

Approche énergétique variationnelle des problèmes thermomécaniques couplés

Laurent STAINIER

Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique (GeM, UMR 6183 CNRS),
Ecole Centrale de Nantes

Nous avons récemment proposé (JMPS 54, 401-424, 2006) une formulation énergétique variationnelle du problème aux conditions limites thermo-mécanique couplé, permettant d'écrire l'ensemble des équations d'équilibre mécanique et thermique sous la forme d'un problème d'optimisation d'une fonctionnelle scalaire. Cette formulation s'applique indifféremment à tous les modèles de comportement du matériau, potentiellement irréversible et dissipatif, pourvu que ces modèles s'inscrivent dans le cadre thermodynamique des Matériaux Standards Généralisés . L'écriture du problème sous forme variationnelle, telle que proposée, apporte plusieurs avantages. Outre son caractère unificateur d'une large gamme de types de comportement (i.e. de lois constitutives), la formulation variationnelle présente des propriétés mathématiques intéressantes. Parmi celle-ci, on peut relever la nature symétrique inhérente à toute formulation variationnelle, propriété qui échappait aux formulations thermo-mécaniques couplées plus classiques, précédemment proposées dans la littérature.

A partir de la formulation énergétique variationnelle du problème aux conditions limites continu (où les inconnues sont des champs), on peut facilement dériver un problème discret, plus adapté à la résolution numérique, via une approche aux éléments finis. On obtient alors une formulation éléments finis thermo-mécanique couplée, monolithique (résolution simultanée des déplacements et des variations de température). La formulation des éléments pour les conditions limites mixtes (p.e. convection) est directement dérivée du principe variationnel. La formulation présentée ici n'inclut pas les effets d'inertie mécanique, mais les effets transitoires thermiques sont bien pris en compte. Ils apparaissent cependant sous la forme d'une dépendance à la vitesse de chargement, et le problème global garde la forme d'un problème quasi-stationnaire. Il est à noter que, en accord avec la propriété de symétrie du problème de départ, la matrice tangente associée à la formulation éléments finis est symétrique, ce qui présente également un avantage algorithmique important.

Dans le cadre variationnel, la résolution du problème thermo-mécanique couplé, que ce soit sous sa forme continue ou sa forme discrète, est ramenée à la résolution d'un problème d'optimisation (un problème de point de selle -min/max- dans la version utilisée en pratique). On peut envisager d'effectuer cette optimisation par étapes, ce qui conduirait à une famille d'algorithmes étagés (par opposition à l'algorithme monolithique évoqué ci-dessus), mais cette voie ne sera pas détaillée ici. Il faut bien noter que dans tous les cas, le couplage thermo-mécanique reste fort.

Après avoir décrit la mise en œuvre de la formulation aux éléments finis résultant du principe variationnel, et plus particulièrement des éléments décrivant les conditions aux limites mixtes, l'approche proposée sera illustrée par des exemples de striction générée uniquement par des effets thermo-mécaniques (pas de défaut géométrique initial).