} w_5^b \\ \frac{\partial N_1}{\partial n_6} w_1^c + \frac{\partial N_2}{\partial n_6} w_3^c + \frac{\partial N_3}{\partial n_6} w_6^c \end{cases} \quad (\text{F.16})$$

où  $w_i^j$  est le déplacement normal au plan formé par le triangle ( $j$ ) du nœud  $i$ . Une deuxième méthode plus efficace numériquement a été proposée par Sabourin [SAB 06] et repris par Hamila [HAM 09]. Cette relation purement cinématique peut être trouvée en réalisant un équilibre des moments le long d'un côté où en considérant la rotation de corps rigide totale puis en la projetant selon la tangente de chaque côté. La relation suivante est alors satisfaite dans chaque triangle :

$$\alpha_i = \frac{w_i}{h_i} - \frac{w_j}{h_j} \cos \beta_k - \frac{w_k}{h_k} \cos \beta_j \quad (\text{F.17})$$

Soit pour l'élément (e) :

$$\begin{cases} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{cases} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} & -\frac{\cos \beta_3}{h_2} & -\frac{\cos \beta_2}{h_3} \\ -\frac{\cos \beta_3}{h_1} & \frac{1}{h_2} & -\frac{\cos \beta_1}{h_3} \\ -\frac{\cos \beta_2}{h_1} & -\frac{\cos \beta_1}{h_2} & \frac{1}{h_3} \end{pmatrix} \begin{cases} w_1^e \\ w_2^e \\ w_3^e \end{cases} \quad (\text{F.18})$$

Pour le côté 3 collé à l'élément (a) :

$$\alpha_4 = -\frac{\cos \gamma_2}{q_1} w_1^a - \frac{\cos \gamma_1}{q_2} w_2^a + \frac{1}{h_4} w_4^a \quad (\text{F.19})$$

Pour le côté 1 collé à l'élément (b) :

$$\alpha_5 = -\frac{\cos \psi_3}{r_2} w_2^b - \frac{\cos \psi_2}{r_3} w_3^a + \frac{1}{h_5} w_5^a \quad (\text{F.20})$$

Pour le côté 2 collé à l'élément (c) :

$$\alpha_6 = -\frac{\cos \phi_3}{p_1} w_1^c - \frac{\cos \phi_1}{p_3} w_3^c + \frac{1}{h_6} w_6^c \quad (\text{F.21})$$

Il est alors possible de réécrire sous forme matricielle le lien entre les déplacements de tous les nœuds du patch  $\mathbf{u}^p$  et le vecteur des 6 rotations de corps rigide  $\boldsymbol{\alpha}$  :

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{C} \mathbf{u}^p \quad (\text{F.22})$$

où le vecteur des déplacements nodaux du patch  $\mathbf{u}^p$  est donné par :

$$\mathbf{u}^p = [\mathbf{u}_1^p \quad \mathbf{u}_2^p \quad \mathbf{u}_3^p \quad \mathbf{u}_4^p \quad \mathbf{u}_5^p \quad \mathbf{u}_6^p]^T \quad (\text{F.23})$$

et  $\mathbf{u}_i^p$  désigne les déplacements nodaux exprimés dans la base globale du calcul :

$$\mathbf{u}_i^p = [u_x^i \quad u_y^i \quad u_z^i] \quad (\text{F.24})$$

La matrice  $\mathbf{C}$  peut alors être écrite :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_1} \mathbf{n}_e^T & -\frac{\cos \beta_3}{h_2} \mathbf{n}_e^T & -\frac{\cos \beta_2}{h_3} \mathbf{n}_e^T & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\cos \beta_3}{h_1} \mathbf{n}_e^T & \frac{1}{h_2} \mathbf{n}_e^T & -\frac{\cos \beta_1}{h_3} \mathbf{n}_e^T & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\cos \beta_2}{h_1} \mathbf{n}_e^T & -\frac{\cos \beta_1}{h_2} \mathbf{n}_e^T & \frac{1}{h_3} \mathbf{n}_e^T & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\cos \gamma_2}{q_1} \mathbf{n}_a^T & -\frac{\cos \gamma_1}{q_2} \mathbf{n}_a^T & 0 & \frac{1}{h_4} \mathbf{n}_a^T & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\cos \psi_3}{r_2} \mathbf{n}_b^T & -\frac{\cos \psi_2}{r_3} \mathbf{n}_b^T & 0 & \frac{1}{h_5} \mathbf{n}_b^T & 0 \\ -\frac{\cos \phi_3}{p_1} \mathbf{n}_c^T & 0 & -\frac{\cos \phi_1}{p_3} \mathbf{n}_c^T & 0 & 0 & \frac{1}{h_6} \mathbf{n}_c^T \end{bmatrix} \quad (\text{F.25})$$

où les  $\mathbf{n}_j$  sont les normales au triangle noté  $j$ . La matrice  $\mathbf{C}$  a été définie dans le cas où l'élément central du groupe comporte un autre élément S3 sur chacun de ses côtés. Dans le cas où aucun élément n'est présent ou pour des conditions limites de symétrie, les éléments de la matrice ne peuvent être calculés de la même manière et des modifications doivent être apportées.

Par exemple, si l'élément (b) n'existe pas et que le côté (1) est libre, la rotation totale du côté doit être nulle : la somme des rotations de corps rigide  $\alpha_1$  et  $\alpha_5$  doit s'annuler. En supposant l'existence d'un nœud 5 virtuel, les déplacements transverses dans le plan de l'élément (e) des nœuds 1 et 5 doivent être opposés :  $w_1^e = -w_5^e$  et le rang 5 de  $\mathbf{C}$  devient :

$$\mathbf{C}(5, :) = \left[ -\frac{1}{h_1} \mathbf{n}_e \quad \frac{\cos \beta_3}{h_2} \mathbf{n}_e \quad \frac{\cos \beta_2}{h_3} \mathbf{n}_e \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right] \quad (\text{F.26})$$

De la même manière pour le côté (1), une condition d'encastrement est imposée par le fait que le déplacement virtuel du nœud 5 dans le plan de l'élément (e) doit être identique au déplacement du nœud 1 :  $w_1^e = w_5^e$  tel que  $\alpha_1 = \alpha_5$  et le rang 5 de  $\mathbf{C}$  devient :

$$\mathbf{C}(5, :) = \left[ \frac{1}{h_1} \mathbf{n}_e \quad -\frac{\cos \beta_3}{h_2} \mathbf{n}_e \quad -\frac{\cos \beta_2}{h_3} \mathbf{n}_e \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right] \quad (\text{F.27})$$

### F.3 Calcul des angles de flexion

L'objectif suivant est d'obtenir les angles de flexion  $\theta_1^b$ ,  $\theta_2^b$  et  $\theta_3^b$  à partir des 6 rotations de corps rigide  $\alpha$  précédemment calculées. Afin de tenir compte des différences de taille, d'épaisseur et de matériau entre les éléments voisins, il est possible d'écrire l'équilibre à leur interface. Par exemple, pour un élément présent sur le côté (1) (voir figure F.3) et sachant que :

$$\theta_1^b = \theta_1 - \alpha_1 \quad (\text{F.28})$$

$$\theta_2^b = \theta_2 - \alpha_2 \quad (\text{F.29})$$

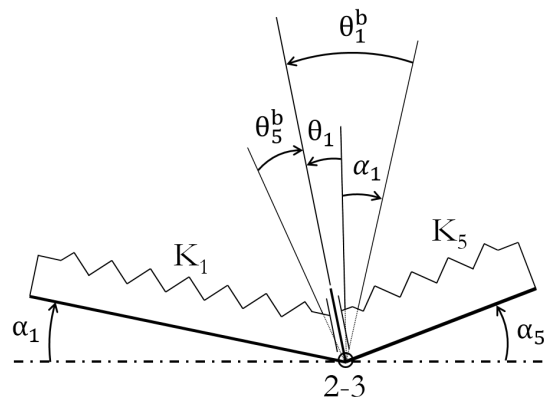
$$\theta_3^b = \theta_3 - \alpha_3 \quad (\text{F.30})$$

L'équilibre impose :

$$-K_1\theta_1^b = -K_5\theta_5^b \quad (\text{F.31})$$

soit :

$$\theta_1^b = -(\alpha_1 + \alpha_5) \frac{K_5}{K_1 + K_5} \quad (\text{F.32})$$



**Figure F.3** – Liens entre rotations de corps rigide et angle de flexion

Cette dernière équation suppose qu'il faut déterminer le ratio entre les deux rigidités  $K_1$  et  $K_5$ . Ces rigidités sont dépendantes de la géométrie de l'élément et de la loi de comportement utilisée (voir [SAB 06]). Il est raisonnable de simplifier cette relation en supposant que les épaisseurs et la rigidité matérielle tangente varient peu entre deux éléments accolés. Cela devient de plus en plus vrai à mesure que la finesse de la discrétisation réalisée augmente. Dans ces hypothèses, les angles de flexion s'expriment :

$$\theta_1^b = -\frac{h_1}{h_1 + h_5} (\alpha_1 + \alpha_5) \quad (\text{F.33})$$

$$\theta_2^b = -\frac{h_2}{h_2 + h_6} (\alpha_2 + \alpha_6) \quad (\text{F.34})$$

$$\theta_3^b = -\frac{h_3}{h_3 + h_4} (\alpha_3 + \alpha_4) \quad (\text{F.35})$$

Il est alors possible d'écrire sous forme matricielle le lien entre rotations de corps rigide et angles de flexion :

$$\boldsymbol{\theta}^b = \mathbf{H}\boldsymbol{\alpha} \quad (\text{F.36})$$

où  $\mathbf{H}$  est donné par :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -\frac{h_1}{h_1 + h_5} & 0 & 0 & 0 & -\frac{h_1}{h_1 + h_5} & 0 \\ 0 & -\frac{h_2}{h_2 + h_6} & 0 & 0 & 0 & -\frac{h_2}{h_2 + h_6} \\ 0 & 0 & -\frac{h_3}{h_3 + h_4} & -\frac{h_3}{h_3 + h_4} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{F.37})$$

Il reste maintenant à relier les angles de flexion à la courbure dans la direction des mèches en utilisant l'équation F.11 :

$$\boldsymbol{\chi}_f = \mathbf{R}\boldsymbol{\theta}^b \quad (\text{F.38})$$

où  $\mathbf{R}$  est donné par :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{2}{h_1} (\bar{\mathbf{M}}_1 \cdot \mathbf{n}_1)^2 & \frac{2}{h_2} (\bar{\mathbf{M}}_1 \cdot \mathbf{n}_2)^2 & \frac{2}{h_3} (\bar{\mathbf{M}}_1 \cdot \mathbf{n}_3)^2 \\ \frac{2}{h_1} (\bar{\mathbf{M}}_2 \cdot \mathbf{n}_1)^2 & \frac{2}{h_2} (\bar{\mathbf{M}}_2 \cdot \mathbf{n}_2)^2 & \frac{2}{h_3} (\bar{\mathbf{M}}_2 \cdot \mathbf{n}_3)^2 \end{bmatrix} \quad (\text{F.39})$$

Les courbures recherchées  $\boldsymbol{\chi}_f$  dans les directions principales de mèches  $\mathbf{M}_1$  et  $\mathbf{M}_2$  peuvent dès lors être exprimées en fonction des déplacements des nœuds  $\mathbf{u}^p$  du patch de triangles figure F.2 et des matrices F.25, F.37 et F.39 définies précédemment :

$$\boldsymbol{\chi}_f = \mathbf{RHC}\mathbf{u}^p \quad (\text{F.40})$$

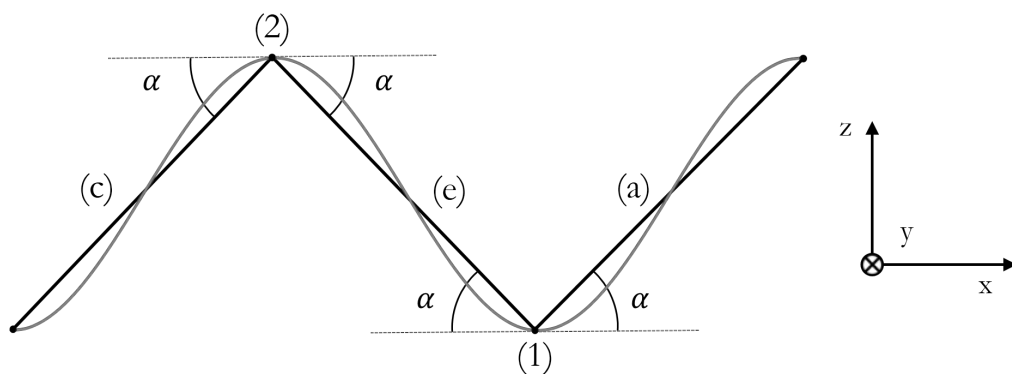
## Annexe G

# Modes à énergie nulle des plaques *rotation free* quadrangulaires S4

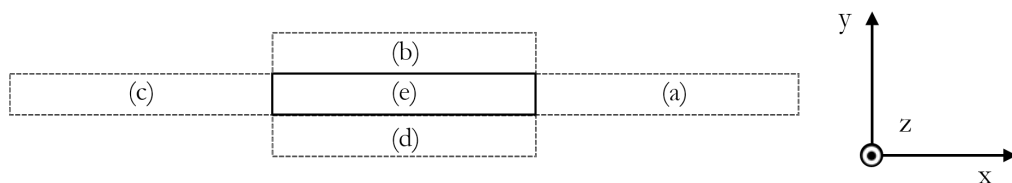
L'implémentation d'éléments S4 paraît, a priori, plus adéquate au problème de calcul de courbure à résoudre décrit section 5.2.1. Des éléments quadrilatéraux à degrés de liberté en déplacement et courbure constante ont été proposés par Brunet et Sabourin [BRU 06] puis étendus aux formulations en déplacement total [FLO 07]. A quelques différences près, ses formulations sont basées sur la même technique que celle développée pour l'élément S3 annexe F :

- Prise en considération d'un patch d'éléments quadrangulaires, c'est-à-dire le quadrangle dans lequel on désire calculer la courbure ainsi que les éventuels quadrangles voisins ;
- Calcul des rotations de corps rigide autour de chaque côté en utilisant les fonctions d'interpolation classiques (équation F.14) ;
- Comme le quadrilatère peut subir des modes de déformation en gauchissement, des rigidités de flexion supplémentaires doivent être prise en compte pour éviter d'obtenir une matrice des raideurs singulière. Pour cela, des rotations de corps rigide autour des deux diagonales de l'élément sont aussi considérées et calculées en utilisant l'équation F.17 ;
- Calcul des angles de flexion grâce aux rotations de corps rigide ;
- Calcul des courbures avec les angles de flexion puis obtention du moment de flexion linéaire ;
- Interpolation des forces internes aux nœuds esclaves puis aux nœuds maîtres.

Bien que directement implantables sur chaque couche d'intégration de l'élément volumique, ses éléments sont problématiques car l'intégration réduite utilisée grâce à la supposition que la courbure est constante dans l'élément fait apparaître des modes de déplacement à énergie nulle [FLO 07]. Il existe une configuration géométrique avec une variation alternée de la courbure telle que la courbure dans chaque élément soit nulle, illustrée figure G.1. Cette configuration ressemble à un motif sinusoïdal avec une période de deux fois la taille d'un élément (voir figure G.1a).



(a) Vue latérale du patch de S4. Courbure réelle en gris.



(b) Vue de dessus du patch de S4.

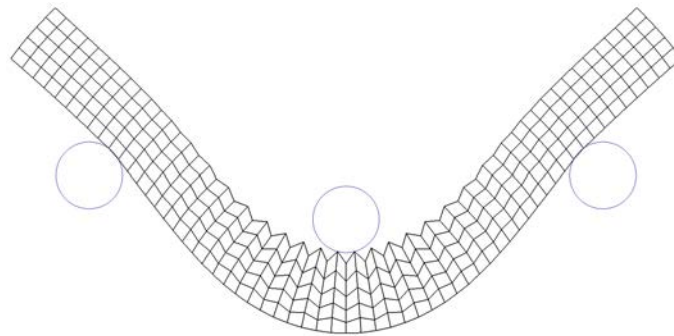
**Figure G.1** – Patch d'éléments S4 subissant une cinématique de flexion avec un motif sinusoïdal

---

Le fait que la rotation de corps rigide soit identique aux quatre angles indiqués implique que les rotations de flexion associées aux côtés (1) et (2) possèdent une norme identique et un signe opposé, tel que :

$$\theta_1^b = -\theta_2^b \quad (\text{G.1})$$

Par conséquent la courbure projetée dans la direction  $\mathbf{x}$  est nulle dans notre cas car  $\theta_1^b + \theta_2^b = 0$ . L'absence de courbure peut aussi être remarquée par des considérations géométriques. Figure G.1a, la courbure moyenne de l'élément central semble être nulle car négative sur une première moitié puis positive sur l'autre. L'absence de courbure calculée ne fait pas intervenir la rigidité de flexion dans le calcul des forces internes globales. Ce comportement problématique du S4 peut être corrigé par l'utilisation d'un paramètre de stabilisation (voir [FLO 07]). Cependant notre loi de comportement facilite déjà l'apparition de pics identiques, comme vu dans l'emboutissage hémisphérique figure 5.11a. Par conséquent ce type d'élément, même stabilisé, semble inapproprié à l'utilisation recherchée. La simplicité d'utilisation et les performances du S3 lui seront préférées. Pour illustration, la figure G.2 montre l'apparition de vagues liées aux modes de déplacement à énergie nulle pour une simulation de flexion trois points d'une flèche de 40mm.



**Figure G.2** – Simulation de flexion trois points avec éléments S4 virtuels et flèche de 40mm





## Annexe H

# Composantes tensorielles des rigidités matérielles tangentes de la loi hyperélastique isotrope transverse

Cette annexe détaille les composantes tensorielles des rigidités matérielles tangentes de la loi hyperélastique isotrope telle que définie section 6.4. Pour rappel, les densités d'énergie de déformation en élongation en en cisaillement transverse sont dépendantes de l'invariant de cisaillement plan :

$$\hat{w}_{elongi} = \frac{\partial^2 \hat{w}_{cp}}{\partial I_{cp} \partial I_{cp}} I_{elongi}^2 \quad (\text{H.1})$$

$$\hat{w}_{cti} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{w}_{cp}}{\partial I_{cp} \partial I_{cp}} I_{cti}^2 \quad (\text{H.2})$$

Seules ces deux contributions contiennent une dépendance supplémentaire et diffèrent de ce qui est décrit annexe C. Les composantes de ces deux contributions dans le tenseur des rigidités tangentes sont décrites dans les paragraphes suivants.

### H.1 Composantes dues à la contribution en élongation de la matrice tangente

Les composantes du tenseur des contraintes dues à la contribution en élongation sont :

$$\begin{aligned}
 \hat{S}_{elongi} &= 2 \frac{\partial \hat{w}_{elongi}}{\partial I_{elongi}} \frac{\partial I_{elongi}}{\partial \mathbf{C}} + 2 \frac{\partial \hat{w}_{elongi}}{\partial I_{cp}} \frac{\partial I_{cp}}{\partial \mathbf{C}} \\
 &= \frac{2}{I_{4i}} M_{ii} \frac{\partial^2 \hat{w}_{cp}}{\partial I_{cp} \partial I_{cp}} I_{elongi} \\
 &\quad + \left[ \frac{1}{\sqrt{I_{41} I_{42}}} (M_1 \otimes M_2 + M_2 \otimes M_1) - \frac{I_{cp}}{I_{41}} M_{11} - \frac{I_{cp}}{I_{42}} M_{22} \right] \frac{\partial^3 \hat{w}_{cp}}{\partial I_{cp}^3} I_{elongi}^2
 \end{aligned} \tag{H.3}$$

Le calcul de la rigidité tangente matérielle associée donne :

$$\begin{aligned}
 \hat{c}_{elongi}^{SE} &= 4 \frac{\partial \hat{S}_{elongi}}{\partial \mathbf{C}} \\
 &= 4 \left[ \frac{\partial^2 \hat{w}_{elongi}}{\partial I_{elongi}^2} \frac{\partial I_{elongi}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial^2 \hat{w}_{elongi}}{\partial I_{elongi} \partial I_{cp}} \frac{\partial I_{cp}}{\partial \mathbf{C}} \right] \otimes \frac{\partial I_{elongi}}{\partial \mathbf{C}} + 4 \frac{\partial \hat{w}_{elongi}}{\partial I_{elongi}} \frac{\partial^2 I_{elongi}}{\partial \mathbf{C}^2} \\
 &\quad + 4 \left[ \frac{\partial^2 \hat{w}_{elongi}}{\partial I_{cp}^2} \frac{\partial I_{cp}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial^2 \hat{w}_{elongi}}{\partial I_{elongi} \partial I_{cp}} \frac{\partial I_{elongi}}{\partial \mathbf{C}} \right] \otimes \frac{\partial I_{cp}}{\partial \mathbf{C}} + 4 \frac{\partial \hat{w}_{elongi}}{\partial I_{cp}} \frac{\partial^2 I_{cp}}{\partial \mathbf{C}^2}
 \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 \hat{c}_{elongi}^{SE} &= 8 \frac{\partial^2 \hat{w}_{cp}}{\partial I_{cp} \partial I_{cp}} \frac{\partial I_{elongi}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{elongi}}{\partial \mathbf{C}} \\
 &\quad + 8 \frac{\partial^3 \hat{w}_{cp}}{\partial I_{cp}^3} I_{elongi} \left[ \frac{\partial I_{elongi}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{cp}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial I_{cp}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{elongi}}{\partial \mathbf{C}} \right] \\
 &\quad + 4 \frac{\partial^4 \hat{w}_{cp}}{\partial I_{cp}^4} I_{elongi}^2 \frac{\partial I_{cp}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{cp}}{\partial \mathbf{C}} \\
 &\quad + 8 \frac{\partial^2 \hat{w}_{cp}}{\partial I_{cp} \partial I_{cp}} I_{elongi} \frac{\partial^2 I_{elongi}}{\partial \mathbf{C}^2} \\
 &\quad + 4 \frac{\partial^3 \hat{w}_{cp}}{\partial I_{cp}^3} I_{elongi}^2 \frac{\partial^2 I_{cp}}{\partial \mathbf{C}^2}
 \end{aligned} \tag{H.4}$$

Les principales composantes de l'équation H.4 sont données dans le calcul des tenseurs tangents de la loi hyperélastique orthotrope pour renfort annexe C, exceptées :

$$\frac{\partial I_{elongi}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{cp}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{4I_{4i}\sqrt{I_{41}I_{42}}} (M_{ii12} + M_{ii21}) - \frac{I_{cp}}{4I_{4i}I_{41}} M_{ii11} - \frac{I_{cp}}{4I_{4i}I_{42}} M_{ii22} \tag{H.5}$$

et :

$$\frac{\partial I_{cp}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{elongi}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{4I_{4i}\sqrt{I_{41}I_{42}}} (M_{12ii} + M_{21ii}) - \frac{I_{cp}}{4I_{4i}I_{41}} M_{11ii} - \frac{I_{cp}}{4I_{4i}I_{42}} M_{22ii} \tag{H.6}$$

## H.2 Composantes dues à la contribution en cisaillement transverse de la matrice tangente

Les composantes du tenseur des contraintes dues à la contribution en cisaillement transverse sont :

$$\begin{aligned}\hat{S}_{cti} &= 2 \frac{\partial \hat{w}_{cti}}{\partial I_{cti}} \frac{\partial I_{cti}}{\partial \mathbf{C}} + 2 \frac{\partial \hat{w}_{cti}}{\partial I_{cp}} \frac{\partial I_{cp}}{\partial \mathbf{C}} \\ &= \left[ \frac{1}{\sqrt{I_{4i} I_{43}}} (\mathbf{M}_i \otimes \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_3 \otimes \mathbf{M}_i) - \frac{I_{cti}}{I_{4i}} \mathbf{M}_{ii} - \frac{I_{cti}}{I_{43}} \mathbf{M}_{33} \right] \frac{\partial^2 \hat{w}_{cp}}{\partial I_{cp} \partial I_{cp}} I_{cti} \quad (\text{H.7}) \\ &\quad + \left[ \frac{1}{\sqrt{I_{41} I_{42}}} (\mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_2 \otimes \mathbf{M}_1) - \frac{I_{cp}}{I_{41}} \mathbf{M}_{11} - \frac{I_{cp}}{I_{42}} \mathbf{M}_{22} \right] \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \hat{w}_{cp}}{\partial I_{cp}^3} I_{cti}^2\end{aligned}$$

Le calcul de la rigidité tangente matérielle associée donne :

$$\begin{aligned}\hat{C}_{cti}^{SE} &= 4 \frac{\partial \hat{S}_{cti}}{\partial \mathbf{C}} \\ &= 4 \left[ \frac{\partial^2 \hat{w}_{cti}}{\partial I_{cti}^2} \frac{\partial I_{cti}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial^2 \hat{w}_{cti}}{\partial I_{cti} \partial I_{cp}} \frac{\partial I_{cp}}{\partial \mathbf{C}} \right] \otimes \frac{\partial I_{cti}}{\partial \mathbf{C}} + 4 \frac{\partial \hat{w}_{cti}}{\partial I_{cti}} \frac{\partial^2 I_{cti}}{\partial \mathbf{C}^2} \\ &\quad + 4 \left[ \frac{\partial^2 \hat{w}_{cti}}{\partial I_{cp}^2} \frac{\partial I_{cp}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial^2 \hat{w}_{cti}}{\partial I_{cti} \partial I_{cp}} \frac{\partial I_{cti}}{\partial \mathbf{C}} \right] \otimes \frac{\partial I_{cp}}{\partial \mathbf{C}} + 4 \frac{\partial \hat{w}_{cti}}{\partial I_{cp}} \frac{\partial^2 I_{cp}}{\partial \mathbf{C}^2}\end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned}\hat{C}_{cti}^{SE} &= 4 \frac{\partial^2 \hat{w}_{cp}}{\partial I_{cp} \partial I_{cp}} \frac{\partial I_{cti}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{cti}}{\partial \mathbf{C}} \\ &\quad + 4 \frac{\partial^3 \hat{w}_{cp}}{\partial I_{cp}^3} I_{cti} \left[ \frac{\partial I_{cti}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{cp}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial I_{cp}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{cti}}{\partial \mathbf{C}} \right] \\ &\quad + 4 \frac{\partial^4 \hat{w}_{cp}}{\partial I_{cp}^4} I_{cti}^2 \frac{\partial I_{cp}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{cp}}{\partial \mathbf{C}} \quad (\text{H.8}) \\ &\quad + 4 \frac{\partial^2 \hat{w}_{cp}}{\partial I_{cp} \partial I_{cp}} I_{cti} \frac{\partial^2 I_{cti}}{\partial \mathbf{C}^2} \\ &\quad + 4 \frac{\partial^3 \hat{w}_{cp}}{\partial I_{cp}^3} I_{cti}^2 \frac{\partial^2 I_{cp}}{\partial \mathbf{C}^2}\end{aligned}$$

Les principales composantes de l'équation H.8 sont données dans le calcul des tenseurs tangents de la loi hyperélastique orthotrope pour renfort annexe C, exceptée :

$$\frac{\partial I_{cij}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_{ckl}}{\partial \mathbf{C}} \quad (\text{H.9})$$

qui donne :

$$\frac{1}{4\sqrt{I_{4i}I_{4j}I_{4k}I_{4l}}} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}_{ijkl} + \mathbf{M}_{ijji} + \mathbf{M}_{klkl} + \mathbf{M}_{klij} \\ -I_{cij}\sqrt{\frac{I_{4j}}{I_{4i}}}(\mathbf{M}_{iikl} + \mathbf{M}_{iilk}) - I_{cij}\sqrt{\frac{I_{4i}}{I_{4j}}}(\mathbf{M}_{jjkl} + \mathbf{M}_{jjlk}) \\ -I_{ckl}\sqrt{\frac{I_{4k}}{I_{4l}}}(\mathbf{M}_{llij} + \mathbf{M}_{llji}) - I_{ckl}\sqrt{\frac{I_{4l}}{I_{4k}}}(\mathbf{M}_{kkij} + \mathbf{M}_{kkji}) \\ +I_{cij}I_{ckl} [I_{4j}I_{4l}\mathbf{M}_{iikk} + I_{4j}I_{4k}\mathbf{M}_{iill} + I_{4i}I_{4l}\mathbf{M}_{jjkk} + I_{4i}I_{4k}\mathbf{M}_{jjll}] \end{array} \right\}$$

# Bibliographie

- [AND 93] Andelfinger U., Ramm E.  
EAS-elements for two-dimensional, three-dimensional, plate and shell structures and their equivalence to HR-elements. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 36, 1993, p. 1311-1337.
- [ARE 03] Areias P. M. A., de Sá J. M. A. C., António C. A. C., Fernandes A. A.  
Analysis of 3D problems using a new enhanced strain hexahedral element. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 58, 2003, p. 1637-1682.
- [ARU 95] Arunakirinathar K., Reddy B.  
Some geometrical results and estimates for quadrilateral finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 122, 1995, p. 307-314.
- [AST 14] ASTM C1557 :14  
Standard Test Method for Tensile Strength and Young's Modulus of Fibers. ASTM International, West Conshohocken, PA, 2014.
- [BAD 07] Badel P., Vidal-Sallé E., Boisse P.  
Computational determination of in-plane shear mechanical behaviour of textile composite reinforcements. *Computational Materials Science*, vol. 40, n° 4, 2007, p. 439-448.
- [BAD 08a] Badel P.  
Analyse mésoscopique du comportement mécanique des renforts tissés de composites utilisant la tomographie aux rayons X. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2008.
- [BAD 08b] Badel P., Vidal-Salle E., Maire E., Boisse P.  
Simulation and tomography analysis of textile composite reinforcement deformation at the mesoscopic scale. *Composites Science and Technology*, vol. 68, n° 12, 2008, p. 2433-2440.
- [BAD 08c] Badel P., Vidal-Sallé E., Boisse P.  
Large deformation analysis of fibrous materials using rate constitutive equations. *Computers & Structures*, vol. 86, 2008, p. 1164-1175.
- [BAL 77] Ball J. M.  
Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, vol. 63, 1977, p. 337-403.

- [BAR 92] Bardonnnet P.  
Résines époxydes (EP) . Composants et propriétés. *Techniques de l'Ingénieur*, vol. A3465, 1992.
- [BAR 00] Baruchel J., Buffiere J., Maire E., Merle P., Peix G.  
*X-Ray Tomography in Material Science*. Hermes Science, 2000.
- [BAS 00] Basar Y., Weichert D.  
*Nonlinear Continuum Mechanics of Solids*. Springer, 2000.
- [BEE 83] Beetz C., Budd G.  
Strain modulation measurements of stiffening effects in carbon fibers. *Review of Scientific Instruments*, vol. 54, 1983, p. 1222-1226.
- [BEL 84] Belytschko T., Ong J. S.-J., Liu W. K., Kennedy J. M.  
Hourglass control in linear and nonlinear problems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 43, 1984, p. 251-276.
- [BEL 86] Belytschko T., Bachrach W. E.  
Efficient implementation of quadrilaterals with high coarse-mesh accuracy. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 54, 1986, p. 279-301.
- [BEL 90a] Beland S.  
5 - Processing of Advanced Thermoplastic Composites. Beland S., Ed., *High Performance Thermoplastic Resins and their Composites*, p. 96 - 124 William Andrew Publishing, Oxford, 1990.
- [BEL 90b] Belytschko T., Bindeman L. P.  
Assumed strain stabilization of the 4-node quadrilateral with 1-point quadrature for nonlinear problems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 88, 1990, p. 311-340.
- [BEL 93] Belytschko T., Bindeman L. P.  
Assumed strain stabilization of the eight node hexahedral element. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 105, 1993, p. 225-260.
- [BEL 00] Belytschko T., Liu W. K., Moran B.  
*Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. Wiley, 2000.
- [BER 99] Berthelot J.  
*Matériaux composites - Comportement mécanique et analyse des structures*. 1999.
- [BER 08] Berthereau A., Dallies E.  
Fibres de verre de renforcement. *Techniques de l'Ingénieur*, vol. AM5132, 2008.
- [BIC 97] Bickerton S., Simacek P., Guglielmi S. E., Advani S. G.  
Investigation of draping and its effects on the mold filling process during manufacturing of a compound curved composite part. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, vol. 28, n° 9-10, 1997, p. 801-816.
- [BIG 05] Bigaud D., Dreano L., Hamelin P.  
Models of interactions between process and microstructure and mechanical properties of composite materials-a study of the interlock layer-to-layer braiding technique. *Composite Structures*, vol. 67, n° 1, 2005, p. 99-114.

- [BIL 08] de Bilbao E., Soulat D., Hivet G., Launay J., Gasser A.  
Bending test of composite reinforcements. *International Journal of Material Forming*, vol. 1, n° 4, 2008, p. 835-838.
- [BIL 10] de Bilbao E., Soulat D., Hivet G., Gasser A.  
Experimental study of bending behaviour of reinforcements. *Experimental Mechanics*, vol. 50, 2010, p. 333-351.
- [BOI 95] Boisse P., Cherouat A., Gelin J. C., Sabhi H.  
Experimental study and finite element simulation of a glass fiber fabric shaping process. *Polymer Composites*, vol. 16, n° 1, 1995, p. 83-95.
- [BOI 01] Boisse P., Buet K., Gasser A., Launay J.  
Meso/macro-mechanical behaviour of textile reinforcements for thin composites. *Composites Science and Technology*, vol. 61, 2001, p. 395-401.
- [BOI 04] Boisse P.  
Mise en forme des renforts fibreux de composites. *Techniques de l'Ingénieur*, vol. AM3734, 2004.
- [BOI 05] Boisse P., Zaouari B., Gasser A.  
A mesoscopic approach for the simulation of woven fibre composite forming. *Composites Science and Technology*, vol. 65, n° 3-4, 2005, p. 429-436.
- [BOI 07] Boisse P.  
*Composite forming technologies*, Chapitre Finite element analysis of composite forming, p. 46-79. Woodhead Publishing, 2007.
- [BOI 11] Boisse P., Hamila N., Vidal-Sallé E., Dumont F.  
Simulation of wrinkling during textile composite reinforcement forming. Influence of tensile, in-plane shear and bending stiffnesses. *Composites Science and Technology*, vol. 71, n° 5, 2011, p. 683 - 692.
- [BON 95] Bonet J., Bhargava P.  
A uniform deformation gradient hexahedron element with artificial hourglass control. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 38, 1995, p. 2809-2828.
- [BON 08] Bonnet J., Wood R. D.  
*Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. Cambridge University Press, 2008.
- [BOR 02] Borouchaki H., Cherouat A.  
Une nouvelle approche géométrique pour le drapage des structures composites. *Revue des composites et des matériaux avancés*, vol. 12, 2002, p. 407-421.
- [BOR 03] Borouchaki H., Cherouat A.  
Drapage géométrique des composites. *Comptes Rendus Mécanique*, vol. 331, 2003, p. 437-442.
- [BOU 91] Bouillon E., Langlais F., Pailler R., Naslain R., Cruege F., Huong P.  
Conversion mechanisms of a polycarbosilane precursor into an SiC-based ceramic material. *J. Mater. Sci.*, vol. 26, 1991, p. 1333-1345.

- [BOU 04] Bouillon E., Ojard G., Ouyang Z., Zawada L., Habarou G., Louchet C., Feindel D., Spriet P., Logan C., Arnold T., TRogers K., Stetson D.  
Post Engine Test Characterization and Flight Test Experience of Self Sealing Ceramic Matrix Composites for Nozzle Seals in Gas Turbine Engines. *Proceedings of turbine technical conference and exposition*, 2004.
- [BOU 07] Boubaker B. B., Haussy B., Ganghoffer J. F.  
Discrete models of woven structures. Macroscopic approach. *Composites Part B : Engineering*, vol. 38, 2007, p. 498-505.
- [BRÉ 03] Bréard J., Henzel Y., Trochu F., Gauvin R.  
Analysis of dynamic flows through porous media. Part I : Comparison between saturated and unsaturated flows in fibrous reinforcements. *Polymer Composites*, vol. 24, 2003, p. 391-408.
- [BRU 93] Brunet M., Sabourin F.  
Explicit dynamic analysis with a simplified three-node triangular element. *Proceedings of the International Conference Metal Forming Process Simulation in Industry*, 1993.
- [BRU 95] Brunet M., Sabourin F.  
A simplified triangular shell element with a necking criterion for 3-D sheet-forming analysis. *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 50, 1995, p. 238-251.
- [BRU 06] Brunet M., Sabourin F.  
Analysis of a rotation-free 4-node shell element. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 66, 2006, p. 1483-1510.
- [BUE 98] Buet-Gautier K.  
Analyse et simulation du comportement mécanique des renforts composites tissés. Thèse de doctorat, Université d'Orléans, 1998.
- [BUE 01] Buet-Gautier K., Boisse P.  
Experimental analysis and modeling of biaxial mechanical behavior of woven composite reinforcements. *Experimental Mechanics*, vol. 41, n° 3, 2001, p. 260-269.
- [CAO 02] Cao Y. P., Hu N., Lu J., Fukunaga H., Yao Z. H.  
A 3D brick element based on Hu-Washizu variational principle for mesh distortion. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 53, 2002, p. 2529-2548.
- [CAO 08] Cao J., Akkerman R., Boisse P., Chen J., Cheng H., de Graaf E., Gorczyca J., Harrison P., Hivet G., Launay J., Lee W., Liu L., Lomov S., Long A., de Luycker E., Morestin F., Padvoiskis J., Peng X., Sherwood J., Stoilova T., Tao X., Verpoest I., Willems A., Wiggers J., Yu T., Zhu B.  
Characterization of mechanical behavior of woven fabrics : Experimental methods and benchmark results. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, vol. 39, n° 6, 2008, p. 1037-1053.
- [CHA 11a] Charmetant A., Vidal-Sallé E. E., Boisse P.  
Hyperelastic modelling for mesoscopic analyses of composite reinforcements. *Composites Science and Technology*, vol. 71, n° 14, 2011, p. 1623-1631.



- [CHA 11b] Charmetant A.  
Approches hyperélastiques pour la modélisation du comportement mécanique de pré-formes tissées de composites. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2011.
- [CHA 12] Charmetant A., Orliac J., Vidal-Sallé E., Boisse P.  
Hyperelastic model for large deformation analyses of 3D interlock composite preforms. *Composites Science and Technology*, vol. 72, 2012, p. 1352-1360.
- [CHE 01] Cherouat A., Billoët J. L.  
Mechanical and numerical modelling of composite manufacturing processes deep-drawing and laying-up of thin pre-impregnated woven fabrics. *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 118, n° 1-3, 2001, p. 460-471.
- [CHR 05] Christin F. A.  
A Global Approach to Fiber nD Architectures and Self-Sealing Matrices : From Research to Production. *Int. J. Appl. Ceram. Technol.*, vol. 2, 2005, p. 97-104.
- [CIA 88] Ciarlet P.  
*Mathematical Elasticity, Volume 1 : Three dimensional elasticity*. Elsevier, 1988.
- [COO 75] Cook R. D.  
Avoidance of Parasitic Shear in Plane Element. *Journal of the Structural Division*, vol. 101, 1975, p. 1239-1253.
- [COS 09] Cosserat E., Cosserat F.  
*Théorie des corps déformables*. Hermann, Paris, 1909.
- [CRE 06] Creech G., Pickett A. K.  
Meso-modelling of Non-Crimp Fabric composites for coupled drape and failure analysis. *Journal of Materials Science*, vol. 41, n° 20, 2006, p. 6725-6736.
- [CRI 97] Cristfield M.  
*Non-Linear Finite Element Analysis Solids & Structure : Advanced Topics*. Wiley, 1997.
- [CUR 68] Curtis G., Milne J., Reynolds W.  
Non-Hookean behaviour of strong carbon fibres. *Nature*, vol. 220, 1968, p. 1024-1025.
- [DEL 02] Delhaes P.  
Chemical vapor deposition and infiltration processes of carbon materials. *Carbon*, vol. 40, 2002, p. 641-657.
- [DES 05] Desplentere F., Lomov S. V., Woerdeman D. L., Verpoest I., Wevers M., Bogdanovich A.  
Micro-CT characterization of variability in 3D textile architecture. *Composites Science and Technology*, vol. 65, n° 13, 2005, p. 1920-1930.
- [DRI 10] Dridi S.  
Essais de caractérisation des structure tissées. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2010.
- [DUM 03] Dumont F.  
Contribution à l'expérimentation et à la modélisation du comportement mécanique de renforts de composites tissés. Thèse de doctorat, Université Paris 6, 2003.

- [DUP 08] Dupupet G.  
Fibres de carbone. *Techniques de l'Ingénieur*, vol. AM5134, 2008.
- [DUR 10] Durville D.  
Simulation of the mechanical behaviour of woven fabrics at the scale of fibers. *International Journal of Material Forming*, vol. 3, n° S2, 2010, p. 1241-1251.
- [EHR 07] Ehret A. E., Itskov M.  
A polyconvex hyperelastic model for fiber-reinforced materials in application to soft tissues. *J. Mater. Sci.*, vol. 42, 2007, p. 8853-8863.
- [ELG 08] Elguedj T., Bazilevs Y., Calo V., Hughes T.  
B and F projection methods for nearly incompressible linear and non-linear elasticity and plasticity using higher-order NURBS elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, 2008, p. 33-40.
- [FER 14] Ferretti M., Madeo A., dell'Isola F., Boisse P.  
Modeling the onset of shear boundary layers in fibrous composite reinforcements by second-gradient theory. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, vol. 65, 2014, p. 587-612.
- [FLA 81] Flanagan D. P., Belytschko T.  
A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 17, 1981, p. 679-706.
- [FLO 69] Flory R. J.  
Thermodynamic relations for highly elastic materials. *Transactions of the Faraday Society*, vol. 57, 1969, p. 829-38.
- [FLO 07] Flores F., Estrada C.  
A rotation-free thin shell quadrilateral. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 196, 2007, p. 2631-2646.
- [FLO 13] Florimond C.  
Contribution à la modélisation mécanique du comportement de mèches de renforts tissés à l'aide d'un schéma éléments finis implicite. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2013.
- [GAS 00] Gasser A., Boisse P., Hanklar S.  
Mechanical behaviour of dry fabric reinforcements. 3D simulations versus biaxial tests. *Computational Materials Science*, vol. 17, n° 1, 2000, p. 7-20.
- [GAY 05] Gay D.  
*Matériaux composites*. Hermes Science, 2005.
- [GHO 07] Ghoreishi S., Cartaud P., Davies P., Messenger T.  
Analytical modeling of synthetic fiber ropes subjected to axial loads. Part I : A new continuum model for multilayered fibrous structures. *Int. J. Solids Struct.*, vol. 44, 2007, p. 2924-2942.
- [GOL 97] Golecki I.  
Rapid vapor-phase densification of refractory composites. *Materials Science and Engineering : R : Reports*, vol. 20, 1997, p. 37-124.

- [GRI 13] Gripon E.  
Endommagement et microfissuration d'un composite à matrice céramique tissé 3D : approche multi-échelle et évaluation ultrasonore. Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1, 2013.
- [GRU 04] Grujicic M., Chittajallu K., Walsh S.  
Effect of shear, compaction and nesting on permeability of the orthogonal plain-weave fabric preforms. *Mater. Chem. Phys.*, vol. 86, 2004, p. 358-369.
- [GU 02] Gu H., Zhili Z.  
Tensile behavior of 3D woven composites by using different fabric structures. *Materials & Design*, vol. 23, n° 7, 2002, p. 671-674.
- [HAG 04] Hagège B.  
Simulation du comportement mécanique des milieux fibreux en grandes transformations : application aux renforts tricotés. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2004.
- [HAM 07] Hamila N.  
Simulation de la mise en forme des renforts composites mono et multi plis. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2007.
- [HAM 08] Hamila N., Boisse P.  
Simulations of textile composite reinforcement draping using a new semi-discrete three node finite element. *Composites Part B : Engineering*, vol. 39, n° 6, 2008, p. 999-1010.
- [HAM 09] Hamila N., Boisse P., Sabourin F., Brunet M.  
A semi-discrete shell finite element for textile composite reinforcement forming simulation. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 79, 2009, p. 1443-1466.
- [HAM 13a] Hamila N., Boisse P.  
Tension locking in finite-element analyses of textile composite reinforcement deformation. *Comptes Rendus Mécanique*, vol. 341, 2013, p. 508-19.
- [HAM 13b] Hamila N., Boisse P.  
Locking in simulation of composite reinforcement deformations. Analysis and treatment. *Composites Part A*, vol. 53, 2013, p. 109-117.
- [HAR 04] Harrison P., Clifford M., Long A.  
Shear characterisation of viscous woven textile composites : a comparison between picture frame and bias extension experiments. *Compos. Sci. Technol.*, vol. 64, 2004, p. 1453-1465.
- [HAS 83] Hasegawa Y., Okamura K.  
Synthesis of continuous silicon carbide fibre. *J. Mater. Sci.*, vol. 18, 1983, p. 3633-3648.
- [HER 80] Herman G. T.  
*Image Reconstruction from Projections : The Fundamentals of Computerized Tomography*. Academic Press, New York, 1980.
- [HIV 05] Hivet G., Boisse P.  
Consistent 3D geometrical model of fabric elementary cell. Application to a meshing

- preprocessor for 3D finite element analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 42, n° 1, 2005, p. 25-49.
- [HSI 09] Hsieh J.  
*Computed tomography: principles, design, artifacts, and recent advances*. SPIE Press, 2009.
- [HUG 75] Hughes T., Taylor R., Sackman J.  
Finite element formulation and solution of contact-impact problems in continuum mechanics-III. rapport, 1975, SESM Report 75-3, Department of Civil Engineering, The University of California, Berkeley.
- [HUG 77a] Hughes T. J. R.  
Equivalence of Finite Elements for Nearly Incompressible Elasticity. *J. Appl. Mech.*, vol. 44, 1977, p. 181-183.
- [HUG 77b] Hughes T.  
Generalization of selective integration procedure to anisotropic and nonlinear media. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 15, 1977, p. 1413-18.
- [HUG 80] Hughes T. J. R.  
Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 15, 1980, p. 1413-18.
- [HUG 81] Hughes T. J. R., Tezduyar T. E.  
Finite Elements Based Upon Mindlin Plate Theory With Particular Reference to the Four-Node Bilinear Isoparametric Element. *J. Appl. Mech.*, vol. 48, 1981, p. 587-596.
- [HUG 83] Hughes T., Belytschko T.  
A Précis of Developments in Computational Methods for Transient Analysis. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 50, 1983, p. 1033-1041.
- [HUG 86] Hughes J.  
Strength and modulus of current carbon-fibers. *Carbon*, vol. 24, 1986, p. 551-556.
- [ISO 96] ISO 11566 :1996  
Carbon fibre - determination of the tensile properties of single-filament specimens. ISO, 1996.
- [ITS 04] Itskov M., Aksel N.  
A class of orthotropic and transversely isotropic hyperelastic constitutive models based on a polyconvex strain energy function. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 41, 2004, p. 3833-3848.
- [JIA 99] Jiang W., Yao M., Walton J.  
A concise finite element model for simple straight wire rope strand. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 41, 1999, p. 143-161.
- [JOH 95] Johnson A.  
Rheological model for the forming of fabric-reinforced thermoplastic sheets. *Compos. Manuf.*, vol. 6, 1995, p. 153-160.
- [KAN 13] Kant M., Penumadu D.  
Fracture behavior of individual carbon fibers in tension using nano-fabricated notches. *Composites Science and Technology*, vol. 89, 2013, p. 83-88.

- [KAS 00] Kasper E., Taylor R.  
A mixed-enhanced strain method : Part II : Geometrically nonlinear problems. *Computers & Structures*, vol. 75, 2000, p. 251-260.
- [KAW 73a] Kawabata S., Niwa M., Kawai H.  
The finite-deformation theory of plain-weave fabrics part I : the biaxial-deformation theory. *The Journal of The Textile Institute*, vol. 64, 1973, p. 21-46.
- [KAW 73b] Kawabata S., Niwa M., Kawai H.  
The finite-deformation theory of plain-weave fabrics. Part II : the uniaxial-deformation theory. *The Journal of The Textile Institute*, vol. 64, 1973, p. 47-61.
- [KAW 80] Kawabata S.  
*The Standardization and Analysis of Hand Evaluation*. Textile Machinery Society of Japan, 1980.
- [KHA 10] Khan M., Mabrouki T., Vidal-Sallé E., Boisse P.  
Numerical and experimental analyses of woven composite reinforcement forming using a hypoelastic behaviour-application to the double dome benchmark. *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 210, 2010, p. 378-388.
- [KHA 14] Khan A. H., Chaudhuri R. A.  
Fan-beam geometry based inversion algorithm in computed tomography (CT) for imaging of composite materials. *Composite Structures*, vol. 110, n° 0, 2014, p. 297 - 304.
- [KOH 87] Koh B. C., Kikuchi N.  
New improved hourglass control for bilinear and trilinear elements in anisotropic linear elasticity. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 65, 1987, p. 1-46.
- [KOR 95] Korelc J., Wriggers P.  
Efficient enhanced strain element formulation for 2D and 3D problems. *Avances in Finite Element Technology*, , 1995, p. 22-46.
- [LAM 97] Lamouroux F., Pailler R., Naslain R., Cataldi M.  
. « High temperature composite materials with carbon or carbon coated fiber reinforcement and enhanced oxidation resistance », 1997.
- [LAN 62] Langhaar H.  
*Energy Methods in Applied Mechanics*. John Wiley & Sons, New-York, 1962.
- [LAT 11] Latil P., Orgéas L., Geindreau C., Dumont P., du Roscoat S. R.  
Towards the 3D in situ characterisation of deformation micro-mechanisms within a compressed bundle of fibres. *Composites Science and Technology*, vol. 71, 2011, p. 480-488.
- [LEW 97] Lewis J. S., Lackey W. J., Vaidyaraman S.  
Model for prediction of matrix microstructure for carbon/carbon composites prepared by forced flow-thermal gradient CVI. *Carbon*, vol. 35, 1997, p. 103-112.
- [LIU 85a] Liu W. K., Belytschko T., Ong J. S.-J., Law S. E.  
Use of stabilization matrices in non-linear analysis. *Engineering Computations*, vol. 2, 1985, p. 47-55.

- [LIU 85b] Liu W. K., Ong J. S.-J., Uras R. A.  
Finite element stabilization matrices—a unification approach. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 53, 1985, p. 13-46.
- [LIV 64] Livesey R., Owen J.  
Cloth stiffness and hysteresis in bending. *Journal of the Textile Institute Transactions*, vol. 55, 1964, p. 516-530.
- [LOM 00] Lomov S. V., Gusakov A. V., Huysmans G., Prodromou A., Verpoest I.  
Textile geometry preprocessor for meso-mechanical models of woven composites. *Composites Science and Technology*, vol. 60, n° 11, 2000, p. 2083-2095.
- [LOM 06] Lomov S. V., Verpoest I.  
Model of shear of woven fabric and parametric description of shear resistance of glass woven reinforcements. *Composites Science and Technology*, vol. 66, n° 7-8, 2006, p. 919-933.
- [LUY 09a] de Luycker E., Morestin F., Boisse P., Marsal D.  
Simulation of 3D interlock composite preforming. *Composite Structures*, vol. 88, n° 4, 2009, p. 615 - 623.
- [LUY 09b] de Luycker E.  
Simulation et expérimentation en mise en forme de renforts composites 3D interlocks. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2009.
- [MAL 78] Malkus D. S., Hughes T. J. R.  
Mixed finite element methods - reduced and selective integration techniques : a unification of concepts. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 15, 1978, p. 63-81.
- [MAR 56] Mark C., Taylor H. M.  
The fitting of woven cloth to surfaces. *Journal of the Textile Institute*, vol. 47, 1956, p. 477-488.
- [MCG 97] McGuinness G., Braidaigh C. O.  
Development of rheological models for forming flows and picture-frame shear testing of fabric reinforced thermoplastic sheets. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, vol. 73, 1997, p. 1-28.
- [MIN 65] Mindlin R.  
Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. *Int. J. Solids Struct.*, vol. 1, 1965, p. 417-438.
- [MOR 71] Morley L.  
On the constant-moment plate-bending element. *Journal of Strain Analysis*, vol. 6, 1971, p. 10-14.
- [MÜL 94] Müller S., Qi T., Yan B. S.  
On a new class of elastic deformations not allowing for cavitation. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. 11, 1994, p. 217-243.
- [NAG 74] Nagtegaal J. C., Parks D. M., Rice J. R.  
International Journal for Numerical Methods in Engineering. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 4, 1974, p. 153-177.

- [NAO 14] Naouar N., Vidal-Salle E., Schneider J., Maire E., Boisse P.  
Meso-scale FE analyses of textile composite reinforcement deformation based on X-Ray computed tomography. *Composite Structures*, vol. 116, n° 0, 2014, p. 165 - 176.
- [NAW 00] Nawrocki A., Labrosse M.  
A finite element model for simple straight wire rope strands. *Computers and Structures*, vol. 77, 2000, p. 345-359.
- [NEW 59] Newmark N.  
A method of computation for structural dynamics. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, vol. 85, 1959, p. 67-94.
- [OLI 98] Olivier P., Cottu J.  
Optimisation of the co-curing of two different composites with the aim of minimising residual curing stress levels. *Compos. Sci. Technol.*, vol. 58, 1998, p. 645-651.
- [OLI 06] Olivier P.  
A note upon the development of residual curing strains in carbon/epoxy laminates. Study by thermomechanical analysis. *Composites : Part A*, vol. 37, 2006, p. 602-616.
- [ONA 93] Onate E., Cervera M.  
Derivation of thin plate bending element with one degree of freedom per node : a simple three node triangle. *Engineering Computations*, vol. 10, 1993, p. 543-561.
- [ONA 00] Onate E., Zarate F.  
Rotation-free triangular plate and shell elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 47, 2000, p. 557-603.
- [ONA 05] Onate E., Flores F.  
Advances in the formulation of the rotation-free basic shell triangle. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 194, 2005, p. 2406-43.
- [ORL 12] Orliac J.-G.  
Analyse et simulation du comportement anisotrope lors de la mise en forme de renforts tissés interlock. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2012.
- [PAR 00] Parnas R. S.  
*Liquid Composite Molding*. Hanser Gardner Publications, 2000.
- [PEI 30] Peirce F.  
The "handle" of cloth as a measurable quantity. *The Journal of the Textile Institute*, vol. 21, 1930, p. 377-416.
- [PEN 04] Peng X., Cao J., Chen J., Xue P., Lussier D., Liu L.  
Experimental and numerical analysis on normalization of picture frame tests for composite materials. *Composites Science and Technology*, vol. 64, n° 1, 2004, p. 11-21, Elsevier.
- [PEN 05] Peng X. Q., Cao J.  
A continuum mechanics-based non-orthogonal constitutive model for woven composite fabrics. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, vol. 36, n° 6, 2005, p. 859-874.

- [PIA 84] Pian T. H. H., Sumihara K.  
Rational approach for assumed stress finite elements. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 20, 1984, p. 1985-95.
- [POT 99] Potter K. D.  
The early history of the resin transfer moulding process for aerospace applications. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, vol. 30, n° 5, 1999, p. 619-621.
- [POT 02] Potter K.  
Bias extension measurements on cross-plyed unidirectional prepreg. *Composites Part A*, vol. 33, 2002, p. 63-73.
- [POT 08] Potluri P., Sagar T.  
Compaction modelling of textile preforms for composite structures. *Composite Structures*, vol. 86, 2008, p. 177-85.
- [PRO 97] Prodromou A. G., Chen J.  
On the relationship between shear angle and wrinkling of textile composite preforms. *Composites Part A*, vol. 28A, 1997, p. 491-503.
- [PUS 00] Puso M. A.  
A highly efficient enhanced assumed strain physically stabilized hexahedral element. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 49, 2000, p. 1029-1064.
- [QUA 94] Quanshui Z., Boehler J. P.  
Tensor function representations as applied to formulating constitutive laws for clino-tropic materials. *Acta Mech. Sin.*, vol. 10, 1994, p. 336-348.
- [REE 05] Reese S.  
On a physically stabilized one point finite element formulation for three-dimensional finite elasto-plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 194, 2005, p. 4685-4715.
- [RIC 83] Rice R. W.  
Ceramics from Polymer Pyrolysis, Opportunities and Needs - A Materials Perspective. *Am. Ceram. Soc. Bull.*, vol. 62, 1983, p. 889-892.
- [RIO 93] Rio G., Tathi H., Horkay H.  
Introducing bending rigidity in a finite element membrane sheet metal forming model. *Proceedings of the International Conference on Large Plastic Deformations, Fundamental aspects and Applications to Metal Forming*, 1993.
- [ROE 96] Roehl D., Ramm E.  
Large elasto-plastic finite element analysis of solids and shells with the enhanced assumed strain concept. *Int. J. Solids Struct.*, vol. 33, 1996, p. 3215-3237.
- [ROJ 98] Rojek J., Onate E.  
Sheet Springback Analysis Using a Simple Shell Triangle with Translational Degrees of Freedom Only. *Int. J. Forming Process*, vol. 1, 1998, p. 275-296.
- [RUD 97] Rudd C. D., Long A.  
*Liquid molding technologies*. Woodhead Publishing Limited, 1997.



- [SAB 06] Sabourin F., Brunet M.  
Detailed formulation of the rotation-free triangular element S3 for general purpose shell analysis. *Engineering Computations*, vol. 23, 2006, p. 469-502.
- [SCH 92] Schnur D. S., Zabarans N.  
An inverse method for determining elastic material properties and a material interface. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 33, 1992, p. 2039-2057.
- [SCH 03] Schröder J., Neff P.  
Invariant formulation of hyperelastic transverse isotropy based on polyconvex free energy functions. *Int. J. Solids Struct.*, vol. 40, 2003, p. 401-445.
- [SCH 07] Schulte-Fischedicka J., Seiza S., Lützenburgera N., Wannerb A., Voggenreiter H.  
The crack development on the micro- and mesoscopic scale during the pyrolysis of carbon fibre reinforced plastics to carbon/carbon composites. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, vol. 38, 2007, p. 2171-2181.
- [SHA 04] Sharma S. B., Sutcliffe M. P. F.  
A simplified finite element model for draping of woven material. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, vol. 35, 2004, p. 637-643.
- [SHE 07] Sherburn M.  
Geometric and mechanical modelling of textiles. Thèse de doctorat, Université de Nottingham, 2007.
- [SHI 96] Shioya M., an A. Takaku E. H.  
Non-Hookean stress-strain response and changes in crystallite orientation of carbon fibres. *Journal of materials science*, vol. 31, 1996, p. 4521-4532.
- [SID 82] Sidoroff F.  
. « Cours sur les grandes déformations », 1982.
- [SIM 85] Simo J., Taylor R., Pister K.  
Variational and projection methods for the volume constraint in finite deformation elasto-plasticity. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 51, 1985, p. 177-208.
- [SIM 90] Simo J. C., Rifai S. R. S.  
A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 29, 1990, p. 1595-1638.
- [SIM 91] Simo J., Taylor R.  
Quasi-incompressible finite elasticity in principal stretches. Continuum basis and numerical algorithm. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 85, 1991, p. 273-310.
- [SIM 92] Simo J. C., Armero F.  
Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 33, 1992, p. 1431-49.
- [SIM 93a] Simacek P., Kaliakin V. N., Pipes R. B.  
Pathologies associated with the numerical analysis of hyper-anisotropic materials. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 36, 1993, p. 3487-3508.

- [SIM 93b] Simo J. C., Armero F., Taylor R. L.  
Improved versions of assumed enhanced strain tri-linear elements for 3D finite deformation problems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 110, 1993, p. 359-386.
- [SOU 95] de Souza Neto E. A., Peric D., Huang G. C., Owen D. R. J.  
Remarks on the stability of enhanced strain elements in finite elasticity and elastoplasticity. *Commun. Numer. Methods Eng.*, vol. 11, 1995, p. 951-961.
- [SOU 96] de Souza Neto E., Peric D., Dutko M., Owen D.  
Design of simple low order finite elements for large strain analysis of nearly incompressible solids. *Int. J. Solids Struct.*, vol. 33, 1996, p. 20-22.
- [SOU 05] de Souza Neto E., Andrade Pires F., Owen D.  
F-bar-based linear triangles and tetrahedra for finite strain analysis of nearly incompressible solids. Part I : formulation and benchmarking. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 62, 2005, p. 353-83.
- [SPE 72] Spencer A.  
*Deformations of Fibre Reinforced Materials*. Oxford University Press, London, 1972.
- [SRE 06] Srebrateep K., Bohez E.  
Computer aided modeling of fiber assemblies. *Computer Aided Design & Applications*, vol. 3, 2006, p. 367-376.
- [STO 82] Stolarski H., Belytschko T.  
Membrane Locking and Reduced Integration for Curved Elements. *J. Appl. Mech.*, vol. 49, 1982, p. 172-176.
- [SZA 03] Szablewski P., Kobza W.  
Numerical Analysis of Peirce's Cantilever and Test for the Bending Rigidity of Textiles. *FIBRES & TEXTILES in Eastern Europe*, vol. 11, 2003, p. 54-57.
- [SZE 05] Sze K. Y., Liu X. H.  
A new skeletal model for fabric drapes. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, vol. 2, n° 3-4, 2005, p. 225-243.
- [TAR 01] Tarfaoui M., Akesbi S.  
A finite element model of mechanical properties of plain weave. *Colloids and Surfaces A : Physicochemical and Engineering Aspects*, vol. 187, 2001, p. 439-448.
- [THI 07] ten Thije R., Akkerman R., Huétink J.  
Large deformation simulation of anisotropic material using an updated Lagrangian finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 196, 2007, p. 3141-3150.
- [THI 08] ten Thije R., Akkerman R.  
Solutions to intra-ply shear locking in finite element analyses of fibre reinforced materials. *Composites Part A*, vol. 39, 2008, p. 1167-1176.
- [VAR 95] Varna J., Joffe R., Berglund L.  
Effect of voids on failure mechanisms in RTM laminates. *Composites Science and Technology*, vol. 53, 1995, p. 241-249.

- [VER 05] Verpoest I., Lomov S. V.  
Virtual textile composites software Wisetex : integration with micro-mechanical and permeability and structural analysis. *Composites Science and Technology*, vol. 65, n° 15-16, 2005, p. 2563-2574.
- [VEU 68] Veubeke B. D.  
The Second Variation Test with Algebraic and Differential Constraints. rapport, 1968, Liege Univ. (Belgium). Lab. de Techniques Aeronautiques Et Spatiales.
- [WAN 98] Wang J., Page J. R., Patod R.  
Experimental investigation of the draping properties of reinforced fabrics. *Compos. Sci. Technol.*, vol. 58, 1998, p. 229-231.
- [WAN 99] Wang J., Paton R., Page J. R.  
The draping of woven fabric preforms and prepregs for production of polymer composite components. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, vol. 30, n° 6, 1999, p. 757-765.
- [WAS 82] Washizu K.  
*Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. Pergamon Pr, 1982.
- [WEE 91] Ween F. V. D.  
Algorithms for draping fabrics on doubly-curved surfaces. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 31, 1991, p. 1415-1426.
- [WEI 91] Weissman S. L., Taylor R. L.  
Four-node axisymmetric element based upon the Hellinger-Reissner functional. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 85, 1991, p. 39-55.
- [WEN 13] Wendling A.  
Simulation à l'échelle mésoscopique de la mise en forme de renforts de composite tissés. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2013.
- [WIL 08] Willems A., Lomov S. V., Verpoest I., Vandepitte D.  
Optical strain fields in shear and tensile testing of textile reinforcements. *Composites Science and Technology*, vol. 68, n° 3-4, 2008, p. 807-819.
- [WRI 96] Wriggers P., Korelc J.  
On enhanced strain methods for small and finite deformation solids. *Computational Mechanics*, vol. 18, 1996, p. 413-28.
- [YU 06] Yu X., Cartwright B., McGuckin D., Ye L., Mai Y.-W.  
Intra-Ply shear locking in finite element analyses of woven fabric forming processes. *Composites Part A*, vol. 37, 2006, p. 790-803.
- [ZHA 13] Zhang Y., Sun F., Wang Y., Chen L., Pan N.  
Study on intra/inter-ply shear deformation of three dimensional woven preforms for composite materials. *Mater. Des.*, vol. 49, 2013, p. 151-159.
- [ZHO 04] Zhou G., Sun X., Wang Y.  
Multi-chain digital element analysis in textile mechanics. *Composites Science and Technology*, vol. 64, n° 2, 2004, p. 239-244.

- [ZHU 96] Zhu Y., Cescotto S.  
Unified and mixed formulation of the 8-node hexahedral elements by assumed strain method. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 129, 1996, p. 177-209.
- [ZIE 05] Zienkiewicz O., Taylor R., Zhu J.  
*The Finite Element Method : Its Basis and Fundamentals*. Butterworth-Heinemann, 6ème édition édition, 2005.



## FOLIO ADMINISTRATIF

# THÈSE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

NOM : MATHIEU

DATE de SOUTENANCE : 9 décembre 2014

Prénoms : Sylvain

TITRE : Modélisation du comportement mécanique lors du procédé de mise en forme et pyrolyse des interlocks CMC

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2014-ISAL-0115

École doctorale : MEGA

Spécialité : Mécanique - Génie Mécanique - Génie Civil

### RÉSUMÉ :

La simulation des procédés de production des composites à renforts tissés est un enjeu majeur pour les industries de pointe, où leur utilisation s'intensifie. La maîtrise des procédés d'obtention des composites à matrice et fibres en céramique, notamment les étapes de mise en forme et de pyrolyse, s'avère primordiale. La connaissance et la simulation du comportement mécanique aux différentes étapes est nécessaire pour optimiser les performances des pièces finales.

Deux approches de modélisation macroscopique des renforts tissés épais de composite sont détaillées : une approche continue classique et une approche semi-discrète. Pour cela, une loi de comportement hyperélastique initialement orthotrope est développée. Cette loi est basée sur l'observation phénoménologique des modes de déformation privilégiés, à partir desquels sont proposés des invariants physiques de la transformation. L'identification des paramètres matériaux nécessaires est décrite. Une version modifiée de cette loi, sans contribution en tension, est implémentée dans un élément semi-discrète, où le travail en tension est alors pris en compte par des barres discrétisant le tissage réel.

Les importantes différences de rigidités entre sollicitations en tension et en cisaillements font des renforts tissés épais des matériaux fortement anisotropes. Leur modélisation numérique met en évidence des phénomènes parasites ou des limitations liées à cette spécificité. Le phénomène de verrouillage en tension est tout d'abord mis en évidence. Une solution basée sur une formulation éléments finis *enhanced assumed strain* est proposée pour des éléments continus classiques ou semi-discrètes. Puis des problèmes liés aux simulations numériques dominées par la flexion sont soulevés : l'*hourglassing* transverse et l'absence de résistance locale à la courbure. Dans le cas de l'*hourglassing* transverse, deux méthodes de rigidification de ces modes de déplacement sont proposées : par moyennage des dilatations dans l'élément ou par ajout d'une rigidité matérielle tangente supplémentaire. Pour l'introduction d'une résistance à la courbure, une méthode basée sur l'utilisation purement numérique de plaques *rotation free* est proposée. Celles-ci permettent le calcul de la courbure induisant, par l'intermédiaire d'un moment de flexion, des efforts internes supplémentaires.

Finalement, la modélisation du retour élastique après pyrolyse de la matrice organique à précurseurs céramique est réalisée. Le comportement de la matrice pyrolysée est identifié expérimentalement à l'aide d'une loi hyperélastique isotrope transverse. L'addition de cette loi, qui prend comme référence la préforme déformée, à la loi de comportement initiale du renfort tissé permet de visualiser les déformations obtenues en fin de pyrolyse. Cette modélisation est comparée à des résultats expérimentaux.

**MOTS-CLÉS :** renforts tissés, composites, céramique, modélisation macroscopique, mise en forme, hyperélasticité, éléments finis, verrouillage, stabilisation, rigidité de flexion, pyrolyse

Laboratoire(s) de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Solides  
UMR CNRS 5514 - INSA de Lyon  
20, avenue Albert Einstein  
69621 Villeurbanne Cedex FRANCE

Directeur de thèse : Philippe BOISSE

Président du jury : Jean-Michel BERGHEAU

Composition du jury : Jean-Michel BERGHEAU  
Christophe BINETRUY  
Philippe BOISSE  
Florent BOUILLON

Franck DUPÉ  
Anthony GRAVOUIL  
Nahiène HAMILA  
Laurent ORGÉAS